UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

ac

"PIEZOELETRICIDADE INDUZIDA
PELO FLUXO DE IONS"

WALTER KATSUMI SAKABOTO

Dissertação apresentada junto
ao Instituto de Física e Quí-
mica de São Carlos, para ob-
tenção do título de MESTRE EM
FÍSICA APLICADA.

ORIENTADOR

Prof. Dr. ROBERT LEE ZIMMERMAN

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

SÃO CARLOS, SP - BRASIL

1983

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____
WALTER KATSUMI SAKAMOTO

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22 DE fevereiro DE 1983.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. ROBERT LEE ZIMMERMAN - Orientador

Dr. MILTON SOARES DE CAMPOS

Dr. ERNESTO RAFAEL GONZALEZ

DEDICO

A Mércia,

Fabiana, minha filha,

meus avós

e

a meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Robert Lee Zimmerman, pela orientação precisa, pela amizade, ensinamentos e disponibilidade

Aos meus pais e irmãos, que nunca mediram esforços para que eu pudesse prosseguir os estudos

À minha querida esposa Mércia, pelo apoio, compreensão e valiosas discussões

Aos Profs. e funcionários do DFCM pelos ensinamentos, apoio e carinho que sempre recebi

Ao Renê de Oste pelo auxílio técnico, pelos / desenhos e por sua disposição

Aos colegas do laboratório LASER pelos comentários e discussões no transcorrer do trabalho, e pelo ambiente saudável

Aos amigos que desde a graduação se empenharam em dar o seu apoio e sua amizade

Meus sinceros agradecimentos

Esta pesquisa foi realizada com o apoio financeiro
da FAPESP, CNPq, e FINEP

ÍNDICE

Lista de Figuras	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Contribuições Originais	iv
Capítulo I - Introdução	01
Capítulo II - Noções Teóricas	04
2.1 - Efeito Piezoelétrico	04
2.2 - Deformação	07
2.3 - Efeito Induzido	08
Capítulo III - Procedimento Experimental	12
3.1 - Materiais	12
3.2 - Detector Síncrono	13
3.3 - Técnica de Medida	15
Capítulo IV - Resultados	22
Capítulo V - Discussões	28
Capítulo VI - Conclusões	37
Sugestões para Trabalhos Futuros	38
Apêndice I - Determinação da deformação dS	39
Apêndice II - Medida da deflexão ϵ	41
Bibliografia	43

LISTA DE FIGURAS

II-1 - Esquema de medida de um coeficiente piezoelétrico	04
II-2 - Relação dos efeitos elétricos de elasticidade e piezoeletricidade	05
II-3 - Deformação por tração	07
III-1 - a) Célula de Vidro	
b) Montagem do filme de celofane	12
III-2 - Eletrodos de platina na célula	13
III-3 - Diagrama de bloco do sistema de medida	15
III-4 - Geometria da membrana	17
III-5 - Curvatura do filme de celofane	18
III-6 - Mecanismo de variação do nível dos líquidos	19
III-7 - Esquema de medida simplificado	20
IV-1 - Sinal elétrico em função da deformação aplicada	22
IV-2 - Dependência temporal do sinal	23
IV-3 - Sinal em função da frequência do transdutor	24
IV-4 - Variação do sinal com a concentração	25
IV-5 - Sinal elétrico em função da curvatura	27
V-1 - Dependência temporal do sinal em circuito aberto	35
V-2 - Sinal elétrico em função da curvatura (circuito aberto)	36

RESUMO

Filmes amorfos que não apresentam piezoelectricidade intrínseca, podem ser induzidos a mostrar um efeito piezoelétrico linear quando um fluxo de íons é estabelecido através dele. O efeito está relacionado ao efeito piezoelétrico induzido pela corrente elétrica, exceto que ele está presente ainda que o fluxo de íons positivo e negativo sejam iguais (corrente zero).

Um filme circular de celofane é colocada entre duas células de vidro, tal que ela separa água pura de uma solução de cloreto de sódio (NaCl). A diferença de nível dos líquidos fornece uma pressão estática que mantém uma curvatura na membrana, ou no sentido da água ou no sentido da solução.

Um transdutor eletromagnético acoplado a água e dirigido senoidalmente por um oscilador, deforma o filme ciclicamente, e eletrodos de platina, um de cada lado do filme, levam os sinais elétricos a um detector síncrono com a deformação aplicada.

Enquanto o sinal elétrico observado poderia ser devido a efeitos espúrios dos eletrodos, a inversão observada na fase deste sinal com a mudança da curvatura indica que ele é dependente da deformação. A eletricidade dependente da deformação de um filme separando dois eletrólitos é devido a modulação da mobilidade iônica pela deformação aplicada.

ABSTRACT

Amorphous films which can have no intrinsic piezoelectricity, can be induced to show a linear piezoelectric effect when a flux of ions is established across them. The effect is related to the electric current induced piezoelectric effect, except that it is present even though positive and negative ion fluxes are equal (zero-current).

A circular cellofane film is put between two glass cells, so that it separates pure water from a NaCl solution. A level difference of liquids provides a static pressure supporting a membrane curvature, either towards or away from the water.

An electromagnetic transducer, coupled to the water and driven sinusoidally by an oscillator deforms the film cyclically and platinum electrodes on either side of the film lead the electric signals to a detector synchronized with the applied deformation.

While the electric signal observed might be due to spurious effects from the electrodes, the observed reversal in phase of the signal with the change of curvature of the film signifies that it is deformation-dependent. The deformation-dependent electricity in a film separating two electrolytes is owing to the modulation of the mobility of the ions by the applied deformation.

CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

- 1 - Descoberta de um novo efeito piezoelétrico, induzido pelo fluxo de íons, que depende da deformação do filme.
- 2 - Comprovação experimental do novo efeito, separando-o / dos efeitos dependentes da pressão ou efeitos espúrios/ dos eletrodos.
- 3 - Análise teórica do novo efeito induzido, concluindo que a deformação modula a mobilidade iônica; praticamente todo o capítulo V.
- 4 - Complementação da expressão teórica para o coeficiente/ piezoelétrico de deformação e'' .

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Em 1880 os irmãos Curie descobriram que certos cristais, quando sujeitos a tensões mecânicas, apresentavam em suas faces cargas positivas e negativas, proporcionais a tais tensões. Uma vez cessada as tensões, as cargas elétricas desapareciam. Estava comprovada a suposição de Coulomb de que a eletricidade poderia ser produzida por pressão mecânica, isto é, estava comprovada a existência da piezoelectricidade. Em 1881 verificou-se que esses materiais também apresentavam o efeito inverso, ou seja, uma deformação proporcional a uma voltagem aplicada.

