UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

**“INFLUÊNCIA DO RUÍDO QUÂNTICO EM
IMAGENS RADIOLÓGICAS”**

Adelaide de Almeida

Tese apresentada ao Instituto de Física e
Química de São Carlos - USP para a obtenção
do título de: Doutor em Ciências (Física Apli-
cada)

Orientador: Prof. Dr. Thomaz Ghilardi Netto

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos - 1990

69

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE
ADELAIDE DE ALMEIDA APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E
QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 27 DE
AGOSTO DE 1990.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Thomaz Ghilardi Neto

Prof. Dr. Guilherme Fontes L. Ferreira

Profa. Dra. Yvonne P. Mascarenhas

Profa. Dra. Annie France F. Slaets

Prof. Dr. Silvio Crestana

AGRADECIMENTOS

Às pessoas que, por seus exemplos, me levaram a seguir seus caminhos na física das radiações com o intuito de aplicá-la em benefício do ser humano, agradeço cronologicamente: Marcelo Damy de Souza Santos, Dirceu Martins Vizeu, Marília Teixeira Cruz, Bernard Gross, Sergio Mascarenhas de Oliveira e Thomaz Ghilardi Netto.

Ao Professor Thomaz Ghilardi Netto pela orientação, idéias e amizade.

Ao Professor Robert Jennings por ter dado condições intrumentais de verificar experimentalmente os epectros simulados.

Ao Professor Carlos Alberto Pelá pelo constante auxílio em seu laboratório de instrumentação Médica, e ao Professor Robert Lee Zimmerman pelas discussões sobre o efeito Compton.

Ao técnico Eldereis de Paula pela indispensável assessoria na parte computacional

Aos físicos Marco Aurelio Brochi, Marcos Vasques e doutor Roberto Hessel por terem me permitido conhecer os resultados de suas teses mesmo antes de serem publicados.

À Dra. Angela Delete Belucci, por ter colocado o Serviço de Radiologia do HCFMRP-USP a nossa disposição.

Aos colegas do DGFM e do CIDRA da FFCLRP-USP, bem como aos do IFQSC-USP pelos recursos materiais fornecidos

A todos os que direta ou indiretamente contribuíram na confecção deste trabalho.

Aos meus familiares e amigos.

Pelo Apoio Financeiro e Espaço físico que possibilitou a realização deste Trabalho

A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, através do Centro de Instrumentação, Dosimetria e Radioproteção (CIDRA).

A Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo, através do Departamento de Clínica Médica.

Ao Hospital das Clínicas da FMRP da Universidade de São Paulo, através do Serviço de Radiologia.

Aos órgãos financiadores de pesquisa: CAPES, FINEP/PADCT e CNPq

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Definição de Seção de Choque e Coeficiente de Atenuação

2.2 Produção dos Raios X e suas Interações com a Materia

2.4 Grandezas e Unidades em Radiação Ionizante

2.5 Quantificação da Fidelidade da Imagem

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO III

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA PRODUÇÃO E DA ATENUAÇÃO DOS RAIOS X

Introdução

3.1 Coeficientes de Atenuação

3.2 Espectro de Raios X

3.3 Confronto de uma Experiência Simulada com uma Medida

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO DA EFICIÊNCIA QUÂNTICA DAS TELAS INTENSIFICADORAS

Introdução

4.1 Luminescência

4.2 Fósforos Úteis

4.3 Eficiência Monocromática

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO V

RESULTADOS

A - OTIMIZAÇÃO DA RAZÃO SINAL-RUÍDO PARA IMAGENS RADIOGRÁFICAS CONVENCIONAIS

5.1 Imagem Convencional Obtida com Raio X Monocromático

5.2 Sinal-Ruído Considerando a Dose Absorvida

5.3 Imagem Convencional Obtida com um Feixe não Monocromático

5.4 Conclusões

Referências Bibliográficas

B - OTIMIZAÇÃO DA RAZÃO SINAL-RUÍDO PARA IMAGENS RADIOGRÁFICAS POR DUPLA ENERGIA

Introdução

5.5 O Determinante Δ

5.6 Determinação dos Desvios Padrões

5.7 Optimização das Experiências com Energia Dupla

5.8 Dose Absorvida em Experiências com Energia Dupla

5.9 Avaliação da S/R e da (S/R)/D para Imagens por Dupla Energia

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES FINAIS

Introdução

6.1 Imagem Convencional

6.2 Dupla Energia

6.3 Considerações Gerais

Referência Bibliográfica

APÊNDICE I

**ESTATÍSTICA DE POISSON NA TRANSMISSÃO DE
FÓTONS POR UM OBJETO**

APÊNDICE II

**ENERGIAS CRÍTICAS DE ABSORÇÃO E DE
EMIÇÃO PARA VÁRIOS ELEMENTOS**

APÊNDICE III

PROPAGAÇÃO DE ERROS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

CAPÍTULO II

Figura 1 Seção de choque de átomos num material

Figura 2 Atenuação do fluxo de fótons incidentes num material

Figura 3 Comparação de fatores da expressão de Bethe

Figura 4 Perda de energia do elétron por caminho percorrido

Figura 5 Comparação da perda de energia do elétron por radiação e ionização

Figura 6 Alcance do elétron num material homogêneo

Figura 7 Espectro contínuo de raios X

Figura 8 Espectro característico para o tungstênio

Figura 9 Combinação do espectro contínuo com o característico

Figura 10 Comportamento dos fótons de raios X

Figura 11 Coeficientes de atenuação linear para vários materiais

Figura 12 Esquema do efeito Compton

Figura 13 Distribuição em energia dos fótons Compton

Figura 14 Distribuição angular dos Elétrons Compton

Figura 15 Distribuição do elétron por intervalo de ângulo sólido relativa à energia de recuo máxima

Figura 16 Seção de choque de espalhamento dos elétrons Compton

Figura 17 Combinação do espectro contínuo e discreto

Figura 18 Feixe de raios X, filtrado por espessuras de Gd64

Figura 19 Geometria unidirecional e multidirecional para definição de fluxo

Figura 20 Coeficientes de atenuação linear para o ar

Figura 21 Razões das fluências de energia e de fótons por exposição versus energia de fóton

Figura 22 Comportamento da luminância que sai de um objeto

Figura 23 Função transferência de modulação para uma sistema tela-filme

CAPÍTULO III

Figura 1 Comparação de um espectro obtido por simulação e experimentalmente

Figura 2 Comprimento de caminho percorrido por elétrons num alvo

Figura 3 Espectros de raios X considerados de baixa e alta energia

Figura 4 Transmissão dos feixes de baixa e alta energia no material alumínio

Figura 5 Transmissão dos feixes de baixa e alta energia no material lucite

CAPÍTULO IV

Figura 1 Esquema de níveis de energia num material para explicar a emissão Luminescente

Figura 2 Coeficientes de atenuação por massa para o tungstato de cálcio

Figura 3 Esquema de uma tela intensificadora

Figura 4 Atenuação de um fluxo de fótons

Figura 5 Eficiência monocromática do tungstato de cálcio

CAPÍTULO V - PARTE A

Figura 1 Detecção de fótons num filme

Figura 2 Otimização da S/R para detetor com eficiencia dependente da energia

Figura 3 Otimização da S/R para detetor independente da energia

Figura 4 Espectros simulados de raios X

CAPÍTULO V - PARTE B

Figura 1 Detecção de dois fluxos de fótons com energias diferentes

Figura 2 Coeficientes de atenuação linear para osso e tecido mole

Figura 3 Comportamento das funções do denominador da equação (32)

Figura 4 Razão S/R e $(S/R)/D$ para a região do fêmur

Figura 5 Razão S/R e $(S/R)/D$ para a região do joelho

Figura 6 Razão S/R e $(S/R)/D$ para a região do tórax

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO II

Tabela I linhas de emissão do tungstênio

Tabela II Grandezas da radiação ionizante

CAPÍTULO III

Tabela I Intensidades relativas das linhas de emissão do tungstênio

Tabela II Valores da constante de (T-W) em função das energias dos fótons

Tabela III Características dos feixes utilizados de alta e baixa energia

CAPÍTULO V - PARTE A

Tabela I Absorbâncias práticas obtidas de exames convencionais

Tabela II valores ótimos do kVp do gerador para espessuras do osso e tecido mole quando
 $\epsilon = 100\%$

Tabela III valores ótimos do kVp do gerador para espessuras do osso e tecido mole quando
 $\epsilon \ll 100\%$

CAPÍTULO V - PARTE B

Tabela I Otimização da (S/R)/D para algumas regiões anatômicas em função das
espessuras do osso e do tecido mole

RESUMO

Os limites fundamentais da resolução espacial e do contraste que se consegue nas imagens radiológicas são devidos à natureza quântica da radiação X. Pequenos detalhes de baixo contraste nas estruturas anatômicas podem ser revelados somente pelo aumento da fluência de fótons absorvidos por aquelas estruturas. Este é um procedimento aceitável nas aplicações industriais, mas, proporciona um risco ao paciente nas aplicações clínicas dos raios X. Nós desenvolvemos um procedimento analítico para encontrar o melhor compromisso entre as condições diagnósticas de alta absorbância no paciente, para a qual poucos fótons levam informação aos detetores, e de baixa absorbância no paciente, para a qual as flutuações quânticas no grande número de fótons que alcançam os detetores mascaram a informação. A análise é estendida ao método da dupla energia para obtenção de imagens diagnósticas melhoradas digitalmente. Para esta finalidade, a escolha das energias dos fótons precisa ser otimizada, como também o tempo destinado à exposição em cada energia. A otimização do tempo da exposição é um novo conceito experimental. Os procedimentos analíticos são desenvolvidos para encontrar as soluções numéricas, utilizando condições gerais relativas aos espectros de raios X, aos filtros característicos adicionais, e à sensibilidade do detetor. A utilização destes novos métodos simultaneamente com o diagnóstico deve reduzir a dose absorvida enquanto mantém a qualidade, não somente das imagens diagnósticas convencionais utilizando o sistema de detecção tela-filme, mas também, das imagens melhoradas pelo computador na tomografia feita por dupla energia. A dose absorvida deverá ser reduzida na obtenção das imagens por subtração digital, como aquelas devidas às diferenças temporais ou aos agentes de contraste incorporados pelo paciente. Este método também será importante nas futuras aplicações clínicas da radiação síncrotron.

ABSTRACT

The fundamental limits to the spatial resolution and to the contrast attainable in radiological images are owing to the quantum nature of X-radiation. Small low-contrast details in anatomic structures may be revealed only by increasing the fluence of photons absorbed by those structures, an acceptable procedure in industrial applications but which incurs a proportional risk to the patient in clinical applications of X-rays. We develop an analytical procedure to find the optimum compromise between the diagnostic conditions of high patient absorbance, for which few photons remain to carry information to the detectors, and low patient absorbance, for which the quantum fluctuations in the large numbers of photons reaching the detectors obscure the information. The analysis is extended to the dual-energy method of obtaining digitally enhanced diagnostic images for which both photon energies must be optimized, as well as the optimum counting time allotted to each, a new experimental concept. The analytical procedures are developed for obtaining numerical solutions using general X-ray spectra, external filter characteristics, and detector sensitivity. Use of these new methods to computer control exposures should reduce the absorbed dose while maintaining the quality, not only of conventional film-screen diagnostic images, but of computer enhanced images obtained in dual-energy tomography, in contrast agent and temporal digital subtraction radiology and in the future clinical applications of synchrotron X-radiation as well.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os fótons de raios X utilizados em Radiologia Diagnóstica são aqueles produzidos quando alguns elétrons, com energia adequada que é determinada pela quilovoltagem aplicada ao tubo de raios X, são freiados nas interações com átomos ao incidirem no anodo. Os fótons, após serem originados, prosseguem em linha reta em todas as direções, alguns atravessando o paciente e sendo detetados num filme ou num outro detetor capaz de revelar uma imagem, tipo sombra, da estrutura interna do paciente.

A probabilidade dos fótons serem absorvidos ou espalhados pelas janelas, filtros, ar, paciente e a probabilidade de serem detetados no filme, são determinadas pelas interações com os átomos presentes em seus caminhos. Em qualquer interação entre um fóton e um átomo, há a transferência total ou de uma grande parte da energia inicial do fóton para aquele átomo. A transferência da energia é “*quantizada*”, e pode ser determinada apenas no sentido probabilístico; por este motivo, podemos falar da dose absorvida pelo paciente, da eficiência do detetor, da atenuação do fluxo de fótons incidentes, e do próprio fluxo incidente, apenas em termos de médias.

Em cada uma destas quantidades citadas, podem ser observadas flutuações estatísticas, quando for repetida uma seqüência de medidas em condições aparentemente idênticas. Por exemplo, se o escurecimento de um filme for devido à absorção de uma média de 100 fótons em cada milímetro quadrado do filme, então um instrumento (o *densitômetro*) que mede a transmissão da luz visível neste milímetro quadrado, *pixel*, vai registrar um desvio estatístico nesta medida, relativa às medidas nos “*pixels*” vizinhos. As flutuações definem uma distribuição gaussiana em torno da transmissão média, com um desvio padrão de 10% ou inverso da raiz quadrada do 100. Este desvio padrão na densidade ótica, ou “*quantum mottle*”, é uma consequência inevitável da natureza quântica dos raios X e das interações dos fótons com a matéria.

Obviamente, estas flutuações limitam a nitidez da imagem, da mesma forma que a granularidade do filme, o movimento do paciente durante a exposição, o tamanho e forma do ponto “focal” no anodo do gerador de raios X, e outros fatores instrumentais. Entretanto, a influência degradante destes fatores instrumentais pode ser reduzida arbitrariamente, enquanto nenhuma manipulação instrumental ou numérica, pode reduzir a flutuação estatística intrínseca em uma seqüência de medidas de número de fótons por unidade de tempo num fluxo aparentemente constante.

Percebemos que um simples aumento do fluxo incidente, do tempo de exposição, da eficiência do detetor ou da área do “*pixel*” vai aumentar o número dos fótons detetados, e reduzir, na proporção da raiz quadrada, a flutuação estatística na imagem. Porém, percebemos também, que o aumento em alguns destes fatores, como do fluxo incidente ou do tempo de exposição, tem

uma influência diretamente proporcional na dose absorvida pelo paciente, isto quer dizer que, a dose aumenta mais rapidamente do que diminuem as flutuações estatísticas. O radiologista deve escolher estes fatores ponderando os riscos (em termos de dose absorvida) e os benefícios ao paciente (imagem mais nítida, com maior precisão no diagnóstico).

Deixando estes fatores instrumentais de lado, reconhecemos que os radiologistas, desde Wilhelm Conrad Roentgen¹ em 1895, que pode ser considerado o primeiro radiologista, sabiam que os raios X mais energéticos (raios X “duros”) penetram mais no paciente do que os raios X menos energéticos (raios X “moles”). Estes pioneiros perceberam que os raios X de baixa penetração davam imagens pouco nítidas, e que os de mais alta penetração, também não revelavam um contraste significativo das estruturas internas do paciente. Perceberam também, que havia uma penetração, ou absorbância, que otimizava a nitidez da imagem. Desta maneira, escolhiam empiricamente, a quilovoltagem do gerador para cada diagnóstico, sem nada saberem da natureza quântica dos raios X ou da estrutura atômica da matéria.

O primeiro estudo técnico foi feito por Rose e Shapiro² em 1947. Eles mostraram que nas condições de alta e baixa penetração do feixe, torna-se difícil, devido as flutuações quânticas, a obtenção de um erro mínimo na determinação do coeficiente linear de absorção. Os autores afirmaram que este fato pode ocorrer em várias áreas, inclusive naquelas ligadas às imagens de raios X, mas nunca chegaram a testar as suas otimizações para imagens radiográficas em radiodiagnóstico.

Sturm e Morgan³, em 1949, deram início à base teórica de que o ruído principal em radiodiagnóstico é devido à flutuação quântica, cujo comportamento pode ser representado por uma distribuição estatística de Poisson. A sedimentação desta teoria veio alguns anos mais tarde, com Rimkus e Bailey⁴. No ano de 1962, Clare, Splettstosser e Seeman⁵ demonstraram experimentalmente que o maior contribuinte do ruído radiográfico é o ruído quântico. Conclusão esta que vem sendo partilhada por diversos pesquisadores^{6,7,8} que vem trabalhando com imagens nesta área.

Dos trabalhos citados, podemos afirmar que a emissão e interação dos raios X são eventos randômicos, por que dependem da energia que é quantizada, e estes eventos podem ser previstos estatisticamente pela distribuição de Poisson. O erro estatístico devido à flutuação quântica (ruído quântico), é considerado o mais importante, porque somente a partir de um número finito de fótons uma imagem pode ser criada, e por este motivo, o ruído quântico tem uma natureza fundamental.

Nas duas últimas décadas, a evolução da eletrônica e da informática permitiu a utilização de computadores em radiologia nas técnicas como tomografia digitalizada, subtração digital, e feixes de dupla energia. Com estas técnicas veio a necessidade de se procurar analiticamente, a otimização do sinal relativo às flutuações estatísticas e à dose de radiação absorvida pelo paciente. Sendo que a flutuação estatística se determina exclusivamente pela raiz quadrada do número de fótons detetados num detetor do tamanho de um “pixel”, independentemente das flutuações na sua produção, filtragem e atenuação, a formalização do problema da otimização torna-se conceitualmente simples.

Antes de começarmos o estudo da otimização, introduzimos, nos capítulos I e II, os conceitos básicos de radiação e de imagem, que serão importantes para o entendimento dos propósitos deste trabalho. No capítulo III, demonstramos a confiabilidade dos nossos métodos numéricos em simular experiências em radiologia.

No capítulo IV, fazemos um estudo da absorção de raios X e emissão de luz por uma tela intensificadora, com a finalidade de avaliar a sua eficiência que será fundamental para o desenvolvimento de uma expressão analítica que melhor represente a relação sinal- ruído (S/R) em nosso estudo do ruído quântico na imagem convencional e na imagem por Dupla Energia.

Apresentamos o resultado do nosso estudo no capítulo V, inicialmente estudando a formação de uma imagem radiográfica convencional, produzida com uma combinação de filme mais tela. Obviamente, que nestas condições, não esperamos uma otimização em todo o plano da imagem, já que a absorbância do paciente varia muito, devido a presença ou não de estrutura óssea, no campo a ser examinado. A otimização será concentrada numa região menor e de maior interesse para o diagnóstico médico. Futuramente, com o uso dos Síncrotrons⁹, com as suas fontes monocromáticas colimadas e de intensidade e energia quase que instantaneamente variáveis, os algoritmos desenvolvidos nesta tese poderão ser utilizados para programar as condições ótimas em cada "pixel" de uma imagem.

Depois da determinação das condições ótimas para a produção das imagens convencionais, trataremos das condições ótimas para imagens produzidas por dupla energia, onde, além das energias, a fração do tempo (ou fluência) destinada à exposição em cada energia, deverá ser otimizada para esta técnica. Faremos um estudo analítico da otimização, considerando a energia, o tempo de exposição e a dose de radiação para uma imagem feita com dois espectros de raios X (dupla energia), onde deve ser avaliada a melhor divisão do tempo utilizado nas duas medidas.

Apesar do ruído quântico ser considerado de fundamental importância no estudo da otimização de uma imagem radiográfica, não se encontra na literatura, um estudo detalhado sobre este assunto, ou seja, sobre a otimização da absorbância do paciente, o argumento M da exponencial da transmissão; como também não foi apresentado até o presente, um estudo que leve em conta o tempo que o paciente fica exposto à radiação em cada energia.

No capítulo V, apresentamos os resultados numéricos e experimentais comprovando as expressões analíticas para a relação sinal-ruído (S/R) através de simulações computacionais para várias condições de feixe, tanto para a imagem convencional como também para o método da dupla energia.

No capítulo VI, apresentamos as conclusões do trabalho.

No final, apresentamos, na forma de apêndices algumas informações necessárias para um melhor acompanhamento do texto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Röntgen, W. C. *Eine Neue Art von Strahlen Sitzungs - Berichte*. Phys. Med. Ges. Wursburg, 137-141, 1895
- 2 Rose, M. E. & Shapiro, M. M. *Statistical Error in Absorption Experiments*. Phys. Rev. 74:1853-1864, 1948.
- 3 Sturm, R. E. & Morgan, R. H. *Screen Intensification Systems and their Limitations*. Am. J. Roentg. 62: 617-634, 1949.
- 4 Rimkus, D. & Bailey, N. A. *Quantum Noise in Detectors*. Medical Physics, 10, 470-471, 1983.
- 5 Clare, H. M. ; Splettstosser, H. R. & Seeman, H. E. *An Experimental Study of the mottle produced by X-Ray Intensifying Screens*. Am. J. Roentg. 19:168-174, 1962.
- 6 Christensen, E. E.; Curry III; T. S. & Dowdey, J. E. *An Introduction to the Physics of Diagnostic Radiology*. Philadelphia, Lea & Febiger, 2 ed., 1979, 428p.
- 7 Ter-Pogossian, M. M. *The Physical Aspects of Diagnostic Radiology*. New York, Harper & Row Publishers, 1969. 426p.
- 8 Macovski, A. *Medical Imaging Systems*., New Jersey, Prentice- Hall, 1983. 249p.
- 9 Castellano, E. E. & Tucci, P. it Angiografia Cardíaca por Meio do Método Dicro-mográfico. In: Técnicas e Aplicações da Radiação Sincroton. Radiação Sincroton: anais do encontro sobre Técnicas e Aplicações da ..., Rio de Janeiro, 1-3 agosto, 1983. Rio de Janeiro, 1983. p. 357-366

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS

2.1 DEFINIÇÃO DE SEÇÃO DE CHOQUE E COEFICIENTE DE ATENUAÇÃO

2.1.1 *Seção de Choque*

De acordo com Schiff¹, existem duas maneiras para entender o significado físico da seção de choque de partículas alvo, como elétrons, átomos ou núcleos sendo bombardeados por outras partículas. Nesta tese consideraremos os fótons de raios X como projéteis.

Vamos imaginar que temos N partículas alvo sendo bombardeadas por um fluxo uniforme Φ ($\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$) de fótons incidentes como apresentado na figura (1). O número de fótons do fluxo incidente espalhados ou absorvidos por unidade de tempo dn/dt (s^{-1}) é proporcional a ambos Φ e N

$$dn/dt = \sigma \Phi N \quad (1)$$

Suponhamos que N não seja reduzido durante o bombardeamento, e que o fluxo não seja atenuado na região do alvo, condições possíveis somente se N for pequeno num sentido que será examinado rigorosamente mais tarde. No momento, é importante que nenhuma partícula fique escondida atrás de outra. A constante de proporcionalidade σ (m^2) tem dimensões de área e é chamada de seção de choque total de cada partícula alvo. Ela depende, nos detalhes, das interações entre fótons incidentes e as partículas alvo, de seus movimentos relativos, spins, e outras propriedades intrínsecas.

Uma segunda interpretação deveria associar a área σ (m^2) com a área do fluxo incidente que contém dn/dt fótons, cada um a ser espalhado por uma única partícula alvo, então:

$$\Phi \sigma = (dn/dt)/N \quad \text{s}^{-1} \quad (2)$$

Nesta tese, achamos útil enfatizar a natureza probabilística das definições de Schiff, imaginando N partículas alvo num volume cilíndrico de espessura dx e seção reta da .

A probabilidade que um único fóton incidente será espalhado ou absorvido a partir de uma única partícula alvo pode ser associado com a fração da área

$$P = \sigma/da \quad (3)$$

O número de fótons removido do número incidente por unidade de tempo sobre a área pode ser escrito como

Figure 1: Representação da seção de choque para um fluxo de raios X incidindo nos N átomos do material do alvo.

$$dn/dt = (\Phi da) \left(\frac{\sigma}{da} \right) N = \Phi \sigma N \quad s^{-1} \quad (4)$$

em concordância com a interpretação de Schiff. O produto $N\sigma$ (m^2), chamado de seção de choque macroscópica, algumas vezes é útil para um alvo particular.

Em seguida, nosso interesse será a atenuação dentro de alvos espessos.

2.1.2 Coeficientes de Atenuação

Referindo-nos à figura (1) acima onde as partículas alvo estão dentro do volume $da \, dx$ (m^3), o número de fótons removido do fluxo incidente por segundo se torna

$$dn/dt = \Phi \sigma N = \Phi \sigma (N/da \, dx) da \, dx \quad s^{-1} \quad (5)$$

os parênteses claramente englobam a densidade das partículas alvo. Associando o produto $\Phi \, da$ com o número de fótons por segundo (seg^{-1}) exatamente incidente neste alvo.

$$dn/dt = (\Phi da) (\sigma N/da \, dx) dx \quad (6)$$

$$dn/dt = n \mu dx \quad (7)$$

onde substituímos $\sigma/da \, dx$ pelo coeficiente μ , que vem a ser a probabilidade de que um fóton seria removido do feixe por unidade de comprimento do caminho dentro do alvo em . Pela conservação

Figure 2: Atenuação exponencial do fluxo de raios X num material homogêneo. Nesta figura podemos inferir que para uma espessura igual ao recíproco do coeficiente de atenuação linear teremos o fluxo atenuado por $1/e$.

do número de fótons, o número $(dn/dt)dt$ (seg^{-1}) precisa ser responsável pela redução dn do feixe incidente, assim o sinal negativo simboliza esta redução.

$$\frac{dn}{n} = -\mu dx \quad (8)$$

Multiplicando pela área da ou pelo tempo t , vemos que esta expressão vale também para o fluxo $d\Phi/\Phi$ ou para a fluência $d\Psi/\Psi$ respectivamente.

Esta equação é comumente utilizada para definir o coeficiente linear de atenuação μ . Nós enfatizamos a natureza probabilística dos processos de interação, interpretando μdx como a probabilidade de um fóton sumir do feixe na espessura dx .

A condição citada acima, de que o fluxo não muda na região do alvo, pode agora ser removida pela integração desde a superfície do volume de um arranjo arbitrário de átomos alvo até qualquer profundidade x .

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\mu x} \quad (9)$$

O fator $e^{-\mu x}$ é a probabilidade de não ter tido nenhuma interação até a profundidade x e a figura (2) mostra o comportamento do fluxo atravessando um material com espessura x .

O inverso da probabilidade por unidade de comprimento, $1/\mu$ (m), é visto agora como sendo um comprimento característico, para o qual o fluxo deverá ser atenuado por um fator $1/e$. Ainda neste capítulo, será mostrado que, para um amplo alcance de energia de fótons, a probabilidade de interação depende somente da densidade de massa ρ (kg/m^3) do material do alvo. Portanto é útil escrever o argumento da exponencial como:

$$\mu x = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)(\rho x) \quad (10)$$

onde μ/ρ (m^2kg^{-1}) é chamado de coeficiente de atenuação de massa. A espessura é medida em unidades de ρx em (kg/m^2), ou geralmente em (g/cm^2).

