UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

Modelos Eletrônicos do atrito seco,
sistemas biestáveis e colisões elás
ticas e inelásticas.

Luiz Gonçalves Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física e Química de São Carlos, USP pa
ra obtenção do título de Mestre em Físi-
ca Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Robert Lee Zimmerman

São Carlos - São Paulo
1990

USP / IFQSC / SBI

8-2-000000

me

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE LUIZ GONÇALVES NETO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 03 DE DEZEMBRO DE 1990.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Robert Lee Zimmerman

Prof. Dr. Claudio Jose Magon

Prof. Dr. Carlos Henrique de Brito Cruz

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Robert Lee Zimmermam, pela orientação, incentivo e amizade.

A minha família pelo apoio.

Ao Prof. Heitor Cury Basso, pelas sugestões valiosas e infraestrutura para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Sérgio Selaschi, pelas sugestões e discussões.

Ao Prof. Jocelyn Freitas Benaton, pelos conceitos iniciais sobre modelos, e sugestões sobre trabalho.

Ao Prof. Davilson Lucato, Pela amizade e incentivo.

Ao Eng. Matteo, pelo suporte técnico.

A Secretária Ivone, pela atenção e dedicação.

Ao meus colegas Flávio Roberto Filho, Celso Luiz Franzotti, Paulo Eduardo Casal Garcia e muitos outros, pelas sugestões, incentivo e amizade.

Ao CNPQ por parte do apoio financeiro.

RESUMO

Aplica-se o conceito de analogias para para modelar-se quatro sistemas:

1. Oscilador Harmônico na presença de Atrito Viscoso e Atrito Seco.
2. Sistemas Dinâmicos Biestáveis.
3. Partícula em Caixa.
4. Partícula em mesa vibratória.

No caso (1.) utilizamos a característica $I \times V$ (corrente $\times$ tensão) de diodos de silício para modelarmos o atrito seco em osciladores.

No caso (2.) utilizamos a característica $I \times V$ de diodos de germânio para projetarmos um circuito que modele um potencial biestável. Exemplificamos que este circuito pode ser utilizado para a verificação da Teoria de Transição de Fase de Landau para materiais ferromagnéticos próximo ao ponto crítico.

No caso (3.) utilizamos a característica $I \times V$ de diodos de silício para modelarmos uma caixa onde existe uma partícula. As colisões desta partícula com as paredes desta caixa são elásticas.

No caso (4.) utilizamos a característica em modelar choques de diodos de silício para modelarmos os choques inelásticos de uma partícula em uma mesa vibratória.

Apesar destes sistemas possuírem equações simples para descrever seus movimentos, observamos, utilizando estes modelos eletrônicos, uma dinâmica extremamente complexa e comportamento caótico.

ABSTRACT

We applied the concepts of analogy to model four systems:

1. The harmonic oscillator in the presence of viscous damping and dry friction.
2. A two-well oscillator potential.
3. A particle in a box.
4. A particle on a vibrational table.

In case (1.) we applied the $I \times V$ (current $\times$ voltage) characteristic of silicon diodes to model dry friction in oscillators.

In case (2.) we applied the $I \times V$ characteristic of germanium diodes to make a circuit with a two-well potential. We showed that this circuit could be used to verify the Landau Phase Transition Theory in ferroelectric materials near the critical point.

In case (3.) we applied the $I \times V$ characteristic of silicon diodes to model a box with a particle inside. The particle collisions with the box walls are elastic.

In case (4.) we applied the collision characteristic of silicon diodes to model inelastic collisions of a particle on a vibrational table.

Although those systems have simple equations to describe their motion, we observed, using those electronics models, a very extremely complex dynamic and a chaotic behavior.

SUMARIO

Introdução.	8
1. Caos Em Sistemas Determinísticos.	14
2. Considerações Fundamentais Sobre Sistemas Dinâmicos.	22
3. Modelos e Analogias.	38
4. Oscilador Harmônico com Atrito Viscoso e Atrito Seco.	
4.1. Análises Básicas	54
4.2. Modelos e Analogias	61
4.3. Normalização	68
4.4. Resultados	70
5. Sistemas Biestáveis.	
5.1. Análises Básicas	79
5.2. Modelos e Analogias	88
5.3. Normalização	91
5.4. Resultados	93
6. Partícula em Caixa.	
6.1. Análises Básicas	99
6.2. Modelos e Analogias	105
6.3. Normalização	107
6.4. Resultados	109
7. Partícula em Mesa Vibratória.	
6.1. Análises Básicas	118
6.2. Modelos e Analogias	121
6.3. Normalização	123
6.4. Resultados	125
Conclusões.	131

Apêndices.

133

Referências Bibliográficas.

151

Há uma anedota segundo a qual o teórico do quantum Werner Heisenberg, em seu leito de morte, teria dito que faria duas pergunta a Deus: por que a relatividade, e por que a turbulência? E teria concluído: "Eu realmente acho que Ele deve ter uma boa resposta para a primeira pergunta."

INTRODUÇÃO

MODELOS E ANALOGIAS EM SISTEMAS DINÂMICOS

Desde os primórdios o ser humano tem feito o uso dos mais diversos tipos de modelos para poder estudar e compreender os fatos e fenômenos que o cercam na natureza e nas áreas das ciências exatas, humanas e biológicas.

Na física define-se modelo como o conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades do sistema. Também podemos definir modelo como um objeto destinado a ser reproduzido por imitação, ou a representação em pequena escala de algo que se pretende executar em grande. Neste contexto, entendemos que a palavra modelar significa: fazer o modelo de; representar por meio de modelos.

Uma grande variedade de fenômenos exhibe um comportamento complicado, imprevisível e aleatório. Exemplos comuns incluem o fluxo turbulento de uma correnteza [11], as mudanças no tempo [12], os turbilhões formados quando misturamos vagarosamente dois corantes diferentes [13], o comportamento complexo e irregular na dinâmica de moléculas e átomos em um gás e partículas carregadas em um plasma [14].

Apesar da física ter feito grandes avanços nos últimos cem anos, não foi possível alcançar descrições teóricas desses fenômenos complexos. A dificuldade está no caráter não linear das equações matemáticas que modelam os sistemas (nos exemplos dados, a equação de Navier-Stokes para fluxo de fluidos e a equação de Newton para três ou mais partículas que se interagem). Desde que estas equações geralmente não admitem soluções analíticas de forma fechada, tem-se demonstrado extremamente difícil construir teorias úteis que possam prever, por exemplo, o arrasto na asa de um avião ou até que ponto são válidos os resultados da mecânica estatística.

Todavia, nos últimos anos, um progresso considerável tem sido

feito utilizando-se a síntese da simulação numérica e da aproximação analítica. A chave para o recente progresso tem sido o uso de computadores digitais de alta velocidade, e em particular, a computação gráfica de alta resolução, que permite ao matemático "experimental" construir modelos matemáticos e numéricos para identificar e explorar o comportamento do sistema estudado.

Esta nova aproximação, que combina "experimentos" numéricos com análises matemáticas, tem feito surgir um novo campo interdisciplinar chamado dinâmica não linear. O trabalho feito neste campo tem sido aplicado não apenas em física mas também a uma grande variedade de problemas não lineares em outros campos, como a evolução de reações químicas [15], o controle realimentado de circuitos elétricos [15], a interação de populações biológicas [16], a resposta de células cardíacas a impulsos elétricos [17], a queda e o aumento de preços na economia [18], etc..

Além da simulação numérica e da aproximação analítica para a abordagem de sistemas determinísticos não lineares de baixa ordem, é possível, em certos casos, valer-se das "analogias" do sistema para modelá-lo.

Define-se analogia como a relação entre dois fenômenos físicos distintos que podem ser descritos por um formalismo matemático idêntico, o qual pode existir entre um fenômeno elétrico e outro mecânico, entre um acústico e um elétrico, etc..

A utilização destas analogias pode ser fundamental e imprescindível em situações onde os resultados obtidos por via numérica ou analítica precisam ser confirmados, necessitamos de uma rápida varredura nos espaços de parâmetros para observarmos qualitativamente a dinâmica do sistema e não possuímos acesso a um computador digital de grande velocidade, quando queremos dar ênfase ao ensino de sistemas dinâmicos não lineares; etc..

Este trabalho irá utilizar diodos de silício e germânio de baixo custo para a modelagem do atrito seco, que surge em vários sistemas mecânicos; de sistemas biestáveis, que podem ser

utilizados para vários estudos em transição de fase; e do choque elástico e inelástico, que está presente em vários sistemas mecânicos.

figura I1: Oscilador Harmônico com atrito viscoso e seco.

figura I2: Sistema dinâmico biestável.

figura I3: Partícula em caixa.

Abordaremos quatro sistemas:

- 1.O oscilador harmônico na presença de atrito viscoso e atrito seco (figura I1):
- 2.Sistemas dinâmicos biestáveis (figura I2).
- 3.Partícula em caixa (figura I3).
- 4.Partícula em mesa vibratória (figura I4).

O capítulo I introduzirá o conceito de "caos" em sistemas não lineares, mostrando como exemplo a dinâmica do mapa logístico.

O capítulo II apresentará algumas considerações fundamentais sobre sistemas dinâmicos, abordando a dinâmica do oscilador harmônico.

O capítulo III introduzirá o conceito de modelos, analogias e normalização de equações diferenciais, exemplificando esta abordagem com o oscilador harmônico e o pêndulo simples.

Os capítulos IV a VII abordarão os sistemas mencionados nos itens 1 a 4, verificando a validade dos resultados obtidos nos modelos eletrônicos, mostrando que, apesar de possuírem equações simples, apresentam um comportamento extremamente complexo e caótico.

figura I4: Partícula em mesa vibratória.

CAPÍTULO I

CAOS EM SISTEMAS DETERMINISTICOS

Estudiosos em dinâmica não linear usam a palavra "Caos" como um termo técnico com um preciso significado matemático para se referir à irregularidade e ao comportamento imprevisível de sistemas determinísticos não lineares [1.1].

Contrário ao que Isaac Newton acreditava, as equações determinísticas da mecânica clássica não implicavam em um universo regular e ordenado. Apesar dos físicos modernos saberem que sistemas dinâmicos com grande número de graus de liberdade, como a atmosfera, pode exibir um comportamento aleatório para todos os propósitos práticos, a real surpresa é que sistemas determinísticos com apenas um ou dois graus de liberdade podem ser caóticos.

Tradicionalmente, o problema fundamental associado com a origem do caos em fluxos turbulentos, os fundamentos microscópicos da mecânica estatística e o surgimento de um comportamento aleatório em vários outros campos tem sido evitado usando-se o argumento que muitas partículas e graus de liberdade estavam envolvidos, tornando humanamente impossível descrever estes fenômenos através dos princípios básicos. Todavia, com o descobrimento de sistemas mais simples que possam exibir um comportamento caótico, uma pequena esperança surgiu para a solução destes problemas [1.2].

Talvez o mais simples exemplo de um sistema determinístico com dinâmica não linear seja o mapa logístico. Este sistema é descrito pela equação

$$X_{n+1} = A X_n (1 - X_n) \quad 1.1$$

que determina em intervalos discretos de tempo ΔT (segundos, meses, anos, etc) o valor futuro de uma variável X_{n+1} a partir da variável X_n (n inteiro e positivo).

$$\begin{array}{rclcl}
 & T = 0 & \rightarrow & X_0 \\
 n = 0 & \rightarrow & T = 1\Delta T & \rightarrow & X_1 = f(X_0) \\
 n = 1 & \rightarrow & T = 2\Delta T & \rightarrow & X_2 = f(X_1) \\
 n = 2 & \rightarrow & T = 3\Delta T & \rightarrow & X_3 = f(X_2) \\
 & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

A evolução da sequência X_n gerada por esta simples equação algébrica, exibe uma extraordinária transição da ordem para o caos a medida que o parâmetro A é aumentado.

Para propósitos ilustrativos, vamos examinar o uso do mapa logístico como um modelo para a evolução anual ($\Delta T = 1$ ano) de uma população de insetos X_n [1.3].

Escrevendo a equação 1.1 da forma $X_{n+1} = AX_n - AX_n^2$, vemos que esta é uma simples equação quadrática, com o primeiro termo linear e o segundo termo não linear. Quando a população inicial X_0 é pequena (muito menor que 1 numa escala normalizada), o termo não linear pode ser desprezado, e a população após um ano ($n=1$) será aproximadamente igual a AX_0 . Se $A > 1$, a população aumentará. Se $A < 1$, a população decrescerá. Desta forma, o termo linear da equação 1.1 pode ser interpretado como uma taxa linear de crescimento ou morte, o qual pode levar a um crescimento ou decaimento populacional exponencial. Se $A > 1$, a população irá crescer para um valor grande o suficiente para que o termo não linear, $-AX_n^2$, torne-se importante. Desde que este termo é negativo, ele representa uma taxa não linear de morte, que predomina quando a população torna-se muito grande.

A dinâmica deste mapa e sua dependência com relação ao parâmetro A , que mede a dimensão do termo linear e não linear, pode ser melhor compreendida utilizando-se análises gráficas. Considere os mapas de X_{n+1} versus X_n (chamados mapas de retorno) mostrados na figura 1.1 para quatro diferentes valores de A . A equação 1.1 define uma parábola invertida que intercepta o eixo X_n em 0 e 1 e que possui seu máximo em $X_n = 0,5$. Usando estes mapas de retorno, podemos ter uma compreensão qualitativa da dinâmica do mapa logístico sem desenvolver nenhum cálculo. Os valores

figura 1.1: Mapas de retorno.

sucessivos de população podem ser simplesmente determinados traçando-se linhas neste gráfico. Começa-se no valor inicial X_0 e move-se verticalmente até a parábola para obter-se X_1 . Deste ponto retorna-se para o eixo horizontal para repetir-se este procedimento, usando-se o valor de X_1 para obter-se X_2 . Podemos utilizar uma reta inclinada a 45° com relação à horizontal e que passa pela origem para facilitar esta operação (fig 1.1).

Esta análise gráfica nos mostra que, se a população normalizada começa com um valor de $X_0 > 1$, esta irá imediatamente a valores negativos, tornando-se extinta em uma interação. Da mesma forma, se $A > 4$, o pico da parábola irá exceder a 1, o que fará com que populações iniciais próximas a 0,5 tornem-se extintas em duas interações. Desta forma, iremos restringir nossas análises para

valores de A entre 0 e 4 e valores de X_0 entre 0 e 1.

Para valores de $A < 1$, a população sempre decresce para 0, como é mostrado para $A = 0,95$ na figura 1.1. A intersecção da parábola com a reta a 45° em $X_n = 0$ representa um ponto fixo estável no mapa. Pela teoria das perturbações podemos verificar que toda população inicial é atraída para este ponto fixo tornando-se extinta. Todavia, para $A > 1$ este ponto torna-se instável (isto pode ser verificado traçando-se as dinâmicas no segundo gráfico ou aplicando-se uma perturbação local, considerando-se a teoria das perturbações). Agora, a parábola irá interceptar a reta a 45° em $X = (A-1)/A$, a qual corresponde a um novo ponto fixo.

Para valores de A entre 1 e 3, todos os valores iniciais de populações (exceto 0 e 1) tendem a este ponto. Em seguida, quando A é aumentado para valores entre 3 e 4, a dinâmica muda de forma marcante. Primeiro, o ponto fixo torna-se instável e a população tende a um estado dinâmico que é alternado entre uma população grande e pequena. Esta sequência convergindo para este ciclo com período 2 é mostrada na figura 1.1 para $A = 3,2$: a população oscila entre dois pontos na parábola, $X_n \approx 0,5$ e $X_n \approx 0,8$, em anos alternados. Para valores maiores de A este ciclo de período 2 torna-se instável e é trocado por um ciclo de período 4 no qual a população alterna-se entre valores altos e baixos, retornando para seu valor original a cada 4 interações. A medida em que A é aumentado, a dinâmica converge para ciclos de período 8, 16, 32, 64, ..., finalmente acumulando para um ciclo de período infinito em $A \approx 3,57$.

Esta sequência de "bifurcações com dobramento de período" ao longo do tempo do mapa logístico é mostrado na figura 1.2. O gráfico mostra os valores de população, após os transitórios, em função de A entre 3 e 4. Para $A \leq 3$ apenas um único estado de equilíbrio é obtido em $X = (A-1)/A$. Para $A > 3$, temos dois estados de equilíbrio, depois quatro, oito, etc.. Cada bifurcação na figura 1.2 representa um dobramento do número de estados de equilíbrio e um dobramento no período.

O intervalo de A onde os ciclos são estáveis, decresce rapidamente a medida que o período dos ciclos aumenta, o que leva a uma rápida acumulação dos ciclos com períodos cada vez maiores. De fato, observando esta sequência de dobramento de períodos em experimentos numéricos, Feigenbaum [1.4] provou que o intervalo no qual um ciclo é estável decresce na razão geométrica de $4,66926016....$. O tremendo significado deste trabalho é que a razão e outras propriedades de sequências com bifurcação e dobramento de período são universais, considerando que aparecem na dinâmica de qualquer sistema que pode ser aproximadamente modelado por um mapa não linear com um extremo quadrático [1.5]. A teoria de Feigenbaum está sendo confirmada em uma grande variedade de sistemas físicos como fluidos turbulentos, reações químicas oscilantes, circuitos elétricos não lineares, lasers em anel, etc [1.6].

Para muitos valores de $A > 3,57$ o diagrama de bifurcações mostra que o comportamento da população ao longo do tempo é aperiódico (caótico) e varia continuamente em intervalos de X . A

figura 1.2: Dinâmica do mapa logístico

evolução de populações neste intervalo é indistinguível de processos aleatórios, mesmo sendo o mapa logístico totalmente determinístico, no sentido de que não existem forças randômicas agindo.