Mais tarde Cady⁽¹⁾ definiu piezoelectricidade como sendo, "a polarização elétrica produzida por uma deformação mecânica em cristais pertencentes a certas classes, sendo que a polarização é proporcional à deformação e a acompanha na troca de sinal".

O crescente interesse no estudo desta nova teoria proporcionou a descoberta do efeito em materiais não cristalinos tais como borracha⁽¹⁾ e madeira⁽⁷⁾. A princípio os trabalhos realizados nestes materiais não cristalinos eram qualitativos; em 1955 Fukada com o seu trabalho Piezoelectricidade em Madeira⁽⁶⁾ fez a primeira medida quantitativa. Em 1957 Fukada e Yasuda⁽⁵⁾ mostraram as propriedades piezoelétricas do osso.

A partir destes trabalhos pioneiros o interesse no estudo dos efeitos piezoelétricos em biomateriais e polímeros sintéticos aumentou muito e chegou a São Carlos na década de 70. Durante as pesquisas piezoelétricas neste Instituto, descobriu-se que materiais amorfos podiam apresentar efei

tos de segunda ordem, denominados piezoeletricidade induzida. Estas pesquisas proporcionaram varias teses e trabalhos publicados neste Instituto.

O avanço nas pesquisas, o desenvolvimento das técnicas de medida e o interesse crescente nesta área proporcionaram a descoberta de um novo efeito piezoelétrico em filmes condutores de corrente elétrica, quando submetidos a uma voltagem constante.

Seguindo a interpretação de Fukada de que a deformação altera as dimensões da amostra, alterando sua resistência, o Prof. Zimmerman em seu trabalho Piezoeletricidade / em Biomateriais⁽²⁾, descreveu este novo efeito chamado "Piezoeletricidade Induzida pela Corrente Elétrica". A análise deste efeito dá a componente 90° fora de fase com a deformação do coeficiente piezoelétrico de deformação (e).

$$e'' = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} - 1 \right] \text{ Coul/m}^2 \quad (I-1)$$

Os detalhes desta equação serão apresentados no capítulo II, secção 2-3, onde definir-se-á os parâmetros envolvidos.

Com este trabalho o Prof. Zimmerman previu a existência do efeito piezolétrico quando por uma membrana/que é deformada senoidalmente com frequência ω , se faz passar íons. A este novo efeito chama-se "Piezoeletricidade Induzida pelo Fluxo de Ions", sendo devido a dependencia da velocidade média dos íons com a deformação.

O objetivo deste trabalho é comprovar experimentalmente a existência deste efeito, completando assim a expressão teórica do coeficiente piezoelétrico de deformação.

O capítulo a seguir apresenta as nocões teóricas de forma resumida mas suficiente para que se entenda os

efeitos induzidos em materiais amorfos.

No capítulo III descreve-se o procedimento experimental e o material utilizado na detecção do novo efeito induzido. Apresenta-se também como o sinal elétrico dependente da deformação é diferenciado dos demais sinais existentes através da membrana, como por exemplo os sinais dependentes / da pressão ou efeitos dos eletrodos.

O capítulo IV destina-se a apresentação dos resultados experimentais obtidos. A discussão desses resultados encontra-se no capítulo V.

No capítulo VI apresenta-se as conclusões que se chega analisando os resultados encontrados neste trabalho

CAPÍTULO II

NOÇÕES TEÓRICAS

2.1 - Efeito Piêzoelétrico

Alguns cristais quando submetidos a uma força mecânica respondem com um sinal elétrico proporcional à força aplicada. Este sinal, que é a polarização elétrica produzida pela deformação mecânica, denomina-se Piezoeletricidade. Este sinal é entendido como a corrente que é induzida a movimentar-se quando uma amostra, com densidade de dipolos elétricos P , é deformada.

Fig. II-1 - Esquema para a medida de um coeficiente piezoelétrico. O eletrômetro E mede a carga elétrica induzida quando a amostra polarizada é deformada.

Na figura acima uma amostra polarizada é alongada na direção de alinhamento dos dipolos. O aumento no volume da amostra implica numa diminuição na densidade de dipolos e conseqüentemente uma carga negativa é induzida a movimentar-se nesta direção, pois haverá menor necessidade de cargas negativas para anular as positivas.

As relações elétrico-mecânicas para os cris-

tais piezoelétricos podem ser escritas a partir do diagrama / apresentado por Cady.

Fig. II-2 - Relação dos efeitos elétricos de elasticidade e piezoelétricidade. A direção das setas indica a sequência da causa ao efeito.

A polarização P está relacionada com o campo elétrico E através da susceptibilidade elétrica η , que tem por unidades Farad/metro.

$$P = E\eta \quad \text{Coul/m}^2 \quad (\text{II-1})$$

A deformação mecânica S está relacionada com a tensão mecânica T pelo módulo elástico s cuja unidade é metro-quadrado/Newton.

$$S = sT \quad \text{m/m} \quad (\text{II-2})$$

Podemos ter ainda:

a) Dado um campo elétrico nulo

$$P = dT \quad \text{Coul/m}^2 \quad (\text{II-3})$$

o que significa que aplicando uma tensão mecânica T , o cristal apresenta um momento de dipolo elétrico que é proporcio-

nal à tensão aplicada e o sinal da polarização P acompanha o sinal da tensão. O coeficiente de proporcionalidade d é chamado coeficiente piezoelétrico de tensão e este efeito é o efeito piezoelétrico direto. Portanto, d é a medida da polarização numa amostra em curto-circuito ($E=0$), dado uma tensão mecânica unitária.

$$d = \left. \frac{dP}{dT} \right|_{E=0} \text{ Coul/Newton} \quad (\text{II-4})$$

b) Dado uma tensão mecânica nula

$$S = dE \text{ m/m} \quad (\text{II-5})$$

Aplicando um campo elétrico E numa amostra onde não se aplica tensão mecânica ($T=0$), ela apresentará uma deformação (S) resultante das forças elétricas agindo nos dipolos. Esta deformação acompanha o sinal do campo aplicado e o efeito é chamado efeito piezoelétrico inverso. A equação II-5 indica / que d pode ser a medida da deformação (S) resultante numa amostra, pela aplicação de um campo elétrico unitário.