Esta expressão integral familiar, na equação (9), usando funções aparentemente contínuas, não deve ocultar o fato de que o fluxo dos fótons atenuados têm uma natureza quântica desde a sua formação no gerador de raios X, e tendo essencialmente interações randômicas no alvo, mantêm a sua natureza estatística (apêndice I). Assim a formação da imagem radiológica será fundamentalmente limitada pela natureza estatística do feixe final transmitido. Quais são estes limites, será o assunto do capítulo V.

2.2 PRODUÇÃO DE RAIOS X E AS SUAS INTERAÇÕES COM A MATÉRIA.

Introdução

Neste capítulo, necessitamos primeiramente apresentar as interações dos elétrons com a matéria. É importante entender como os elétrons produzem fótons nas interações atômicas no alvo da ampola de raios X e uma vez que os fótons interagem com o paciente e detetores, como os elétrons perdem a sua energia por ionização nos materiais.

Um gerador de raios X, é composto de várias partes: O tubo, a fonte de alta tensão, o sistema de refrigeração, os transformadores e circuitos elétricos e o painel de comando. Embora todas estas partes sejam importantes, vamos nos fixar somente nas duas primeiras. O tubo é feito de vidro e evacuado para permitir a livre passagem dos elétrons projéteis. Ele contém um catodo, que é um filamento de tungstênio que quando aquecido por uma corrente, é responsável pela emissão termoiônica de elétrons, e um anodo de alto Z como alvo que possibilita o freiamento adequado dos elétrons criados no catodo. O tubo, através do anodo, está ligado a um sistema de refrigeração, já que quase a totalidade da energia dos elétrons projéteis é transformada em calor no alvo².

O potencial de aceleração deve ser calculado para permitir que os elétrons ganhem energia cinética suficiente para alcançarem o anodo e serem freiados para produzirem raios X com o espectro desejado.

2.2.1 Perda de energia do elétron no material

Os elétrons monoenergéticos, ao penetrarem no alvo, transferem sua energia cinética em pequenas parcelas ao meio através de interações coulombianas ao longo de seus caminhos, ionizando os elétrons do meio. Também perdem a sua energia através de interações coulombianas dicretas com os núcleos dos átomos alvo. Nestas últimas interações, muito mais rara para elétrons com energia menor do que mc^2 , há um campo atrativo entre elétrons e núcleos que faz com que os

Figura 3: Comparação dos dois fatores na expressão de Bethe para $(dT/ds)_{ion}$. A curva (b), na escala ampliada pelo fator 10 mostra que a função $f(1-\beta^2)$ é desprezível para elétrons da energia comum em radiologia. A curva (a) mostra o fator logarítmico dominante.

elétrons sejam freiados com perda de energia proporcional a intensidade quadrada dos campos de atração ou Z^2 . Uma vez que o campo de atração varia inversamente com a distância (parâmetro de impacto) entre as partículas envolvidas, a energia do fóton emitido será tanto maior quanto menor for a distância ao núcleo, ou seja quanto maior for a intensidade do campo de atração ou Z .

A perda da energia do elétron, por ionização no material, por caminho percorrido, foi desenvolvida por Bethe³ em 1930 que forneceu as seguintes expressões:

$$-\left(\frac{dT}{ds}\right)_{ion} = 4\pi r^2 \frac{mc^2}{\beta^2} NZ \left[\ln \beta \sqrt{\frac{T}{2mc^2}} \frac{(T + mc^2)}{I} + f(\sqrt{1 - \beta^2}) \right] \text{ erg cm}^{-1} \quad (1)$$

$$\approx 4\pi r^2 \frac{(mc^2)^2}{T} NZ \left[\ln \frac{T}{I} + f(1) \right] \quad T \ll mc^2, \quad \beta^2 \approx 2T/mc^2 \quad (2)$$

$$\approx 4\pi r^2 mc^2 NZ \left[\ln \frac{T^{3/2}}{I\sqrt{2mc^2}} + f(0) \right] \quad T \gg mc^2, \quad \beta^2 \approx 1 \quad (3)$$

onde dT é a variação da energia cinética do elétron perdida em cada incremento ds do material, N é o número de átomos por centímetro cúbico, Z é o número atômico do material do alvo, r

Figura 4: Perda de energia cinética por comprimento de caminho percorrido, por um elétron, num material, em função da energia cinética inicial do elétron. Para saber dT/dS para um material desejado, basta multiplicar por sua densidade.

$= (e^2/mc^2)$ é o raio clássico do elétron, β é a razão entre a velocidade do elétron projétil e a velocidade da luz, I é o potencial médio de excitação do átomo que vale aproximadamente $11 \times Z$ (eV), T é a energia cinética relativística do elétron, e mc^2 é a energia de repouso do elétron.

Utilizando $x = \sqrt{1 - \beta^2}$, a função f pode assumir as seguintes formas

$$2f(1 - \beta^2) = x^2 + (1 - x^2)/8 - (2x - x^2) \ln 2 \quad (4)$$

$$f(1) = 1/16 \quad T \ll mc^2 \quad \beta^2 \ll 1 \quad (5)$$

$$f(0) = (1 - \ln 2)/2 \quad T \gg mc^2 \quad \beta^2 \approx 1 \quad (6)$$

A função $f(\sqrt{1 - \beta^2})$ tem pequenos valores relativos aos do primeiro termo na expressão de Bethe. Na figura (3) temos a comparação das duas contribuições em escalas lineares diferentes por um fator dez.

A figura (4) mostra a perda linear de energia calculada pela expressão exata de Bethe. A curva da figura (4) é obtida da equação (1) dividida pela densidade para eliminar a maior dependência do número atômico Z do material

$$NZ = N_A \frac{Z}{A} \rho \quad (7)$$

onde $N_A = 0.6023 \times 10^{24}$ é o número de Avogadro, Z e A são os números atômicos e peso atômico respectivamente. A razão $Z/A \approx 1/2$ para os biomateriais.

Para utilizar a figura (4) para materiais biológicos, é necessário multiplicar os valores pela densidade do material. Os valores quase não dependem do número atômico dos átomos do material.

Com as energias eletrônicas, desde as bem abaixo das utilizadas em geradores de raios X diagnósticos, até 100 (keV), a expressão de Bethe é uma reta monotônica logarítmica sugerindo a seguinte aproximação

$$-\left(\frac{dT}{ds}\right)_{ion} \simeq .077 \rho (1/T^{.75}) \quad MeV/cm \quad (8)$$

com a energia T em keV. Recentemente Hessel³ no IFQSC, confirmou esta dependência para energias eletrônicas entre 200 a 5000 (eV) medindo a produção dos elétrons secundários que depende de $(dT/ds)_{ion}$ perto de superfícies dos materiais sólidos sendo bombardeados pelos elétrons rápidos.

Utilizaremos uma expressão como a equação (8) na seção seguinte que trata da avaliação numérica da produção dos raios X pelos elétrons que penetram uma distância dentro do anodo do gerador e perdem uma parte da sua energia antes de terem um encontro nuclear capaz de produzir fótons de raio X.

A expressão de Bethe também é fundamental no cálculos da dose devida aos elétrons na radioterapia de tumores. Além de perder energia pela ionização no material, isto é, interagir com elétrons orbitais nos átomos do material, os elétrons podem passar suficientemente perto dos núcleos do material sofrendo um desvio grande e perdendo parte da sua energia pela radiação de fóton, o "Bremmstrahlung", ou raio X. Os encontros nucleares são relativamente raros, entretanto são os únicos responsáveis pela produção de raios X.

Sabe-se⁵ que a taxa de perda de energia por caminho percorrido por elétron é diretamente proporcional ao quadrado do número atômico do alvo, da densidade de átomos no material e da

Figura 5: Perda de energia de elétrons no tungstênio pela ionização (curva b) e pela radiação (curva a). A curva (a) (que por falta de uma teoria única) tem três segmentos e demonstra a baixa eficiência da conversão de energia eletrônica em fótons de raios X diagnósticos. A curva (c), é uma aproximação utilizada nesta tese.

energia cinética do elétron incidente. Esta expressão é dada por

$$-(dT/dS)_{rad} = 4N Z^2 r^2 \frac{T}{137} \frac{4}{3} \quad T \ll mc^2 \quad (9)$$

$$-(dT/dS)_{rad} = 4N Z^2 r^2 \frac{T}{137} \left[\ln \frac{2T}{mc^2} - 1/3 \right] \quad mc^2 \ll T \ll 137mc^2 Z^{1/3} \quad (10)$$

$$-(dT/dS)_{rad} = 4N Z^2 r^2 \frac{T}{137} \left[\ln \frac{183}{Z^{1/3}} + 1/18 \right] \quad T \gg 137mc^2 Z^{1/3} \quad (11)$$

Na figura (5) temos a perda pela radiação, juntamente com a perda devida a ionização para o tungstênio, material comum aos geradores de raios X, com $Z=74$. Para a energia $T=10$ MeV, bem acima das utilizadas em radiodiagnóstico.

$$(dT/dS)_{rad} = (dT/dS)_{ion} \quad (12)$$

Para energias superiores a 10 MeV, os elétrons perdem energia principalmente por radiação, e o alvo não necessita refrigeração.

Figura 6 : Alcance do elétron dentro de um material em g/cm^2 . O alcance é composto por duas curvas porque tem dependências energéticas diferentes em duas regiões de energia que são de $[.01 - 3] \text{ MeV}$ e de $[1 \text{ a } 20] \text{ MeV}$. Esta curva pode ser utilizada para qualquer material desde que multiplicando o alcance obtido na curva pela densidade do material de interesse.

No capítulo III, veremos como podemos obter a perda de energia por radiação a partir de uma simulação numérica que utilizaremos para o estudo da S/R nas imagens radiológicas.

2.2.2 Alcance do Elétron

O elétron perde energia gradualmente durante o seu percurso, e só para quando toda energia cinética foi dissipada. Esta perda de energia, vista em detalhes na subseção anterior, permite calcular o alcance médio do elétron de energia inicial T .

A distância que o elétron percorre na materia, conhecida como alcance (S), é definida como a média de comprimento do caminho percorrido por elétrons monoenergéticos.

O alcance do elétron ("Range") é obtido da expressão total da perda de energia do elétron por ionização. Desta maneira ele pode ser escrito como

$$S = \int_{T_0}^0 \frac{dT}{(dT/dS)_{ion}} \quad (13)$$

A unidade do alcance geralmente é dada em metro e para facilitar o uso do coeficiente de atenuação por massa, consideramos o produto ρS em grama por centímetro quadrado (g/cm^2).

O conhecimento do alcance é importante em várias áreas como na radioterapia para tratamento de neoplasias com elétrons de alta energia e na decisão da espessura do alvo num projeto de um tubo de raios X. Nesta Tese, utilizamos este conceito na determinação das correções no espectro de "Bremmstrahlung".

O alcance (ρS) em função da energia foi obtido empiricamente por vários autores. Katz e Penfold^{6,7} reunindo todos estes dados, propuseram duas funções de alcance em mg/cm^2 . A primeira é dada para elétrons com energia no intervalo de [.01 a 3] MeV.

$$\rho S = .412(T)^{1.265 - .095 \ln(T)} \quad g \text{ cm}^{-2} \quad (14)$$

A segunda função é dada para o intervalo [1 a 20] MeV.

$$\rho S = .530(T) - .160 \quad g \text{ cm}^{-2} \quad (15)$$

O ajuste destas funções nos dá o alcance do elétron em qualquer meio (figura 6). A curva é quase universal, pois, a dependência da densidade do meio foi eliminada.

No capítulo III, veremos como a perda de energia dos elétrons por caminho percorrido no alvo de um tubo de raios X é utilizada para obter a intensidade dos raios X que são emitidos do alvo.

2.2.3 Espectros

Os fótons de raios X produzidos através das interações nucleares, já tratados na subseção anterior, têm uma distribuição contínua em energia. Esta distribuição é conhecida como espectro

Figura 7: Espectro de “Bremsstrahlung” que sai do alvo do tubo sem considerar qualquer atenuação.

contínuo ou de “Bremsstrahlung”, cuja representação aparece na figura (7). A energia máxima que o fóton pode ter, corresponde exatamente à energia dos elétrons projéteis, já que fótons não podem ser produzidos com energia maior do que aquela fornecida aos elétrons pelo potencial de aceleração do gerador de raios X.

Na interação do elétron projétil com o elétron de uma das camadas do átomo, este último pode ser arrancado dando origem a uma lacuna que é preenchida por um dos elétrons das camadas mais externas. Quando um elétron faz uma transição para uma camada mais interna há a emissão de raios X cuja energia é igual a diferença das energias entre as camadas envolvidas. De acordo com Dyson⁸, após a criação de uma lacuna em decorrência da ionização, há um rearranjo dos elétrons orbitais que envolve diversos estágios de criação e preenchimento de lacunas onde vários fótons são emitidos simultaneamente e dá uma idéia de que a lacuna está caminhando para fora do átomo. Os raios X originados através deste processo são conhecidos como raios X característicos porque uma vez dependentes das energias de ligação das camadas do átomo, também dependem do número atômico do elemento característico para cada elemento. Os raios X característicos são superpostos no espectro contínuo de “Bremmstrahlung”.

Num gerador de raios X para diagnóstico, em geral são utilizados alvos de tungstênio. Por este motivo, na tabela I, apresentamos as transições dos elétrons nas camadas, e correspondentes linhas de emissão^{8,9} para o tungstênio.

Figura 8: Espectro característico do tungstênio cujas linhas são correspondentes às transições permitidas entre as camadas deste átomo.

TABELA I

Camadas de transição e respectivas linhas de emissão para o tungstênio.

DA CAMADA	PARA A CAMADA	LINHA DE EMISSÃO
M _V	L _{III}	L _{α₁}
M _{IV}	L _{III}	L _{α₂}
M _{IV}	L _{II}	L _{β₁}
M _{III}	L _I	L _{β₃}
N _V	L _{III}	L _{β₂}
N _{IV}	L _{II}	L _{γ₁}
L _{III}	K	K _{α₁}
L _{II}	K	K _{α₂}
M _{III}	K	K _{β₁}
N _{II} N _{III}	K	K _{β₂}

O espectro devido aos raios X característicos é um espectro discreto, isto é, possui somente fótons de algumas energias como podemos observar no espectro dos raios X característicos para o tungstênio apresentado na figura (8). No capítulo III apresentamos detalhes sobre a obtenção da expressão empírica do espectro característico.

Figura 9: Espectro contínuo e espectro discreto que saem do alvo sem descontar qualquer atenuação.

A produção dos raios X de freiamento ou de “Bremsstrahlung” se dá simultâneamente no alvo do tubo do gerador produzindo um espectro composto como o da figura (9) onde a componente discreta se superpõe à componente contínua. O espectro final que sai do tubo é bastante diferente deste apresentado devido aos efeitos de filtragem que ocorrem em algumas partes do tubo e que citaremos mais adiante.

2.2.4 Interação Dos Raios X Com a Matéria

Aproveitando a interpretação probabilística dos coeficientes σ e μ , podemos discutir agora os processos físicos de interação dos raios X com a matéria definindo os coeficientes parciais, um para cada processo.

Fótons de raios X ao penetrarem num paciente, num filme, numa tela intensificadora, ou em detetores, podem se comportar das seguintes maneiras ilustradas na figura (10).

- 1 - Ser transmitidos sem interagir.
- 2 - Ser totalmente absorvidos no material.
- 3 - Ser desviados de suas direções iniciais, sem perda de energia.
- 4 - Ser desviados de suas direções iniciais, com perda de energia.

Figura 10: Possíveis comportamentos de um feixe de fótons de mesma energia após atravessar um material com espessura x .

Nas condições 2, 3, e 4 nas quais os fótons são absorvidos ou defletidos do feixe, podemos ter uma redução do número de fótons que é conhecida como atenuação. A atenuação do número de fótons varia exponencialmente como aumento da espessura do material utilizado como atenuador como apresentado na figura (2) da subseção 2.1.

Na seção anterior, vimos que o fluxo de fótons remanescente de um fluxo Φ_0 incidente num material de espessura x é dado por:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x} \quad (16)$$

Os fótons ao serem absorvidos ou defletidos do feixe de raios X, com probabilidade $1 - \exp(-\mu x)$, o são devido às interações que ocorrem a nível atômico nos materiais. Por exemplo, na absorção ou no espalhamento com perda de energia temos a transferência de energia do fóton para elétrons do material com estes perdendo suas energias através de interações coulombianas ao longo de seus caminhos. Interações à nível nuclear ocorrerão somente para energias de fóton da ordem de MeV, que para o nosso propósito não têm interesse nesta tese.

Figura 11: coeficiente de atenuação linear para vários materiais. Notamos nesta figura a proximidade dos comportamentos dos coeficiente dos materiais músculo e lucite como também do osso e alumínio. Esta proximidade de comportamentos leva a escolha de lucite e alumínio para simulação da imagem de tecido mole e osso na faixa de energia utilizada em diagnóstico.

Os tipos de interações da radiação eletromagnética com a matéria para fótons na faixa de energia utilizada em radiologia diagnóstica (de 10 a 150 keV) são o Espalhamento Coerente, o Efeito Fotoelétrico e o Espalhamento Compton.

A absorção pode ocorrer devido aos efeitos fotoelétrico e Compton e a deflexão, também conhecida como espalhamento, pode ocorrer devido aos efeitos Compton e Espalhamento Coerente. Estes efeitos citaremos a seguir.

O Espalhamento Coerente também conhecido como espalhamento Rayleigh é uma interação que pode ocorrer entre uma onda incidente e os elétrons de um átomo. A onda eletromagnética incide sobre o átomo, este recua o suficiente para conservar o momento, e os elétrons, devido ao campo elétrico da onda incidente, são postos a vibrar na mesma frequência da onda. Vibrando, os elétrons emitem radiações com a mesma frequência que foram excitados porém com um pequeno desvio relativo à direção do fóton incidente. Após a emissão da radiação o átomo retorna ao seu estado não perturbado. Em todo processo não há perda de energia, não havendo perda de energia, não haverá produção de ionização e em decorrência não haverá dose absorvida no material. A importância deste efeito no coeficiente de atenuação total¹⁰ é de no máximo 5% relativamente aos outros efeitos que citaremos.

O Efeito Fotoelétrico é um efeito de absorção total no qual o fóton desaparece no material

Figura 12: Diagrama do efeito Compton, no qual, após o choque do fóton incidente com o elétron ligado, ocorre a ionização do átomo e o desvio do fóton relativo à sua direção de incidência.

atenuador e por este motivo não é transmitido. Neste efeito um fóton ioniza um átomo, gastando parte de sua energia E para vencer a energia de ligação do elétron na camada, geralmente as mais internas, e a diferença de energia é cedida ao elétron como energia cinética T .

O elétron liberado segue ionizando os átomos em seu percurso até perder toda sua energia. Na figura (11) podemos ver a alta dependência da probabilidade por unidade de distância de interagir pelo efeito fotoelétrico em função da energia do fóton incidente (aproximadamente $1/E^3$) como também em função do tipo de material atenuador (aproximadamente Z^3). Ainda podemos observar vários pontos de descontinuidades exatamente nas energias equivalentes aos potenciais de ionização dos átomos. Estes pontos indicam um acentuado aumento na probabilidade de absorver os fótons incidentes que possuem energias iguais ou maiores daquelas dos potenciais de ionização do átomo.

A interação Compton (figura 12), também conhecida como espalhamento incoerente é aquela na qual um fóton incidente com alta energia também consegue ionizar um átomo, parte da energia do fóton é cedida ao elétron de recuo e a diferença é dada ao fóton. O fóton é defletido de sua direção inicial quando então é chamado de fóton espalhado. Os fótons podem ser espalhados em qualquer ângulo Θ relativo a direção inicial do fóton incidente, entretanto os elétrons Compton

ficam restritos a um ângulo $\varphi < 90^\circ$ relativo a direção do fóton incidente e a distribuição angular dos fótons espalhados relativa a direção do fóton incidente é dada pela expressão de Klein e Nishina¹¹ abaixo que apresenta esta distribuição por unidade de ângulo sólido.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(1 + \alpha(1 - \cos\Theta))^2 + 1 - \sin^2\Theta(1 + \alpha(1 - \cos\Theta))}{2(1 + \alpha(1 - \cos\Theta))^3} r^2 \quad (17)$$

onde $\alpha = E/mc^2$, E é a energia do fóton incidente, mc^2 é a energia do elétron em repouso, $d\sigma$ é a seção de choque diferencial relativa a um incremento do ângulo sólido $d\Omega$ e r^2 é o raio clássico do elétron. Esta distribuição pode ser vista na figura 13.

Nesta expressão notamos que a medida que os fótons se tornam mais energéticos, a distribuição tende a mesma direção dos fótons incidentes. Quanto aos elétrons Compton, estes ficam restritos a um ângulo φ que varia de 0° a 90° relativo à direção dos fótons incidentes.

A distribuição angular dos fotoelétrons relativa à direção do fóton incidente é dada pela expressão

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{2\pi \sin\Theta(1 + \cos\Theta)}{(1 + \alpha)\sin^2\varphi} \quad (18)$$

Esta distribuição pode ser vista na figura 14. Nesta figura, com relação a faixa de energias utilizadas em radiodiagnóstico, temos α variando de 0,1 a 0,3. Para estes valores, conforme podemos notar, os fotoelétrons são ejetados em ângulos menores do que de 90° .

A figura (15), apresenta a distribuição angular dos elétrons por energia relativa a energia do fóton incidente. Na figura (16), apresentamos como varia a razão da seção de choque de espalhamento de elétron por energia de elétron, versus a razão da energia do elétron pela energia do fóton incidente. Nesta figura, podemos perceber que quando o fotoelétron recebe toda energia do fóton incidente, ele será espalhado num ângulo de 0° relativo a direção do fóton.

A probabilidade de ocorrer o efeito Compton é diretamente proporcional à densidade eletrônica do material, ou a densidade do material, sendo a única exceção dada ao hidrogênio.

Todos os efeitos citados ocorrem simultânea e independentemente e a probabilidade total de interação é a soma das probabilidades para cada processo considerado isoladamente. Deste modo, o coeficiente de atenuação é a somatória dos coeficientes para espalhamento coerente μ_R , para efeito fotoelétrico μ_F e para espalhamento Compton μ_C .

$$\mu = \mu_R + \mu_F + \mu_C \quad (19)$$

Figura 13: Distribuição em energia dos fótons compton espalhados em iguais intervalos de ângulo sólido e normalizados relativamente a energia do fóton incidente. Alfa é a razão da energia do fóton incidente pela energia do elétron de repouso (.511 MeV). Esta figura mostra que em energias relativísticas $>.511$ MeV, os fótons são espalhados preferencialmente na direção frontal com uma probabilidade total muito reduzida. Entretanto, para energias $\ll .511$ MeV não existe dependência energética nem na distribuição angular nem na probabilidade total.

Figura 14: Distribuição do número de elétrons compton espalhados em intervalos angulares iguais. Nesta figura obtivemos a regra clássica que diz que nenhum elétron recua com ângulos maiores do que 90° . Para fótons incidentes com alta energia o elétron preferencialmente recuara em ângulos frontais, porém com uma probabilidade total relativamente baixa, e que existe pouca dependência energética para fótons de baixa energia. Nesta figura não apresentamos os ângulos negativos, que são idênticos aos mostrados. A probabilidade zero no ângulo zero é enganadora, porque como podemos observar na figura (15) a probabilidade máxima para o eletron de recuo por unidade de ângulo sólido é exatamente para o ângulo zero.

Figura 15: Distribuição dos elétrons de recuo Compton em energia em intervalos de ângulo sólido normalizado para a energia de recuo máxima. Estas curvas mostram que os elétrons portam energia preferencialmente em ângulos frontais. Mesmo para energias de raios X na faixa diagnóstica, uma afortunada tendência para telas intensificadoras onde qualquer luminescência lateral alarga a função de transferência de modulação do sistema tela-filme.

Figura 16: Seção de choque de espalhamento de elétrons Compton versus razão da energia do elétron e do fóton incidente.

Na figura (11) podemos observar como varia o comportamento de μ em função da energia, na faixa de energia utilizada em diagnóstico para diversos materiais. No caso de uma composição de n elementos a probabilidade total de interação será a soma ponderada das contribuições das probabilidades totais de cada um deles. Se cada elemento for identificado por i , variando i de 1 a n , com N_i átomos por unidade de volume, o coeficiente de atenuação linear total será dado por:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(E) N_i = \sum_{i=1}^n \mu_i(E) f_i \quad (20)$$

Onde f_i e μ_i são respectivamente as frações atômicas e os coeficientes de atenuação total para cada elemento na composição.

2.2.5 Filtros

Um material colocado no caminho de um feixe de radiação, é um material atenuador que pode modificar o espectro de radiação. Este material recebe o nome de filtro.

Os filtros para uma máquina de raios X são classificados como inerentes ou adicionais. A filtração inerente é aquela intrínseca da máquina, ou seja, é a somatória das filtrações individuais devida a todos os materiais por onde passa o feixe de radiação até sair do tubo, exemplos: O próprio alvo, o vidro do tubo de raios X, o óleo que isola o vidro de sua vizinhança e o material da janela. Por questão técnica a filtração inerente é dada em termos de espessura equivalente de alumínio, que vem a ser, a espessura de alumínio que produz a mesma atenuação do filtro inerente da máquina em questão.

A filtração inerente é mais eficiente para atenuar os fótons de baixa energia como pode ser visto na figura (17). A filtração adicional é aquela onde espessuras de materiais, principalmente de metais, são interpostas no feixe entre o tubo e o objeto de estudo e sua eficiência de atenuação depende de sua espessura e do seu número atômico. Quanto maior a espessura do filtro, mais fótons são atenuados principalmente os de baixa energia modificando o espectro, tornando-o mais “duro” com energia média maior, logo a radiação transmitida será mais penetrante. Quanto maior for o número atômico, também teremos um feixe mais penetrante.

Uma vez que os filtros adicionais retiram em geral os fótons de baixa energia, a finalidade destes filtros é de reduzir a dose de radiação desnecessária, que o paciente recebe. Neste sentido,

Figura 17: Tipo de espectro que sai de um gerador de raio X diagnóstico. O espectro é composto de uma parte contínua e outra parte discreta e foi atenuado na região de mais baixa energia, evidenciando que no mínimo foi filtrado pela filtração inerente do gerador de raios X.

trabalhos têm sido desenvolvidos^{12,13,14,15,16} na busca de materiais que proporcionem uma boa qualidade de imagem com redução na dose de radiação que o paciente recebe.