Todavia, também encontramos janelas com comportamento periódico entre o regime caótico. A janela mais proeminente corresponde a um ciclo de período 3 para $A \approx 3,83$ no qual a população cresce em dois anos sucessivos e decresce no terceiro. Da mesma forma, a medida que A é aumentado dentro desta janela de estabilidade, o ciclo de período 3 também pode exibir bifurcações com dobramento de período para ciclos de período 6, 12, 24.... Apesar das janelas de estabilidade para a maioria dos ciclos de maior ordem serem muito estreitas para serem vistas na figura 1.2, os ciclos de período 5 e 6 podem ser observados.

Outra informação obtida no diagrama de bifurcação é através dos riscos escuros que marcam as regiões superiores e inferiores e que cruzam o domínio caótico. Os riscos escuros representam valores de X que são mais prováveis e visitados com maior frequência durante a evolução caótica. Estas estruturas ordenadas foram descobertas "experimentalmente" em gráficos de alta resolução, como na figura 1.2.

A cascata infinita de dobramentos de períodos é um dos caminhos por onde o comportamento caótico pode surgir. Existem também outras duas rotas possíveis para o caos exemplificado na figura 1.2. Estas são as rotas por intermitência e a rota por crises.

Intermitência: Considere a figura 1.2. Para A um pouco acima de A_0 existe um ciclo de período 3. Para A um pouco abaixo de A_0 surge um comportamento caótico. Para entender o caráter desta transição é útil examinar este comportamento para A ligeiramente abaixo de A_0 . O comportamento parece ser o de um ciclo de período 3 por um longo intervalo de tempo, após o qual existe a manifestação repentina de um comportamento caótico, seguido por um outro longo intervalo de tempo por um quase ciclo de período 3 e

assim por diante. A medida que A se aproxima de A_0 por baixo, a duração média dos longos intervalos entre manifestações caóticas tornam-se cada vez maiores. Desta maneira o ciclo de período tres puro aparece em $A=A_0$. De outro modo, podemos dizer que o ciclo de período 3 é convertido em um comportamento caótico a medida que o parâmetro A é diminuído abaixo do valor crítico A_0 . Devemos frisar que, apesar de nosso exemplo de transição para o caos pelo caminho da intermitência estar associado com um ciclo de período 3 do mapa logístico da equação 1.1, este fenômeno (assim como o dobramento de período em cascata e crises) é bem geral; em outros sistemas ele pode ocorrer para outros períodos (período 1 por exemplo).

Crises: Pela figura 1.2 vemos que existe um comportamento caótico para $A \leq 4$, mas nenhum comportamento caótico para $A > 4$. Inversamente, a medida que A é diminuído em relação a 4 surge um comportamento caótico. Note que em $A=4$ a variação populacional ocupa o intervalo $0 < X < 1$. Se A é ligeiramente maior que 4, uma população com condições iniciais no intervalo $0 < X < 1$ irá seguir um comportamento caótico em um tempo finito, tendendo para fora do intervalo $0 < X < 1$, alcançando grandes valores negativos e tendendo a menos infinito. Estas súbitas mudanças qualitativas da dinâmica caótica quando um parâmetro é variado é chamado de "crise". Fenômenos associados a crises incluem mudança repentina da dinâmica caótica ; surgimento repentino do comportamento caótico (uma rota possível para o caos); e desaparecimento repentino da dinâmica caótica.

Outra importante observação em relação a dinâmica de sistemas caóticos, é a sua extrema dependência e sensibilidade a condições iniciais ou a pequenas perturbações. Tal fato foi descoberto por Lorenz em seus trabalhos pioneiros sobre meteorologia [1.7].

CAPITULO II

CONSIDERAÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS

Das relações básicas de um sistema, podemos, através do cálculo diferencial, obter seu modelo matemático [2.1].

Vamos considerar o sistema massa-mola mostrado na figura 2.1:

figura 2.1: Sistema massa mola.

Este sistema massa-mola sem nenhum atrito (oscilador harmônico) possui a seguinte equação de movimento:

$$m \frac{dx^2}{dt} + kx = 0 \quad 2.1$$

onde m é a massa do sistema e k a constante linear de mola. Considerando que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência angular natural do sistema, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 x = 0 \quad 2.2$$

Podemos estudar o movimento do oscilador harmônico e de uma infinidade de outros sistemas no plano $x-y$, onde x e y são coordenadas ortogonais cartesianas. Cada estado do sistema, isto é, cada valor do par de coordenadas $x-y$ corresponde a um ponto no plano $x-y$. O plano $x-y$ é chamado plano dos estados, ou plano de fase. Cada novo estado do sistema corresponde a um novo ponto no plano de fase. Desta maneira a variação do estado do sistema corresponde ao movimento de um ponto neste plano de fase (chamado ponto representativo), criando um caminho que é chamado Caminho de Fase.

Fazendo $dx/dt=y$ e obtendo-se a solução da equação diferencial analiticamente ou numericamente, quando não é possível fazê-lo, podemos obter a representação dos caminhos de fase no plano de fase.

Para o oscilador harmônico temos as seguintes equações paramétricas do caminho de fase:

$$\begin{aligned} x &= k \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ y &= -k \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad 2.3$$

Eliminando-se o tempo destas equações temos:

$$x^2/k^2 + y^2/k^2 \omega_0^2 = 1 \quad 2.4$$

Esta equação representa a curva de várias elipses no plano $x-y$, para cada valor de k e ω_0 . Neste caso todo o plano $x-y$ é preenchido por elipses, exceto no ponto $x=0$ e $y=0$, onde a elipse que "passa" neste ponto é degenerada em um ponto (figura 2.2).

Todas estas elipses representam caminhos no plano de fase, que representam a trajetória de movimento de um ponto neste plano. É fácil observar que pela direção escolhida por nós para estas coordenadas os caminhos de fase correm sempre no sentido horário.

Transformando a equação 2.1 em duas equações de primeira

ordem podemos obter as seguintes relações:

figura 2.2: Elipses geradas pela eq. 2.4.

$$dx/dt = y ; dy/dt = - \omega^2 x \quad 2.5$$

dividindo uma pela outra obtemos:

$$dy/dx = - \omega^2 x/y \quad 2.6$$

Pela equação 2.6 podemos obter a inclinação das curvas da figura 2.2, e como neste caso as equações são integráveis, podemos determinar as famílias de curvas do plano de fase da figura 2.2, que também são chamadas de Curvas Integrais.

A equação 2.6 determina diretamente em cada ponto do plano de fase a tangente das curvas integrais, exceto no ponto $x=0$, $y=0$, onde a direção da tangente torna-se indeterminada. Tais pontos onde a direção da tangente torna-se indeterminada são chamados de Pontos Singulares. No caso do oscilador harmônico, por este ponto

singular não é possível passar nenhuma curva. Tais pontos isolados envolvidos por curvas integrais são chamados de Centro.

Podemos observar neste caso que todos os caminhos de fase (exceto para $x=0$ e $y=0$, onde o caminho é degenerado em um ponto) corresponde a um movimento periódico, pois um ponto descrevendo este caminho retorna à mesma posição com a mesma velocidade em um tempo finito, gerando uma curva chamada Caminho de Fase Fechado.

É fácil mostrar que o "tempo de recorrência", ou o período do movimento é finito, pois o comprimento de nossos caminhos de fase fechados (elipses) são finitos.

Por outro lado, o caminho degenerado ou ponto singular $x=0$ e $y=0$ corresponde a um estado de equilíbrio. De fato, se o sistema encontra-se neste estado, aí irá permanecer, salvo a ação de alguma perturbação.

De uma forma geral, para estados de equilíbrio de um sistema dinâmico existem em correspondência no plano de fase pontos singulares, ou seja, pontos singulares correspondem a estados de equilíbrio.

Podemos visualizar intuitivamente o significado das palavras "estabilidade dos estados de equilíbrio". Entretanto, esta noção intuitiva é insuficiente e deve ser acrescida de conceitos mais rigorosos, que nos possibilitem abordar de maneira concreta qualquer sistema.

Vamos considerar para nossas análises um dos mais simples exemplos:

Imagine um pêndulo ideal sem atrito (figura 2.3). É evidente que existem dois estados de equilíbrio possíveis: (1) quando o pêndulo é colocado na posição inferior (a), (2) quando o pêndulo é colocado na posição superior (b). Também é evidente que esta posição inferior (a) é estável, e que a posição superior (b) é instável. De fato, se o pêndulo se encontra na posição (a), para

uma pequena perturbação finita que o tire desta posição de equilíbrio, o pêndulo irá iniciar um pequeno movimento oscilatório em torno da posição (a), e tenderia a esta posição caso houvesse a presença de alguma dissipação de energia. Se o pêndulo se encontra

figura 2.3: Estados de equilíbrio do pêndulo.

na posição (b), uma pequena perturbação finita faria com que ele se movesse com uma velocidade crescente para longe do ponto (b), e caso houvesse a presença de dissipação de energia, o pêndulo tenderia para o ponto (a).

Considerando o plano de fase temos que um ponto de equilíbrio é estável quando, para uma pequena perturbação finita, o ponto que descreve o caminho de fase nunca se mova para "longe" deste ponto. Com esta mesma perturbação, um ponto de equilíbrio é instável quando o ponto que descreve o caminho de fase se mova para "longe" deste ponto.

Tal critério é ainda vago, pois a palavra "longe" não é suficientemente bem definida. Para darmos uma noção mais rigorosa à estabilidade temos a seguinte definição (figura 2.4):

um estado de equilíbrio é estável se, para qualquer região demarcada como um possível resultado a perturbações do estado de equilíbrio (região ε), nós podemos indicar uma região $\delta(\varepsilon)$,

figura 2.4: Definição de estabilidade.

contendo o estado de equilíbrio e tendo a propriedade de que nenhum movimento, começando dentro de δ , nunca cruze o contorno da região ε . Por outro lado, um estado de equilíbrio é instável, se existindo a região ε , não existe a região $\delta(\varepsilon)$ contendo o estado de equilíbrio e tendo a propriedade de que um movimento, começando em δ , nunca cruze o contorno da região ε .

Podemos traduzir esta definição de estabilidade para a linguagem de inequações matemáticas, levando em consideração as coordenadas $x-y$ do plano de fase. Um estado de equilíbrio $x=\bar{x}$ e $y=dx/dt=0$ do plano de fase é considerado estável se, havendo um pequeno valor arbitrário ε ($\varepsilon>0$), é possível determinar $\delta(\varepsilon)$ que, se para $t=0$:

$$|x(0)-\bar{x}|<\delta \text{ e } |y(0)|<\delta \quad 2.7$$

e em seguida para $0<t<\infty$

$$|x(t) - \bar{x}| < \epsilon \text{ e } |y(t)| < \delta \quad 2.8$$

Chamamos este critério de estabilidade como critério de estabilidade de Liapunov [2.2].

A figura 2.5 mostra graficamente o resultado obtido para o oscilador harmônico para o ponto singular $(\bar{x}, 0)$:

figura 2.5: Critério de Liapunov aplicado ao Oscilador Harmônico.

Este estado de equilíbrio é estável pois satisfaz (2.7) e (2.8), e classificamos este ponto como Centro.

Considerando agora o oscilador harmônico na presença de um atrito dissipativo, e que este atrito seja proporcional à velocidade, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad 2.9$$

onde b ($b > 0$) é o coeficiente de atrito.

Introduzindo a notação $b/m=2h$, $k/m=\omega_0^2$, podemos converter a equação 2.9 para uma forma mais usual:

$$d^2x/dt^2 + 2h dx/dt + \omega_0^2 x = 0 \quad 2.10$$

A solução desta equação é, excluindo o caso particular onde $h^2=\omega_0^2$:

$$x = A \exp \lambda_1 t + B \exp \lambda_2 t \quad 2.11$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes da equação quadrática chamada equação característica:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad 2.12$$

Para $h^2 > \omega_0^2$ estas raízes são reais e para $h^2 < \omega_0^2$ são complexas. Desta maneira, dependendo do sinal de $h^2 - \omega_0^2$, vamos obter dois tipos de solução e dois diferentes processos: para $h^2 < \omega_0^2$, um processo oscilatório amortecido e para $h^2 > \omega_0^2$ um processo não oscilatório amortecido.

Para o processo oscilatório amortecido temos o diagrama de fase mostrado na figura 2.6. Todos os estados de todos os caminhos de fase tendem para a posição de equilíbrio ($x=0$ e $y=0$), e todos os caminhos de fase são espirais. Isto obviamente significa que o processo é amortecido e os valores máximos de x e y decrescem a cada volta. É também claro que o ponto singular $x=0$ e $y=0$ corresponde a um estado de equilíbrio.

Os resultados obtidos das análises da característica do movimento no plano de fase podem ser formulados da seguinte maneira: dando qualquer condição inicial, nosso sistema desenvolve um movimento oscilatório ao redor da posição de equilíbrio $x=0$ e $y=0$, exceto quando as condições iniciais correspondem exatamente ao estado de equilíbrio.

No caso considerado temos apenas um ponto singular no sistema

figura 2.6: Processo oscilatório amortecido.

de curvas integrais, sendo um ponto assintótico para todas as curvas integrais. Um ponto singular, que é um ponto assintótico para todas as curvas integrais, tendo a forma de espirais fechadas uma na outra, é chamado de Foco.

Podemos notar pelo critério de estabilidade de Liapunov que o sistema é estável, pois podemos escolher uma região ϕ de maneira que o ponto representativo não deixe o contorno da região ϕ (figura 2.7). Desta maneira o ponto de equilíbrio é estável, e o ponto singular é um Foco Estável.

Um ponto singular do tipo foco pode ser estável ou instável (em contraste com o ponto singular do tipo centro que é sempre estável). Neste exemplo o foco é estável desde que a parte real de λ_1 e λ_2 em 2.11 seja negativa. O significado físico desta condição de estabilidade é claro: o atrito é dissipativo, opondo-se ao movimento.

figura 2.7: Estabilidade de um foco pelo critério de Liapunov.

Para o processo amortecido não oscilatório temos o diagrama de fase mostrado na figura 2.8:

figura 2.8: Processo amortecido não oscilatório.

Podemos notar primeiramente que, para toda condição inicial o movimento é amortecido, desde que λ_1 e λ_2 são números reais e negativos, e que para $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$. Como as raízes da equação característica 2.12 não possuem parte imaginária, o processo oscilatório é impossível e temos um processo aperiódico. Temos apenas um ponto singular no sistema, e como neste caso é impossível termos um processo oscilatório, este ponto singular é chamado de Nó.

É fácil observar que o estado de equilíbrio de um nó é estável no critério de Liapunov desde que o ponto representativo move-se ao longo das curvas integrais em direção a origem das coordenadas. Desta maneira o estado de equilíbrio é estável, correspondendo a um Nó Estável. Um nó também pode ser instável, bastando para isso que os expoentes λ_1 e λ_2 de 2.11 sejam positivos. Como no caso do foco, o significado físico é que se o estado de equilíbrio em um sistema sem atrito e com um grau de liberdade é estável, logo, a adição de um atrito dissipativo não pode criar um distúrbio na estabilidade.

No caso onde $h^2 = \omega^2$, a equação diferencial possui a solução:

$$x = (A+Bt) \exp(-\gamma t) \quad 2.13$$

e do ponto de vista do comportamento das curvas integrais e do tipo de ponto singular, este caso limite possui um comportamento atribuído ao caso $h^2 > \omega^2$, onde temos um ponto singular estável do tipo Nó.

Assim como no caso do oscilador harmônico, podemos também obter a inclinação dos caminhos de fase através da equação 2.14:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega^2 x}{y} \quad 2.14$$

Para considerarmos os casos onde existe a ação de uma força repulsiva vamos observar a equação do oscilador harmônico com uma "constante de mola negativa":

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - kx = 0 \quad 2.15$$

podemos modificar esta equação para:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0 \quad 2.16$$

reduzindo o sistema a equações diferenciais de primeira ordem temos:

$$\frac{dx}{dt} = y ; \frac{dy}{dt} = + \omega_0^2 x \quad 2.17$$

eliminando-se o tempo obtemos uma equação de primeira ordem conectando x com y :

$$\frac{dy}{dx} = + \omega_0^2 x / y \quad 2.18$$

O estado de equilíbrio neste sistema (determinado pela condição $dx/dt=0$ e $dy/dt=0$) é o ponto $x=0$ e $y=0$. Como podemos integrar a equação 2.18, temos a seguinte equação para as curvas integrais:

$$y^2 - \omega_0^2 x^2 = c \quad 2.19$$

que nos dá o seguinte plano de fase da figura 2.9. A origem das coordenadas é o único ponto singular da família de curvas integrais. Todas as curvas integrais, exceto $y=\omega_0 x$ e $y=-\omega_0 x$, são hipérboles que passam pela origem das coordenadas. Tal ponto singular, por onde passam apenas duas curvas integrais, as quais são assintotas para todas as curvas integrais remanescentes, é chamado ponto do tipo Sela.

Pelo critério de estabilidade de Liapunov, o estado de equilíbrio é instável desde que não podemos escolher uma região $\delta(\varepsilon)$ de maneira que o ponto representativo, estando nesta região no instante inicial, não ultrapasse o contorno da região ε dada.

Todas as equações até aqui abordadas foram equações diferenciais homogêneas de segunda ordem, possuindo a forma:

figura 2.9: Hipérboles descritas pela eq. 2.19.

$$dx/dt = y ; dy/dt = f(x,y) \quad 2.20$$

Como observamos, podemos obter as inclinações das curvas integrais pela relação:

$$dy/dx = f(x,y)/y \quad 2.21$$

Esta equação nos leva a tirar duas importantes relações a respeito das curvas integrais para sistemas homogêneos de segunda ordem:

a) toda curva integral deve cortar o eixo x mantendo um ângulo de 90° com relação a este (válido para sistemas não homogêneos).

b) não é possível haver o cruzamento das curvas integrais no espaço de fase.