$$d = \left. \frac{dS}{dE} \right|_{T=0} \text{ metro/volts} \quad (\text{II-6})$$

c)-O efeito piezoelétrico direto é, ainda, uma consequência de uma deformação feita ao cristal, dado um campo elétrico nulo

$$P = eS \text{ Coul/m}^2 \quad (\text{II-7})$$

A polarização (P) é proporcional à deformação, sendo que o coeficiente de proporcionalidade é o coeficiente piezoelétrico de deformação (e). Logo,

$$e = \left. \frac{dP}{dS} \right|_{E=0} \text{ Coul/m}^2 \quad (\text{II-8})$$

o que significa que o coeficiente piezoelétrico de deformação é a medida da polarização, numa amostra em curto, resultante/da aplicação de uma deformação unitária.

d) O efeito piezoelétrico inverso é também a tensão mecânica (T) resultante de um campo elétrico (E) aplicado, dada uma deformação nula,

$$T = - eE \text{ Newton/m}^2 \quad (\text{II-9})$$

Assim, o coeficiente piezoelétrico de deformação pode ser a medida da tensão mecânica resultante numa amostra presa, pela aplicação de um campo elétrico unitário.

$$e = - \left. \frac{dT}{dE} \right|_{S=0} \text{ Coul/m}^2 \quad (\text{II-10})$$

É importante observar que a susceptibilidade elétrica é um tensor com 3 componentes e o módulo elástico um tensor com 36 componentes pois existem três direções para aparecer a polarização devido a aplicação do campo elétrico, e seis forças mecânicas podem ser aplicadas ao cristal. Em consequência deste fato os coeficientes piezoelétricos requerem uma notação matricial. Neste trabalho, porém, considerar-se a todas essas quantidades como simples escalares.

2.2 - DEFORMAÇÃO

O termo deformação refere-se às variações relativas da forma ou dimensão de um corpo. Para cada tipo de tensão aplicada, existe uma deformação correspondente. Assim, tem-se a deformação de tração (fig. II-3) definida como a relação entre o aumento de comprimento e o comprimento original.

$$\text{Deformação de tração} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Fig. II-3 - Deformação ao longo do eixo X.

2.3 - EFEITO INDUZIDO

Substancias amorfas com momentos de dipolo orientados ao acaso, ou materiais que não tem momentos de dipolo permanentes, não apresentam piezoeletricidade intrínseca porém, todos os materiais apresentam uma piezoeletricidade aparente, que está relacionado a efeitos de segunda ordem, devido aos dipolos elétricos induzidos por um campo elétrico externo constante⁽³⁾.

Quando uma amostra é deformada, a mudança nas dimensões e a alteração do coeficiente dielétrico alteram sua capacitância. Tal alteração pode ser escrita.

$$\frac{dC}{dS} = \frac{d(\epsilon C_0)}{dS} = C_0 \frac{d\epsilon}{dS} + \epsilon \cdot \frac{dC_0}{dS} \quad (\text{II-11})$$

onde C_0 é a capacitância no vácuo e ϵ o coeficiente dielétrico e S a deformação aplicada.

A variação da capacitância C_0 com a deformação é devido a variação geométrica da amostra, e podemos escrever

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{t}$$

onde A é a área da amostra e t a espessura. Assim,

$$\frac{dC_0}{dS} = \epsilon_0 \frac{d(A/t)}{dS} = \epsilon_0 C_0 \left[\frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{t} \frac{dt}{dS} \right]$$

Utilizando razões de Poisson apropriadas ν_1 e ν_2 , que levam em conta o aumento da área e a diminuição da espessura devido a deformação, tem-se,

$$\frac{dC_0}{dS} = C_0 \left[1 - \nu_1 + \nu_2 \right] \quad (\text{II-12})$$

e para substâncias amorfas ($\nu_1 = \nu_2$)

$$\frac{dC}{dS} = C_0 \left[\frac{d\epsilon}{dS} + \epsilon \right] = C_0 \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dS} + 1 \right] \quad (\text{II-13})$$

Aplicando um potencial elétrico constante V através da amostra de área A , tem-se um coeficiente piezoelétrico de deformação induzido (e); como vimos anteriormente o coeficiente (e) é a medida da polarização numa amostra em curto, enquanto é deformada (eq. II-8). Porém, experimentalmente mede-se a carga e não a polarização através de uma amostra de área A , portanto:

$$e = \frac{dP}{dS} = \frac{1}{A} \frac{d(CV)}{dS} = \frac{V}{A} \frac{dC}{dS} \quad \text{ou}$$

$$e = \frac{\epsilon C_0 V}{A} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dS} + 1 \right] \quad (\text{II-14})$$

Se o material é um condutor de eletricidade, aparece uma componente fora de fase da piezoeletricidade que é proporcional à densidade de corrente na amostra. Este novo efeito, chamado efeito piezoelétrico induzido pela corrente, é interpretado como sendo devido a mudança na resistência da amostra em consequência da deformação aplicada. Esta variação na resistência se deve a mudança nas dimensões e na resistividade da amostra. Pode-se escrever

$$\frac{dR}{dS} = t \frac{d\rho}{dS} + \rho \frac{d(t/A)}{dS}$$

$$\text{ou} \quad \frac{dR}{dS} = R_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dS} - \frac{1}{A} \frac{dA}{dS} \right] \quad (\text{II-15})$$

onde R é a resistência da amostra, ρ a resistividade, t a espessura e A a área e S a deformação aplicada.

Usando novamente o fato de que a área aumenta uma fração $(1 - \epsilon_1)S$ e a espessura diminui uma fração $\epsilon_2 S$ / tem-se

$$\frac{dR}{dS} = R_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} - 1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 \right] \quad e$$

para materiais amorfos

$$\frac{dR}{dS} = R_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} - 1 \right] \quad (\text{II-16})$$

Quando um potencial elétrico constante V é aplicado através da amostra, a carga armazenada e a corrente/ de condução, ambos de fácil obtenção experimental, são modulados pela deformação. Assim,

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{d(CV)}{dS} + \frac{d}{dS} \left[\int (V/R) dt \right]$$

e combinando as equações II-14 e II-15 encontra-se

$$\frac{dQ}{dS} = \epsilon C_0 V \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dS} + 1 \right] - \frac{V}{R_0} \frac{1}{j\omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} - 1 \right] \quad (\text{II-17})$$

Assim, o coeficiente piezoelétrico de deformação inclui os efeitos de mudança da capacitância e da resistência,

$$e = \epsilon E_0 \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dS} + 1 \right] - \frac{J_0}{j\omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} - 1 \right] \quad (\text{II-18})$$

onde se tem usado uma deformação senoidalmente modulada com frequência ω . Logo,

$$e = e' - je''$$

com

$$e' = \epsilon E_0 \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dS} + 1 \right] \quad (\text{II-19})$$

$$e'' = \frac{J_0}{\omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} - 1 \right] \quad (\text{II-20})$$

A presença de e'' na equação II-20 foi encontrada e descrita por Zimmerman em seu trabalho "Piezoelectricidade em Biomateriais"⁽⁴⁾. Neste trabalho de dissertação, esperamos encontrar um novo efeito, sendo devido a passagem de íons através de uma membrana separada por dois eletrólitos.

