"MOVIMENTO DE CARGA ESPACIAL SOBRE UMA MATRIZ DE DENSIDADE UNIFORME - EQUAÇÕES GERAIS EM CIRCUITO ABERTO E FECHADO"

Sergio de Aguiar Monsanto

[redacted]

Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, para a obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA APLICADA

Orientador: Prof.Dr.Guilherme F.L.Ferreira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

São Carlos - 1983

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ____

Sérgio de Aguiar Monsanto

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 28 DE janeiro DE 1983.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira Orientador

Dr. Renê Armando Moreno Alfaro

Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún

A meus pais

À Olinda e nossos filhos
André, Rafael e Alex

Os meus calorosos Agradecimentos,

ao Prof.Dr.Guilherme F.L.Ferreira, pela orientação e amizade transmitida,

aos Profs. Paulo Daniel Emmel e Hamilton Viana da Silveira, pelas discussões e estímulos,

aos Profs. do Df-UFSCAR, pelo apoio, estímulo e amizade,

ao Sr. José Inácio Bertanha, pela confecção dos desenhos,

à Srta. Maria Teresa Franco de Camargo,pela solicitude e presteza além da amizade, no trabalho de datilografia,

aos funcionários da DPD-UFSCAR onde foram realizados os cálculos,

à todos que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

Lista de ilustrações e tabelas..... i

Sumário e abstract.....iii

Introdução..... 1

Capítulo I - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA - EQUAÇÕES BÁSICAS..... 3

1.1 - Formulação do problema..... 3

1.2 - Sistema de unidades reduzidas..... 4

1.3 - Equações básicas..... 4

1.4 - Método das características..... 5

Capítulo II - RELAÇÃO: CORRENTE TOTAL - D.D.P. ENTRE OS ELETRÓDIOS..... 9

2.1 - Condições iniciais..... 9

2.2 - Definição da função $\chi(t)$..... 11

Capítulo III - APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO TIPO CAIXA: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$..... 16

3.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de cargas..... 16

3.2 - Circuito aberto..... 16

3.3 - Circuito fechado..... 18

3.4 - Resultados e comparações..... 21

Capítulo IV - APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO LINEAR: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$..... 38

4.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de cargas..... 38

4.2 - Circuito aberto..... 38

4.3 - Circuito fechado..... 40

4.4 - Resultados e comparações..... 41

Capítulo V - APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO LINEAR: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$..... 47

5.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de cargas..... 47

5.2 - Circuito aberto..... 47

5.3 - Circuito fechado..... 49

5.4 - Resultados e comparações..... 50

Capítulo VI - CONCLUSÕES..... 55

Apêndice I - CAMPOS ELÉTRICOS INICIAIS: $E(\chi)$, $E(S_0)$, $E(1,0)$, E_0..... 56

I.a - Distribuição tipo caixa: $\rho(x_0,0) = \frac{1}{S_0}$..... 56

I.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$..... 58

I.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$..... 60

Apêndice II - D.D.P. ENTRE OS ELETRÓDIOS: $V(t)$..... 62

II.a - Distribuição tipo caixa: $\rho(x_0,0) = \frac{1}{S_0}$..... 62

II.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$..... 63

II.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$..... 64

Apêndice III - D.D.P. INICIAIS: $V(\chi)$ E $V(S_0)$..... 66

III.a - Distribuição tipo caixa: $\rho(x_0,0) = \frac{1}{S_0}$..... 66

III.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$..... 66

III.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$..... 67

Apêndice IV - TEOREMA DE LINDMAYER..... 68

Referências Bibliográficas..... 70

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Distribuição inicial de cargas (genérica)..... 9

Figura 2 - Distribuição inicial de cargas - tipo caixa..... 16

Figura 3 - Campo elétrico inicial - tipo caixa..... 16

Figura 4 - Gráfico: $\chi(t)$xt para circuito aberto..... 25

Figura 5 - Gráfico: $\chi(t)$xt para circuito fechado..... 26

Figura 6 - Campo elétrico final (para $S_0 = 0,5$)..... 27

Figura 7 - Gráfico: χ_L x S_0 para circuito aberto..... 28

Figura 8 - Gráfico: χ_L x S_0 para circuito fechado..... 29

Figura 9 - Gráfico: dV(t)/dt x t para circuito aberto..... 30

Figura 10 - Gráfico: J(t)xt para circuito fechado..... 31

Figura 11 - Gráfico: dV(t)/dt(mín.) x S_0 para circuito aberto.. 33

Figura 12 - Gráfico: J(t)(máx.) x S_0 para circuito fechado..... 33

Figura 13 - Gráfico: S(t)xt para circuito aberto..... 34

Figura 14 - Gráfico: S(t)xt para circuito fechado..... 34

Figura 15 - Gráfico: $\rho(x,t)$xx para circuito aberto..... 35

Figura 16 - Gráfico: $\rho(x,t)$xx para circuito fechado..... 36

Figura 17 - Distribuição inicial de cargas..... 38

Figura 18 - Campo elétrico inicial..... 38

Figura 19 - Gráfico: $\chi(t)$xt para circuito aberto..... 41

Figura 20 - Gráfico: $\chi(t)$xt para circuito fechado..... 42

Figura 21 - Gráfico: dV(t)/dt x t para circuito aberto..... 43

Figura 22 - Gráfico: J(t)xt para circuito fechado..... 43

Figura 23 - Gráfico: S(t)xt para circuito aberto..... 44

Figura 24 - Gráfico: S(t)xt para circuito fechado..... 44

Figura 25 - Gráfico: $\rho(x,t)$xx para circuito aberto..... 45

Figura 26 - Gráfico: $\rho(x,t)$xx para circuito fechado..... 45

Figura 27 - Distribuição inicial de cargas..... 47

Figura 28 - Campo elétrico inicial..... 47

Figura 29 - Gráfico: $\chi(t)$xt para circuito aberto..... 50

Figura 30 - Gráfico: $\chi(t)xt$ para circuito fechado..... 50

Figura 31 - Gráfico: $dV(t)/dt$ x t para circuito aberto..... 51

Figura 32 - Gráfico: $J(t)xt$ para circuito fechado..... 51

Figura 33 - Gráfico: $S(t)xt$ para circuito aberto..... 52

Figura 34 - Gráfico: $S(t)xt$ para circuito fechado..... 52

Figura 35 - Gráfico: $\rho(x,t)xx$ para circuito aberto..... 53

Figura 36 - Gráfico: $\rho(x,t)xx$ para circuito fechado..... 54

LISTA DE TABELAS

Tabela I - Circuito aberto..... 22

Tabela II - Circuito fechado..... 23

SUMÁRIO

Neste trabalho estudou-se o movimento de uma carga espacial sobre uma matriz fixa, de densidade uniforme, tanto em circuito aberto como fechado. No primeiro caso, circuito aberto, a solução é quase trivial comparada com o outro caso, no qual o problema é finalmente reduzido a uma equação diferencial ordinária, com método de solução análogo ao empregado em problemas de carga espacial monopolar livre.

Como ilustração, estudou-se a voltagem e a corrente produzidas por um sistema com carga total nula, mas com excessos locais de carga.

ABSTRACT

In this work the motion of a space charge cloud embedded in a matrix of constant immobile charge density is studied in open as well as in closed circuit. In the first case, open circuit, the solution is almost trivial as compared as the other one in which, after some work, the problem is reduced to an ordinary differential equation.

The method of solution is parallel to that employed in the study of monopolar free space charge motion.

The voltage and the current produced by a system with no net charge but with unbalanced local charge density were calculated using the general equations derived in the first part of the work.

INTRODUÇÃO

Embora o estudo do movimento de carga espacial em isolantes tenha apresentado progressos significativos ultimamente, na maior parte eles se referem à situação em que um único portador está presente. Nesta linha sabe-se calcular a carga espacial no futuro, dada a distribuição de cargas no presente, na ausência de armadilhas. E isto quer em circuito aberto[1], quer em circuito fechado[2],[3],[4].