A partir do fim da década de 70, apareceram os filtros adicionais especiais cuja finalidade veio a ser a seletividade de energia^{17,18}, ou a “monocromatização” do espectro, onde a partir de uma energia limiar uma quantidade considerável de fótons não desejáveis pôde ser retirada simplesmente utilizando materiais adequados que têm a energia da aresta K, lugar em energia onde se dá a maior probabilidade de absorção dos fótons incidentes, no início da banda de energia dos fótons que se quer retirar¹⁹ como podemos observar na figura (18) para um feixe filtrado por duas espessuras de Gd. Filtros destes tipos, geralmente fazendo uso de terras raras ($57 < Z < 71$), são amplamente utilizados na obtenção de espectros com bandas mais estreitas em energia que possibilitam utilizar a técnica de dupla energia.

A técnica da dupla energia utiliza dois espectros de energia. Um, considerado de baixa energia, onde prevalecem as interações fotoelétricas, e o outro de alta energia, destinado as interações Compton. Uma das maneiras de se obter os espectros é com a variação do potencial de aceleração dos elétrons sincronizados com filtros adequados. Por exemplo, para a obtenção de espectros de baixa energia usam-se materiais selecionadores de banda²⁰ de espectro como no caso os terras-raras como Gd, Ho, Er. Para a alta energia, usam-se materiais cujo potencial

Figura 18: Espectros de raios X para um potencial de aceleração de 90 keV, uma filtração inerente de 3.2 mmAl passando por duas espessuras de um filtro adicional de gadolínio (Gd). Os dois filtros absorvem mais a partir de aproximadamente 50 keV como era de se esperar de acordo com os potenciais de ionização do gadolínio.

de ionização é bem menor como o caso do Zn, Cu e ligas como latão e bronze. No capítulo III, utilizamos um filtro do terra rara gadolínio para obter a baixa energia, e cobre para a alta energia do feixe.

2.3 GRANDEZAS E UNIDADES EM RADIAÇÃO IONIZANTE

2.3.1 Fluxo

Historicamente, o fluxo relaciona o número de entidades dn/dt que atravessam uma área da num tempo dt como pode ser visto na figura (19a).

$$\Phi = (dn/dt)/da \quad m^{-2}s^{-1} \quad (1)$$

onde dn/dt são entidades que não têm dimensões própria, como fótons, nêutrons ou mesmo abelhas, e a dimensão do fluxo seria $m^{-2}s^{-1}$. Caso fosse energia que estivesse sendo transportada, este fluxo teria dimensões de $J \, m^{-2}s^{-1}$, sendo correto escrever W/m^2 (watt/metro quadrado). Em última instância, o fluxo deverá sempre ser especificado com um adjunto adnominal: fluxo de nêutrons, fluxo de água, fluxo de energia. As entidades atravessam a área da sempre perpendicularmente a suas direções.

O fluxo pode ser considerado como um vetor; porém, este conceito fica prejudicado na área das radiações, por exemplo para nêutrons num reator nuclear, para elétrons secundários num material sendo irradiado por raios X, e para radiações provenientes do radônio nos pulmões. Nestes casos, o movimento das partículas é multidirecional, até pensarmos num caso extremo do movimento ser isotrópico, no qual, o transporte total seria nulo. A figura (19b) mostra como definimos o fluxo para o caso geral. O fluxo relaciona o número de entidades dn/dt que entram numa esfera com área diametral da num tempo dt . Basta a entidade entrar na esfera vinda de qualquer direção, e o fluxo será:

$$\Phi = (dn/dt)/da \quad m^{-2}s^{-1} \quad (2)$$

Esta é a mesma expressão já apresentada na equação (1), mas a sua interpretação é bem mais geral e serve para todas as situações encontradas em física médica nas quais os feixes são mono- direcionais ou multidirecionais como na radiologia, na medicina nuclear, na radioterapia com fontes distribuídas, e na contaminação por radioisótopos.

Figura 19: Geometria para definir fluxo ou fluência, a) unidirecional e b) multi ou unidirecional. A geometria preferível b permite contar todas as partículas dn que entram num tempo dt na esfera diametral da , independente da direção. Para ambas as construções $\Phi = (dn/da)/dt$.

Enfatizamos que, embora aceitemos a definição do fluxo na forma diferencial, significando uma quantidade pontual, a natureza quântica da radiação não permite ignorar as flutuações estatísticas inerentes ao transporte de partículas ou de energia quantizada. A maior parte desta tese trata de examinar as consequências advindas destas flutuações nas imagens radiológicas.

2.3.2 Atividade

Numa fonte radioativa os núcleos vão se desintegrando, um a um, num número dN em cada intervalo de tempo dt . A atividade é definida como

$$A = dN/dt \quad s^{-1}$$

As flutuações quânticas inerentes na desintegração nuclear conflitam com esta definição, aparentemente com um valor instantâneo definitivo. É melhor utilizar a probabilidade por unidade de tempo λ (s^{-1}) que cada núcleo tem de se desintegrar; logo, um número N de núcleos independentes teriam uma probabilidade de desintegração por segundo.

$$A = \lambda N \quad s^{-1}$$

A expressão

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad s^{-1} \tag{3}$$

seria interpretada como o valor esperado (no sentido comum em mecânica quântica) da atividade de uma fonte de N núcleos radioativos. O sinal negativo significa o decréscimo de N com o passar do tempo.

A atividade nunca pode ser confundida com um número de partículas emitidas pela fonte, porque uma desintegração pode resultar em mais do que um fóton, ou pode dar uma partícula alfa ou beta, mas não ambos do mesmo núcleo.

Radiografias são freqüentemente feitas com fótons provenientes de fontes radioativas. Sabendo a atividade e o esquema de desintegração da fonte, podemos saber, em média, o número de fótons por segundo, emitido por ela. Podemos comparar a fonte radioativa com uma fonte de raios X, também emitindo um certo número de fótons por segundo. Entretanto, não se fala da “atividade” do gerador de raios X, porque não há desintegrações, mas sim, a integral do fluxo sobre uma esfera em volta do gerador. O fluxo é determinado pelos parâmetros do gerador, como veremos na próxima seção.

2.3.3 Intensidade

Historicamente, a intensidade significa o fluxo de energia unidirecional em W/m². O vetor de Poynting²¹ é a intensidade de uma onda eletromagnética. Não tendo a generalidade que tem o fluxo, que pode ser multi-direcional, quase não empregamos este termo nesta tese.

2.3.4 Fluência

Definimos a fluência Ψ em termos do número de entidades incidentes numa esfera de área diametral da . Referindo-nos à figura (19b), veremos que a fluência é a integração em tempo do fluxo Φ

$$\Psi = \int_t^{t+\Delta t} \Phi dt = \frac{dn/dt}{da} \Delta t \quad m^{-2} \tag{4}$$

Alguns autores como J. R. Greening²² e o ICRU²³ não usam o termo “fluxo”, mas sim, a “taxa de fluência”

$$\Phi = \frac{d\Psi}{dt} \quad m^{-2}s^{-1} \quad (5)$$

As definições são idênticas. Preferimos neste trabalho a primeira definição, por considerarmos o fluxo mais fundamental. Quando a entidade que estiver entrando na esfera da figura (19), for energia, deveremos falar da fluência de energia Ψ com dimensões de Jm^{-2} .

2.3.5 Dose Absorvida

Os efeitos, tanto benéficos como deletérios, da radiação ionizante são proporcionais a energia depositada no material que foi irradiado. Definimos a relação entre a energia dE depositada num elemento de massa dm do material, como a dose absorvida

$$D = \frac{dE}{dm} \quad J \, kg^{-1} \quad (6)$$

Deveríamos esperar que existisse uma relação simples entre a fluência de energia da radiação num ponto no material e a dose absorvida na região daquele ponto. Isto é verdadeiro para partículas ionizantes, como elétrons e partículas alfa, que perdem a sua energia cinética T num processo quase contínuo, ao longo de uma linha quase reta.

$$D = \Psi \frac{dT}{dx} \frac{1}{\rho} \quad J \, kg^{-1} \quad (7)$$

onde Ψ é a fluência das partículas ionizantes, e dT/dx é chamada de Poder de Freiamento (“Stopping Power”) do material para estas partículas; ρ é a densidade do material.

A unidade de dose absorvida em $J \, kg^{-1}$ foi recentemente³ definida como gray (Gy), que é equivalente a 100 rad na unidade antiga (vide tabela I).

Para nêutrons, fótons e outros quanta que não ionizam diretamente, a dose absorvida é proveniente das partículas carregadas, geralmente elétrons, produzidos pelas reações entre os quanta ou partículas incidentes e os átomos ou núcleos do material que está sendo irradiado. Devemos esperar que a dose absorvida seja expressa como um produto da fluência da radiação e uma probabilidade de uma ou mais reações atômicas ou nucleares que resultam em partículas secundárias que seguem perdendo a sua energia como na equação (7). De acordo com este

raciocínio, existe um pequeno impasse: a dose absorvida D num ponto de um material deve ser um resultado das reações iniciadas pela fluência da radiação em outros pontos, até mesmo num material vizinho, distanciado um ponto do outro, da ordem de centímetros para nêutrons e milímetros para raios X. Técnicas analíticas e definições especiais têm que ser utilizadas perto das discontinuidades dos materiais, como nas interfaces de estruturas irradiadas em pacientes²⁴, por exemplo a interface entre osso e tecido mole. Entretanto, dentro de um material homogêneo, onde há um fluxo de raios X quase uniforme, esperamos que a dose absorvida num ponto possa ser calculada pelo fluxo no mesmo ponto, uma vez que ele é *típico* dos pontos vizinhos. Essa aproximação chama-se “equilíbrio eletrônico”, um conceito bastante desenvolvido, junto com a teoria da cavidade, nos textos sobre dosimetria²⁵.

Neste trabalho, escrevemos a dose absorvida da fluência de fótons incidentes num ponto dentro de um material como

$$D = \Psi \frac{\mu}{\rho} E \quad J \text{ kg}^{-1} \quad (8)$$

onde μ é a probabilidade que um fóton tem de transferir integralmente a sua energia ao material por unidade de distância, ρ é a densidade do material e Ψ é a fluência de fótons com energia E para cada fóton. Usamos os valores destas quatro quantidades no ponto exato onde definimos a dose absorvida D , uma aproximação completamente adequada para este trabalho.

A natureza probabilística inerente ao coeficiente linear de absorção μ , discutida na Seção anterior, e a natureza quântica da fluência dos fótons contribuem nas flutuações estatísticas da dose absorvida, tanto no tempo como no espaço. Neste trabalho, e na literatura de radioproteção, nenhuma importância está ligada a estas flutuações. As flutuações estatísticas na incidência dos efeitos genéticos nos indivíduos de um mesmo grupo que receberam doses idênticas de radiação vêm dos fatores em grande parte desconhecidos, e evidentemente não de origens quânticas.

2.3.6 Exposição

Pouco tempo depois da descoberta dos raios X por Roentgen, foi estabelecida a relação entre a fluência dos fótons e os íons produzidos no ar. Até hoje quantificamos a exposição pela carga dQ (de um só sinal) produzida numa massa dm de ar, exposta á uma fluência Ψ de energia transportada pelos fótons. Definimos a exposição

Figura 20: Coeficientes de atenuação linear para o ar em função de várias energias de fótons.

$$X = \frac{dQ}{dm} \quad C \quad kg^{-1} \quad (9)$$

Historicamente, a carga produzida no ar durante uma hora em condições normais a um metro de distância de um gramo de Radio (Ra226) define um Roentgen, ou aproximadamente $2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$ (no ar). Até hoje, definimos este valor como um roentgen, mesmo que a referência não seja Ra 226.

A relação entre X e a fluência Ψ de fótons, se obtém uma vez que determinamos experimentalmente a quantidade de energia W que necessitamos para produzir um par de íons. Utilizando a equação (8) para a energia absorvida por quilograma de ar, escrevemos

$$X = \Psi \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{ar} E \frac{e}{W} \quad C \quad kg^{-1} \quad (10)$$

onde e é a carga eletrônica, W deveria ser determinado em joule, mas, W/e é dado em eletronsvolts (eV) com um valor de 33.97 (eV) por par de íons no ar, muito maior do que os valores das energias de ionização do nitrogênio e oxigênio apresentadas no apêndice II. A maior parte da energia do feixe, transferida aos elétrons secundários produzidos pelos fótons, excita os átomos do ar que posteriormente convertem estas excitações em energia cinética atômica, ou calor.

A conversão da energia dos fótons em carga elétrica, numa massa dm de ar, depende da probabilidade μ dos fótons sofrerem um dos tipos de interações já citados na seção anterior. Por este motivo, a expressão da exposição leva em conta este coeficiente cujo comportamento pode ser visto na figura (20).

A figura (21) mostra a razão da fluência de energia por exposição $\Psi/X \text{ J m}^{-2}(\text{Ckg}^{-1})^{-1}$ junto com a razão da fluência do número de fótons por exposição $\Psi/X \text{ m}^{-2}(\text{Ckg}^{-1})^{-1}$ com dados fornecidos por Johns². Esta última é importante na prática para a conversão da exposição observada em número de quanta, a fim de calcular as flutuações estatísticas nos detetores que formam as imagens.

2.3.7 Dose Equivalente

A dose equivalente é a única grandeza que considera o efeito deletério da radiação. Isto é feito através de um fator (de qualidade) obtido empiricamente e que depende do tipo e da energia da radiação utilizada. Portanto, para saber a dose equivalente (ou risco) associada a um determinado tipo de radiação, basta fazer o produto da dose absorvida daquela radiação pelo fator de qualidade correspondente

$$H = DQ \quad \text{J kg}^{-1} \quad (11)$$

onde H representa a dose equivalente, D a dose absorvida e Q o fator de qualidade. Pela definição $Q=1$ para fótons, e não tem a relevância no diagnóstico com raios X.

2.3.8 Comparação das Unidades

Na tabela II temos algumas grandezas, geralmente utilizadas em radiologia diagnóstica, com suas respectivas unidades. Podemos notar a existência de dois conjuntos de unidades, um relativo às antigas unidades e o outro relativo às novas.

Figura 21: Relação entre, respectivamente, a fluência de energia (curva a) e a fluência dos fótons (curva b) e a exposição feita num feixe de Raios X. A curva b é proporcional ao recíproco do μ , a probabilidade que cada fóton tem de transferir integralmente sua energia a um elétron por unidade de distância que o fóton percorre no ar. Multiplicando a curva b pela energia $E=h\nu$ do fóton, obtém-se a curva a.

TABELA II
Grandezas mais utilizadas com radiação ionizante com as unidades antigas e novas²³.

ANTIGAS			
GRANDEZAS	UNIDADES	SÍMBOLOS	VALORES
Exposição	roentgen	R	2.58×10^{-4} C/kg
Dose Absorvida	rad	rad	100 erg/g
Dose Equivalente	rem	rem	100 erg/g
Atividade	curie	Ci	3.7×10^{10} s ⁻¹
NOVAS			
GRANDEZAS	UNIDADES	SÍMBOLOS	VALORES
Exposição	C/kg	C/kg	1 C/kg
Dose Absorvida	gray	Gy	1 J/kg
Dose Equivalente	sievert	Sv	1 J/kg
Atividade	bequerel	Bq	1 s ⁻¹

As unidades novas surgiram em 1975, devido ao interesse da Comissão Internacional em Unidades de Radiação (ICRU)²³ em passar as unidades para o sistema internacional objetivando uma maior facilidade na comunicação científica entre os vários países.

2.4 QUANTIFICAÇÃO DA FIDELIDADE DA IMAGEM

Introdução

A imagem é uma representação parcial e analógica de um objeto real. Para que possamos formá-la é necessário que recebamos uma energia que pode ser radiada, transmitida, transformada ou refletida pelo objeto.

A energia que sai do objeto tem dimensões de W/m^2 e pode receber o nome de Luminância. A Luminância tem uma dependência espacial relativa às propriedades físicas e geométricas do objeto. Um dos veículos de transporte desta energia é o campo eletromagnético que pode levar a energia até os nossos olhos, filme fotográfico ou até um outro tipo de sensor. Estamos interessados na imagem radiográfica, e para tal necessitamos de um fluxo de fótons Φ_o de alta energia e um detetor sensível à faixa de energia utilizada. Este detetor registrará a fração do fluxo de energia Φ , que conseguiu ser transmitida através do objeto. A luminância do objeto, neste caso, é o fluxo de energia transmitido pelo objeto.

O importante é que uma imagem seja fiel ao objeto que está representando. Esta fidelidade pode ser medida através do estudo das imagens de objetos simples. Por exemplo, os astrônomos, por estudar as estrelas que se parecem com pontos, preferem estudar um objeto puntual, os oftalmologistas utilizam letras padrões. No nosso caso, o interessante é um objeto, cuja luminância ou transmissão varie senoidalmente numa direção Z , perpendicular ao fluxo de fótons e não varie em outra direção. Esta variação é dada pela figura (22), podendo ser expressa através da seguinte equação:

$$\Phi(Z, f) = \Phi_{med} + \Phi_A \sin(2\pi fZ) \quad J \ m^{-2} \ s^{-1} \quad (1)$$

onde f , é a frequência espacial que é recíproca da distância ($1/d$) entre as duas cristas ou os dois vales; Φ_{med} , é a luminância média e Φ_A/Φ_{med} é a amplitude máxima de variação da luminância. Esta expressão é a luminância de um objeto real; isto é, a variação espacial do fluxo transmitido pelo objeto padrão.

Figura 22: Luminância versus frequência espacial que sai do objeto que aparece no destaque.

Notem bem que este objeto padrão não é simples. Mostramos no início deste capítulo que a atenuação é exponencial em espessura, portanto, o objeto que tem luminância senoidal tem espessura,

$$x = -\frac{1}{\mu} \log(\Phi/\Phi_0) \quad (2)$$

entretanto, esta complicação não impede o nosso desenvolvimento dos conceitos básicos.

O objeto padrão tem um contraste, que também é chamado de modulação² e é definido por:

$$C = \frac{\Phi_{max} - \Phi_{min}}{\Phi_{max} + \Phi_{min}} = \frac{(\Phi_{med} + \Phi_A) - (\Phi_{med} - \Phi_A)}{(\Phi_{med} + \Phi_A) + (\Phi_{med} - \Phi_A)} = \frac{\Phi_A}{\Phi_{med}} \quad (3)$$

Por definição, não haverá contraste se os valores da luminância não se afastarem da média e o contraste deverá ficar limitado ao intervalo $0 \leq C \leq 1$.

2.4.1 Formação da Imagem

Todos os dispositivos que formam ou ajudam a formar imagens têm uma característica própria do quanto conseguem representar o objeto. Como exemplos temos, o olho humano, uma lente, uma câmara fotográfica, e o filme fotográfico.

Uma quantificação da representação do objeto pode ser feita através do uso da Função de Transferência de Modulação (FTM) que para uma dada frequência espacial, compara o contraste que a imagem apresenta, em relação ao contraste que o objeto apresenta²⁶. Ainda com base na figura (5), a Função de Transferência de Modulação pode ser definida como

$$FTM = \frac{C'(f')}{C(f)} \quad (4)$$

onde $C'(f')$ é o contraste da imagem, que pode ser definido por uma equação como a (3), mas com um fluxo de energia de fótons visíveis, transmitidos como no caso de um filme radiográfico sendo examinado pela luz transmitida ou por números armazenados na memória de um computador; f' é a frequência espacial na imagem, que somente se iguala à frequência espacial no objeto, caso não haja magnificação.

A FTM tem um valor 1, se o contraste for o mesmo na imagem e no objeto real. Normalmente, isso acontece com valores da frequência espacial baixa. No olho humano, e em alguns aparelhos de diagnóstico automático, que dependem, de alguma forma, da discriminação diferencial, a FTM tem o seu valor máximo numa frequência maior do que $f = 0$.

Devemos variar a frequência espacial do objeto, possibilitando a construção da curva da Função da Transferência de Modulação, que pode ser vista na figura (20). Nesta figura, notamos que, para frequências espaciais altas o FTM decresce devido a características comuns de muitos sistemas de imagem, inclusive do olho humano²⁷. Este decréscimo também é devido aos motivos fundamentais relacionados com a característica quântica da energia eletromagnética²⁸, como vamos ver nas seções posteriores.

A falta de fidelidade da imagem em representar o objeto pode ser devida a várias coisas: o espalhamento dos fótons no objeto, o tamanho do ponto focal do aparelho, uma fluência insuficiente de fótons incidindo no objeto (ruído quântico), e o tamanho dos grânulos no filme. Todos estes são parâmetros que podem afetar a qualidade da imagem. Anne France Frere²⁹, em sua tese de doutorado, em 1982, apresentou vários parâmetros geométricos que afetam a qualidade da imagem. Neste trabalho, estamos mais interessados no ruído quântico que é devido à distribuição espacial randômica³⁰ dos fótons de raio X num detetor, em relação ao número de fótons necessários para produzir uma imagem. Este ruído é considerado o mais fundamental^{31,32,33,34,35} na imagem.

A FTM faz parte das teorias da comunicação e somente pode ser aplicada a sistemas lineares³⁶

Figura 23: Função de Transferência de Modulação versus frequência espacial para um sistema tela-filme típico. Uma FTM de banda larga em frequência espacial é superior a uma de banda estreita.

e invariantes no tempo³⁰. Um sistema é linear, quando dados vários sinais de entrada, o sinal de saída será a somatória destes sinais e, se as entradas forem multiplicadas por uma constante, o mesmo ocorrerá com o sinal de saída. Um sistema é invariante no tempo, quando a imagem do objeto real mantém a sua forma a medida em que o objeto é movido no plano.

O sistema tela-filme, que utilizaremos no trabalho, pode ser considerado um sistema linear, quando utilizamos sua resposta como densidade ótica versus exposição, também conhecida como curva característica³⁷ ou H-D. A FTM é importante na avaliação de sistemas complexos de imagem. Num sistema linear, onde cada componente tem a sua contribuição na representação do objeto através da imagem, a FTM total do sistema é o produto das FTM's de cada componente².

Para que uma imagem dada por um sistema seja fiel ao objeto, a FTM deste sistema deve ter valor igual a 1, porém, a busca deste valor mais alto implica custos em termos de dinheiro, de tempo, e de dose absorvida. A FTM ótima é aquela que se obtém otimizando todos os parâmetros citados.

Sandrik e Wagner³⁸, em 1982, forneceram uma interpretação geométrica da FTM, ou seja: a integral da FTM sobre o espaço de frequência tem dimensão de $(\text{mm})^{-1}$, e é igual ao recíproco da dimensão efetiva em milímetros da fonte de raios X. Quando houver valores distintos da FTM nas duas direções perpendiculares ao fluxo da fonte, a integral sobre o espaço de frequência terá dimensões $(\text{mm})^{-2}$, que é o recíproco da área efetiva da fonte. Portanto, todos os efeitos que reduzem o contraste na imagem, inclusive o ruído quântico, podem ser equivalentes a um sistema perfeito idealizado com uma abertura efetiva igual ao recíproco da integral do FTM no espaço de frequência. Esta interpretação permite uma compreensão geométrica simples da FTM para casos complexos.

Existe também uma possibilidade de que variações senoidais do contraste no objeto estejam deslocadas na imagem, o que corresponde a uma mudança de fase, e formalmente aparece como um componente imaginário na FTM. Fisicamente, este efeito é devido à presença de fontes efetivas múltiplas. Neste trabalho, estamos restritos à redução do contraste pelos efeitos quânticos nos detetores, e não há possibilidade de mudança de fase na imagem.

A finalidade deste trabalho é de não somente quantificar a fidelidade da imagem de dupla energia, como também otimizar o sinal ruído em relação à dose de radiação e o tempo de exposição para cada um dos dois espectros utilizados.