Como é sabido, em consequência de um gradiente de concentração entre os eletrólitos, haverá um fluxo de íons tal que a corrente pode ser escrita:

$$J_i = n_i q_i v_i \quad (\text{II-21})$$

onde

$\bar{n}_i$ é a densidade volumétrica do íon i

q_i é a carga do íon i

v_i é a velocidade média do íon i

Usando íons de cloro (Cl^-) e sódio (Na^+) tem-se

$$J_+ = n_+ q_+ v_+$$

$$J_- = n_- q_- v_-$$

(II-22)

a corrente total é

$$J = J_+ + J_-$$

ou $J = q [n_+ v_+ - n_- v_-]$ com $q_+ = -q_-$ (II-23)

Espera-se que a alteração nas dimensões da membrana, devido a deformação aplicada, afete diferencialmente a mobilidade dos íons, de forma que a velocidade média dos mesmos sejam moduladas. Esta modulação, diferente para cada íon, provocará uma flutuação na carga, fazendo com que apareça um coeficiente piezoelétrico de deformação.

O capítulo seguinte mostra o procedimento experimental para a comprovação deste efeito adicional, que chamamos efeito piezoelétrico induzido pelo fluxo de íons.

CAPÍTULO III

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

3.1 - MATERIAIS

3.1.1 - Amostra

O filme a ser deformada neste trabalho é uma membrana de celofane, permeável aos íons Na^+ e Cl^- , dimensionada (17 mm de diâmetro e 0.03 mm de espessura) em forma circular, a partir de uma folha de celofane comercial.

Construiu-se duas células de vidro idênticas / (fig. III-1a) sendo a membrana interposta entre as células, de forma que fique banhada pelos líquidos (solução de cloreto de sódio de um lado e água pura de outro). A montagem da membrana entre as células de vidro é ilustrada na figura III-1b. Cada extremidade externa das células é vedada com filme de latex.

Fig. III-1 a) Células de vidro pyrex com entrada e saída para os líquidos. b) Montagem do filme de celofane nas células.

3.1.2 - ELETRODOS

Os eletrodos de medida colocados um de cada lado da membrana são de platina. Como na experiência utilizamos frequência em torno de 80 Hz, não sentimos necessidade da utilização de eletrodos reversíveis como Ag/AgCl, pois nestas frequências estamos pouco sujeitos aos efeitos D.C. Os eletrodos foram introduzidos nas células de vidro conforme ilustrado na figura III-2.

Fig. III-2 - Eletrodos de platina colocados um de cada lado / da membrana

3.2 - DETECTOR SÍNCRONO - LOCK - IN

O LOCK-IN é utilizado nos casos em que consegue-se converter o sinal de corrente contínua em um sinal de corrente alternada, com uma frequência e fase conhecidas. Basicamente ele é um "Cross Correlator" que proporciona na saída, um sinal, que é o valor médio (no tempo) do produto do sinal a medir com o sinal de referência, isto é, compara duas formas de onda para determinar o grau de similaridade entre ambos.

Nesta experiência, utilizou-se o LOCK-IN no mo

do interior, portanto com sinal de referência gerado por ele próprio; este sinal é amplificado e aplicado a um transdutor/ eletromagnético, que está acoplado à célula de vidro através do filme de latex, deformando a membrana ciclicamente com uma frequência de 80 Hz.

O sinal a ser medido é então introduzido no canal de medida do detector, cuja frequência é ajustada para ser idêntica à frequência do canal de referência. Este sinal é amplificado e detectado sincronemente. Com isso ainda que os ruídos existentes sejam maiores que o próprio sinal, poderá ser medido com um ganho bastante alto. Abaixo tem-se um diagrama em bloco de um LOCK-IN.

** Proporcional ao sinal de entrada

3.3 - TÉCNICA DE MEDIDA

Fig. III-3 - Diagrama em bloco do sistema de medida

A fig. III-3 mostra as células de vidro contendo solução aquosa de cloreto de sódio e água pura, separados por uma membrana plana circular de celofane. Uma pressão estática, determinada pela diferença dos níveis dos líquidos, fornece uma curvatura na membrana. O transdutor eletromagnético (TR) acoplado ao líquido (H_2O) é dirigido por um detector síncrono, modelo 124A da Princeton Applied Research (PAR), chamado LOCK-IN, com uma frequência de 80 Hz, que é a frequência de ressonância de todo o sistema. Este transdutor aplica uma tensão mecânica cíclica diferencial na membrana, através de um filme de latex na extremidade da célula de vidro.

A pressão exercida pelo transdutor é pequena comparada com a pressão estática, porém, ela deforma ciclicamente a membrana; esta deformação no filme devido à pressão do transdutor é pequena comparada com a curvatura devido à pressão estática.

Supondo que as células de vidro e os eletrólitos são indeformáveis, a deformação no filme de celofane pode ser observada e medida, observando a deformação do filme de latex. Para uma deflexão (ϵ) do filme de latex e do filme de celofane, tem-se uma deformação no plano do filme dado por

$$dS = \left[\frac{\text{sen}\theta}{\theta} - \text{cos}\theta \right] \frac{\epsilon}{\delta} \quad ** \quad (III-1)$$

Esta deformação dS (adimensional) no plano do filme está relacionada com a curvatura (δ) do filme como se pode ver na figura III-4.

Fig. III-4 - Geometria da membrana de celofane

Para um ângulo (θ) pequeno, a equação III-1 pode ser escrita

$$dS = \frac{4\delta\epsilon}{3r^2} \quad (\text{III-2})$$

onde tem-se usado o fato de que o raio da célula de vidro (r) é muito maior do que a curvatura (δ).