Na dissertação "Decaimento do Potencial de um Plasma numa Matriz Sólida em Geometria Plana"[5], Alcione Fernandes considerou o caso em que cargas positivas e negativas móveis, mas com densidades iguais criadas numa região do espaço aonde já existe um campo elétrico, sendo posteriormente por ele separadas; este cálculo foi feito para circuito aberto.

Um outro caso considerado na literatura, também em circuito aberto, foi o da neutralização de cargas negativas fixas, por positivas móveis, inicialmente justapostas[6].

Nesta dissertação estudaremos o movimento de carga espacial sobre uma distribuição uniforme fixa de sinal oposto, tanto em circuito aberto, como em fechado.

Ela se distingue dos casos anteriores por permitir que a densidade inicial de carga móvel seja qualquer (isto é, não necessariamente constante) e por realizá-la também para o caso de circuito fechado.

Para isto, puderam ser utilizados os métodos anteriormente empregados no estudo de carga livre[2], convenientemente modificados pela introdução da carga de outro sinal.

Para ilustração escolheu-se o estudo dos seguintes casos:

a - A carga positiva está acumulada uniformemente, no

início em um dos lados da amostra, que no seu todo é neutra.

b - O mesmo que no caso anterior, com a diferença que a carga não está distribuída uniformemente.

Fez-se um estudo comparativo do valor da corrente externa com o da variação do potencial - que lhe corresponde em circuito aberto - produzidos pelo movimento da carga espacial a partir da situação inicial em que a diferença de potencial era zero (no caso da corrente, esta d.d.p. permaneceu zero, pois é a condição de curto-circuito).

No capítulo I são apresentadas a formulação do problema e as equações básicas do sistema com uma descrição resumida do método das características e a mudança para o sistema de unidades reduzidas.

CAPÍTULO I

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA-EQUAÇÕES BÁSICAS

1.1 - Formulação do problema

Consideramos um plasma de cargas positivas móveis e negativas fixas. As cargas positivas são livres, isto é, não há armadilhas que as imobilizem. A corrente de difusão será desprezada.

As equações que regem o movimento das cargas são:

a eq. de Poisson

$$\varepsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial x'} = \rho'(x',t') - \rho_0'$$

e a eq. da continuidade

$$\frac{\partial J_c'(x',t')}{\partial x'} = - \frac{\partial \rho'(x',t')}{\partial t'}$$

onde:

$$J_c'(x',t') = \mu\rho'(x',t')E'(x',t')$$

é a densidade de corrente de condução dos portadores de carga positiva e,

ε - é a permissividade dielétrica

μ - é a mobilidade das cargas positivas

$\rho'(x',t')$ - é a densidade de carga positiva na posição x', no tempo t'

ρ_0' - é a densidade de carga negativa

$E'(x',t')$ - é o campo elétrico na posição x',no tempo t'

Derivando parcialmente em relação ao tempo a eq. de Pois

son e substituindo a eq. da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\varepsilon\frac{\partial E'(x',t')}{\partial t'} + \mu\rho'(x',t')E'(x',t')\right] = 0$$

Observamos que a função entre colchetes independe de x', sendo portanto uma função de t' e podemos escrever:

$$J'(t') = \mu\rho'(x',t')E'(x',t') + \varepsilon\frac{\partial E'(x',t')}{\partial t'}$$

onde J'(t') é a densidade de corrente total.

1.2 - Sistema de unidades reduzidas

A partir deste ponto vamos trabalhar com um sistema de unidades reduzidas como mostrado na referência (2) tendo como fatores de conversão entre as unidades adimensionais e as dimensionais (com primo) correspondentes:

$$x = \frac{x'}{L} \quad ; \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_0'} \quad ; \quad t = \frac{\mu\rho_0' t'}{\varepsilon} \quad ; \quad E = \frac{\varepsilon E'}{L\rho_0'} \quad ; \quad J = \frac{\varepsilon J'}{\mu\rho'^2 L}$$

onde L é o comprimento da amostra. Neste novo sistema, a amostra terá comprimento igual a 1 (um) e a densidade de carga negativa também pode ser escolhida igual a 1 (um).

1.3 - Equações básicas

Neste sistema adimensional, as eqs. ficam

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho(x,t) - \rho_0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial J_c(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$J_c(x,t) = \rho(x,t)E(x,t) \tag{1.3}$$

$$J(t) = \rho(x,t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \qquad (1.4)$$

1.4 - Método das características

Para resolver o sistema de eqs. (1.1) a (1.4) usaremos o método das características, utilizado pela primeira vez em problemas de carga espacial por Many-Rakavy[7]; as referências (2), (3) e (5) mostram a eficácia deste método e a (8) dá uma explicação detalhada da sua aplicação.

O método consiste em estudar o movimento dos portadores a partir da equação $\frac{dx}{dt} = E$ e desta equação deduzir a aceleração como função das grandezas elétricas (como será visto em detalhe abaixo).

Em princípio o método fornece a posição x das cargas em função da posição inicial x_0 e do tempo t, isto é, $x = x(t,x_0)$, e da mesma forma a velocidade, ou seja, o campo E em função dos mesmos parâmetros, ou seja, $E = E(t,x_0)$. Eliminando-se x_0, ter-se-á x como função de E e t e o problema estará resolvido. Como se verá o método é de fácil aplicação em circuito aberto mas razoavelmente complexo em circuito fechado, pelo fato de não se poder obter explicitamente, aquelas duas equações.

Iniciamos escrevendo que a velocidade é proporcional (nas nossas unidades o fator de proporcionalidade é 1) ao campo

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x(t),t) \qquad (1.5)$$

Devemos seguir o campo que age sobre o portador e por isso considera-se a dependência x de E, como função do tempo.

Quando derivamos esta equação uma vez em relação ao tempo, pelas razões expostas, devemos fazê-lo totalmente, seja

$$\frac{d^2(x(t))}{dt^2} = \frac{dE(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial E(x(t),t)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial E(x(t),t)}{\partial t}$$

substituindo as eqs. (1.1) e (1.5),

$$\frac{dE(x(t),t)}{dt} = E(x(t),t)\left[\rho(x(t),t)-\rho_0\right] + \frac{\partial E(x(t),t)}{\partial t}$$

e substituindo agora a eq. (1.4),

$$\frac{dE(x(t),t)}{dt} - J(t) + \rho_0 E(x(t),t) = 0$$

com solução:

$$E(x(t),t) = e^{-\rho_0 t}\left[E(x_0,0)+\int_0^t e^{\rho_0 t'} J(t')dt'\right] \qquad (1.6)$$

sendo x_0 a posição inicial de uma linha de corrente, e $E(x_0,0)$ o campo em x_0.

A variação da densidade de carga positiva ao longo da linha de corrente em relação ao tempo é,

$$\frac{d\rho(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial\rho(x(t),t)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\rho(x(t),t)}{\partial t}$$

substituindo as eqs. (1.2) e (1.5):

$$\frac{d\rho(x(t),t)}{dt} = -\rho(x(t),t)\frac{\partial E(x(t),t)}{\partial x}$$

substituindo a eq. (1.1):

$$\frac{d\rho(x(t),t)}{dt} = -\rho^2(x(t),t) + \rho_0\rho(x(t),t) \qquad (1.7)$$

Quando a densidade de corrente total $J(t)$ é conhecida, podemos integrar a eq. (1.6) e depois a eq. (1.5) obtendo $x(t)$ como:

$$x(t) = x_0 + E(x_0,0)\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0} + \int_0^t e^{-\rho_0 t'} dt' \int_0^{t'} e^{\rho_0 t''} J(t'')dt'' \qquad (1.8)$$

onde x_0 caracteriza a posição inicial de uma linha de corrente.

