OK

"DECAIMENTO DO POTENCIAL DE SU-
PERFÍCIE EM AMOSTRAS COM DENSI-
DADE FINITA DE ARMADILHAS PRO-
FUNDAS CARREGADAS POR PULSO"

José Leitão

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física e Química de São Carlos ,
para a obtenção do Título de Mestre
em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Livre Docente Gui -
lherme F. Leal Ferreira .

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

São Carlos - 1982

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

JOSÉ LEITÃO

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 25 DE junho DE 1982.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira- Orientador

Dr. Rogério Cantarino Trajano da Costa

Dr. Luiz Antonio Fávoro

À

meus Pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Guilherme Fontes Leal Ferreira meu orientador,
por seus ensinamentos, dedicação e paciência.

Aos Profs. Bernhard Gross e Mariangela Figueiredo pe-
lo estímulo e amizade.

A Yvone A. Biason por sua participação na confecção do
texto original.

A todo o Departamento de Física do IFQSC, pelo cari-
nho, que sempre recebi.

ÍNDICE

RESUMO E ABSTRACT	I
INTRODUÇÃO	II
CAPÍTULO I - EQUAÇÕES GERAIS	1
CAPÍTULO II - O POTENCIAL RESIDUAL	6
CAPÍTULO III- EXPRESSÕES PARTICULARES DO POTENCIAL COMO FUNÇÃO DO TEMPO	14
CAPÍTULO IV - O POTENCIAL COMO FUNÇÃO DO TEMPO. CASO GERAL ...	35
CAPÍTULO V - O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO POTENCIAL	51
CAPÍTULO VI - ANÁLISE DOS CASOS LIMITES	61
APÊNDICE	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

RESUMO

O decaimento do potencial de superfície de um isolante carregado por um pulso rápido de descarga corona é estudado supondo-se densidade finita de armadilhas profundas, o que generaliza o cálculo anterior de Rudenko. Supõe-se que uma fração da carga depositada na superfície é instantaneamente injetada, obtendo-se o potencial como função do tempo, bem como o potencial residual. O comportamento assintótico do potencial é estudado para o caso em que toda a carga da superfície é instantaneamente injetada. São apresentados alguns gráficos do transiente, correspondentes a particulares valores dos parâmetros que levam a expressões mais simples.

ABSTRACT

The decay of the surface potential of a sample, corona charged by a pulse, is studied. It is assumed a finite density of deep traps, and this makes our calculation a generalization of previous work by Rudenko. It is supposed that a fraction of the charge deposited on the surface moves inside the sample and the potential as a function of the time is obtained as well as the residual potential. The asymptotic behavior of the potential is also obtained when all the charge is injected. Those transients leading to simple mathematical expressions are shown in graphs.

INTRODUÇÃO

É de realização corriqueira em Laboratórios especializados a seguinte experiência: uma lâmina dielétrica (isolante) é carregada por um pulso rápido de descarga corona, alcançando sua superfície, logo após a interrupção da corona, um potencial V_0 . Se o potencial de superfície $V(t)$ é medido como função do tempo, (usualmente pelo método de Kelvin ou variações deste) observa-se que este potencial decai com o tempo, indicando isto que as cargas migraram para o interior do dielétrico. Da análise da função $V(t)$ deve ser possível inferir qual o mecanismo de transporte de carga, incluindo-se aqui, a possível existência de armadilhas relativamente profundas que capturam as cargas livres, enquanto se movem da superfície ao eletródio colocado na outra face da amostra. Poder-se-ia concluir da constatação de um potencial residual (isto é, o potencial depois de um tempo longo) que a amostra dielétrica possui armadilhas profundas, embora não se possa descartar, em princípio, a possibilidade do potencial residual ser devido as cargas que por uma razão ou outra se mantiveram na superfície enquanto o restante delas migram e afinal chegam ao eletródio.

Percebe-se então que uma variedade grande de processos pode ocorrer e esta dissertação apresenta cálculos referentes à seguinte situação: da carga inicialmente depositada uma fração entra no dielétrico, podendo ser então presa por armadilhas distribuídas uniformemente no interior da lâmina. Ele é uma generalização de um cálculo feito por Rudenko, completado pelo Prof. LUIZ NUNES DE OLIVEIRA e ilustrado em publicação por M.S. CAMPOS e J.A. GIACOMETTI que supõe ser a quantidade de carga que entra na amostra muito menor que a capacidade do dielétrico de armazená-las. No nosso cálculo esta hipótese é desnecessária, e disso resulta um

parâmetro adicional. Como será visto, os cálculos se tornam bastante complexos e na apresentação dos resultados somente se mostram aqueles casos em que o trabalho de computador não era excessivo, ficando para uma outra ocasião a exploração dos resultados obtidos teoricamente. No capítulo I estão colocadas as equações gerais e método de solução; no capítulo II o potencial residual é obtido em função dos parâmetros do problema; no capítulo III procura-se obter o potencial como função do tempo naqueles casos antes referidos, em que é possível obter expressões razoavelmente compactas. No capítulo seguinte procura-se obter a solução geral, sendo necessário aqui recorrer aos desenvolvimentos em série para chegar ao fim desejado. No capítulo V, supondo que toda carga entra no dielétrico, procura-se obter o comportamento do potencial ao se aproximar do seu valor residual, vale dizer para tempos suficientemente grandes. No último capítulo faz-se uma breve incursão aos casos limites. Um apêndice agrupa as passagens mais trabalhosas, as quais se incluídas no texto, poderiam distrair o leitor, porque muito extensas, dos objetivos perseguidos.

Foi-me contado pelo meu orientador que a viabilidade deste cálculo foi vista durante o seminário do Prof. LUIZ NUNES DE OLIVEIRA sobre o trabalho de Rudenko, no seu Exame de Qualificação de Mestrado, aluno que foi do Prof. BERNHARD GROSS.

CAPÍTULO I

Consideremos um dielétrico de espessura L com uma superfície ($x'=L$) aterrada e a outra ($x'=0$) sem contato. Em $t'=0$ uma quantidade de carga é depositada na superfície $x'=0$, dando origem a um campo E'_0 . Vamos supor que apenas uma fração da carga σ_0 seja liberada instantaneamente, migrando para o interior. Vamos, também, supor que as armadilhas* sejam profundas, isto é, nenhuma carga capturada pode voltar à banda de condução. Essas armadilhas são caracterizadas por um tempo de captura τ' como veremos adiante.

Durante o trajeto de $x'=0$ e $x'=L$ uma parte da carga injetada fica presa nas armadilhas e são responsáveis pelo potencial residual, após o trânsito de todas as cargas. A grandeza física de acesso experimental é o potencial dependente do tempo:

$$V(t') = \int_0^L E(x', t') dx'$$

Desprezando-se a contribuição da corrente de difusão à corrente de condução e supondo a geometria planar, temos para o fluxo de um só tipo de portadores as seguintes eqs.:

$$J'_c(x', t') = \mu p'(x', t') E'(x', t') \quad (I.1)$$

$$\epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial x'} = p'(x', t') + p'_t(x', t') \quad (I.2)$$

$$\frac{\partial J'_c(x', t')}{\partial x'} = - \frac{\partial}{\partial t'} [p'(x', t') + p'_t(x', t')] \quad (I.3)$$

$$J(t') = J'_c(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} = \mu p'(x', t') E'(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} \quad (I.4)$$

onde I.1 é a lei de condução, I.2 a eq. de Poisson, I.3 a eq. da continuidade e I.4 a densidade total de corrente. $J'_c(x', t')$,

* Ver página 5-a

$E'(x',t')$, $\rho'_t(x',t')$, $\rho'(x',t)$, ϵ e μ são respectivamente a corrente de condução, intensidade do campo elétrico, densidade de cargas presas, densidade cargas livres, constante dielétrica e a mobilidade dos portadores que é suposta independente do campo elétrico.

Para a configuração de circuito aberto $J(t')=0$. Assim:

$$\mu \rho'(x',t') E'(x',t') + \epsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial t'} = 0 \quad (I.5)$$

Para as armadilhas consideraremos um único conjunto de níveis com concentração uniforme N_t e uma probabilidade de captura $v_t A_t$. Sendo v_t a velocidade térmica e A_t a seção de captura. A probabilidade, por unidade de tempo, para que um portador seja capturado é igual a:

$$P = v_t A_t [N_t - n'_t(x',t')] \quad (I.6)$$

onde $n'_t(x',t')$ é a concentração de portadores capturados.

Como estamos supondo traps profundos, então a velocidade com que a densidade de carga presa varia com o tempo é dada por:

$$\frac{\partial \rho'_t(x',t')}{\partial t'} = \frac{\rho'(x',t')}{\tau'} \left[1 - \frac{\rho'_t(x',t')}{\rho_{t_0}} \right] \quad (I.7)$$

sendo $\tau' = \frac{1}{v_t A_t N_t} = \text{cte}$ é o tempo de captura, isto é, o tempo médio de liberdade da carga, e ρ_{t_0} é a máxima densidade de carga que pode ficar capturada no material.

As condições iniciais e de contorno serão agora discutidas.

Em $t=0$ a densidade de carga σ_0 é instantaneamente injetada e localizada muito próximo à superfície $x'=0$. Neste instan-

te não há portadores capturados no material. O campo elétrico, no interior da amostra, é uniforme e dado por E'_0 . Para $t' > 0$ a quantidade σ_0 já se encontra no interior do dielétrico. Com base no que foi dito acima, teremos:

$$\begin{aligned} \rho'(x', 0) &= \sigma_0 \delta(x') & x' > 0 \\ \rho'_t(x', 0) &= 0 & x' > 0 \end{aligned} \quad (I.8)$$

$$E'(x', 0) = E'_0 \quad x' > 0 \quad (I.9)$$

$$E'(0, t') = E'_0 - \frac{\sigma_0}{\epsilon} \quad t' > 0$$

Para facilidade de cálculo vamos trocar as variáveis utilizadas nas eqs. de I.1-I.9 por suas correspondentes variáveis sem dimensão definidas a seguir:

$$\begin{aligned} x' &= Lx ; E' = E'_0 E ; \rho' = \frac{\epsilon E'_0}{L} \rho ; \rho'_t = \frac{\epsilon E'_0}{L} \rho_t \\ t' &= \frac{L}{\mu \epsilon'_0} t ; \sigma' = \frac{L}{\mu \epsilon'_0} \sigma ; \frac{\sigma_0}{\epsilon} = E'_0 \kappa ; \rho_{t_0} = \frac{\epsilon E'_0}{L} \rho_{t_0} \end{aligned} \quad (I.10)$$

Com isto as eqs. I.1, I.2, I.3, I.5, I.7 e as condições I.8 e I.9 tornam-se:

$$J_c(x, t) = \rho(x, t) E(x, t) \quad (I.11)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) + \rho_t(x, t) \quad (I.12)$$

$$\frac{\partial J_c(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t) + \rho_t(x, t)] \quad (I.13)$$

$$\rho(x, t) E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (I.14)$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{\rho(x, t)}{\tau} \left[1 - \frac{\rho_t(x, t)}{\rho_{t_0}} \right] \quad (I.15)$$

$$\rho(x,0) = \tau_0 \delta(x) \quad x > 0 \quad (I.16)$$

$$\rho_t(x,0) = 0 \quad x > 0 \quad (I.17)$$

$$E(x,0) = 1 \quad x > 0 \quad (I.18)$$

$$E(0,t) = 1 - \alpha \quad t > 0 \quad (I.19)$$

A densidade de cargas capturadas, em termos do campo elétrico, é obtida substituindo-se $\rho(x,t)$ da eq. I.15 na eq. I.14 e tendo-se em conta que na frente de carga $\rho_t(x,t)=0$ e o campo elétrico tem valor unitário. Da eq. I.15 temos:

$$\rho(x,t) = \frac{\tau_0}{1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}}} \times \frac{\partial \rho_t(x,t)}{\partial t}$$

com este valor a eq. I.14 fica:

$$\frac{\tau_0}{1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}}} \cdot E(x,t) \frac{\partial \rho_t(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\div E(x,t))$$

$$\frac{\tau_0}{1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}}} \times \frac{\partial \rho_t(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{E(x,t)} \cdot \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$- \rho_{t0} \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\ln \left(1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\ln E(x,t) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[- \rho_{t0} \tau_0 \ln \left(1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}} \right) + \ln E(x,t) \right] = 0$$

$$\ln E(x,t) - \ln \left(1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t0}} \right)^\beta = f(x)$$

sendo $f(x)$ uma função independente do tempo e $\beta = \tau_0 \rho_{t0}$ uma constante que depende só das características do material, como pode ser visto das eqs.: I.9, ou seja:

$$\beta = \frac{\mu \epsilon_0}{L} \tau_0' \frac{L}{\epsilon \epsilon_0} \rho_{t0}' = \frac{\mu}{\epsilon} \tau_0' \rho_{t0}'$$

Com as condições citadas acima $f(x)$ fica determinado ,

isto é, $f(x)=0$. Logo:

$$\beta = \rho_{t_0} \bar{z} \quad (I.20)$$

$$E(x,t) = \left(1 - \frac{\rho_t(x,t)}{\rho_{t_0}}\right)^\beta$$

$$\rho_t(x,t) = \rho_{t_0} \left[1 - E(x,t)^{1/\beta}\right] \quad (I.21)$$

Da equação acima é interessante observar que em $x=0$, considerando que toda a carga depositada nessa superfície seja injetada, isto é, $\alpha=1$, a densidade de cargas $\rho_t(0,t)$ é igual a ρ_{t_0} para qualquer $t > 0$, pois, da condição I.19, $E(0,t)=0$ para $t > 0$. Para $\alpha \neq 1$ o valor ρ_t é menor que ρ_{t_0} visto que, nesse caso, $E(0,t)>0$.

A eq. diferencial para o campo é obtida com a substituição de $\rho(x,t)$ dado pela eq. I.12 na eq. I.14, o resultado é:

$$E(x,t) \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \rho_t(x,t) E(x,t) \quad (I.22)$$

Eq. esta que resolvida pelo método das características nos dá:

$$\frac{dx}{E(x,t)} = dt = \frac{dE(x,t)}{\rho_t(x,t) E(x,t)} \quad (I.23)$$

Temos, então, a posição de uma carga ao longo de uma linha de corrente dada pela relação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x,t) \quad (I.24)$$

e a eq. que relaciona o campo elétrico e a densidade de cargas capturadas:

$$\frac{dE(x,t)}{dt} = \rho_t(x,t) E(x,t) \quad (I.25)$$

$$\text{Temos ainda que: } \frac{dE(x,t)}{\rho_t(x,t)} = dx \quad (I.26)$$

Imperfeições do material (Defeitos na rede cristalina , impurezas, etc.) constituem-se em centros de captura de portadores os quais são denominados armadilhas. O nível de energia dessas armadilhas está localizado entre as bandas de condução e valência.

Uma armadilha é dita profunda quando um portador por ela capturado não é liberado de volta a banda de condução. Caso contrário elas são chamadas de armadilhas rasas.

CAPÍTULO II

Neste capítulo desenvolveremos os cálculos para a obtenção do potencial residual (VR), isto é, o potencial devido às cargas que ficaram retidas após a última frente de carga ter deixado a amostra, e do campo elétrico (E_ℓ) em $x=l$ que é uma grandeza importante pois ela nos dá a valiosa informação sobre a quantidade de carga que ficou presa no material. Em seguida mostraremos as curvas obtidas com auxílio de computador.

Vamos supor que em $t=0$ apenas uma fração da carga depositada na superfície $x=0$ seja instantaneamente injetada, ou seja, tomaremos α menor que a unidade. Com $\alpha < 1$ a traseira do pulso não ficará tocando a superfície $x=0$, como seria o caso de $\alpha=1$ onde por I.19 $E(0,t)=0$ e as cargas próximas a $x=0$ praticamente não se movem ficando a traseira do pulso sempre tocando a essa superfície, mas sim caminhará através da amostra devido ao fato de que, pela equação citada acima, $E(0,t) \neq 0$, para qualquer $t > 0$. Na situação de estado final já não há cargas livres na amostra. Com isso a eq.I.12 pode ser escrita como uma derivada total uma vez que o campo elétrico não varia com o tempo. E com $\rho(x,t)=0$ teremos,

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \frac{1}{\rho_t} \quad (\text{II.1})$$

Substituindo o valor de $\rho_t(x,t)$ da eq.I.21 na eq.II.1, temos:

$$\rho_{t0} = \int_{1-x}^{E_\ell} \frac{d\epsilon}{1-E'/B} \quad (\text{II.2})$$

Como $dx = -\frac{dV}{E}$, a eq.(II.2) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V_R = \int_{1-x}^{E_L} \frac{E dE}{\rho_0 (1-E'/\beta)} \quad (II.3)$$

Os limites correspondem ao campo e potencial em $x=0$ e $x=1$.

As eqs.II.2 e II.3, de um modo geral, não podem ser integradas, o que torna impossível a obtenção dos valores de E_L e V_R por meios analíticos. Dessa forma somos levados a usar métodos de computação e uma maneira econômica de fazê-lo consiste em considerarmos E_L e V_R em II.2 e II.3 como funções de ρ_{t0} e derivá-las, obtem-se o sistema:

$$\frac{dE_L}{d\rho_{t0}} = (1-E_L'/\beta) \quad (II.4)$$

$$\frac{dV_R}{d\rho_{t0}} = \frac{E_L - V_R}{\rho_{t0}} \quad (II.5)$$

Notemos que enquanto β é uma constante do material, ρ_{t0} ($= \frac{\rho_{t0} L}{\epsilon E_0}$) depende da quantidade de carga depositada na amostra e assim a integração de II.4 e II.5 nos dará o campo e o potencial residual E_L e V_R como funções da quantidade inicial de carga depositada.

Para resolver o sistema acima obtido precisamos de uma condição de partida. Para isto consideramos o caso em que $\rho_{t0} \rightarrow 0$. Nesta situação podemos prever que todas as armadilhas ficarão preenchidas após a passagem do pulso. Então, teremos que $E_L \rightarrow 1 - \alpha + \rho_{t0}$ e $V_R \rightarrow 1 - \alpha + \frac{\rho_{t0}}{2}$.

A este mesmo resultado chegamos analisando as Eqs. II.2 e II.3, no limite considerado, pois se $\rho_{t0} \rightarrow 0$, $(1-E^{1/\beta}) \rightarrow 1$ e teremos

E_ℓ e V_R tendendo aos valores acima.

No nosso cálculo estudaremos os casos limites, susceptíveis de uma interpretação simples ou que geram soluções conhecidas. Agora analisaremos esses limites para o problema considerado no presente capítulo, ou seja, o de estado final. Posteriormente faremos uma análise, desses casos, para o problema transitório.

Em primeiro lugar vamos supor apenas ρ_{t_0} finito. Com isso teremos que:

- a) Se $\tau \rightarrow \infty$, então $\beta \rightarrow \infty$ e o problema se reduz ao de carga livre. De fato, a eq. I.21 nos mostra que $\rho_t(x,t) = 0$, isto é, nenhuma carga ficará presa nas armadilhas. Assim sendo, o campo e o potencial residual resultarão serem nulos.
- b) Se $\tau \rightarrow 0$, então $\beta \rightarrow 0$ e a captura se torna muito rápida. Nesse caso poderemos calcular os valores de E_ℓ e V_R utilizando as eqs. II.4 e II.5. Da I^a, lembrando que $E_\ell < 1$, determinamos que $E_\ell = \rho_{t_0} + (1-\alpha)$. Levando E_ℓ , assim obtido, a eq. II.5 e integrando obtemos que $V_R = \rho_{t_0}/2 + (1-\alpha)$. Sendo E_ℓ e V_R determinados para a posição $x=1$, vale ressaltar que o nosso cálculo só é válido se $\rho_{t_0} < \alpha$ pois, para $\rho_{t_0} > \alpha$ o preenchimento das armadilhas seria apenas parcial. Em outras palavras, as cargas preencheriam somente uma parte da amostra não chegando a tocar no eletrodo oposto ao injetor.

Para τ finito temos que se $\beta \rightarrow \infty$, então $\rho_{t_0} \rightarrow \infty$. Desse modo o termo $\rho_t/\rho_{t_0} \rightarrow 0$ e o nosso modelo se reduz ao modelo de Rudenko⁽¹⁾.

Embora nos capítulos seguintes o problema do transiente do potencial de superfície seja abordado, é na análise dos resultados obtidos com o potencial residual que poderemos achar as princi

país diferenças entre a hipótese de densidade infinita e a de densidade finita de armadilhas. Isto porque, como já mencionado na introdução, as expressões na análise temporal tornam-se bastante complexas, exigindo, a não ser para casos excepcionais, um trabalho de computação excessivo, ao qual não nos aventuramos aqui.

Os nossos resultados estão mostrados nas Figs. II.a e II.b para $\alpha=1$, a primeira referindo-se ao campo residual E_ℓ e a outra ao potencial V_R , ambos em função de ρ_{t_0} , para oito valores de β , 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 1, 2, 5 e 10.

A integração foi realizada até o valor 10 para ρ_{t_0} . Mas notemos que tanto E_ℓ como V_R , independentemente de β , tendem para 1 para valores suficientemente grandes de ρ_{t_0} . Isto porque para β finito e $\rho_{t_0} \rightarrow \infty$, $\tau = \frac{\beta}{\rho_{t_0}} \rightarrow 0$, significando que toda carga depositada é imediatamente presa junto à superfície.

Todas as curvas $V_R \times \rho_{t_0}$ e $E_\ell \times \rho_{t_0}$ têm a mesma tangente em $\rho_{t_0} = 0$, elas sendo 1/2 para V_R , e 1 para E_ℓ . Isto advém das condições iniciais, que não dependem de β . Porém, enquanto que para pequenos valores de β (0,05 e 0,01) E_ℓ e V_R mantêm para finitos valores de ρ_{t_0} o mesmo comportamento que tinham perto de $\rho_{t_0} \approx 0$, afastamentos crescentes (concavidade acentuada para baixo) são observados para maiores valores de β . Isto pode ser compreendido, de vez que para ρ_{t_0} fixo, menor β significa menor τ e portanto mais cargas são aprisionadas nas armadilhas. No entanto é significativo a acumulação das curvas para pequenos valores de β , dando origem a uma curva limite, bem simples para E_ℓ : $E_\ell = \rho_{t_0}$, $0 < \rho_{t_0} < 1$ e $E_\ell = 1$, para $\rho_{t_0} > 1$. Neste limite, ou todas as armadilhas são preenchidas ($0 < \rho_{t_0} < 1$), ou todas as cargas depositadas são capturadas ($\rho_{t_0} > 1$). Este último fato pode ser entendido considerando que para $\beta \sim 10^{-2}$, $\tau = 10^{-2}/\rho_{t_0}$ e já para $\rho_{t_0} = 1$, $\tau = 10^{-2}$, indicando isto aprisionamento total das cargas. É interessante que apesar de E_ℓ manter-se no valor constante 1, o poten-

cial residual está longe de ser constante, crescendo relativamente lento do valor $1/2$, em $\rho_{t_0} = 1$, ao valor assintótico 1. (Pode-se mostrar que a curva limite obedece à equação $V_R = 1 - \frac{1}{2\rho_{t_0}}$; $\rho_{t_0} > 1$). A que atribuir este aumento de V_R com ρ_{t_0} ? Deve ser o seguinte: Para $\rho_{t_0} = 1$ as armadilhas estão todas cheias e portanto a densidade de carga é constante. Para ρ_{t_0} crescente, mais cargas podem ser acomodadas nas armadilhas do que foram injetadas. Como no limite em questão $\beta \rightarrow 0$, então $\tau \rightarrow 0$. Logo, o que acontece é que as armadilhas são uniformemente preenchidas até uma espessura $x_0 = 1/\rho_{t_0}$, enquanto de x_0 a 1 o material fica sem cargas. Esta distribuição de cargas fornece para V_R a expressão limite antes transcrita. Note-se entretanto que para $\beta = 0,1$ virtualmente já se chegou a este limite. Daqui pode-se conjecturar que, mesmo no transiente, os decaimentos de potencial não dependerão mais de β , para $\beta \leq 0,1$.