Centros, nós e focos estáveis são exemplos simples de atratores. Outro importante exemplo de atrator é o ciclo limite

estável. Um ciclo limite é uma trajetória fechada e periódica, "isolada", no sentido que nenhuma trajetória próxima também é fechada (os caminhos de fase fechados do oscilador harmônico, por exemplo, são obviamente não isolados).

Ciclos limites, os quais existem apenas em sistemas dissipativos não lineares, são de grande importância prática [2.3]. Com suas "bacias de atração" no espaço de fase, ciclos limite estáveis, assim como um nó estável ou um foco estável, são independentes de condições iniciais, e são determinados pelos parâmetros da equação.

Em muitas aplicações físicas não é difícil compreender o surgimento de um ciclo limite como um balanço de energia entre a "auto-excitação" e o amortecimento. Como exemplo podemos considerar o relógio de pêndulo. Neste exemplo, os ganchos que controlam a rotação da roda de escape também contribuem com impulsos periódicos. O aumento das oscilações do pêndulo aumentam até que o atrito faz com que uma situação de equilíbrio seja alcançada. Este ciclo limite é independente dos impulsos de partida e é estável contra pequenas perturbações (como ocorre, por exemplo, quando o relógio é movido de um lugar para outro).

Outro exemplo é provido pela equação de Van Der Pol [2.4]:

$$d^2x/dt^2 + b(x^2-1) dx/dt + x = 0, \quad b > 0 \quad 2.22$$

Nesta equação o amortecimento é dissipativo quando $|x| > 1$ e auto-excitado quando $|x| < 1$. A equação 2.22 é equivalente a $dy_1/dt = y_2$, $dy_2/dt = -b(y_1^2-1)y_2 - y_1$. Existe um ponto fixo em $y_1=y_2=0$, e pelo critério de estabilidade de Liapunov vemos que este ponto é um foco instável. Trajetórias no espaço de fase próximas da origem tendem para fora, mas para $|x| > 1$ existe um amortecimento dissipativo, que provoca o surgimento de um ciclo limite. A figura 2.10 mostra a trajetória no espaço de fase, para condições iniciais:

figura 2.10: Espaço de fase para a eq. de Vanderpol.

CAPITULO III

MODELOS E ANALOGIAS

É possível a um sistema possuir vários modelos e analogias. Vamos considerar novamente o sistema massa-mola, mas agora, na presença de um atrito viscoso proporcional à velocidade e perturbado por uma força externa F_e (figura 3.1).

figura 3.1: Sistema massa-mola com atrito viscoso e força externa.

Considerando a somatoria de forças sobre o corpo de massa m , temos a seguinte equação diferencial que descreve o movimento:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k x = F_e(t) \quad 3.1$$

onde m é a massa do sistema, b a constante de atrito proporcional à velocidade, k a constante de mola e $F_e(t)$ a força externa que perturba o sistema.

Este sistema possui um modelo matemático equivalente a pelo menos três outros sistemas:

-circuito elétrico com resistência, indutância e capacitância série (RLC série).

-circuito elétrico com resistência, indutância e capacitância paralelo (RLC paralelo).

-circuito elétrico com amplificadores operacionais, capacitâncias e resistências (Amp Op).

Para visualizarmos o circuito RLC série, temos a figura abaixo:

figura 3.2: Circuito RLC série.

neste circuito temos a resistência R , a indutância L e a capacitância C em série sendo alimentadas por uma fonte de tensão $V_e(t)$.

Sabemos que a somatória das tensões em uma malha deve ser zero, o que nos leva à seguinte relação:

$$V_R + V_L + V_C = V_e(t)$$

para as tensões e correntes em um resistor, indutor e capacitor, temos as seguintes relações:

$$V_R = RI ; V_L = L \, dI/dt ; Q = CV_C ; I = C \, dV_C/dt \quad 3.3$$

em relação a V_C temos:

$$RC \, dV_C/dt + LC \, d^2V_C/dt^2 + V_C = V_e(t) \quad 3.4$$

considerando $V_C = Q/C$ e rearranjando os fatores, temos em relação a carga Q do capacitor:

$$L \, d^2Q/dt^2 + R \, dQ/dt + Q/C = V_e(t) \quad 3.5$$

Para considerarmos o circuito RLC paralelo, vamos observar a figura 3.3:

figura 3.3: Circuito RLC paralelo.

neste circuito temos a resistência R , a indutância L e a capacitância C em paralelo sendo alimentadas pela fonte de

corrente $I_e(t)$. Sabemos que a somatória das correntes em um nó deve ser igual a zero, o que nos dá a seguinte relação:

$$I_R + I_L + I_C = I_e(t) \quad 3.6$$

considerando as relações 3.3, temos em relação a I_L :

$$L \frac{dI_L}{dt} + I_L + C_L \frac{d^2 I_L}{dt^2} = I_e(t) \quad 3.7$$

considerando $I_L = \phi/L$, onde ϕ é o fluxo magnético do indutor, temos, rearranjando os fatores:

$$C \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 1/R \frac{d\phi}{dt} + \phi/L = I_e(t) \quad 3.8$$

Podemos obter o mesmo modelo através de amplificadores operacionais, como é mostrado na figura 3.4.

Este circuito nada mais é que o circuito RLC paralelo, onde a indutância L é simulada pelo circuito através do capacitor C_2 .

figura 3.4: Circuitos com amplificadores operacionais.

Para amplificadores operacionais utilizando resistores e capacitores, temos as relações básicas mostradas nas figuras 3.5a e 3.5b [3.1].

$$I = V_1/R_1 = - V_2/R_2$$

3.9

figura3.5a: Circuito somador inversor.

$$I = V_1/R = - C \, dV_2/dt$$

3.10

figura 3.5b: Circuito integrador inversor.

Considerando que a somatória das correntes no ponto B deva ser igual a zero, temos:

$$I_{RF} + I_{R1} + I_{C1} + I_e = 0$$

3.11

levando em conta as relações 3.9 e 3.10:

$$V/R_F + V_A/R_1 + R_1 C_1 \, dV_A/dt + V_e/R_e = 0$$

3.12

como $V_A = R_2 C_2 dV/dt$ temos:

$$V/R_F + R_2 C_2 / R_1 \, dV/dt + R_1 C_1 R_2 C_2 \, d^2 V/dt^2 + V_e/R_e = 0$$

3.13

e rearranjando os fatores:

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + R_2 C_2 / R_1 \frac{dV}{dt} + V/R_1 = -V_E/R_1 \quad 3.14$$

As equações 3.5, 3.8 e 3.14 são equações diferenciais lineares não homogêneas. Estas equações possuem a mesma forma pois representam sistemas análogos.

Notamos também que estas equações possuem vários parâmetros, e que alguns deles são independentes. Para melhor visualizarmos esta afirmação, vamos utilizar o recurso da normalização, como é mostrado a seguir.

Vamos considerar a seguinte equação diferencial:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + c z = P(t) \quad 3.15$$

dividindo toda equação por c temos:

$$\frac{a}{c} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{c} \frac{dz}{dt} + z = \frac{P(t)}{c} \quad 3.16$$

transformando o tempo t em um tempo τ sem dimensões:

$$t = k\tau \quad 3.17$$

substituindo a relação 3.17 em 3.16:

$$\frac{a}{c} \frac{d^2 z}{k^2 d\tau^2} + \frac{b}{c} \frac{dz}{k d\tau} + z = \frac{P(k\tau)}{c} \quad 3.18$$

vamos atribuir um valor a k para que $k^2(c/a)=1$:

$$k^2 = a/c \quad 3.19$$

desta maneira iremos ter a seguinte equação:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + b/\sqrt{ac} \frac{dz}{d\tau} + z = P(k\tau)/c \quad 3.20$$

tornando $Q = \sqrt{ac}/c$, e $P(k\tau)/c = p(\tau)$, temos:

$$d^2z/dt^2 + 1/Q dz/dt + z = p(\tau) \quad 3.21$$

onde Q é o fator de qualidade do sistema, $p(\tau)$ o termo forçante.

Observando a equação 3.21 notamos que esta possui quatro parâmetros não dimensionais independentes. O fator de qualidade Q do sistema mostra a relação entre os parâmetros do sistema.

Para melhor visualizarmos os sistemas análogos ao oscilador harmônico com atrito viscoso, podemos montar a seguinte tabela (tabela 3.1):

Eq.Base	Massa-Mola	RLC Série	RLC Paralelo	Amp. Op.
z	Posição x	Carga Cap. Q	Fluxo Ind. ϕ	Tensão pt.A V
dz/dt	Velocidade dx/dt	Corrente I $I=dQ/dt$	Tensão V $V=d\phi/dt$	Propon.a Vc $Vc=R_2C_2dV/dt$
a	Massa m	Indutância L	Capacitância C	$C_1R_2C_2$
b	Const.Atrito Viscoso: k	Resistência R	Admit.Resist. $1/R$	R_2C_2/R_1
cz	Força Restit. Mola : kx	Tensão Cap. $Vc=Q/C$	Corrente Ind. $IL=\phi/L$	Cor.Realim. $IRF=V/RF$
c	Const. Rest. Mola : k	Admit. Capac. $1/C$	Admit. Resis. $1/R$	Ad.Res.Real. $1/RF$
$P(t)$	Força Aplic. $F(t)$	Tensão Aplic. $V(t)$	Cor. Aplicada $I(t)$	Cor.Aplicada $-VE(t)/RE$
Freq.Nat. $\omega_0=\sqrt{c/a}$	$\sqrt{k/m}$	$\sqrt{1/LC}$	$\sqrt{1/LC}$	$-1/2$ $(C_1R_2C_2R_f)$
T Amort. $\tau_a=b/c$	k/m	RC	L/R	R_2C_2RF/R_1
Fator de Qualidade $Q=\sqrt{ac/b}$	$\sqrt{mk}/k$	$\sqrt{L/C}/R$	$\sqrt{C/L} R$	$1/2$ $\left[\frac{R_1^2 C_1}{RFR_2C_2} \right]$

tabela 3.1

Outro exemplo que podemos mostrar como um sistema que possui vários modelos equivalentes é o pêndulo.

Como um modelo simplificado para o pêndulo vamos considerar uma massa pontual m fixa em uma das extremidades de uma haste rígida de peso desprezível e comprimento l , sendo a outra extremidade fixa em uma referência inercial, permitindo movimentos rotacionais, estando todo o sistema sujeito a um campo gravitacional constante g .

A figura 3.6 mostra o sistema com maiores detalhes. O deslocamento s é igual a θl , onde θ é medido em radianos. As forças que agem na massa m é a tensão T e a força gravitacional mg , que é representada pelas componentes tangencial e perpendicular. A componente tangencial possui o valor $-mg\sin\theta$ pois esta em oposição a direção de referência. Pela segunda lei de Newton temos:

$$-mg\sin\theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad 3.20$$

Este sistema é não linear devido ao termo $\sin\theta$.

Vamos considerar agora que neste sistema exista a presença de atrito viscoso, cuja magnitude é proporcional à velocidade da massa m , a presença de uma força externa que atua sobre o sistema. Desta maneira temos:

$$-mg\sin\theta - Rl \frac{d\theta}{dt} + F(t) = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad 3.21$$

rearranjando os fatores e multiplicando todos os membros por l temos:

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + Rl^2 \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin\theta = lF(t) \quad 3.22$$

considerando que:

$ml^2 = a$, $Rl^2 = b$, $mgl = c$, $lF(t) = \Gamma(t)$, temos:

figura 3.6: Pêndulo.

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + c \operatorname{sen}\theta = \Gamma(t) \quad 3.23$$

que é a equação do pêndulo forçado em um meio viscoso, em função do ângulo θ .

Outros três fenômenos físicos possuem um comportamento análogo: Junção Josephson [3.2], Malhas de Sincronismo de Fase (Fase-Locked-Loop) [3.3] e as Máquinas Síncronas [3.4].

Vamos considerar um oscilador de Josephson na presença de radiações de microondas e descrito pelo modelo de "current driven shunted junction" [3.5]. Se C é a capacitância da junção, R a resistência de estado normal, e V a diferença de potencial através da junção, a fase de super-condução φ é determinada pelas seguintes equações:

$$C \frac{d\varphi}{dt} + V/R + I_0 \operatorname{sen}\varphi = IRF \cos\omega t \quad 3.24$$

$$d\varphi/dt = 2e/h \, V \quad 3.25$$

onde I_c é a supercorrente crítica e IRF a amplitude do campo de microondas na frequência de oscilação ω . Trocando o potencial na equação 3.24 por sua expressão em termos da equação 3.25, obtemos a equação diferencial não linear para φ , análoga ao pêndulo:

$$Ch/2e \, d^2\varphi/dt^2 + h/2RE \, d\varphi/dt + I_c \, \text{sen}\varphi = IRF \, \cos\omega t \quad 3.26$$

Para mostrar o comportamento de uma malha de sincronismo de fase utilizaremos o circuito proposto por Humieres, Beasley, Huberman e Libchaber mostrado no diagrama básico funcional da figura 3.7:

figura 3.7: Malha de Sincronismo de Fase.

No circuito, o sinal de saída do oscilador controlador de tensão (VCO) é misturado com o sinal periódico de referência; o sinal resultante é filtrado (filtro passa baixa) e em seguida realimentado para a saída do VCO através de um amplificador operacional. O resistor e o capacitor no circuito de realimentação do amplificador operacional promovem a inércia e o amortecimento do "loop". A mistura e a filtragem são acopladas pelo uso de um circuito "sample-and-hold" (SH). Se o sinal de referência é

$V \sin(\omega_s t + \phi_0)$, a saída do circuito SH tomada como amostra no tempo T_{n+1} , a entrada $V(t)$ do VCO é dada por:

$$C \, dV/dt + V/R + V_1/R_s \sin(\omega_s T_n + \phi_0) = -V_E(t)/R_E \quad 3.27$$

O tempo de coleta T_{n+1} é relacionado para T_n e para a entrada do VCO por:

$$\omega_s (T_{n+1} - T_n) + k \int_{T_n}^{T_{n+1}} V(t) \, dt = 2\pi \quad 3.28$$

$$\theta_n = (2n + 1) \pi - \omega_s T_n - \phi_0 \quad 3.29$$

temos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi - \omega_s (T_{n+1} - T_n) \quad 3.30$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + k \int_{T_n}^{T_{n+1}} V(t) \, dt$$

Se ω_s é maior que a maior frequência de $V(t)$ durante o tempo T_n e T_{n+1} , $V(t)$ pode ser considerado como constante e escrito:

$$V(t) = \lim_{\omega_s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \left[\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{T_{n+1} - T_n} \right] \right] = \frac{d\theta/dt}{k} \quad 3.31$$

Desta maneira, se podemos negligenciar o tempo entre a tomada de amostra:

$$d\theta/dt = k \, V(t) \quad 3.32$$

$$C \, dV/dt + V/R + V_1/R_s \sin\theta = -V_E(t)/R_E \quad 3.33$$

ou

$$C/k \, d^2\theta/dt^2 + 1/kR \, d\theta/dt + V_1/R_s \sin\theta = -V_E(t)/R_E \quad 3.34$$

onde V_1 é a amplitude de pico da referência.

Para modelarmos a máquina síncrona (figura 3.8), abordaremos o caso mais simples de uma máquina ligada a um barramento de tensão e frequência constantes. No terminal mecânico, além do conjugado gerado na rotação síncrona (conjugado síncrono), existem o conjugado de indução ou de amortecimento T_D , o conjugado de carga T_L e o conjugado de inércia. Assim:

figura 3.8: Máquina Síncrona

$$T_s + T_D = T_L + J \frac{d\omega}{dt} \quad 3.35$$

O conjugado síncrono gerado é:

$$T_s = -f(\delta) \quad 3.36$$

onde f é uma função do ângulo de potência δ . O conjugado de amortecimento gerado T_D é:

$$T_D \cong -k_1 \frac{d\delta}{dt} \quad 3.37$$

A função $f(\delta)$ para a máquina síncrona de pólos lisos é:

$$f(\delta) = k_2 \sin \delta \quad 3.38$$

A equação para o terminal mecânico da máquina síncrona torna-se:

$$-k_2 \sin \delta - k_1 \frac{d\delta}{dt} = T_L + J \frac{d\Omega}{dt} \quad 3.39$$

Exprimindo a velocidade Ω em função do ângulo de potência δ temos:

$$\theta = \theta_0 + \Omega_0 t + \frac{2}{p} \delta \quad 3.40$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega = \Omega_0 + \frac{2}{p} \frac{d\delta}{dt} \quad 3.41$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{p} \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad 3.42$$

portanto:

$$\frac{2J}{p} \frac{d^2\delta}{dt^2} + k_1 \frac{d\delta}{dt} + k_2 \sin \delta = -T_L \quad 3.43$$

Para normalizarmos as equações do pêndulo, vamos considerar a equação:

$$a \frac{d^2z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + c \sin z = P(t) \quad 3.23$$

Dividindo toda a equação por c obtemos:

$$\frac{a}{c} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{b}{c} \frac{dz}{dt} + \sin z = P(t)/c \quad 3.44$$

transformando o tempo t em $k\tau$, temos:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dz}{d\tau} + \sin z = p(\tau) \quad 3.45$$

onde $Q = \sqrt{ac}/b$ e $p(\tau) = P(k\tau)/c$.