Podemos completar a solução do problema determinando a densidade de carga positiva ao longo da linha de corrente integrando a eq. (1.7) e considerando $\rho(x_0,0)$ a distribuição inicial, obtemos:

$$\rho(x(t),t) = \frac{\rho(x_0,0)}{\rho(x_0,0)\left(\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\right)+e^{-\rho_0 t}} \qquad (1.9)$$

No caso em que a amostra é mantida em circuito aberto, a corrente total é igual a 0 (zero) e as eqs. (1.6) e (1.8) ficam:

$$E(x(t),t) = E(x_0,0)e^{-\rho_0 t} \qquad (1.10)$$

$$x(t) = x_0 + E(x_0,0)\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0} \qquad (1.11)$$

e o problema estaria resolvido.

No caso em que a amostra é mantida em curto-circuito, a corrente total é diferente de 0 (zero) e desconhecida a priori. Para resolver esta dificuldade, é necessário obter a corrente total como função de grandezas que possam ser obtidas mais facilmente em termos das condições iniciais e de contorno.

É oportuno citar que embora possamos escolher $\rho_0 = 1$, como vamos fazê-lo, mantivemos ρ_0 nas equações obtidas por que estas seriam válidas também para o caso em que as cargas móveis e fixas tivessem o mesmo sinal, sendo a móvel tratada como $\rho(x,t)$ e a fixa como $-\rho_0$, representando cargas aprisionadas em armadilhas.

Necessitando poucas modificações nas equações aqui obtidas.

No capítulo II vamos estabelecer a relação entre a corrente total J(t) e a d.d.p. entre os eletródios V(t). Esta relação será uma solução geral, que pode ser aplicada tanto a circuito aberto como em curto com as respectivas condições de contorno.

CAPÍTULO II

RELAÇÃO: CORRENTE TOTAL - D.D.P. ENTRE OS ELETRÓDIOS

2.1 - Condições iniciais

Vamos encontrar uma relação entre a corrente total $J(t)$ e a d.d.p. entre os eletródios $V(t)$, que será posteriormente usada tanto para o caso em que há uma d.d.p. aplicada aos eletródios como também para o caso de circuito aberto.

Consideremos conhecidas as distribuições iniciais de cargas, sendo que as positivas tocam um dos eletródios e as negativas estão uniformemente distribuidas por todo o material, ver fig.1.

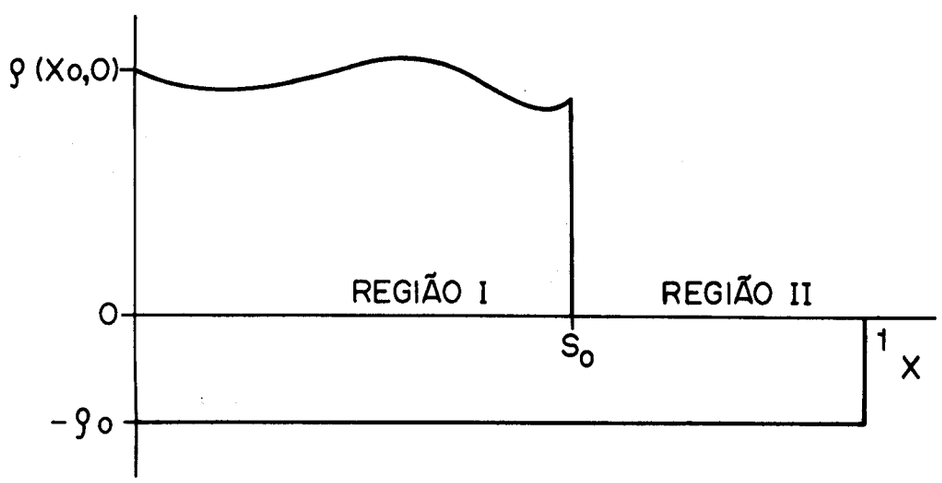


Fig. 1 - Distribuição inicial de cargas (genérica).

Onde:

S_0 - é a posição da frente de cargas positivas em $t = 0$

$S(t)$ - é a posição da frente após um tempo t

Pela fig. 1 as condições iniciais são:

- em $t = 0 \rightarrow \rho(x_0,0)$ é conhecida e temos duas regiões distintas:

Região I : $\rho(x,0) = \rho(x_0,0)$

Região II: $\rho(x,0) = 0$

- para qualquer t, ρ_0 é fixa.

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

É válida a condição de contorno,

$$\int_0^1 E(x,t)dx = V(t) \tag{2.1}$$

onde V(t) é a d.d.p. entre os eletródios

Substituindo a eq. (1.1) na eq. (1.4) vem:

$$J(t) = E(x,t)\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} + \rho_0 E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad . \tag{2.2}$$

Integrando a eq. (2.2) de x = 0 até x = 1, para qualquer tempo $t < \tau$, onde τ seria o tempo de chegada da frente de cargas em x = 1,

$$\int_0^1 J(t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 E(x,t)dx+\rho_0\int_0^1 E(x,t)dx+\int_0^1 E(x,t)\frac{\partial E(x,t)}{\partial x}dx$$

obtemos a expressão da corrente total:

$$J(t) = \frac{dV(t)}{dt} + \rho_0 V(t) + \frac{1}{2}[E^2(1,t)-E^2(0,t)] \quad . \tag{2.3}$$

Parcialmente, o objetivo foi alcançado. Precisamos obter E(0,t) e E(1,t) como função das grandezas já conhecidas através das condições iniciais, para conhecermos J(t).

Usando a eq. (2.1), mantendo t fixo:

$$E(1,t) = V(t)+\int_0^{S(t)} x\rho(x,t)dx - \frac{\rho_0}{2} \tag{2.4}$$

Usando agora a eq. (1.1), mantendo t fixo obtemos:

$$E(0,t) = E(1,t)+\rho_0-\int_0^{S(t)} \rho(x,t)dx \tag{2.5}$$

Substituindo a eq. (1.6) na eq. (1.5) e integrando, obte

mos finalmente,

$$x(t) = x_0+E(x_0)\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0} + \int_0^t e^{-\rho_0 t'} dt' \int_0^{t'} e^{\rho_0 t''} J(t'')dt'' . \qquad (2.6)$$

Pela eq. (2.6) a posição da frente de carga é:

$$S(t) = S_0+E(S_0)\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0} + \int_0^t e^{-\rho_0 t'} dt' \int_0^{t'} e^{\rho_0 t''} J(t'')dt'' . \qquad (2.7)$$

Subtraindo a eq. (2.7) da eq. (2.6) vem:

$$x(t) = x_0+S(t)-S_0 + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}[E(x_0)-E(S_0)] \qquad (2.8)$$

ou,

$$S(t)-S_0 = x(t)-x_0 + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}|E(S_0)-E(x_0)| \qquad (2.9)$$

2.2 - Definição da função $\chi(t)$

Quando o campo elétrico em x=0,para t=0, é negativo podemos definir uma função $\chi(t)$ para descrever o movimento das cargas positivas que se deslocam para x=0 como:

χ é um ponto da distribuição,em t=0, que após um tempo t estará em x=0,ou seja, quando x=0 teremos $x_0=\chi$. E a eq. (2.9)fica:

$$S(t)-S_0 = -\{\chi + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}[E(\chi)-E(S_0)]\}. \qquad (2.10)$$

Substituindo a eq. (2.9) na eq. (2.4) vem:

$$E(1,t) = V(t) - \frac{\rho_0}{2} + \int_0^{S(t)} \{x_0+(S(t)-S_0) + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}[E(x_0)-E(S_0)]\}\rho(x,t)dx \qquad (2.11)$$

derivando a eq. (2.9) em relação a x_0, mantendo t constante:

$$dx = dx_0\left[1 + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}(\rho(x_0,0)-\rho_0)\right] \tag{2.12}$$

multiplicando a eq. (1.9) pela eq. (2.12),

$$dx\rho(x,t) = dx_0\rho(x_0,0) \ . \tag{2.13}$$

Substituindo as eqs. (2.10) e (2.13) na eq. (2.11) obtemos,

$$E(1,t) = V(t) - \frac{\rho_0}{2} + \int_0^{S(t)} \{x_0-\chi + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\left[E(x_0)-E(\chi)\right]\}.\rho(x_0,0)dx_0 \ . \tag{2.14}$$