Na equação III-2 nota-se uma linearidade entre a deformação e a deflexão do filme. Evidentemente a deflexão depende da força aplicada pelo transdutor e a curvatura depende da pressão estática. Para uma pressão estática e uma força aplicada pelo transdutor fixas, pode-se calcular a deformação através da medida da deflexão (ϵ) do filme, uma vez conhecidos a curvatura e o raio da célula. Na medida de (ϵ) utilizamos o método óptico descrito no apêndice II.

Através da membrana podem existir vários tipos de sinais elétricos, como por exemplo, os sinais dependentes/da pressão ou efeitos espúrios dos eletrodos. Para diferenciarmos estes sinais do sinal proporcionalmente dependente da deformação, procedemos conforme descrito abaixo.

Variando-se a altura relativa dos níveis dos líquidos pode-se ter uma curvatura no sentido do transdutor ou em sentido oposto, conforme a figura III-5.

Fig. III-5 - Curvatura do filme de celofane

- a) Nível da solução de NaCl acima do nível da H_2O
b) Nível da solução de NaCl abaixo do nível da H_2O

A variação da altura relativa dos líquidos é feita através do nível do eletrólito salino, mantendo-se fixo o nível da água, evitando-se assim problemas de acoplamento com o transdutor. Durante esta variação são mantidos fixos a força e a frequência aplicadas ao transdutor (TR).

Construiu-se um mecanismo utilizando um motor de ventilador (6 Vcc) e engrenagens de um relógio despertador fazendo-o funcionar como um redutor de velocidades. Com isto, a variação do nível de NaCl é realizada mecanicamente com velocidade constante. Este mecanismo é ilustrado abaixo.

Fig. III-6 - Mecanismo de variação da altura relativa dos líquidos.

A mudança na pressão estática dentro da célula faz com que a curvatura (δ) da membrana fique invertida - Pela equação III-2 compreende-se que uma mudança de sinal em (δ) faz com que o sinal da deformação fique invertido, uma vez que ambos o raio da célula e a deflexão não são invertidos. Assim, um sinal elétrico que é consequência desta deformação terá sua fase invertida em 180° . Os sinais elétricos / que dependem da pressão ou efeitos dos eletrodos não devem inverter sua fase, pois independem da curvatura da membrana.

Os eletrodos de platina, situados um de cada lado da membrana, levam o sinal elétrico ao detector sensível à fase e síncrono com a deformação, Deste modo evita-se capturar sinais elétricos que não estejam com a frequência da deformação aplicada ao filme.

Um registrador XY da "HEWLETT PACKARD" modelo 7004 B é acoplado à saída do detector síncrono, de forma que pode-se registrar a média retificada dos sinais elétricos enviados pelos eletrodos. Pode-se entender este sinal como devido a modulação da mobilidade dos íons pela deformação.

Fig. III-7 - Esquema de medida simplificado

- a) deformação em fase com a deflexão ϵ
- b) deformação 180° defasado da deflexão ϵ

Na figura III-7 têm-se apresentado a membrana/ cônica (a) e convexa (b) para o transdutor. Esta mudança é feita variando-se o nível do eletrólito salino, mantido fixo/ o nível da água .

Analisando a deformação da membrana em cada ca so (a e b) pode-se observar a relação da fase desta deforma- ção com o deslocamento sofrido pela membrana.

a) Membrana Côncava para o Transdutor

Sendo que o transdutor sofre um deslocamento / $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$ e está acoplado à membrana, esta também sofrerá/ um deslocamento $\epsilon_0 \sin \omega t$ responsável pela deformação dS (ra- ção de variação no comprimento do arco) no plano do filme. Pa ra o sentido positivo de ϵ indicado na figura III-7, tem-se um aumento no comprimento do arco, portanto dS está em fase / com ϵ .

b) Membrana Convexa para o Transdutor

Mudando a curvatura da membrana e mantendo-se/ o transdutor com um deslocamento $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$, tem-se para o mesmo sentido positivo de ϵ uma diminuição no comprimento/ do arco, portanto a deformação dS no plano do filme está 180° defasado do deslocamento ϵ .

Sendo assim, um sinal elétrico que depende da deformação do filme terá sua fase invertida em 180° quando a curvatura da membrana muda de côncava para convexa.

Os sinais espúrios dos eletrodos ou ainda os dependentes da pressão exercida pelo transdutor não devem in- verter sua fase pois eles independem da curvatura da membrana e assim, com esta experiência pode-se diferenciar o sinal de- pendente da deformação dos demais sinais elétricos que possam existir através da membrana.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados obtidos neste trabalho. A figura IV-1 ilustra a dependência do sinal elétrico com a força (deformação) aplicada pelo transdutor; nota-se a linearidade prevista pela teoria piezoelétrica

Fig. IV-1 - Sinal elétrico dependente da deformação do filme em função da deformação aplicada.

Na figura IV-2 tem-se a dependência temporal do sinal elétrico. Com a passagem dos íons pela membrana, a concentração de ambos os lados tende a igualar-se e a impedância apresentada aos eletrodos reduz consideravelmente, aumentando a corrente através do detector. Evidentemente o gradiente de potencial elétrico através da membrana diminui com a passagem dos íons para o lado da água pura, mas a experiência indica que prevalece a redução na impedância.

V_i - gradiente de potencial elétrico

Z_i - impedância apresentada aos eletrodos

R_L - resistência de carga

Fig. IV-2 - Dependência do sinal com o tempo

Como se pode ver na figura III-3 o sistema todo é oscilante, portanto, tem uma frequência de ressonância. A figura IV-3 ilustra o sinal elétrico em sincronismo com a deformação aplicada em função da frequência do transdutor. Nota-se que a ressonância se dá em torno de 80 Hz. A ressonância depende da rigidez do filme de latex bem como do contato do filme com o transdutor.

Fig. IV-3 - Sinais síncronos com a deformação aplicada em função da frequência do transdutor.

A dependência da piezoeletricidade induzida pelo fluxo de íons com a concentração da solução de NaCl é ilustrada na figura IV-4. Para concentrações inferiores a 15 g/l de cloreto de sódio, nota-se que o sinal elétrico depende linearmente com a concentração, obedecendo a lei de Fick. No entanto, para concentrações maiores do que 15 g/l observa-se uma redução no sinal elétrico; isto pode ser devido à formação de pares iônicos que não são modulados pela deformação. Antes, porém, de uma afirmação definitiva quanto a causa desta redução no sinal necessita-se maiores estudos.