Podemos também montar uma tabela para melhor visualizarmos a relação entre os parâmetros destes sistemas:

Eq.Base	Pêndulo	J.Juncion	Máq.Síncrona	Malha S.Fase
z	Posição Ang. θ	Dif.FaseQuant φ	Angulo Poten. δ	Dif.de Fase θ
dz/dt	Vel.Angular $d\theta/dt$	$2eV/h$	Vel.Ang.Pot. $d\delta/dt$	Vel.Angular $d\theta/dt=kV$
a	Mom.Inércia ml^2	$hc/2e$	Mom.Inércia $2J/p$	C/k
b	Const.Atrito Viscoso: $k1^2$	$h/2eR$	Const.Amort. Gerado: $k1$	$1/kR$
csenz	Torque Restit. $mglsen\theta$	Cor.Josephson $Icsen\varphi$	Potência Forn. $k2sen\delta$	Cor.Realim. IFB
c	$mg1$	Cor.Critica Ic	Potência Max. $k2$	$V1/Rs$
P(t)	Torque Aplic. $T(t)$	Corrente Ext. $IRF(t)$	Conj.de Carga $-TL(t)$	Cor.Aplicada $-VE(t)/RE$
Freq.Nat. $\omega_0=\sqrt{c/a}$	$\sqrt{g/l}$	$(2eIc/hcC)^{1/2}$	$\sqrt{pk2/2J}$	$^{-1/2}$ $(kV1/RsC)$
t Amort. $ta=b/c$	k/mg	$h/2eRIc$	$k1/k2$	$Rs/kRV1$
Fator de Qualidade $Q=\sqrt{ac}/b$	$m\sqrt{g/l} / k$	$(2eIcR^2c/h)^{1/2}$	$\sqrt{2Jk2/p} / k1$	$\left[\frac{kV1CR^2}{Rs} \right]^{1/2}$

tabela 3.2

CAPÍTULO IV

OSCILADOR COM ATRITO SECO

4.1 Análises Básicas.

Um sistema massa-mola na ausência de atrito, possui sua dinâmica descrita pela equação do oscilador harmônico:

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0 \quad 4.1.1$$

onde ω_0^2 é a frequência angular natural do sistema, k a constante linear de mola e m a massa do corpo.

A lei linear assumida para atrito viscoso [4.1] é totalmente inadequada para representar as características do atrito seco (fricção) entre duas superfícies sólidas não lubrificadas. As características básicas deste tipo de atrito são muito bem modeladas considerando-se em pequenas velocidades um atrito constante. Este atrito "constante" é constante em amplitude mas não em direção, desde que a direção da força de atrito é sempre oposta a direção da velocidade. Esta dependência da força de atrito f em função da velocidade pode ser observada na fig.4.1.1.

figura 4.1.1: Característica do atrito seco.

Observe que para $v=0$ f pode assumir, dependendo do valor de outras forças que estejam agindo no sistema, qualquer valor entre $+f_0$ e $-f_0$. A massa m sofre forças de atrito e das molas ($-kx$). Esta massa mantém-se em repouso ($dx/dt=0$) se a força de restituição das molas não excede f_0 em módulo. Desta maneira, todas as posições do oscilador com coordenadas $-f_0/k \leq x \leq f_0/k$ podem ser posições de repouso. Todavia, se $|kx| > f_0$ o oscilador está em movimento. Quando o oscilador está em movimento, a força de fricção é $f = +f_0$ para $dx/dt < 0$ e $f = -f_0$ para $dx/dt > 0$.

Desta maneira, podemos descrever o atrito de fricção pelas equações:

$$f = \begin{cases} +f_0 & \text{p/ } dx/dt < 0 \\ +f_0 & \text{p/ } dx/dt = 0^- \\ +kx & \text{p/ } dx/dt = 0 \text{ e } |kx| \leq f_0 \\ -f_0 & \text{p/ } dx/dt = 0^+ \\ -f_0 & \text{p/ } dx/dt > 0 \end{cases} \quad 4.1.2$$

(A força de atrito seco é desta maneira uma função descontínua, e portanto, não linear, dependendo não apenas da velocidade dx/dt , mas também da coordenada x do oscilador).

A equação diferencial não linear do movimento do oscilador torna-se:

$$m \, d^2x/dt^2 - f_0 + kx = 0 \quad 4.1.3$$

que pode ser escrita considerando-se o sistema linear por partes da seguinte maneira:

$$m \, d^2x/dt^2 + f_0 + kx = 0 \quad (dx/dt > 0) \quad 4.1.4$$

$$m \, d^2x/dt^2 - f_0 + kx = 0 \quad (dx/dt < 0) \quad 4.1.5$$

Suponha que, para um instante inicial de tempo, $dx/dt < 0$. O movimento do sistema é descrito por 4.1.5. A velocidade decresce até $t=t_1$, $x=x_1$, onde a velocidade do sistema reduz-se a zero. Assumindo que $|kx| > f_0$, a velocidade muda o seu sinal e o sistema

irá mover-se na direcção oposta. O movimento será descrito pela equação 4.1.4, onde as condições iniciais são a coordenada e a velocidade $(x_1, 0)$. Este processo irá continuar até que o corpo de massa m finalmente alcance uma condição de repouso. Vamos considerar as seguintes modificações: $k/m = \omega^2$ e $f_0/m = a\omega^2$ onde $a = f_0/k$. As equações de movimento tornam-se ($\text{sgn}(a) = \text{sinal } a$):

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = -\text{sgn}(dx/dt) a \omega^2 \quad 4.1.6$$

Vamos fazer $E_1 = x - a$, quando $dx/dt < 0$ e $E_2 = x + a$, quando $dx/dt > 0$. Desta maneira teremos $d^2E_1/dt^2 + \omega^2 E_1 = 0$ (para $dE_1/dt < 0$) e $d^2E_2/dt^2 + \omega^2 E_2 = 0$ (para $dE_2/dt > 0$), com variáveis referidas a diferentes origens. Desta maneira o movimento do sistema é obtido combinando-se duas metades de oscilações harmónicas centradas em duas diferentes posições de equilíbrio distantes $+a$ e $-a$ do ponto $x=0$. A troca de um modo para outro se dá quando a velocidade é igual a zero e $|x| > a$.

Para encontrar-se a função de x com relação ao tempo t proceda da seguinte maneira (fig.4.1.2):

figura 4.1.2: Gráfico de $x(t)$.

Para uma posição inicial x_{01} , com x_{01} positivo e $dx_{01}/dt=0$, a velocidade será primeiramente negativa, com a origem do movimento em $+a$, (na fig.4.1.2 por " a " acima do eixo do tempo). Finalmente o sistema chega ao mínimo negativo x_{02} , onde $|x_{02}|=|x_{01}|-2a$.

Depois para $dx/dt>0$ a segunda equação torna-se válida e consequentemente, haverá oscilações com a posição de equilíbrio disposta em " $-a$ ", isto é, pela quantidade " a " abaixo do eixo do tempo. No fim desta meia oscilação o sistema chegará a outro máximo local x_{03} , onde $|x_{03}|=|x_{02}|-2a=|x_{01}|-4a$. Desta maneira, o módulo inicial de x irá decrescer em cada meia oscilação o valor absoluto $2a$, e em cada duas meias oscilações o valor $4a$. É claro que esta progressão consiste em um número finito de termos e o movimento irá cessar após um finito número de oscilações. De fato, o movimento subsequente ao máximo x_{03} na fig.4.1.2, fará com que o sistema fique parado entre as linhas $+a$ e $-a$. Ele ficará parado pois nesta região $|kx|\leq f_0$.

Neste oscilador o máximo inicial não decresce de acordo com uma progressão geométrica como no oscilador harmônico com amortecimento viscoso, mas sim de acordo com uma progressão aritmética. O intervalo de tempo entre dois máximos não depende, no caso de atrito "constante", do valor desta força, e seu período é igual ao do oscilador harmônico. Mas, é facilmente verificado examinando-se a figura 4.1.2, que o intervalo de tempo entre um máximo (em módulo) e um zero é maior que o intervalo de tempo entre um zero e seu máximo subsequente. Finalmente, existe outra diferença entre sistemas que possuem um amortecimento "constante", pois neste caso, a divisão entre um processo oscilatório (sub-amortecido) e um processo não oscilatório (super-amortecido) perde seu significado, desde que para um atrito "constante" arbitrário é sempre possível escolher uma condição inicial suficientemente grande de forma que o sistema desenvolva um certo número de oscilações antes de parar. O significado físico desta propriedade fica particularmente claro quando é analisado o balanço de energia.

Iniciando seu movimento em x_{01} com velocidade inicial igual a

zero, a energia inicial é a energia potencial $V_1 = k x_{01}^2/2$. O trabalho A gasto para opor a força de atrito não depende da velocidade mas apenas do deslocamento (desde que a força de atrito é constante), de maneira que durante o primeiro meio período o trabalho é:

$$A_1 = (|x_{01}| + |x_{02}|) f_0 \quad 4.1.7$$

enquanto a energia em $x=x_{02}$ é:

$$V_2 = k x_{02}^2/2 \quad 4.1.8$$

desde que $V_1 - V_2 = A_1$, temos:

$$k/2 (x_{01}^2 - x_{02}^2) = (|x_{01}| + |x_{02}|) f_0 \quad 4.1.9$$

$$|x_{01}| - |x_{02}| = 2 f_0/k = 2a \quad 4.1.10$$

ou

$$A_1 = 2 f_0 (|x_{01}| - a) \quad 4.1.11$$

A_1 varia linearmente, enquanto V_1 varia com o quadrado de x . Consequentemente, para um valor suficientemente grande de x_{01} há uma suficiente reserva de energia no sistema no fim do primeiro meio período, de maneira que o sistema desenvolve um processo oscilatório.

Considerando agora o movimento no plano de fase, fazendo $dx/dt=y$:

$$dy/dx = -\omega^2 (x - a)/y \quad p/ y < 0 \quad 4.1.12$$

$$dy/dx = -\omega^2 (x + a)/y \quad p/ y > 0 \quad 4.1.13$$

cujas integrais são:

$$\frac{(x - a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2 \omega^2} = 1 \quad p/ y < 0 \quad 4.1.14$$

$$\frac{(x+a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_1^2 \omega_0^2} = 1 \quad p/y > 0 \quad 4.1.15$$

onde R_1 e R_2 são constantes de integração. As equações 4.1.14 e 4.1.15 definem uma família de semi elipses centradas nos pontos $(a,0)$ e $(-a,0)$. A fig.5.1.3 mostra os caminhos de fase formados

figura 4.1.3: Espaço de fase formado por semi-elipses.

por estas semi-elipses. O movimento é em torno do segmento O_1O_2 , o qual é o lugar geométrico dos estados de equilíbrio. Desta maneira, as oscilações diminuem sua amplitude, e param após um finito número de oscilações, o que depende das condições iniciais. No caso particular quando uma condição inicial corresponde a um ponto no segmento O_1O_2 , o sistema permanece em repouso.

Neste segmento, todavia, o sistema possui um certo tipo de "instabilidade". Deixe inicialmente o sistema em repouso no ponto $+x_1$ e de uma velocidade inicial $\pm y_1$. Depois como é mostrado na fig.4.1.4, o ponto representativo (ponto cujo o movimento descreve o caminho de fase) move-se de (x_1, y_1) para um ponto do segmento

$\theta_1 \neq 0$ diferente da condição inicial.

Figura 4.1.4: Instabilidade local do sistema.

4.2 Modelo Equivalente.

Vamos considerar novamente o sistema massa-mola com atrito seco (fig.4.1.1), onde sua dinâmica é descrita pela equação:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - f(dx/dt) + kx = 0 \quad 4.2.1$$

$$\text{onde} \quad f(dx/dt) = \begin{cases} + f_a p / x < 0 \\ + f_a p / x = 0^- \\ kx p / x = 0 \\ - f_a p / x = 0^+ \\ - f_a p / x > 0 \end{cases} \quad 4.2.2$$

A abordagem de um sistema mecânico para a compreensão da dinâmica desta equação esbarra na dificuldade de sua construção e na dificuldade de monitoração de seus estados. Outra alternativa é a simulação numérica, que muitas vezes torna-se trabalhosa, ou a utilização de um modelo equivalente de fácil construção e abordagem.

Considere o sistema elétrico/eletrônico da figura 4.2.1. Sabemos que as características de corrente x tensão de um diodo são descritas pela equação:

$$I = I_0 [\exp (V/V_0) - 1] \quad 4.2.3$$

onde V_0 é igual a KT/e (K - constante de Boltzmann; T - temperatura em kelvin; e - carga elementar do elétron) e I_0 a corrente reversa do diodo.

Para o diodo 1N4148 usado no circuito da fig. 4.2.1 temos a seguinte curva de corrente x tensão (fig.4.2.2) para a temperatura ambiente ($t \cong 300K$), onde V_d é a "tensão de disparo do diodo".

Se associarmos dois diodos contrapostos em paralelo, como é usado no circuito da fig.4.2.1, teremos a seguinte característica de corrente x tensão para a associação:

$$I = 2I_0 \sinh V/V_0$$

4.2.4

figura 4.2.1: Circuito LCD série.

figura 4.2.2: Curva IxV do diodo IN 4148.

Para o arranjo com dois diodos IN4148 usados no circuito, temos a seguinte curva de corrente x tensão para a temperatura

ambiente (fig 4.2.3):

figura 4.2.3: Curva $I \times V$ para o arranjo de diodos.

Sabemos que a somatória de tensões em uma malha deve ser zero, o que nos leva a seguinte relação:

$$V_L + V_D + V_C = 0 \quad 4.2.5$$

Pela equação 4.2.4 temos que a queda de tensão V_D no arranjo de diodos é:

$$V_D = V_0 \operatorname{arcsenh} I/2I_0 \quad 4.2.6$$

Para as tensões em um indutor e um capacitor temos as relações:

$$V_L = L \, dI/dt ; V_C = Q/C \quad 4.2.7$$

como $I = dQ/dt$ temos:

$$L \, d^2Q/dt^2 + V_0 \operatorname{arcsenh} [(dQ/dt)/2I_0] + Q/C = 0 \quad 4.2.8$$

A equação 4.2.6 possui a seguinte curva de tensão x corrente ($V \times I$) para os diodos IN4148 (fig.4.2.4).

Como podemos observar, a equação 4.2.6 possui certa

figura 4.2.4: Curva $V \times I$ para o arranjo de diodos.

figura 4.2.5: Curva do arranjo de diodos a $\cong 77$ K.

semelhança com as características de atrito seco mostradas na equação 4.2.2. Esta curva pode ainda ser mais aproximada para as características de atrito seco se mergulharmos o arranjo de diodos em um recipiente contendo nitrogênio líquido, diminuindo a temperatura T para aproximadamente 77K, conforme é mostrado na figura 4.2.5.

Como podemos observar através da figura 4.2.5, dois diodos contrapostos em paralelo pode ser uma razoável analogia para o atrito seco em sistemas mecânicos.

Podemos obter o mesmo modelo para o sistema da equação 4.2.1 através de amplificadores operacionais, como é mostrado na fig.4.2.6:

figura 4.2.6: Circuito com amp. op..

Considere que a somatória de correntes no ponto D deva ser igual a zero:

$$I_{RF} + I_{C1} = 0$$

4.2.9

levando em conta as características de amplificadores operacionais temos:

$$- (V + V_D) / R_F - C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} = 0 \quad 4.2.10$$

figura 4.2.7: Circuito análogo ao sistema mecânico com atrito seco e viscoso.

rearranjando os fatores temos:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2}{dt^2} + V_D / R_F + V / R_F = 0 \quad 4.2.11$$

considerando a relação 4.2.6 e que $I_0 = C_2 \frac{dV}{dt}$:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + V_D / R_F \operatorname{arcsenh} [(C_2 \frac{dV}{dt}) / 2I_0] + V / R_F = 0 \quad 4.2.12$$

Se acrescentarmos um resistor R_1 em paralelo com o capacitor C_1 e também considerarmos a existência de uma perturbação externa, conforme é mostrado no circuito da figura 4.2.7, iremos ter a seguinte equação para esta situação:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + R_2 C_2 / R_1 \frac{dV}{dt} + V_0 / R_F \operatorname{arcsenh}[(Q \frac{dV}{dt}) / 2I_0] + V / R_F = V_E / R_E \quad 4.2.13$$

Obtemos o mesmo resultado para o circuito da figura 4.2.1 se acrescentarmos um resistor em série com os elementos deste circuito, e se alimentarmos o sistema com uma fonte de tensão V:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + V_0 \operatorname{arcsenh}[(dQ/dt) / 2I_0] + Q/C = V \quad 4.2.14$$

4.3 Normalização.

Vamos considerar a equação diferencial:

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} - f\left(\frac{dy}{dt}\right) + d y = P(t) \quad 4.3.1$$

$$f\left(\frac{dy}{dt}\right) = \begin{cases} +c \text{ p/ } \frac{dy}{dt} < 0 \\ +c \text{ p/ } \frac{dy}{dt} = 0^- \\ d y - P \text{ e } \text{ p/ } \frac{dy}{dt} = 0 \\ -c \text{ p/ } \frac{dy}{dt} = 0^+ \\ -c \text{ p/ } \frac{dy}{dt} > 0 \end{cases} \quad 4.3.2$$

dividindo a equação 4.3.1 por c teremos:

$$a/c \frac{d^2 y}{dt^2} + b/c \frac{dy}{dt} - f\left(\frac{dy}{dt}\right)/c + d/c y = P(t)/c \quad 4.3.3$$

assumindo que $d/c y = z$:

$$a/d \frac{d^2 z}{dt^2} + b/d \frac{dz}{dt} - f\left(\frac{c/d dz}{dt}\right)/c + z = P(t)/c \quad 4.3.4$$

transformando o tempo t em um tempo τ sem dimensões:

$$t = k\tau \quad 4.3.5$$

substituindo na equação 4.3.3:

$$\frac{a}{d} \frac{d^2 z}{k^2 d\tau^2} + \frac{b}{d} \frac{dz}{k d\tau} - \frac{1}{c} f\left[\frac{c}{d} \frac{dz}{k d\tau}\right] + z = \frac{P(k\tau)}{c} \quad 4.3.6$$

se atribuirmos a k^2 o valor a/d :

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + 1/Q \frac{dz}{d\tau} - s\left(\frac{dz}{d\tau}\right) + z = p(\tau) \quad 4.3.7$$

onde:

$$s(dz/d\tau) = \begin{cases} +1 \text{ p/ } dz/d\tau < 0 \\ +1 \text{ p/ } dz/d\tau = 0^- \\ z - pE \text{ p/ } dz/d\tau = 0 \\ -1 \text{ p/ } dz/d\tau = 0^+ \\ -1 \text{ p/ } dz/d\tau > 0 \end{cases}$$

4.3.8

Para melhor visualizarmos os sistemas análogos, podemos montar a tabela a seguir:

Equação Base	Massa-Mola	RLCD Série	Circ.Amp.Op.
y	Posição x	Carga Capacit. Q	Tensão pt. F V
dy/dt	Velocidade dx/dt	Corrente I = dQ/dt	Proporcional a Vc=-R2C2dV/dt
a	Massa m	Indutância L	C1R2C2
b	Const.Atrito Viscoso: k	Resistência R	R2C2/R1
cy	Força Restit. Mola: kx	Tensão no Cap. Q/C	Cor.Realiment. V/RF
c	Const. Rest. Mola: k	Admit. Capac. 1/C	Ad.Res.Realim. 1/RF
f(dy/dt)	Força Atrito Seco:f(dx/dt)	Tensão Diodo Vd	Cor.devido a Vd: Vd/RF
pE(t)	Força Ext.Apl. F(t)	TensãoExt.Apl. V(t)	Cor.Ext.Aplic. IRE=-VE(t)/RE
Frequência Natural $\omega_0 = \sqrt{c/a}$	$\sqrt{k/m}$	$1/\sqrt{LC}$	$(C1R2C2RF)^{-1/2}$
Tempo Amortecimento $t_a = b/c$	k/m	RC	R2C2RF/R1
Fator de Qualidade $Q = \sqrt{ac} / b$	$\sqrt{mk} / k$	$\sqrt{L/C} / R$	$R1(C1/RFR2C2)^{1/2}$

4.4.Resultados.