Mas, pela eq. (1.1), em t = 0:

$$\rho(x_0,0)dx_0 = \frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0}dx_0 + \rho_0 dx_0$$

ou

$$\rho(x_0)dx_0 = dE(x_0) + \rho_0 dx_0 \ . \tag{2.15}$$

Substituindo a eq. (2.15) na eq. (2.14) e separando os termos em integrais vem:

$$E(1,t) = V(t) - \frac{\rho_0}{2} + \int_\chi^{S_0} x_0 dE(x_0)+\rho_0\int_\chi^{S_0} x_0 dx_0-\chi\int_\chi^{S_0} dE(x_0)- - \chi\rho_0\int_\chi^{S_0} dx_0 + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}.\left[\int_\chi^{S_0} E(x_0)dE(x_0)+ + \rho_0\int_\chi^{S_0} E(x_0)dx_0-E(\chi)\int_\chi^{S_0} dE(x_0)-\rho_0 E(\chi)\int_\chi^{S_0} dx_0\right] \ . \tag{2.16}$$

As integrais da eq. (2.16) seriam de 0 (zero) a S(t) em x, mas como para x = 0 temos $x_0 = \chi$, elas são efetuadas de χ até S_0 devido à definição da função $\chi(t)$ e às eqs. (2.9) e (2.10), fornecendo finalmente:

$$E(1,t) = V(t)+V(\chi)-V(S_0)+E(S_0)(S_0-\chi)+\frac{\rho_0}{2}[(S_0-\chi)^2-1]+\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}$$

$$\{\frac{1}{2}[E(S_0)-E(\chi)]^2-\rho_0[V(\chi)-V(S_0)+E(\chi)(S_0-\chi)]\} \qquad (2.17)$$

onde:

$$V(\chi) \equiv \int_0^{\chi} E(\chi,0)d\chi \quad e \quad V(S_0) \equiv \int_0^{S_0} E(\chi,0)d\chi \ .$$

Derivando a eq. (1.6), para x = 0 e $x_0 = \chi$, em relação ao tempo:

$$J(t) - \frac{dE(0,t)}{dt} = \rho_0 E(0,t) - e^{-\rho_0 t}\frac{\partial E(\chi)}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt} \ . \qquad (2.18)$$

Por outro lado, a eq. (1.4) fornece, para x = 0:

$$J(t) - \frac{dE(0,t)}{dt} = \rho(0,t)E(0,t) \qquad (2.19)$$

Comparando as eqs. (2.18) e (2.19) e usando a eq. (1.1) em x = 0 e $x_0 = \chi$:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{(\rho(0,t)-\rho_0)E(0,t)}{\rho(\chi)-\rho_0}e^{\rho_0 t} \ . \qquad (2.20)$$

A eq. (1.9), para x = 0 e $x_0 = \chi$ é:

$$\rho(0,t) = \frac{\rho(\chi)}{\rho(\chi)(\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0})+e^{-\rho_0 t}} \qquad (2.21)$$

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

Substituindo a eq. (2.21) na eq. (2.20) obtemos:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{-E(0,t)}{\rho(\chi)\left(\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\right)+e^{-\rho_0 t}} \quad . \tag{2.22}$$

Substituindo a eq. (2.17) na eq. (2.5), usando a eq. (2.15):

$$E(0,t) = V(t)+V(\chi)-V(S_0)+E(S_0)(S_0-\chi-1) + \frac{\rho_0}{2}\left[(S_0-\chi)^2-2(S_0-\chi)+1\right]+$$

$$+E(\chi) + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}(E(S_0)-E(\chi))^2-\rho_0(V(\chi)-V(S_0)+E(\chi)(S_0-\chi))\right] \tag{2.23}$$

Substituindo agora a eq. (2.23) na eq. (2.22) obtemos finalmente:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{-1}{\rho(\chi)\left(\frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\right)+e^{-\rho_0 t}}\{V(t)+V(\chi)-V(S_0)+E(S_0)(S_0-\chi-1)+E(\chi)+$$

$$+\frac{\rho_0}{2}\left[(S_0-\chi)^2-2(S_0-\chi)+1\right] + \frac{1-e^{-\rho_0 t}}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}(E(S_0)-E(\chi))^2-\right.$$

$$\left.-\rho_0(V(\chi)-V(S_0)+E(\chi)(S_0-\chi))\right]\} \tag{2.24}$$

As eqs. obtidas são completamente gerais e podem ser aplicadas para resolver os casos em que conhecemos as distribuições iniciais de cargas e a condição de contorno pertinente (circuito aberto ou fechado). A única limitação é que a densidade de carga positiva deve tocar um só dos eletródios.

Nos próximos capítulos faremos a aplicação deste método de solução a problemas onde conhecemos as distribuições iniciais e se o circuito se encontra em curto ou aberto, para distribuições iniciais de cargas positivas tipo caixa e lineares, comparando os resultados.

Cabe ressaltar que no caso de circuito fechado esta solução está incompleta. Ela só vale para tempos menores do que t_L, que será o tempo correspondente ao valor máximo de $\chi(t)$, χ_L. A partir de t_L, será encontrada outra solução para descrever a segunda parte do processo onde ocorre um fato importante, o descolamento das cargas positivas do eletródio em $x = 0$ e o respectivo deslocamento dessas cargas para uma posição central e simétrica, como será visto em detalhes na seção 3.3.

No capítulo III aplicaremos este método de solução à situação em que a distribuição inicial é tipo caixa, para circuito aberto e fechado, fazendo as comparações entre eles.

Nos 3 capítulos que se seguem serão apresentados todos os resultados obtidos através do cálculo direto, quando se trata de circuito aberto e pela utilização do método Runge-Kutta (4a. ordem) para integração numérica de equações diferenciais[9] quando se trata de circuito fechado, onde não é possível integrar analiticamente as equações $d\chi(t)/dt$.

Todos os cálculos foram realizados no computador IBM - 370/145 da Divisão de Processamentos de dados da UFSCAR, usando linguagem FORTRAN-IV.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO TIPO CAIXA: $\rho(x_0,0) = \frac{1}{S_0}$

3.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de cargas

As cargas totais positivas e negativas são iguais a 1, logo (ver fig. 2) temos:

- densidade de cargas negativas $\rho_0 = 1$ em $0<x<1$
- densidade de cargas positivas $\rho(x_0,0) = \frac{1}{S_0}$ em $0<x<S_0$

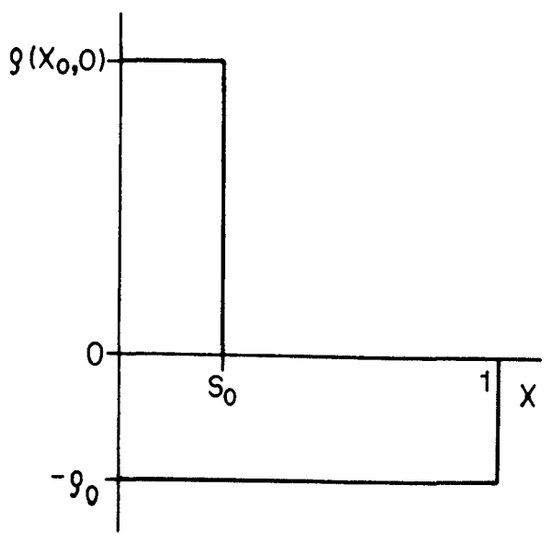


Fig. 2 - Distribuição inicial de cargas.