Os valores de E_ℓ e V_R para $\rho_{t_0} = 1$ respondem à seguinte pergunta: se uma carga, igual àquela que o material pode acomodar nas armadilhas, é depositada na superfície, qual a fração de carga capturada e o seu potencial? Como neste caso $\rho_{t_0} = 1$, então $\beta = \tau$; para β pequeno, já vimos que $E_\ell \rightarrow 1$ e $V_R = 1/2$. Para $\beta = 1$, $E_\ell \approx 0,67$ e $V_R = 0,45$. E mesmo para τ grande ($\beta=10$), vê-se que E_ℓ ainda é da ordem de 0.20 e $V_R \approx 0.12$.

Resta finalmente estabelecer um paralelo entre nossos resultados e aqueles obtidos com a hipótese utilizada por Rudenko, mas calculado pela primeira vez, para o caso do potencial residual, por K.K.Kanazawa e I.P.Batra (J.Appl.Phys., 43, 1846, (1972)). Em primeiro lugar observamos que nossos resultados devem se aproximar dos de Kanazawa - Batra para ρ_{t_0} suficientemente grande. Para um dado valor de β , mesmo pequeno (isto é, menor que o limite anteriormente achado, 10^{-1}), os nossos resultados devem tender aos de Kanazawa - Batra se $\rho_{t_0} \gg 1$ ou seja,

$\rho_{t_0} = \frac{\beta}{\tau} \gg 1$ ou $\tau \ll \beta$. Como o menor valor de τ apresentado por Kanazawa-Batra corresponde a $\tau = 10^{-1}$ e o nosso maior valor de $\rho_{t_0} = 10$, analisaremos o caso $\beta=1$, tomando $\tau = 0,1$ ($\ll 1$). Da Fig.II.b, temos $V_R \approx 0.9$ enquanto que de Kanazawa-Batra tiramos $V_R(\tau \approx 0.1) = 0.93$.

Escolhendo agora a curva correspondente a $\beta=10$, poderemos comparar os resultados, para maiores valores de τ . Na Fig. II.c reproduzimos a curva de V_R para $\beta = 10$, pondo como abscissa $\tau = \beta/\rho_{t_0}$ e os potenciais tirados de Kanazawa-Batra, para $\tau = 10, 5, 2, 1$. Vemos que o acordo melhora para maiores valores de ρ_{t_0} (menores valores de τ) embora, mesmo para τ grande (10), correspondendo a $\rho_{t_0} = 1$, o erro absoluto não é grande (da ordem de 0,03). Isto acontece porque com τ grande, o potencial residual tende a ser pequeno, tanto para o nosso caso, como para o de Kanazawa-Batra.

Diferenças significativas entre ambos os resultados devem, pois, estar na região $0 < \rho_{t_0} \leq 1$, e tanto maiores quanto menor for β .

FIG. II.a - Curvas do campo elétrico residual em função de ρ_{to}

FIG.II.b - Curvas do potencial residual em função de ρ_{to}

FIG.II.c - Curva do potencial residual para $\beta=10$ em função de τ .

$$(\tau = \beta/\rho_{to})$$

CAPÍTULO III

Neste capítulo apresentaremos soluções analíticas para o potencial como função do tempo para alguns valores particulares de β . Os cálculos serão apresentados em 1º lugar para um tempo $0 \leq t \leq t_T$, onde t_T é o tempo de trânsito dos portadores livres, e, em seguida, para um tempo $t \geq t_T$.

Vamos supor que somente uma parte da carga depositada em $x=0$ seja instantaneamente injetada, isto é, tomaremos $\alpha \neq 1$.

3.1- Para $\beta = 1$

Como já dissemos β é um parâmetro característico do material. Neste ponto achamos interessante voltar às unidades reais e mostrar o significado de $\beta = 1$. Para isso escrevemos:

$$\beta = \frac{\mu}{\epsilon} \sigma' \tau' \quad \therefore \quad 1 = \frac{\mu}{\epsilon} \sigma' \tau'$$

Mas: $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

$$\frac{1}{\sigma'} = \frac{q_t A \tau' t_0}{e}$$

, onde: ϵ_r é a permissividade relativa
 ϵ_0 é a permissividade elétrica do
 vácuo

V_T é a velocidade térmica

A é a seção de choque

e é a carga dos portadores.

Com isso :
$$\frac{\mu e}{\epsilon_r \epsilon_0 v_T A_t} = 1$$

Os valores usuais de ϵ_r , v_T e A_T são,

$$\epsilon_r = 2 \quad ; \quad v_T = 10^5 \text{ m/seg} \quad \text{e} \quad A_t = 10^{-2} \text{ m}^2$$

e como sabemos:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Com esses valores a mobilidade resulta ser

$$\mu = \frac{1 \times 2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^5 \times 10^{-20}}{1,602 \times 10^{-19}} \quad \therefore \mu = 0,11 \text{ cm}^2/\text{V. seg.}$$

Desse modo $\beta = 1$ significa que o material deverá ter a mobilidade dada acima. O valor de μ encontrado aqui é da ordem de grandeza das mobilidades dos portadores em cristais.

3.1.1- O potencial para $0 \leq t \leq t_T$

O campo elétrico é determinado substituindo-se o valor de $\rho_t(x,t)$ da eq. I.21 na eq. I.25, o que resulta em calcular:

$$\rho_{t_0} \int_0^t dt = \int_{E_i}^E \frac{dE}{E(1-E)} \quad (\text{III.1})$$

onde E_i é um parâmetro que descreve o campo elétrico no pulso inicial variando de $(1-\alpha)$ a 1 pois, o campo elétrico é $(1-\alpha)$ em $x=0$ e possui valor unitário na parte frontal do pulso. O resultado de III.1 é :

$$E(E_i, t) = \frac{E_i}{E_i + (1-E_i) e^{-\rho_{t_0} t}} \quad (\text{III.2})$$

A posição das frentes de cargas é obtida a partir da eq. I.24, com o uso de $E(E_i, t)$ dado pela eq. III.2, ou seja, in

FIGURA 3-1 Perfis do Pulso no material para $0 < t < t_T$

tegrar:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{E_i dt}{E_i + (1-E_i) e^{-\rho_{t0} t}}$$

Do que resulta:

$$x(E_i, t) = \frac{1}{\rho_{t0}} \left\{ \rho_{t0} t + \ln [E_i + (1-E_i) e^{-\rho_{t0} t}] \right\} \quad (\text{III.3})$$

O tempo de trânsito t_T pode ser determinado pela eq.III.3. com a condição $x=1$ e tendo-se em conta que $E_i=1$ na 1ª frente de cargas. Com isso encontramos $t_T=1$ como era esperado.

O potencial $V(t)$ é calculado pela soma das diferenças de potencial da região onde o pulso já passou de 0 a x_a , da região interior do pulso de x_a a x_f e da região da frente do pulso de x_f a 1, ou seja: (Ver Figura 3.1)

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^{x_f} E dx + \int_{x_f}^1 E dx \quad (\text{III.4})$$

onde x_a e x_f são as posições da última e da 1ª frente de cargas respectivamente.

A 1ª integral é calculada com a troca da variável x com o campo elétrico E :

$$\int_0^{x_a} E dx = \int_{E(x=0)}^{E(x=x_a)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE \quad (\text{III.5})$$

Nesta região já não existe cargas livres. Com isso podemos escrever a eq.I.12 como $\frac{dx}{dE} = \frac{1}{\rho_t}$ e com o uso de I.21 teremos que:

$$\int_{E(x=0)}^{E(x=x_a)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE = \int_{E(x=0)}^{E(x=x_a)} \frac{E dE}{\rho_{t0} (1-E)} \quad (\text{III.6})$$

O campo elétrico em $x=0$ é $(1-\alpha)$ e em $x=x_a$ é dado pela eq. III.2 pondo-se $E_i(1-\alpha)$ o que dá:

$$E(x=x_a) = E_a = \frac{1-\alpha}{1+\alpha(e^{-\rho_{t0}t}-1)} \quad (\text{III.7})$$

Com esses limites o resultado de III.6 é o seguinte:

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E)} = \frac{1}{\rho_{t0}} \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(e^{-\rho_{t0}t}-1)}{1+\alpha(e^{-\rho_{t0}t}-1)} + \ln[1+\alpha(e^{-\rho_{t0}t}-1)] + \rho_{t0}t \right\} \quad (\text{III.8})$$

O campo no interior do pulso é dado pela eq. III.2. Para o cálculo da 2ª integral faremos uso do artifício de troca da variável de integração x por E_i , isto é:

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \int_{E_i(x=x_a)}^{E_i(x=x_f)} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{III.9})$$

onde a derivada parcial em relação a E_i é realizada a t constante. Pela eq. III.3 temos para t fixo que:

$$\frac{\partial x}{\partial E_i} = \frac{1}{\rho_{t0}} \left[\frac{1-e^{-\rho_{t0}t}}{E_i + (1-E_i)e^{-\rho_{t0}t}} \right] \quad (\text{III.10})$$

Usando III.2 e III.10 em III.9 e lembrando que E_i no pulso varia de $(1-\alpha)$ a 1 teremos o seguinte resultado:

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \frac{1}{\rho_{t0}(1-e^{-\rho_{t0}t})} \left\{ \frac{\alpha e^{-\rho_{t0}t}(e^{-\rho_{t0}t}-1)}{1+\alpha(e^{-\rho_{t0}t}-1)} - \ln[1+\alpha(e^{-\rho_{t0}t}-1)] \right\} \quad (\text{III.11})$$

A 3ª integral é facilmente calculada pois $E(x, t) = \text{cte} = 1$ nesta região e com o auxílio da eq. I.24 determinamos que $x_f = t$. Assim:

FIGURA 3-2 Perfis do pulso no material para $t > t_T$

$$\int_{x=t}^1 dx = 1-t \quad (\text{III.12})$$

Levando os valores III.8, III.11 e III.12 em III.4 achamos:

$$V(t) = \frac{1}{\rho_{t0}} \left\{ \rho_{t0}^{-x} + \frac{1}{1 - e^{\rho_{t0} t}} \ln \left[1 + x \left(e^{-\rho_{t0} t} - 1 \right) \right] \right\} \quad (\text{III.13})$$

3.1.2- Para um tempo $t \geq t_{\pi}$ as cargas já começaram a abandonar a amostra portanto já não há mais a região livre de cargas. Assim o cálculo do potencial é feito pela soma das diferenças de potencial da região onde o pulso já passou com a região no interior do pulso mas com o limite superior E_i do campo elétrico determinado pela eq. III.3 com a condição $x=1$. Pelo exposto: (Ver Figura 3.2)

$$V(t) = \int_0^1 E dx = \int_{1-x}^{E_a} E \frac{\partial x}{\partial E} dE + \int_{E_i=1-x}^{E_i} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{III.14})$$

onde novamente utilizamos o artifício da troca da variável de integração x por E na 1ª integral e x por E_i na 2ª integral.

A 1ª integral é a mesma do item anterior cujo resultado é a eq. III.8.

Pondo $x=1$ em III.3 achamos que:

$$E_i(x=1) = \frac{e^{\rho_{t0}} - 1}{e^{\rho_{t0} t} - 1} \quad (\text{III.15})$$

Utilizando-se as eqs. III.2, III.10 e III.15; a 2ª integral em III.14 resulta em:

$$\int_{1-\alpha}^{E_i} E(E_i, t) \frac{\partial^2}{\partial E_i^2} dE_i = \frac{1}{\rho_{t_0}(1-e^{-\rho_{t_0}t})} \left\{ \frac{1}{e^{\rho_{t_0}}} + \rho_{t_0} - \rho_{t_0}t - \frac{e^{-\rho_{t_0}t}}{1+\alpha(e^{-\rho_{t_0}t}-1)} - \right. \\ \left. - \ln \left[1 + \alpha(e^{-\rho_{t_0}t}-1) \right] \right\} \quad (III.16)$$

Com os valores de III.8 e III.16 o resultado de III.14 é:

$$v(t) = \frac{1}{\rho_{t_0}(1-e^{-\rho_{t_0}t})} \left\{ \frac{\alpha(\alpha-1)(1-e^{-\rho_{t_0}t})^2 - e^{-\rho_{t_0}t}}{1+\alpha(e^{-\rho_{t_0}t}-1)} + \rho_{t_0}(1-t e^{-\rho_{t_0}t}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{e^{\rho_{t_0}}} - e^{-\rho_{t_0}t} \ln \left[1 + \alpha(e^{-\rho_{t_0}t}-1) \right] \right\} \quad (III.17)$$

Diante de nosso 1º resultado do potencial como função do tempo, uma observação que nos parece importante fazer é que para $\alpha=1$ o potencial residual V_r é determinado fazendo-se $t \rightarrow \infty$, na expressão III.17, com $\alpha=1$. No presente caso, $\alpha < 1$, o potencial residual é calculado pela eq. III.17 mas com t finito, obtido de III.3 com a condição de que para $x=1$, $E_1=1-\alpha$. Isso é explicado pelo fato de que para $\alpha < 1$ as cargas da última frente caminham com uma velocidade muito maior do que no caso de $\alpha=1$ onde a última frente praticamente não se move e, como falamos antes, permanece tocando à superfície $x=0$.

Neste ítem calcularemos o potencial residual utilizando as eqs. citadas. Posteriormente daremos uma solução geral do comportamento assintótico do potencial para $\alpha=1$. Assim da eq. III.3 com a condição acima teremos que:

$$\rho_{t_0} = \rho_{t_0}t + \ln(1-\alpha + \alpha e^{-\rho_{t_0}t})$$

$$\therefore \rho_{t_0} = \rho_{t_0} t + \ln \left[1 + x \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right] \quad (\text{III.18})$$

Multiplicando a eq. III.18 por $e^{-\rho_{t_0} t}$ e transpondo os termos em ρ_{t_0} ficamos:

$$-e^{-\rho_{t_0} t} \rho_{t_0} t = -e^{-\rho_{t_0} t} \rho_{t_0} + e^{-\rho_{t_0} t} \ln \left[1 + x \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right] \quad (\text{III.19})$$

Agora de III.18 temos que:

$$e^{\rho_{t_0} t} e^{-\rho_{t_0} t} = 1 - x + x e^{-\rho_{t_0} t} \quad \therefore e^{-\rho_{t_0} t} (e^{\rho_{t_0} t} - x) = 1 - x$$

$$\therefore e^{-\rho_{t_0} t} = \frac{1 - x}{e^{\rho_{t_0} t} - x} \quad (\text{III.20})$$

$$\therefore t = \frac{1}{\rho_{t_0}} \ln \left(\frac{e^{\rho_{t_0} t} - x}{1 - x} \right) \quad (\text{III.21})$$

Este é o tempo com o qual V_R é calculado.

Levando III.19 e III.20 na eq. III.17 encontramos que:

(Ver apêndice)

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left[\rho_{t_0} + x \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right] \quad (\text{III.22})$$

3.2- Neste ítem desenvolveremos os cálculos para $\beta=2$, procedendo de maneira análoga ao caso apresentado no ítem anterior. Veremos porém que não será possível obter-se explicitamente o valor de E_i que para $t > 1$ corresponde a $x=1$. Nesse, como em outros casos semelhantes, dever-se-á buscar apoio em métodos computacionais e então é preferível transformar a função implícita em E_i e t numa eq. diferencial que pode ser, por computador, integrada pois os valores iniciais são conhecidos.

3.2.1- O potencial para $0 \leq t \leq t_T$

O campo elétrico é calculado substituindo-se $\rho_t(x,t)$ de I.21 em I.25, ou seja:

$$\rho_{t0} \int_0^t dt = \int_{E_i}^E \frac{dE}{E(1-E^{1/2})} \quad (\text{III.23})$$

onde E_i é o mesmo parâmetro explicado na obtenção de III.2. Como resultado temos que:

$$E(E_i, t) = \frac{E_i}{\left[E_i^{1/2} + (1-E_i^{1/2}) e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}} \right]^2} \quad (\text{III.24})$$

Com o uso das eqs. I.24 e III.24 determinamos a posição das frentes de cargas. Desse modo:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{E_i dt}{\left[E_i^{1/2} + (1-E_i^{1/2}) e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}} \right]^2}$$

Temos como resultados que:

$$x(t) = \frac{2}{\rho_{t0}} \left\{ \rho_{t0} \left[1 + (e^{\frac{\rho_{t0} t}{2}} - 1) E_i^{1/2} \right] + E_i^{1/2} \left[1 - \frac{1}{e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}} + (1 - e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}}) E_i^{1/2}} \right] \right\} \quad (\text{III.25})$$

Novamente $V(t)$ é calculado somando-se as diferenças de potencial da região onde o pulso já passou de 0 a x_a , da região no interior do pulso de x_a e x_f e da região livre de cargas de x_f a 1, ou seja:

$$V(t) = \int_0^1 E dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^{x_f} E dx + \int_{x_f}^1 E dx \quad (\text{III.26})$$

A 1ª integral é calculada de maneira semelhante ao caso anterior, ou seja, trocando-se a variável x por E . Desse modo te-

remos:

$$\int_0^{x_0} E dx = \int_{E(x=0)}^{E(x=x_0)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE \quad (\text{III.27})$$

Utilizando I.21 e I.12, e lembrando que $\rho(x,t)=0$ podemos escrever que:

$$\int_{E(x=0)}^{E(x=x_0)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE = \int_{E(x=0)}^{E(x=x_0)} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E^{1/2})} \quad (\text{III.28})$$

Em $x=0$ o campo elétrico é $(1-\alpha)$ e em $x=x_a$ é dado pela eq. III.24 com $E_i = 1-\alpha$. Assim temos que

$$E(x=x_a) = E_a = \frac{1-\alpha}{\left\{ (1-\alpha)^{1/2} + \left[1 - (1-\alpha)^{1/2} \right] e^{-\frac{\rho_{t0} x}{2}} \right\}^2} \quad (\text{III.29})$$

e o resultado de III.28 é:

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E^{1/2})} = \frac{2}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \frac{1-(1-\alpha)^{1/2}}{1-E_a^{1/2}} + \frac{(1-E_a^{1/2})(11+5E_a+2E_a^2)}{6} + \frac{(1-\alpha)^{1/2}-1}{6} \left[13+5(1-\alpha)^{1/2}-2\alpha \right] \right\} \quad (\text{III.30})$$

A 2ª integral pode ser posta na forma da eq. III.9, isto

é:

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \int_{E_i(x=x_a)}^{E_i(x=x_f)} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{III.31})$$

onde $E_i(x=x_a)=1-\alpha$ e $E_i(x=x_f)=1$ pelo mesmo motivo explicado no ítem III.1.1. Da eq. III.25, mantendo-se t constante, temos que:

$$\frac{\partial x}{\partial E_i} = \frac{2}{\rho_{t0}} \left[\frac{1-e^{-\frac{\rho_{t0} x}{2}}}{y} + 1 - \frac{e^{-\frac{\rho_{t0} x}{2}}}{y^2} \right] E_i^{1/2} \quad (\text{III.32})$$

onde $y = e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} + \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right) E_i^{1/2}$ é uma variável auxiliar

Levando (III.32) em III.31 e lembrando os limites para E_i . teremos:

$$\int_{x_0}^{x_1} E dx = \frac{1}{\rho_0 \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right)^3} \left[1 + e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} - \frac{9}{2} e^{-\rho_0 t} + \frac{5}{6} e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t} - \frac{1}{4} \left(3e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} - 4e^{-\rho_0 t} \right) - \frac{(1-x) \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right)^2}{4} + \frac{1}{2u^2} \left(3e^{-\rho_0 t} - e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t} \right) - \frac{e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t}}{3u^3} - \left(1 - 3e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right) \ln u \right] \quad (\text{III.34})$$

onde $u = e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} + \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right) (1-x)^{1/2}$

O resultado da 3ª integral é a eq. III.12, ou seja:

$$\int_{x_1}^1 E dx = 1 - t \quad (\text{III.12})$$

Levando os valores de III.30, III.34 e III.12 na eq.

III.26, encontramos que:

$$V(t) = \frac{1}{\rho_0} \left\{ \ln \left[\frac{1 - (1-x)^{1/2}}{1 - E_a^{1/2}} \right]^2 + \frac{(1-E_a)^{1/2} (11 + 5E_a^{1/2} + 2E_a)}{3} + \frac{(1-x)^{1/2} - 1}{3} \left[13 + 5(1-x)^{1/2} - 2x \right] + \frac{1}{(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}})} \left[1 + e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} - \frac{9}{2} e^{-\rho_0 t} + \frac{5}{6} e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t} - \frac{1}{4} \left(3e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} - 4e^{-\rho_0 t} \right) - \frac{(1-x) \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right)^2}{4} + \frac{1}{2u^2} \left(3e^{-\rho_0 t} - e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t} \right) - \frac{e^{-\frac{3}{2} \rho_0 t}}{3u^3} - \left(1 - 3e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right) \ln u \right] \right\} \quad (\text{III.35})$$

ONDE

$$E_a = \frac{(1-x)}{\left\{ (1-x)^{1/2} + \left[1 - (1-x)^{1/2} \right] e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} \right\}^2}$$

$$u = e^{-\frac{\rho_0 t}{2}} + \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 t}{2}}\right) (1-x)^{1/2}$$

3.2.2- Para $t \geq t_T$, marcando a presença de cargas no eletrodo o posto ao injetor, a determinação do potencial se resume ao cál-

culo das seguintes integrais:

$$V(t) = \int_0^1 E dx = \int_0^{E_a} E \frac{\partial x}{\partial E} dE + \int_{1-x}^{E_i} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{III.36})$$

Aqui novamente utilizamos as formas III.27 e III.31, isto é, a troca da variável x por E e E_i respectivamente:

A 1ª integral é a mesma do item anterior cujo resultado é a eq. III.30. Com o uso das eqs. III.24 e III.32 a 2ª integral resulta ser:

$$\int_{1-x}^{E_i} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{1}{k_0 (1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}})^3} \left[\left(3e^{-\frac{k_0 t}{2}} - 4e^{-k_0 t} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{u} \right) + \left(1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right)^2 \left(\frac{E_i}{y} - \frac{1-x}{u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(3e^{-k_0 t} - e^{-\frac{3}{2}k_0 t} \right) \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{e^{-\frac{3}{2}k_0 t}}{3} \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{u^3} \right) + \left(1 - 3e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right) \ln \frac{y}{u} \right] \quad (\text{III.37})$$

onde y e u são as mesmas variáveis definidas anteriormente:

Com III.30 e III.37 o resultado de (III.36) é:

$$V(t) = \frac{1}{k_0} \left\{ \ln \left[\frac{1 - (1-x)^{1/2}}{1 - E_a^{1/2}} \right]^2 + \frac{(1 - E_a^{1/2})(11 + 5E_a^{1/2} + 2E_a)}{3} + \frac{(1-x)^{1/2} - 1}{3} \left[13 + 5(1-x)^{1/2} - 2x \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}})^3} \left[\left(e^{-\frac{k_0 t}{2}} - 4e^{-k_0 t} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{u} \right) + \left(1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right)^2 \left(\frac{E_i}{y} - \frac{1-x}{u} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(3e^{-k_0 t} - e^{-\frac{3}{2}k_0 t} \right) \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{e^{-\frac{3}{2}k_0 t}}{3} \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{u^3} \right) + \left(1 - 3e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right) \ln \frac{y}{u} \right] \right\} \quad (\text{III.38})$$

ONDE

$$E_a = \frac{1-x}{\left\{ (1-x)^{1/2} + \left[1 - (1-x)^{1/2} \right] e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right\}^2}$$

$$y = e^{-\frac{k_0 t}{2}} + \left(1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right) E_i^{1/2}$$

$$u = e^{-\frac{k_0 t}{2}} + \left(1 - e^{-\frac{k_0 t}{2}} \right) (1-x)^{1/2}$$

Como comentamos no início desta seção o valor de E_i é de terminado por meio de uma eq. diferencial obtida de III.25 fazen do $x=1$ e derivando-a em relação a t . As condições iniciais para a integração numérica desta eq. são para $t=1$, $E_i=1$. A eq. diferen cial é:

$$\frac{dE_i}{dt} = - \frac{\rho_{t0} E_i^{1/2}}{y^2 + e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}} y + (1 - e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}}) E_i^{1/2}} r \left[e^{-\frac{\rho_{t0} t}{2}} (y + E_i^{1/2}) (E_i^{1/2} - 1) + y^2 \right] \quad (\text{III.39})$$

3.3- Neste ítem serão desenvolvidos os cálculos para $\beta = 1/2$, com as mesmas considerações para o limite superior E_i , do campo elé trico, dadas no ítem 3.2.