Todas as figuras deste item, salvo alguma outra menção, foram obtidas por fotografia da tela de um osciloscópio que monitora os estados do sistema que desejamos observar. Não nos preocupamos em mencionar as escalas das figuras pois estamos interessados apenas nos resultados qualitativos obtidos com este modelo eletrônico.

Para verificar a validade deste modelo eletrônico vamos considerá-lo sem a presença de dissipação viscosa ($1/Q = 0$) e sem a ação de forças externas ($p(\tau) = 0$). Desta maneira temos a equação diferencial homogênea 4.4.1:

$$dz^2/dt^2 + f(dz/dt) + z = 0 \quad 4.4.1$$

Como vimos no item 4.2, se o arranjo dos dois diodos realmente descreve as características do atrito seco, devemos ter para uma condição inicial z_0 (z_0 suficientemente grande para que o sistema realize várias oscilações) um decréscimo aritmético entre os máximos da curva $z(\tau) \times \tau$, formando uma reta entre os máximos. Observando a figura 4.4.1, que é o resultado do espaço x tempo do modelo eletrônico para uma condição inicial

Figura 4.4.1: Posição x tempo para o sistema em oscilação livre sem a presença de forças viscosas.

zoi, verificamos que estas condições são satisfeitas.

A figura 4.4.2 mostra a velocidade $\times$ tempo simultaneamente com o espaço $\times$ tempo para o modelo eletrônico nas condições da equação 4.4.1.

Figura 4.4.2: Posição e velocidade $\times$ tempo para o sistema em oscilação livre sem a presença de forças viscosas.

As curvas da figura 4.4.2 são alguns dos possíveis pares de equações paramétricas do espaço de fase (fig.4.1.3) da equação 4.4.1 modelada eletronicamente. Neste caso em particular, estas curvas do espaço e da velocidade em função do tempo mostram que as curvas do espaço de fase não se cruzam, e são perpendiculares ao eixo horizontal quando a velocidade é igual a zero, satisfazendo algumas das observações sobre espaços de fase de sistemas homogêneos de segunda ordem citados no capítulo II (estas observações podem parecer triviais, mas muitos erros em modelos eletrônicos, numéricos, etc., podem ser detectados levando-as em consideração).

Desta maneira, apesar destas poucas considerações, podemos julgar nosso modelo satisfatório.

Para a existência de um comportamento mais complexo neste sistema é necessário a ação de forças externas, considerando ou

não a presença de dissipação viscosa.

Alguns trabalhos foram publicados [4.4.1-4.4.2] explorando o fato deste sistema ser linear por partes, mas apesar desta característica, existe a necessidade de se resolver equações

Figura 4.4.3: Espaços de fase para $1/Q = 0$, $p_1 = 5,0$ e Ω assumindo os seguintes valores: 0,03; 0,08; 0,15; 0,25; 0,29; 0,36.

Figura 4.4.4: Espaços de fase obtidos numericamente para os dados da figura 4.4.3.

algébricas transcendentais, tornando esta abordagem extremamente complexa.

S.W.Shaw [4.4.3] obteve resultados valiosos em sua abordagem a este sistema, mas incompletos para baixas frequências e $Q < 0$ (Q pode ser menor que zero quando analisamos a presença de forças aerodinâmicas em pás de turbinas). Muitas outras dúvidas foram levantadas para $1/Q = 0$, e baixas frequências, inclusive a possibilidade da existência de um comportamento caótico na dinâmica do sistema.

Neste contexto, a grande vantagem de nosso modelo eletrônico é que com uma simples variação de potenciômetros, podemos obter uma varredura nas regiões dos espaços de parâmetros de difícil abordagem numérica e analítica, possibilitando conclusões a respeito de sua dinâmica.

Para exemplificar vamos observar a dinâmica deste sistema sem a presença de dissipação viscosa, sofrendo a ação de um termo externo senoidal ($p(\tau) = p_1 \sin \Omega \tau$), onde variamos apenas a frequência deste termo. Os resultados são mostrados nas figuras 4.4.3. Estas imagens são espaços de fase do sistema onde na vertical temos a velocidade (dz/dt) e na horizontal a posição (z).

Figura 4.4.5: Movimento com período dois com uma parada por ciclo, para $Q = -5$, $p_1 = 3,0$, $\Omega = 0,55$. (Referência 4.4.3).

Para conferirmos estes resultados comparamos os

resultados numéricos da figura 4.4.4 obtidos pelo método previsor-corretor descrito no apêndice A. Podemos verificar que qualitativamente são os mesmos, reforçando ainda mais a validade deste modelo.

Conforme resultados obtidos na referência [4.4.3], existe para certos parâmetros um movimento de período dois como é mostrado na figura 4.4.5, reproduzida desta referência.

Obtivemos o mesmo resultado com nosso circuito como é mostrado nas figuras 4.4.6 e 4.4.7. (Para obtermos um valor de $Q < 0$ acrescentamos um capacitor no esquema da figura 4.2.1 como é mostrado através dos pontilhados desta figura).

Figura 4.4.6: Posição em função do tempo para os dados da figura 4.4.5.

Figura 4.4.7: Espaço de fase para os dados da figura 4.4.5.

B.F.Feeny e F.C.Moon [4.4.4] abordaram em seu trabalho um sistema semelhante a este aqui apresentado, e afirmam a existência de um comportamento caótico em seu sistema.

Encontramos um comportamento caótico em duas situações como é mostrado nos espaços de fase obtidos do circuito conforme é mostrado nas figuras 4.4.8 e 4.4.9, situados na região de baixa frequência não abordada em [4.4.3].

Figura 4.4.8: Comportamento caótico em $Q=-5$; $p_1=8,6$; $Q=0,371$

Figura 4.4.9: Comportamento caótico em $Q=-5$; $p_1=8,6$; $Q=0,442$

Com os resultados obtidos, concluimos que nosso modelo eletrônico é satisfatório, sendo extremamente útil para varrer regiões no espaço de parâmetros de difícil abordagem numérica e analítica.

Apesar deste comportamento satisfatório, temos uma limitação que é a incapacidade de nossos amplificadores operacionais simularem para esta configuração do modelo eletrônico grandes valores para o deslocamento.

CAPÍTULO V

5. SISTEMAS BIESTAVEIS.

5.1. Análises Básicas.

Vamos considerar o sistema descrito pela equação diferencial homogênea 5.1.1:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + dP(x)/dx = 0 \quad 5.1.1$$

onde $P(x)$ é a função que descreve a energia potencial do sistema com relação a x , possuindo a forma mostrada na figura abaixo (fig.5.1.1):

figura 5.1.1: Gráfico de $P(x)$.

Para a força de restituição $F(x)$ temos a seguinte relação:

$$F(x) = - dP(x)/dx \quad 5.1.2$$

resultando na curva mostrada na figura 5.1.2.

Observando a função da figura 5.1.1, notamos que esta possui dois mínimos, um em $x = a$ e outro em $x = -a$. Possui também um máximo local em $x = 0$. Estes mínimos correspondem a dois estados de equilíbrio estável, e o máximo local corresponde a um estado de equilíbrio instável, conforme mostraremos a seguir. Por possuir dois estados de equilíbrio estáveis, chamamos este sistema de biestável.

Para obtermos um sistema com estas características,

figura 5.1.2: Gráfico de $F(x)$.

construímos o circuito com diodos de germânio (fig. 5.1.3) mostrado na figura 5.1.4. Considerando a somatória de correntes no ponto D, temos a equação diferencial homogênea:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V / dt^2}{} - V / R_f + 2 I_0 \sinh V / V_0 = 0 \quad 5.1.3$$

Comparando a equação 5.1.3 com a equação 5.1.1 concluímos que $P(V)$ e $F(V)$ são descritos pelas relações:

$$P(V) = - V^2 / 2 R_f + 2 I_0 V_0 \cosh V / V_0 \quad 5.1.4$$

$$F(V) = V/R_F - 2I_0 \sinh V/V_0$$

5.1.5

figura 5.1.3: Característica $I \times V$ para o arranjo de diodos em paralelo e contrapostos.

cujos gráficos são mostrados para $1/R_F > 2I_0/V_0$ na figura 5.1.5.

figura 5.1.4: Circuito com diodos de germânio.

figura 5.1.5: Gráficos de $P(V)$ e $F(V)$.

Fazendo $dV/dt = Y$ obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais homogêneas de primeira ordem:

$$\begin{cases} dV/dt = Y \\ dY/dt = + \frac{V}{C_1 R_F R_2 C_2} - \frac{2I_0 \sinh V/V_0}{C_1 R_2 C_2} \end{cases} \quad 5.1.6$$

Dividindo a segunda equação pela primeira obtemos a função que descreve as inclinações dos caminhos de fase no plano de fase:

$$dY/dV = + \frac{1}{C_1 R_F R_2 C_2} \frac{V}{Y} - \frac{2I_0}{C_1 R_2 C_2} \frac{\sinh V/V_0}{Y} \quad 5.1.7$$

Rearranjando os fatores da equação 5.1.7 e integrando-a, obtemos a seguinte equação para as curvas do caminho de fase no plano de fase:

$$\frac{C_1 R_2 C_2}{2} Y^2 - \frac{V^2}{2 R F} - 2 I_0 V_0 \cosh V/V_0 = C \quad 5.1.8$$

resultando no seguinte plano de fase (fig.5.1.6):

figura 5.1.6: Espaço de fase do sistema 5.1.6.

Pela equação 5.1.7 podemos determinar a inclinação das curvas do plano de fase da figura 5.1.5, exceto em $V = \pm a$ e $V = 0$, que são pontos singulares deste nosso sistema, ou seja, pontos de equilíbrio.

Pelo critério de estabilidade de Liapunov concluímos que os pontos de equilíbrio em $V = a$ e $V = -a$ são estáveis e do tipo Centro. Em $V = 0$ temos um ponto de equilíbrio instável pelo critério de Liapunov, e do tipo Celo.

O tempo de recorrência, ou período dos caminhos de fase são finitos, exceto para aquela que passa no ponto $V = 0$ e $Y = 0$, cujo período é infinito. O caminho de fase fechado que passa por um ponto de equilíbrio do tipo celo é chamado de Separatriz.

Vamos variar agora o valor de RF e observar o que acontece com o sistema. Se diminuirmos o valor de RF , faremos com que os

dois pontos estáveis se afastem do ponto instável central, como é mostrado na figura 5.1.7.

figura 5.1.7: Variação do parâmetro RF .

Aumentando o valor de RF de maneira que $1/RF < 2I_0/V_0$, iremos obter o potencial mostrado na figura 5.1.8:

figura 5.1.8: Potencial obtido com $1/RF < 2I_0/V_0$.

figura 5.1.9: Espaço de fase para o potencial da fig.5.1.8.

resultando em um espaço de fase com um ponto singular do tipo centro, como é mostrado na figura 5.1.9:

Nesta variação dos valores de R_F existe uma situação crítica quando $1/R_F = 2I_0/V_0$. Observando novamente a equação 5.1.4, notamos que para pequenos valores de V , $F(V) \cong 0$, resultando no potencial mostrado na figura 5.1.10.

Esta situação corresponde aproximadamente a uma posição de equilíbrio indiferente, onde não existe a presença de forças restauradoras ou de dispersão agindo sobre o sistema. Próximo a $V=0$ este ponto é instável pelo critério de Liapunov.

Vamos considerar agora a ação de uma força dissipativa proporcional a dV/dt no sistema da figura 5.1.4 para $1/R_F > 2I_0/V_0$ (obtemos esta situação acrescentando um resistor R_1 em paralelo com o capacitor C_1). Desta maneira temos a seguinte equação regendo a dinâmica:

figura 5.1.10: Potencial para $1/R_F = 2I_0/V_0$

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + R_2 C_2 / R \frac{dV}{dt} - V/R_F + 2I_0 \sinh V/V_0 = 0 \quad 5.1.9$$

Linearizando esta equação em torno dos pontos de equilíbrio estáveis V_A , temos para pequenas perturbações Δ :

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + R_2 C_2 / R \frac{d\Delta}{dt} - (1/R_F + 2I_0/V_0 \cosh V_A/V_0) \Delta = 0 \quad 5.1.10$$

considerando os resultados obtidos na equação 2.10 temos:

$$1/R_1 C_1 = 2h \quad 5.1.11$$

$$-\frac{1}{R_F C_1 R_2 C_2} + \frac{2I_0}{V_0 C_1 R_2 C_2} \cosh V_A/V_0 = \omega_0^2 \quad 5.1.12$$

Para $h^2 > \omega_0^2$ temos um processo não oscilatório amortecido, com um ponto singular do tipo Nó Estável em $V = V_A$ e $-V_A$, e um ponto singular do tipo Cela em $V = 0$, como é mostrado na figura 5.1.11:

Para $h^2 < \omega_0^2$ temos um processo oscilatório amortecido com um ponto singular do tipo Foco Estável em $V = V_A$ e $-V_A$, e um ponto singular do tipo Cela em $V = 0$, como é mostrado na figura 5.1.12.

figura 5.1.10: Nó estável e sela.

Podemos obter os mesmos resultados se considerarmos $1/R_F \ll 2I_0/V_0$.

figura 5.1.12: Foco estável e sela.

5.2.Modelos e analogias.

figura 5.2.1: Pêndulo invertido.

Vários sistemas possuem seu potencial semelhante ao da figura 5.1.1. Um sistema bem conhecido por nós é o pêndulo invertido com uma mola que promove um torque de restituição igual a $k\theta$ (fig.5.2.1).

A equação diferencial não linear homogênea que descreve a dinâmica do sistema possui a forma:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + kl^2 \frac{d\theta}{dt} - mgl \sin\theta + k\theta = 0 \quad 5.2.1$$

Para $mgl > k$, podemos ter o potencial da figura 5.2.2 p/ $-2\pi < \theta < 2\pi$, que é descrito pela equação:

$$P(\theta) = mgl \cos\theta + \frac{k}{2} \theta^2 + c \quad 5.2.2$$

Outro sistema cuja dinâmica pode ser descrita por uma equação idêntica à equação 5.2.1 é o pêndulo magnético mostrado na figura 5.2.3. Este sistema consiste em um ímã com momento magnético M que sofre a ação de um campo constante uniforme B e a ação de uma

figura 5.2.2: Curva potencial para $mg l > k$.

figura 5.2.3: Imã sob a ação de um campo magnético.

mola que promove um torque de restituição $k\theta$. A equação diferencial homogênea que descreve a dinâmica do sistema possui a forma:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K \frac{d\theta}{dt} - BM \operatorname{sen}\theta + k\theta = 0 \quad 5.2.3$$

onde I é o momento de inércia do imã.

5.3.Normalização.

Vamos considerar a equação não linear forçada:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + c \sinh z - ez = P(t) \quad 5.3.1$$

dividindo toda a equação por c , transformando o tempo t em um tempo τ sem dimensões ($t=k\tau$), e atribuindo a k^2 o valor a/c temos:

$$\frac{dz^2}{dt^2} + 1/Q \frac{dz}{dt} + \sinh z - M z = p(\tau) \quad 5.3.2$$

onde $Q = (ac)^{1/2}/b$, $M = e/c$ e $p(\tau) = P(k\tau)/c$.

Podemos montar uma tabela para melhor visualizarmos a relação entre os parâmetros destes sistemas (tabela 5.3.1).