Esta finalidade difere da quantificação da imagem que a FTM possibilita, porque fornece uma

quantificação geral de todos os ruídos existentes no sistema. Neste trabalho, buscamos apenas a quantificação do ruído quântico, que é o mais fundamental, e, nesta busca, ponderamos o compromisso com a dose de radiação recebida pelo paciente e também o tempo de exposição para cada um dos dois espectros utilizados na dupla energia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Schiff, L. I. *Quantum Mechanics*. New York, McGraw- Hill, 1949. 404p.
- 2 Johns, H. E. , Cunningham, J. R. *The Physics of Radiology*. Illinois, Charles C. Thomas Publisher, 4ed. 1983. 796p.
- 3 Bethe, H. *Bremsformel für Elektronen Relativistischer Geschwindigkeit*. Zs. f. Phys. 76:293-299, 1932.
- 4 Hessel, R. *Construção de um Acelerador de Elétrons e sua Utilização para o Estudo da Emissão Secundária em Materiais Dielétricos*. Sao Carlos, 1990. 220p. [Tese de doutorado - IFQSC-USP]
- 5 Mukhin, K. N. *Experimental Nuclear Physics*. Moscow, Mir Publishers, 1987. 637p.
- 6 Hine, G. J. & Brownel, G. L. *Radiation Dosimetry*. New York, Academic Press, 3 ed. 1982. 932p.
- 7 Hendee, W. R. *Medical Radiation Physics*. Chicago, Year Book Medical Publishers, 1970. 599p.
- 8 Dyson, N. A. *Characteristic X-rays- A still Developing Subject*. Phys. Med. Biol. 20(1):1-29, 1975.
- 9 Birch, R. & Marshall, M. *Computation of Bremsstrahlung X-Ray Spectra and Comparison with Spectra measured with a Ge(I) Detector*. Phys. Med. Biol. 24(3):505-517, 1978.
- 10 Christensen, E. E. ; Curry, T. S. & Dowdey, J. E. *An Introduction to the Physics of Diagnostic Radiology*. Philadelphia, Lea & Febiger, 2ed. 1978. 428p.
- 11 Evans, R. D. *The Atomic Nucleus*. New York, American Institute of Physics Inc. 1985. 576p.
- 12 Brochi, M. A. C. *Métodos de Simulação Computacional para Redução de Dose, em Radiodiagnóstico*. Ribeirão Preto, 1990. 80p. [Dissertação de mestrado - FFCLRP-USP]

- 13 Jennings, R. J. *A Method for Comparing Beam-Hardening Filter Materials for Diagnostic Radiology*. Med. Phys. 15(4):588- 599, 1988.
- 14 Nagel, H. D. *Comparison of Performance Characteristics of Conventional and K-Edge Filters in General Diagnostic Radiology*. Phys. Med. Biol. 34(9):1269-1287, 1989.
- 15 Koedooder, K. & Venema, H. W. *Filter Materials for Dose Reduction in Screen-Film Radiography*. Phys. Med. Biol. 31(6):585- 600, 1986.
- 16 Nagel, H. D. *Aluminium Equivalence of Materials Used in Diagnostic Radiology and its Dependence on Beam Quality*. Phys. Med. Biol. 31(12):1381-1399, 1985.
- 17 Atkins, H. L. ; Rairchild, R. G. ; Robertson, J. S. & Greenberg, D. *Effect of Absorption Edge Filters on Diagnostic X-Ray Spectra*. Radiology, 115:431-437, 1975.
- 18 Riderer, S. J. & Mistretta, C. A. *Selective Iodine Imaging Using K-Edge Energies in Computerized X-Ray Tomography*. Med. Phys. 4(6):474-480, 1977.
- 19 Burgess, A. E. *Contrast Effects of a Gadolinium Filter*. Med. Phys. 8(2):203-209, 1980.
- 20 Chu, K. & Fenster, A. *Determination of X-Ray Spectral Distribution from Transmission Measurements Using K-Edge Filters*. Med. Phys. 10(6):772-777, 1983.
- 21 Marion, J. B. *Classical Eletromagnetic Radiation*. New York, Academic Press, 2ed. 1967. 479p.
- 22 Greening, J. R. *Fundamentals of Radiation Dosimetry*. Bristol, Adam Hilger, 1981. 160p.
- 23 ICRU *International Comission on Radiation Units*. Publ. 33, Washington, 1980.
- 24 Rocha, J. R. O. *Determinação Experimental da Distribuição de Dose da Radiação em Meio Heterogêneo, Irradiado por Raios X e Gama Radioterapicos*. São Carlos, 1989. 110p. [Dissertação de mestrado - IFQSC- USP]

- 25 Attix, F. H. *Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry*. New York, John Wiley & Sons, 1986. 607p.
- 26 Rossmann, K. *Point spread-function, line spread- function, and modulation transfer function: Tools for the study of imaging systems*. *Radiology*, 93:257-272, 1979.
- 27 Metz, C. E. & Doi, K. *Transfer Function Analysis of Radiographic Imaging Systems*. *Phys. Med. Biol.* 24:1079-1106, 1979.
- 28 Rose, A. & Weimer, P. K. *Physical Limits to the Performance of Imaging Systems*. *Physics Today*, 42(9):24-32, 1989.
- 29 Frere, A. F. *Investigações de Qualidade de Imagens Radiológicas com um Sistema Densitométrico Computarizado*. São Carlos, 1982. 148p. [Tese de doutorado - IFQSC-USP]
- 30 Macovski, A. *Medical Imaging Systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1983. 249p.
- 31 Rose, M. E. & Shapiro, M. M. *Statistical Error in Absorption Experiments*. *Phys. Rev.* 74:1853-1864, 1947.
- 32 Sturm, R. E. & Morgan, R. H. *Screen Intensification Systems and their limitations*. *Am. J. Roentg.* 62:617-634, 1949.
- 33 Rimkus, D. & Bailey, N. A. *Quantum Noise in Detectors*. *Med. Phys.* 10(4):470-471, 1983.
- 34 Ter-Pogossian, M. M. *The Physical Aspects of Diagnostic Radiology*. New York, Harper & Row Publishers, 1969. 426p.
- 35 Clare, H. M.; Splettstosser, H. R. ; Seeman, H. E. *An Experimental Study of the Mottle Produced by X-Ray Intensifying Screens*. *Am. J. Roentg.* 19:168-174, 1962.
- 36 Doi, K. *Computer Simulation Study of Screen-Film Nonlinearity in Fine Detail Imaging*. *Phys. Med. Biol.* 18(6):863- 877, 1973.
- 37 Haus A. G. ; Rossmann, K. ; Vyborny, C. ; Hoffer P. B. & Doi, K. *Sensitometry in Diagnostic Radiology, Radiation Therapy, and Nuclear Medicine*. *J. Appl. Photo Eng.* 3:114-124, 1977.

- 38 Sandrik, J. M. & Wagner, R. F. *Absolute Measures of Physical Image Quality: Measurement and Application to Radiographic Magnification*. Med. Phys. 9(4): 540-549, 1982.

CAPÍTULO III

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA PRODUÇÃO E DA ATENUAÇÃO DE RAIOS X

Introdução

Devido ao fato de não utilizarmos energias monocromáticas, mas sim, um espectro de raios X para a obtenção, tanto da imagem simples, quanto da imagem por dupla energia, necessitamos do auxílio de um computador para efetuar os cálculos envolvendo a somatória das interações do número de fótons de cada energia presente nos espectros, com os materiais que estiverem no caminho do feixe e dentro da amostra ou do paciente em estudo

Birch e Marshall¹, no ano de 1978, apresentaram uma teoria com a qual pode-se obter um espectro de raios X que se ajusta excelentemente aos dados experimentais obtidos com um detector de Ge(Li), como podemos comprovar na figura (1).

Um programa baseado na teoria de Birch e Marshall para obter o espectro foi desenvolvido pelo grupo do Jennings em 1985, e necessita de dados tais como o potencial de aceleração dos elétrons, o ângulo do anodo, a filtração inerente, a espessura e o material do filtro adicional, quando for utilizado. O material do anodo considerado é o tungstênio já que a maioria dos geradores de raios X diagnóstico têm alvos feitos com este material. Por esse motivo, a teoria inclui as linhas características do tungstênio com suas intensidades relativas, as quais podemos observar na tabela III.

3.1 Coeficientes de Atenuação

O programa faz uso de uma sub-rotina, que calcula os coeficientes de atenuação por massa, para um material de número atômico Z e densidade ρ . Esta sub-rotina é obtida através de um método descrito por Marshall² em 1975, que se ajusta aos dados dos coeficientes obtidos por MacMaster³ et al. e que tornou possível a obtenção dos valores dos coeficientes através de uma aproximação polinomial até a energia de 150 keV.

As fórmulas do Klein-Nishina⁴, que descrevem o efeito Compton, podem ser expandidas em polinômios em função de $\alpha = E/mc^2$, com $mc^2 = 0.511$ Mev.

$$\mu/\rho = N \frac{Z}{A} \frac{8}{3} \pi r^2 (1 - 2\alpha + 5.2\alpha^2 - 13.3\alpha^3 + \dots) \quad (1)$$

$$\mu_a/\rho = N \frac{Z}{A} \frac{8}{3} \pi r^2 (\alpha - 4.2\alpha^2 + 14.7\alpha^3 - \dots) \quad (2)$$

Figure 1: Comparação de espectros com mesmas características de material, ângulo do anodo, potencial de aceleração do elétron, e filtração inerente. O espectro (A) é o espectro por nós simulado através dos métodos desenvolvidos neste capítulo, e o espectro (B) foi obtido experimentalmente⁵ com um detector de Ge(Li) foi fornecido por Jennings quando de sua visita como professor assistente na FFCLRP-USP em 1988.

$$\mu_s/\rho = N \frac{Z}{A} \frac{8}{3} \pi r^2 (1 - 3\alpha + 9.4\alpha^2 - 28\alpha^3 + \dots) \quad (3)$$

onde μ_a é o coeficiente linear de absorção do fóton, utilizado quando é necessário calcular a transferência da energia do fóton ao elétron; μ_s é o coeficiente linear de espalhamento do fóton; $\mu = \mu_a + \mu_s$ é o coeficiente linear total que se utiliza para calcular a probabilidade, por centímetro percorrido, do fóton sofrer uma interação.

O fator $8/3 \pi r^2$ chama-se seção do choque Thomson do elétron e tem o valor $2/3 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ ou $2/3 \text{ barn}$.

$N = 0,6023 \times 10^{24}$ é o número do Avogadro (número de átomos por mol) e Z e A são o número atômico e peso atômico respectivamente. Devido ao fato de que $Z/A \approx 1/2$ para toda tabela periódica, o efeito Compton é quase igual para todos os elementos, quando expressos em $\mu/\rho \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$. A constante diante do parênteses nas expressões tem o valor $0,20 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ aproximadamente, independente do Z .

Podemos ver, nas fórmulas e na figura (5) do capítulo II, que o efeito não varia fortemente nas energias diagnósticas. O método de Marshall et al. que descreveremos, permite calcular, através de um polinômio dependente do logaritmo da energia, a contribuição do efeito Compton no coeficiente de atenuação por massa para um material de interesse com número atômico Z .

$$\ln \frac{\mu}{\rho} = A(Z) + B(Z)(\ln E) + C(Z)(\ln E)^2 + D(Z)(\ln E)^3 \quad (4)$$

Os coeficientes do polinômio são função do material e estão arquivados numa matriz. Esta matriz também contém informações sobre os fatores para o ajuste das curvas nas regiões correspondentes às interações, e ainda informações sobre densidade e peso molecular para 94 elementos químicos.

Da expressão acima e da equação (1), podemos inferir, que na região compton, onde μ/ρ decresce lentamente, o coeficiente $A > 0$ é dominante. Os coeficientes quase não dependem do Z .

O efeito fotoelétrico, como já vimos na seção 2.2 do capítulo II, tem descontinuidades, onde a probabilidade de absorção do fóton incidente é máxima em um material. Isto ocorre para as energias de fótons maiores ou iguais à energia de ligação dos elétrons nas camadas (E_k , E_l). Estas descontinuidades podem ser melhor observadas para o Tungstato de Cálcio (CaWO_4) na figura (2) do capítulo IV.

Entre as descontinuidades, o logaritmo do efeito fotoelétrico também pode ser escrito num polinômio em $\ln E$. Na região fotoelétrica, o coeficiente de atenuação por massa será dado pelos mesmos termos do polinômio já visto, entretanto, como $\mu/\rho \approx E^{-3}$, $B \approx -3$, C e $D \approx 0$, o coeficiente A varia aproximadamente com Z^3 .

Com o conhecimento do polinômio de Marshall para calcular os coeficientes de atenuação por massa, vamos entrar nos detalhes da teoria de Birch e Marshall, porque utilizaremos programas baseados nesta teoria, em todas as nossas simulações futuras, onde for necessária a presença de espectros.

3.2 Espectro de Raios X

Como vimos no capítulo II, o espectro de raios X diagnóstico compreende uma parte contínua, que são os raios X de “Bremmstrahlung” e uma parte discreta, que são as emissões atômicas características. Primeiramente, vamos considerar a parte discreta.

A componente discreta de um espectro de raios X foi obtida empiricamente por vários pesquisadores^{6,7,8}, através do ajuste de dados experimentais. Esta componente é a seguinte

$$I_{ca} \propto (T/E_i - 1)^{1,63} \tag{5}$$

onde T é a energia do elétron incidente e E_i, a energia de ligação do elétron na camada i do átomo. As energias e intensidades relativas dos raios X característicos K e L para o material tungstênio podem ser vistas na tabela I. As intensidades foram normalizadas relativamente à intensidade da linha K α_1 através da medida com um detector de Ge(Li) num feixe de referência. Na prática, os raios X característicos L são quase que totalmente atenuados pelos filtros inerentes nos geradores clínicos. Deste modo, para energias dos eletrons menores do que 69.13 keV, o espectro não apresenta nenhuma linha característica.

As componentes, contínua e discreta, do espectro devem ser somadas , para se obter o espectro total.

TABELA I
Linhas de emissão característica para o tungstênio com respectivas intensidades relativas.

LINHAS CARACTERÍSTICAS	ENERGIA (keV)	INTENSIDADE RELATIVA
L α_1	8.4	100
L α_2	8.33	11.3
L β_1	9.64	157.6
L β_3	9.82	36.8
L β_2	9.96	19.7
L γ_1	11.43	40.3
K α_1	59.32	100
K α_2	57.99	57.6
K β_1	67.15	32.1
K β_2	69.13	8.4

Birch e Marshall, para obter o espectro de “Bremmstrahlung”, basearam-se fundamentalmente nos detalhes das interações do elétron e do fóton de raio X com a matéria. Para isto, inicialmente, eles assumiram que o número dI de fótons de raios X num intervalo de energia entre E e E+dE, que surge de um elemento dx de caminho penetrado por um elétron incidente no material do anodo é dado por

$$dI = Q(\frac{N_A}{A})\rho dx \qquad \text{fótons . keV}^{-1} \tag{6}$$

Figure 2: Comprimento de caminho percorrido por elétrons com energia inicial T_0 , obtida através do potencial de aceleração, em função dos tipos de interações que pode sofrer com os átomos do material no alvo. O elétron *a* tem perda somente por ionização e tem um caminho dado pelo alcance S . O elétron *b* tem perda por radiação, podendo também sofrer perda por ionização, e tem uma penetração x no material.

onde A é o peso molecular, ρ a densidade do material, e N_A é o número de Avogadro. O fator $Q(E)$ é o número de fótons por unidade de intervalo de energia de fóton, por elétron incidente, por átomo/cm² no anodo.

O número total de fótons emitidos no intervalo de energia dE por elétron incidente será obtido integrando a equação acima ao longo do percurso do elétron. Considerando que o elétron perde energia cinética continuamente em seu percurso, como já vimos na Seção 2.2, podemos mudar a variável de integração x para T , como $dx = dT / (dT/dx)$. Os limites de integração vão de T_0 , energia do elétron incidente, até E que é a energia do fóton para a qual está sendo calculado o seu número, já que não é possível produzir fótons com energia $E > T_0$. A energia do elétron incidente (T_0 em keV) é determinada do painel de controle do gerador de raios X. Da mesma forma, o operador determina o número de elétrons incidentes, escolhendo a corrente e o tempo da exposição, que vem a ser, os miliampere-segundo (mAs).

Dada a importância da perda de energia do elétron ao longo do caminho percorrido (dT/ds), apresentada na seção 2.2 do capítulo II, é necessário que consideremos duas situações: A primeira, é aquela perda de energia somente por ionização, dada pela expressão de Bethe para ionização na qual a energia final do elétron é igual a zero e a distância penetrada é dada pelo alcance S que já comentamos na referida seção. A segunda, é a perda que ocorre por radiação. Para esta, a energia do elétron é maior do que zero no ponto onde ele consegue fazer a conversão para um fóton, a uma distância x penetrada do anodo.

Os autores da teoria para obtenção do espectro representam a energia da segunda situação

através da expressão

$$T = (T_o^2 - \rho C x)^{1/2} \quad \text{com} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-\rho C}{eT} \tag{7}$$

onde T_o é a energia inicial do elétron, T é a energia no ponto x penetrado no anodo, ρ é a densidade do anodo (no caso, o Tungstênio) e C é uma constante conhecida como constante de Thomson-Widdington (T-W) que para energias acima de 60 keV tem a seguinte dependência energética

$$C = (0.0029T_o + 0.41)10^6 \quad keV^2 cm^2 g^{-1} \tag{8}$$

e para energias menores do que 50 keV

$$C \approx T_o^2 \tag{9}$$

De acordo com os autores, a expressão acima, que dá a perda de energia do elétron até uma certa distância, foi escolhida, com base nos valores empíricos de alcance, reunidos por Katz e Penfold e representados pela figura (4) da seção 2.2. (dT/dx) da equação (7) não é a mesma da fórmula de Bethe, que trata da distância ds percorrida ao longo de um caminho tortuoso. A equação (7) de Thonson-Widdington, trata da distância da penetração, que é bem menor do que a distância percorrida.

Na tabela II, apresentamos alguns valores da constante de T-W, com correspondentes valores de energias.

TABELA II
Valores das constantes de T-W para algumas energias de elétrons.

T_o (keV)	T-W (keV ² cm ² g ⁻¹)
25	.39× 10 ⁶
50	.54× 10 ⁶
75	.625× 10 ⁶
100	.70× 10 ⁶
150	.84× 10 ⁶
200	1.00× 10 ⁶

O número de fótons de raios X produzidos, partindo da integral da Equação (6), também depende do ângulo relativo a direção dos elétrons incidentes, como podemos observar na figura (2). que mostra a distância que o fóton percorre até conseguir sair do anodo em função da distância x que o elétron consegue penetrar no alvo. A primeira distância, pode ser dada por $y = x \cot \Theta$, que uma vez sutstituido o valor de x obtido da equação (7) fica

$$y = (\frac{T_o^2 - T^2}{\rho C})cot\Theta \tag{10}$$

A correção para a atenuação dos fótons pode ser feita admitindo-se que o fóton para emergir do alvo deve percorrer uma distância y . A probabilidade do fóton emergir é dada por $e^{-\mu_o y}$

com μ_w sendo o coeficiente de absorção para fótons no tungstênio, que é determinado pelo polinômio de Marshall proveniente da Equação (2), como já vimos no início desta seção. Uma outra correção é a relativística, que vem do fato do elétron ganhar energia, através do potencial de aceleração do gerador, suficiente para ter uma velocidade não desprezível em comparação com a velocidade da luz. A correção relativística que deverá ser incluída na expressão do número de fótons é $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = [1+T/mc^2]$. Podemos pensar que esta correção é devida ao aumento da massa do elétron incidente.

Quanto ao fator Q , este é determinado através de um algoritmo que melhor se ajusta aos dados experimentais

$$Q(E/T) = \frac{Z^2}{ET} [0.503 - 0.946(\frac{E}{T}) + 0.155(\frac{E}{T})^2 + 1.16(\frac{E}{T})^3 - 0.68(\frac{E}{T})^4] 10^{14} \quad (11)$$

Com todas estas correções, mais a inclusão da probabilidade do fóton ser filtrado por materiais, com espessura x_f e coeficiente atenuação μ_f , que estiverem no caminho do feixe entre o anodo e a face externa da janela do tubo, o número de fótons emitidos com energia entre E e $E+dE$ por elétron incidente será dado por

$$I(E) = \frac{\rho N_A}{A} \int_{T_0}^E (1 + T/mc^2) e^{[\frac{\mu_w}{\rho} (\frac{T_0^2 - T^2}{c}) \cot \Theta]} (\frac{dT}{dx})^{-1} e^{-\mu_f x_f} Q dT \quad (12)$$

Esta é a expressão para o número de fótons de energia E , produzido no anodo por intervalo de energia de fóton por elétron incidente. Para saber o fluxo dos fótons $d\Phi/dE$ que chega até o plano da imagem, temos que multiplicar $I(E)$ por dois fatores: um fator que determina o número de elétrons incidentes, sabendo a miliamperagem (i) do gerador durante a exposição, e um outro fator geométrico, que depende da distância F em centímetros entre o anodo e o plano da imagem.

$$d\Phi/dE = I(E) \frac{i}{1.602 \times 10^{-16}} \frac{1}{4\pi F^2} \quad \text{fótons/cm}^2 \text{ s} \quad (13)$$

Este fluxo de fótons com energia entre E e $E+dE$ é fundamental na determinação da dose absorvida pelo paciente, quando está sendo feita uma imagem para um posterior diagnóstico. A fundamentação na determinação da dose absorvida é baseada nos detalhes da interação da radiação com a matéria que depende da energia dos fótons incidentes. Qualquer efeito, que depende da energia dos fótons incidentes, deverá ser avaliado utilizando esta variação do número de fótons em energia.

3.3 Confronto de uma Experiência Simulada com a Medida

Nas seções 1 e 2 do capítulo II mostramos que a transmissão do fluxo de um feixe de raios X é dada por

$$\Phi(E) = \Phi_o(E)e^{-\mu x} \tag{14}$$

Na seção anterior a esta, também demonstramos como o fluxo Φ , que sai de um tubo de raios X, pode ser obtido através da teoria de Birch e Marshall. Com estes conhecimentos, pudemos construir um programa que simula a fração do feixe que consegue ser transmitido através de um material com espessura x . Esta simulação, de fácil verificação experimental, serve para demonstrar como são confiáveis as simulações da otimização do S/R de feixes de dupla energia bem mais difíceis de realizar experimentalmente.

A transmissão do feixe é dada pela expressão

$$T = \frac{\int \Phi_o(E)e^{-\mu x}dE}{\int \Phi_o(E)dE} \tag{15}$$

Com este programa, simulamos a transmissão de dois feixes de raios X, que podem ser vistos na figura (3) obtida através do programa de simulação do espectro. Um espectro para baixa energia (FBE) e o outro para alta energia (FAE), como nos mostra a tabela III, que fornece as características dos feixes simulados.

TABELA III
Características dos feixes de alta e baixa energia utilizados para transmissão através dos materiais alumínio e lucite.

FEIXES	ÂNGULO DO ALVO	mAs	kVp	FILTRO INERENTE	FILTRO ADICIONAL
F.B.E.	17	40	85	3.2 mmAl	.25 mmGd
F.A.E.	17	25	135	3.2 mmAl	1.5 mmCu

Como resultado da simulação das transmissões, obtivemos as curvas para os materiais alumínio e lucite (que têm mesmas imagens radiológicas que o osso e tecido mole), para os feixes (FBE) e (FAE). Paralelamente a esta simulação medimos, com uma câmara de ionização Keithley (2505/3), as transmissões dos dois feixes citados e emitidos por um gerador Phillips (M80) obtendo as curvas E . Todas as curvas, experimentais e simuladas, são apresentadas nas figuras (4a, 4b) e (5a, 5b). Podemos notar que a transmissão experimental de um feixe pode ser razoavelmente representada através da sua simulação.

As medidas foram feitas em condições de flutuações quânticas desprezíveis, e a reprodutibilidade experimental indica erros menores do que o tamanho dos símbolos gráficos. As discrepâncias na inclinação para maiores espessuras para o espectro de baixa energia indicam uma

Figure 3: Espectros de raios X simulados. A curva (a) pertence ao feixe que tem o Gd64 como filtro e a curva (b) tem o Cu29 como filtro.

contaminação da alta energia mais do que a indicada na figura (3a), possivelmente devida à erosão no anodo. Todavia, julgamos que a simulação seja adequada para a finalidade dos procedimentos de otimização que apresentaremos a seguir.

Figura 4: Transmissão simulada (S) e medida (E) do feixe de baixa energia (F.B.E.) e do feixe de alta energia (F.A.E.) para o material alumínio.

Figura 5: Transmissão simulada (S) e medida (E) do feixe de baixa energia (F.B.E.) e do feixe de alta energia (F.A.E.) para o material lucite.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Birch, R. & Marshal, M. *Computation of Bremsstrahlung X-ray Spectra and Comparison with Spectra Measured with a Ge(li) Detector*. Phys. Med. Biol. 24(3):505-517, 1978.
- 2 Marshall, M.; Peaple, L. H.; Ardran, G. M.; Crooks, H. E. *A Comparison of X-Ray Spectra and Outputs from Molybdenum and Tungsten Targets*. 48(565):31-39, 1975.
- 3 MacMaster, W. H.; Kerr Del Grande, N.; Mallet, J. H. & Hubbell, J. H. *Report UCRL-50174*. Sec. II, Rev. 1, 1969.
- 4 Evans, R. D. *The Atomic Nucleus*. New York, McGraw- Hill, 14 ed. 1972. 972p.
- 5 Fewell, T. R.; Shuping, R. E. & Hawkins, K. R. *Handbook of Computed Tomography X-Ray Spectra*. Maryland, HHS Publication (FDA), 81-8162, 1981.
- 6 Compton, A. H. & Allison, S. K. *X-rays in Theory and Experiment*. New York, van Nostrand , 1935. 81p.
- 7 Green, M. & Cosslett, V. E. *The Efficiency of Production of Characteristic X-Radiation in Thick Targets of a Pure Element*. Proc. Phys. Soc. 78:1206, 1961.

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO DA EFICIÊNCIA QUÂNTICA DAS TELAS INTENSIFICADORAS

Introdução

As imagens radiográficas normalmente não são feitas diretamente com os fótons de raios X porque o filme tem uma sensibilidade baixa à exposição direta dos raios X¹.

Para que as imagens citadas sejam eficientemente realizadas é necessário converter os fótons de raios X em fótons visíveis aos sensores, e isto pode ser obtido através do processo da luminescência.

O processo de interação dos raios X com a matéria é um processo binário², onde o fóton ou é absorvido ou é transmitido no material. A transmissão não contribui com o processo da luminescência para a emissão de luz do fósforo, entretanto quando o fósforo absorve a energia de raios X, esta energia contribui com a emissão de luz.

4.1 *Luminescência*

A luminescência é um processo pelo qual certos materiais ou substâncias após terem sido excitados emitem radiação eletromagnética na faixa do visível, às vezes incluindo o ultra-violeta.

As substâncias que passam por este tipo de processo são chamadas de fósforos e os estímulos³ que provocam a excitação podem ser os mais variados como exemplo as reações químicas, a luz, o calor, e a radiação ionizante.

Quanto ao tempo que leva entre a excitação e o aparecimento da luz, a luminescência pode ser classificada como fluorescência para um tempo menor do que 10^{-8} seg e fosforescência quando o tempo for maior.

Na figura (1) temos uma ilustração da conversão da energia de raios X em luz. Nesta figura a luminescência é apresentada através da fluorescência e fosforescência num cristal.

No diagrama apresentado, temos os níveis de energia do cristal luminescente. A área superior achureada é a banda de condução, onde os elétrons estão livres para moverem-se. Outra área achureada é a banda de valência que representa os elétrons ligados aos átomos do meio na rede cristalina. Entre as duas bandas temos a banda proibida, que corresponde a energia que o elétron ligado deve ganhar para ficar livre.

Na banda proibida normalmente não deve haver elétrons, porém impurezas agregadas ao material ou imperfeições no retículo cristalino fazem com que se criem armadilhas em posições discretas nas quais elétrons podem ser capturados.

A radiação ionizante ao incidir sobre o cristal transfere energia aos átomos do retículo e pode levar os elétrons da banda de valência à excitação. Um elétron pode alcançar a banda de

Figure 1: Esquema de bandas de energia num material, que mostra os processos de emissão de fluorescência e fosforescência após excitação do material pela radiação ionizante.

condução, onde tem toda liberdade para se mover, podendo retornar diretamente a banda de valência e durante o seu retorno ser temporariamente capturado numa imperfeição ou impureza existente no cristal. Assim que o elétron retorna à banda de valência há a emissão de radiação eletromagnética com energia igual a diferença das energias da banda de valência e a energia relativa ao lugar onde ele se encontrava. Esta radiação é chamada de Fluorescência.

Um elétron capturado pode ganhar energia através de vibração térmica do retículo, com esta energia ele se dirige à banda de condução e em seguida pode voltar à banda de valência passando ainda por uma armadilha. Este caminho levará um tempo maior para que a radiação seja emitida. A radiação neste caso se chama Fosforescência.

Supondo uma intensidade de luz inicial I_0 emitida por um fósforo logo após ter sido excitado por raios X. A intensidade residual I , após transcorrido um tempo t , pode ser representada pela equação

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad (1)$$

onde, τ é a grandeza física importante que pode definir um fósforo. Esta grandeza é o tempo de relaxação⁴, para o qual uma fração de $1/e$ da intensidade inicial ainda permanece no material.