Fig. IV-4 - Dependência do sinal com a concentração

O sinal piezoelétrico induzido pelo fluxo de íons, o qual é dependente da deformação do filme, é ilustrado na figura IV-5. Observa-se o sinal durante uma mudança de pressão estática, feita através da variação do nível do eletrólito salino, deixando a pressão da água constante para manter um acoplamento constante com o transdutor. Esta variação na pressão estática é feita para se obter uma deformação em fase com o deslocamento $\epsilon_0 \sin \omega t$ e depois uma deformação 180° fora de fase; resultado análogo se obtém quando mantendo fixa a pressão estática, inverte-se o sentido de aplicação do / transdutor.

A inversão do sinal em torno da pressão zero, sugere que o sinal elétrico depende exclusivamente da deformação do filme, que muda 180° em fase quando a curvatura do filme passa de côncava para convexa.

Como consequência da aplicação de uma deformação no filme que separa dois eletrólitos, aparece um sinal elétrico da mesma frequência e linearmente proporcional a esta deformação. O fato deste sinal responder linearmente e inverter em fase com a inversão da curvatura do filme, comprova o fato de que o sinal é devido apenas à deformação e não devido a efeitos espúrios dos eletrodos ou ainda efeito da modulação da pressão, que não devem inverter suas fases com a mudança / da curvatura do filme.

Fig. IV-5 - Sinal elétrico síncrono com a deformação em função da curvatura do filme.

CAPÍTULO V

DISCUSSÃO

Uma análise do transporte de íons através do filme de celofane (permeável aos dois íons - Na^+ e Cl^-) permite observar que devido ao gradiente de concentração os íons Na^+ e Cl^- estão sujeitos a uma força, que faz com que se difundam para o lado da água pura. Os gradientes de potencial / químico e elétrico são nulos, uma vez que o solvente é único / e o detector síncrono mantém o sistema em curto-circuito (resistência de medida muito menor que a impedância apresentada / aos eletrodos).

Portanto pode-se escrever

$$J_i = n_i q_i v_i \quad (\text{V-1})$$

J_i - densidade de corrente

n_i - densidade iônica volumétrica

q_i - carga do íon

v_i - velocidade média do íon

a velocidade média é devido a mobilidade iônica sob influência do gradiente de concentração. Para cada íon tem-se:

$$J_{\text{Na}^+} = J_+ = n_+ q_+ v_+$$

$$J_{\text{Cl}^-} = J_- = n_- q_- v_-$$

$$\text{O fluxo total } J \text{ é evidentemente } J = J_+ + J_- \quad (\text{V-2})$$

Assim,

$$J = n_+ q_+ v_+ + n_- q_- v_- \quad \text{ou}$$

$$J = q [n_+ v_+ - n_- v_-] \quad (\text{V-3})$$

onde se tem usado $q_+ = q_-$

Aplicando uma deformação ao filme, sua dimensão é alterada. Para dar prosseguimento à análise pode-se imaginar que os poros da membrana ou abrem ou fecham com a deformação. Isto afeta a condução dos íons através da modulação da mobilidade dos mesmos. Esta modulação deve ser diferente para cada íon, fazendo com que apareça uma flutuação na carga elétrica Q .

Como é sabido

$$Q = \int Idt \quad (V-4)$$

com $I = JA$, onde A é a área do filme e J a densidade de corrente elétrica.

A definição do coeficiente piezoelétrico de deformação (e) é dado pela equação II-8, porém experimentalmente mede-se a carga Q que é induzida a circular pelo detector, e não a polarização P . Este fato pode ser ilustrado com o circuito equivalente abaixo.

onde V_i é o gradiente de potencial elétrico, Z_i a impedância interna e R_L a resistência de medida.

Assim, o coeficiente piezoelétrico de deformação escreve-se

$$e = \frac{1}{A} \left. \frac{dQ}{dS} \right|_{E=0} \quad (V-5)$$

e a modulação da carga Q pode ser escrita

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\int J A dt \right) = \frac{1}{j\omega} \left[A \frac{dJ}{dS} + J \frac{dA}{dS} \right] \quad (V-6)$$

onde dS é a deformação senoidal aplicada, ω a frequência e j o imaginário. $j\omega$ vem da integração no tempo e o imaginário

j indica a defasagem de 90° do sinal elétrico com a deformação.

Usando a equação (V-3) em (V-6) tem-se

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{nqA}{jW} \left[\left(\frac{dv_+}{dS} - \frac{dv_-}{dS} \right) + (v_+ - v_-) \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dS} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dS} \right) \right] \quad (V-7)$$

onde usou-se a condição $n_+ = n_- = n$

A variação na densidade volumétrica n é igual a menos a variação do volume, logo

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dS} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dS} \quad (V-8)$$

assim,

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{nqA}{jW} \left[\left(\frac{dv_+}{dS} - \frac{dv_-}{dS} \right) + (v_+ - v_-) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dS} \right) \right] \quad (V-9)$$

e em termos do coeficiente piezoelétrico de deformação tem-se

$$e = \frac{nq}{jW} \left[\left(\frac{dv_+}{dS} - \frac{dv_-}{dS} \right) + (v_+ - v_-) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dS} \right) \right] \quad (V-10)$$

ou seja, o coeficiente piezoelétrico de deformação contém apenas a parte imaginária (90° defasado da deformação) composto de dois termos:

- 1) Modulação da velocidade média dos íons.
- 2) Variação geométrica da amostra

A razão de variação da área (dA/A) pode ser escrita uma vez que o que temos é uma calota esférica; a variação no volume também pode ser escrita, usando-se razão de Poisson apropriada.

$$\text{Área da calota} = 2\pi R\delta$$

$$\text{então} \quad dA = 2\pi R\delta \left[\frac{dR}{R} + \frac{d\delta}{\delta} \right] \quad e$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dR}{R} + \frac{d\delta}{\delta}, \quad \text{usando } R = \frac{\delta^2 + r^2}{2\delta} \quad \text{tem-se}$$

se

$$\frac{dA}{A} = \left(1 + \frac{\delta^2 - r^2}{\delta^2 + r^2}\right) \frac{d\delta}{\delta} = \frac{2\epsilon\delta}{r^2}$$

onde se tem usado $d\delta = \epsilon$ e $r \gg \delta$

Por definição

$$dS = \frac{dS}{S}$$

(V-11)

$$\sigma = - \frac{dZ/Z}{dS/S}$$

σ é a razão de Poisson. Assim, a razão de variação do volume pode ser escrita

$$V = A \cdot Z$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} + \frac{dZ}{Z}$$

e finalmente o coeficiente piezoelétrico de deformação (e) é escrito como

$$e = \frac{ng}{jW} \left[\left(\frac{dv_+}{dS} - \frac{dv_-}{dS} \right) + \sigma (v_+ - v_-) \right] \text{ Coul/m}^2 \quad (V-13)$$

onde se tem usado (V-11) e (III-2). Assim,

$$e = e'' = \frac{ng}{jW} \left(\frac{dv_+}{dS} - \frac{dv_-}{dS} \right) + \frac{J_0 \sigma}{jW} \text{ Coul/m}^2$$

Uma experiência auxiliar que mede a densidade/de corrente J_0 , através da membrana, permite calcular o fator geométrico ($J_0 \sigma / W$) dando condições para saber qual dos dois termos, modulação da mobilidade iônica ou fator geométrico, / predomina na equação V-13.