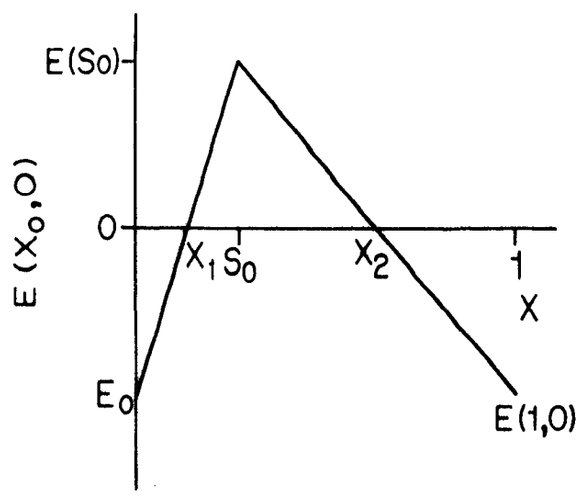


Fig. 3 - Campo elétrico inicial.

A configuração do campo elétrico inicial é do tipo da fig. 3, segundo o apêndice I-a, logo:

$$E(\chi) = \left(\frac{\chi}{S_0} - \frac{1}{2}\right)(1-S_0) \tag{3.1}$$

$$E(S_0) = \frac{1}{2}(1-S_0) \tag{3.2}$$

3.2 - Circuito aberto

Em circuito aberto a corrente total é $J(t) = 0$ e a eq. (2.3) toma a forma:

$$\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = -\frac{1}{2}\left[E^2(1,t) - E^2(0,t)\right] . \tag{3.3}$$

A eq. (1.10) para $x = 0$ e $x_0 = \chi$ fornece:

$$E(0,t) = E(\chi)e^{-t} \tag{3.4}$$

e a eq. (1.11):

$$\chi(t) = -E(\chi)(1-e^{-t}) \ . \tag{3.5}$$

Integrando a eq. de Poisson de $x = 0$ a $x = 1$, mantendo t fixo e usando as eqs. (3.4) e (3.5):

$$E(1,t) = E(\chi)e^{-t} + \frac{1}{S_0}E(\chi)(1-e^{-t}) \ . \tag{3.6}$$

Comparando as eqs. (3.1) e (3.5) obtemos:

$$E(\chi) = -\frac{(1-S_0)S_0}{2(1-e^{-t}(1-S_0))} \tag{3.7}$$

$$\chi(t) = \frac{S_0(1-S_0)(1-e^{-t})}{2(1-e^{-t}(1-S_0))} \tag{3.8}$$

Pela eq. (1.11) obtemos a posição das cargas positivas que no instante $t = 0$ estavam em x_0:

$$x(t) = x_0 + (\frac{x_0}{S_0} - \frac{1}{2})(1-S_0)(1-e^{-t}) \tag{3.9}$$

Pela eq. (1.10), o campo elétrico é:

$$E(x(t),t) = (\frac{x_0}{S_0} - \frac{1}{2})(1-S_0)e^{-t} \tag{3.10}$$

Usando as eqs. (1.11) e (3.2) obtemos a posição da frente de cargas positivas:

$$S(t) = \frac{1}{2}[1+S_0-e^{-t}(1-S_0)] \ . \tag{3.11}$$

Substituindo agora as eqs. (1.1) e (1.11) na integração por partes da eq. (2.1) obtemos a d.d.p. entre os eletródios, ver apêndice II-a:

$$V(t) = \frac{1}{8}(1-e^{-t})(1-S_0)^2\{\frac{S_0e^{-t}}{1-e^{-t}(1-S_0)}[2+(1-e^{-t})(\frac{1}{S_0}-1)]-1-e^{-t}\}. \quad (3.12)$$

Substituindo a eq. (3.8) nas eqs. (3.4) e (3.6) obtemos os campos elétricos nos eletródios:

$$E(0,t) = -\frac{S_0(1-S_0)e^{-t}}{2[1-e^{-t}(1-S_0)]} \quad (3.13)$$

$$E(1,t) = -\frac{1-S_0}{2} \quad . \quad (3.14)$$

Substituindo as eqs. (3.12), (3.13) e (3.14) na eq.(3.3) vem:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -V(t) - \frac{1}{8}(1-S_0)^2\{1-[\frac{S_0e^{-t}}{1-e^{-t}(1-S_0)}]^2\} \quad . \quad (3.15)$$

Para completar a solução, obtemos da eq. (1.9) a evolução da densidade de cargas positivas com o tempo:

$$\rho(x(t),t) = \frac{1}{1-e^{-t}(1-S_0)} \quad (3.16)$$

3.3 - Circuito fechado

Em curto-circuito, a condição de contorno é:

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t)dx = 0 \quad (3.17)$$

logo,

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0 \quad .$$

Substituindo os valores de $E(\chi)$ e $E(S_0)$ dados pelas eqs. (3.1) e (3.2), e os valores de $V(\chi)$ e $V(S_0)$, apêndice III-a, na eq. (2.24) vem:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{S_0}{1-e^{-t}(1-S_0)}\{e^{-t}[(\frac{\chi^2}{2S_0} + \frac{S_0}{2} - \chi)(\frac{1}{S_0} - 1)] - \frac{\chi^2}{2S_0^2}\} \quad . \qquad (3.18)$$

Resolvemos por integração numérica a eq. (3.18) obtendo $\chi(t)$, substituindo na eq. (2.10) calculamos $S(t)$, usando as eqs. (2.17) e (2.23) obtemos $J(t)$ pela eq. (2.3) e finalmente a densidade é dada pela eq. (3.16).

Mas a solução $\chi(t)$, como pode ser visto na fig. 8, apresenta um valor máximo χ_L que representa a posição inicial do último plano de cargas positivas que consegue atingir o eletródio em $x = 0$. A partir do tempo t_L, a solução da eq. (3.18) não tem mais validade. Temos que obter, portanto, outra forma de descrever os deslocamentos das cargas positivas restantes dentro da amostra, q_+.

A eq. (2.3) com as condições iniciais, eq. (3.17) e $\frac{dV}{dt} = 0$, fica:

$$J(t) = \frac{1}{2}[E^2(1,t)-E^2(0,t)] \qquad (3.19)$$

integrando a eq. de Poisson (1.1), para $t_L < t < \tau$:

$$E(1,t) = E(0,t) + q_+ - 1 \qquad (3.20)$$

onde:

$$q_+ = \int_0^{S(t)} \rho(x,t)dx = 1 - \frac{\chi_L}{S_0} \qquad (3.21)$$

é a carga positiva que restou na amostra, substituindo na eq. (3.19) as eqs. (3.20) e (3.21):

$$J(t) = (1-q_+)\left[\frac{1}{2}(1-q_+)-E(0,t)\right] \tag{3.22}$$

por outro lado, a eq. (2.2) em x = 0 fornece J(t) como:

$$J(t) = \frac{dE(0,t)}{dt} \tag{3.23}$$

pois quando $t > t_L$ já não existem mais cargas positivas junto ao eletródio em x = 0, havendo um deslocamento para a região central do material.

Comparando as eqs. (3.22) e (3.23):

$$\frac{dE(0,t)}{dt} + (1-q_+)E(0,t) = \frac{(1-q_+)^2}{2}$$

com solução:

$$E(0,t) = \frac{1-q_+}{2}\left[1-e^{-(1-q_+)(t-t_L)}\right]+E(0,t_L)e^{-(1-q_+)(t-t_L)}$$

mas $E(0,t_L) = 0$, logo:

$$E(0,t) = \frac{1-q_+}{2}\left[1-e^{-(1-q_+)(t-t_L)}\right] \tag{3.24}$$

para qualquer $t_L < t < \tau$.