Eq. Base	Pêndulo Invertido	Pêndulo Magnét.	Circ.Amp.Op.
z	Posição Angular θ	Posição Angular θ	Tensão em A v
dz/dt	Vel. Angular $d\theta/dt$	Vel. Angular $d\theta/dt$	dv/dt
a	Momento Inércia ml^2	Momento Inércia I	$C_1R_2C_2$
b	Amort. Viscoso k_1^2	Amort.Viscoso K	R_2C_2/R_1
$-csenz + ez$	Torque Restit. $-mgl\text{sen}\theta + k\theta$	Torque Restit. $-BM\text{sen}\theta + K\theta$	Cor.Realiment. $2I_0\text{sen}h v/V_0 - \frac{v}{R_F}$
$P(t)$	Torque Externo $T(t)$	Campo Externo $B(t)$	Cor. Externa $-v_E/R_E$
Fator Qualidade $Q = \sqrt{ac}/b$	$\frac{m\sqrt{g/l}}{k}$	$\frac{(IBM)^{1/2}}{K}$	$R_1(\frac{2I_0C_1}{R_2C_2V_0})^{1/2}$

Tabela 5.3.1

5.4.Resultados.

Todas as figuras deste item, salvo alguma outra menção, foram obtidas por fotografia da tela de um osciloscópio que monitora os estados do sistema que desejamos observar. Não nos preocupamos em mencionar as escalas das figuras pois estamos interessados apenas nos resultados qualitativos obtidos com este modelo eletrônico.

Este modelo eletrônico foi montado com a finalidade de verificar a teoria de transição de fase de Landau [5.4.1], simulando esta transição próxima ao ponto crítico.

Muitos outros trabalhos utilizaram modelos mecânicos para simular esta transição [5.4.2-5.4.3], mas, como mostrou a prática, o modelo eletrônico apresentou uma nítida vantagem para a coleta de dados e a realização de medidas.

Como expusemos nas análises básicas, nosso intuito era criar um sistema que apresentasse o potencial mostrado na figura 5.1.1, onde existem dois pontos de equilíbrio estável e um ponto de equilíbrio instável, e que fosse possível através da variação de algum parâmetro (resistor R_F), realizar uma transição para uma situação onde na curva do potencial existisse apenas um ponto de equilíbrio estável.

Todos os resultados relativos a transição de fase estão expostos no apêndice B. Neste item apresentaremos apenas alguns resultados relativos a dinâmica do sistema para uma situação de potencial biestável. Tal fato justificou-se pela extrema complexidade do sistema, pois conforme a perturbação externa, é possível termos cinco ou mais parâmetros independentes.

Vamos considerar novamente a equação 5.3.2, onde $p(\tau) = p_1 \sin(\Omega \tau)$:

$$d^2 z / dt^2 + 1/Q \, dz/dt + \sinh z \cdot M \, z = p(\tau) \quad 5.3.1$$

Como podemos observar, neste caso temos quatro parâmetros independentes (Q , W , y_1 , Ω). Mesmo neste caso, torna-se extremamente complexo a análise e o mapeamento do comportamento do sistema no espaço de parâmetros. Apesar desta complexidade, a versatilidade de nosso modelo eletrônico faz com que possamos abordar algumas regiões com extrema facilidade.

Vamos observar o comportamento do sistema para $Q=0,707$; $M=20$; $y_1=245$ e $\Omega=0,703$; com o respectivo espaço de fase mostrado na figura 5.4.1:

figura 5.4.1: Espaço de fase para $Q=0,707$; $M=20$; $y_1=245$ e $\Omega=0,703$

Nesta situação, a perturbação externa faz com que o ponto representativo do espaço de fase mova-se de um ponto estável para o outro, oscilando ao redor deste com velocidades bem próximas de zero, até que a perturbação externa faça com que este realize a mesma dinâmica ao redor do outro ponto estável. Como podemos observar por esta figura, estes dois pontos de equilíbrio são estáveis e do tipo Foco.

Percebemos ainda mais a existência destes pontos estáveis observando a tela do osciloscópio quando nenhuma perturbação externa age no modelo. O ponto representativo pode estar situado no ponto de equilíbrio estável do lado direito ou do lado esquerdo do espaço de fase. Ao aplicarmos uma perturbação o ponto

representativo irá mover-se no espaço de fase, tendendo a qualquer uma das duas posições de equilíbrio quando esta perturbação deixar de existir, permanecendo nesta posição até a presença de uma nova perturbação.

Com o aumento da frequência Ω , o ponto representativo realiza órbitas não simétricas no espaço de fase, deixando cada vez menos evidentes os pontos estaveis do sistema, como é mostrado na figura 5.4.2.

figura 5.4.2: Espaço de fase não simétrico para $Q=0,707$; $M=20$; $\phi_1=245$ e $\Omega=2,810$.

Aumentando ainda mais a frequência observamos nas figuras 5.4.3 bifurcações com dobramento de período, regiões com comportamento caótico e dinâmica com período três como foi exemplificado no capítulo I.

Em muitos outros sistemas [3.3] também foi observado que as bifurcações são precedidas por uma quebra de simetria no espaço de fase; o capítulo I mostrou que um dos caminhos para se chegar ao comportamento caótico pode ser através de bifurcações com dobramento de período; e conforme a referência [5.4.5], o período três pode implicar em um comportamento caótico.

figuras 5.4.3: Espaços de fase para $\Omega=0,707$; $M=20$; $P_1=241$ e $\Omega=2,238$; $3,653$; $3,793$.

Com a fácil varredura de parâmetros, observamos a existência de vários comportamentos como histereses em várias regiões dos espaços de parâmetros[3.3], bifurcações com dobramento de período, comportamento caótico, dinâmica com período três, intermitência, crises e várias janelas de estabilidade em meio ao comportamento caótico.

A figura 5.4.4 mostrará a quebra de simetria do espaço de fase seguida de bifurcações com dobramento de período até um comportamento caótico.

Obtemos também uma quebra de simetria e bifurcação com dobramento de período quando o ponto representativo está oscilando ao redor de um dos pontos estáveis como é mostrado na figura

5.4.5.

figura 5.4.4: Sequência de quebra de simetria, bifurcações e comportamento caótico para $Q=0,707$; $M=20$; $p_1=245$ e $\Omega=10,950$; 9,413; 9,273; 9,244; 9,230; 9,132.

figura 5.4.5: Sequência de quebra de simetria, bifurcações e comportamento caótico ao redor de um dos pontos de equilíbrio para $Q=0,707$; $M=20$; $p_1=245$ e $\Omega=54,792$; $35,123$; $32,313$; $32,032$.

Como conseguimos obter um modelo eletrônico de um sistema biestável que simulasse uma transição de fase próximo ao ponto crítico como é mostrado no apêndice B, consideramos este nosso modelo satisfatório.

CAPITULO VI

6. PARTICULA EM CAIXA.

6.1 Análises Básicas.

Considere o sistema da figura abaixo (fig.6.1.1):

figura 6.1.1: Partícula em caixa.

Este sistema consiste de uma partícula pontual de massa m dentro de uma caixa unidimensional de comprimento $2l$ [6.1.1]. Esta partícula pode chocar-se contra a parede e este choque é elástico.

Vamos considerar a situação em que não há forças externas agindo no sistema e que não existe a presença de forças dissipativas. Nestas condições obtemos a seguinte equação diferencial homogênea :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0$$

6.1.1

onde

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } x = 1 \\ 0 & \text{p/ } -1 < x < 1 \\ -\infty & \text{p/ } x = -1 \end{cases} \quad 6.1.2$$

A não linearidade deste sistema consiste nos choques elásticos em $x = 1$ e $x = -1$, que provoca uma descontinuidade no comportamento da velocidade.

Em $-1 < x < 1$, $f(x) = 0$, mostrando que $d^2x/dt^2 = 0$, e que se em qualquer instante t_0 a partícula posuir uma velocidade $\dot{V}$, esta permanecerá constante em valor absoluto, mudando seu sentido apenas em cada choque que realiza com a parede. As equações em função do tempo, no intervalo $-1 < x < 1$, que descrevem a dinâmica do sistema são as que se seguem:

$$x = V t \quad 6.1.3$$

$$y = dx/dt = V \quad 6.1.4$$

A equação 6.1.4 representa a curva de várias retas paralelas ao eixo x para cada valor de V . Podemos construir o plano de fase, representando o caminho de fase dos estados do sistema para estes diversos valores (fig.6.1.2):

Figura 6.1.2: Plano de fase do sistema 6.1.1.

Como podemos observar, os caminhos de fase do plano de fase saltam instantaneamente do semi-plano superior ($y > 0$) para o semi-plano inferior ($y < 0$) em $x = 1$, e do semi-plano inferior para o superior em $x = -1$. Tal situação ocorre porque os choques aqui envolvidos são totalmente elásticos. A representação destes saltos instantâneos é feita pelas linhas pontilhadas em $x = 1$ e $x = -1$. Neste caso, podemos considerar cada caminho de fase como sendo fechado, e o período para cada caminho é obtido pela relação:

$$T = (4 l)/V$$

6.1.5

Neste sistema não possuímos pontos singulares que correspondem a estados de equilíbrio no plano de fase. Mas, se deixarmos a partícula de massa m em repouso entre o intervalo $-1 < x < 1$, esta irá permanecer em repouso, salvo a ação de alguma perturbação. Desta maneira, pelo critério de Liapunov, todos os pontos entre o intervalo citado são instáveis.

Vamos agora inclinar a caixa de um ângulo α em relação a horizontal e observar a dinâmica do sistema (fig.6.1.3):

Figura 6.1.3: Caixa inclinada de um ângulo α .

Nesta situação existe uma força constante agindo sobre a partícula de massa m devido a aceleração da gravidade g . A equação diferencial não homogênea que descreve esta situação é a seguinte:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = mg \operatorname{sen} \alpha \quad 6.1.6$$

com $f(x)$ descrito em 6.1.2. Para $-1 < x < 1$, $f(x) = 0$, o que nos possibilita montar o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = g \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad 6.1.7$$

Eliminando o tempo t e integrando a equação resultante iremos obter:

$$y = \pm \sqrt{2g \operatorname{sen} \alpha \, x} \quad 6.1.8$$

Considerando que em $x = 1$ e $x = -1$ há um choque elástico, podemos construir o seguinte plano de fase mostrado na figura 6.1.4.

Figura 6.1.4: Espaço de fase para o sistema 6.1.6.

Para esta condição possuímos um ponto de equilíbrio estável em $x = 1$ (um ponto de mínimo na curva do potencial), pois, estando a partícula em repouso neste ponto, esta permanecerá em torno deste caso sofra a ação de alguma perturbação, satisfazendo o critério de estabilidade de Liapunov.

Vamos considerar que no sistema da figura 6.1.3 exista a presença de uma força dissipativa viscosa, e que a dinâmica do sistema é descrita pela equação diferencial homogênea:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = m g \sin \alpha \quad 6.1.9$$

com $f(x)$ descrito por 6.1.2. Em $-1 < x < 1$ podemos montar o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = -k/m x + g \sin \alpha \end{cases} \quad 6.1.10$$

Considerando os choques elásticos em $x = 1$ e $x = -1$, e os diversos parâmetros da equação 6.1.10, podemos construir o plano de fase mostrado na figura 6.1.5.

Nesta condição o ponto com coordenadas $(1,0)$ é estável pois satisfaz o critério de Liapunov.

Figura 6.1.5: Espaço de fase do sistema 6.1.10.

6.2. Sistemas Com Modelo Equivalente.

Vamos observar agora o modelo eletrônico mostrado na figura 6.2.1:

Figura 6.2.1: Circuito com amplificadores operacionais.

Este modelo difere do modelo da figura 5.1.3 por não possuir o resistor R_F , e utilizar os diodos de silício IN4148. Se considerarmos a somatória de correntes em relação ao ponto D, temos a seguinte equação diferencial não homogênea:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + R_2 C_2 / R_1 \frac{dV}{dt} + 2I_0 \sinh(V/V_0) = -V_E / R_E \quad 6.2.1$$

Se introduzirmos o arranjo de diodos no nitrogênio líquido, como foi feito quando simulamos o atrito seco, iremos tornar o comportamento da corrente em função da tensão mais abrupto, como é mostrado novamente na figura 6.2.2:

Figura 6.2.2: Diodos IN4148 a 77 K.

Para esta situação, ao atingirmos o valor $|V| = V_d$ notamos que o arranjo de diodos comporta-se como a função $f(x)$ descrita em 6.1.2. Sendo assim, temos para nosso sistema a seguinte equação, também análoga à equação 6.1.9 forçada:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + R_2 C_2 / R_1 \frac{dV}{dt} + I_D(V) = -V_E / R_E \quad 6.2.2$$

$$I_D(V) \cong \begin{cases} +\infty & \text{p/ } V = +V_D \\ 0 & \text{p/ } -V_D < V < +V_D \\ -\infty & \text{p/ } V = -V_D \end{cases} \quad 6.2.3$$

6.3 Normalização

Vamos considerar a equação diferencial:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + f(z) = P(t) \quad 6.3.1$$

$$f(z) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } z = +c \\ 0 & \text{p/ } -c < z < +c \\ -\infty & \text{p/ } z = -c \end{cases} \quad 6.3.2$$

tornando $z = cy$ temos:

$$ac \frac{d^2 y}{dt^2} + bc \frac{dy}{dt} + f(y) = P(t) \quad 6.3.3$$

$$f(y) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } y = +1 \\ 0 & \text{p/ } -1 < y < +1 \\ -\infty & \text{p/ } y = -1 \end{cases} \quad 6.3.4$$

transformando o tempo t em um tempo τ sem dimensões ($t = k\tau$):

$$ac/k^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + bc/k \frac{dy}{d\tau} + f(y) = P(k\tau) \quad 6.3.5$$

atribuindo um valor a k para que $ac/k^2 = bc/k$ temos:

$$k = a/b \quad 6.3.6$$

e obtemos:

$$b^2 c/a \frac{d^2 y}{d\tau^2} + b^2 c/a \frac{dy}{d\tau} + f(y) = P(k\tau) \quad 6.3.7$$

multiplicando todos os membros por $a/b^2 c$;

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + a/b^2 c f(y) = a/b^2 c P(k\tau) \quad 6.3.8$$

como $a/b^2 c f(y) = f(y)$:

$$d^2y/d\tau^2 + dy/d\tau + f(y) = p(\tau)$$

6.3.9

onde

$$f(y) = \begin{cases} +\infty & p/y = +1 \\ 0 & p/y = -1 < y < +1 \\ -\infty & p/y = -1 \end{cases}$$

6.3.10

e

$$p(\tau) = a/b^2 c P(k\tau)$$

6.3.11

Observando a equação 6.3.10 notamos que esta possui parâmetros independentes apenas no termo $p(\tau)$.

Para melhor visualizarmos os sistemas análogos ao sistema com partícula em caixa, podemos montar a seguinte tabela:

Equação	Base	Partícula em Caixa	Circuito Amp. Op.
z		Posição: x	$V_A = V$
dz/dt		Velocidade: dx/dt	Prop. a $V_d = R_2 C_2 dv/dt$
a		Massa: m	$C_1 R_2 C_2$
b		Const.Atrit: k	$R_2 C_2 / R_1$
c		Metade Caixa: l	Tensão Disp.Diodo: V_D
$f(z)$		Força Rest.: $f(x)$	Cor.Diodo $I_D = f(v)$
$p(t)$		Força Ext.: $F(t)$	Cor.Aplicada: $-V_E / R_E$

Tabela 6.3.1

6.4.Resultados.

Todas as figuras deste item, salvo alguma outra menção, foram obtidas por fotografia da tela de um osciloscópio que monitora os estados do sistema que desejamos observar. Não nos preocupamos em mencionar as escalas das figuras pois estamos interessados apenas nos resultados qualitativos obtidos com este modelo eletrônico.

Para verificar a validade deste modelo eletrônico, vamos observar seu comportamento quando o ângulo α da figura 6.1.3 varia conforme a função descrita na figura 6.4.1:

figura 6.4.1: Função que descreve a variação do ângulo α .

Nesta situação, a equação diferencial que descreve a dinâmica deste sistema é descrita a seguir:

$$d^2y/dt^2 + dy/dt + f(y) = \alpha(t) \quad 6.4.1$$

Temos dois parâmetros independentes, π e Ω . Se a frequência Ω for suficientemente baixa para que a partícula realize choques sucessivos em cada canto da caixa até parar, deveremos obter em nosso modelo eletrônico um espaço de fase equivalente ao da figura 6.4.2, que foi obtido numericamente pelo método predictor corretor,

descrito no apêndice A.

figura 6.4.2: Espaço de fase para a equação 6.4.1 em baixa frequência (simulação numérica).

Com o modelo eletrônico descrito na figura 6.2.2, obtivemos o espaço de fase mostrado na figura 6.4.3:

Figura 6.4.3: Espaço de fase para baixa frequência obtido pelo modelo eletrônico da figura 6.2.2.

Como podemos observar analisando as figuras 6.4.2 e 6.4.3, o espaço de fase do modelo eletrônico difere qualitativamente do espaço de fase obtido numericamente. A diferença está nos choques

contra a "parede" do modelo eletrônico, que possui um coeficiente de restituição maior que 1, ou seja, a partícula ganha energia durante o choque. Esta situação é indesejável pois queremos uma condição onde o choque com a parede seja elástico (coeficiente de restituição igual a 1).

Conforme a referência [3.1] é possível para certas frequências ocorrer um atraso de fase na corrente dos amplificadores operacionais, ocasionando uma realimentação de corrente que fornece energia para o sistema. Se um atraso de fase na corrente de nossos amplificadores operacionais acarreta uma situação onde é fornecido energia, devemos adiantar a corrente para obtermos uma situação onde é dissipado energia. Pela referência [3.1] para obtermos esta situação devemos acrescentar um capacitor e um resistor em nosso modelo eletrônico para obtermos um adiantamento na corrente, e ajustarmos o sistema para um coeficiente de restituição onde os choques são elásticos. Desta maneira, temos o circuito da figura 6.4.4, onde C_F e R_F estão ajustados para esta situação:

Figura 6.4.4: Modificação no modelo da figura 6.2.2 para obtermos um choque elástico.