3.3.1- O potencial para $0 \leq t \leq t_r$. O campo elétrico é calculado por:

$$\rho_{t0} \int_0^t dt = \int_{E_i}^E \frac{dE}{E(1-E^2)} \quad (\text{III.40})$$

onde fizemos uso das eqs. I.21 e I.25, o resultado de III.40 é:

$$E(E_i, t) = \frac{E_i}{\left[E_i^2 + (1 - E_i^2) e^{-2\rho_{t0} t} \right]^{1/2}} \quad (\text{III.41})$$

A posição x das frentes de carga, neste caso, é mais fa cilmente determinada substituindo-se o valor de $\rho_t(x, t)$ da eq. I. 21 na eq. I.26, ou seja:

$$\rho_{t0} \int_0^x dx = \int_{E_i}^E \frac{dE}{1 - E^2} \quad (\text{III.42})$$

onde o limite superior $E(x, t)$ é dado pela eq. III.41. De (III.42) resulta que:

$$x(E_i, t) = \frac{1}{2\ell t_0} \left(\ln \frac{\sqrt{y} + E_i}{\sqrt{y} - E_i} - \ln \frac{1 + E_i}{1 - E_i} \right) \quad (\text{III.43})$$

y é uma variável auxiliar definida como segue:

$$y = a + bE_i^2 \quad ; \quad \text{ONDE} \quad a = e^{-2\ell t_0 t} \quad e \quad b = 1 - a \quad (\text{III.44})$$

Uma avaliação apressada da eq. III.43 poderá levar a conclusão de que para $E_i = 1$ o valor de x resulta ser zero, o que sabemos não ser verdade pois, como determinamos no item 3.1.1, com uso de I.24, o valor de $x(=x_f)$ na 1ª frente é igual a t . Uma análise mais cuidadosa porém leva ao resultado correto. Para isto reescrevemos a eq. III.43 na seguinte forma:

$$x(E_i, t) = \frac{1}{2\ell t_0} \left(\ln \frac{\sqrt{y} + E_i}{1 + E_i} - \ln \frac{\sqrt{y} - E_i}{1 - E_i} \right)$$

e achamos o limite do logarítimo à direita, para $E_i \rightarrow 1$

$$\lim_{E_i \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y} - E_i}{1 - E_i} = a$$

Daqui decorrerá $x=t$

O cálculo do potencial é idêntico aos casos já apresentados, isto é:

$$V(t) = \int_0^1 E(x, t) dx = \int_{1-x}^{E_i} E \frac{\partial x}{\partial E} dE + \int_{1-x}^1 E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i + \int_{x_f}^1 E dx \quad (\text{III.45})$$

O cálculo da 1ª integral é feito com o uso da eq. I.21 e da eq. I.12 com $\rho=0$, ou seja:

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} E \frac{\partial \chi}{\partial E} dE = \int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E^2)} \quad (\text{III.46})$$

Cujo resultado é:

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E^2)} = \frac{1}{2\rho_{t0}} \ln \frac{\alpha(2-\alpha)}{1-E_a^2} \quad (\text{III.47})$$

onde E_a é obtido de III.41 com $E_i=1-\alpha$ o que dá:

$$E_a = \frac{1-\alpha}{[a + b(1-\alpha)^2]^{1/2}} \quad (\text{III.48})$$

com a e b já definidas em III.44

Derivando III.43 com respeito a E_i e mantendo t como constante obtemos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial E_i} = \frac{1}{\rho_{t0}} \left[\frac{a}{\sqrt{y}(y-E_i^2)} - \frac{1}{1-E_i^2} \right] \quad (\text{III.49})$$

onde y é definido por III.44

Assim com o uso de III.41 e III.49 a 2ª integral de III.45 se torna:

$$\int_{1-\alpha}^1 E(E_i, t) \frac{\partial \chi}{\partial E_i} dE_i = \frac{1}{\rho_{t0}} \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i dE_i}{y(y-E_i^2)} - \frac{1}{\rho_{t0}} \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i dE_i}{\sqrt{y}(1-E_i^2)} \quad (\text{III.50})$$

Os integrandos de III.50 divergem no limite superior, isto é, em $E_i=1$. Para resolver este problema tomaremos o limite superior como sendo $E_i=1-\gamma$, onde γ é uma grandeza muito próxima de zero

ro. Com isso procedemos como segue:

Para III.50, temos como resultado:

$$\int_{1-\alpha}^1 E(\epsilon_i, t) \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i = \frac{1}{2\rho_{t_0}} \left[\ln \frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}} \right]_{1-\alpha}^{1-\delta} - \ln \left(1 - \frac{\epsilon_i^2}{y} \right) \right]_{1-\alpha}^{1-\delta}$$

Substituindo os limites e lembrando que para:

$$\epsilon_i = 1-\alpha \Rightarrow y = u = a + b(1-\alpha)^2 = 1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)$$

$$\epsilon_i = 1-\delta \Rightarrow y = a + b(1-\delta)^2$$

Onde u é uma nova variável auxiliar, teremos:

$$\begin{aligned} 2\rho_{t_0} \int_{1-\alpha}^1 E \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i &= \ln \frac{1 - \sqrt{a + b(1-\delta)^2}}{1 + \sqrt{a + b(1-\delta)^2}} - \ln \left[1 - \frac{(1-\delta)^2}{a + b(1-\delta)^2} \right] + \\ &+ \ln \left[1 - \frac{(1-\alpha)^2}{u} \right] - \ln \frac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}} = \\ &= - \ln \frac{[1 + \sqrt{a + b(1-\delta)^2}] [a + b(1-\delta)^2 - (1-\delta)^2]}{[1 - \sqrt{a + b(1-\delta)^2}] [a + b(1-\delta)^2]} + \\ &+ \ln \left[\frac{1 + b(\alpha^2 - 2\alpha) - 1 + 2\alpha - \alpha^2}{1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)} \right] - \ln \frac{(1 - \sqrt{u})^2}{1 - [1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)]} = \\ &= - \ln \frac{2(1 - 2b\delta - 1 + 2\delta)}{(1 - 1 + b\delta) \cdot 1} - \ln \left[\frac{(\alpha^2 - 2\alpha)(b-1)}{1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)} \right] - \ln \frac{(1 - \sqrt{u})^2}{b(2\alpha - \alpha^2)} = \\ &= - \ln \frac{4\delta(1-b)}{\delta b} + \ln \frac{a(2\alpha - \alpha^2)}{1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)} - \ln \frac{b(2\alpha - \alpha^2)}{(1 - \sqrt{u})^2} = \\ &= \ln \frac{b^2 a (2\alpha - \alpha^2)^2}{4a u (1 - \sqrt{u})^2} = \\ &= \ln \left[\frac{b(2\alpha - \alpha^2)}{2\sqrt{u}(1 - \sqrt{u})} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{1-\alpha}^1 E(\epsilon_i, t) \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i = \frac{1}{\rho_{t_0}} \ln \frac{b(2\alpha - \alpha^2)}{2(\sqrt{u} - u)} \quad (\text{III.51})$$

O resultado da 3ª integral é a eq. III.12, ou seja:

$$\int_{\alpha_t}^1 E d\alpha = 1 - t \quad (\text{III.12})$$

Com os valores de III.47, III.51 e III.12 a eq. III.45 tem como resultado o seguinte:

$$V(t) = \frac{1}{\beta_{t_0}} \ln \frac{b [\alpha (2-\alpha)]^{3/2}}{2(1-\epsilon_a^2)(\sqrt{u}-u)} + 1 - t \quad (\text{III.52})$$

onde $a = e^{-2\rho_{t_0}t}$; $b = 1-a$

$$\epsilon_a = \frac{1-\alpha}{u^{1/2}} \quad \text{e} \quad u = a + b(1-\alpha)^2 = 1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)$$

3.3.2- Para um tempo $t \geq t_T$ o cálculo do potencial é feito de maneira semelhante ao caso anterior com o limite superior E_i , da 2ª integral, determinado por uma eq. diferencial obtida da derivação de III.43 com respeito a t em $x=1$ e com as condições iniciais de $t=1$ e $E_i=1$. Assim:

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx = \int_{1-\alpha}^{\epsilon_a} E \frac{\partial x}{\partial \epsilon} d\epsilon + \int_{1-\alpha}^{\epsilon_i} E(\epsilon_i,t) \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i \quad (\text{III.53})$$

O resultado da 1ª integral é a eq. III.47. Para a 2ª integral usamos III.41 e III.49 para obter:

$$\int_{1-\alpha}^{\epsilon_i} E(\epsilon_i,t) \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i = \frac{1}{2\beta_{t_0}} \left[\ln \frac{y(1-\sqrt{y})}{(1+\sqrt{y})(y-\epsilon_i^2)} + \ln \frac{ab(2\alpha-\alpha^2)^2}{u(1-\sqrt{u})^2} \right] \quad (\text{III.54})$$

onde $a = e^{-2\rho_{t_0}t}$; $b = 1-a$; $u = a + b(1-\alpha)^2$ e $y = a + bE_i^2$
 $u = 1 + b(\alpha^2 - 2\alpha)$

Com uso de III.47 e III.54 a eq. III.53 resulta em:

$$V(t) = \frac{1}{2\rho_{t_0}} \left[\ln \frac{by(1-\sqrt{y})(2x-\alpha)^2}{(1+\sqrt{y})(1-\epsilon_i^2)(1-\sqrt{u})^2} \right] \quad (\text{III. 55})$$

onde $a = e^{-2\rho_{t_0} t}$; $b = 1-a$; $u = a+b(1-\alpha)^2$ e $y = a+b\epsilon_i^2$
 $u = 1+b(\alpha^2-2\alpha)$

Para a obtenção de E_i , temos:

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{E_i \rho_{t_0} e^{-2\rho_{t_0} t} (\epsilon_i^2 - 1)^2}{\sqrt{y} (y - \epsilon_i^2) + e^{-2\rho_{t_0} t} (\epsilon_i^2 - 1)} \quad (\text{III. 56})$$

com $y = a+b\epsilon_i^2$, sendo $a = e^{-2\rho_{t_0} t}$ e $b = 1-a$

3.4- As Figs. IIIa - IIIc mostram, para $\alpha=1$, o potencial como função do tempo.

Observamos em 1º lugar que em $t=1$, a medida que ρ_{t_0} diminui, mais próximo está o potencial do valor $1/2$, que é o seu valor, neste ponto, para o caso de carga livre, ou seja, $\rho_{t_0} \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty)$, independentemente do valor de β . ($\beta = \rho_{t_0} \tau$)

Podemos ver também que, para qualquer valor de β , o potencial decai em direção a seu estado estacionário mais rapidamente quanto maior for ρ_{t_0} . Isso é explicado pelo fato de que pequenos valores de ρ_{t_0} dão um grande tempo de captura (τ) o que torna pequeno o potencial residual e é natural que o processo se desenvolva em um tempo muito longo. Ao contrário, para grandes valores de ρ_{t_0} , o tempo de captura (τ) é menor acarretando um valor grande para o potencial residual e naturalmente o processo se dá num tempo mais curto. Em outras palavras, a duração do processo está ligada ao fato de que o campo produzido pelas cargas presas cola

bora na aceleração das frentes de carga. Portanto, quanto maior ρ_{t_0} mais cargas são presas e em consequência maior aceleração das frentes ou, semelhantemente, quanto menor ρ_{t_0} menos cargas caem nas armadilhas e as frentes sentem uma menor aceleração.

No capítulo V mostraremos que o comportamento assintótico do potencial para $\alpha=1$ e β qualquer, é $e^{-\rho_{t_0} t}$ o que confirma o exposto acima.

Das Figs. IIIa - IIIc podemos notar, ainda, que para valores grandes de ρ_{t_0} as nossas curvas se aproximam das obtidas por J.A.Giacometti e M.Campos (Ref.5), estendendo o trabalho de Rudenko (Ref.1), independentemente - como no caso de pequenos ρ_{t_0} do valor de β . O seguinte raciocínio nos leva à explicação da independência do valor de β . O modelo Rudenko supõe

$\rho_{t_0} \rightarrow \infty$ e possui um único parâmetro que é o tempo de captura (τ). Nesse modelo, para valores muito pequenos de τ , as curvas se tornam praticamente insensíveis a uma variação do referido tempo de captura (τ), acumulando-se próximas ao valor unitário do potencial. No nosso modelo o valor de β depende do produto de dois parâmetros, ou seja, ρ_{t_0} e τ . Mas, como dissemos no capítulo II, o nosso cálculo, para $\rho_{t_0} \rightarrow \infty$, nos leva ao cálculo de Rudenko e,consequentemente, aos resultados de Giacometti e Campos. Isso nos leva a concluir que para valores muito grandes de ρ_{t_0} , como suposto na referência acima, e valores muito pequenos de tempo de captura (τ), o valor de β é indiferente à variação desses tempos de captura, e como antes, teremos curvas muito próximas ao valor unitário do potencial.

FIG.III.a - Curvas do potencial em função do tempo para $\beta = 1$

FIG.III.b - Curvas do potencial em função do tempo para $\beta = 2$

FIG.III.c - Curvas do potencial em função do tempo para $\beta = 1/2$

CAPÍTULO IV

Neste capítulo desenvolveremos os cálculos para obter a solução geral do problema, isto é, β e α terão valores quaisquer. Com α diferente da unidade teremos agora, para $0 \leq t \leq t_T$, o parâmetro E_i que caracteriza o campo no pulso inicial variando de $(1-\alpha)$ a 1 e para $t > t_T$ de $(1-\alpha)$ até um valor E_i determinado com a condição de $x=1$.

Trataremos separadamente os casos em que $\beta \geq 1$ e $\beta < 1$.

O campo elétrico é obtido com a substituição de $\rho_t(x,t)$ dado pela eq. I.21 na eq. I.25. Assim poderemos escrever que:

$$\rho_{t_0} \int_0^t dt = \int_{E_i}^E \frac{dE}{E(1-E^{1/\beta})} \quad (\text{IV.1})$$

cuja solução é:

$$E = \frac{E_i}{\left[E_i^{1/\beta} + (1-E_i^{1/\beta}) e^{-\frac{\rho_{t_0} t}{\beta}} \right]^\beta} \quad (\text{IV.2})$$

Eq. válida para qualquer $\beta \neq 0$

4.1- Para $\beta \geq 1$

4.1.1- O potencial para $0 \leq t \leq t_T$

A posição das frentes de cargas é determinada a partir da eq. I.24 com o valor de E dado pela eq. IV.2. Assim:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{E_i dt}{\left[E_i^{1/\beta} + (1-E_i^{1/\beta}) e^{-\frac{\rho_{t_0} t}{\beta}} \right]^\beta} \quad (\text{IV.3})$$

como resultado teremos que:

$$x(t) = \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \left[1 + \left(e^{\frac{\rho_{t0} t}{\beta}} - 1 \right) u_i \right] + \sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{u_i^m}{m} \left(1 - \frac{1}{y^m} \right) \right\} \quad (IV.4)$$

Sendo $y = a + bu_i$, $a = e^{-\frac{\rho_{t0} t}{\beta}}$, $b = 1-a$ e $u_i = E_i^{1/\beta}$ variáveis auxiliares. O potencial é obtido pela soma de 3 parcelas correspondentes à região onde o pulso já passou ($0 < x < x_a$) a região no interior do pulso ($x_a < x < x_f$) e a região na frente do pulso ($x_f < x < 1$), ou seja:

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^{x_f} E dx + \int_{x_f}^1 E dx \quad (IV.5)$$

onde x_a e x_f significam as posições da última e da 1ª frente de cargas.

A 1ª integração é realizada com a troca da variável x com o campo elétrico E :

$$\int_0^{x_a} E dx = \int_{E(1-x)}^{E(x=x_a)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE \quad (IV.6)$$

Como não existe mais cargas livres nesta região a eq. I.12 pode ser escrita $\frac{dx}{dE} = \frac{1}{\rho_t}$ e tendo-se em vista a eq. I.21 teremos:

$$\int_{1-x}^{E(x=x_a)} \frac{E dE}{\rho_{t0} (1-E^{1/\beta})} \quad (IV.7)$$

O campo elétrico, nesta região, não depende do tempo e está relacionado com o parâmetro E_i da última frente de cargas. Desse modo o campo elétrico em $x = x_a$ é determinado pela eq. IV.2 com $E_i = (1-\alpha)$ o que resulta ser:

$$E(x=x_a) = E_a = \frac{1-\alpha}{\left\{ (1-\alpha)^{1/\beta} + \left[1 - (1-\alpha)^{1/\beta} \right] e^{-\frac{\rho_{t_0} E}{\beta}} \right\}^\beta} \quad (\text{IV.8})$$

Com isso o resultado da 1ª integral é (ver apêndice):

$$\int_0^{x_a} E dx = \frac{\beta}{\rho_{t_0}} \left\{ \ln \frac{1 - (1-\alpha)^{1/\beta}}{1 - E_a^{1/\beta}} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{m}{k} \left[(1 - E_a^{1/\beta})^k - (1 - (1-\alpha)^{1/\beta})^k \right] \right\} \quad (\text{IV.9})$$

O cálculo da 2ª integral é feito com a troca da variável de integração x por E_i , tendo esta como limites de interação os valores $(1-\alpha)$ e 1 como explicado no início do capítulo. Desse modo:

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \int_{E_i=1-\alpha}^{E_i=1} E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{IV.10})$$

Com o uso da variável $u_i = E_i^{1/\beta}$ a eq. (IV.10) se torna:

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \int_{u_i=(1-\alpha)^{1/\beta}}^{u_i=1} E(u_i, t) \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i \quad (\text{IV.11})$$

Derivando a eq. IV.4 com respeito a u_i mantendo t constante temos:

$$\frac{dx}{du_i} = \frac{\beta}{\rho_{t_0}} \left[\frac{b}{y} + \sum_{m=1}^{\beta-1} \left(u_i^{m-1} - \frac{a u_i^{m-1}}{y^{m+1}} \right) \right] \quad (\text{IV.12})$$

Utilizando-se as Eqs. IV.2 e IV.12 a integral IV.11 tem como resultado o seg. (ver apêndice)

$$\frac{\rho_{t_0}}{\beta} \int_{x_a}^{x_f} E dx = \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m) \cdot b^m} \left[\frac{(1-\alpha)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a + b(1-\alpha)^{1/\beta}]^{\beta-m}} - 1 \right] - \frac{1}{b^\beta} \ln [a + b(1-\alpha)^{1/\beta}] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{mb} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{\beta+m-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{\binom{m+\beta-1}{k}}{\binom{m-1}{k}} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \right. \\
 & + (-1)^{m+1} \binom{m+\beta-1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^m \left[\sum_{n=1}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-n)b^n} \left(1 - \frac{(1-x)^{\frac{\beta-n}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-n}} \right) + \frac{1}{b^\beta} \ln(a+b(1-x)^{1/\beta}) \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{b^{\beta+m}} \sum_{k=0}^{\beta+m-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{\beta+m-1}{k} a^{k+1} \left[1 - \frac{1}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{k+1}} \right] \right\} \quad (IV.13)
 \end{aligned}$$

A 3ª integral é a mesma dos casos anteriores, ou seja:

$$\int_{x_t}^1 \epsilon dx = 1 - t \quad (IV.14)$$

Levando os resultados IV.9, IV.13 e IV.14 em IV.5 temos que:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{\beta}{\rho t_0} \left\{ \ln \frac{1 - (1-x)^{1/\beta}}{1 - \epsilon_a^{1/\beta}} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{m}{k} \left[(1 - \epsilon_a^{1/\beta})^k - (1 - (1-x)^{1/\beta})^k \right] + \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m)b^m} \left[\frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-m}} - 1 \right] - \frac{1}{b^\beta} \ln[a+b(1-x)^{1/\beta}] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\beta}{\rho t_0} \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{mb} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{\binom{m+\beta-1}{k}}{\binom{m-1}{k}} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \right. \\
 & + (-1)^{m+1} \binom{m+\beta-1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^m \left[\sum_{n=1}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-n)b^n} \left(1 - \frac{(1-x)^{\frac{\beta-n}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-n}} \right) + \frac{1}{b^\beta} \ln(a+b(1-x)^{1/\beta}) \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{b^{\beta+m}} \sum_{k=0}^{\beta+m-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{\beta+m-1}{k} a^{k+1} \left[1 - \frac{1}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{k+1}} \right] \right\} \quad (IV.15)
 \end{aligned}$$

ONDE: $a = e^{-\frac{\rho t_0 t}{\beta}}$; $b = 1 - a$

4.1.2- Para $t \geq t_T$ as cargas já começaram a abandonar a amostra.