Substituindo a eq. (3.24) na eq. (3.22) obtemos finalmente a corrente total como:

$$J(t) = \frac{(1-q_+)^2}{2}\, e^{-(1-q_+)(t-t_L)} \quad . \tag{3.25}$$

Usando a definição da linha de corrente, eq. (1.5), na frente de carga vem:

$$\frac{dS(t)}{dt} \equiv E(S(t),t) \quad , \tag{3.26}$$

Substituindo as eqs. (1.1) e (3.24) encontramos a posição da frente de cargas positivas como:

$$S(t) = \frac{1+q_+}{2} - \frac{1-q_+}{2q_+} e^{-(1-q_+)(t-t_L)} -$$

$$- \left[\frac{1+q_+}{2} - \frac{1-q_+}{2q_+} - S(t_L)\right] e^{-(t-t_L)} \qquad (3.27)$$

Então, a partir de um tempo t_L, as soluções são dadas pelas equações (3.21), (3.25) e (3.27).

3.4 - Resultados e comparações

Os cálculos foram efetuados para valores de $S_0 = 0,1; \ldots; 0,9$ sendo apresentados a seguir. Para circuito fechado foi usado o Método Runge-Kutta de 4a. ordem na integração da eq. (2.24), para obter $\chi(t)$.

A tabela I mostra os resultados mais significativos para o circuito aberto e a tabela II para o fechado.

Para compreendermos melhor as tabelas, vamos analisá-las com o auxílio dos gráficos obtidos.

A fig. 4 mostra o gráfico $\chi(t)xt$ para cada valor de S_0 em circuito aberto e a fig. 5 em circuito fechado (note a diferença de escala).

Em circuito aberto a função $\chi(t)$ tende assintoticamente ao seu valor final enquanto que em circuito fechado os valores de t_L são finitos e proporcionalmente crescentes em relação a S_0, o que era de se esperar, pois os campos elétricos na região do eletródio em $x = 0$ são menores e as distâncias a ele da carga espacial móvel, maiores para crescentes S_0. Em ambos os casos o maior valor de $\chi(t)$, χ_L, ocorre para $S_0 = 0.5$, sendo 0,125 em circuito aberto e 0,103 em circuito fechado. Para este valor de S_0 e circui

TABELA I

CIRCUITO ABERTO

$\rho(x_0,0)$	S_0	χ_L $(x10^{-1})$	T_m $(x10^{-1})$	dV(t)/dt mín. $(x10^{-2})$	V(t) mín. $(x10^{-2})$	S_F	q_+
1,00x10	0,1	0,45	0,20	-7,78	-10,13	0,550	0,550
5,00	0,2	0,80	0,30	-5,62	- 8,00	0,600	0,600
3,33	0,3	1,05	0,35	-4,00	- 6,13	0,650	0,650
2,50	0,4	1,20	0,40	-2,78	- 4,50	0,700	0,700
2,0	0,5	1,25	0,50	-1,84	- 3,13	0,750	0,750
1,67	0,6	1,20	0,55	-1,13	- 2,00	0,800	0,800
1,43	0,7	1,05	0,55	-0,61	- 1,13	0,850	0,850
1,25	0,8	0,80	0,60	-0,26	- 0,50	0,900	0,900
1,11	0,9	0,45	0,65	-0,06	- 0,13	0,950	0,950
$8(\frac{1}{2}-x_0)$	0,5	0,92	0,30	-3,95	- 5,56	0,667	0,667
$2(1-x_0)$	1,0	0,87	0,45	-0,07	- 1,39	0,833	0,833

onde:

$\rho(x_0,0)$ - densidade inicial de cargas positivas

S_0 - posição inicial da frente de cargas positivas

χ_L - posição inicial do último plano de cargas que atinge o eletródio em x = 0 (no tempo t_L)

T_m - tempo em que ocorre dV(t)/dt

dV(t)/dt(mín.) - valor mínimo da derivada da d.d.p. em relação ao tempo

V(t)(mín.) - diferença de potencial mínima entre os eletródios

S_F - posição final da frente de cargas positivas

q_+ - carga positiva que permanece no interior da amostra

TABELA II

CIRCUITO FECHADO

$\rho(x_0,0)$	S_0	t_L	χ_L $(x10^{-2})$	S_L	ρ_L	J_L	t_M	J_M $(x10^{-2})$	S_F	q_+	τ
1,00x10	0,1	0,84	3,84	0,38	1,63	$7,36.10^{-2}$	0,27	8,80	0,808	0,616	2,61
5,00	0,2	1,19	6,61	0,51	1,32	$5,45.10^{-2}$	0,43	6,67	0,835	0,670	3,03
3,33	0,3	1,48	8,57	0,60	1,19	$4,08.10^{-2}$	0,56	5,01	0,857	0,714	3,50
2,50	0,4	1,74	9,79	0,68	1,12	$3,00.10^{-1}$	0,69	3,66	0,878	0,756	4,09
2,00	0,5	2,01	10,28	0,74	1,07	$2,11.10^{-2}$	0,83	2,55	0,897	0,794	4,86
1,67	0,6	2,30	10,03	0,80	1,04	$1,40.10^{-2}$	0,98	1,66	0,917	0,834	5,99
1,43	0,7	2,63	8,98	0,85	1,02	$8,22.10^{-3}$	1,16	0,95	0,936	0,872	7,80
1,25	0,8	3,06	7,06	0,90	1,01	$3,90.10^{-3}$	1,40	0,44	0,956	0,912	11,33
1,11	0,9	3,75	4,16	0,95	1,00	$1,07.10^{-3}$	1,79	0,12	0,977	0,954	21,65
$8(\frac{1}{2}-x_0)$	0,5	1,44	7,43	0,65	1,22*	$3,68.10^{-2}$	0,56	4,32	0,863	0,725	3,64
$2(1-x_0)$	1,0	1,85	7,40	0,86	1.05*	$1,02.10^{-2}$	0,96	1,18	0,929	0,858	4,78

* valores de $\rho(0,t_L)$

onde:

t_L - tempo em que ocorre o valor máximo de $\chi(t)$

χ_L - valor máximo de $\chi(t)$

S_L - posição da frente de carga em $t = t_L$

ρ_L - densidade de cargas positivas em $t = t_L$

J_L - corrente total em $t = t_L$

J_M - corrente total máxima

T_M - tempo em que ocorre J_M

S_F - posição final da frente de cargas positivas

q_+ - carga positiva que permanece no interior da amostra

τ - constante de tempo das curvas $J(t)xt$, pela eq. (3.25): $\tau=\frac{1}{1-q_+}$