Com esta modificação obtemos o espaço de fase mostrado na figura 6.4.5, que possui o mesmo comportamento qualitativo obtido

com a simulação numérica.

Figura 6.4.5: Espaço de fase obtido do modelo da fig.6.4.4 para baixa frequência; $p_1=3.09$; $\Omega=0.063$.

Podemos também observar as curvas do espaço e da velocidade em função do tempo na figura 6.4.6:

Figura 6.4.6: Espaço e velocidade x tempo para os dados da figura 6.4.5.

No resultado numérico consideramos que o choque é elástico, e

que o tempo de duração do choque é zero. No nosso modelo eletrônico obtemos esta situação onde o choque é elástico, mas o tempo de duração do choque é diferente de zero, ou seja, existe deformação no choque, mas não existe dissipação de energia.

Vamos agora dar alguns exemplos da dinâmica deste modelo eletrônico. Observe nas figuras 6.4.7 o que acontece com a dinâmica do sistema quando aumentamos ainda mais a frequência:

figuras 6.4.7: Espaço de fase para $p_1 = 3,09$ e $\Omega = 0,503; 0,504; 0,547$.

Com o aumento da frequência, a partícula não possui tempo suficiente para parar nas paredes da caixa. Notamos também uma pequena quebra de simetria no espaço de fase, com o surgimento de um período dois e comportamento caótico.

Aumentando a frequência para valores muito elevados, a partícula não possui tempo para chocar-se contra as paredes da

caixa, formando o espaço de fase da figura 6.4.8:

Figura 6.4.8: Espaço de fase para $p_1=3,09$ e $Q=6,29$.

Diminuindo a frequência para valores abaixo dos valores da figura 6.6.8, a partícula começa a apresentar condições de choque contra uma das paredes, apresentando um comportamento caótico devido a estes choques, conforme é mostrado na figura 6.4.9:

Figura 6.4.9: Espaço de fase para $p_1=3,09$ e $Q=4,40$.

Diminuindo ainda mais a frequência observamos que a partícula transiciona para uma situação onde desaparece o comportamento caótico, e esta realiza choques com as duas paredes, como é

mostrado na figura 6.4.10:

Figura 6.4.10: Espaço de fase para $\pi=3,09$ e $\Omega=3,77$.

Observamos nesta região dos espaço de parâmetros, levando em conta a amplitude máxima de deslocamento da partícula, a existência de histereses com a variação do parâmetro Ω . Esta situação pode ser facilmente observada variando-se a frequência e analisando-se o espaço de fase deste modelo no osciloscópio.

Encontramos neste modelo uma região no espaço de parâmetros onde existem quebra de simetria do espaço de fase, bifurcações com dobramento de período, surgimento de comportamento caótico e janela de estabilidade com período três. Toda esta sequência é mostrada na página seguinte na figura 6.4.11

Observamos também neste modelo a existência de intermitência e crises em várias regiões do espaço de parâmetros.

Pelos resultados obtidos podemos considerar este modelo satisfatório, mesmo considerando que este apresenta uma "deformação" das paredes durante o choque.

Figura 6.4.11: Espaço de fase para $g=3,09$ e $\Omega=1,89$; 1,51; 1,45; 1,43; 1,41; 1,40; 1,24; 1,18.

CAPITULO VII

7. Partícula em mesa vibratória.

7.1. Análises básicas.

Vamos considerar uma partícula de dimensões desprezíveis e massa m [7.1.1], que se choca contra o topo de uma mesa de massa infinita que oscila conforme uma função $h(t)$, como é mostrado na figura 7.1.2 (Bouncing Ball) [7.1.2-7.1.3].

Figura 7.1.1: Partícula em mesa vibratória.

A partícula move-se no vácuo em apenas uma dimensão (eixo vertical) e os choques da bola com a mesa podem ser elásticos e inelásticos. Os movimentos da mesa ($h(t)$) e da partícula ($x(t)$) são descritos em relação a uma referência fixa.

Se considerarmos a somatória de forças agindo na partícula temos a seguinte equação diferencial não homogênea para uma situação onde o choque é perfeitamente elástico:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x^*) = -mg \quad 7.1.1$$

$$x^* = x(t) - h(t) \quad 7.1.2$$

$$f(x^*) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } x^* = 0 \\ 0 & \text{p/ } x^* > 0 \end{cases} \quad 7.1.3$$

com a relação 7.1.2 temos:

$$m \, d^2x / dt^2 + F(x(t) - h(t)) = -mg \quad 7.1.4$$

Se considerarmos agora a situação onde os choques são inelásticos, temos a seguinte função para descrever o sistema:

$$m \, d^2x / dt^2 + F(x(t) - h(t)) = -mg \quad 7.1.5$$

F garantindo a relação:

$$|V_{bi} - V_{mi}| = k |V_{bf} - V_{mf}| \quad 7.7.6$$

onde $|V_{bi} - V_{mi}|$ é o valor absoluto da velocidade relativa entre a bola e a mesa antes do choque, k o coeficiente de restituição do choque, e $|V_{bf} - V_{mf}|$ o valor absoluto da velocidade relativa entre a bola e a mesa após o choque.

Considerando $h(t) = A \sin(\omega t)$, podemos ter o movimento mostrado na figura 7.1.2:

figura 7.1.2: Movimento da bola e da mesa em função do tempo.

Para solucionar este sistema podemos aplicar o método previsor corretor, como fizemos no capítulo VI. Mas, como este sistema é não linear apenas durante os choques, podemos obter a solução algébrica da trajetória da partícula durante o voo, e posteriormente calcular para que valor de tempo existe o choque entre a partícula e a mesa. A única dificuldade para o cálculo do exato tempo em que ocorre o choque está em solucionar equações algébricas transcendentais, que não chega a ser um grande problema, pois sabemos em que intervalo de variáveis está a solução.

7.2. Modelo Equivalente.

Vamos observar o modelo eletrônico da figura 7.2.1:

Figura 7.2.1: Modelo eletrônico para partícula em mesa vibratória.

Este modelo difere do modelo para partícula em caixa apenas por não possuir um dos diodos, não considerar a presença de dissipação viscosa, e a maneira como introduzimos a perturbação externa. Considerando a somatória de correntes em relação ao ponto D temos a equação diferencial:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + I_0 \{ \exp[(V - V_{E2})/V_b] - 1 \} = -V_{E1}/R_{E1} \quad 7.2.1$$

Introduzindo o diodo no nitrogênio líquido iremos tornar seu comportamento de corrente em função da tensão mais abrupto, correspondendo a uma situação próxima a da função 7.1.3, onde:

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + I_D (V - V_{E2}) = -V_{E1}/R_{E1} \quad 7.2.2$$

$$V^* = V - V_{E2} \quad 7.2.3$$

$$I_D(V^*) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } V^* = V_D \\ 0 & \text{p/ } V^* < V_D \end{cases} \quad 7.2.4$$

NO capítulo 6, acrescentamos um capacitor (C_F) e um resistor (R_F) no circuito para controlarmos o coeficiente de restituição que era maior que 1, devido a possíveis atrasos de fase dos amplificadores operacionais. Neste modelo também temos que acrescentar este capacitor e este resistor para obtermos um coeficiente de restituição igual a 1, ou outro valor que desejarmos. Desta maneira temos o circuito da figura 7.2.2:

Figura 7.2.2: Modificação no circuito da figura 7.2.1 para haver controle no coeficiente de restituição.

7.3.1 Normalização.

Vamos considerar a equação diferencial:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + f(z^*) = -ab \quad 7.3.1$$

$$z^* = z(t) - s(t) \quad 7.3.2$$

$$f(z^*) = \begin{cases} +\infty & \text{p/ } z^* = 0 \\ 0 & \text{p/ } z^* > 0 \end{cases} \quad 7.3.3$$

considerando $s(t) = P_1 \sin(wt)$ temos:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + f(z - P_1 \sin(wt)) = -ab \quad 7.3.4$$

como na função f nos interessamos apenas quando esta vai a zero, temos a relação:

$$z = P_1 \sin(wt) \quad 7.3.5$$

onde $z/P_1 = \sin(wt) \quad 7.3.6$

substituindo z/P_1 por y em 7.3.6, $t=kr$ em 7.3.4 e dividindo todos os fatores de 7.3.4 por ab temos:

$$\frac{P_1^2}{bk^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{a} f(y - \sin(wkr)) = -1 \quad 7.3.7$$

atribuindo a k o valor: $k = P_1 w/b \quad 7.3.8$
temos:

$$\frac{1}{P_1 w^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{a} f(y - \sin(P_1 w^2 r)) = -1 \quad 7.3.9$$

considerando $P_1 w^2/b = \alpha$ temos:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2 y}{dt^2} + F(y - \text{sen}(\alpha \tau)) = -1$$

7.3.10

$$y^* = y - \text{sen}(\alpha \tau)$$

7.3.11

$$f(y^*) = \begin{cases} +\omega p / y^* = 0 \\ 0 p / y^* > 0 \end{cases}$$

7.3.12

Considerando uma situação de choque elástico, temos apenas um parâmetro neste sistema (α).

Se considerarmos agora um coeficiente de restituição menor que 1 ($k < 1$), iremos ter dois parâmetros, k e α [7.1.21].

Para melhor visualizarmos os sistemas análogos a partícula em mesa vibratória, podemos montar a seguinte tabela:

Equação Base	Partícula em Mesa	Circuito Amp. Op.
z	Posição: x	$V_B = -V$
dz/dt	Velocidade: dx/dt	Pro. a $V_C = R_2 C_2 dV/dt$
a	Massa: m	$C_1 R_2 C_2$
b	Gravidade: g	-
$f(z^*)$	Força de choque	Corrente do diodo
$s(t)$	Posição da mesa	Corrente Aplic. V_{E2}/R_{E2}

7.4 Resultados.

Todas as figuras deste item, salvo alguma outra menção, foram obtidas por fotografia da tela de um osciloscópio que monitora os estados do sistema que desejamos observar. Não nos preocupamos em mencionar as escalas das figuras pois estamos interessados apenas nos resultados qualitativos obtidos com este modelo eletrônico.

Para verificar a validade deste modelo eletrônico, vamos observar seu comportamento quando a mesa está em repouso, não existe a presença de dissipação viscosa e a partícula realiza choques inelásticos contra a mesa, sendo o coeficiente de restituição do choque igual a 0,8 (figura 7.4.1):

Figura 7.4.1: Altura e velocidade x tempo de uma partícula realizando choques contra uma mesa que esta parada: $k = 0,8$.

Como podemos observar nesta figura, a partícula é lançada para cima a partir da mesa com velocidade V , retornando no momento do choque com uma velocidade $-V$, partindo logo em seguida com uma velocidade $0,8V$, e assim sucessivamente. Este coeficiente de restituição igual a 0,8 é obtido empiricamente através do resistor R_F e do capacitor C_F . A figura 7.4.2 mostra o espaço de fase para os resultados da figura 7.4.1:

Figura 7.4.2: Espaço de fase para os resultados da figura 7.4.1.

Os resultados por nós obtidos são compatíveis com os resultados das referências [7.1.2-7.1.3]. Estes trabalhos abordaram sistemas mecânicos onde a dificuldade encontrada era coletar os dados referentes a posição e velocidade da partícula e da mesa. Com nosso modelo eletrônico temos fácil acesso a estas medidas, como é mostrado nas figuras a seguir.

figura 7.4.3 Partícula oscilando com a mesa para $k=0,8$ e $\alpha=0,76$.

Vamos considerar que em nosso modelo a mesa comece a vibrar senoidalmente, mas de maneira que a partícula não tenha condição de levantar vôo, como é mostrado na figura 7.4.3.

Neste caso, o parâmetro α não é suficientemente grande para que a partícula decole e comece a realizar choques contra a mesa. Se aumentarmos o parâmetro α , a partícula começara a vibrar contra a mesa. Notamos neste aumento de parâmetro α uma histerese na região do espaço de parâmetros, pois ao diminuirmos este parâmetro ao valor onde antes a partícula oscilava com a mesa, esta ainda continua a realizar seus voos e choques contra a mesa, como é mostrado na figura 7.4.4.

Figura 7.4.4: Posição da partícula e da mesa $\times$ tempo com respectivo espaço de fase para $k=0,8$ e $\alpha=0,76$.

Notamos na imagem das posições $\times$ tempo que há uma "deformação" na superfície da mesa durante o choque, sendo este resultado esperado devido às características de nosso modelo.

Aumentando o parâmetro α , começam a surgir bifurcações com dobramento de período, como é mostrado nas imagens da posição da partícula e da mesa com seus respectivos espaços de fase na figura 7.4.5:

Figura 4.4.5: Resultados para $k=0,8$ e $\alpha=0,99; 1,03; 1,06$.

Conforme a referência [7.1.2] é possível, em determinadas situações, coexistirem duas condições de equilíbrio para o mesmo parâmetro, como é mostrado na figura 7.4.6:

figura 7.4.6: Período dois coexistindo com período três para $k=0.8$ e $\alpha=0.99$.

Observamos com este modelo a existência de intermitência e crises em várias regiões do espaço de parâmetros, assim como outras situações descritas nas referências [7.1.2-7.1.3].

Pelos resultados obtidos podemos considerar este modelo satisfatório.

CONCLUSÃO

Baseado nas referências bibliográficas deste trabalho e em seus resultados, podemos considerá-lo satisfatório com relação a sua proposta, que foi criar os modelos eletrônicos para os seguintes sistemas:

Oscilador Harmônico na presença de dissipação viscosa e atrito seco.

Sistemas dinâmicos biestáveis.

Partícula em caixa.

Partícula em mesa vibratória.

Outro ponto alcançado por este trabalho foi criar um material farto e ainda não explorado que pode ser aplicado em cursos de dinâmica não linear, suprimindo uma grande quantidade de experiências que ajudam a compreender considerações a respeito desta dinâmica.

Ainda com relação ao ensino, estes modelos podem ser utilizados para desenvolver o interesse do aluno em relação a sistemas não lineares, além de desenvolver a habilidade de criar e desenvolver modelos e analogias.

Por último, podemos citar o fator economia, pois os circuitos aqui usados são extremamente econômicos.

APENDICE

APENDICE A

A grande maioria das equações diferenciais encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente, ou possuem outros inconvenientes que tornam este trabalho extremamente complexo. O recurso que dispomos é o emprego de métodos numéricos, que nos possibilita obter soluções bem precisas.

Para solucionar as equações que aparecem neste trabalho iremos utilizar o método do Trapezio, cujo algoritmo será descrito a seguir.

Dada uma equação diferencial não homogênea de segunda ordem que possua coordenadas x e y do plano de fase, onde $dx/dt = y$, temos que este sistema pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$dx/dt = y$$

$$dy/dt = f(x, y, t)$$

1

Podemos aproximar a integral de uma função $dy/dt = f(t)$ em um intervalo de tempo Δ , onde $\Delta = t_{n+1} - t_n$, pela área de um trapézio, como é mostrado na figura 1:

figura 1 -

Desta maneira temos que:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \cong A \quad 2$$

mas como $A = (t_{n+1} - t_n) \frac{f(t_{n+1}) + f(t_n)}{2}$ 3

$(t_{n+1} - t_n) = \Delta$, e $\int f(t) dt = F(t) + c$ temos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt = F(t_{n+1}) - F(t_n) \cong \Delta/2 (f(t_{n+1}) + f(t_n)) \quad 4$$

Quanto menor for nosso intervalo de integração Δ , maior será a precisão de nosso resultado.

Podemos utilizar este algoritmo para determinar a função x_{n+1} e y_{n+1} do sistema 2 como é mostrado a seguir:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dx/dt dt = x_{n+1} - x_n \cong \Delta/2 (y_{n+1} + y_n) \quad 5$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dy/dt dt = y_{n+1} - y_n \cong \Delta/2 (f(x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}) + f(x_n, y_n, t_n)) \quad 6$$

reorganizando os fatores temos:

$$x_{n+1} \cong x_n + \Delta/2 (y_{n+1} + y_n) \quad 7$$

$$y_{n+1} \cong y_n + \Delta/2 (f(x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}) + f(x_n, y_n, t_n)) \quad 8$$

Quando o sistema é linear ou linear por partes (tomando certos cuidados quando linear por partes), podemos desacoplar as equações e agrupar todos os termos que possuem x_{n+1} e y_{n+1} no lado esquerdo das equações 7 e 8. Desta maneira é fácil determinarmos a solução do sistema pois sempre temos conhecimento dos valores de x_n e y_n .

Para sistemas não lineares, não podemos agrupar os termos que possuem variáveis x_{n+1} e y_{n+1} no lado esquerdo das equações 7 e 8, tornando impossível o cálculo destes valores. Para contornar

estes problemas, usamos o artifício de prever os valores destas variáveis, como é mostrado a seguir:

$$x^0_{tn+1} \cong x_{tn} + \Delta \, dx/dt(t_n) = x_{tn} + \Delta \, y_{tn} \quad 9$$

$$y^0_{tn+1} \cong y_{tn} + \Delta \, dy/dt(t_n) = y_{tn} + \Delta \, f(x_{tn}, y_{tn}, t_n) \quad 10$$

desta maneira temos:

$$x_{tn+1} \cong x_{tn} + \Delta/2 (y_{tn+1} + y^0_{tn}) \quad 11$$

$$y_{tn+1} \cong y_{tn} + \Delta/2 (f(x_{tn+1}, y_{tn+1}, t_{n+1}) + f(x^0_{tn}, y^0_{tn}, t_{n+1})) \quad 12$$

Novamente, quanto menor for o valor de Δ , maior será a precisão de nosso método.