Temos, então, duas regiões a considerar: A região onde o pulso já passou e a região no interior do pulso. O potencial é calculado com a soma das diferenças de potencial dessas duas regiões, sendo que o limite superior u_i , da região no interior do pulso, é determinado por uma eq. diferencial resultante da derivação de

IV.4 em relação a t , com $x=1$, e tendo como condições iniciais $t=1$ e $u_i=1$. Assim com o uso do artifício da troca da variáveis de integração x por E e u_i , temos:

$$V(t) = \int_0^1 E dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^1 E dx = \int_{1-\alpha}^{E(x_a, t)} E \frac{\partial x}{\partial E} dE + \int_{u_i=(1-x)^{1/\beta}}^{u_i} E(u_i, t) \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i \quad (IV.16)$$

A 1ª integral é aquela mesma do item anterior que resultou na eq.IV.9. A 2ª integral é calculada utilizando-se as eqs.IV 2 e IV.12. Lembrando o explicado para o limite superior u_i , teremos que:

$$\begin{aligned} \int_{(1-x)^{1/\beta}}^{u_i} E(u_i, t) \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i &= \frac{\beta}{\rho t_0} \left\{ \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m)b^m} \left[\frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-m}} - \left(\frac{u_i}{y}\right)^{\beta-m} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{b^\beta} \ln \frac{y}{a+b(1-x)^{1/\beta}} \right\} + \frac{\beta}{\rho t_0} \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{mb} \left[\frac{u_i^{m+\beta-1}}{y^{\beta-1}} - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{(m+\beta-1)}{(m-1)} \left[\frac{u_i^{m+\beta-1-k}}{y^{\beta-1}} - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1-k}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \\ &+ (-1)^{m+1} \frac{(m+\beta-1)}{m} \left(\frac{a}{b}\right)^m \left[\sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m)b^m} \left(\left(\frac{u_i}{y}\right)^{\beta-m} - \frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-m}} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{b^\beta} \ln \frac{a+b(1-x)^{1/\beta}}{y} \right] + \frac{1}{b^{\beta+m}} \sum_{k=0}^{\beta+m-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{\beta+m-1}{k} a^{k+1} \left[\frac{1}{y^{k+1}} - \frac{1}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{k+1}} \right] \right\} \quad (IV.17) \end{aligned}$$

com y , a e b definidas como anteriormente, ou seja:

$$y = a + bu_i, \quad a = e^{-\frac{\rho t_0 t}{\beta}}, \quad b = 1-a \quad \text{e} \quad u_i = E_i^{1/\beta}$$

Com os valores das eqs. IV.9 e IV.17 a eq. IV.16 tem como resultado o seguinte:

$$V(t) = \frac{\beta}{\rho t_0} \left\{ \ln \frac{1-(1-x)^{1/\beta}}{1-E_a^{1/\beta}} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{m}{k} \left[(1-E_a^{1/\beta})^k - (1-(1-x)^{1/\beta})^k \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m)b^m} \left[\frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)]^{1/\beta}} - \left(\frac{u_i}{y} \right)^{\beta-m} \right] + \frac{1}{b^\beta} \ln \frac{y}{a+b(1-x)^{1/\beta}} \Bigg\} + \\
 & + \frac{\beta}{b^\beta} \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{mb} \left[\frac{u_i^{m+\beta-1}}{y^{\beta-1}} - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)]^{1/\beta}} \right] + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{(m+\beta-1)}{(m-1)} \left[\frac{u_i^{m+\beta-1-k}}{y^{\beta-1}} - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1-k}{\beta}}}{[a+b(1-x)]^{1/\beta}} \right] + \\
 & + (-1)^{m+1} \frac{(m+\beta-1)}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^m \left[\sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{(\beta-m)b^m} \left(\left(\frac{u_i}{y} \right)^{\beta-m} - \frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)]^{1/\beta}} \right) + \frac{1}{b^\beta} \ln \frac{a+b(1-x)^{1/\beta}}{y} \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{b^{\beta+m}} \sum_{k=0}^{m+\beta-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{\beta+k-1}{k} a^{k+1} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{a+b(1-x)^{1/\beta}} \right] \right\} \quad (IV.18)
 \end{aligned}$$

ONDE : $a = e^{-\frac{\rho t_0}{\beta}}$, $b = 1-a$, $u_i = E_i^{1/\beta}$ e $y = a + bu_i$

onde $a = e^{-\frac{\rho t_0}{\beta}}$; $b = 1-a$; $u_i = E_i^{1/\beta}$ e $y = a + bu_i$

Para a determinação de u_i derivamos a eq. IV.4 em relação a t e pondo $x=1$. Deste modo teremos:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\rho t_0}{\beta} \times \frac{a(1-u_i) \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{u_i^m}{y^{m+1}} - 1}{\sum_{m=0}^{\beta-1} u_i^{m-1} \left(1 - \frac{a}{y^{m+1}} \right)} \quad (IV.19)$$

4.2- Para $\beta < 1$

4.2.1- O potencial para $0 \leq t \leq t_T$

No presente caso a posição das frentes de cargas é mais facilmente obtida com a substituição do valor de $\rho_t(x,t)$ dado por I.21 na eq. I.26. Com isso teremos que:

$$\rho_{t_0} \int_0^x dx = \int_{E_i}^E \frac{dE}{1-E^{1/\beta}} \quad (IV.20)$$

Com o limite superior E dado pela eq.IV.2. Para facilidade de cálculo definiremos variáveis auxiliares como segue:

$$y = a + b E_i^{1/\beta}, \quad a = e^{-\frac{f_{tot}}{\beta}} = b = 1-a \quad (IV.21)$$

Para a integral IV.20 temos dois resultados conforme $\frac{1}{\beta}$ seja par ou impar. Assim para $\frac{1}{\beta} =$ número par inteiro teremos que:

$$x = \frac{\beta}{\rho t_0} \left\{ \ln \left(\frac{y^\beta + E_i}{y^\beta - E_i} \right) \cdot \left(\frac{1-E_i}{1+E_i} \right) + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\cos 2\beta k \pi \ln \frac{1-2E_i \cos 2\beta k \pi + E_i^2}{1-2\frac{E_i}{y^\beta} \cos 2\beta k \pi + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}}} + 2 \sin 2\beta k \pi \left(\arctg \frac{\frac{E_i}{y^\beta} - \cos 2\beta k \pi}{\sin 2\beta k \pi} - \arctg \frac{E_i - \cos 2\beta k \pi}{\sin 2\beta k \pi} \right) \right] \right\} \quad (IV.22)$$

e para $\frac{1}{\beta} =$ número impar inteiro temos:

$$x = \frac{\beta}{\rho t_0} \left\{ \ln \frac{1-E_i}{1-\frac{E_i}{y^\beta}} + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left[\cos (2k+1)\beta \pi \ln \frac{1 + \frac{2E_i}{y^\beta} \cos (2k+1)\beta \pi + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{1 + 2E_i \cos (2k+1)\beta \pi + E_i^2} + 2 \sin (2k+1)\beta \pi \left(\arctg \frac{\frac{E_i}{y^\beta} + \cos (2k+1)\beta \pi}{\sin (2k+1)\beta \pi} - \arctg \frac{E_i + \cos (2k+1)\beta \pi}{\sin (2k+1)\beta \pi} \right) \right] \right\} \quad (IV.23)$$

Novamente o cálculo do potencial é feito somando-se as diferenças de potencial nas três regiões citadas no caso anterior:

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^{x_f} E dx + \int_{x_f}^1 E dx \quad (IV.24)$$

O cálculo da 1ª integral é executado de maneira análoga e com as mesmas considerações do caso anterior, isto é, são válidas aqui, a eq. IV.7, com a diferença de que β é fracionário, e a eq. IV.8. Deste modo:

$$\int_0^{x_a} E dx = \int_{1-x}^{E_a} \frac{E dE}{\rho t_0 (1-E^{1/\beta})} \quad (IV.25)$$

Com o valor de E_a dado pela eq. IV.8 os resultados da in

tegral IV.25 são os seguintes: (Ver apêndice)

Para $\frac{1}{\beta} = \text{número par inteiro}$

$$\int_0^{z_a} E dx = \frac{\beta}{\beta_{t0}} \left\{ \ln \frac{x(2-x)}{1-E_a^2} + \sum_{k=0}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\cos 2\theta_p \ln \frac{2+x(x-2)-2(1-x)\cos\theta_p}{1-2E_a\cos\theta_p+E_a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sin 2\theta_p \left(\arctg \frac{E_a - \cos\theta_p}{\sin\theta_p} - \arctg \frac{1-x - \cos\theta_p}{\sin\theta_p} \right) \right] \right\} \quad (IV.26)$$

$$\text{Onde } \theta_p = 2\beta k\pi \quad (IV.27)$$

E para $\frac{1}{\beta} = \text{número impar inteiro}$. Temos:

$$\int_0^{z_a} E dx = \frac{\beta}{\beta_{t0}} \left\{ \ln \frac{x}{1-E_a} + \sum_{k=0}^{\frac{(1/\beta)-3}{2}} \left[\cos 2\theta_i \ln \frac{2+x(x-2)+2(1-x)\cos\theta_i}{1+2E_a\cos\theta_i+E_a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sin 2\theta_i \left(\arctg \frac{1-x + \cos\theta_i}{\sin\theta_i} - \arctg \frac{E_a + \cos\theta_i}{\sin\theta_i} \right) \right] \right\} \quad (IV.28)$$

$$\theta_i = (2k+1)\beta\pi \quad (IV.29)$$

Para resolver a 2ª integral outra vez lançaremos mão do artifício da troca da variável de integração x por E_i , isto é:

$$\int_{z_a}^{z_t} E dx = \int_{E_i=1-x}^1 E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (IV.30)$$

Por motivo de clareza vamos separar a solução dessa integral em dois sub-ítemos relativos aos valores $\frac{1}{\beta} = \text{número par}$ e $\frac{1}{\beta} = \text{número impar}$. Manteremos esse procedimento na obtenção do potencial para um tempo (t) maior que o tempo de trânsito. As variáveis definidas em IV.21 serão usadas até o final deste capítulo, como também outras que se fizerem necessário defini-las:

4.2.1.a) Para $\frac{1}{\beta}$ número par inteiro.

Derivando a eq.IV.22 em relação a E_i , mantendo-se t como constante, temos que:

$$\frac{\rho_0}{2\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} = \frac{a y^{\beta-1}}{y^{2\beta} - E_i^2} - \frac{1}{1 - E_i^2} + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{E_i \cos \theta_p}{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2} - \frac{1}{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} - \frac{a E_i \cos \theta_p}{y^{2\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} \right] \quad (IV.31)$$

Levando IV.31 em IV.30 e lembrando o valor de $E(E_i, t)$ da do por IV.2, teremos: (Ver apêndice)

$$\int_{x_a}^{x_f} E dz = \frac{\beta}{\rho_0} \left[1 - \frac{(1-x)^2}{4\beta} - 3 \ln 2 + \frac{1-x}{4\beta} \ln \left(\frac{2-x}{\alpha} \right) \right] + \frac{t}{2} + \\ + \frac{\beta}{a \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta}+1} - 1 \right] \ln \alpha (2-x) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{1 - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} + \\ + \frac{2\beta}{\rho_0} \sum_{k=1}^{\left(\frac{1}{2\beta}\right)-1} \left\{ \frac{1}{a \beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p \left(\arctg \frac{1-x - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} - \frac{\theta_p}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p}{2} \times \ln V_p \right] + (1 - \cos \theta_p) \left[\frac{\ln J_p}{2} + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\frac{\theta_p}{2} - \arctg \frac{1-x - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) \right] \right\} \quad (IV.32)$$

ONDE

$$u = a + b(1-x)^{1/\beta}$$

$$V_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2} \quad (IV.33)$$

$$J_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - \frac{2(1-x)\cos \theta_p}{4\beta} + \frac{(1-x)^2}{4\beta^2}}$$

$$\binom{\beta+1}{m} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\dots(\beta+1+m)}{1.2.3\dots(m+1)} ; \binom{\beta}{m} = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+1+m)}{1.2.3\dots(m+1)} \quad (IV.34)$$

4.2.1.b- Para $\frac{1}{\beta}$ = número inteiro impar

Derivando agora a eq. IV.23 em relação a E_i com t constante, encontramos que:

$$\frac{\rho_{t0}}{2\beta} \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{y(y^\beta - \epsilon_i)} - \frac{1}{1 - \epsilon_i} \right] + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta} - 3} \left[\frac{a}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{\epsilon_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{\epsilon_i^2}{y^{2\beta}} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{a \epsilon_i \cos \theta_i}{y^{2\beta+1} \left(1 + 2 \frac{\epsilon_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{\epsilon_i^2}{y^{2\beta}} \right)} - \frac{1}{1 + 2 \epsilon_i \cos \theta_i + \epsilon_i^2} - \frac{\epsilon_i \cos \theta_i}{1 + 2 \epsilon_i \cos \theta_i + \epsilon_i^2} \right] \quad (IV.35)$$

Com o uso de IV.2 e IV.35 o resultado da integral IV.30 é o seguinte: (Ver apêndice)

$$\int_{x_a}^{x_f} E dx = \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left[\ln \left(1 - \frac{1-\alpha}{4\beta} \right) - 1 + \frac{1-\alpha}{4\beta} \left(1 - \ln \alpha \right) + \frac{\rho_{t0} t}{\beta} \right] + \\ + \frac{\beta}{a^\beta \rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta+1)}{m!} \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^m}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left[(1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} - 1} - 1 \right] \ln \alpha + \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \frac{1 - (1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} - n + 1}}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} + \\ + \frac{2\beta}{\rho_{t0}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta} - 3} \left\{ (1 + \cos \theta_i) \left[\frac{1}{2} \ln J_i + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{1-\alpha}{4\beta} + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} - \frac{\theta_i}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{m} \right)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\frac{\operatorname{sen} \theta_i \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{2} \ln V_i + \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \left(\frac{\theta_i}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(1-\alpha) \operatorname{sen} \theta_i}{1 + (1-\alpha) \cos \theta_i} \right) \right] \right\} \quad (IV.36)$$

$$\text{ONDE: } V_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{2(1-\alpha)(1 + \cos \theta_i) + \alpha^2} ; \quad J_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{1 + \frac{2(1-\alpha) \cos \theta_i}{4\beta} + \frac{(1-\alpha)^2}{4\beta^2}} \quad (IV.37)$$

Sendo $\underline{u}$ a mesma variável definida em (IV.33)

A 3ª integral, correspondente a região livre de cargas, é a mesma dos casos anteriores cuja solução é:

$$\int_{x_f}^1 E dx = 1 - t \quad (IV.38)$$

O potencial ao longo de toda a amostra para $0 \leq t \leq t_T$ é dado pelas seguintes eqs.:

Para $\frac{1}{\beta}$ = número inteiro par teremos, com o uso das eqs.

IV.26, IV.32 e IV.38, que:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{\beta}{\rho t_0} \left[\ln \frac{\alpha(2-\alpha)}{1-E_a^2} + 1 - \frac{(1-\alpha)^2}{4\beta} - 3\ln 2 + \frac{1-\alpha}{4\beta} \ln \frac{2-\alpha}{a} \right] + 1 - \frac{t}{2} + \\
 & + \frac{\beta}{a^\beta \rho t_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \frac{(b/a)^m}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left[(1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln \alpha(2-\alpha) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{1 - (1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} + \\
 & + \frac{\beta}{\rho t_0} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta} - 1} \left\{ \cos 2\theta_p \ln J_a + 2 \operatorname{sen} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{E_a - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{1-\alpha - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) + \right. \\
 & + \frac{2}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{\beta}{m}}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{1-\alpha - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \frac{\theta_p}{2} \right) + \frac{\operatorname{sen} \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p}{2} \ln V_p \right] + \\
 & \left. + 2(1 - \cos \theta_p) \left[\frac{1}{2} \ln J_p + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\frac{\theta_p}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\alpha}{4\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) \right] \right\} \quad (IV.39)
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } J_a = \frac{2 + \alpha(\alpha - 2) - 2(1-\alpha) \cos \theta_p}{1 - 2E_a \cos \theta_p + E_a^2} \quad (IV.40)$$

$$a = e^{-\frac{\rho t_0 t}{\beta}} ; \quad b = 1 - a ; \quad \theta_p = 2\beta\pi ; \quad u = a + b(1-\alpha)^{1/\beta} ;$$

$$J_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - \frac{2(1-\alpha) \cos \theta_p}{4\beta} + \frac{(1-\alpha)^2}{4\beta^2}} ; \quad V_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{2(1-\alpha)(1 - \cos \theta_p) + \alpha^2}$$

$$E_a = \frac{1-\alpha}{\left\{ (1-\alpha)^{1/\beta} + [1 - (1-\alpha)^{1/\beta}] a \right\}^\beta}$$

E usando as eqs. IV.28, IV.35 e IV.38 temos, para $\frac{1}{\beta} = \underline{n\acute{u}}$ mero impar inteiro, que:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{\beta}{\rho t_0} \left[\ln \frac{\alpha(u^\beta - 1) + \alpha^2}{4\beta(1-E_a)} - 1 + \frac{1-\alpha}{4\beta} (1 - \ln \alpha) + \frac{\rho t_0 t}{\beta} \right] + 1 - t + \\
 & + \frac{\beta}{a^\beta \rho t_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \frac{(b/a)^m}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left[(1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln \alpha + \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{1 - (1-\alpha)^{\frac{m}{\beta} - n + 1}}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta}{q^{\frac{1}{\beta}-3}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \cos 2\theta_i \ln V_a + 2 \sin 2\theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{1-\kappa + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{E_a + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2(1 + \cos \theta_i) \left[\frac{1}{2} \ln J_i + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\kappa}{4\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \frac{\theta_i}{2} \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{q^{\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{m}\right)}{m!} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\frac{\sin \theta_i \cdot \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2\right) \theta_i}{2} \ln V_i + \sin \left(\frac{m}{\beta} + 2\right) \theta_i \left(\frac{\theta_i}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(1-\kappa) \sin \theta_i}{1 + (1-\kappa) \cos \theta_i} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.41}$$

$$\text{SENDO } V_a = \frac{2 + \kappa(\kappa - 2) + 2(1 - \kappa) \cos \theta_i}{1 + 2E_a \cos \theta_i + E_a^2} ; \tag{IV.42}$$

$$a = e^{-\frac{\beta t}{\beta}} ; b = 1 - a ; \theta_i = (2\kappa + 1)\beta\pi ; u = a + b(1 - \kappa)^{1/\beta}$$

$$V_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{2(1 - \kappa)(1 + \cos \theta_i) + \kappa^2} ; J_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{1 + \frac{2(1 - \kappa) \cos \theta_i}{4\beta} + \frac{(1 - \kappa)^2}{4^2\beta}}$$

$$E_a = \frac{(1 - \kappa)}{\left\{ (1 - \kappa)^{1/\beta} + \left[1 - (1 - \kappa)^{1/\beta} \right] a \right\}^{\beta}}$$

4.2.2- O potencial para $t \geq t_T$

Como no caso anterior o potencial é determinado pela soma das diferenças de potencial da região onde não há mais cargas livres com a da região no interior do pulso. O limite superior E_i da região no interior do pulso será calculado, como vem sendo feito, por meio de uma eq. diferencial que, no presente caso, será obtida pela derivação, com respeito a t , das eqs. IV.22 e IV.23, com $x=1$, conforme $\frac{1}{\beta}$ seja par ou impar. As condições iniciais são as mesmas de antes, isto é, $x=1$ em $t=1$. Desse modo temos que:

$$V(t) = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^1 E dz = \int_{1-\kappa}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0}(1-E^{1/\beta})} + \int_{E_i=1-\kappa}^{E_i} E(E_i, t) \frac{\partial \kappa}{\partial E_i} dE_i \quad (IV.43)$$

onde utilizamos as eqs. IV.25 e IV.30. A 1ª integral é a mesma do caso em que $0 < t < t_T$, e tem como resultado as eqs. IV.26 e IV.28.

Para o cálculo da 2ª integral são válidas as eqs. IV.22 e IV.23. Tendo-se em conta essas duas eqs., a eq. IV.2, e que o limite superior agora é E_i teremos que: (Ver apêndice)

4.2.2.a- Para $\frac{1}{\beta} =$ número par inteiro

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^1 E dx = & \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \frac{y^{2\beta} [4^{2\beta} - (1-\kappa)^2]}{4^{2\beta} (y^{2\beta} - E_i^2)} + \frac{E_i}{y^\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} + \frac{1-\kappa}{4^\beta} \ln \frac{2-\kappa}{\kappa} \right\} + \\ & + \frac{\beta}{a^\beta \rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta+1)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \frac{\frac{m}{\beta} + 1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left(1 - E_i^{\frac{m}{\beta} + 1} \right) \ln (1 - E_i^2) + \left[(1-\kappa)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln \kappa (2-\kappa) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} - (1-\kappa)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}} \right\} + \\ & + \frac{2\beta}{\rho_{t0}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta} - 1} \left\{ \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\beta}{m} \right) \left[\sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p \left(\arctg \frac{1-\kappa - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} - \arctg \frac{E_i - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p}{2} \ln \frac{1}{\sin \theta_p} \right] + (1 - \cos \theta_p) \left[\frac{\ln L_p}{2} + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\arctg \frac{E_i}{y^\beta} - \arctg \frac{1-\kappa - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (IV.44)$$

4.2.2.b- Para $\frac{1}{\beta} =$ número impar inteiro

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^1 E dz = & \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \frac{y^\beta [4^\beta - (1-\kappa)]}{4^\beta (y^\beta - E_i)} + \frac{1-\kappa}{4^\beta} (1 - \ln \kappa) + \frac{E_i}{y^\beta} [\ln (1 - E_i) - 1] \right\} + \\ & + \frac{\beta}{a^\beta \rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta+1)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \frac{\frac{m}{\beta} + 1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left(1 - E_i^{\frac{m}{\beta} + 1} \right) \ln (1 - E_i) + \left[(1-\kappa)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln \kappa + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \left\{ \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}-n+1} - (1-\kappa)^{\frac{m}{\beta}-n+1}}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} + \\
 & \frac{2\beta}{\beta_0} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left\{ (1+\cos\theta_i) \left[\frac{1}{2} \ln L_i + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\kappa}{4\beta} + \cos\theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{4\beta} + \cos\theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{m}\right)}{m!} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\frac{\operatorname{sen} \theta_i \cos\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_i}{2} \cdot \ln S_i + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{E_i \operatorname{sen} \theta_i}{1+E_i \cos \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{(1-\kappa) \operatorname{sen} \theta_i}{1+(1-\kappa) \cos \theta_i} \right) \right] \right\} \\
 & \quad \quad \quad \text{(IV.45)}
 \end{aligned}$$

Assim o potencial na amostra para $t \geq t_T$ é dado como segue:

Para $\frac{1}{\beta}$ = número par inteiro. Com o uso das eqs. IV.26 e

IV.44 teremos:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{\beta}{\beta_0} \left\{ \ln \frac{\alpha y^{2\beta} (2-\kappa) [4^{2\beta} - (1-\kappa)^2]}{4^{2\beta} (y^{2\beta} - E_i^2) (1-E_a^2)} + \frac{E_i}{y\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} + \frac{1-\kappa}{4\beta} \ln \frac{2-\kappa}{\alpha} \right\} + \\
 & + \frac{\beta}{\alpha\beta_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(\beta+1)}{\binom{\beta}{m}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^m}{\frac{m}{\beta}+1} \left\{ \left(1-E_i^{\frac{m}{\beta}+1}\right) \ln(1-E_i^2) + \left[(1-\kappa)^{\frac{m}{\beta}+1} - 1\right] \ln \kappa (2-\kappa) + \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}-(2n-1)} - (1-\kappa)^{\frac{m}{\beta}-(2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} + \\
 & + \frac{\beta}{\beta_0} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ \cos 2\theta_p \ln J_a + 2 \operatorname{sen} 2\theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{E_a - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{1-\kappa - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) + \right. \\
 & + \frac{2}{\alpha\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{1-\kappa - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{E_i - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) + \frac{\operatorname{sen} \theta_p \cos\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_p}{2} \ln S_p \right] + \\
 & \left. + 2(1-\cos \theta_p) \left[\frac{\ln L_p}{2} + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{4\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\kappa}{4\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) \right] \right\} \quad \text{(IV.46)}
 \end{aligned}$$

ONDE: $a = e^{-\frac{\beta_0 t}{\beta}}$; $b = 1-a$; $\theta_p = 2k\beta\pi$; $u = a + b(1-\kappa)^{1/\beta}$; $y = a + bE_i^{1/\beta}$;

$$J_a = \frac{2 + \kappa(\kappa-2) - 2(1-\kappa)\cos\theta_p}{1 - E_a \cos\theta_p}; \quad E_a = \frac{1-\kappa}{\left\{ (1-\kappa)^{1/\beta} + [1 - (1-\kappa)^{1/\beta}] a \right\}^\beta};$$

$$S_p = \frac{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2}{2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2} ; \quad L_p = \frac{1 - \frac{2E_i \cos \theta_p}{y^p} + \frac{E_i^2}{y^{2p}}}{1 - \frac{2(1-x) \cos \theta_p}{4^p} + \frac{(1-x)^2}{4^{2p}}}$$