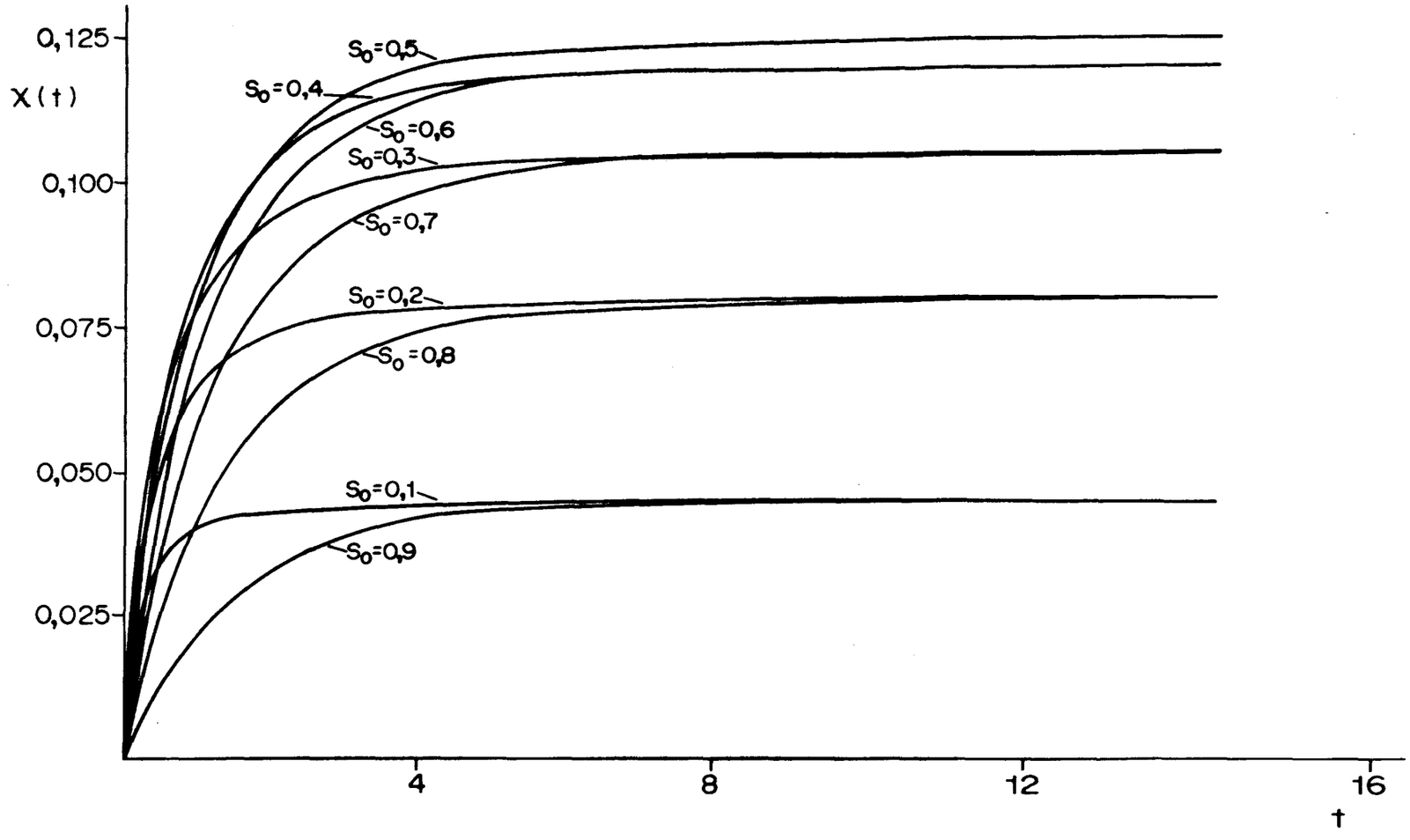


Fig. 4 - $\chi(t)$xt para circuito aberto

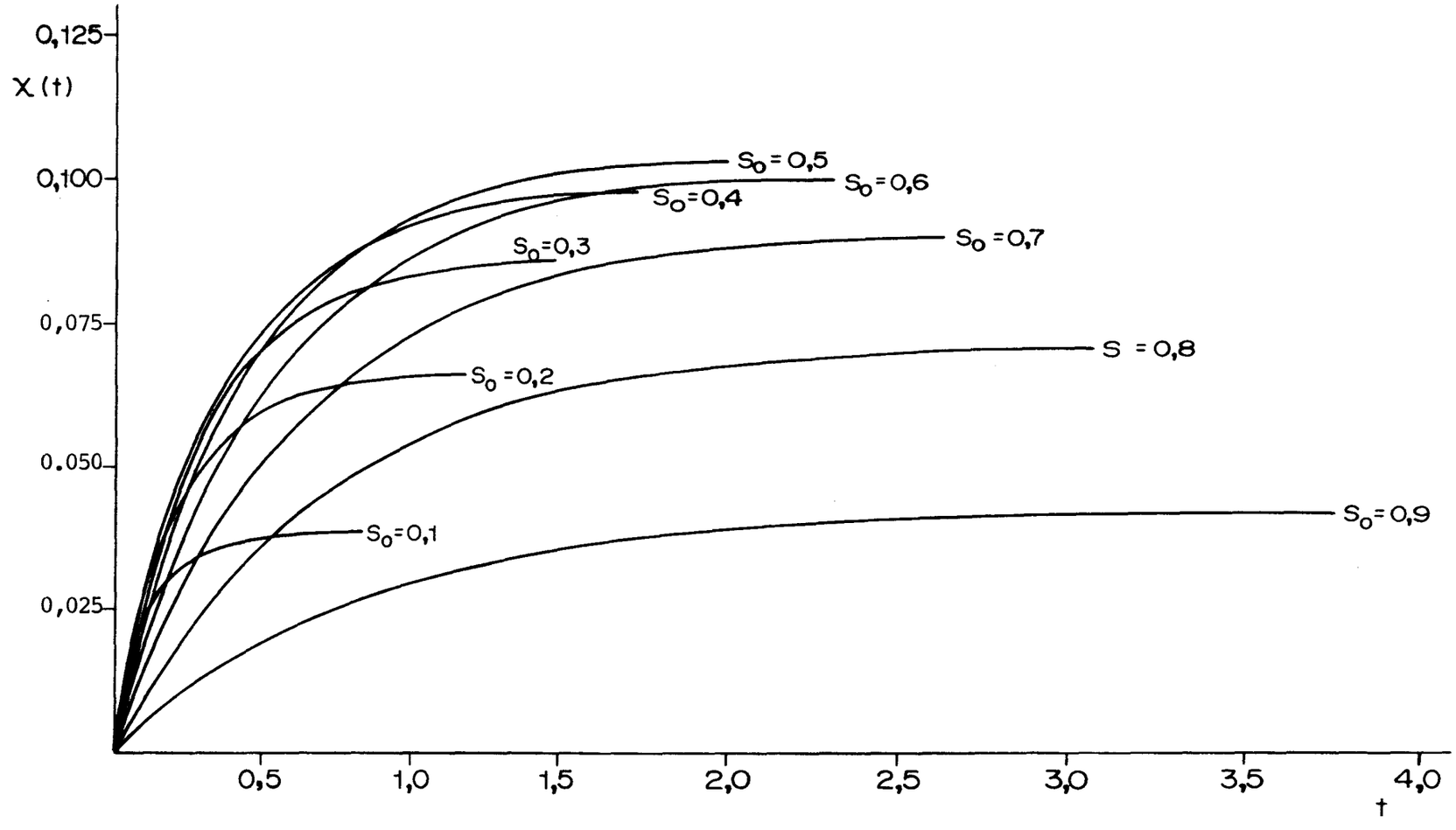


Fig. 5 - $\chi(t)$xt para circuito fechado

to aberto, o campo elétrico da distribuição inicial se anula em $x = 0,25$ e baseados no teorema de Lindmayer (ver apêndice IV), afirmamos que o campo elétrico será sempre zero em $x = 0,25$, poderíamos pensar que toda carga situada entre $x = 0$ e $x = 0,25$ deveria atingir o eletródio em $x = 0$ e que, portanto o valor máximo de $\chi(t)$, χ_L, deveria ser igual a 0,25. Que isto não deve ocorrer podemos ver de várias maneiras, entre elas a seguinte: se toda carga à esquerda de 0,25 se dissipasse no eletródio em $x = 0$, restaria nesta região a carga fixa negativa. Com isto o campo elétrico final teria a configuração mostrada na fig. 6, sendo positivo para $0<x<0,25$

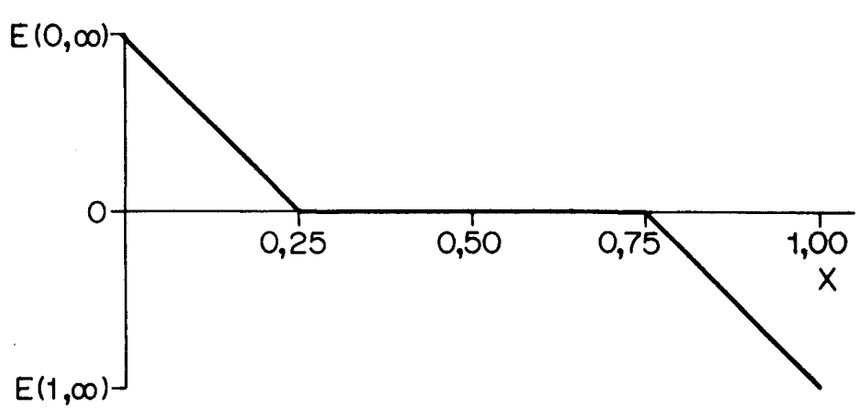


Fig. 6 - Campo elétrico final (para $S_0 = 0,5$).

e indo a zero na distribuição (positiva), pois na situação final não pode haver campo elétrico no plasma. Dessa maneira, não se poderia entender como sendo o campo positivo, pode este levar as cargas positivas para a esquerda. É interessante assinalar que a configuração de campo final em circuito fechado é, a grosso modo, parecida com a da fig. 6 (com o ponto limite de campo zero diferente de 0,25), com o plasma ficando simetricamente disposto em relação aos eletródios para garantir a condição de d.d.p. nula imposta (isto ocorrerá naturalmente para qualquer valor de S_0).