O recíproco $1/\tau$ é a probabilidade eletrônica por unidade de tempo que resulta na emissão do fóton visível por transição. Esta probabilidade depende exponencialmente de uma energia E e da temperatura T segundo a relação

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} e^{-E/kT} \quad (2)$$

Figura 2: Coeficiente de atenuação por massa para o CaWO_4 . Nesta figura notamos as arestas de absorção para o material que são os lugares onde ocorre a maior probabilidade de absorção dos fótons incidentes através da ionização do átomo. Quanto maior a energia do fóton maior a probabilidade de arrancar elétrons das camadas mais perto do núcleo. Uma vez que o efeito fotoelétrico depende energeticamente de E^{-3} e Z^3 e o efeito Compton depende da densidade eletrônica do material, o comportamento do coeficiente de atenuação do material será regido mais pelo comportamento do coeficiente de atenuação do elemento de maior Z e maior densidade dentro do material.

Figura 3: Telas intensificadoras com filme de dupla emulsão

A energia de ativação E é aquela que deve ser fornecida ao fósforo para que um elétron capturado faça a transição luminescente.

O comprimento de onda da luz emitida durante o processo da luminescência depende da composição química da substância e do tipo de impureza química agregada.

4.2 Seleção dos Fósforos

Os critérios para que um fósforo seja útil como tela intensificadora são:

- 1 - O fósforo deve ter uma alta eficiência de conversão de fótons de raios X em fótons visíveis.
- 2 - O fósforo deverá ser fluorescente e não fosforescente.
- 3 - É desejável que os constituintes do fósforo tenham número atômico relativamente alto, afim de maximizar a absorção dos fótons de raios X⁵ e minimizar a absorção fluorescente⁶.
- 4 - A espessura do fósforo deverá ser ideal, isto é, levar em consideração o compromisso entre uma maior absorção dos fótons de raios X que pode ser conseguida com aumento da espessura e uma menor difusão de luz fluorescente com a redução da espessura do fósforo⁶.

Algumas substâncias luminescentes utilizadas como telas em radiologia são o (ZnCd)S:Ag, o CaWO_4 , o BaSrSO_4 , o CsI:Na , o BaFCl:Eu , o LaOBr:Tb , o $\text{GdO}_2\text{S:Tb}$, e muitas outras⁵. As duas primeiras têm sido usadas desde o início da radiologia^{7,8,9} e as restantes foram obtidas durante estas duas últimas décadas⁶. Destas substâncias a mais conhecida é o Tungstato de Cálcio (CaWO_4) que foi proposta como tela por Thomas Alva Edison¹⁰ em 1896 e tem sido utilizada até o momento. Na composição de algumas destas substâncias, são utilizadas terras

Figura 4: Atenuação do fluxo de fótons de raios X por uma material homogêneo de espessura x

raras com o objetivo de criar armadilhas e consequentemente aumentar a emissão de luz.

Como já vimos na seção 2.2, as terras raras, como todos os elementos, têm probabilidades maiores de absorver fótons que tenham energias iguais ou maiores do que as de seus potenciais de ionização. Estas energias estão dentro da faixa de energia efetiva utilizada em radiologia diagnóstica. Portanto é de se esperar que quando estão presentes em um fósforo, auxiliarão na detecção dos fótons com energias mais altas no espectro.

Das substâncias apresentadas, a Sulfeto Cádmio Zinco (ZnCd)S:Ag é utilizada como revestimento de vídeo para fluoroscopia ou num intensificador de imagem. As demais substâncias são utilizadas na forma de tela junto com um filme e dentro de um cassete formando um conjunto conhecido como tela-filme.

As telas basicamente têm quatro camadas como se pode observar na figura (c)

- 1 - Uma base ou suporte de plástico ou papelão duro
- 2 - Uma camada refletiva de Dióxido de Titânio (TiO_2)
- 3 - Uma camada de fósforo
- 4 - Uma película protetiva plástica

A camada de Dióxido de Titânio faz com que a luz produzida na tela que estiver se dirigindo para o lado posterior da tela, seja parcialmente refletida para a emulsão do filme.

A função da tela é absorver a energia do feixe de raios X, que foi transmitido através do paciente, e converter esta energia num padrão de luz que sensibilize o filme, já que este é mais sensível à luz visível^{1,3} do que à radiação X.

Além do interesse do ajuste entre o espectro de emissão da substância e a sensibilidade do detector, outro fator importante deve ser considerado: a eficiência da tela.

4.3 Eficiência de uma Tela

A eficiência da tela é a razão entre a energia de luz produzida pela tela por energia de raio X incidente.

Para que possamos obter a eficiência monocromática de uma tela são necessários, a espessura x total da tela, e o fluxo de fótons incidentes Φ_0 com energia E . A absorção de raios X depende do material absorvedor e da energia dos fótons incidentes. Seu comportamento é dado pelo comportamento do coeficiente de atenuação total que já discutimos anteriormente no capítulo II. A eficiência monocromática devido a uma espessura elementar da tela (figura 4) pode ser dada pela expressão:

$$d\epsilon = \frac{\Phi_0 E f e^{-\mu x} \mu dx}{\Phi_0 E} \quad (3)$$

cujo numerador representa a energia total de raios X monocromáticos que foi convertida em energia visível numa espessura dx do fósforo, o denominador é a energia total dos raios X incidentes na tela, μ é o coeficiente linear de absorção da camada de fósforo e f é a fração da energia absorvida convertida em luz visível.

A eficiência monocromática para a espessura total x será:

$$\epsilon = \int_0^x e^{-\mu x} \mu dx = (1 - e^{-\mu x}) f \quad (4)$$

Na obtenção da eficiência monocromática de um fósforo é necessário a utilização dos coeficientes de atenuação deste fósforo. Queremos apresentar como exemplo, a eficiência monocromática do CaWO_4 , para tal, fizemos uso dos coeficientes de atenuação por massa cujo comportamento em energia pode ser visto na figura (2).

Na figura (5), apresentamos o comportamento da expressão (4), da eficiência monocromática versus energia para a substância CaWO_4 tradicionalmente utilizada como tela intensificadora. Nesta figura, o comportamento da eficiência monocromática é muito influenciado pela energia da aresta de absorção K do Tungstênio, que tem energia igual a 69,5 KeV como pode ser obtida

Figure 5: Eficiência monocromática calculada para telas de CaWO_4 com .3 e 1 mm de espessuras. Notamos a marcada presença da aresta K do tungstênio no aumento brusco da absorção dos fótons de raio X que têm energias maiores e próximas da energia do potencial de ionização da camada K do tungstênio.

do apêndice II. Fótons de raios X com energias menores do que a energia da aresta K têm uma probabilidade maior de ser transmitido pela tela porque dispõem de energia insuficiente para arrancar os elétrons da camada K. Após a aresta, a eficiência aumenta porque os fótons agora dispõem de energia suficiente para arrancar o elétron da camada.

Num espectro de raios X diagnóstico temos fótons com diversas energias. Desde a mínima que é determinada pela filtração inerente no tubo até a máxima que é limitada pelo potencial de aceleração colocado no gerador. Devido a estes fótons, temos que calcular a eficiência da tela, levando em conta o espectro incidente sobre ela.

Considerando agora o fluxo de fótons com diversas energias incidentes sobre a tela, podemos escrever a eficiência efetiva média da tela como:

$$\langle \epsilon_{ef} \rangle = \frac{\int_0^{T_0} f(1 - e^{-\mu x}) \frac{d\Phi}{dE} dE}{\int_0^{T_0} \frac{d\Phi}{dE} dE} \quad (5)$$

onde $(d\Phi/dE)dE$ é o fluxo de fótons de uma determinada energia E, T_0 é igual ao produto da voltagem colocada na máquina pela carga elementar do elétron.

A eficiência efetiva média total de uma tela para um determinado espectro de raios X é um número que depende como nos mostra na expressão (5), do número de fótons de cada energia. Esta distribuição pode ser obtida através de métodos numéricos, como aquele baseado na teoria de Birch e Marshall (capítulo III), que simulam espectros de raios X, junto com a sua confirmação com espectrômetros de alta resolução em energias de fótons.

Na simulação da eficiência monocromática e efetiva média para o CaWO_4 , utilizamos uma densidade¹³ igual a $6,08 \text{ g/cm}^3$ e espessuras de 0,3 e 1 mm. A primeira espessura é a da maioria dos fósforos⁶ utilizados em telas, e a segunda foi colocada para observação do aumento da eficiência com o aumento da espessura.

O conhecimento do comportamento de uma tela intensificadora é fundamental neste trabalho, porque necessitamos da eficiência média do detetor (no caso a tela) para obter a relação S/R, como podemos comprovar no capítulo V.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Vyborny, C. J.; Metz, C. E.; Doi, K. & Rossmann, K. *Screen/film System Speed: Its Dependence on X-Ray Energy*. Radiology, 125:811-816, 1977.
- 2 Macovski, A. *Medical Imaging Systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1983. 249p.
- 3 Christensen, E. E. ; Curry, T. S. & Dowdey, J. E. *An Introduction to the Physics of Diagnostic Radiology*. Philadelphia, Lea & Febiger, 2ed. 1978. 428p.
- 4 Sessler, G. M. *Electrets*. Berlin, Springer-Verlag, 1980. 404p.
- 5 Rossi, R. P. R.; Hendee, W. R.; Ahrens, C. R. *An Evaluation o Rare Earth Screen/film Combinations*. Radiology, 121:465-471, 1976.
- 6 Venema, H. W. *X-Ray Absorption, Speed, and luminescent Efficiency of Rare Earth and other Intensifying Screens*. Radiology, 130:765-771, 1979.
- 7 Johns, H. E., Cunningham, J. R. *The Physics of Radiology, Illinois*. Charles C. Thomas Publisher, 4ed. 1983. 796p.
- 8 Christensen, E. E.; Curry, T. S. & Dowdey, J. E. *An Introduction To The Physics of Diagnostic Radiology*. Philadelphia, Lea & Febiger, 2ed. 1978. 428p.
- 9 Buchanan, R. A.; Filkelstein, S. I. & Wickersheim, K. A. *X-Ray Exposure Reduction Using Rare-earth Oxysulfide Intensifying Screens*. Radiology, 105:185-190, 1972.
- 10 Haus, A. G. & Cullinan, J. E. *Screen Film Processing Systems for Medical Radiography : A Historical Review In: Stephan, B. The Technical History of Radiology*. Radiographics 9(6):1093-1283, 1989.
- 11 Hendee, W. R. *Medical Radiation Physics*. Chicago, Year Book Medical Publishers, 1970. 599p.
- 12 Attix, F. H. *Introduction To Radiological Physics and Radiation Dosimetry*. New York, John Wiley & Sons, 1986. 607p.
- 13 Swank, R. *Absorption and Noise in X-Ray Phosphors*. J. Appl. Phys. 44(9):4199-4303, 1973.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

A - OTIMIZAÇÃO DA RAZÃO SINAL-RUÍDO PARA IMAGENS RADIOGRÁFICAS CONVENCIONAIS

Introdução

Definimos uma imagem como uma representação parcial de um objeto real. Na condição de a imagem ser obtida somente a partir das informações provenientes do objeto, devemos esperar paradoxalmente que qualquer componente proveniente de nossa imaginação seja eliminada.

A energia portadora de informação, que pode ser radiada, refletida, refratada, defletida, difratada, transferida ou transformada pelo objeto, deverá ser medida.

A visão de uma célula num microscópio, a visão de uma estrela a olho nú ou através de um telescópio, uma imagem num espelho, fotografias e impressões digitais são todas imagens. Imagens não tão óbvias são, por exemplo, os arcos-íris, padrões de difração de raios X, memórias de computadores cheias de números de fótons que conseguiram ser transmitidos através de um paciente, partindo de vários ângulos de incidência. São necessários cálculos mentais ou através de um computador, para que estas imagens representem respectivamente gotas de água, células unitárias de um cristal e a seção transversal de um paciente.

Imagens que requerem um processamento para que sejam reveladas podem ser chamadas de imagens latentes, mas, esta distinção não será feita neste trabalho. É interessante notar que pelo fato de a energia estar envolvida, nenhuma imagem que estamos considerando, está livre das limitações da física quântica^{1,2}; como exemplos, o ruído quântico na visão³ e até nas imagens astronômicas⁴. Outros fatores que limitam a fidelidade com que a imagem representa o objeto real podem, em princípio, ser reduzidos sem limites fundamentais, mas, a fidelidade da imagem terá um limite fundamental, porque um número finito de quanta de energia precisa ser contado^{5,6}. Uma vez contado, nenhuma manipulação com lentes, intensificadores ou computadores pode escapar da incerteza quântica. De fato, a incerteza pode ser reduzida ou pelo aumento do tempo destinado à contagem ou pelo aumento da energia disponível ao objeto que está sendo medido; ambos aumentam o número de quanta contado. Em lugar algum, a limitação quântica está ligada ao risco de vida, como no caso de uma imagem radiográfica.

A degradação da imagem devida a insuficiência de quanta é variavelmente chamada de ruído quântico, ou "mottle" quântico, quando observada num filme⁷. Não podemos confundir ruído quântico com a granularidade do filme. Assim como outros efeitos instrumentais, a granularidade pode ser reduzida; entretanto, o efeito do ruído quântico pode ser reduzido somente pelo aumento

da intensidade ou tempo de exposição aos raios X, mas ambos aumentam o risco ao paciente, a partir do aumento da dose de radiação.

Obviamente, todo esforço deve ser feito para aumentar a qualidade da imagem e a razão sinal ruído deve ser otimizada em relação ao risco benefício.

5.1 Imagem Convencional Obtida com Raio X Monocromático

Para que possamos entender a base quântica da imagem convencional vamos nos reportar à figura (1). Suponhamos que dispomos de uma fonte puntual de raios X, de um objeto de cujas estruturas internas queremos uma imagem, e de um detector plano para registrar os fótons transmitidos pelo objeto.

O detector plano pode ser um filme que vai registrar o número de fótons por unidade de área, ou seja a fluência que não interagiu no objeto e que chega a cada ponto do filme, através de uma linha reta que sai da fonte. A fluência que chega ao filme pode ser escrita como:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-M} \quad \text{fóton cm}^{-2} \quad (1)$$

onde $\Psi_0 = \Phi_0 t$ é a fluência, Φ o fluxo de fótons incidentes no objeto, e M é o argumento da exponencial que vem a ser $\int \mu dx$; isto é, a soma das probabilidades de que um fóton será removido do fluxo incidente pelos átomos do objeto. A absorvância M tem informação sobre a espessura e a composição do paciente, e é basicamente o que o radiologista quer medir. Melhor dizendo, ele vai querer medir a variação da absorvância sobre diferentes regiões no paciente. A figura (1) mostra duas regiões separadas pela distância Δr , para a qual a diferença na absorvância seria ΔM . Se a questão fosse apenas para distinguir os contornos dos ossos dentro do tecido mole, seria fácil demais. O radiologista pode ter motivos para querer distinguir uma pequena diferença ΔM , por exemplo, uma pequena quantidade de Iodo nas artérias coronárias; ele ainda pode exigir que Δr seja pequena para resolver detalhes pouco separados espacialmente, como, por exemplo, obstruções nas coronárias.

A seguir, vamos ver como estas exigências se combinam para aumentar o ruído quântico, necessitando de um aumento do tempo ou do fluxo dos raios X. Para reduzir tanto quanto possível a dose absorvida pelo paciente, devemos examinar criteriosamente a natureza do ruído quântico. Tradicionalmente, a otimização da imagem consiste em permitir minimizar ΔM e Δr , sem considerar a dosagem. Nestas últimas décadas, alguns autores^{9,10,11} fizeram esforços para reduzir a dosagem através do uso de filtros e na seleção da kVp do gerador de raios X, com o intuito de demonstrar uma nova abordagem do problema da otimização da qualidade de imagem, levando em conta os riscos associados à exposição do paciente.

Vamos começar o estudo da imagem com o tratamento de uma imagem convencional, para a qual se tem quase 100 anos de experiências e regras empíricas.

Na parte B deste capítulo, aplicaremos estas novas técnicas à imagens feitas com duplo espectro de energia.

Diferenças do fluxo no plano da imagem estão relacionadas às diferenças no argumento M da exponencial. Diretamente da equação (1), podemos ver que, para pequenas diferenças ΔM , haverá uma pequena diferença no fluxo $\Delta \Phi$:

Figure 1: Fluxo de fótons que consegue ser transmitido através de um paciente e detetados pelo filme em duas áreas próximas.

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \Delta M \quad (2)$$

Percebemos que ΔM é duas vezes o contraste, definido na equação (3) da seção 2.4 do capítulo II sobre a Quantificação da Fidelidade da Imagem do paciente. No plano da imagem medimos $\Delta\Phi$ e Φ através de detetores separados pela distância Δr . Podemos supor que estes detetores têm uma eficiência ϵ e uma área $(\Delta r)^2$ (detetores menores perdem fótons, e detetores maiores prejudicam a resolução espacial exigida). A contagem num detetor ideal será

$$C = \Phi_0 t (\Delta r)^2 \epsilon \epsilon^{-M} \quad (3)$$

Para determinar a diferença de M , são necessárias medidas em dois pontos vizinhos no plano da imagem. Destas duas medidas obteremos duas contagens praticamente iguais, tais que

$$\frac{\Delta C}{C} = \Delta M \quad (4)$$

O fato de os raios X terem uma natureza quântica^(1,2), leva a uma variação estatística nesta medida. A variação estatística^(3,4) numa única contagem é dada pelo desvio padrão da contagem $\sqrt{C}$ ou pela raiz quadrada da contagem.

Para que obtenhamos o desvio padrão na diferença das duas contagens, devemos lembrar como se propagam as variâncias estatísticas⁸. O desvio padrão para a diferença ΔC das duas contagens, quase iguais e não correlacionadas, será:

$$\sigma_{\Delta C} = \sqrt{2C} \quad (5)$$

Logo, o desvio padrão na determinação do contraste ΔM será dado por

$$\sigma_{\Delta M} = \sqrt{2/C} \quad (6)$$

Detalhes da obtenção da propagação de erros estatísticos devido a variação da composição do objeto podem ser vistos no apêndice I.

A razão S/R para a determinação do contraste pode ser definida como

$$S/R = \frac{\Delta M}{\sigma_{\Delta M}} = \Delta M \sqrt{C/2} \quad (7)$$

Utilizando as equações (1) e (3) obteremos:

$$S/R = \Delta M \Delta r e^{-M/2} \sqrt{\frac{\Phi_o t \epsilon}{2}} \quad (8)$$

Não surpreendentemente, o S/R aumenta somente com a raiz quadrada da fluência $\Phi_o t$.

O ideal é que a razão S/R seja alta. Obviamente, ela seria mais alta se o radiologista se satisfizesse com a detecção apenas de objetos de maior contraste ΔM e detalhes com maior tamanho Δr . Mas, supondo que as suas exigências são racionalmente determinadas, preocupamo-nos com a maximização desta relação, que depende ou da mudança da energia utilizada para fazer a radiografia, da mudança da composição através da introdução de contraste no tecido que se está observando, ou da mudança da espessura como se faz em mamografia. Todas estas mudanças são intrínsecas ao parâmetro M. Consideraremos o problema de maximizar a S/R relativa ao parâmetro M, à absorbância do paciente.

A eficiência ϵ também é dependente da energia, mas, por enquanto, nós a consideraremos constante, como, por exemplo, num aparelho de tomografia computarizada, onde os detectores têm quase 100% de eficiência. Quanto ao parâmetro $\Psi_o = \Phi_o t$, qualquer aumento no tempo ou no fluxo aumenta a dosagem no paciente. Concluimos que é desejável maximizar $\Delta M e^{-M/2}$. Maximizando a S/R relativa a M, teremos:

$$\frac{d(S/R)}{dM} = \Delta r \sqrt{\frac{\Phi_o t \epsilon}{2}} \left(\frac{d\Delta M}{dM} - \frac{\Delta M}{2} \right) e^{-M/2} = 0 \quad (9)$$

fazendo:

$$\Delta M = M_1 - M_2 \approx M \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (10)$$

A suposição de que M_2/M_1 independe da energia é justificada, quando ambos são devidos ao efeito fotoelétrico ou ambos são devidos ao efeito Compton:

$$\frac{d(S/R)}{dM} = \Delta r \sqrt{\frac{\Phi_o t \epsilon}{2}} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) e^{-M/2} (1 - M/2) = 0 \quad (11)$$

e

$$\frac{d^2(S/R)}{dM^2} = \Delta r \sqrt{\frac{\Phi_o t \epsilon}{2}} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) e^{-M/2} (-1 + M/4) \quad (12)$$

Observamos que, para $M=2$, a derivada primeira será igual a zero e a derivada segunda resultará num valor negativo, levando a concluir que a S/R tem um ponto de máximo. Para uma dada aplicação, M seria determinada pelo kVp do gerador.

Uma comparação com a tabela I mostra-nos uma pequena correlação com as energias escolhidas num Serviço de Radiologia típico (HC em Ribeirão Preto), que se baseiam em longos e tradicionais períodos de tomadas radiográficas.

TABELA I
Absorbâncias M práticas obtidas de exames convencionais no HCFMRP-USP.

REGIÃO	kVp	ESPESSURA		$M=\mu x$
		(cm)	μ (cm^{-1})	
abdomen	80	20	.18	3.6
tórax	90	20	.175	3.5
crânio	80	17	.18	3.1
femur	66	15	.195	2.9
cervical	70	15	.19	2.85
perna	65	12	.195	2.34
joelho	55	10	.57	5.7
tornozelo	55	5	.57	2.85
pés	60	4	.57	2.28
mãos	40 a 50	3	.57	1.71

O fato é que não se justifica em radiologia comum, que utiliza telas intensificadoras e filmes, propor que a eficiência ϵ seja constante. Podemos supor que a eficiência quântica do filme radiográfico, ou de certos tipos de fósforos varia com o inverso do cubo da energia, isto é, com o efeito fotoelétrico nos materiais do detetor. Neste caso, a eficiência no detetor varia com M_d , a absorbância no detetor.

A função a ser maximizada, omitindo os fatores constantes, será

$$\sqrt{M_d} \Delta M e^{-\frac{M}{2}} \tag{13}$$

M_d e M diferem por fatores constantes dos materiais no detetor e no paciente. Supondo que não há efeito da aresta K no detetor, para fim de maximização, podemos substituir M_d por M e ΔM por M . Com esta justificativa, a expressão anterior fica:

$$M^{3/2} e^{-M/2} \tag{14}$$

cuja diferencial é

$$e^{-M/2} \left(\frac{3}{2} M^{1/2} - \frac{1}{2} M^{3/2} \right) = 0 \tag{15}$$

indicando que, para $M = 3$ existe um máximo S/R, em melhor concordância com o uso tradicional. Em resumo, concluímos que, para qualquer detetor, o valor M está situado em $2 < M < 3$, para otimização da determinação do S/R.

5.2 Sinal Ruído Considerando a Dose Absorvida

Para que possamos otimizar a determinação da S/R, também é importante que a façamos em relação à dose de radiação recebida pelo paciente, já que existe o compromisso entre buscar uma melhor imagem com uma menor dose possível.

O comportamento da dose absorvida, ou energia absorvida por quilograma de tecido, perto da superfície do paciente pode ser representado pela expressão:

$$D = \frac{\Phi_o t \Delta r^2 E \mu_s \Delta x}{(\Delta x \Delta r^2) \rho} = \Phi_o t E (\mu/\rho)_s \quad J \text{ kg}^{-1} \quad (16)$$

μ_s é a probabilidade por unidade de distância, dos fótons ao interagirem na superfície do paciente, e sua dependência energética é igual à da absorbância M . E , que aparece na expressão, é a energia do fóton.

A relação S/R por dose absorvida é obtida combinando as equações (8) e (16).

$$\frac{S/R}{D} = \frac{\Delta r \Delta M \sqrt{\epsilon/2}}{\sqrt{\Phi_o t} E (\mu/\rho)_s} e^{-M/2} \quad (17)$$

Nas análises feitas da S/R na equação (8), notamos que a dependência desta razão aumenta com a raiz quadrada do tempo de exposição ao paciente. Sendo que a dose absorvida depende linearmente do tempo; logo, a razão sinal ruído por dose apresentada na equação (17), tem uma dependência com o inverso da raiz quadrada de t .

Essa razão diminui com a raiz da fluência, $\Phi_o t$, demonstrando a necessidade de um critério do radiologista quanto ao risco-benefício. Entretanto, devemos procurar maximizar a expressão para uma dada fluência, considerando os dois casos anteriores:

I CASO : Eficiência do detetor $\epsilon = 100\%$ (não dependente da energia)

Na região fotoelétrica, M varia com o inverso do cubo da energia E , ou $E \approx M^{-1/3}$. O coeficiente μ_s geralmente varia da mesma maneira que M , logo, $\Delta M/\mu_s$ não depende da energia. A função a ser maximizada é

$$M^{1/3} e^{-M/2} \quad (18)$$

O máximo existirá para $M=2/3$, que não está em concordância com a tabela I, porque dificilmente o detetor tem eficiência constante ou 100%.

II CASO : Eficiência do detetor $\epsilon \ll 100\%$ (eficiência dependente da energia)

Comumente, o detetor é um filme ou tela fluorescente, cuja eficiência varia da mesma forma que o argumento M ; portanto, tem um $M^{1/2}$ adicional e a função a ser maximizada é $M^{(1/3+1/2)}e^{-M/2}$, cujo máximo é para $M = 5/3$, um pouco melhor em concordância com a prática no HC. Concluimos que o ótimo argumento para se obter um boa relação Sinal/Ruído, com mínima dosagem absorvida, deve ser $2/3 < M < 5/3$, para qualquer detetor.

Devemos atribuir a fato dos radiologistas escolherem energias que dão absorbâncias fora destes limites, à tendência de otimizar a qualidade da imagem em detrimento do paciente, que recebe uma dosagem desnecessariamente alta. Esta abordagem de otimizar a escolha da energia dos raios X diagnósticos não aparece na literatura, de modo geral.

Watt⁹, em 1975, citou o valor ótimo de $M=2$, porém, sem perceber que este valor se limita aos casos de detetores com 100% de eficiência, e sem estudar os efeitos no ruído, considerando o compromisso com a dose absorvida.

5.3 Imagens Convencionais obtidas com um Feixe não Monocromático

As relações e resultados até agora citados neste capítulo são para feixes monocromáticos. Eles servem como guias importantes na escolha da energia ótima para maximizar a S/R e reduzir a dosagem ao paciente. Nesta seção, investigaremos a influência do espectro incidente nestes resultados.