O valor de E_i é dado pondo-se $x=1$ na eq.IV.22 e derivando-se em relação a t . O resultado é a seguinte eq. diferencial:

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{\frac{a \rho_{t0} E_i}{y^{\beta+1}} \left(\frac{1}{E_i} - 1 \right) \left[\frac{y^{\beta}}{y^{2\beta} - E_i^2} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \frac{y^{\beta} - E_i \cos \theta_p}{y^{2\beta} - 2E_i y^{\beta} \cos \theta_p + E_i^2} \right]}{\frac{a}{y(y^{2\beta} - E_i^2)} - \frac{1}{4E_i^2} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{a}{y^{\beta+1}} \left(\frac{y^{\beta} - E_i \cos \theta_p}{y^{2\beta} - 2E_i y^{\beta} \cos \theta_p + E_i^2} \right) + \frac{E_i \cos \theta_p}{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2} \right]} \quad (IV.47)$$

Utilizando as eqs.IV.28 e IV.45 teremos, para $\frac{1}{\beta} =$ número ímpar inteiro, que:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \frac{\alpha y^{\beta} [4^{\beta} - (1-x)]}{4^{\beta} (y^{\beta} - E_i)(1 - E_a)} + \frac{(1-x)}{4^{\beta}} (1 - \ln x) + \frac{E_i}{y^{\beta}} [\ln(1 - E_i) - 1] \right\} + \\ & + \frac{\beta}{\rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \left(1 - E_i^{\frac{m}{\beta}+1} \right) \ln(1 - E_i) + \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta}+1} - 1 \right] \ln x + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}-n+1} - (1-x)^{\frac{m}{\beta}-n+1}}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} + \\ & + \frac{\beta}{\rho_{t0}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left\{ \cos 2\theta_i \ln V_a + 2 \sin 2\theta_i \left(\arctg \frac{1-x+\cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \arctg \frac{E_a+\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1+\cos \theta_i) \left[\frac{\ln L_i}{2} + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\arctg \frac{1-x}{4^{\beta}} + \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \arctg \frac{E_i}{y^{\beta}} + \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta}{m}}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\frac{\sin \theta_i \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{2} \cdot \ln S_i + \sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \left(\arctg \frac{E_i \sin \theta_i}{1+E_i \cos \theta_i} - \arctg \frac{(1-x) \sin \theta_i}{1+(1-x) \cos \theta_i} \right) \right] \right\} \quad (IV.48) \end{aligned}$$

ONDE : $a = e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}}$; $b = 1-a$; $\theta_i = (2k+1)\beta\pi$; $u = a + b(1-x)^{1/\beta}$; $y = a + bE_i^{1/\beta}$

$$E_a = \frac{1-\alpha}{\left\{ (1-\alpha)^{1/\beta} + \left[1 - (1-\alpha)^{1/\beta} \right] a \right\}^\beta} ; V_a = \frac{2 + \alpha(x-2) + 2(1-\alpha)\cos\theta_i}{1 + 2E_a\cos\theta_i + E_a^2}$$

$$S_i = \frac{1 + 2E_i\cos\theta_i + E_i^2}{2(1-\alpha)(1 + \cos\theta_i) + \alpha^2} ; L_i = \frac{1 + 2\frac{E_i}{y^\beta}\cos\theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{1 + \frac{2(1-\alpha)\cos\theta_i}{4\beta} + \frac{(1-\alpha)^2}{4^{2\beta}}}$$

Com o valor de E_i calculado pela seguinte eq. diferencial obtida fazendo-se $x=1$ na eq.23 e derivando com respeito a t .

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{\frac{a\rho_0 E_i}{y^{\beta+1}} \left(E_i^{1/\beta} - 1 \right) \left[\frac{1}{y^\beta - E_i} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \frac{y^\beta + E_i\cos\theta_i}{y^{2\beta} + 2E_i y^\beta \cos\theta_i + E_i^2} \right]}{\frac{a}{y^{\beta+1} (y^\beta - E_i)} - \frac{1}{1-E_i} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \left[\frac{a}{y^{\beta+1}} \left(\frac{y^\beta + E_i\cos\theta_i}{y^{2\beta} + 2E_i y^\beta \cos\theta_i + E_i^2} \right) - \frac{1 + E_i\cos\theta_i}{1 + 2E_i\cos\theta_i + E_i^2} \right]}$$

(IV.49)

CAPÍTULO V

Neste capítulo serão desenvolvidos os cálculos do comportamento assintótico do potencial para um valor qualquer de β . Para isso tomaremos $\alpha=1$.

Embora estejamos interessados na obtenção da solução geral do problema, é útil mostrar, em 1º lugar, o comportamento assintótico do potencial no caso particular de $\beta=1$. Isso será feito no 1º item do presente capítulo.

5.1- Para $\alpha=1$ o potencial residual é determinado da seguinte maneira:

$$V_R = \int_0^1 E \, d\kappa \quad (V.1)$$

Com uso de I.26 e I.21 temos que:

$$V_R = \int_0^{E_{1r}} \frac{E \, dE}{\rho_{t0}(1-E^{1/\beta})} \quad (V.2)$$

e para $\beta=1$:

$$V_R = \int_0^{E_{1r}} \frac{E \, dE}{\rho_{t0}(1-E)} \quad (V.3)$$

Sendo E_{1r} o valor do campo elétrico, no estado final, em $x=1$, que é calculado pela eq.I.12 com $\rho(x,t)=0$. Dessa maneira:

$$E_{1r} = 1 - e^{-\rho_{t0}} \quad (V.4)$$

A integral V.3 tem como resultado:

$$V_R = - \frac{1}{\rho_{t0}} \left[E + \ln(1-E) \right]_0^{E_{1r}} \quad (V.5)$$

E tendo-se em conta V.4 a eq.V.5 nos dá:

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t0}} \left(e^{-\rho_{t0}} + \rho_{t0} - 1 \right) \quad (V.6)$$

Agora pondo $\alpha=1$ na eq.III.17, teremos o seguinte resultado para o potencial como função do tempo:

$$V(t) = \frac{1}{\rho_{t0}(1-e^{-\rho_{t0}t})} \left(e^{-\rho_{t0}} + \rho_{t0} - 1 \right) \quad (V.7)$$

Lembrando V.6:

$$V(t) = \frac{V_R}{1-e^{-\rho_{t0}t}} \quad (V.8)$$

E para tempos muito grandes teremos, de V.8, que:

$$V(t) \approx V_R (1+e^{-\rho_{t0}t}) \quad (V.9)$$

De maneira que o potencial se aproxima do potencial residual, assintoticamente, com $e^{-\rho_{t0}t}$.

Os dois itens seguintes tratam do caso geral do estudo do comportamento assintótico do potencial.

5.2- O campo elétrico é determinado substituindo-se $\rho_t(x,t)$ de I.

21 na eq.I.25 o que resulta em calcular:

$$\rho_{t0} \int_0^t dt = \int_{E_i}^E \frac{dE(x,t)}{E(x,t)(1-E(x,t)^{1/p})} \quad (V.10)$$

Sendo E_1 o mesmo parâmetro dos casos anteriores. O resultado de V.1 é:

$$E(E_1, t) = \frac{E_1}{\left[e^{-\frac{t}{\rho}} + (1 - e^{-\frac{t}{\rho}}) E_1^{1/\rho} \right]^\rho} \quad (V.11)$$

Pondo $v = e^{-\rho t}$ a eq. V.11 torna-se:

$$E(E_1, v) = \frac{E_1}{\left[v^{1/\rho} + (1 - v^{1/\rho}) E_1^{1/\rho} \right]^\rho} \quad (V.12)$$

E da expressão (V.12) tiramos o valor $E_1(E, v)$, que é o seguinte:

$$E_1(E, v) = \frac{v E}{\left[1 - (1 - v^{1/\rho}) E^{1/\rho} \right]^\rho} \quad (V.13)$$

Usando, agora, $\rho_t(x, t)$ de I.21 em I.26, temos que:

$$\rho_{t_0} x = \int_{E_1}^E \frac{dE}{1 - E^{1/\rho}} \quad (V.14)$$

E para $x=1$:

$$\int_{E_1}^{E_2} \frac{dE}{1 - E^{1/\rho}} = \rho_{t_0} \quad (V.15)$$

Onde E_1 corresponde ao campo elétrico em $x=1$:

Seja :

$$\int \frac{dE}{1 - E^{1/\rho}} = F(E) \quad (V.16)$$

Então de V.15 teremos que:

$$F(E_2) - F(E_1) = \rho_{t_0} \quad (V.17)$$

Se substituirmos $E_i(E, v)$ da expressão V.13 na eq. V.17, achamos o campo elétrico em $x=1$, para todo t . Assim:

$$F(E_1) - F[E_i(E_1, \varphi)] = \rho_{t0} \quad (V.18)$$

Para $v = 0$, $E_i = 0$ e $E_1 = E_{1r}$, sendo E_{1r} o campo elétrico residual em $x=1$, teremos de V.18 que:

$$F(E_{1r}) - F(0) = \rho_{t0} \quad (V.19)$$

Para um v pequeno teremos que o campo E_1 será o campo residual E_{1r} mais um acréscimo ΔE_1 , isto é:

$$E_1 = E_{1r} + \Delta E_1 \quad (V.20)$$

Levando (V.20) em V.18 teremos:

$$F(E_{1r} + \Delta E_1) - F[E_i(E_{1r} + \Delta E_1, \varphi)] = \rho_{t0} \quad (V.21)$$

Donde

$$F(E_{1r}) + \left. \frac{dF}{dE_1} \right|_{E_{1r}} \Delta E_1 - \left. \frac{dF}{dE_i} \right|_{E_i=0} \left\{ \left. \frac{\partial E_i}{\partial E_1} \right|_{E_{1r}} \Delta E_1 + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi \right\} - F(0) = \rho_{t0} \quad (V.22)$$

Com o uso de V.19, V.22 dá:

$$\left. \frac{dF}{dE_1} \right|_{E_{1r}} \Delta E_1 - \left. \frac{dF}{dE_i} \right|_{E_i=0} \left\{ \left. \frac{\partial E_i}{\partial E_1} \right|_{E_{1r}} \Delta E_1 + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi \right\} = 0 \quad (V.23)$$

De V.16 temos que:

$$\left. \frac{dF}{dE_i} \right|_{E_{ir}} = \frac{1}{1 - E_{ir}^{1/\beta}} \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF}{dE_i} \right|_{E_i=0} = 1 \quad (V.24)$$

De V.13 teremos:

$$\left. \frac{\partial E_i}{\partial E_j} \right|_{\substack{\omega=0 \\ E_j=E_{ir}}} = \frac{[1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^\beta \omega - \omega [1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^{\beta-1} \frac{\beta}{\beta} (\omega^{1/\beta} - 1) \frac{E_{ir}^{1/\beta}}{E_{ir}} \times E_{ir}}{[1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^{2\beta}} = 0 \quad (V.25)$$

$$\left. \frac{\partial E_i}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=0 \\ E_j=E_{ir}}} = \frac{[1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^\beta - E_{ir} \frac{d}{d\omega} [1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^\beta}{[1 - (1 - \omega^{1/\beta}) E_{ir}^{1/\beta}]^{2\beta}} = \frac{E_{ir}}{[1 - E_{ir}^{1/\beta}]^\beta} \quad (V.26)$$

Levando V.24, V.25 e V.26 em V.23, teremos que:

$$\frac{1}{1 - E_{ir}^{1/\beta}} \Delta E_j - \frac{\omega E_{ir}}{(1 - E_{ir}^{1/\beta})^\beta} = 0$$

Donde:

$$\Delta E_j = \frac{\omega E_{ir} (1 - E_{ir}^{1/\beta})}{(1 - E_{ir}^{1/\beta})^\beta} \quad (V.27)$$

5.3- O comportamento assintótico do potencial. Com o uso de (V.14) e V.16 podemos escrever que:

$$\rho_{t_0} x = \int_{E_i}^E \frac{dE}{1 - E^{1/\beta}} = F(E) - F(E_i) \quad (V.28)$$

Derivando V.28 com respeito a E_i , mantendo t constante, tem que:

$$\rho_{t_0} \frac{\partial x}{\partial E_i} = \frac{dF(E)}{dE} \frac{\partial E}{\partial E_i} - \frac{dF(E_i)}{dE_i} \quad (V.29)$$

Com $\alpha=1$ e para $t > t_r$ o potencial é dado por:

$$V(t) = \int_0^{E_i(1,t)} E(\epsilon_i, t) \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i \quad (V.30)$$

Onde utilizamos, novamente, o artifício da troca da variável de integração x por E_i . O limite superior da integral (V.30) corresponde a posição $x=1$, trazendo V.29 em V.30, teremos que:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_i(1,t)} E \left\{ \frac{dF(E)}{dE} \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} - \frac{dF(\epsilon_i)}{d\epsilon_i} \right\} d\epsilon_i \\ \therefore V(t) &= \frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_1} E dF(E) - \frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_i(1,t)} E \frac{dF(\epsilon_i)}{d\epsilon_i} d\epsilon_i \end{aligned} \quad (V.31)$$

O cálculo da 1ª integral é feito com o conhecimento de que:

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_{1r}} E dF(E) \quad E \quad E_1 = E_{1r} + \Delta E_1 \quad (V.32)$$

Desse modo:

$$\frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_1} E dF(E) = \frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_{1r} + \Delta E_1} E dF(E) = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left[\int_0^{E_{1r}} E dF(E) + E_{1r} \frac{dF(E)}{dE} \Big|_{E_{1r}} \Delta E_1 \right]$$

Utilizando a 1ª das eqs. V.32, ficamos com:

$$\frac{1}{\rho_{t_0}} \int_0^{E_1} E dF(E) = V_R + \frac{1}{\rho_{t_0}} E_{1r} \frac{dF(E)}{dE} \Big|_{E_{1r}} \Delta E_1 \quad (V.33)$$

Usando a eq. V.16 teremos que:

$$\frac{dF(E)}{dE} \Big|_{E_{1r}} = \frac{1}{1 - E_{1r}^{1/\beta}} \quad (V.34)$$

Com os valores V.27 e V.34 temos para o 2º termo de V.33:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\rho_{t0}} E_{1r} \frac{dF(E)}{dE} \right|_{E_{1r}} &= \frac{1}{\rho_{t0}} \frac{E_{1r}}{1 - E_{1r}^{1/\beta}} \cdot \frac{\omega E_{1r} (1 - E_{1r}^{1/\beta})}{(1 - E_{1r}^{1/\beta})^\beta} \\ \therefore \left. \frac{1}{\rho_{t0}} E_{1r} \frac{dF(E)}{dE} \right|_{E_{1r}} &= \frac{1}{\rho_{t0}} \frac{\omega E_{1r}^2}{(1 - E_{1r}^{1/\beta})^\beta} \end{aligned} \quad (V.35)$$

O cálculo da 2ª integral de V.31 é realizado com o uso de (V.12) e a eq.V.16 derivada em relação a E_i , com isso podemos escrever que:

$$\frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{E_i(1,t)} E \frac{dF}{dE_i} dE_i = \frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{E_i} \frac{E_i}{[\omega^{1/\beta} + (1-\omega)^{1/\beta} E_i^{1/\beta}]^\beta} \cdot \frac{dE_i}{(1 - E_i^{1/\beta})} \quad (V.36)$$

$E_i(1,t)$, o campo elétrico inicial da linha de fluxo que no tempo t está em $x=1$, pode ser obtido, para tempos grandes, (v pequeno) com o seguinte artifício. De V.12 $E(E_i, v)$ é dado por:

$$E = \frac{E_i}{[\omega^{1/\beta} + (1-\omega)^{1/\beta} E_i^{1/\beta}]^\beta} \approx \frac{E_i}{(\omega^{1/\beta} + E_i^{1/\beta})^\beta} \quad (V.37)$$

Para $v \rightarrow 0$, E deve ser E_{1r} ; mas o denominador de V.37 se anula. O infinito só pode ser evitado se pusermos $E_i = Av$. Levando este valor de E_i na eq.V.37 teremos:

$$E_{1r} = \frac{A \omega}{\omega(1 + A^{1/\beta})^\beta} = \frac{A}{(1 + A^{1/\beta})^\beta} \quad (V.38)$$

A pode ser tirado da eq.V.38 o que dá:

$$A = \frac{E_{1r}}{(1 - E_{1r}^{1/\beta})^\beta} \quad (V.39)$$

Lembrando a eq.V.37 e que para $v \approx 0$ e $E_i \approx 0$, resultam-

do $1 - E_i^{1/\beta} \approx 1$, podemos reescrever a eq.V.36, com $E_i(1,t) = Av$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{E_i(1,t)} E \frac{dF}{dE_i} dE_i &= \frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{Av} \frac{E_i dE_i}{(\omega^{1/\beta} + E_i^{1/\beta})^\beta} = \\ &= \frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{Av} \frac{E_i dE_i}{\omega \left[1 + \left(\frac{E_i}{\omega} \right)^{1/\beta} \right]^\beta} = \\ &= \frac{\omega}{\rho_{t0}} \int_0^{Av} \frac{\frac{E_i}{\omega} \frac{dE_i}{\omega}}{\left[1 + \left(\frac{E_i}{\omega} \right)^{1/\beta} \right]^\beta} \end{aligned} \quad (V.40)$$

Pondo, em V.40, $\frac{E_i}{\omega} = y$, ter-se-á no limite superior da integral $y=A$. Assim:

$$\frac{1}{\rho_{t0}} \int_0^{E_i(1,t)} E \frac{dF}{dE_i} dE_i = \frac{\omega}{\rho_{t0}} \int_0^A \frac{y dy}{(1+y^{1/\beta})^\beta} \quad (V.41)$$

Portanto, com V.33, V.35 e V.41 em V.31, o comportamento assintótico de V é:

$$V = V_R + \frac{\omega}{\rho_{t0}} \left[\frac{E_{ir}^2}{(1 - E_{ir}^{1/\beta})^\beta} - \int_0^A \frac{y dy}{(1+y^{1/\beta})^\beta} \right] \quad (V.42)$$

sendo $A = \frac{E_{ir}}{(1 - E_{ir}^{1/\beta})^\beta}$; $\omega = e^{-\rho_{t0} t}$

Naturalmente que se espera que o termo entre colchetes seja > 0 . Conclusão: Para qualquer valor de β , o comportamento assintótico é $e^{-\rho_{tot} t}$.

5.4- Neste item nos utilizaremos do resultado obtido no item anterior para determinar o comportamento assintótico do potencial para $\beta = 1$ e em seguida comparar com o valor calculado no 1º item.

Escrevendo a eq.V.42 com $\beta=1$

$$V(t) = V_R + \frac{\omega}{\rho_{t_0}} \left[\frac{E_{ir}^2}{1-E_{ir}} - \int_0^A \frac{y dy}{1+y} \right]$$

onde $A = \frac{E_{ir}}{1-E_{ir}}$; $\omega = e^{-\rho_{t_0} t}$; $E_{ir} = 1 - e^{-\rho_{t_0} t}$. Assim

$$\begin{aligned} V(t) &= V_R + \frac{e^{-\rho_{t_0} t}}{\rho_{t_0}} \left[\frac{E_{ir}^2}{(1-E_{ir})} - y \Big|_0^A + \ln(1-y) \Big|_0^A \right] = \\ &= V_R + \frac{e^{-\rho_{t_0} t}}{\rho_{t_0}} \left[\frac{E_{ir}^2}{1-E_{ir}} - \frac{E_{ir}}{1-E_{ir}} + \ln\left(1 - \frac{E_{ir}}{1-E_{ir}}\right) \right] = \\ &= V_R + \frac{e^{-\rho_{t_0} t}}{\rho_{t_0}} \left[-\frac{E_{ir}(1-E_{ir})}{1-E_{ir}} + \ln\left(\frac{1}{1-E_{ir}}\right) \right] = \\ &= V_R + \frac{e^{-\rho_{t_0} t}}{\rho_{t_0}} \left[-E_{ir} + \ln\left(\frac{1}{1-1+e^{-\rho_{t_0} t}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore V(t) = V_R + \frac{e^{-\rho_{t_0} t}}{\rho_{t_0}} \left(-1 + e^{-\rho_{t_0} t} + \rho_{t_0} \right) \quad (V.43)$$

Como sabemos, de V.6, que:

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left(e^{-\rho_{t_0} t} + \rho_{t_0} - 1 \right)$$

A eq. V.43 fica:

$$V(t) = V_R \left(1 + e^{-\rho_{t_0} t} \right) \quad (V.44)$$

Como vemos a eq.V.44 é a mesma obtida no 1º item, ou seja, a eq.V.9.

Notemos aqui que, para $\beta=1$, a expressão entre colchetes, dividida por ρ_{t_0} , da eq.V.42, resultou ser o potencial residual . Isso só se verifica se $\beta=1$. Para qualquer outro valor de β aquela expressão, dividida por ρ_{t_0} , é diferente de V_R , porque os denominadores do 2º termo de V.42 estão elevados a β o que, não ocorre

com o denominador de V.2. No caso $\beta=1$ esse fato não tem relevância.

As Figs. apresentadas nos capítulos II e III comprovam ser muito boa a aproximação feita neste capítulo.

Finalmente uma observação que nos parece importante fazer é que a Eq.V.42 se restringe a valores não muito grandes de ρ_{t_0} , pois para grandes valores desse parâmetro o potencial residual é atingido no tempo de trânsito, no qual a Eq.V.42 não é válida.

CAPÍTULO VI

Neste capítulo faremos uma análise dos casos limites de β, τ e ρ_{t_0} para o problema do potencial como função do tempo. O caso de ρ_{t_0} finito com $\beta \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow 0$ não será discutido em virtude de nossas equações não serem adequadas para isto. Consideraremos, como vem sendo feito, a presença de cargas no eletrodo injetor, isto é, o valor de α menor que a unidade. Dividiremos o presente capítulo em 2 itens discutindo no 1º o caso em que ρ_{t_0} é finito e no 2º o caso em que τ seja finito.

6.1- Para ρ_{t_0} finito teremos que se $\beta (= \rho_{t_0} \tau) \rightarrow \infty$, então $\tau \rightarrow \infty$. Como consideramos $\alpha < 1$ o potencial, no tempo de trânsito, é dado pela soma das diferenças de potencial das três regiões já citadas nos capítulos anteriores, ou seja:

$$v(t) = \int_0^1 E dx = \int_0^{x_a} E dx + \int_{x_a}^{x_f} E dx + \int_{x_f}^1 E dx \quad (VI.1)$$

Na região onde o pulso já passou, correspondente a 1ª integral, não há cargas livres e nem cargas presas, uma vez que $\tau \rightarrow \infty$. Podemos, então, determinar E utilizando a Eq.I.25, com $\rho_t(x,t)=0$. Com isso teremos que:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \therefore \quad E = cE = 1 - \alpha, \quad (VI.2)$$

campo esse devido só as cargas retidas na superfície injetora.

A posição x da última frente de cargas (x_a) é calculada com o uso de I.24. Tendo-se em conta VI.2, o valor de x_a é o se-

guinte:

$$\chi_e = (1-\alpha) t \quad (\text{VI } 3)$$

Com as eqs. VI.2 e VI.3 calculamos a 1ª integral de VI.1, cujo resultado é:

$$\int_0^{\chi_e} E d\chi = \int_0^{(1-\alpha)t} (1-\alpha) d\chi = (1-\alpha)^2 t \quad (\text{VI } 4)$$

Para a região no interior do pulso, correspondente a 2ª integral, o valor de E é dado pela eq. IV.2, ou seja,

$$E = \frac{E_i}{\left[E_i^{1/\beta} + (1-E_i^{1/\beta}) e^{-\rho_0 t / \beta} \right]^\beta} \quad (\text{IV } 2)$$

Com $\beta \rightarrow \infty$ o valor de E será dado pela eq. obtida com o seguinte desenvolvimento.