.Oscilador com Atrito seco

Para simularmos numericamente a equação 5.3.7, vamos reduzi-la a um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} dz/d\tau &= v \\ dv/d\tau &= -1/Q \, v - s(v) - z + pE \end{aligned} \quad 13$$

Poderíamos obter diretamente a solução analítica desta equação pois esta é linear por partes. A dificuldade deste método está em resolver equações trigonométricas transcendentais quando $dz/dt = 0$. Tal fato levou-nos a optar por um método numérico para solucionarmos esta equação.

Pela regra do trapézio, obtemos a seguinte solução numérica para este sistema considerando intervalos discretos de tempo $\Delta\tau$:

$$\begin{bmatrix} z_{\tau n+1} \\ v_{\tau n+1} \end{bmatrix} = C1 \left[M \begin{bmatrix} z_{\tau n} \\ v_{\tau n} \end{bmatrix} + (-2 \, s(v_{\tau n}) + pE(\tau_n) + pE(\tau_{n+1})) \begin{bmatrix} \Delta^2/4 \\ \Delta/2 \end{bmatrix} \right]$$

onde
$$C1 = \frac{1}{1 + \Delta\tau/2Q + \Delta\tau^2/4}$$

e
$$M = \begin{bmatrix} 1 + \Delta\tau/2Q - \Delta\tau^2/4 & \Delta\tau \\ -\Delta\tau & 1 - \Delta\tau/2Q - \Delta\tau^2/4 \end{bmatrix}$$

Nesta simulação devemos apenas nos preocupar quando o produto $vIn.vIn+1 < 0$, ou seja, que houve o cruzamento do eixo z , como é mostrado na figura 2:

figura 2

Quando tal fato ocorre, devemos calcular o valor de $zIn+1$ tal que $vIn+1$ seja igual a zero. e o intervalo de tempo correspondente. Assumindo que uma reta passa pelos dois pontos da figura 2 temos a equação:

$$(vIn - vIn+1) z + (zIn+1 - zIn) v + (zIn vIn+1 - zIn+1 vIn) = 0$$

15

Assumindo $vIn+1 = 0$ temos que:

$$zIn+1 = - (zIn vIn+1 - zIn+1 vIn) / ((vIn - vIn+1))$$

16

e o intervalo de tempo aproximado para este ponto:

$$\Delta t' = \Delta t \left(\frac{|v_{Tn}|}{|v_{Tn} - v_{ETn+1}|} \right)$$

17

A seguir é mostrado o programa utilizado para esta simulação em um microcomputador Apple.

```

5 REM INSERIR DADOS
10 PRINT "ENTRE COM Q,P,W"
15 INPUT Q,P,W
20 PRINT "ENTRE COM Z,U,T"
25 INPUT Z,U,T
30 DT = .05: REM INTERVALO DE TEMPO
40 HPO
35 DZ = 20:DU = 10: REM DIMENSAO DA TELA
38 REM DEFINICAO DA TELA
40 HGR: HCOLOR= 3
45 HPLLOT 0.0 TO 260.0 TO 260.158 TO 0.158 TO 0.0
50 HPLLOT 0.79 TO 260.79: HPLLOT 130.0 TO 130.158
58 REM DEFINICAO DE VARIAVEIS
60 D = DT / 2: C1 = 0 * D: C2 = D / 9: C3 = 1 + C2 + C1
65 D1 = (1 + C2 - C1) / C3: D2 = 0 T / C3: D3 = - DT / C3: D4 = (1 - C2 - C1) / C3
70 A1 = 130: A2 = 79
75 STOP: REM PARADA PARA CONTROLE DE VARIAVEIS
78 REM REPRESENTA PUNTO NA TELA
80 HPLLOT Z * DZ + A1: A2 - U * DU
81 IF U < 0 THEN GOTO 84: REM VERIFICA SE VEL DIFERENTE DE ZERO
82 DF = P * SIN (W * T) - Z: IF ABS (DF) < 1 THEN GOTO 100: REM VERIFICA CONDICAO DE DESLOCAMENTO
83 H = SGN (DF): GOTO 85
84 H = SGN (U)
85 PI = P * ( SIN (W * T) + SIN (W * (T + DT))) - 2 * H
90 ZN = D1 * Z + D2 * U + D3 * PI
92 REM -CALCULO DOS NOVOS VALORES DE Z E U
93 UN = D3 * Z + D4 * U + D * PI
94 IF U * UN < 0 THEN GOTO 100: REM VERIFICA CRUZAMENTO DO EIXO Z
95 Z = ZN: U = UN: REM ATUALIZA VARIAVEIS
100 T = T + DT: REM ATUALIZA TEMPO
105 GOTO 80: REM REINICIA NOVO CALCULO
118 REM CALCULO DO CRUZAMENTO DO EIXO Z
120 QQ = ABS (UN): WW = ABS (UN): Z = (ZN * U - Z * UN) / (U - UN): U = 0: TT = (DT * QQ) / (QQ + WW)
125 T = T + TT
130 GOTO 80

```

.Sistemas Biestáveis

Para simularmos a equação 6.3.2 temos que nos valer apenas de métodos numéricos, pois esta é uma equação diferencial não-linear e não homogênea.

Vamos reduzir esta equação a um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} dy/dt &= x \\ dx/dt &= -1/Q \cdot x - \sinh y + M \cdot y + p(\tau) \end{aligned} \quad 18$$

Pela regra do trapézio obtemos as seguintes solução numérica para intervalos discretos de tempo $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned} y^0_{Tn+1} &= y_{Tn} + \Delta\tau \cdot x_{Tn} \\ x^0_{Tn+1} &= x_{Tn} + \Delta\tau \cdot (-1/Q \cdot x_{Tn} - \sinh y_{Tn} + M \cdot y_{Tn} + p(\tau)) \\ y_{Tn+1} &= y_{Tn} + \Delta\tau/2 \cdot (x_{Tn} + x^0_{Tn+1}) \\ x_{Tn+1} &= x_{Tn} + \Delta\tau/2 \cdot (-1/Q \cdot (x_{Tn} + x^0_{Tn+1}) - \sinh y_{Tn} - \sinh^0 y_{n+1} + \\ &\quad + M \cdot (y_{Tn} + y^0_{Tn+1}) + p(\tau) + p(\tau_{n+1})) \end{aligned} \quad 19$$

A seguir é mostrado o programa utilizado para esta simulação:

```

30 PRINT "ENTRE COM Q,M,P0,P1,U"
35 INPUT Q,M,P0,P1,U
40 PRINT "ENTRE COM Z,V,T"
45 INPUT Z,V,T
50 HGR : HCOLR=3
55 HPLOT 0.0 TO 278.0 TO 278.158
   TO 0.158 TO 0.0
60 HPLOT 139.0 TO 139.158: HPLOT
   0.79 TO 278.79
65 DT = .05
70 DZ = 40:DV = 30
72 D = DT / 2
75 STOP
80 A1 = 139:A2 = 79

85 HPLOT Z * DZ + A1:A2 - DV * V
90 Z0 = Z + DT * V
92 GHIF = ( EXP (Z) - EXP (-Z) ) / 2
95 V0 = V + DT * ( - V / Q - GHIF
   + P0 + P1 * SIN (U * T) +
   M * Z)
100 ZN = Z + D * (V + V0)
102 ZHIF = ( EXP (Z0) - EXP (-Z0) ) / 2
105 VN = V + D * ( - (Z + V0) / Q
   - GHIF - ZHIF + 2 * P0 + M *
   (Z + Z0) + P1 * ( SIN (U * T)
   ) + SIN (U * (T + DT)))
110 Z = ZN:V = VN
115 T = T + DT
120 GOTO 85

```

.Partícula em Caixa

Poderíamos obter diretamente a solução analítica desta equação pois esta é linear por partes. A dificuldade deste método está em resolver equações trigonométricas transcendentais quando $y = 0$. Tal fato levou-nos a optar por um método numérico para solucionarmos esta equação.

Pela regra do trapézio, obtemos a seguinte solução numérica para este sistema considerando intervalos discretos de tempo $\Delta\tau$:

$$\begin{bmatrix} y_{Tn+1} \\ x_{Tn+1} \end{bmatrix} = C1 \left[M \begin{bmatrix} y_{Tn} \\ x_{Tn} \end{bmatrix} + (pE(Tn) + pE(Tn+1)) \begin{bmatrix} \Delta^2/4 \\ \Delta/2 \end{bmatrix} \right]$$

20

onde

$$C1 = \frac{1}{1 + \Delta\tau/2}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 + \Delta\tau/2 & \Delta\tau/2 \\ 0 & 1 - \Delta\tau/2 \end{bmatrix}$$

Para calcularmos o ponto onde a partícula choca-se contra a parede, consideramos o cruzamento das retas mostradas na figura 3:

figura 3

A seguir é mostrado o programa utilizado para esta simulação:

```

10 PRINT "ENTRE COM P.W"
15 INPUT P.W
20 PRINT "ENTRE COM Z.U.T"
25 INPUT Z.U.T
30 DT = .01
35 DZ = 100:DV = 30
40 HGR : HCOLOR= 3
45 HPLLOT 0.0 TO 260.0 TO 260.158
   TO 0.158 TO 0.0
50 HPLLOT 0.79 TO 260.79: HPLLOT 1
   00.0 TO 100.158
60 D = DT / 2:O1 = DT * DT / 2:O2
   = 1 + D
65 O1 = 1:O2 = D / O2:O3 = O1:O4 =
   (1 - D) / O2
70 A1 = 100:A2 = 77
75 STOP
80 HPLLOT Z * OZ + A1,A2 - V * DV

81 IF ABS (Z) = 1 THEN IF SGN
   (Z) = SGN (V) THEN V = - V

85 PI = P * ( SGN ( SIN (W * T) ) -
   SGN ( SIN (W * (T + DT))) )
90 ZN = O1 * Z + O2 * V + O3 / 2
   ) * PI
92 UN = O3 * Z + O4 * V + D * PI
93 IF ABS (ZN) = 1 THEN GOTO 1
   30
94 IF ABS (ZN) > 1 THEN GOTO 1
   25
95 Z = ZN:V = UN
100 T = T + DT
105 GOTO 80
125 UC = ((ZN * V - Z * UN) + (V
   N - U) * SGN (ZN)) / (ZN -
   Z):ST = (( SGN (ZN) - Z) /
   (ZN - Z)) * DT:ZC = SGN (ZN)
135 HPLLOT ZC * OZ + A1,A2 - UC *
   DV
127 IF ST = 0 THEN ST = DT
128 Z = ZC:V = - UC:T = T + ST
129 GOTO 80
130 Z = ZN:V = - UN:T = T + ST
135 GOTO 80

```

APÊNDICE B

No caso de uma transição de fase de segunda ordem, uma transição magnética, por exemplo, temos um valor único do parâmetro que caracteriza o sistema (magnetização) para temperaturas acima da temperatura de transição, e dois valores para este mesmo parâmetro abaixo da temperatura de transição, sendo seu comportamento em função da temperatura dado pela relação:

$$M \propto (T_c - T) \quad 1$$

sendo esta relação válida para $T \gtrless T_c$.

Se um campo externo H for aplicado ao sistema, a suscetibilidade é dada por:

$$\partial M / \partial H = \chi = (T - T_c)^{-\gamma} \quad \text{p/ } T > T_c \quad 2$$

$$(T - T_c)^{-\gamma} \quad \text{p/ } T < T_c \quad 3$$

E na transição ($T = T_c$) temos:

$$H \propto M^\delta \quad 4$$

Se certas condições sobre o potencial termodinâmico são respeitadas (essencialmente que o potencial seja analítico), os coeficientes acima citados são racionais, condições que levam ao modelo de Landau.

No caso simulado por nosso sistema biestável, estas condições se observam, levando em conta os coeficientes teóricos:

$$\beta = 1/2$$

$$\gamma = 1$$

$$\gamma' = 1$$

$$\delta = 3$$

Os valores experimentais foram obtidos da análise das curvas $V \times V_E$ para baixas frequências, onde V representa M , e V_E representa H . A variação da temperatura foi obtida por R_F , onde a condição crítica é:

$$R_F = V_0 / R_F$$

5

A suscetibilidade (no caso, o inverso desta) foi obtida derivando-se graficamente as curvas, nos pontos $V_E = 0$, obtendo-se χ e χ' .

O valor de β também foi obtido dos pontos $V_E = 0$, para vários valores de R_F .

Finalmente, para $R_F = V_0 / 2I_0$, com valores de V_0 e I_0 obtidos das curvas, mediu-se $H \times M$ para a obtenção de δ .

As figuras a seguir mostrarão todos estes resultados.

G2 146

250

200

150

100

50

28

28

1.4

19,1 KD

15

1.4

19,2 KD

15

1.4

19,3 KD

52 172

100

0,9

0,45

19,4 KJ

200

150

0,38

19,5 KJ

100

0,3

19,6 KJ

50

0

198
62

150

200

150

100

50

0.7

197KJ

0.9

198KJ

1.05

199KJ

1

Resultados de $\alpha^{-1} \times (T-T_c)^{\delta} \rightarrow$ Exponente δ

 $\frac{1}{\alpha}$
 $y = -1$
 2α
 G_2
 $\frac{1}{\alpha}$
 G_1
 2α

$$\left(\frac{2I_0}{V_D} - \frac{1}{R_F}\right) = (T-T_c)$$

Expoentes β e δ

BIBLIOGRAFIA

- 11- Leo P. Kadanoff, Roads to Caos, Physics Today, Dec. 1983 p.46.
 - 12- Is Something Stranger About the Weather? Science, vol.243, 10 march 1989, pg.1290.
 - 13- Julio M. Ottimo, Scientific American, January 1989.
 - 14- Quantum Chaos: Enigma Wrapped in a Mystery, Science, Vol.243, 17 february 1989, pg. 893.
 - 15- Veja artigos em "Order in Chaos", Physica 7D, North Holland, 1983.
 - 16- Ecologists Flirt With Chaos, Science, Vol. 243, 20 January 1983, pg. 243.
 - 17- L.Glass, M.R.Guevara and A.Shrier, Bifurcation and Chaos in a Periodically Stimulated Cardiac Oscillator. Physica 7D, North Holland, 1983, pg.89.
 - 18- A.M.Jensen and R.Urban, Chaotic Price Behavior in a Nonlinear Cobweb Model. Econ. Lett., 15:235, 1984.
 - 19- J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, N.H.Packard and R.S.Shaw, Sci. Am. 255, dec.1989, pg. 1290.
-
- 1.1- Alexander A. Chernikov, Roald Z. Sagdeev and George Zaslavsky, Caos: How Regular Can It Be? Physics Today, December 1985.
 - 1.2- James Gleick, Caos, Editora Campos, 1990.
 - 1.3- Veja referência 11.
 - 1.4- Mathematical Caos and Strange Atractors, nov.1981, Structure and Strangeness.
 - 1.5- Celso Grebogi, Edward Ott, James A Yorke; Caos, Strange Atractors And Fractal Basin Bondaries in Non Linear Dinamics, Science vol. 238, 30 october 1987.
 - 1.6- Veja Referência 15.
 - 1.7- Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of The Atmosferic Science, 20(1963).
-
- 2.1- A.A. Andronov, A.A. Vitt and S.E. Khaikin, Teory of Oscilators, Pergamon Press, 1966.

2.2- Liapunov A.M., The General Problem Of The Stability of Motion, Gostekhizdat (1950).

2.3- Veja referência 2.1.

2.4- Period-Doublin Bifurcation, Caos,...., S.Rajasekar and M.Lakshmanam, Physica D 32 (1988) 146-152.

3.1- Milman-Halkias, Eletrônica, McGraw-Hill, 1981.

3.2- D.D'Humieres, M.r.Beasley, B.A.Hubermam e A.Libchaber, Physcal Review A vol.26-n.6, dec. 1982.

3.3- José Roberto Castilho Piqueira, Aplicação da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais a Problemas de Sincronismo de Fase, Tese de Doutorado Apresentada a Escola Politécnica-USP, 1987.

3.4- A.E.Fitzgerald, Charles Kinsley Jr. e Alexandre Kusko, McGraw-Hill, 1975.

3.5- R.L.Kautz, J.C.Macfarlane, Physical Review A, Jan.1985.

4.1- Veja Referência 2.1.

4.4.1- J.P.Den Hartog 1930 Transaction of The American Society of Mechanical Engineers 53, 107-115.

4.4.2- A.A.Ferri and E.H.Dowell 1985, Journal of Sound and Vibration 101, 57-74.

4.4.3- S.W.Shaw 1985, Journal of Sound and Vibration 108(2),305-325.

4.4.4- Auto Correlation on Symbol Dynamics For a Chaotic Dry-Friction Oscillator

5.4.1- H.E.Stanley, Introduction to Phse Transition and Critical Fenomena, Claredon, Oxford(1971).

5.4.2- E.Mareg JR., S.C.Zilio and L.Ioriatti, submetido ao American Journal of Physics em maio 1989.

5.4.3 J.R.Drugowich de Felício and Oscar Hipólito , American Journal of Physics 53, 690 (1983).

6.1.1- A.B.Pippard, The Physics of Vibration, Cambridge University Press, 1978.

7.1.1- Veja referência 6.1.1.

7.1.2- Sérgio Selaschi and Robert L. Zimmermam, Evolution of a Two Parameter Chaotic Dynamics From Universal Attractors, Physics Letters A vol. 120, n.9, 23 march 1987.

7.1.3- Nicolas B.Tufillaro, Dynamics of Bouncing Ball, 1986, Submission to the Department of Physics at Bryn Mawr College for a Masters of Arts in Physics.