Suponhamos que o espectro incidente possa ser determinado pela função $d\Phi/dE$ que especifica o número de fótons/mm² em cada intervalo de energia (keV) para cada miliamper-segundo (mAs) da exposição. Referindo-nos ainda à figura (1), cada contagem pelo detetor de área $(\Delta r)^2$ e eficiência $\epsilon(E)$ deve ser escrita como uma integral

$$C = \int (d\Phi/dE) dE t(\Delta r)^2 \epsilon e^{-M} \quad (19)$$

ao invés da equação (3). O símbolo t , agora, representa o número de mA-s da exposição para a medida. O desvio de uma medida como esta continua sendo $\sqrt{C}$, e o da diferença de duas medidas semelhantes a esta e quase iguais é $\sqrt{2C}$, de tal forma que o contraste $\Delta C/C$ observado terá um desvio $\sqrt{2/C}$. Da equação (19), podemos calcular uma relação entre o contraste da imagem $\Delta C/C$ e o gradiente na absorbância ΔM , o contraste do paciente que o radiologista deseja para fazer o seu diagnóstico.

$$\Delta C = \int (d\Phi/dE) dE t(\Delta r)^2 \epsilon \Delta M e^{-M} \quad (20)$$

que permite escrever

$$S/R = \frac{\Delta C/C}{\sigma_{\Delta C/C}} = \Delta C \sqrt{\frac{1}{2C}} = \Delta r \sqrt{\frac{t}{2}} \frac{\int (d\Phi/dE) dE \epsilon \Delta M e^{-M}}{\sqrt{\int (d\Phi/dE) dE \epsilon e^{-M}}} \quad (21)$$

que se reduz a equação (8) caso o espectro $d\Phi/dE$ seja monocromático.

Os limites destas integrais deverão ser de zero até o $kVp=T_o$ do gerador de raios-X. Na prática, podemos usar um limite inferior determinado pelos filtros.

Lembrando que o radiologista tem a responsabilidade de especificar a diferença ΔM e a resolução espacial Δr de que ele necessita para um dado diagnóstico, podemos modelar a equação (21) de tal maneira, que fiquem separados os fatores que não dependem da escolha da energia:

$$S/R = \frac{\Delta M_p}{M_p} \Delta r \sqrt{\frac{t\epsilon_p}{2}} \cdot \frac{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE \frac{\epsilon}{\epsilon_p} M e^{-M}}{\sqrt{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE \frac{\epsilon}{\epsilon_p} e^{-M}}} \quad (22)$$

onde o subscrito p denota o valor do parâmetro na energia máxima do espectro determinado pelo kVp do gerador. Estamos supondo que $\Delta M/M$ quase não depende da energia.

Facilmente maximizamos a relação S/R, dada pela equação (8), em função do fator M da atenuação no paciente. Neste caso, é mais conveniente maximizar S/R em função da energia máxima T_0 para diversas espessuras de material, assumindo um detetor cuja eficiência varia linearmente com o seu coeficiente de absorção.

Se a distribuição espectral $(d\Phi/dE)$ não for normalizada, o que geralmente ocorre, então esta expressão deverá ser dividida por $\sqrt{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE}$.

Para a avaliação da $(S/R)/D$, devemos dividir a equação (22) pela dose absorvida, devidamente ponderada sobre o espectro de raios X. Considerando a normalização, a expressão proporcional da $(S/R)/D$ a ser otimizada é

$$\frac{S/R}{D} \propto \frac{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE \epsilon M e^{-M} \sqrt{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE}}{\sqrt{\int^{T_0} (d\Phi/dE) dE \epsilon e^{-M}} \int^{T_0} (d\Phi/dE) dE E (\mu/\rho)} \quad (23)$$

onde os fatores que não dependem da energia são omitidos. A absorbância $M = \int \mu x$ depende da energia dos fótons e da espessura do material por onde os fótons foram transmitidos.

Nesta seção, utilizaremos a expressão (22) com feixes não monocromáticos para fazer uma simulação numérica nas condições de detetor dependente e não dependente da energia. Para esta simulação faremos uso dos programas do espectro e dos coeficientes de atenuação já citados no capítulo III. Nesta simulação, também faremos uso de espessuras de osso e tecido mole.

Fazendo a simulação numérica da S/R versus energia utilizando a expressão acima, obtivemos duas famílias de curvas para várias espessuras de osso e tecido mole para detetor com $\epsilon = 100\%$ e mais duas famílias para várias espessuras dos dois materiais para detetor com $\epsilon \ll 100\%$. Estas curvas podem ser vistas nas figuras 2a, 2b, 3a, 3b.

Nas figuras apresentadas, podemos comprovar a existência do ponto de máximo como previmos analiticamente. Para espessuras maiores, não é de se surpreender que não exista nenhuma energia para a qual os fótons penetrem o suficiente. Para espessuras além de 5 cm de tecido mole e 2 cm de osso não existe uma energia que resulte na absorbância ótima quando a eficiência do detetor é igual a 100%. Isto não significa que é melhor utilizar um detetor com baixa eficiência.

As tabelas II e III são obtidas dos dados das figuras (2a e 2b) e (3a e 3b) respectivamente. Nestas tabelas, temos os valores ótimos de energia (keV) para se obter a melhor S/R para um detetor com eficiência independente da energia (para tabela II) e para um detetor com eficiência dependente da energia (para tabela III).

Percebemos que a medida que a espessura do material aumenta a energia ótima para dar a melhor relação S/R também aumenta, mostrando que é necessário que os fótons mais energéticos penetrem no material e consigam ser contados em maior número pelo detector diminuindo o ruído quântico. Obviamente as curvas também mostram uma diminuição da S/R com o aumento da espessura.

O próximo passo será averiguarmos se para um detector com $\epsilon=100\%$ ou $\epsilon \ll 100\%$ correspondem pontos de máximo cujos valores da absorbância M são 2 e 3 respectivamente. O valor da absorbância M , como já vimos, corresponde ao produto do coeficiente de atenuação pela espessura do material de interesse. Sendo assim, para obtermos os valores das absorbâncias da simulação, uma vez que já temos as espessuras correspondentes, basta-nos obter os valores dos coeficientes de atenuação linear. Os valores dos coeficientes de atenuação podem ser obtidos por duas vias:

A primeira via é de simplesmente utilizar os valores de μ que correspondem aos valores do kVp. Este procedimento considera que a maioria dos fótons no espectro possui a energia máxima T_o , o que é pouco realista. A segunda via é mais realista, porque considera que os fótons no espectro têm uma energia média. Desta maneira, o coeficiente de atenuação deverá ser integrado sob todo espectro para se obter a sua média μ_m .

$$\langle \mu \rangle = \frac{\int_{T_o}^{T_o} (d\Phi/dE) \mu dE}{\int_{T_o}^{T_o} (d\Phi/dE) dE} \quad (24)$$

Nas tabelas II e III, apresentamos estes dois valores dos coeficientes de atenuação μ_p e μ_m com respectivos valores de absorbâncias M_p e M_m para espessuras conhecidas de dois materiais; considerando na tabela II uma simulação feita quando a eficiência do detector é independente da energia ($\epsilon=100\%$) e para a tabela III quando a eficiência do detector varia com energia ($\epsilon \ll 100\%$).

Nestas tabelas, é interessante notar que os valores das absorbâncias calculados a partir dos dados obtidos com a simulação da expressão da S/R para feixes não monocromáticos são ligeiramente menores do que os valores $2 < M < 3$ determinados analiticamente para feixes monocromáticos. Os valores não são exatamente correspondentes, devido as não linearidades intrínsecas nas flutuações quânticas na detecção e nas interações dos raios X com o material.

Interessante é notar que a diferença da absorbância ótima M_m não difere muito da absorbância calculada para a energia do kVp do gerador para energias baixas. A figura (4) mostra que os espectros de baixa energia são mais monocromáticos devido ao efeito da filtração inerente. Sem dúvida, o melhor procedimento clínico seria escolher filtros adicionais de modo que o espectro incidente no paciente seja mais monocromático possível. Com a ajuda de um computador modesto em uma sala de radiologia, a equação (23) permite a escolha da energia ótima, bem como os filtros adicionais adequados para cada paciente. A figura (4) mostra-nos a dramática redução da dose absorvida possível utilizando filtros adicionais, além da redução que resulta no procedimento da otimização da energia.

TABELA II											
Valores ótimos de T_o , para eficiência do detetor = a 100%, obtidos das figuras 2a e 2b.											
Osso						Tecido Mole					
T_o keV	espessura cm	μ_p cm^{-1}	μ_m cm^{-1}	M_p	M_m	T_o keV	espessura cm	μ_p cm^{-1}	μ_m cm^{-1}	M_p	M_m
20	.2	9.5	8.9	1.9	1.8	18	2	.90	1.0	1.8	2.0
30	.5	3	3.9	1.5	2.0	40	5	.28	.38	1.4	1.9
50	1	1	1.4	1	1.4						
100	1.5	.47	.70	.71	1.1						
180	2	.34	-	.68	-						

TABELA III											
Valores ótimos de T_o , para eficiência do detetor $\ll 100\%$, obtidos das figuras 3a e 3b.											
Osso						Tecido Mole					
T_o keV	espessura cm	μ_p cm^{-1}	μ_m cm^{-1}	M_p	M_m	T_o keV	espessura cm	μ_p cm^{-1}	μ_m cm^{-1}	M_p	M_m
18	.2	15	14	3	2.8	15	2	1.4	1.3	2.8	2.6
28	.5	3.6	4.8	1.8	2.4						
40	1	1.6	1.8	1.6	1.8	25	5	.46	.58	2.3	2.9
50	1.5	1.0	1.4	1.5	2.1						
70	2	.61	.80	1.2	1.6	100	10	.20	.25	2	2.5
						400	15	.13	-	1.95	

5.4 Conclusões

Acabamos de desenvolver procedimentos para otimizar a escolha da energia dos fótons utilizados na radiologia convencional, com o intuito de minimizar as flutuações quânticas para uma determinada dose absorvida. O parâmetro importante neste desenvolvimento é a penetração dos fótons ou a absorbância M do paciente. Utilizando a expressão da razão S/R na forma

$$S/R = M^n e^{-M/2} \tag{25}$$

onde o expoente n depende do tipo de detetor, de considerar ou não a dose absorvida, e dos filtros adicionais utilizados.

O ponto de máximo nesta função se encontra em

$$M = 2n \tag{26}$$

e representa a absorbância que mais alcança a resolução espacial e o contraste na imagem dentro dos limites impostos pelas flutuações quânticas.

A absorbância

$$M = \int \mu dx \quad (27)$$

é a integral das probabilidades que um fóton tem de interagir na espessura do paciente. A dependência desta probabilidade reside no coeficiente de atenuação μ . Em consequência da dependência monotônica de μ com a energia do fóton, a absorbância otimizada corresponde a otimização da energia do fóton, ou ao kVp do gerador de raios X.

Considerando a espessura e o material da amostra invariáveis, as otimizações da S/R (equação (8)) e da (S/R)/D (equação (17)) levam-nos a $2 < M < 3$ e a $2/3 < M < 5/3$ respectivamente. Os limites 2 e 2/3 são para um detetor com $\epsilon = 100\%$ e os limites 3 e 5/3 são para um detetor com $\epsilon \ll 100\%$. Para feixes não monocromáticos, os valores otimizados da absorbância são determinados pelos métodos numéricos demonstrados neste capítulo.

Figura 2: Razão S/R versus energia para detetor com $\epsilon=100\%$ e considerando os materiais osso e tecido mole com várias espessuras.

Figura3: Razão S/R versus energia para detetor com $\epsilon \ll 100\%$ e considerando os materiais osso e tecido mole com várias espessuras.

Figura 4: Simulação de vários espectros de raios X variando somente o potencial de aceleração dos elétrons no tubo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Sturm, R. E. Morgan, R. H. *Screen Intensification Systems and Their Limitations*. Am. J. Roentgenol. 62, 617 - 634, 1949.
- 2 Rimkus, D. e Bailey, N. A. *Quantum Noise in Detectors*. Med. Phys. 10, 470-471, 1983.
- 3 Rose, A. & Weimer, P. K. *Physical Limits to the Performance of Imaging Systems*. Phys. Today, 42(9):24-32, 1989.
- 4 Freitas, L. C. *Recuperação de Imagens Astronômicas Limitadas pela Natureza Quântica de Detecção de Luz*. In: *XII Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada*. Caxambú, 1990. Resumos. p. 99.
- 5 Macovski, A. *Medical Imaging Systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1983. 249p.
- 6 Barnes, G. T. *Noise Analyses of Radiographic Imaging* IN: *Doi, K. ; Lanzl, L. ; Lin, P. P. RECENT DEVELOPMENTS IN DIGITAL IMAGING*. New York, American Institute of Physics, 1985. 16-38p.
- 7 Ter-Pogossian, M. M. *The Physical Aspects of Diagnostic Radiology*. New York, Harper & Row Publishers, 1969. 426p.
- 8 Bevington, P. R. *Data Reduction and Error Analyses for the Physical Sciences*. New York, McGraw - Hill, 1969. 336p.
- 9 Watt, D. E. *Optimum Photon Energies for the Measurement of Bone Mineral and Fat Fractions*. Brit. Jour. Radiol. 48:265- 274, 1975.

B - DESENVOLVIMENTO DA RAZÃO SINAL-RUÍDO DE IMAGENS RADIOGRÁFICAS POR DUPLA ENERGIA.

Introdução

A utilização do conceito de duas energias para obter informações sobre as características de tecidos foi um conceito primeiramente sugerido por Jacobson¹. Na década de 60, este conceito foi estendido à análise mineral óssea^{2,3}; na década de 70, à subtração digital^{4,5} e, posteriormente, à radiografia digital por varredura⁶ e angiografia por subtração digital⁷.

As fontes inicialmente empregadas eram de radioisótopos por terem uma banda estreita em energia. Exemplo de um destes radioisótopos é o Gd153, com energias 40 e 100 keV, que é utilizado na determinação do conteúdo mineral ósseo³ e atualmente sendo pesquisado na FFCLRP-USP por Vasques e Ghilardi⁸.

A técnica radiológica da dupla energia tem utilizado também fontes de raios X. Nestas fontes, a dupla energia é obtida através de dois espectros diferentes, um com um banda de energia na região das interações fotoelétrica e o outro na região das interações pelo efeito compton. Os dois espectros podem ser obtidos com a mudança da quilovoltagem na máquina e/ou com a adição de filtros adequados^{9,10}. Também podem ser obtidos através de um detector seletivo para as duas energias como nos mostram Brooks e Di Chiro¹¹, em 1978, e Barnes *et. al.*¹², em 1985.

A dupla energia permite a subtração digital, que é a imagem seletiva de materiais dentro do corpo, e a obtenção de informação sobre a distribuição espacial de um determinado tecido.

A seguir, mostraremos, com o auxílio da figura (1), como podemos obter informação, ou uma imagem, de um material de interesse a ou b, partindo de duas energias monocromáticas. Para isto, necessitamos de um feixe com um fluxo Φ ($\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) de fótons com cada energia E e de uma amostra contendo dois materiais, a e b. Conhecendo previamente os componentes a e b da amostra, temos condições de obter da literatura os coeficientes de atenuação de cada um deles para cada energia do feixe incidente. Uma vez que

$$\mu = \mu(E, Z) \quad \text{cm}^{-1}$$

Figure 1: Fluxos de fótons com energias E_1 e E_2 que conseguem ser transmitidos através de um paciente e detetados no plano da imagem.

o fluxo de fótons transmitido por materiais de mesmo número atômico e espessura x é

$$\Phi = \Phi_0 \exp(-\int \mu dx)$$

onde $\exp(-\int \mu dx)$ é a probabilidade dos fótons não interagirem numa espessura da amostra, perpendicular ao feixe incidente. A medida da absorbância $\int \mu dx$ permite obter uma imagem convencional no plano do detetor, como vimos na parte A deste capítulo.

Com o conhecimento dos coeficientes de atenuação para os dois elementos, e das transmissões dos fluxos obtidos experimentalmente, basta que escolhamos convenientemente as energias dos fluxos para que possamos determinar as espessuras dos materiais a e b na amostra, para isto, os fluxos das transmissões medidas, devem ter energias diferentes e adequadas.

Para uma amostra com dois componentes são necessárias apenas duas energias, porém com mais componentes, além das energias citadas, pode-se fazer uso das energias relativas as das arestas de absorção K do componente de interesse, como foi demonstrado por Kelcz e Mistretta¹³, em 1975, e Riderer e Mistretta⁴, em 1977.

Vamos detetar o número de fótons transmitidos pelo paciente para cada um de dois feixes, um com energia E_1 e outro com energia E_2 , esta última considerada maior (veja figura 1). Também necessitamos contar o número de fótons para cada feixe individualmente, mantendo a

Figure 2: Coeficientes de Atenuação para o osso e tecido mole. Na região fotoelétrica temos a razão ≈ 6 entre os valores dos coeficientes, dado pela razão entre o produto das densidades e o cubo dos números atômicos das duas substâncias. Na região Compton temos a razão ≈ 1.7 entre os coeficientes, dada somente pela razão entre as densidades.

mesma geometria, porém, sem a amostra. O detector com área $(\Delta r)^2$ tem uma eficiência ϵ_1 e ϵ_2 para fótons de energias E_1 e E_2 , respectivamente, e um tempo é destinado para cada uma das quatro contagens.

$$C_{o1} = \Phi_{o1} t_{o1} (\Delta r)^2 \epsilon_1 \quad C_1 = \Phi_{o1} t_1 (\Delta r)^2 \epsilon_1 e^{-(\mu_{a1} x_a + \mu_{b1} x_b)} \quad (1)$$

$$C_{o2} = \Phi_{o2} t_{o2} (\Delta r)^2 \epsilon_2 \quad C_2 = \Phi_{o2} t_2 (\Delta r)^2 \epsilon_2 e^{-(\mu_{a2} x_a + \mu_{b2} x_b)} \quad (2)$$

Destas quatro medidas, podemos calcular as duas absorbâncias M_1 e M_2 , como sendo

$$M_2 = \ln \frac{C_{o2}/t_{o2}}{C_2/t_2} = \mu_{a2} x_a + \mu_{b2} x_b \quad (3)$$

$$M_1 = \ln \frac{C_{o1}/t_{o1}}{C_1/t_1} = \mu_{a1} x_a + \mu_{b1} x_b \quad (4)$$

A seguir, referir-nos-emos às absorbâncias M_1 e M_2 como quantidades observadas, uma vez que são derivadas das quantidades observadas que são as taxas de contagem. Podemos

desenvolver duas imagens convencionais uma para cada energia; alternativamente, resolvendo estas equações, as espessuras poderão ser determinadas segundo as expressões:

$$x_a = \frac{M_1\mu_{b_2} - M_2\mu_{b_1}}{\Delta} \quad (5)$$

$$x_b = \frac{M_1\mu_{a_2} - M_2\mu_{a_1}}{\Delta} \quad (6)$$

O valor do determinante $\Delta = \mu_{a_2}\mu_{b_1} - \mu_{a_1}\mu_{b_2}$ (cm^{-2}) é função das energias E_1 e E_2 e das densidades e números atômicos dos materiais a e b.

A determinação dos valores x_a e x_b , para cada posição lateral no plano da imagem, permite desenvolver uma imagem de cada material com resolução espacial, que depende, dentre outras coisas, do tamanho do detetor Δr . A medida dos valores x_a e x_b , numa secção transversal de um osso, determina o conteúdo mineral do osso. Medidas de um conjunto de valores x_a e x_b , em vários ângulos, permitem imagens tomográficas para cada material. A seguir, veremos a importância do determinante Δ nestas aplicações.

6.1 O Determinante Δ

Os pioneiros nos trabalhos com dupla energia como Alvarez e Macovski¹⁴, em 1976, e Kelcz *et al.*¹⁵, em 1979, apesar de terem reconhecido a necessidade de um valor alto para o determinante, não revelaram a sua interpretação física.

A seguir, mostraremos graficamente a interpretação do determinante e qualitativamente como são selecionadas as duas energias para que obtenhamos os melhores valores. Nesta seleção utilizaremos as curvas do logaritmo do coeficiente de atenuação linear versus logaritmo da energia dos fótons incidentes para os materiais a e b da amostra. A figura (2) mostra estas curvas, onde percebemos que o material b tem tanto a densidade quanto o número atômico maiores do que os do material a. Na região fotoelétrica, a dependência é proporcional a ρ e Z^3 e as duas curvas estão mais separadas do que na região Compton, onde a dependência é apenas proporcional a ρ . Consideraremos a densidade e o número atômico do material b como os do osso, que são maiores do que os do material a, para o tecido mole.

O determinante também pode ser expresso algebricamente pela diferença entre duas razões

$$\Delta = \mu_{a1}\mu_{a2}\left(\frac{\mu_{b1}}{\mu_{a1}} - \frac{\mu_{b2}}{\mu_{a2}}\right) \quad (7)$$

E já que estamos representando os coeficientes numa escala logarítmica, a distância vertical entre uma curva e outra numa certa energia é exatamente a razão entre os dois coeficientes naquela energia. A diferença entre as razões que aparecem na expressão (7), do determinante, é igual à *diferença* das distâncias verticais entre as duas curvas na abscissa de cada uma das duas energias. Podemos observar que a razão é uma constante na região fotoelétrica e uma outra constante na região Compton. A razão na região fotoelétrica é determinada pela razão do produto ρZ^3 para cada elemento e na região Compton é determinada pela razão das densidades de cada elemento.

Desta figura podemos fazer as seguintes conclusões:

1 - Na região fotoelétrica, não há duas energias que darão as soluções das equações (3) e (4), porque uma será um múltiplo da outra. O determinante Δ será zero, ou melhor, será uma pequena diferença entre números grandes.

2 - Com duas energias na região Compton, o determinante também será zero.

3 - A única escolha racional é aquela para E_1 na região fotoelétrica e E_2 na região Compton. O determinante será $\neq 0$ e as espessuras poderão ser determinadas.

Substituindo os coeficientes com as suas dependências nas densidades e números atômicos dos materiais¹⁶ a e b, temos

$$\Delta = \mu_{a1}\mu_{a2}\frac{\rho_b}{\rho_a}\left(\frac{Z_b^3}{Z_a^3} - 1\right) \approx 10,1(\mu_{a1}\mu_{a2}) \quad (8)$$

O valor numérico ilustra a situação, quando os materiais forem osso e tecido mole, cujas densidades e números atômicos efetivos têm razões 1.85 e 1.86, respectivamente.

Uma vez escolhidas as energias E_1 e E_2 de acordo com o tipo de interação, percebemos que a dependência energética do determinante está principalmente no coeficiente μ_{a1} , isto é, o inverso do cubo de E_1 . Se em desenvolvimentos posteriores desejarmos um valor alto para o determinante, basta escolhermos a energia E_1 baixa. Quanto ao μ_{a2} não esperamos nenhuma grande influência de E_2 . Em seções subsequentes, estas considerações qualitativas serão colocadas numa base mais analítica.

6.2 Determinação dos Desvios Padrões

Os desvios percentuais devido as flutuações quânticas nas contagens detetadas com e sem amostra são:

$$C_{o_1} \rightarrow 1/\sqrt{C_{o_1}} \quad C_{o_2} \rightarrow 1/\sqrt{C_{o_2}} \quad (9)$$

$$C_1 \rightarrow 1/\sqrt{C_1} \quad C_2 \rightarrow 1/\sqrt{C_2} \quad (10)$$

Como pode ser visto no apêndice III, o desvio em um logaritmo é igual ao desvio percentual no argumento do logaritmo; logo, os valores e desvios nas absorbâncias observadas dos fótons de cada energia são dados por:

$$M_2 \pm \sqrt{\frac{1}{C_{o_2}} + \frac{1}{C_2}} \quad , \quad M_1 \pm \sqrt{\frac{1}{C_{o_1}} + \frac{1}{C_1}} \quad (11)$$

Podemos desprezar os desvios intrínsecos nas contagens de C_{o_1} e C_{o_2} , graças a possibilidade de obter uma média de um grande número de contagens nas regiões laterais, no plano da imagem, quando o paciente não estiver no caminho do feixe.

Aplicando as regras da propagação dos desvios nos numeradores das equações (5) e (6), obtemos os desvios de x_a e x_b :

$$x_a \pm \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_{b_1}^2}{C_2} + \frac{\mu_{b_2}^2}{C_1}} \quad (12)$$

$$x_b \pm \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_{a_1}^2}{C_2} + \frac{\mu_{a_2}^2}{C_1}} \quad (13)$$

Estas equações foram apresentadas na literatura primeiramente por Alvarez¹⁷ em sua tese de doutorado na Universidade de Stanford, em 1973.

No intuito de definir a razão sinal ruído nas imagens, definimos os sinais como x_a e x_b , determinados pelas medidas experimentais indicadas pelas equações (5) e (6), e os ruídos como os respectivos desvios determinados pelas equações (12) e (13).

6.3 Otimização das Experiências com Dupla Energia

Pode-se notar que em nenhuma das referências da literatura sobre técnicas de duas energias, admitem-se tempos de contagens que não sejam iguais. Devido ao fato de que o fluxo de fótons de alta energia geralmente é reduzido em relação ao de baixa energia, a igualdade de tempo permite o tipo de afirmação feita por McCollough *et alii*¹⁸, em 1989: “ Uma imagem de alta energia tem inerentemente mais ruído do que uma de baixa energia”. Esta premissa de igualdade dos tempos de contagem permite desprezar a flutuação quântica na contagem C_1 relativa àquela em C_2 .

Por enquanto, aceitaremos este raciocínio, e desprezaremos $1/C_1$ relativo a $1/C_2$. Das equações (12) e (13), podemos aproximar as razões S/R da seguinte maneira:

$$(S/R)_a = \frac{x_a \Delta \sqrt{C_2}}{\mu_{b_1}} \quad e \quad (S/R)_b = \frac{x_b \Delta \sqrt{C_2}}{\mu_{a_1}} \quad (14)$$

Δ/μ_{b_1} e Δ/μ_{a_1} quase não dependem da energia, uma vez que E_1 e E_2 foram apropriadamente selecionadas, como já citamos no início da nossa discussão. Deste modo, em vista das equações (2), a S/R obviamente pode ser melhorada, contando um grande fluxo em um grande e eficiente contador por um longo tempo. A equação (14) mostra que não há outra opção que aumente C_2 , uma vez que os coeficientes de absorção na região Compton dependem pouco da energia E_2 .

Igualmente arbitrário é o procedimento feito por Watt¹⁹, que mede o mesmo número de fótons nas duas energias. Quem faz igualdade dos tempos ou igualdade das fluências, despreza a possibilidade de otimizar as condições experimentais para aumentar a S/R .

Neste trabalho, tomamos uma posição contrária à declaração, comum na literatura, de que a maior contribuição ao ruído quântico na determinação de um componente da amostra pelo método de dupla energia, vem das medidas feitas com alta energia, porque o bom senso argumenta contra a premissa de que as contagens devem ser feitas em tempos iguais.