Os dados desta experiência encontram-se na tabela I. Pode-se notar que o fator geométrico é desprezível, o

que permite concluir que a Piezoeletricidade Induzida pelo / Fluxo de Ions é devido a modulação da mobilidade iônica pela deformação.

TABELA I

C (g/l)	J _o (A/m ²)	$\frac{J_o \sigma}{W}$ (Coul/m ²)	e ["] _{exp.} (Coul/m ²)
5	2,1 10 ⁻⁶	0,06 10 ⁻⁷	2,3 10 ⁻⁷
10	8,5 10 ⁻⁶	0,25 10 ⁻⁷	3,2 10 ⁻⁷
15	15,0 10 ⁻⁶	0,45 10 ⁻⁷	4,5 10 ⁻⁷
20	21,3 10 ⁻⁶	0,64 10 ⁻⁷	3,5 10 ⁻⁷

Comparação de e" medido e fator geométrico $\frac{J_o \sigma}{W}$ também medido.

Dados: W = 503 rad/seg.

onde

dS = 1,4 10⁻⁴

e["]_{exp.} = $\frac{V_o/RWA}{dS}$

R = 10⁶ OHM

A = 9,4 10⁻⁴ m²

V_o medido no LOCK-IN

Uma medida experimental alternativa é a medida da carga elétrica em circuito aberto. Neste caso mede-se a voltagem ao invés da corrente elétrica.

R_L >> Z_i

Torna-se necessário a apresentação de um outro coeficiente / piezoelétrico de deformação, chamado "h", definido como

h = $-\frac{dE}{dS} \Big|_{J=0}$ V/m (V-14)

Experimentalmente mede-se a tensão elétrica ao invés do campo elétrico, de forma que escreve-se

h = $-\frac{1}{Z} \frac{dV}{dS} \Big|_{J=0}$ (V-15)

sendo Z a espessura da membrana.

A modulação da diferença de potencial pela deformação pode ser escrita como

$$\frac{dV}{dS} = \frac{d(Q/C)}{dS} \quad (V-16)$$

onde Q é a carga e C a capacitância apresentada aos eletrodos.

Uma vez que nenhuma corrente circula pelo detector (circuito aberto), a equação V-16 fica

$$\frac{dV}{dS} = - \frac{Q}{C^2} \frac{dC}{dS} \quad (V-17)$$

e a variação na capacitância pode ser escrita como

$$\frac{dC}{dS} = \frac{d(kC_0)}{dS} = k \frac{dC_0}{dS} + C_0 \frac{dk}{dS} \quad (V-18)$$

onde k é a constante dielétrica do filme e C_0 é a capacitância em vácuo.

$$C_0 = \frac{k_0 A}{Z} \quad e$$

$$\frac{dC_0}{dS} = \frac{k_0 A}{Z} \left[\frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dS} \right] \quad (V-19)$$

Substituindo (V-19) em (V-18) tem-se

$$\frac{dC}{dS} = k C_0 \left[\frac{1}{k} \frac{dk}{dS} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dS} \right] \quad e$$

$$\frac{dV}{dS} = -V_0 \left[\frac{1}{k} \frac{dk}{dS} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dS} \right] \quad (V-20)$$

assim, o coeficiente piezoelétrico " h " da equação (V-15) torna-se

$$h = E_0 \left[\frac{1}{k} \frac{dk}{dS} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dS} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dS} \right] \quad (V-21)$$

Usando novamente o fato de que a área aumenta enquanto a es-

pressão diminui um fator dado pelo coeficiente de Poisson /
tem-se

$$h = E_0 \left[\frac{1}{k} \frac{dk}{dS} + \frac{3}{2} + G \right] \quad (V-22)$$

ou seja, numa medida em circuito aberto tem-se a parte real /
(em fase com a deformação) do coeficiente piezoelétrico de
deformação "h", composto de dois termos:

- 1) Modulação da constante dielétrica
- 2) Variação geométrica do filme.

Na expressão de "h" usou-se novamente as equações (III-2) e
(V-11).

Utilizando novamente uma experiência auxiliar,
que mede o gradiente de potencial elétrico através da membra-
na, pode-se calcular o fator geométrico $E_0(3/2 + G)$ dando
condições para a comparação do fator geométrico e da modula-
ção da constante dielétrica.

Os dados desta experiência, feita para uma so-
lução de NaCl de concentração 15 g/l, encontram-se na tabela/
II.

TABELA II

C(g/l)	V_0 (Volts)	$E_0(3/2 + G)$ (V/m)	h' (V/m)
15	$40 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^3$

Dados: $Z = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$$G = 3/2$$

onde

$$dV = 11 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

$$h' = \frac{1}{Z} \frac{dV}{dS}$$

$$dS = 10^{-4}$$

Pela tabela II pode-se concluir que, dentro /
dos erros experimentais, o coeficiente piezoelétrico de defor

mação "h" é devido exclusivamente ao fator geométrico, em contraste com o resultado obtido numa medida em curto-circuito.

Observou-se ainda que o comportamento do sinal elétrico síncrono com a deformação do filme, medido em circuito aberto é idêntico ao da medida em curto-circuito, exceto o sinal em função do tempo, como se pode ver pela figura V-1.

Fig. V-1 - Dependência temporal do sinal medido em circuito / aberto

Esta diminuição no sinal, em contraste com o da figura (IV-2), é devido ao fato de que em circuito aberto/mede-se o gradiente de potencial elétrico através da membrana e não mais a corrente elétrica; este gradiente diminui com a passagem dos íons para o lado da água pura.

O sinal elétrico em função da curvatura do filme é ilustrado na figura V-2. Nota-se o mesmo comportamento / do mostrado na figura IV-5 (curto-circuito), apenas a defasa-

gem de 90° como prevista na equação (V-22).