Reescrevendo IV.2 na forma:

$$E^{1/\beta} = \frac{E_i^{1/\beta}}{E_i^{1/\beta} + (1-E_i^{1/\beta}) e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}}} ,$$

e pondo :

$$E^{1/\beta} = e^{\frac{1}{\beta} \cdot \ln E}$$

$$E_i^{1/\beta} = e^{\frac{1}{\beta} \cdot \ln E_i}$$

a eq. acima fica:

$$e^{\frac{1}{\beta} \ln E} = \frac{e^{\frac{1}{\beta} \ln E_i}}{e^{\frac{1}{\beta} \ln E_i} + (1 - e^{\frac{1}{\beta} \ln E_i}) e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}}} \quad (\text{VI } 5)$$

Mas (com aproximações até 1ª ordem)

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{\beta} \ln E} &= 1 + \frac{1}{\beta} \ln E \\
 e^{\frac{1}{\beta} \ln E_i} &= 1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i \\
 e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}} &= 1 - \frac{1}{\beta} \rho_0 t
 \end{aligned}
 \tag{VI.6}$$

Levando os valores VI.6 na eq.VI.5 temos:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{\beta} \ln E &= \frac{1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i}{1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i + (1 - 1 - \frac{1}{\beta} \ln E_i)(1 - \frac{1}{\beta} \rho_0 t)} \\
 \therefore 1 + \frac{1}{\beta} \ln E &= \frac{1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i}{1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i - \frac{1}{\beta} \ln E_i + \frac{1}{\beta^2} \rho_0 t \ln E_i}
 \end{aligned}$$

Desprezando o termo envolvendo $1/\beta^2$, teremos:

$$1 + \frac{1}{\beta} \ln E = 1 + \frac{1}{\beta} \ln E_i$$

daí que:

$$E = E_i \tag{VI.7}$$

A posição x das frentes de cargas, nessa região, é calculada por I.24 com o uso de VI.7. Assim:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x dz &= \int_0^t E_i dt \\
 \therefore x &= E_i t
 \end{aligned}
 \tag{VI.8}$$

Derivando VI.8 em relação a E_i , mantendo t constante, te

mos que:

$$\frac{\partial x}{\partial E_i} = t \quad (\text{VI.9})$$

Usando o artifício da troca da variável de integração x por E_i podemos escrever a 2ª integral de VI.1 da seguinte maneira:

$$\int_{x_a}^{x_f} E \, dx = \int_{1-\alpha}^1 E \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \int_{1-\alpha}^1 E_i t \, dE_i \quad (\text{VI.10})$$

Onde os limites $(1-\alpha)$ e 1 correspondem a variação de E_i no pulso. O resultado de (VI.10) é:

$$\int_{x_a}^{x_f} E \, dx = \frac{t}{2} \left[1 - (1-\alpha)^2 \right] = \frac{t}{2} (2\alpha - \alpha^2) \quad (\text{VI.11})$$

Como antes:

$$\int_{x_f}^1 E \, dx = 1 - t \quad (\text{VI.12})$$

Levando os valores VI.4, VI.11 e VI.12 em VI.1, teremos que:

$$V(t) = 1 - \alpha t \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{VI.13})$$

Como nos capítulos anteriores o potencial, para $t \geq t_T$, é calculado pela seguinte expressão:

$$V(t) = \int_0^1 E dx = \int_0^{x_0} E dx + \int_{x_0}^1 E dx = \int_0^{x_0} E dx + \int_{1-x}^{E_i} E \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i \quad (\text{VI.14})$$

O valor de E_i no limite superior da 2ª integral em VI.14 é determinado pela VI.8 pondo-se $x=1$, o que dá:

$$E_i = \frac{1}{t} \quad (\text{VI.15})$$

O resultado da 1ª integral em VI.14 é a eq.VI.4. Com o uso de VI.7, VI.9 e VI.15 a 2ª integral de VI.14 tem como resultado:

$$\int_{1-x}^{E_i} E \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} - (1-x)^2 t \right] \quad (\text{VI.16})$$

Com os resultados VI.4 e VI.16a eq.VI.14 dá:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} + (1-x)^2 t \right] \quad (\text{VI.17})$$

6.2- Para τ finito se $\beta(=\rho_{t_0}\tau) \rightarrow \infty$, então $\rho_{t_0} \rightarrow \infty$. Com isso nossa eq.I.15 torna-se a eq. usada por Rudenko⁽¹⁾, em seu modelo e os nossos cálculos, para o potencial como função do tempo, reproduzem os obtidos por ele.

APÊNDICE

A) CÁLCULO DO POTENCIAL RESIDUAL PARA $\beta = 1$. (EQ. III.22)

DA EQ. III.17, TEMOS

$$V(t) = \frac{1}{\rho_{t_0}(1 - e^{-\rho_{t_0}t})} \left\{ \frac{\alpha(\alpha-1)(1 - e^{-\rho_{t_0}t})^2 - e^{-\rho_{t_0}t}}{1 + \alpha(e^{-\rho_{t_0}t} - 1)} + \rho_{t_0} - \rho_{t_0}t e^{-\rho_{t_0}t} + \frac{1}{e^{\rho_{t_0}}} - e^{-\rho_{t_0}t} \ln[1 + \alpha(e^{-\rho_{t_0}t} - 1)] \right\} \quad (A.1)$$

A.a) CÁLCULO DE $\alpha(\alpha-1)(1 - e^{-\rho_{t_0}t})^2 - e^{-\rho_{t_0}t}$

COM USO DE III.20, TEMOS QUE

$$1 - e^{-\rho_{t_0}t} = 1 - \frac{1-\alpha}{e^{\rho_{t_0}} - \alpha} = \frac{e^{\rho_{t_0}} - 1}{e^{\rho_{t_0}} - \alpha} \quad (A.2)$$

Assim

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)(1 - e^{-\rho_{t_0}t})^2 - e^{-\rho_{t_0}t} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(e^{\rho_{t_0}} - 1)^2}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2} - \frac{1-\alpha}{e^{\rho_{t_0}} - \alpha} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(e^{\rho_{t_0}} - 1)^2 + (\alpha-1)(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2} = \\ &= \frac{(\alpha-1)[\alpha(e^{\rho_{t_0}} - 1)^2 + e^{\rho_{t_0}} - \alpha]}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2} = \\ &= \frac{(\alpha-1)[\alpha e^{2\rho_{t_0}} - 2\alpha e^{\rho_{t_0}} + e^{\rho_{t_0}}]}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2} \quad (A.3) \end{aligned}$$

A.b) CÁLCULO DE $(1 - e^{-\rho_{t_0} t}) \left[1 + \alpha \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right]$

AINDA COM O USO DE III.20 E TENDO-SE EM CONTA A.2, TEMOS QUE

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\rho_{t_0} t}) \left[1 + \alpha \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right] &= \frac{e^{\rho_{t_0}} - 1}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)} \left[1 - \frac{\alpha(e^{\rho_{t_0}} - 1)}{e^{\rho_{t_0}} - \alpha} \right] = \\ &= \frac{(e^{\rho_{t_0}} - 1) e^{\rho_{t_0}} (1 - \alpha)}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2} \quad (A.4) \end{aligned}$$

A.c) LEMBRANDO A EQ. III.19

$$-e^{-\rho_{t_0} t} + \rho_{t_0} = -e^{-\rho_{t_0} t} \rho_{t_0} + \ln \left[1 + \alpha \left(e^{-\rho_{t_0} t} - 1 \right) \right] x e^{-\rho_{t_0} t} \quad (\text{EQ. III.19})$$

E COM O USO DE A.2, A.3 E A.4, A EQ. A.1 FICA

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left\{ \frac{(\alpha - 1) [x e^{2\rho_{t_0}} - 2x e^{\rho_{t_0}} + e^{\rho_{t_0}}] (e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2}{(e^{\rho_{t_0}} - \alpha)^2 (1 - e^{\rho_{t_0}}) e^{\rho_{t_0}} (\alpha - 1)} + \rho_{t_0} + \frac{e^{\rho_{t_0}} - \alpha}{e^{\rho_{t_0}} (e^{\rho_{t_0}} - 1)} \right\}$$

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left\{ \frac{x e^{2\rho_{t_0}} - 2x e^{\rho_{t_0}} + e^{\rho_{t_0}}}{e^{\rho_{t_0}} (1 - e^{\rho_{t_0}})} - \frac{e^{\rho_{t_0}} - \alpha}{e^{\rho_{t_0}} (1 - e^{\rho_{t_0}})} + \rho_{t_0} \right\}$$

$$V_D = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left[\frac{x e^{2\rho_{t_0}} - 2x e^{\rho_{t_0}} + \alpha}{e^{\rho_{t_0}} (1 - e^{\rho_{t_0}})} + \rho_{t_0} \right]$$

$$V_R = \frac{1}{\rho_{t_0}} \left[\frac{-\alpha (1 - e^{\rho_{t_0}}) e^{\rho_{t_0}} + \alpha (1 - e^{\rho_{t_0}})}{e^{\rho_{t_0}} (1 - e^{\rho_{t_0}})} + \rho_{t_0} \right]$$

$$V_R = \frac{1}{\beta_{t0}} \left[\beta_{t0} + \kappa (e^{\beta_{t0}} - 1) \right] \quad (\text{EQ. III.22})$$

B) CÁLCULO DE IV.7

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\beta_{t0}(1-E^{1/\beta})} = \frac{\beta}{\beta_{t0}} \int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{u^{2\beta-1}}{1-u} du \quad (\text{IV.7})$$

ONDE $\begin{cases} E = u^\beta \\ dE = \beta u^{\beta-1} du \end{cases}$

POUNDO $z = 1-u \quad \therefore du = -dz$

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\beta_{t0}(1-E^{1/\beta})} = -\frac{\beta}{\beta_{t0}} \int_{z_i}^z \frac{(1-z)^{2\beta-1}}{z} dz = -\frac{\beta}{\beta_{t0}} \int_{z_i}^z \frac{(1-z)^m}{z} dz$$

SENDO $m = 2\beta - 1$

$$\int_{1-\alpha}^{E_a} \frac{E dE}{\beta_{t0}(1-E^{1/\beta})} = -\frac{\beta}{\beta_{t0}} \int_{z_i}^z \left[\frac{1}{z} - m + \frac{m(m-1)}{2!} z + \dots + (-1)^m z^{m-1} \right] dz =$$

$$= -\frac{\beta}{\beta_{t0}} \left\{ \ln z \Big|_{z_i}^z - m z \Big|_{z_i}^z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 \Big|_{z_i}^z + \dots + (-1)^m \frac{z^m}{m} \Big|_{z_i}^z \right\} =$$

$$= \frac{\beta}{\beta_{t0}} \left\{ \ln \frac{z_i}{z} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{m}{k} (z^k - z_i^k) \right\}$$

PARA $E_i = 1-\alpha \Rightarrow z_i = 1-(1-\alpha)^{1/\beta}$

$E = E_a \Rightarrow z = 1-E_a^{1/\beta}$

$$\int_{1-x}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_0 (1-E^{1/\beta})} = \frac{\beta}{\rho_0} \left\{ \ln \frac{1-(1-x)^{1/\beta}}{1-E_a^{1/\beta}} + \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{M}{k} \left[(1-E^{1/\beta})^k - (1-(1-x)^{1/\beta})^k \right] \right\}$$

QUE É A EQ. IV.9, ONDE E_a É DADO POR IV.8

C) SOLUÇÃO DE IV.11

$$\int_{u_i=(1-x)^{1/\beta}}^{u_i=1} E(u_i, t) \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i \quad (IV.11)$$

ONDE $u_i = E_i^{1/\beta}$

LEMBRANDO IV.2, EM TERMOS DE u_i , E IV.12

$$E(u_i, t) = \frac{\beta}{u_i} \frac{1}{\left[u_i + (1-u_i) e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}} \right]^\beta} \quad (IV.2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\beta}{\rho_0} \left[\frac{b}{y} + \sum_{n=1}^{\beta-1} \left(u_i^{n-1} - \frac{a u_i^{n-1}}{y^{n+1}} \right) \right] \quad (IV.12)$$

ONDE $y = a + b u_i$, $a = e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}}$ E $b = 1-a$. ASSIM

$$\int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 E \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i = \frac{\beta}{\rho_0} \left[\int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{b u_i}{(a + b u_i)^{\beta+1}} du_i + \sum_{n=1}^{\beta-1} \left(\int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 u_i^{n-1} \frac{du_i}{y^\beta} - a \int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{u_i^{n-1}}{y^{\beta+n+1}} du_i \right) \right]$$

C.a) CHAMANDO DE I_1 A 1ª INTEGRAL

$$\int \frac{b u_i^\beta}{(a + b u_i)^{\beta+1}} du_i = I_1 = -b \left[\frac{u_i^\beta}{\beta y^\beta} - \frac{u_i^{\beta-1}}{b(\beta-1)y^{\beta-1}} - \frac{1}{\beta} \frac{u_i^{\beta-2}}{(\beta-2)y^{\beta-2}} + \dots + \frac{1}{b^{\beta-1}} \int \frac{du_i}{y} \right]$$

INTEGRAL 2.III.3 - PAG. 58 - GRADSHTEYN (REF. [23])

$$I_1 = - \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{u_i^{\beta-m}}{b^m (\beta-m) y^{\beta-m}} \bigg|_{(1-x)^{1/\beta}}^1 + \frac{1}{b^\beta} \ln y \bigg|_{(1-x)^{1/\beta}}^1$$

C.b) CHAMANDO DE I_2 A 2.^a INTEGRAL

$$I_2 = \sum_{m=1}^{\beta-1} \int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{u_i^{m+\beta-1}}{y^\beta} du_i$$

$$I_2 = \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{y^{\beta-1}} \left[\frac{u_i^N}{(N+1-\beta)b} - \frac{a N u_i^{N-1}}{(N+1-\beta)(N-\beta)b^2} - \frac{a^2 N(N-1) u_i^{N-2}}{(N+1-\beta)(N-\beta)(N-1-\beta)b^3} \right] - \frac{a^3 N(N-1)(N-2)}{(N+1-\beta)(N-\beta)(N-1-\beta)b^3} \int \frac{u_i^{N-3}}{y^\beta} du_i - \dots \right\}$$

ONDE $N = m + \beta - 1$. INTEGRAL 2.III.2 - PAG. 58 - GRADSHTEYN (REF [2])

$$I_2 = \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{y^{\beta-1}} \left[\frac{u_i^{m+\beta-1}}{mb} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{\binom{m+\beta-1}{k}}{\binom{m-1}{k}} u_i^{m+\beta-1-k} \right] \right\} +$$

$$+ (-1)^{m+1} \binom{m+\beta-1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^m \sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{b^m (\beta-m)} \left(\frac{u_i}{y} \right)^{\beta-m} \Big|_{(1-x)^{1/\beta}}^1 +$$

$$+ (-1)^m \binom{m+\beta-1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^m \frac{\ln y}{b^m} \Big|_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \Big\}$$

C.c) CHAMANDO DE I_3 A 3.^a INTEGRAL

$$I_3 = -a \sum_{m=1}^{\beta-1} \int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{u_i^{\beta+m-1}}{y^{\beta+m+1}} du_i$$

PONDO $u_i = \frac{y-a}{b} \quad \therefore du_i = \frac{dy}{b}$

$$\therefore I_3 = -a \sum_{m=1}^{\beta-1} \int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{(y-a)^{\beta+m-1}}{b^{\beta+m-1} y^{\beta+m+1}} \frac{dy}{b} = -a \sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{b^{\beta+m}} \int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \frac{y^{m+\beta-1} \left(1-\frac{a}{y}\right)^{m+\beta-1}}{y^{m+\beta+1}} dy$$

MAS $\left(1-\frac{a}{y}\right)^{m+\beta-1} = \sum_{k=0}^{m+\beta-1} (-1)^k \binom{m+\beta-1}{k} \left(\frac{a}{y}\right)^k$, ASSIM

$$I_3 = -a \sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{b^{\beta+m}} \sum_{k=0}^{m+\beta-1} (-1)^k \binom{m+\beta-1}{k} \int_{y_1}^1 \left(\frac{a}{y}\right)^k \frac{dy}{y^2}$$

$$\therefore I_3 = a \sum_{m=1}^{\beta-1} \sum_{k=0}^{m+\beta-1} \frac{(-1)^k}{b^{\beta+m}} \frac{\binom{m+\beta-1}{k}}{1+k} \left(\frac{a}{y}\right)^{k+1} \Big|_{y_1}^1$$

PARA $u_i = (1-x)^{1/\beta} \Rightarrow y_1 = a + bu_i = a + b(1-x)^{1/\beta}$
 $u_i = 1 \quad y = 1$

TOMANDO OS LÍMITES EM I_1, I_2 E I_3 E SOMANDO OS VALORES ASSIM OBTIDOS, TEREMOS QUE

$$\int_{(1-x)^{1/\beta}}^1 \epsilon \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i = \frac{\beta}{\beta!} \left\{ \sum_{m=0}^{\beta-1} \frac{1}{b^m (\beta-m)} \left[\frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-m}} - 1 \right] - \frac{1}{b^\beta} \ln[a+b(1-x)^{1/\beta}] \right\} +$$

$$+ \frac{\beta}{\beta!} \sum_{m=1}^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{mb} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{m+\beta-1}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k a^k}{b^{k+1}} \frac{\binom{m+\beta-1}{k}}{\binom{m-1}{k}} \left[1 - \frac{(1-x)^{\frac{\beta+m-1-k}{\beta}}}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{\beta-1}} \right] \right\}$$

$$+ (-1)^{n+1} \binom{m+\beta-1}{n} \left(\frac{a}{y}\right)^n \left[\sum_{m=1}^{\beta-1} \frac{1}{b^m (\beta-m)} \left(1 - \frac{(1-x)^{\frac{\beta-m}{\beta}}}{(a+b(1-x)^{1/\beta})^{\beta-m}} \right) + \frac{1}{b^\beta} \ln(a+b(1-x)^{1/\beta}) \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\beta+n-1} \frac{(-1)^k}{b^{\beta+k}} \frac{\binom{\beta+k-1}{k}}{1+k} a^{k+1} \left[1 - \frac{1}{[a+b(1-x)^{1/\beta}]^{k+1}} \right]$$

QUE É A EQ. IV.13

D) OBTENÇÃO DE IV.26 E IV.28

A EQ. IV.25 É

$$\int_{1-x}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0} (1-E^{1/\beta})} \quad (IV.25)$$

ONDE E_a É DADO POR IV.8

D.a) PARA $\frac{1}{\beta} = n^\circ$ PAR INTEIRO, O VALOR DE IV.25 É

$$\int_{1-x}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0} (1-E^{1/\beta})} = - \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln(1-E^2) \right\}_{1-x}^{E_a} + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos 2\theta_p \ln \left[1 - 2E \cos \theta_p + E^2 \right]_{1-x}^{E_a} -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \sin 2\theta_p \operatorname{arctg} \frac{E - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \Big|_{1-x}^{E_a}$$

$\theta_p = 2\beta k\pi$. INTEGRAL 2.146.3 - Pág. 65 - GRADSHTEYN (REF [2])

PASSANDO OS LIMITES, TEREMOS

$$\int_{1-x}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_{t0} (1-E^{1/\beta})} = \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left\{ \ln \frac{\alpha(2-x)}{1-E_a^2} + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\cos 2\theta_p \ln \left(\frac{2 + \alpha(x-2) - 2(1-x) \cos \theta_p}{1 - 2E_a \cos \theta_p + E_a^2} \right) + \right. \right.$$

$$+ 2 \operatorname{sen} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{E_a - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \kappa - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) \Bigg] \Bigg\} \quad (\text{EQ. IV.26})$$

D.b) PARA $\frac{1}{\beta} = N^{\circ}$ INTEIRO IMPAR, TEMOS

$$\int_{1-\kappa}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_0 (1-E^{1/\beta})} = - \frac{\beta}{\rho_0} \left\{ \ln(1-E) \Bigg|_{1-\kappa}^{E_a} + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left[\cos 2\theta_i \ln(1+2E \cos \theta_i + E^2) \Bigg|_{1-\kappa}^{E_a} + 2 \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{arctg} \frac{E + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \Bigg] \right\}$$

INTEGRAL 2.146.4 - PAG 65 - GRADSHTEYN (REF [23]), ONDE

$$\theta_i = (2k+1)\beta\pi$$

PASSANDO OS LIMITES, FICAMOS

$$\int_{1-\kappa}^{E_a} \frac{E dE}{\rho_0 (1-E^{1/\beta})} = \frac{\beta}{\rho_0} \left\{ \ln \frac{\kappa}{1-E_a} + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left[\cos 2\theta_i \ln \frac{2+\kappa(\kappa-2)+2(1-\kappa)\cos \theta_i}{1+2E_a \cos \theta_i + E_a^2} + 2 \operatorname{sen} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{1-\kappa + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{E_a + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \right) \right] \right\}$$

QUE É A EQ. IV.28

E) SOLUÇÃO DA INTEGRAL IV.30, ISTO É

$$\int_{1-\kappa}^1 E(E_i, t) \frac{\partial \kappa}{\partial E_i} dE_i, \quad (\text{IV.30})$$

COM

$$E(E_i, t) = \frac{E_i}{[E_i^{1/\beta} + (1-E_i^{1/\beta})e^{-\frac{\rho_0 t}{\beta}}]^\beta} \quad (\text{IV.2})$$

$$\beta < 1$$

E.a) Dado $\frac{1}{\beta} = N^{\circ}$ INTEIRO PAR

$$\frac{\partial r}{\partial E_i} = \frac{2\beta}{\rho_{to}} \left\{ \frac{a y^{\beta-1}}{y^{2\beta} - E_i^2} - \frac{1}{1 - E_i^2} + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{E_i \cos \theta_p}{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2} - \frac{1}{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^{\beta}} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} - \frac{a E_i \cos \theta_p}{y^{2\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^{\beta}} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} \right] \right\} \quad (IV.31)$$

ONDE :

$$\theta_p = 2k\beta\pi$$

$$e = e^{-\frac{\rho_{to} t}{\beta}}$$

$$b = 1 - a$$

$$y = a + b E_i^{1/\beta}$$

LEVANDO IV.2 E IV.31 EM IV.30, TEREMOS

$$\int_{1-\kappa}^1 E(E_i, t) \frac{\partial r}{\partial E_i} dE_i = \frac{2\beta}{\rho_{to}} \left\{ a \int_{1-\kappa}^1 \frac{\frac{E_i}{y^{\beta}}}{y^{\beta+1} \left[1 - \left(\frac{E_i}{y^{\beta}} \right)^2 \right]} dE_i - \int_{1-\kappa}^1 \frac{E_i dE_i}{(1 - E_i^2) y^{\beta}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\cos \theta_p \int_{1-\kappa}^1 \frac{E_i^2 dE_i}{y^{\beta} (1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2)} - \int_{1-\kappa}^1 \frac{E_i dE_i}{(1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2) y^{\beta}} + \right. \right. \\ \left. \left. + a \int_{1-\kappa}^1 \frac{\frac{E_i}{y^{\beta}}}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^{\beta}} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} dE_i - \right. \right. \\ \left. \left. - a \cos \theta_p \int_{1-\kappa}^1 \frac{\frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^{\beta}} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} dE_i \right] \right\}$$