Nesta seção, veremos que existe uma melhor divisão de tempo entre as medidas de alta e baixa energia. Para isto, consideremos novamente uma das equações (12) ou (13).

$$(S/R)_b = \frac{x_b}{\sigma_{x_b}} = \frac{x_b \Delta}{\sqrt{\frac{\mu_{a_1}^2}{C_2} + \frac{\mu_{a_2}^2}{C_1}}} \quad (15)$$

Uma outra equação $(S/R)_a$ para o material **a** pode ser obtida simplesmente intertrocando **b** e **a** na equação (15) e nas equações a seguir.

Se um tempo total t está disponível, teremos uma fração f para contagem em alta energia

e (1-f) para contagem em baixa energia. A equação (15), em termos destas frações, pode ser escrita como

$$(S/R)_b = \frac{x_b \Delta \sqrt{t} \Delta r}{\sqrt{\frac{A}{f} + \frac{B}{1-f}}} \quad (16)$$

Não surpreendentemente, notamos que a S/R aumenta com a raiz quadrada do tamanho do detetor $(\Delta r)^2$ e do tempo total destinado à experiência. Utilizando as equações (1), (2) e (15), as constantes A e B, com dimensões de segundo e inversamente proporcionais às taxas de contagens, têm valores tais que a razão

$$\frac{B}{A} = \frac{\mu_{a_2}^2 \Phi_{o_2} \epsilon_2 e^{-M_2}}{\mu_{a_1}^2 \Phi_{o_1} \epsilon_1 e^{-M_1}} \quad (17)$$

geralmente tem o valor bem menor do que um.

Minimizando o radical no denominador da equação (16) relativo a f, nós encontramos a fração ótima

$$f = \frac{1}{1 + \sqrt{B/A}} \quad (18)$$

A equação (18) mostra claramente que, para a melhor determinação da imagem de um dos materiais (material b), mais do que a metade do tempo total deve ser destinado à contagem na alta energia, uma vez que a fluência em baixa energia é geralmente muito maior do que aquela em alta energia. A sequência das equações iniciada com a (15) são relativas ao material b. Os resultados para o material a podem ser obtidos simplesmente intertrocando as letras b e a na sequência inteira. Assim, percebemos que para a determinação da imagem do outro material (material a), a ótima divisão do tempo é *diferente*, mas também mais do que a metade deve ser destinada à contagem na alta energia.

O conceito de maximizar a relação S/R através da otimização do orçamento do tempo experimental é um conceito novo que está pela primeira vez sendo desenvolvido nesta tese.

Evidentemente, a otimização não pode ser realizada para cada ponto na imagem, como, por exemplo, em fluoroscopia digitalizada. Entretanto, nada impede a programação dos tempos destinados em cada ângulo numa tomografia computadorizada, uma vez que o computador tem disponíveis as taxas de contagens para cada ponto na imagem em tempo real. O que importa, para qualquer que seja a aplicação, é a otimização na região da imagem em que o radiologista tem o maior interesse.

Uma vez que otimizamos a divisão do tempo, devemos substituir o melhor valor de f da equação (18), na expressão (16) para a S/R e seguir na busca da melhor energia.

$$(S/R)_b = \frac{x_b \Delta \sqrt{t} \Delta r}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad (19)$$

com

$$A = \frac{\mu_{a1}^2}{\Phi_{o2} \epsilon_2 e^{-M_2}} \quad B = \frac{\mu_{a2}^2}{\Phi_{o1} \epsilon_1 e^{-M_1}}$$

$$(S/R)_b = \frac{x_b \Delta \sqrt{t} \Delta r}{\frac{\mu_{a1}}{\sqrt{\Phi_{o2} \epsilon_2} e^{-M_2/2}} + \frac{\mu_{a2}}{\sqrt{\Phi_{o1} \epsilon_1} e^{-M_1/2}}} \quad (20)$$

Não é de estranhar que a melhor S/R é obtida em função da raiz quadrada do tempo total, da eficiência e da área do detetor e de cada fluxo emergente do paciente. Menos intuitivo e a ótima seleção das energias E_1 e E_2 .

Nós já vimos que a seleção de E_2 não é crítica nesta análise, embora ela seja importante na determinação da dose absorvida, a ser considerada abaixo.

Temos exigido inicialmente que as energias sejam escolhidas de modo que, na baixa energia E_1 , a interação com os dois materiais seja predominantemente pelo efeito fotoelétrico, e que, na alta energia E_2 , a interação com os dois materiais seja pelo efeito Compton. Supondo que o material b seja osso, o mínimo valor da energia E_2 , que satisfaz esta exigência, é aproximadamente 70 keV (veja curva μ/ρ versus energia para osso). Concluimos que este valor mínimo é a melhor escolha para facilitar a obtenção de alto fluxo Φ_{o2} , em geradores de raios X. A seguir, vamos examinar estas considerações mais analiticamente.

Para formalmente maximizar (S/R) , devemos identificar a parte da equação (19) que depende das energias E_1 e E_2 .

$$\frac{\Delta}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad (21)$$

Igualando a zero as suas derivadas, relativas as duas energias, temos

$$2 d_1 \Delta = \frac{\sqrt{A} d_1 A + \sqrt{B} d_1 B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad 2 d_2 \Delta = \frac{\sqrt{A} d_2 A + \sqrt{B} d_2 B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad (22)$$

onde utilizamos a seguinte notação para as derivadas logarítmicas:

$$d_i = \frac{d(\log)}{d(\log E_i)} \quad \text{com } i = 1, 2 \quad (23)$$

Esta derivada logarítmica é igual à inclinação das funções nas apresentações no papel log-log. Exemplo destas derivadas são os seguintes:

CASO I: Eficiência do detetor $\epsilon \ll 1$ (dependente da energia)

Para interações dominadas pelo efeito fotoelétrico, para as quais os parâmetros indicados variam com o inverso do cubo da energia E_1

$$d_1 \Delta = d_1 \mu_{a_1} = d_1 \mu_{b_1} = d_1 \epsilon_1 = -3 \quad (24)$$

$$d_1 e^{M_1} = -3M_1; \quad d_1 A = -6; \quad d_1 B = 3(1 - M_1) \quad (25)$$

Para interações dominadas pelo efeito Compton, para as quais os parâmetros indicados variam aproximadamente com o inverso da energia E_2

$$d_2 \Delta = d_2 \mu_{a_2} = d_1 \mu_{b_2} = d_2 \epsilon_2 = -1 \quad (26)$$

$$d_2 e^{M_2} = -M_2; \quad d_2 B = -2; \quad d_2 A = (1 - M_2) \quad (27)$$

Substituindo estas derivadas nas equações (22) e (23) temos

$$M_1 = 3; \quad M_2 = 3 \quad (28)$$

CASO II: Eficiência do detetor $\epsilon=1$ (independente da energia)

$$d_1 \epsilon_1 = d_2 \epsilon_2 = 0 \quad (29)$$

Os outros valores das derivadas logarítmicas permanecem como nas equações (25)-(28). Substituindo nas equações (22) e (23) concluímos que

$$M_1 = 2; \quad M_2 = 2 \quad (30)$$

Estas respostas necessitam de imediato, duas observações:

1 - Estes valores da absorbância, que otimizam a obtenção das imagens feitas pela subtração digital das medidas com duas energias são os mesmos $2 < M < 3$ que foram indicados para otimizar a obtenção de uma imagem convencional.

2 - Para todos os materiais, os coeficientes de atenuação μ são funções monotônicas decrescentes da energia, que significa que para uma dada estrutura anatômica, uma vez que selecionada E_1 para o ótimo valor $M_1 = 3$ (ou 2), *não é possível* que haja um valor da absorbância $M_2 = 3$ (ou 2) para uma energia $E_2 > E_1$.

De antemão, não tínhamos nenhuma certeza que o valor da S/R dada pela Equação (19) necessariamente tivesse máximos em ambas as variáveis E_2 e E_1 , e de fato não tem. Concluímos que, nas medidas com duas energias nas quais não se leva em conta a dose absorvida, o ótimo valor para a energia E_1 deve ser escolhido com vistas à uma absorbância entre 2 e 3, conforme o tipo do detetor. A energia E_2 , por sua vez, deve ser escolhida por um outro critério, por exemplo um valor mais baixo para aproveitar maiores fluxos do gerador.

As equações apresentadas acima são válidas para aplicações onde a dose absorvida não é relevante, tais como nas aplicações industriais e na clínica veterinária. Considerações relativas ao controle da dose absorvida pelos seres humanos, levam-nos a expressões diferentes das apresentadas acima. Na seção seguinte, trataremos da relação S/R levando em conta a dose absorvida.

6.4 Dose Absorvida em Experimentos de Dupla Energia

Historicamente, os radiologistas têm confrontado o compromisso entre o risco e o benefício para imagens simples com uma certa concordância intuitiva com os parâmetros ótimos obtidos na parte A deste capítulo. Isso não tem sido verdade com a radiologia com dupla energia, onde nenhuma tentativa foi publicada para otimizar o tempo gasto em cada energia.

Tomando o coeficiente linear de absorção na superfície do paciente como μ_s , a dose absorvida total na superfície do paciente será dada pela soma da contribuição de cada energia:

$$D = \Phi_{o_1} t_1 E_1 \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{s_1} + \Phi_{o_2} t_2 E_2 \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{s_2} \quad J \text{ kg}^{-1} \quad (31)$$

e a função a ser maximizada será a equação (15) para S/R dividida pela equação (31) para a dose absorvida.

Figure 3: Comportamento típico das duas funções no denominador da equação (32), em função de f , a fração do tempo total dedicado à contagem na energia alta. A curva (a) na dose absorvida, varia linearmente com f . As singularidades $f=0$ e $f=1$ na curva (b) obviamente advém do fato de que nenhum S/R resultará gastando todo o tempo contando somente uma energia. O mínimo na curva (b) para $f = 1/(1 + \sqrt{B/A})$ indica que existe um orçamento do tempo da contagem para melhor S/R, num dado tempo total. $\sqrt{B/A}$ é proporcional à raiz quadrada das razões das contagens. O texto dá um procedimento para encontrar o melhor orçamento para maximizar $(S/R)/D$, em um dado tempo total.

$$\frac{(S/R)_b}{D} = \frac{\Delta r x_b \Delta}{\sqrt{\frac{\mu_{a1}^2}{C_2} + \frac{\mu_{a2}^2}{C_1}} (\Phi_{o2} t_2 E_2(\frac{\mu}{\rho})_{s2} + \Phi_{o1} t_1 E_1(\frac{\mu}{\rho})_{s1}} \quad (32)$$

Seguindo a mesma lógica, precisamos primeiro determinar a melhor divisão do tempo total entre contagens em cada energia. Escrevendo o denominador da equação (32)

$$\sqrt{\frac{A}{f} + \frac{B}{1-f}} \cdot (Cf + (1-f)D) \quad (33)$$

onde os valores das constantes A, B, C, D têm as seguintes razões:

$$\frac{B}{A} = \frac{C_2 \mu_{a2}^2}{C_1 \mu_{a1}^2} \quad \frac{C}{D} = \frac{E_2 \mu_{s2} \Phi_{o2}}{E_1 \mu_{s1} \Phi_{o1}} \quad (34)$$

Podemos notar da equação (32) que $(S/R)/D$ *diminui* com a raiz quadrada dos mesmos parâmetros experimentais, tempo total e fluxo incidente, que *aumenta* o (S/R) sozinho. Esta inversão é devida ao fato de que a dose aumenta linearmente com o tempo e o fluxo, enquanto efeitos estatísticos, aumenta apenas com a raiz quadrada dos mesmos parâmetros.

Para otimizar a divisão do tempo, devemos procurar o mínimo neste denominador. Igualando a zero a sua derivada, obteremos uma equação de quarta ordem em f , difícil de solucionar com as constantes gerais. Entretanto, é fácil ver que a função raiz quadrada, com suas singularidades em $f=0$ e $f=1$, domina a função linear que simplesmente diminui linearmente de D a C , no domínio de f . Veja figura (3).

O mínimo no denominador da equação (32) estará perto do valor dado na equação (18) já vista para especificar que mais do que metade do tempo será gasto na medida com alta energia.

A algebra, extenuante, encontrada na diferenciação direta do denominador da equação (33) pode ser evitada expandindo o denominador nas vizinhanças do mínimo de sua parte dominante. Considerando

$$f = \frac{1}{(1 + \sqrt{B/A})} + \delta \quad (35)$$

e minimizando o denominador da equação (33) relativo a δ , achamos o ótimo valor de δ

$$\delta = \frac{1 - C/D}{(C/D + \sqrt{B/A})(1 + \sqrt{A/B})} \quad (36)$$

Com geradores de raios X, geralmente sempre com $D > C$, percebemos que a ótima divisão do tempo é ainda mais assimétrica quando se leva em conta a dose absorvida. A explicação física reside no fato que é melhor acumular contagens dos fótons da energia que contribuem menos na dosagem por segundo. A razão B/A é determinada pelas taxas das contagens durante as exposições, e a razão C/D é determinada pelas taxas das exposições na superfície do paciente, ambas disponíveis simultaneamente durante a própria exposição.

Notamos que deverão ser incluídos fatores geométricos na equação (32) que levam em conta a magnificação no plano da imagem relativa a superfície do paciente. Uma vez que estes fatores são independentes das energias, nada influenciarão no procedimento da otimização. Na próxima seção, apresentaremos procedimentos numéricos para se obter as condições experimentais otimizadas.

6.5 Avaliação da Relação S/R e de $(S/R)/D$ para Imagens por Dupla Energia.

Vimos na seção anterior que a otimização das energias escolhidas para um dado diagnóstico, e os tempos destinados a medida em cada energia, dependem do fluxo incidente no paciente e do fluxo que consegue ser transmitido por ele. O procedimento analítico, na última seção, mostra os princípios envolvidos. Entretanto, mesmo sabendo os parâmetros anatômicos num caso específico, temos que saber, ou impor, certas condições instrumentais. Por exemplo, o fluxo disponível em função da quilovoltagem do gerador.

No que se segue, vamos supor que os fluxos de fótons disponíveis são iguais para todas as energias. Deste modo, vão ser determinados o tempo destinado a cada medida e as energias ótimas através dos procedimentos dados. Podemos pensar que nada se perde em generalidade com esta simplificação porque, se na prática os fluxos não são iguais, os tempos deveriam ter sido ajustados proporcionalmente. Este procedimento, equivale a determinação da *fluência* a ser destinada a cada medida, ao invés do tempo.

Sobre a questão dos espectros do gerador de raios X, deve ser óbvio que, quanto mais monocromáticos forem os dois feixes, melhor será. O fato de haver energias ótimas que maximizam a S/R e minimizam a dose absorvida tem como corolário a expectativa de que fótons de outras energias servem somente para nos afastar da condição ótima. A monocromatização dos feixes dos geradores de raio X é feita através de filtros de materiais com as arestas K es-

colhidas previamente para eliminar todos os fótons fora de uma faixa estreita de energia. O procedimento numérico analítico utiliza os espectros simulados com os filtros adicionais desejados através da equação de Birch e Marshall, que pode ser vista no capítulo III. Entretanto, nesta análise, prosseguimos sem utilizar estes filtros. A dose absorvida nestas condições será a ideal, portanto os valores das energias ótimas, e a divisão do tempo entre as duas medidas não devem sofrer grande influência da presença destes fótons. Uma vez determinadas as energias, os filtros podem ser calculados especificamente para monocromatizar as energias e reduzir a dose absorvida. O procedimento de otimização pode ser reiterado. Nesta seção, demonstramos a otimização apenas com filtros inerentes nos geradores convencionais.

Como foi exposto, queremos maximizar a $(S/R)/D$ em função dos três parâmetros E_1 , E_2 e f , respectivamente as duas energias e a fração do tempo destinado a medida na energia maior. Partindo de uma equação como a (32) para $(S/R)/D$ (intertrocando a e b conforme o material do qual se deseja a imagem) devemos procurar um máximo na superfície definida pelas variáveis f , E_1 e E_2 . A equação utilizada é derivada numericamente da equação 32, fazendo com que cada parâmetro que depende da energia seja substituído pela sua média sobre a energia do espectro de raios X como foi exposto na apresentação das simulações da transmissão e da imagem convencional.

Métodos sofisticados existem para a otimização de funções multi-dimensionais, porém aqui, utilizamos o método de Cauchy²⁰ de 1845, que determina a variável mais sensível (gradiente máximo) e procura o máximo nesta dimensão, sequencialmente passando para a próxima dimensão de maior gradiente, e assim sequencialmente até que o gradiente residual esteja suficientemente perto de zero. A convergência é extremamente rápida nesta aplicação.

Ainda para fins didáticos, apresentamos graficamente a seguir, a dependência da $(S/R)/D$ em função das energias E_1 e E_2 para a divisão do tempo predeterminado pelo método Cauchy.

Apresentamos três exemplos, um diagnóstico do ponto do fêmur de um adulto (8 cm de osso e 5 cm de tecido), um joelho de uma criança (5 cm de osso e 2 cm de tecido) e o tórax de uma criança (2 cm de osso e 15 cm de tecido). As figuras (4), (5), (6) e (7) mostram variações da $(S/R)/D$ para estes exemplos.

A figura (4) mostra-nos que na busca das condições de maior S/R , uma vez que a energia E_2 é suficientemente alta a ponto de ter interações dominadas pelo efeito Compton, evidentemente a S/R aproxima-se do máximo apenas assintoticamente em E_2 . Esta falta de máximo corresponde

ao que já demonstramos na seção anterior analiticamente para um feixe monocromático. Considerações instrumentais podem favorecer o valor apenas suficientemente alto para não perder mais do que 5% do valor da (S/R) assintótico.

Na busca das condições para maior $(S/R)/D$ devemos especificar que o objetivo é de se obter uma imagem do osso (subtração digital do tecido) ou uma imagem do tecido (subtração digital do osso). As Figuras (5), (6), e (7) mostram que as ótimas energias são diferentes conforme o objetivo do radiologista.

A tabela I mostra os resultados destes três exemplos. Os pares de valores na coluna a são os das energias (em keV) para melhor obtenção da imagem do tecido (subtração digital do osso) e na coluna b as das energias para a situação inversa

TABELA I					
Otimização das medidas do $(S/R)/D$					
REGIÃO	x_a	x_b	a	b	FIGURA
femur	8	5	30; 70	20; 60	5
joelho	2	5	35; 75	25; 50	6
tórax	15	2	30; 80	24; 63	7

Em geral, considerações na redução da dose absorvida força a decisão de utilizar energias significativamente menores do que as energias escolhidas para otimizar simplesmente a S/R . Referindo-nos à figura (2) nesta divisão B deste Capítulo, percebemos que E_2 da tabela I invade bastante a região onde as interações com os materiais começam a ser dominadas pelo efeito fotoelétrico, o que contraria as expectativas sem considerar a dose absorvida.

Resumimos, chamando a atenção do procedimento conceitualmente e numericamente simples para maximizar a $(S/R)/D$ dado pela equação (32) utilizando o conhecimento dos parâmetros anatômicos e dos fluxos antes e depois dos mesmos serem atenuados pelo paciente. Todos os parâmetros estão disponíveis simultaneamente com a exposição que permite a programação automática do aparelho diagnóstico. É importante enfatizar que esta simulação foi feita para espectros, fluxos e detetores típicos mas não necessariamente iguais aos geralmente utilizados. O procedimento de otimizar a divisão de tempo e a escolha das energias é suficientemente fácil e rápido, que deve ser incluído na programação do computador que controla o diagnóstico, seja de um tomógrafo ou seja o de um aparelho para uma projeção simples do paciente. Basta saber os parâmetros do gerador e dos detetores, e a grosso modo os parâmetros do paciente na região de interesse para executar os cálculos de otimização.

Sendo que a razão das constantes B/A (proporcional à razão da taxa da contagem no plano da imagem) e das constantes C/D (proporcional a razão da taxa da dose absorvida na superfície do paciente) são as variáveis que determinam a otimização, os cálculos podem ser feitos durante a exposição.

A redução da dose absorvida pelo paciente resulta como consequência na redução dos efeitos estatísticos da detecção dos fótons de raios X, embora mantendo o sinal que o radiologista requer para revelar o contraste e resolução espacial desejados.

Figure 4: Dependência da relação sinal ruído na seleção das duas energias, para melhor revelação da imagem de uma espessura de 2 cm de tecido mole justaposta à 5 cm de osso. As experiências são simuladas numericamente para uma sequência de energias em intervalos logarítmicos iguais. A simulação do material b leva em conta a dose absorvida na superfície do paciente e mostra que é melhor escolher $E_1 = 25$ e $E_2 = 50$ (keV), energias menores do que as escolhidas quando não se leva em conta a dose absorvida no material b.

função de f , a fração do tempo total dedicado à contagem na energia alta. A curva (a) na dose absorvida, varia linearmente com f . As singularidades $f=0$ e $f=1$ na curva (b) obviamente advém do fato de que nenhum S/R resultará gastando todo o tempo contando somente uma energia. O mínimo na curva (b) para $f = 1/(1 + \sqrt{B/A})$ indica que existe um orçamento do tempo da contagem para melhor S/R, num dado tempo total. $\sqrt{B/A}$ é proporcional à raiz quadrada das razões das contagens. O texto dá um procedimento para encontrar o melhor orçamento para maximizar $(S/R)/D$, em um dado tempo total.

Figura 5: Razão $(S/R)/D$ considerando a região anatômica do fêmur com 8 cm de tecido mole e 5 cm de osso. A figura (5a) apresenta a variação da $(S/R)/D$ para o material a (tecido mole) subtraindo o material b (osso), e a figura (5b) apresenta a situação inversa.

Figura 6: Razão $(S/R)/D$ considerando a região anatômica do joelho com 2cm de tecido mole e 5cm de osso. A figura (6a) apresenta a variação da $(S/R)/D$ para o material a (tecido mole) subtraindo o material b (osso), e a figura (6b) apresenta a situação inversa.

Figura 7: Razão $(S/R)/D$ considerando a região anatômica do tórax com 15 cm de tecido mole e 2cm de osso. A figura (7a) apresenta as variação da $(S/R)/D$ para o material a (tecido mole) subtraindo o material b (osso), e a figura (7b) apresenta a situação inversa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Jacobson, B. *Dichromatic Absorption Radiography: Dichromography*. Acta Radiol. 39:436-452, 1953.
- 2 Cameron, J. R. & Sorenson, J. *Measurement of Bone Mineral In Vivo: An Improved Method*. Science, 142:230-233, 1963.
- 3 Judy, P. F. *A Dichromatic Attenuation Technique for the In Vivo Determination of Bone Mineral Content*. Madison, 1971. 126p. [Tese de doutorado - Universidade de Wisconsin]
- 4 Kruger, R. A.; Mistretta, C. A.; Crummy, A. B.; Sackett, J. F.; Goodsitt, M. M.; Riedere, S. J.; Houk, T. L.; Shaw, C. G. & Fleming, D. *Digital K-Edge Subtraction Radiography*. Radiology, 125:243-245, 1977.
- 5 Lehmann, L. A.; Alvarez, R. E.; Macovski, A. & Brody, W. R. *Generalized Image Combinations in Dual kVp Digital Radiography*. Med. Phys. 5:659-667, 1981.
- 6 Tesic, M. M.; Mattson, R. A.; Barnes, G. T.; Sones, R. A. & Stickney, J. B. *Digital Radiography of the Chest: Design Features and Considerations for a Prototype Unit*. Radiology, 148(1):259-264, 1983.
- 7 Liu, P.; Bateman, W. & Kruger, R. A. *Digital Angiography using a Matched filter (abs.)* Med. Phys. 9:627-632, 1983.
- 8 Vasques, M. & Ghilardi, T. *Trabalho em andamento na FFCLRP-USP*.
- 9 Atkins, L. H.; Fairchild, R. G.; Robertson, J. S. & Greenberg, D. *Effect of Absorption Edge Filters on Diagnostic X-Ray Spectra*. Radiology 115:431-437, 1975.
- 10 Riderer, S. J. & Mistretta, C. A. *A Selective Iodine Imaging Using K-Edge Energies in Computerized X-Ray Tomography*. Med. Phys. 4(6):474-480, 1977.
- 11 Brooks, R. A. & Di Chiro, G. *Split-Detector Computed Tomography: A Preliminary Report*. Radiology, 126:255-257, 1978.

- 12 Barnes, G. T.; Sones, R. A. ;Tescic, M. M. ;Morgan, D. R. & Sanders, J. N. *Detector for Dual-Energy Digital Radiography*. Radiology 156:537-540, 1985.
- 13 Kelcz, F. & Mistretta, C. A. *Absorption-Edge Fluoroscopy using a Three-Spectrum Technique.*, Med. Phys. 3(3):159-168, 1975.
- 14 Alvarez, R. E. & Macovski, A. *Energy- Seletive Reconstructions in X-Ray Computerized Tomography*. Phys. Med. Biol. 21(5):733-744. 1976.
- 15 Kelcz, F.; Joseph, P. M. & Hilal, S. K. *Noise Considerations in Dual Energy CT Scanning*. Med. Phys. 6(5)418-425, 1979.
- 16 Johns, H. E. , Cunningham, J. R. *The Physics of Radiology*. Illinois, Charles C. Thomas Publisher, 4 ed. 1983. 796p.
- 17 Alvarez, R. E. *Extraction of Energy Dependent Information in Radiography*. Stanford, 1976. 147p. [Tese de doutorado - Universidade de Stanford]
- 18 McCollough, C. H., Van Lysel, M. S. , Peppler, W. W. & Mistretta, C. A. *A Correlated Noise Reduction Algorithm for Dual- Energy Digital Subtraction Angiography*. Med. Phys. 16(6):873-880, 1989.
- 19 Watt, D. E. *Optimum photon energies for the measurement of bone mineral and fat fractions*. Brit. Jour. Radiol. 48:265-274, 1975.
- 20 Bevington, P. R. *Data Reduction and Error Analyses for the Physical Sciences*. New York, McGraw - Hill, 1969. 336p.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES FINAIS

Introdução Rose e Shapiro¹ introduziram o conceito da otimização da divisão do tempo de uma contagem de um feixe de fótons ou de outras partículas, com e sem a presença de uma amostra que atenuasse este feixe; a finalidade era determinar o coeficiente de atenuação dos átomos do material da amostra. Utilizando as regras simples de propagação das flutuações estatísticas nas duas contagens que determinam a secção do choque, concluíram que a razão do tempo t_2 destinado a fazer a contagem sem a amostra pelo tempo t_1 com a amostra era a raiz quadrada da transmissão T da amostra; isto é,

$$t_2/t_1 = \sqrt{T} \quad (1)$$

Estes pesquisadores revelaram com esta simples regra como minimizar o tempo para alcançar uma precisão desejada. Mais importante, demonstraram que a espessura da amostra, e assim a absorbância da amostra, pode ser otimizada para diminuir ainda mais o tempo experimental. Em condições de baixa contagem de fundo, a transmissão ótima tem o valor de 0.075, que corresponde a absorbância $M = 2.59$, pois

$$.075 = e^{-2.59} \quad (2)$$

$$t_1/t_2 = 3.65 \quad (3)$$

Apesar do fato de que os autores chamaram atenção para a possibilidade que suas regras pudessem ser aplicadas na radiologia, ninguém nestes 43 anos tem feito, formalmente, uma otimização da absorbância nas aplicações radiológicas considerando tal possibilidade. Nesta tese, antes de entrar no assunto da otimização dos parâmetros envolvidos na subtração digital utilizando duas energias de fótons, demonstramos a existência de uma absorbância ótima para obter uma imagem convencional utilizando uma única energia ou espectro de energia.