Fig. V-2 - Sinal elétrico em função da curvatura do filme

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

- 1 - Existe um sinal elétrico que é dependente da deformação/ e não da pressão, ou efeitos espúrios dos eletrodos.
- 2 - Este sinal depende linearmente da deformação aplicada pelo transdutor, e tem mesma frequência.
- 3 - O sinal aumenta linearmente com a concentração até próximo de 15 g/l, reduzindo para concentrações maiores, provavelmente devido à formação de pares que não são modulados pela deformação.
- 4 - O sinal dependente da deformação é observado tanto numa / medida em curto-circuito quanto numa medida em circuito / aberto.
- 5 - Existe uma diferença de fase de 90° entre o sinal medido/ em curto-circuito (coeficiente piezoelétrico e'') e o medido em circuito aberto (coeficiente piezoelétrico h') prevista nas equações (V-10) e (V-22).
- 6 - A dependência com o tempo dos coeficientes e'' e h' difere/ rem pois na medida de e'' obtém-se a corrente elétrica, enquanto na medida de h' obtém-se a d.d.p.
- 7 - A deformação aplicada ao filme modula a mobilidade iônica de forma que esta modulação é responsável pelo aparecimento de e'' (tabela I). Já o aparecimento de h' é devido à variação geométrica do filme (tabela II).

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- 1 - Verificação da influência da porosidade da membrana sobre o efeito piezoelétrico induzido, utilizando:
 - a) Membranas de outros materiais, como por exemplo Acetato de celulose, Teflon poroso, etc.
 - b) Diferentes pares de íons, como KCl, LiCl, etc.
- 2 - Estudo mais detalhado do efeito com a concentração da solução salina, para verificação da causa da queda do sinal a partir de determinada concentração.
- 3 - Estudo do efeito piezoelétrico induzido pelo fluxo de íon em membranas biológicas.

APÊNDICE I

Determinação da deformação dS/S no plano do filme, dado uma deflexão ϵ da membrana.

R - raio de curvatura (curvatura dada pela pressão estática)

r - raio da célula de vidro (raio da membrana)

Pela figura acima tem-se que

$$R = X + \delta \quad \text{e} \quad R^2 = X^2 + r^2 \quad \text{o que implica}$$

$$R = \frac{r^2 + \delta^2}{2\delta}$$

O comprimento do arco S é dado por

$$S = 2R\theta \quad \text{onde}$$

$$\theta = \arcsin(r/R)$$

Assim,

$$dS = 2Rd\theta + 2\theta dR \quad \text{que}$$

dividindo por S dá a deformação dS/S

$$\frac{dS}{S} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{dR}{R}$$

escrevendo $\frac{d\theta}{\theta}$ e $\frac{dR}{R}$ obtem-se

$$dS = \frac{dS}{S} = \left[\frac{\operatorname{sene} \theta}{\theta} - \cos \theta \right] \frac{\epsilon}{\delta}$$

onde $\epsilon = d\delta$

Para ângulos θ pequenos tem-se

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!}$$

Portanto

$$\frac{dS}{S} = \frac{\theta^2}{3} \cdot \frac{\epsilon}{\delta}$$

usando

$$\cos \theta = \frac{r^2 - \delta^2}{r^2 + \delta^2} = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

tem-se

$$\frac{dS}{S} = \frac{4\epsilon\delta^2}{3(r^2 + \delta^2)\delta}$$

que para

$r \gg \delta$

fica

$$dS = dS/S = \frac{4\delta\epsilon}{3r^2}$$

APÊNDICE II

Determinação da deflexão ϵ da membrana

E - espelho

L - distância da fonte de Luz até o espelho (posição inicial)

Y - Comprimento da haste que suporta o espelho

D - deflexão medida no anteparo

Pela figura acima tem-se

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{L-X} \quad \text{e} \quad \tan(\theta) = \frac{2X}{Y}$$

usando relações trigonométricas apropriadas tem-se

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \quad \text{Assim,}$$

$$\frac{D}{L-X} = \frac{4X}{Y^2 - 4X^2} \quad \text{ou}$$

$$2X = \frac{-LY + Y \sqrt{L^2 + D(D - Y)}}{D - Y}^{1/2}$$

Para ângulos θ pequenos

$$2X = \epsilon$$

e portanto a deflexão ϵ se escreve

$$\epsilon = \frac{-LY + Y \sqrt{L^2 + D(D - Y)}}{D - Y}^{1/2}$$

e para $L \gg Y$ e $D(D - Y) \ll L^2$

$$\epsilon = \frac{YD}{2L}$$

BIBLIOGRAFIA

- 1 - CADY, W. G. - "Piezoelectricity" - Mac Graw Hill, 1946
- 2 - ZIMMERMAN, R. L. - "Tese de Livre Docência" - Comunicação Particular, IFQSC, São Carlos, Brasil (1976)
- 3 - ZIMMERMAN, R. L. ; SUCHICITAL, C. and FUKADA, E. - "Electric Field Induced Piezoelectricity in Polymer Film" - Jour. Appl. Polym. Sci. , 19, 1373 (1975)
- 4 - ZIMMERMAN, R. L. "Induced Piezoelectricity in Isotropic / Biomaterial" - Biophys. Jour., 16, 1341 (1976)
- 5 - FUKADA, E. and YASUDA, I. - J. Phys. Soc. Japan, 12, 1158 (1957)
- 6 - FUKADA, E. - J. Phys. Soc. Japan, 10, 149 (1955)
- 7 - MARTIN, A. J. P. - "Tribo-electricity in Wood and Hair" - Proc. Phys. Soc. , 53, 186 (1941)

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

- a - KEDEM, O. and KATCHALSKY, A. - "A Physical interpretation of the Phenomenological Coefficients of Membrane Permeability" - The Jour. of Gen. Physiology, 45, 143 (1961)
- b - FUKADA, E. - "Piezoelectricity" - Comunicação Particular, IFQSC Brasil (1975)
- c - CONTI, F. and EISENMAN, G. "The Non-Steady Membrane Potential of Ion Exchangers with Fixed Sites" - Biophys. Jour., 5, 247 (1965)
- d - SUCHICITAL, C. "Dissertação apresentada ao IFQSC" - São / Carlos (1978)
- e - INGARD, U. and KRAUSHAAR, W. L. - "Introduction to Mechanics, Matter and Waves" - Addison Wesley Publishing Company, Inc. (1960), Cap, 18