CHAMANDO DE V_A, V_B, V_C, V_D, V_E E V_F A $1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a$ E 6^a INTEGRAL, RESPECTIVAMENTE, TEREMOS

E.a.1) CÁLCULO DE V_A

$$V_A = a \int_{1-x}^1 \frac{\frac{E_i}{y^\beta}}{y^{\beta+1} \left[1 - \left(\frac{E_i}{y^\beta} \right)^2 \right]} dE_i$$

POŊO $z = \frac{E_i}{y^\beta} \quad \therefore \quad dz = \frac{y^\beta - \beta E_i y^{\beta-1} \frac{dE_i}{\beta E_i}}{y^{2\beta}} dE_i$

COM O USO DE $b E_i^{1/\beta} = y - a$, TEMOS

$$dz = \frac{a y^{\beta-1}}{y^{2\beta}} dE_i \quad \therefore \quad dE_i = \frac{y^{\beta+1}}{a} dz$$

COM ISSO

$$V_A = \frac{a}{a} \int_{z_1}^{z_2} \frac{y^{\beta+1}}{y^{\beta+1}} \frac{z}{1-z^2} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{1-z^2}$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \ln(1-z^2) \Big|_{z_1}^{z_2} \quad (E.1)$$

PARA: $E_i = 1-x \Rightarrow z_1 = \frac{(1-x)}{y^\beta}$, ONDE $y = a + b(1-x)^{1/\beta}$
 $E_i = 1 \Rightarrow z_2 = 1$

COM $z_2 = 1$ O INTEGRAŊO DE $V_A(z)$ DIVERGE. PARA CONTORNAR O PROBLEMA FAZEMOS $z_2 = 1-\delta$, SENDO δ UM VALOR MUITO PRÓXIMO DE ZERO, DESSA MANEIRA

$$V_A = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{[a + b(1-x)^{1/\beta}]^{2\beta}} \right] - \ln \left[1 - \frac{(1-\delta)^2}{y^{2\beta}} \right] \right\}$$

MAS:
$$\begin{cases} y = a + b(1-\delta)^{1/\beta} \\ (1-\delta)^{1/\beta} \approx 1 - \frac{\delta}{\beta} \end{cases} \text{ , pois } \delta \text{ é muito pequeno}$$

$$y = a + (1-a)\left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \approx 1 - (1-a)\frac{\delta}{\beta}$$

AQUI fizemos uso de $b = 1-a$

$$\therefore y^{2\beta} = \left[1 - (1-a)\frac{\delta}{\beta}\right]^{2\beta} \approx 1 - 2\beta(1-a)\frac{\delta}{\beta} = 1 - 2(1-a)\delta$$

COM ISSO, TEMOS QUE

$$V_A = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{y^{2\beta}} \right] - \ln \left[1 - \frac{1-2\delta+\delta^2}{1-2(1-a)\delta} \right] \right\}$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{y^{2\beta}} \right] - \ln \left[1 - \frac{1-2\delta}{1-2(1-a)\delta} \right] \right\}$$

$$V_A = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{y^{2\beta}} \right] - \ln \left[\frac{1-2\delta+2a\delta-1+2\delta}{1-2(1-a)\delta} \right] \right\}$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{y^{2\beta}} \right] - \ln 2a\delta \right\} \quad (E.2)$$

E.2.2) CÁLCULO DE V_B

$$V_B = \int_{1-x}^1 \frac{E_i dE_i}{y^p(1-E_i^2)}$$

$$\text{ONDO} \quad \begin{cases} d\vartheta = \frac{dE_i}{1-E_i^2} & \therefore \vartheta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} \\ u = \frac{E_i}{y^\beta} & \therefore du = \frac{a dE_i}{y^{\beta+1}} \end{cases}$$

COM ISSO

$$V_B = \int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du.$$

$$\therefore V_B = \frac{E_i}{2y^\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} + \frac{a}{2} \left[\int_{1-x}^1 \frac{\ln(1-E_i)}{y^{\beta+1}} dE_i - \int_{1-x}^1 \frac{\ln(1+E_i)}{y^{\beta+1}} dE_i \right]$$

$$\text{MAS} \quad y^{-(\beta+1)} = \frac{1}{a^{\beta+1}} \left(1 + \frac{b}{a} E_i^{1/\beta} \right)^{-(\beta+1)} = \frac{1}{a^{\beta+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m E_i^{m/\beta}$$

$$\text{ONDE} \quad \binom{\beta+1}{m} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3) \dots (\beta+1+m)}{1.2.3 \dots (m+1)}$$

UTILIZAMOS AQUI A FÓRMULA 22 - PÁG. 14 - MANGULIS (REF [3])

LOGO

$$V_B = \frac{E_i}{2y^\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} + \frac{a}{2} \times \frac{1}{a^{\beta+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\int_{1-x}^1 E_i^{m/\beta} \ln(1-E_i) dE_i - \int_{1-x}^1 E_i^{m/\beta} \ln(1+E_i) dE_i \right]$$

COM O USO DA EQ. PÁG. 141 - PETIT BOIS (REF [4]), TEMOS QUE

$$\int_{1-x}^1 E_i^{m/\beta} \ln(1-E_i) dE_i - \int_{1-x}^1 E_i^{m/\beta} \ln(1+E_i) dE_i = \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}+1}}{\frac{m}{\beta}+1} \ln(1-E_i) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}}{(1-E_i)} dE_i + \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}}{\frac{m}{\beta} + 1} \ln(1+E_i) - \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}}{1+E_i} dE_i \right]$$

É COMO (USANDO AS EQS. 2.147.5 - Pág. 65 e 2.145.6 - Pág. 64 - GRADSHTEYN REF [2]).

$$\frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}}{1-E_i} dE_i - \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}}{1+E_i} dE_i \right] = \frac{2}{\frac{m}{\beta} + 1} \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} + 2}}{1-E_i^2} dE_i =$$

$$= - \frac{2}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right] + \frac{2}{\frac{m}{\beta} + 1} \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i}{1-E_i^2} dE_i =$$

$$= - \frac{2}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right] - \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \ln(1-E_i^2)$$

TEREMOS QUE

$$V_B = \frac{E_i}{2\gamma\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} \Big|_{1-\alpha}^{1-\delta} + \frac{1}{2\gamma\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\left(\frac{\beta+1}{m}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \left\{ \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[E_i^{\frac{m}{\beta} + 1} \ln(1-E_i^2) \right] \Big|_{1-\alpha}^{1-\delta} - \ln(1-E_i^2) \Big|_{1-\alpha}^{1-\delta} - 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \Big|_{1-\alpha}^{1-\delta} \right\} \quad (E 3)$$

ONOTIVO DE SE TER TOMADO O LIMITE SUPERIOR DA 1ª PARCELA IGUAL A (1-δ) É O MESMO DO ÍTEM ANTERIOR. PASSANDO OS LIMITES, TEREMOS

$$V_B = \frac{1-\gamma}{2 \left[1 - (1-a) \frac{\gamma}{\beta} \right]^\beta} \cdot \ln \left(\frac{2}{\gamma} - 1 \right) - \frac{1-x}{24\beta} \ln \frac{2-x}{x} +$$

$$+ \frac{1}{24\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\ln 0 - (1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} \ln x(2-x) - \ln 0 + \right. \right.$$

$$\left. + \ln x(2-x) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{(1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} - 1}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right] \right\}$$

SEBDO, COMO NO ITEM ANTERIO

$$\gamma \approx 1 - (1-a) \frac{\gamma}{\beta}$$

$$u = a + b(1-x)^{1/\beta}$$

$$\therefore V_B = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\gamma} - \frac{1-x}{24\beta} \ln \frac{2-x}{x} + \frac{1}{24\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\ln x(2-x) - \right. \right.$$

$$\left. - (1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} \ln x(2-x) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{(1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} - 1}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right] \right\} \quad (E.4)$$

E.2.3) CÁLCULO DE V_C

$$V_C = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta} - 1} \cos \theta_p \int_{1-x}^1 \frac{E_i^2 dE_i}{y^\beta (1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2)}$$

USANDO A FÓRMULA 22 - PÁG. 14 - MENGULIS (REF^[3]), TEMOS QUE

$$\gamma^{-\beta} = \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m E_i^{m/\beta}$$

$$\text{SEUDO} \quad \binom{\beta}{m} = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+m)}{1.2.3 \dots (m+1)}$$

$$\therefore V_C = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \frac{\cos \theta_p}{q^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m \int_{1-x}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}+2} dE_i}{(1-2E_i \cos \theta_p + E_i^2)}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_C = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \frac{\cos \theta_p}{q^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m & \left[\frac{\cos\left(-\frac{m}{\beta}-2\right)\theta_p}{\text{Sen } \theta_p} \text{arc tg } \frac{E_i - \cos \theta_p}{\text{Sen } \theta_p} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{Sen}\left(-\frac{m}{\beta}-2\right)\theta_p \ln(1-2E_i \cos \theta_p + E_i^2) \right]_{1-x}^1 \quad (E.5) \end{aligned}$$

AQUI USAMOS EQ. DA PAG. 104 - PETIT BOIS (REF [6]), COM OS LIMITES
TERRENOS

$$\begin{aligned} V_C = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \frac{\cos \theta_p}{q^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m & \left\{ \frac{\cos\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_p}{\text{Sen } \theta_p} \left(\text{arc tg } \frac{1 - \cos \theta_p}{\text{Sen } \theta_p} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{arc tg } \frac{1-x - \cos \theta_p}{\text{Sen } \theta_p} \right) + \frac{\text{Sen}\left(\frac{m}{\beta}+2\right)\theta_p}{2} \left[\ln 2(1 - \cos \theta_p) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \ln(2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2) \right] \right\} \quad (E.6) \end{aligned}$$

E.a.4) CÁLCULO DE V_D

$$V_D = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \int_{1-x}^1 \frac{E_i dE_i}{y^\beta (1-2E_i \cos \theta_p + E_i^2)}$$

USANDO O MESMO ARTIFÍCIO ANTERIOR E A EQ. CITADA; TEREMOS

$$V_D = \frac{1}{a^\beta} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \binom{\beta}{m}}{m!} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\frac{\cos\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\theta_p}{\text{sen } \theta_p} \text{arctg} \frac{E_i - \cos \theta_p}{\text{sen } \theta_p} \right]_{1-x}^1 +$$

$$+ \frac{\text{sen}\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\theta_p}{\text{sen } \theta_p} \ln \left(1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2 \right) \Big|_{1-x}^1 \quad (E.7)$$

E COM OS LIMIQUES

$$V_D = \frac{1}{a^\beta} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \binom{\beta}{m}}{m!} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \frac{\cos\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\theta_p}{\text{sen } \theta_p} \left(\text{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\text{sen } \theta_p} - \right. \right.$$

$$\left. - \text{arctg} \frac{1-x - \cos \theta_p}{\text{sen } \theta_p} \right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\theta_p}{2} \left[\ln 2(1 - \cos \theta_p) - \right.$$

$$\left. - \ln \left(2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2 \right) \right] \Big\} \quad (E.8)$$

E.2.5) CÁLCULO DE V_E

$$V_E = a \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \int_{1-x}^1 \frac{\frac{E_i}{y^\beta} dy^\beta}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)}$$

PONDO $z = \frac{E_i}{y^\beta} \quad \therefore \quad dE_i = \frac{y^{\beta+1}}{a} dz \quad (\text{VER ITEM E.2.1})$

$$\therefore V_E = \frac{a}{a} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \int_{z_1}^{z_2} \frac{y^{\beta+1} z dz}{y^{\beta+1} (1 - 2z \cos \theta_p + z^2)} = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{(1 - 2z \cos \theta_p + z^2)}$$

UTILIZANDO AS INTEGRAIS 2.175.1 E 2.172 - PAG. 68 - GRADSHTEYN
(REF^[2]) TEREMOS

$$V_E = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{1}{2} \ln(1 - 2z \cos \theta_p + z^2) + \operatorname{ctg} \theta_p \operatorname{arctg} \frac{z - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right]_{z_1}^{z_2}$$

$$\therefore V_E = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right) \right]_{1-x}^1 + \operatorname{ctg} \theta_p \operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{y^\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \Big|_{1-x}^1$$

(E.9)

OBS: PARA $\cos \theta_p = \pm 1$, V_E É DADO POR

$$V_E = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right) + \frac{2}{2 \cos \theta_p - 2 \frac{E_i}{y^\beta}} \right]$$

MAS NO NOSSO CASO $\cos \theta_p$ NUNCA SERÁ IGUAL A ± 1 , PORISSO O VALOR DE V_E É DADO POR E.9. COM OS LIMITES, TEMOS

$$V_E = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - \frac{2(1-x)\cos \theta_p}{4^\beta} + \frac{(1-x)^2}{4^{2\beta}}} + \operatorname{ctg} \theta_p \left[\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4^\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right] \right\}$$

(E.10)

COMO ANTES, $u = a + b(1-x)^{1/\beta}$

E.2.6) CÁLCULO DE V_F

$$V_F = a \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \int_{1-x}^1 \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \frac{dE_i}{y^{\beta+1} \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)}$$

PODENDO

$$\omega = \left(\frac{E_i}{y^\beta} \right)^2$$

$$\therefore dw = 2\sqrt{w} \frac{y^\beta - \beta E_i y^{\beta-1} \frac{b}{\beta} \frac{E_i}{E_i}}{y^{2\beta}} dE_i = \frac{2a\sqrt{w}}{y^{\beta+1}} dE_i$$

ONDE USAMOS $bE_i^{1/\beta} = y - a$.

$$V_F = \frac{a}{2a} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \int_{w_1}^{w_2} \frac{y^{\beta+1} w dw}{y^{\beta+1} \sqrt{w} (1 - 2\sqrt{w} \cos \theta_p + w)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \int_{w_1}^{w_2} \frac{\sqrt{w} dw}{(1 - 2\sqrt{w} \cos \theta_p + w)}$$

FAZENDO AGORA $\sqrt{w} = z \quad \therefore dw = 2z dz$, TEREMOS

$$V_F = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{(1 - 2z \cos \theta_p + z^2)} \quad (\text{IGUAL A INTEGRAL OBTIDA EM E.9})$$

$$\therefore V_F = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 - 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_p + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right) + \operatorname{ctg} \theta_p \operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{y^\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right]_{1-x}^1$$

(E.11)

PASSANDO OS LÍMITES E LEMBRANDO A OBS. ANTERIOR, TEREMOS:

$$V_F = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \cos \theta_p \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - \frac{2(1-x)\cos \theta_p}{4^\beta} + \frac{(1-x)^2}{4^{2\beta}}} + \operatorname{ctg} \theta_p \left[\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4^\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right] \right\} \quad (\text{E.12})$$

E.9.7) SUBSTITUINDO OS VALORES E.2, E.4, E.6, E.8, E.10. E E.12, ENCONTRAMOS

$$\frac{P_0}{2\beta} \int_{1-x}^1 \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(1-x)^2}{4^2\beta} \right] - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1-x}{24\beta} \ln \frac{2-x}{x} + \frac{\rho_{tot}}{\beta} - \ln z + \frac{1}{2} \ln \gamma - \frac{1}{2} \ln \gamma +$$

$$+ \frac{1}{2a\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \frac{1}{\frac{m}{\beta} + 1} \left[\left((1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right) \ln x (2-x) + \right. \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{m=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{1 - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2m-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2m-1)} \right] \Bigg\} +$$

$$+ \frac{1}{a\beta} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \left[\operatorname{ctg} \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{esc} \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_p \right] \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{1-x - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\cos \theta_p \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p - \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_p \right] \times \ln V_p \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ (1 - \cos \theta_p) \left[\frac{1}{2} \ln \Sigma_p + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4\beta} - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) \right] \Bigg\}$$

(E.13)

SEND O

$$V_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2} ;$$

$$L_p = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - \frac{2(1-x)\cos \theta_p}{4\beta} + \frac{(1-x)^2}{4^2\beta}}$$

$$u = a + b(1-x)^{1/\beta}$$

E.Q.8) SIMPLIFICAÇÕES PROCESSADAS NA EQ. E.13

$$1) \quad x_a = \operatorname{ctg} \theta_p \cdot \cos \left(\frac{m}{p} + 2 \right) \theta_p - \operatorname{csc} \theta_p \cos \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \theta_p$$

POŊDO $\delta = \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \theta_p$

$$\therefore x_a = \operatorname{ctg} \theta_p \cdot \cos (\delta + \theta_p) - \operatorname{csc} \theta_p \cos \delta$$

$$\therefore x_a = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_p} \left[\cos \theta_p (\cos \delta \cdot \cos \theta_p - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta_p) - \cos \delta \right]$$

$$\therefore x_a = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_p} \left[\cos^2 \theta_p \cos \delta - \cos \theta_p \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta_p - \cos \delta \right]$$

$$\therefore x_a = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_p} \left[(\cos^2 \theta_p - 1) \cos \delta - \cos \theta_p \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta_p \right]$$

$$\therefore x_a = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_p} \left[-\operatorname{sen}^2 \theta_p \cos \delta - \cos \theta_p \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta_p \right]$$

$$\therefore x_a = - (\operatorname{sen} \theta_p \cos \delta + \cos \theta_p \operatorname{sen} \delta)$$

$$\therefore x_a = - \operatorname{sen} (\theta_p + \delta)$$

$$\therefore x_a = - \operatorname{sen} \left[\theta_p + \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \theta_p \right]$$

$$\therefore x_a = - \operatorname{sen} \left(\frac{m}{p} + 2 \right) \theta_p \quad (E.14)$$

$$2) \quad y_a = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p}$$

MAS $\operatorname{arctg} k = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2k}{1+k^2}$

$$\therefore y_a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\frac{2(1 - \cos \theta_p)}{\operatorname{sen} \theta_p}}{1 + \left(\frac{1 - \cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right)^2}$$

$$y_a = \frac{1}{2} \arcsen \frac{2(1 - \cos \theta_p) \operatorname{sen} \theta_p}{2(1 - \cos \theta_p)}$$

$$\therefore y_a = \frac{1}{2} \arcsen(\operatorname{sen} \theta_p) \quad \therefore 2y_a = \arcsen(\operatorname{sen} \theta_p)$$

$$\therefore \operatorname{sen} 2y_a = \operatorname{sen} \theta_p$$

$$\therefore y_a = \frac{\theta_p}{2} \quad (\text{E.15})$$

$$3) \quad Z_a = \cos \theta_p \operatorname{sen} \left(\frac{M}{\beta} + 2 \right) \theta_p - \operatorname{sen} \left(\frac{M}{\beta} + 1 \right) \theta_p$$

$$\text{pondo} \quad \delta = \left(\frac{M}{\beta} + 1 \right) \theta_p$$

$$\therefore Z_a = \cos \theta_p \operatorname{sen} (\delta + \theta_p) - \operatorname{sen} \delta$$

$$\therefore Z_a = \cos \theta_p (\operatorname{sen} \delta \cos \theta_p + \operatorname{sen} \theta_p \cos \delta) - \operatorname{sen} \delta$$

$$\therefore Z_a = \cos^2 \theta_p \operatorname{sen} \delta + \cos \theta_p \operatorname{sen} \theta_p \cos \delta - \operatorname{sen} \delta$$

$$\therefore Z_a = -\operatorname{sen}^2 \theta_p \operatorname{sen} \delta + \cos \theta_p \operatorname{sen} \theta_p \cos \delta$$

$$\therefore Z_a = \operatorname{sen} \theta_p (\cos \theta_p \cos \delta - \operatorname{sen} \theta_p \operatorname{sen} \delta)$$

$$\therefore Z_a = \operatorname{sen} \theta_p \cdot \cos (\theta_p + \delta)$$

$$\therefore Z_a = \operatorname{sen} \theta_p \cos \left(\frac{M}{\beta} + 2 \right) \theta_p \quad (\text{E.16})$$

E.a.9) com o uso das eqs. E.14, E.15 e E.16, a eq. E.13 fica

$$\int_{1-x}^1 E \frac{\partial u}{\partial E_i} dE_i = \frac{\beta}{\rho_0} \left[1 - \frac{(1-x)^2}{4^2 \beta} - 3 \ln 2 + \frac{1-x}{4 \beta} \ln \left(\frac{2-x}{x} \right) + \frac{x}{2} + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta}{\rho_0 a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^m}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln x(2-x) + \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{\left[1 - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right]}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} + \\
 & + \frac{2\beta}{\rho_0} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x-\cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} - \frac{\theta_p}{2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\operatorname{sen} \theta_p \times \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p}{2} \times \ln V_p \right] + (1-\cos \theta_p) \left[\frac{\ln J_p}{2} + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\frac{\theta_p}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1-x-\cos \theta_p}{\operatorname{sen} \theta_p} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

QUE É A EQ. IV.32

E.A.10) A EQ. IV.44 É OBTIDA SOMANDO-SE AS EQS. E.1, E.3, E.5, E.7, E.9 E E.11
MAS COM O LIMITE SUPERIOR E_i . DESSA MANEIRA TENHO QUE

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0}{2\beta} \int_{1-x}^{E_i} E \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 - \frac{(1-x)^2}{4\beta} \right] - \ln \left[1 - \frac{E_i^2}{4\beta} \right] \right\} + \\
 & + \frac{E_i}{2\beta} \ln \frac{1-E_i}{1+E_i} + \frac{1-x}{2\beta} \ln \frac{2-x}{x} + \frac{1}{2a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta+1}{m} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^m}{\frac{m}{\beta} + 1} \left\{ (1-E_i)^{\frac{m}{\beta} + 1} \ln(1-E_i^2) + \right. \\
 & \left. + \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln x(2-x) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} + \\
 & + \frac{1}{a^\beta} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \left[\operatorname{ctg} \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p - \operatorname{csc} \theta_p \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_p \right] \times \right.
 \end{aligned}$$

$$x \left(\operatorname{arctg} \frac{E_i - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{1-x - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) + \frac{1}{2} \left[\cos \theta_p \sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p - \sin \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_p \right] x$$

$$x \ln S_p \} + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ (1 - \cos \theta_p) \left[\frac{1}{2} \ln L_p + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{E_i}{\beta} - \cos \theta_p - \operatorname{arctg} \frac{1-x - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) \right] \right\}$$

ONDE : $y = a + b E_i^{1/\beta}$
 $u = a + b (1-x)^{1/\beta}$

$$S_p = \frac{1 - 2E_i \cos \theta_p + E_i^2}{2(1-x)(1 - \cos \theta_p) + x^2} ; L_p = \frac{1 - \frac{2E_i \cos \theta_p}{y^\beta} + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{1 - \frac{2(1-x) \cos \theta_p}{u^\beta} + \frac{(1-x)^2}{u^{2\beta}}}$$

E COM AS SIMPLIFICAÇÕES x_a E z_a DO ITEM ANTERIOR, TEREMOS

$$\int_{1-x}^{E_i} E \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{\beta}{\rho_0} \left\{ \ln \frac{y^{2\beta} [u^{2\beta} - (1-x)^2]}{u^{2\beta} (y^{2\beta} - E_i^2)} + \frac{E_i}{y^\beta} \ln \frac{1+E_i}{1-E_i} + \frac{1-x}{u^\beta} \ln \frac{2-x}{x} \right\} +$$

$$+ \frac{\beta}{\rho_0 a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{\beta+1}{m}}{\frac{m}{\beta} + 1} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ (1 - E_i^{\frac{m}{\beta} + 1}) \ln (1 - E_i^2) + \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln x (2-x) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=0}^{\frac{m}{2\beta}} \frac{E_i^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - (2n-1)}}{\frac{m}{\beta} - (2n-1)} \right\} +$$

$$+ \frac{2\beta}{\rho_0} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2\beta}-1} \left\{ \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \binom{\beta}{m}}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{E_i - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) + \frac{\sin \theta_p + \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_p}{2} \times \ln S_p \right] +$$

$$+ (1 - \cos \theta_p) \left[\frac{1}{2} \ln L_p + \operatorname{ctg} \theta_p \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{y^p} - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1-k}{4^p} - \cos \theta_p}{\sin \theta_p} \right) \right] \Bigg\}$$