6.1 Imagem Convencional

Neste primeiro passo demonstramos que, ao contrário das suas expectativas, as regras de Rose e Shapiro não se aplicam à radiologia por três motivos:

1 - Um radiologista se interessa pela diferença da absorbância em pontos vizinhos no plano da imagem. Essa diferença vem da *diferença* das duas contagens ao invés da *razão* de duas contagens, que é o caso nas determinações da seção de choque.

2 - Em consequência do primeiro motivo, a eficiência do detetor, que cancela nas razões de Rose e Shapiro, influencia a otimização das imagens radiológicas.

3 - Rose e Shapiro não tiveram motivos de se preocuparem com a dose absorvida.

Nesta tese, utilizando regras da propagação dos desvios estatísticos em um detetor de fótons de raios X, deduzimos os seguintes valores para as absorbâncias M ótimas : $2 < M < 3$ para $0 < \epsilon < 1$ sem considerar a dosagem absorvida e

$2/3 < M < 5/3$ para $0 < \epsilon < 1$ para a mínima dosagem absorvida.

Estes valores da absorbância foram obtidos analiticamente considerando um feixe monocromático de fótons ou um feixe feito quase que monocromático com filtros com aresta K.

Utilizando as mesmas regras de propagação das flutuações quânticas para o espectro de fótons encontrado na radiologia, foi desenvolvido um procedimento para a determinação numérica do valor ótimo da absorbância, e subsequentemente a quilovoltagem do gerador de Raio X e seus filtros externos, para qualquer diagnóstico. Estas otimizações são verdadeiras experiências simuladas numericamente com bancos de dados que permitem rapidamente reproduzir as condições exatas numa sala de radiologia.

O espectro, os filtros externos, qualquer espessura e composição dos materiais nas estruturas do paciente, podem ser simulados. Variações nestes parâmetros permitem indentificar os procedimentos otimizados.

Não podemos dizer que este desenvolvimento permitirá um melhoramento da qualidade das imagens convencionais. Em quase cem anos de experiência, radiologistas acertaram empiricamente as energias dos fótons que resultaram no mínimo ruído quântico. A formalização das regras de otimização serve para confirmar a seleção das energias que estão sendo utilizadas nas clínicas modernas.

Entretanto, a técnica de simulação numérica desenvolvida nesta tese, mostra dramaticamente a necessidade de se utilizar filtros para eliminar os fótons de energia menor que o valor ótimo. Estes fótons de baixa energia em nada prejudicam a qualidade da imagem porque são quase que totalmente absorvidos no paciente. Os fabricantes dos geradores de raios X geralmente incluem filtros fixos no aparelho para atenuar a parte grosseira do espectro, mas historicamente os radiologistas não têm incentivos em utilizar filtros adicionais escolhidos para cada diagnóstico.

6.2 Dupla Energia

Duas imagens, de uma mesma estrutura, feitas com fótons de dois espectros diferentes podem ser digitalmente manipuladas para produzir uma imagem para cada um dos dois materiais que compõe a estrutura.

Para reduzir o ruído quântico nas imagens e a dose absorvida no paciente, demonstramos que tem uma otimização da divisão do tempo que o paciente deve ficar exposto a cada feixe de raios X, e que existem valores ótimos de energias dos fótons a serem utilizados na obtenção de cada imagem. A divisão do tempo e a escolha das duas energias para se obter a imagem de um material, diferem daquelas para se obter a imagem para o outro material.

Para se obter a máxima S/R num dado tempo total, a divisão do tempo destinado as duas exposições deve ser tal que

$$t_2/t_1 = \sqrt{\frac{C_1 \mu_{a1}^2}{C_2 \mu_{a2}^2}} \quad (4)$$

onde μ_{a1} e μ_{a2} são os coeficientes de atenuação, nas duas energias, do material a ser eliminado da imagem desejada, e C_1 e C_2 são as taxas de contagem. Mais tempo deve ser destinado a exposição que tem a mais baixa taxa de contagem, simulante da regra do Rose e Shapiro. A influência dos materiais, através dos coeficientes μ_{a1} e μ_{a2} , aumenta ainda mais o tempo destinado a energia alta. A necessidade de programar os tempos para reduzir a dose absorvida faz com que a divisão seja ainda mais assimétrica. Procedimentos são apresentados para otimizar a escolha das duas energias tal que tenham um máximo na razão $(S/R)/D$ para feixes não monocromáticos.

6.3 Considerações Gerais:

Nós mostramos para qualquer que seja a imagem convencional ou a imagem feita por dupla energia, que a razão sinal-ruído quântico, relativa a dose absorvida na superfície do paciente, aumenta na proporção dos seguintes parâmetros sob controle do radiologista:

1. ΔM , o contraste desejado na imagem ou o gradiente na absorbância desejado,
2. Δr a resolução espacial desejada e
3. $1/\sqrt{t}$, o inverso da raiz quadrada do tempo da exposição.

O último reflete o fato de que, a razão S/R aumenta apenas com a raiz quadrada do tempo, enquanto a dose absorvida aumenta diretamente com o tempo da exposição.

Os dois parâmetros anteriores, enfatizam o fato de que procedimentos diagnósticos que realmente necessitam resolver pequenos objetos de baixo contraste (ΔM), vão necessitar maiores tempos de exposição com o conseqüente aumento do risco ao paciente. Com a insistência na obtenção de imagens bonitas com "alta qualidade", um radiologista pode demonstrar a sua ignorância a estas duas dependências e sua indiferença ao risco causado ao paciente.

Embora não tratados especificamente, os métodos desenvolvidos nesta tese, aplicam-se também às imagens obtidas pela subtração digital como a angiografia, para a qual uma substância mais opaca é injetada no organismo entre exposições de raios X na mesma região anatômica e a subtração temporal, na qual exposições são sincronizadas com um processo biológico repetitivo, por exemplo, o ciclo cardíaco.

A otimização da energia, desenvolvida neste trabalho para uma imagem radiológica convencional, evidentemente pode ser feita somente para uma pequena região no plano da imagem, que pode não ser típica das outras regiões. Esta limitação existe em menor grau para técnicas tomográficas, uma vez que as suas exposições múltiplas devem ser realizadas sequencialmente, o aparelho pode ser programado, tanto relativo ao tempo como à energia dos fótons destinados a cada exposição, pela computação simultânea utilizando os algoritmos desta tese.

As clínicas futuras, dispondo de aceleradores síncrotrons² de elétrons mono-energéticos e lasers de alta intensidade, terão a oportunidade de desenvolver imagens através de feixes de fótons monocromáticos e colimados promovidos às energias altas pelo efeito inverso Compton. As suas energias e fluências podem ser programadas para minimizar a dose absorvida e otimizar a qualidade da imagem para cada ponto no plano da imagem.

APÊNDICE I

PROPAGAÇÃO DE ERROS DEVIDO À VARIAÇÃO DA COMPOSIÇÃO DO OBJETO

Voltando à figura (1), da parte A do capítulo V, onde dois raios com contagens C_1 e C_2 têm intrinsecamente variações estatísticas já citadas no capítulo IV, poderíamos indicar os comportamentos das contagens antes e depois do objeto radiografado, como:

$$D_1 = \log \frac{C_2}{C_1} \text{ e } D_2 = \log \frac{C_2}{C_2}$$

O que nos interessa é a variação de D ou seja ΔD

$$\Delta D = D_1 - D_2 = \log \frac{C_2}{C_1} \quad (1)$$

Lembrando¹ que a propagação da variância de uma função com duas variáveis é dada pela expressão:

$$\sigma_f^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\delta f}{\delta v} \right)^2 + \sigma_{uv}^2 \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right) \left(\frac{\delta f}{\delta v} \right) \quad (2)$$

se as variáveis u e v não forem correlacionadas, teremos $\sigma_{uv}^2 = 0$; logo:

$$\sigma_f^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\delta f}{\delta v} \right)^2 \quad (3)$$

Partindo destas informações, a variância ΔD será:

$$\sigma_{\Delta D}^2 = \sigma_{C_2}^2 \left(\frac{\delta \Delta D}{\delta C_2} \right)^2 + \sigma_{C_1}^2 \left(\frac{\delta \Delta D}{\delta C_1} \right)^2 \quad (4)$$

sendo que: $\sigma_{C_2} = \sqrt{C_2}$; $\sigma_{C_1} = \sqrt{C_1}$; $\frac{\delta \Delta D}{\delta C_1} = \frac{1}{C_1}$; $\frac{\delta \Delta D}{\delta C_2} = \frac{1}{C_2}$

logo, o desvio padrão de ΔD , que é devido as duas contagens, é dado por:

$$\sigma_{\Delta D} = \sqrt{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}} \quad (5)$$

APÊNDICE II

POTENCIAIS DE IONIZAÇÃO PARA VÁRIOS ELEMENTOS¹

X-Ray Critical-Absorption and Emission Energies in kev

Atomic Num. ber	Element	K series					L series							
		K _{αb}	Kβ ₁	Kβ ₂	Kα ₁	Kα ₂	L _{1αb}	L _{11αb}	L _{111αb}	Lγ ₁	Lβ ₁	Lβ ₂	Lα ₁	Lα ₂
1	Hydrogen	0.0136‡												
2	Helium	0.0246‡												
3	Lithium	0.055				0.052								
4	Beryllium	0.116‡				0.110								
5	Boron	0.192†				0.185								
6	Carbon	0.283				0.282								
7	Nitrogen	0.399				0.392								
8	Oxygen	0.531				0.523								
9	Fluorine	0.687†				0.677								
10	Neon	0.874*				0.851‡	0.048†	0.022†	0.022†					
11	Sodium	1.08*		1.067		1.041	0.055‡	0.034‡	0.034‡					
12	Magnesium	1.303		1.297		1.254	0.063	0.050	0.049					
13	Aluminum	1.559		1.553	1.487	1.486	0.067	0.073**	0.072**					
14	Silicon	1.838		1.832	1.740	1.739	0.118*	0.099**	0.098**					
15	Phosphorus	2.142		2.136	2.015‡	2.014‡	0.163*	0.129‡	0.128‡					
16	Sulphur	2.470		2.464	2.308	2.306	0.193*	0.164**	0.163**					
17	Chlorine	2.819‡		2.815	2.622	2.621	0.238*	0.203‡	0.202‡					
18	Argon	3.203		3.192‡	2.957	2.955	0.287*	0.247**	0.245**					
19	Potassium	3.607		3.589	3.313	3.310	0.341*	0.297**	0.294**					
20	Calcium	4.038		4.012	3.691	3.688	0.399*	0.352	0.349			0.344	0.341	
21	Scandium	4.496		4.460	4.090	4.085	0.462*	0.411**	0.406**			0.399	0.395	
22	Titanium	4.964		4.931	4.510	4.504	0.530*	0.480**	0.454**			0.458	0.452	
23	Vanadium	5.463		5.427	4.952	4.944	0.604*	0.519**	0.512**			0.519	0.510	
24	Chromium	5.988		5.946	5.414	5.405	0.679*	0.583**	0.574**			0.581	0.571	
25	Manganese	6.537		6.490	5.898	5.887	0.762*	0.650**	0.639**			0.647	0.636	
26	Iron	7.111		7.057	6.403	6.390	0.849*	0.721**	0.708**			0.717	0.704	
27	Cobalt	7.709		7.649	6.930	6.915	0.929*	0.794**	0.779**			0.790	0.775	
28	Nickel	8.331	8.328	8.264	7.477	7.460	1.015*	0.871**	0.853**			0.866	0.849	
29	Copper	8.980	8.976	8.904	8.047	8.027	1.100*	0.953	0.933			0.948	0.928	
30	Zinc	9.660	9.657	9.571	8.638	8.615	1.200*	1.045	1.022			1.022	1.009	
31	Gallium	10.368	10.365	10.263	9.251	9.234	1.30*	1.134**	1.117**			1.122	1.096	
32	Germanium	11.103	11.100	10.981	9.885	9.854	1.42*	1.248**	1.217**			1.216	1.186	
33	Arsenic	11.863	11.863	11.725	10.543	10.507	1.529	1.359	1.323			1.317	1.282	
34	Selenium	12.652	12.651	12.495	11.221	11.181	1.652	1.473	1.434			1.419	1.379	
35	Bromine	13.475	13.465	13.290	11.923	11.877	1.794‡	1.599**	1.552**			1.526	1.480	
36	Krypton	14.323	14.313	14.112	12.648	12.597	1.931‡	1.727**	1.675**			1.638‡	1.587**	
37	Rubidium	15.201	15.184	14.960	13.394	13.335	2.067	1.866	1.806			1.782	1.694	1.692
38	Strontium	16.106	16.083	15.834	14.164	14.097	2.221	2.008	1.941			1.872	1.800	1.805
39	Yttrium	17.037	17.011	16.736	14.957	14.882	2.369	2.154	2.079			1.996	1.922	1.920
40	Zirconium	17.998	17.969	17.666	15.774	15.690	2.547	2.305	2.220	2.302	2.219	2.124	2.042	2.040
41	Niobium	18.987	18.951	18.621	16.614	16.520	2.706	2.467**	2.374	2.462	2.367	2.257	2.166	2.163
42	Molybdenum	20.002	19.964	19.607	17.478	17.373	2.884	2.627	2.523	2.623	2.518	2.395	2.293	2.290
43	Technetium	21.054‡	21.012‡	20.585‡	18.410‡	18.328‡	3.054‡	2.795‡	2.677‡	2.792‡	2.674‡	2.538‡	2.424‡	2.420‡
44	Ruthenium	22.118	22.072	21.655	19.278	19.149	3.236‡	2.966	2.837	2.964	2.836	2.683	2.558	2.554
45	Rhodium	23.224	23.169	22.721	20.214	20.072	3.419	3.145	3.002	3.144	3.001	2.834	2.696	2.692
46	Palladium	24.347	24.297	23.816	21.175	21.018	3.617	3.329	3.172	3.328	3.172	2.990	2.838	2.833
47	Silver	25.517	25.454	24.942	22.162	21.988	3.810	3.528	3.352	3.519	3.348	3.151	2.984	2.978
48	Cadmium	26.712	26.641	26.093	23.172	22.982	4.019	3.727	3.538	3.716	3.528	3.316	3.133	3.127
49	Indium	27.928	27.859	27.274	24.207	24.000	4.237	3.939	3.729	3.920	3.713	3.487	3.287	3.279
50	Tin	29.190	29.106	28.483	25.270	25.042	4.464	4.157	3.928	4.131	3.904	3.662	3.444	3.435

51	Antimony	30.486	30.387	29.723	26.357	26.109	4.697	4.381	4.132	4.347	4.100	3.843	3.605	3.595
52	Tellurium	31.809	31.698	30.993	27.471	27.200	4.938	4.613	4.341	4.570	4.301	4.029	3.769	3.758
53	Iodine	33.164	33.016	32.292	28.610	28.315	5.190	4.856	4.559	4.800	4.507	4.220	3.937	3.926
54	Xenon	34.579	34.446†	33.644	29.802†	29.485†	5.452	5.104	4.782	5.036†	4.720†	4.422†	4.111†	4.098†
55	Cesium	35.959	35.819	34.984	30.970	30.623	5.720	5.358	5.011	5.280	4.936	4.620	4.286	4.272
56	Barium	37.410	37.255	36.376	32.191	31.815	5.995	5.623	5.247	5.531	5.156	4.828	4.467	4.451
57	Lanthanum	38.931	38.728	37.799	33.440	33.033	6.283	5.894	5.489	5.789	5.384	5.043	4.651	4.635
58	Cerium	40.449	40.231	39.255	34.717	34.276	6.561	6.165†	5.729	6.052	5.613	5.262	4.840	4.823
59	Praseodymium	41.998	41.772	40.746	36.023	35.548	6.846	6.443	5.968	6.322	5.850	5.489	5.034	5.014
60	Neodymium	43.571	43.298†	42.269	37.359	36.845	7.144	6.727	6.215	6.602	6.090	5.722	5.230	5.208
61	Promethium	45.207†	44.955†	43.945†	38.649†	38.160†	7.448†	7.018†	6.466†	6.891†	6.336†	5.956	5.431	5.408†
62	Samarium	46.846	46.553†	45.400	40.124	39.523	7.754	7.281†	6.721	7.180	6.587	6.206	5.636	5.609
63	Europium	48.515	48.241	47.027	41.529	40.877	8.069	7.624	6.963	7.478	6.842	6.456	5.846	5.816
64	Gadolinium	50.229	49.961	48.718	42.983	42.280	8.393	7.940	7.252	7.788	7.102	6.714	6.059	6.027
65	Terbium	51.998	51.737	50.391	44.470	43.737	8.724	8.258	7.519	8.104	7.368	6.979	6.275	6.241
66	Dysprosium	53.789	53.491	52.178	45.985	45.193	9.083	8.621†	7.850†	8.418	7.638	7.249	6.495	6.457
67	Holmium	55.615	55.292**	53.934†	47.528	46.686	9.411	8.920	8.074	8.748	7.912	7.528	6.720	6.680
68	Erbium	57.483	57.088	55.690	49.099	48.205	9.776	9.263	8.364	9.069	8.188	7.810	6.948	6.904
69	Thulium	59.335†	58.969**	57.576†	50.730	49.762	10.144	9.628	8.652	9.424	8.472	8.103	7.181	7.135
70	Ytterbium	61.303	60.959	59.352	52.360	51.326	10.496	9.977	8.943	9.779	8.758	8.401	7.414	7.367
71	Lutecium	63.304	62.946	61.282	54.063	52.959	10.867	10.345	9.241	10.142	9.048	8.708	7.654	7.604
72	Hafnium	65.313	64.936	63.209	55.757	54.579	11.264	10.734	9.556	10.514	9.346	9.021	7.898	7.843
73	Tantalum	67.400	66.999	65.210	57.524	56.270	11.676	11.130	9.876	10.892	9.649	9.341	8.145	8.087
74	Tungsten	69.508	69.090	67.233	59.310	57.973	12.090	11.535	10.198	11.283	9.959	9.670	8.396	8.333
75	Rhenium	71.662	71.220	69.298	61.131	59.707	12.522	11.955	10.531	11.684	10.273	10.008	8.651	8.584
76	Osmium	73.860	73.393	71.404	62.991	61.477	12.965	12.383	10.869	12.094	10.596	10.354	8.910	8.840
77	Iridium	76.097	75.605	73.549	64.886	63.278	13.413	12.819	11.211	12.509	10.918	10.706	9.173	9.098
78	Platinum	78.379	77.866	75.736	66.820	65.111	13.873	13.268	11.559	12.939	11.249	11.069	9.441	9.360
79	Gold	80.713	80.185	77.968	68.794	66.980	14.353	13.733	11.919	13.379	11.582	11.439	9.711	9.625
80	Mercury	83.106	82.526	80.258	70.821	68.894	14.841	14.212	12.285	13.828	11.923	11.823	9.967	9.896
81	Thallium	85.517	84.904	82.558	72.860	70.820	15.346	14.697	12.657	14.288	12.268	12.210	10.266	10.170
82	Lead	88.001	87.343	84.922	74.957	72.794	15.870	15.207	13.044	14.762	12.620	12.611	10.549	10.448
83	Bismuth	90.521	89.833	87.335	77.097	74.805	16.393	15.716	13.424	15.244	12.977	13.021	10.836	10.729
84	Polonium	93.112	92.386	89.809	79.296	76.868	16.935	16.244	13.817	15.740	13.338	13.441	11.128	11.014
85	Astatine	95.740	94.976	92.319	81.525	78.956	17.490	16.784	14.215	16.248	13.705	13.873	11.434	11.304
86	Radon	98.418	97.616	94.877	83.800	81.080	18.058	17.387	14.618	16.768	14.077	14.316	11.724	11.597
87	Francium	101.147	100.305	97.483	86.119	83.243	18.638	17.904	15.028	17.301	14.459	14.770	12.029	11.894
88	Radium	103.927	103.048	100.136	88.485	85.446	19.233	18.481	15.442	17.845	14.839	15.233	12.338	12.194
89	Actinium	106.759	105.838	102.846	90.894	87.681	19.842	19.078	15.865	18.405	15.227	15.712	12.650	12.499
90	Thorium	109.630	108.671	105.592	93.334	89.942	20.460	19.688	16.296	18.977	15.620	16.200	12.966	12.808
91	Protactinium	112.581	111.575	108.408	95.851	92.271	21.102	20.311	16.731	19.559	16.022	16.700	13.291	13.130
92	Uranium	115.591	114.549	111.289	98.428	94.648	21.753	20.943	17.163	20.163	16.425	17.218	13.613	13.438
93	Neptunium	118.619	117.533	114.181	101.005	97.023	22.417	21.596	17.614	20.774	16.837	17.740	13.945	13.758
94	Plutonium	121.720	120.592	117.146	103.653	99.457	23.097	22.262	18.066	21.401	17.254	18.278	14.279	14.082
95	Americium	124.876	123.706	120.163	106.351	101.932	23.793	22.944	18.525	22.042	17.677	18.829	14.618	14.411
96	Curium	128.088	126.875	123.235	109.098	104.448	24.503	23.640	18.990	22.699	18.106	19.393	14.961	14.743
97	Berkelium	131.357	130.101	126.362	111.896	107.023	25.230	24.352	19.461	23.370	18.540	19.971	15.309	15.079
98	Californium	134.683	133.383	129.544	114.745	109.603	25.971	25.080	19.938	24.056	18.980	20.562	15.661	15.420
99		138.067	136.724	132.781	117.646	112.244	26.729	25.824	20.422	24.758	19.426	21.166	16.018	15.764
100		141.510	140.122	136.075	120.598	114.926	27.503	26.584	20.912	25.475	19.879	21.785	16.379	16.113

For $Z \leq 60$, values without symbols are derived from (1). Values prefixed with a - sign are $K\beta_{1,2}$.

For $Z \geq 70$, absorption-edge values are from (4) in the case of $Z = 70-83, 88, 90$, and 92; remaining absorption edges to $Z = 100$ are obtained from these by least-squares quadratic fitting. All emission values for $Z \geq 70$ are derived from the preceding absorption edges, and others based on (4), using the transition relations $K\alpha_1 = K\alpha_2 - L_{III}$, $K\alpha_2 = K\alpha_3 - L_{II}$, $K\beta_1 = K\alpha_3 - M_{III}$, etc.

* Obtained from R. D. Hill, E. L. Church, J. W. Mihalash (4).

† Derived from Compton and Allison (5).

‡ Derived from C. E. Moore (5).

§ Values derived from Conchele and Hutubai (1) which deviate from the Moseley law. Better-fitting values are: $Z = 17$, $K\alpha_2 = 2.826$; $Z = 43$, $K\alpha_1 = 18.370$, $K\alpha_2 = 18.230$, $K\beta_1 = 20.612$; $Z = 54$, $K\alpha_1 = 29.779$, $K\alpha_2 = 29.463$, $K\beta_1 = 34.398$; $Z = 60$, $K\beta_1 = 43.349$; $Z = 61$, $K\alpha_1 = 38.726$, $K\alpha_2 = 38.180$, $K\beta_1 = 43.811$; $Z = 62$, $K\beta_1 = 46.881$, $L_{II} = 7.312$; $Z = 66$, $L_{II} = 8.591$, $L_{III} = 7.790$; $Z = 69$, $K\alpha_2 = 59.382$, $K\beta_1 = 57.487$.

|| Calculated by method of least squares.

** Calculated by transition relations.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- 1 Villforth, J. C. & Shultz, G. R. *Radiological Health Handbook*. Bureau of Radiological Health, Maryland, 1970. 458p.

APÊNDICE III

COMPORTAMENTO POISSÔNICO DOS FÓTONS TRANSMITIDOS POR UM OBJETO

A transmissão de fótons através do corpo é um processo binário¹ onde os fótons ou interagem e são removidos do feixe ou não interagem e são transmitidos para o detetor. Isto representa um processo binomial onde a probabilidade p de um fóton ser transmitido é $p = e^{-\mu x}$ e a probabilidade q de ser atenuado é $1-p$. A cascata, de Poisson e distribuição binomial, resultam numa distribuição de Poisson como mostrada abaixo. A probabilidade de se obter k fótons através de um objeto, $Q(k)$, é a soma das probabilidades de várias combinações de fótons k transmitidos, e que é dada por:

$$Q(k) = p(k) \binom{k}{k} p^k + p(k+1) \binom{k+1}{k} p^k q + \dots + p(k+n) \binom{k+n}{k} p^k q^n \quad (1)$$

onde cada termo representa uma combinação de uma fonte de fótons, produzindo $(k+x)$ fótons. $p(k+x)$ é uma transmitância binomial $\binom{k+x}{k} p^k q^x$, que combina para transmitir k fótons. Desde que p é um processo de Poisson, nós temos:

$$p(k+n) \binom{k+n}{k} p^k q^n = \frac{N_o^{k+n} e^{-N_o}}{(k+n)!} \frac{(k+n)! p^k q^n}{k! n!} = e^{-N_o} \frac{(p N_o)^k}{k!} \frac{(q N_o)^n}{n!} \quad (2)$$

Substituindo este resultado na equação geral para $Q(k)$, nós obtemos:

$$Q(k) = e^{-N_o} \frac{(p N_o)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q N_o)^n}{n!} \quad (3)$$

onde a somatória é igual a $e^{[N_o(1-p)]}$; substituindo na expressão acima, temos:

$$Q(k) = e^{-p N_o} \frac{(p N_o)^k}{k!} \quad (4)$$

que é identicamente um processo de Poisson de razão $p N_o$. Nós mostramos que os fótons emergentes de um objeto continuam a ser distribuídos poissonicamente com a razão ponderada pela atenuação do objeto $p = e^{-\mu x}$. Os fótons emitidos do objeto têm um valor médio N , dado por:

$$N = N_o e^{-\int \mu dx} \quad (5)$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- 1 MACOVSKI, A. Medical Imaging Systems. New Jersey, Prentice- Hall, 1983, 249 p.