QUE É A EQ. IV.44

E.5) PARA $\frac{1}{\beta} = N^{\circ}$ INTEIRO IMPAR

LEMBRANDO A EQ. IV.35

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{2\beta} \frac{\partial x}{\partial E_i} = & \frac{1}{2} \left[\frac{a}{y(y^p - E_i)} - \frac{1}{1 - E_i} \right] + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left[\frac{a}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^p} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2p}} \right)} + \right. \\ & \left. + \frac{a E_i \cos \theta_i}{y^{2\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^p} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2p}} \right)} - \frac{1}{1 + 2 E_i \cos \theta_i + E_i^2} - \frac{E_i \cos \theta_i}{1 + 2 E_i \cos \theta_i + E_i^2} \right] \quad (IV.35) \end{aligned}$$

ONDE : $y = a + b E_i^{1/\beta}$ $\theta_i = (2k+1)\beta\pi$

COM IV.2 E IV.35 A IV.30 FICA

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{2\beta} \int_{1-x}^1 E(E_i t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = & \frac{a}{2} \int_{1-x}^1 \frac{\frac{E_i}{y^p}}{y^{\beta+1} \left(1 - \frac{E_i}{y^p} \right)} dE_i - \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \frac{E_i}{y^{\beta} (1 - E_i)} dE_i + \\ & + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left\{ a \int_{1-x}^1 \frac{\frac{E_i}{y^p}}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^p} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2p}} \right)} dE_i + a \cos \theta_i \int_{1-x}^1 \frac{\frac{E_i}{y^{2p}}}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^p} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2p}} \right)} dE_i - \right. \\ & \left. - \int_{1-x}^1 \frac{E_i}{y^{\beta} \left(1 + 2 E_i \cos \theta_i + E_i^2 \right)} dE_i - \int_{1-x}^1 \frac{\cos \theta_i E_i^2}{y^{\beta} \left(1 + 2 E_i \cos \theta_i + E_i^2 \right)} dE_i \right\} \end{aligned}$$

CHAMANDO, COMO ANTES, DE V_A, V_B, V_C, V_D, V_E E V_F A 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a E 6^a INTEGRAL, RESPECTIVAMENTE, TEMOS

E.B.1) CÁLCULO DE V_A

$$V_A = \frac{a}{2} \int_{1-\alpha}^1 \frac{\frac{E_i}{y^\beta}}{y^{\beta+1} \left(1 - \frac{E_i}{y^\beta}\right)} dE_i$$

POIS $z = \frac{E_i}{y^\beta} \quad \therefore dE_i = \frac{y^{\beta+1}}{a} dz$

$$V_A = \frac{a}{2a} \int_{1-\alpha}^1 \frac{y^{\beta+1}}{y^{\beta+1}} \frac{z}{1-z} dz$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{1-z} dz$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \ln(1-z) \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{z}{2} \Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \left[\ln\left(1 - \frac{E_i}{y^\beta}\right) \Big|_{1-\alpha}^{1-\gamma} + \frac{E_i}{y^\beta} \Big|_{1-\alpha}^1 \right] \quad (E.17)$$

ONDE O LIMITE SUPERIOR $(1-\gamma)$ É TOMADO PELO MESMO MOTIVO EXPLICADO NO ÍTEM E.A.1. COM OS LIMITES, TEREMOS PARA $E_i = 1-\gamma$, TEMOS QUE $y = a + b(1-\gamma)^{1/\beta}$

$$\therefore y \approx 1 - (1-a) \frac{\gamma}{\beta}, \text{ COMO VIMOS NO ÍTEM E.A.1}$$

$$\therefore y^\beta = \left[1 - (1-a) \frac{\gamma}{\beta} \right]^\beta \quad \therefore y^\beta \approx 1 - (1-a) \gamma$$

DESSE MODO

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \left[\ln \left(1 - \frac{1-\gamma}{1-(1-a)\gamma} \right) + \ln \left(1 - \frac{1-x}{4\beta} \right) + 1 - \frac{1-x}{4\beta} \right]$$

SENDO QUE PARA $E_i = 1 \Rightarrow y = 1$

$$E_i = 1-x \Rightarrow u = a + b(1-x)^{1/\beta}$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \left[\ln \frac{1-\gamma+a\gamma-1+\gamma}{1-(1-a)\gamma} - \ln \left(1 - \frac{1-x}{4\beta} \right) + 1 - \frac{1-x}{4\beta} \right]$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2} \left[\ln a\gamma - \ln \left(1 - \frac{1-x}{4\beta} \right) + 1 - \frac{1-x}{4\beta} \right] \quad (E.18)$$

E.b.2) CÁLCULO V_B

$$V_B = \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \frac{E_i}{y^\beta (1-E_i)} dE_i$$

PODENDO $d\varphi = \frac{dE_i}{(1-E_i)} \quad \therefore \varphi = -\ln(1-E_i)$

$$u = \frac{E_i}{y^\beta} \quad \therefore du = \frac{1}{y^{\beta+1}} dE_i$$

$$\therefore V_B = \int u d\varphi = \varphi u - \int \varphi du$$

$$\therefore 2V_B = -\frac{E_i}{y^\beta} \ln(1-E_i) \Big|_{1-x}^1 + \int_{1-x}^1 \frac{\ln(1-E_i)}{y^{\beta+1}} dE_i$$

UTILIZANDO OS RESULTADOS DO ÍTEM E.2.2, TEREMOS

$$2V_B = -\frac{E_i}{y^\beta} \ln(1-E_i) \Big|_{1-x}^1 + \frac{1}{a^{\beta+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{\beta+1}{m}}{\frac{m}{\beta}+1} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[E_i^{\frac{m}{\beta}+1} \ln(1-E_i) \right] \Big|_{1-x}^1 +$$

$$+ \int_{1-x}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{p}+1}}{1-E_i} dE_i$$

COM O USO DA INTEGRAL 2.111.3 - PAG. 58 - GRADSHTEYN (REF [2]), TEMOS QUE

$$\begin{aligned} \int_{1-x}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{p}+1}}{1-E_i} dE_i &= - \frac{E_i^{\frac{m}{p}+1}}{\frac{m}{p}+1} - \frac{E_i^{\frac{m}{p}}}{\frac{m}{p}} - \frac{E_i^{\frac{m}{p}-1}}{\frac{m}{p}-1} - \dots - \frac{(-1)^{m/p}}{(-1)^{\frac{m}{p}+1}} E_i + \frac{(-1)^{\frac{m}{p}+1}}{(-1)^{\frac{m}{p}+2}} \ln(1-E_i) \\ &= - \sum_{n=0}^{\frac{m}{p}} \frac{E_i^{\frac{m}{p}-n+1}}{\frac{m}{p}-n+1} - \ln(1-E_i) \end{aligned}$$

DESSA FORMA

$$\begin{aligned} 2V_B &= - \frac{E_i}{y^p} \ln(1-E_i) \Big|_{1-x}^{1-\delta} + \frac{1}{q^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{p+1}{m}}{\frac{m}{p}+1} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\frac{E_i^{\frac{m}{p}+1}}{y^p} \ln(1-E_i) \Big|_{1-x}^1 - \right. \\ &\quad \left. - \ln(1-E_i) \Big|_{1-x} - \sum_{n=0}^{\frac{m}{p}} \frac{E_i^{\frac{m}{p}-n+1}}{\frac{m}{p}-n+1} \Big|_{1-x} \right] \quad (E.19) \end{aligned}$$

SENDO (1-δ) TOMADO CONFORME EXPLICAÇÃO EM E.A.1

LEMBRANDO QUE PARA : $E_i = 1$; $y = 1$

$E_i = 1-x$; $y = a+b(1-x)^{1/p}$

$E_i = 1-\delta$; $y^p = [1-(1-q)\delta]^p$, TEREMOS

$$\begin{aligned} 2V_B &= - \frac{1-\delta}{[1-(1-q)\delta]^p} \ln(1-1+\delta) + \frac{1-x}{y^p} \ln x + \frac{1}{y^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{p+1}{m}}{\frac{m}{p}+1} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\ln 0 - \right. \\ &\quad \left. - (1-x)^{\frac{m}{p}+1} \ln x - \ln 0 + \ln x + \sum_{n=0}^{\frac{m}{p}} \frac{(1-x)^{\frac{m}{p}-n+1}}{\frac{m}{p}-n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore V_B = -\frac{1}{2} \ln \gamma + \frac{1-\alpha}{2a\beta} \ln \kappa + \frac{1}{2a\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{\beta+1}{m}}{\frac{m}{\beta} + 1} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \left[1 - (1-\kappa)^{\frac{m}{\beta} + 1} \right] \ln \kappa + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \frac{(1-\kappa)^{\frac{m}{\beta} - n + 1} - 1}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} \quad (E.20)$$

E.b.3) Cálculo de V_C

$$V_C = Q \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \int_{1-\alpha}^1 \frac{\frac{E_i}{y^\beta}}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} dE_i$$

PROCEDENDO COMO EM E.A.5 E LEMBRANDO QUE O SINAL DA 2ª PARCELA DO DENOMINADOR É + (MAIS), TEREMOS

$$V_C = \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right) \right]_{1-\alpha}^1 - \operatorname{ctg} \theta_i \operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{y^\beta} + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \bigg|_{1-\alpha}^1 \quad (E.21)$$

$$\therefore V_C = \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \left[\frac{1}{2} \ln T_i + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\alpha}{y^\beta} + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \right) \right] \quad (E.22)$$

E.b.4) Cálculo de V_D

$$V_D = \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} a \cos \theta_i \int_{1-\alpha}^1 \frac{\frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{y^{\beta+1} \left(1 + 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right)} dE_i$$

ANALOGAMENTE COMO EM E.A.6 E LEMBRANDO O SINAL (+), TEMOS

$$V_D = \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \cos \theta_i \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2E_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}} \right) \right]_{1-\kappa}^1 - \operatorname{ctg} \theta_i \operatorname{arctg} \left. \frac{\frac{E_i}{y^\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right|_{1-\kappa}^1 \quad (E.23)$$

$$V_D = \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \cos \theta_i \left[\frac{1}{2} I_i + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-\kappa}{y^\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) \right] \quad (E.24)$$

ONDE

$$I_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{1 + \frac{2(1-\kappa) \cos \theta_i}{y^\beta} + \frac{(1-\kappa)^2}{y^{2\beta}}}$$

OBS.: $\cos \theta_i \neq \pm 1$, SEMPRE. PORISSO OS VALORES V_C E V_D SÃO OS DADOS ACIMA

E.b.5) CÁLCULO DE V_E

$$V_E = \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \int_{1-\kappa}^1 \frac{E_i}{y^\beta (1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2)} dE_i$$

COM O USO DE

$$y^\beta = \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m E_i^{m/\beta}$$

CONFORME E.2.3, TEREMOS QUE

$$V_E = \frac{1}{a^\beta} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{\beta}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^m \int_{1-\kappa}^1 \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}+1}}{(1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2)} dE_i$$

UTILIZANDO (REF ^[A]) - PAG. 104, TEMOS QUE

$$\int \frac{E_i^{\frac{m}{\beta}+1} dE_i}{(1+2E_i \cos \theta_i + E_i^2)} = \frac{1}{\sin \theta_i} \cos \left[\left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \pi + \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right] \times \operatorname{arctg} \frac{E_i \sin(\pi + \theta_i)}{1 - E_i \cos(\pi + \theta_i)} +$$

$$+ \sin \left[\left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \pi + \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right] \times \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2E_i \cos(\pi + \theta_i) + E_i^2 \right]$$

como $\sin(\pi + \theta_i) = -\sin \theta_i$
 $\cos(\pi + \theta_i) = -\cos \theta_i$

$$\cos \left[\left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \pi + \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right] = \cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) \times \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i$$

$$\sin \left[\left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \pi + \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right] = \cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) \sin \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i$$

obs $\cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) = 1$, para $m = n^{\circ}$ par

$\cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) = -1$, para $m = n^{\circ}$ impar

DESSA FORMA

$$V_E = \frac{1}{a^{\beta}} \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\beta}{a} \right)^m \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\frac{\cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i}{\sin \theta_i} \operatorname{arctg} \frac{-E_i \cos \theta_i}{1 + E_i \cos \theta_i} \right]_{1-x}^1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) \sin \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \times \ln (1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2) \Big|_{1-x}^1$$

mas: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$

$$V_E = \frac{1}{a^{\beta}} \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \times \ln (1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2) \right]_{1-x}^1 -$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\mu}{\beta} + 1\right) \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_i \operatorname{sen} \theta_i}{1 + E_i \cos \theta_i} \right]_{1-\alpha}^1 \quad (\text{E.25})$$

$$\begin{aligned} \therefore V_E = \frac{1}{a^{\frac{\beta}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta}{\mu}}{\mu!} \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu} & \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\mu}{\beta} + 1\right) \theta_i}{2}, \ln V_i + \right. \\ & \left. + \frac{\cos\left(\frac{\mu}{\beta} + 1\right) \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \left[\operatorname{arctg} \frac{(1-\alpha) \operatorname{sen} \theta_i}{1 + (1-\alpha) \cos \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{1 + \cos \theta_i} \right] \right\} \quad (\text{E.26}) \end{aligned}$$

E.5.6) CÁLCULO DE V_F

$$V_F = \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \cos \theta_i \int_{1-\alpha}^1 \frac{E_i^2 dE_i}{y^{\beta} (1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2)}$$

PROCEDENDO COMO NO CASO ANTERIOR, ENCONTRAMOS

$$\begin{aligned} V_F = \frac{1}{a^{\frac{\beta}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{\frac{1}{\beta}-3}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} \binom{\beta}{\mu}}{\mu!} \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu} \cos \theta_i & \left\{ \frac{\cos\left[\left(\frac{\mu}{\beta} + 3\right)\pi + \left(\frac{\mu}{\beta} + 2\right)\theta_i\right]}{\operatorname{sen} \theta_i}, \operatorname{arctg} \frac{E_i \operatorname{sen}(\pi + \theta_i)}{1 - E_i \cos(\pi + \theta_i)} + \right. \\ & \left. + \operatorname{sen} \left[\left(\frac{\mu}{\beta} + 3\right)\pi + \left(\frac{\mu}{\beta} + 2\right)\theta_i \right] \times \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2E_i \cos(\pi + \theta_i) + E_i^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

MAS $\cos(\pi + \theta_i) = -\cos \theta_i$; $\operatorname{sen}(\pi + \theta_i) = -\operatorname{sen} \theta_i$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\cos\left[\left(\frac{\mu}{\beta} + 3\right)\pi + \left(\frac{\mu}{\beta} + 2\right)\theta_i\right] = -\cos\left(\frac{\mu}{\beta}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu}{\beta} + 2\right)\theta_i$$

$$\text{sen} \left[\left(\frac{m}{\beta} + 3 \right) \pi + \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \right] = - \cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i$$

OBS $-\cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) = -1$ PARA $m = N^{\circ}$ PAR

$-\cos \left(\frac{m\pi}{\beta} \right) = 1$ PARA $m = N^{\circ}$ IMPAR

COM ISSO

$$V_F = \frac{1}{a^{\beta}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{m} \right)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \cos \theta_i \left[\frac{\cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{\text{sen} \theta_i} \text{arc tg} \frac{E_i \text{sen} \theta_i}{1 + E_i \cos \theta_i} \right] \Bigg|_{1-x}^1 -$$

$$- \frac{\text{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{2} \ln \left(1 + 2E_i \cos \theta_i + E_i^2 \right) \Bigg|_{1-x}^1 \quad (E.27)$$

$$\therefore V_F = \frac{1}{a^{\beta}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{m} \right)}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \text{ctg} \theta_i + \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \left[\text{arc tg} \frac{\text{sen} \theta_i}{1 + \cos \theta_i} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \text{arc tg} \frac{(1-x) \text{sen} \theta_i}{1 + (1-x) \cos \theta_i} \right] - \frac{\cos \theta_i + \text{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{2} \times \ln V_i \right\} \quad (E.28)$$

ONDE $V_i = \frac{2(1 + \cos \theta_i)}{2(1-x)(1 + \cos \theta_i) + x^2}$

OBS.: O DESAPARECIMENTO DE $(-1)^m$ É DEVIDO AS OBS. ANTERIORES

E.5.7) SOMANDO-SE AS EGS. E.18, E.20, E.22, E.24, E.26 & E.28, TÊMOS

$$\frac{p_{t0}}{2\beta} \int_{1-x}^1 E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 - \frac{1-x}{4\beta} \right) - 1 + \frac{1-x}{4\beta} (1 - \ln x) + \frac{p_{t0} t}{\beta} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(\beta+1)}{\frac{m}{\beta}+1} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left\{ \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta}+1} - 1 \right] \ln x + \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \frac{1 - (1-x)^{\frac{m}{\beta}-n+1}}{\frac{m}{\beta}-n+1} \right\} + \\
 & + \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left\{ (1+\cos \theta_i) \left[\frac{\ln J_i}{2} + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4^\beta} + \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{1+\cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{a^\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta)}{m!} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[\frac{1}{2} \left(\cos \theta_i \times \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i - \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right) \times \ln V_i + \right. \\
 & + \left(\operatorname{ctg} \theta_i \times \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i - \operatorname{csc} \theta_i \times \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i \right) \times \left(\operatorname{arctg} \frac{(1-x) \operatorname{sen} \theta_i}{1+(1-x) \cos \theta_i} - \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{1+\cos \theta_i} \right) \right] \left. \right\} \quad (E.29)
 \end{aligned}$$

E.b.8) SIMPLIFICAÇÕES FEITAS EM E.29. PROCEDENDO COMO EM E.a.8, TEREMOS

$$1) \quad x_b = \operatorname{ctg} \theta_i \cdot \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i - \operatorname{csc} \theta_i \cdot \cos \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i$$

$$\therefore x_b = -\operatorname{sen} \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \quad (E.30)$$

$$2) \quad y'_b = \operatorname{arctg} \frac{1+\cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i}$$

$$\therefore y'_b = \frac{\theta_i}{2}$$

$$y''_b = \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{1+\cos \theta_i} \quad (E.31)$$

$$y''_b = \frac{\theta_i}{2}$$

$$3) \quad z_b = \cos \theta_i \sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i - \sin \left(\frac{m}{\beta} + 1 \right) \theta_i$$

$$\therefore z_b = \sin \theta_i \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \quad (E.32)$$

E.b.9) COM OS VALORES E.30 - E.32, E.29 FICA

$$\begin{aligned} \int_{1-x}^1 E(E_i, t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i &= \frac{\beta}{\rho_{t0}} \left[\ln \left(1 - \frac{1-x}{4\beta} \right) - 1 + \frac{1-x}{4\beta} (1 - \ln x) + \frac{\rho_{t0} t}{\beta} \right] + \\ &+ \frac{\beta}{2 \rho_{t0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\binom{\beta+1}{m}}{\frac{m}{\beta} + 1} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left\{ \left[(1-x)^{\frac{m}{\beta} + 1} - 1 \right] \ln x + \sum_{n=0}^{\frac{m}{\beta}} \frac{1 - (1-x)^{\frac{m}{\beta} - n + 1}}{\frac{m}{\beta} - n + 1} \right\} + \\ &+ \frac{2\beta}{\rho_{t0}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta} - 3} \left\{ (1 + \cos \theta_i) \left[\frac{1}{2} \ln J_i + \cot \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \frac{\theta_i}{2} \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta}{m}}{m!} \left(\frac{b}{a} \right)^m \left[\frac{\sin \theta_i \cos \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i}{2} \ln V_i + \sin \left(\frac{m}{\beta} + 2 \right) \theta_i \left(\frac{\theta_i}{2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(1-x) \sin \theta_i}{1 + (1-x) \cos \theta_i} \right) \right] \right\} \quad \text{QUE É A EQ. IV.36} \end{aligned}$$

E.b.10) SOMANDO-SE OS VALORES E.17, E.19, E.21, E.23, E.25 E E.27 COM O LIMITE SUPERIOR IGUAL A E_i E LEMBRANDO AS SIMPLIFICAÇÕES $x_b \approx z_b$, ENCONTRAMOS

$$\int_{1-x}^{E_i} E(E_i; t) \frac{\partial x}{\partial E_i} dE_i = \frac{\beta}{\rho_0} \left\{ \ln \frac{y^\beta [4^\beta - (1-x)]}{4^\beta (y^\beta - E_i)} + \frac{1-x}{4^\beta} (1 - \ln x) + \frac{E_i}{y^\beta} [\ln(1-E_i) - 1] \right\} +$$

$$+ \frac{\beta}{\rho_0 a^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\binom{\beta+1}{n}}{\frac{n}{\beta} + 1} \left(\frac{b}{a}\right)^n \left\{ \left(1 - \frac{n}{\beta} + 1\right) \ln(1-E_i) + \left[\left(1-x\right)^{\frac{n}{\beta} + 1} - 1\right] \ln x + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\frac{n}{\beta}} \frac{\frac{n}{\beta} - n + 1}{\frac{n}{\beta} - n + 1} \frac{E_i^{\frac{n}{\beta} - n + 1} - (1-x)^{\frac{n}{\beta} - n + 1}}{\frac{n}{\beta} - n + 1} \right\} +$$

$$+ \frac{2\beta}{\rho_0} \sum_{k=0}^{\frac{1}{\beta}-3} \left\{ (1 + \cos \theta_i) \left[\frac{\ln L_i}{2} + \operatorname{ctg} \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{1-x}{4^\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{E_i}{y^\beta} + \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{a^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta}{n}}{n!} \left(\frac{b}{a}\right)^n \left[\frac{\sin \theta_i \cos \left(\frac{n}{\beta} + 2\right) \theta_i}{2} \ln S_i + \sin \left(\frac{n}{\beta} + 2\right) \theta_i \left(\operatorname{arctg} \frac{E_i \sin \theta_i}{1 + E_i \cos \theta_i} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(1-x) \sin \theta_i}{1 + (1-x) \cos \theta_i} \right) \right] \right\} \quad \text{QUE É A EQ. IV. 45}$$

SENDO

$$L_i = \frac{1 + 2 \frac{E_i}{y^\beta} \cos \theta_i + \frac{E_i^2}{y^{2\beta}}}{1 + \frac{2(1-x) \cos \theta_i}{4^\beta} + \frac{(1-x)^2}{4^{2\beta}}}$$

$$S_i = \frac{1 + 2 E_i \cos \theta_i + E_i^2}{2(1-x)(1 + \cos \theta_i) + x^2}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - RUDENKO, A.I. - Sov.Phys.Solid.State 14, 2706 (1973)
- 2 - GRASHTEYN; I.S. & RYZHIK, I.M. - Table of integrals, series, and products. New York, Academic Press., Inc.(1980)
- 3 - MANGULIS, V. - Handbook of series for scientists and engineers. New York, Academic Press., Inc. (1965)
- 4 - PETIT BOIS, G. - Tables of indefinite integrals. New York, Dover Publications, Inc.(1961)
- 5 - CAMPOS, M. & GIACOMETTI, J.A. - J.Appl.Phys. 52, 4546 (1981)