De que forma aparece este campo positivo em curto circuito ?

Como se verá adiante, em curto circuito aparece uma cor-

rente positiva, que no circuito externo vai do eletródio em $x = 1$ ao eletródio em $x = 0$, carregando este último positivamente. Esta carga positiva repele o excesso de carga do plasma, diminuindo o valor de χ_L (de 0,125 em circuito aberto a 0,103 em c.fechado) e fazendo com que o campo elétrico caia a zero junto ao eletródio em $x = 0$. Na continuação do processo o plasma é expelido de junto ao eletródio indo, no final do processo se situar simetricamente. Note que em curto o processo é composto de duas partes distintas enquanto que em aberto, de uma só.

Continuando a análise das figs. 4 e 5 vê-se que, curiosamente, os valores finais de $\chi(t)$, χ_L, são os mesmos para $S_0 = a$ e $S_0 = 1-a$, o que é justificado pela eq. (3.8). Em curto os correspondentes valores de χ_L são próximos e menores, aumentando a diferença à medida em que S_0 tende para 0,5. As figs. 7 e 8 resumem estas observações, também as colunas χ_L nas tabelas I e II.

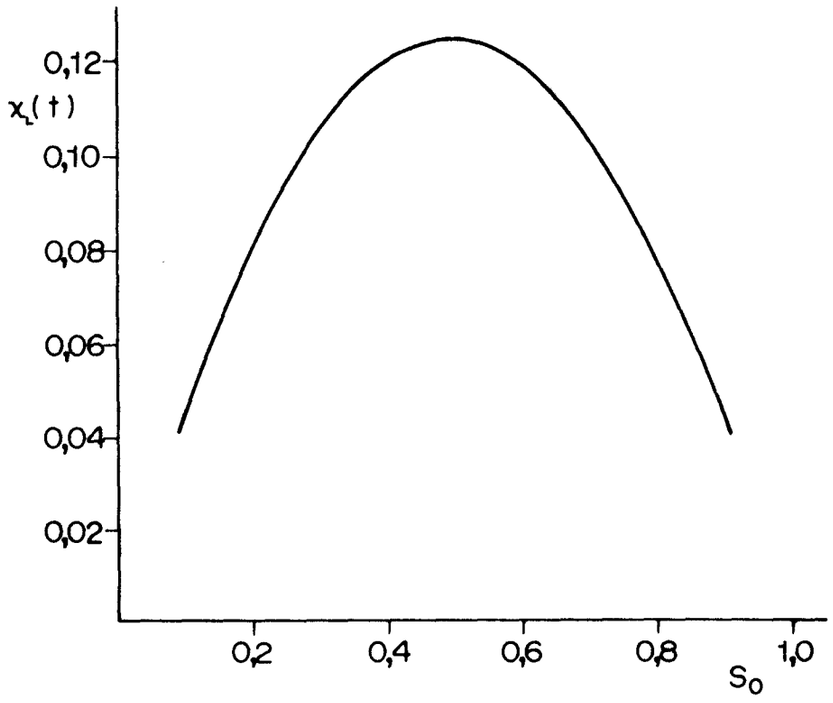


Fig. 7 - χ_L x S_0 para circuito aberto

A fig. 9 mostra o gráfico $\frac{dV(t)}{dt}$ x t para cada S_0 em circuito aberto e a fig. 10, J(t)xt para cada S_0 em circuito fechado.

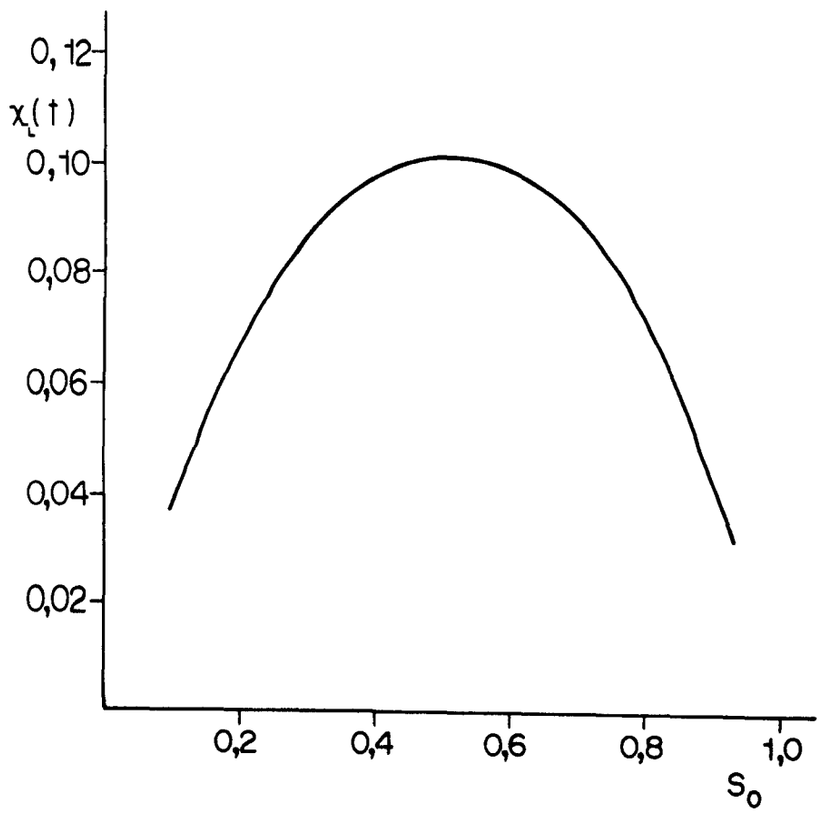


Fig. 8 - χ_L x S_0 para circuito fechado

A razão de compararmos estas duas grandezas está nas eqs. (3.3) e (3.19) vendo-se que a diferença entre elas está no termo V(t), presente apenas no caso de circuito aberto.

Mas sendo aqui V(t) inicialmente zero, os comportamentos para tempos pequenos de J(t) e $-\frac{dV(t)}{dt}$ devem coincidir.

No entanto, fora detalhes, o comportamento de ambas as grandezas se assemelha em todo o desenrolar dos respectivos processos apesar de, como comentado há pouco, o processo em curto apresentar a fase de descolamento do plasma.

Tanto J(t) como $-\frac{dV(t)}{dt}$ partem de zero, atingem um máximo e depois se anulam. Aliás, este seria o comportamento esperado para a corrente, que partindo de zero, pela peculiar distribuição das cargas móveis e fixas, torna-se significativa e depois terá de se anular ao final do processo. Do comportamento de $\frac{dV(t)}{dt}$ concluímos que haverá um potencial residual, com o plasma extendendo-se desde x = 0 até x = S_F.

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

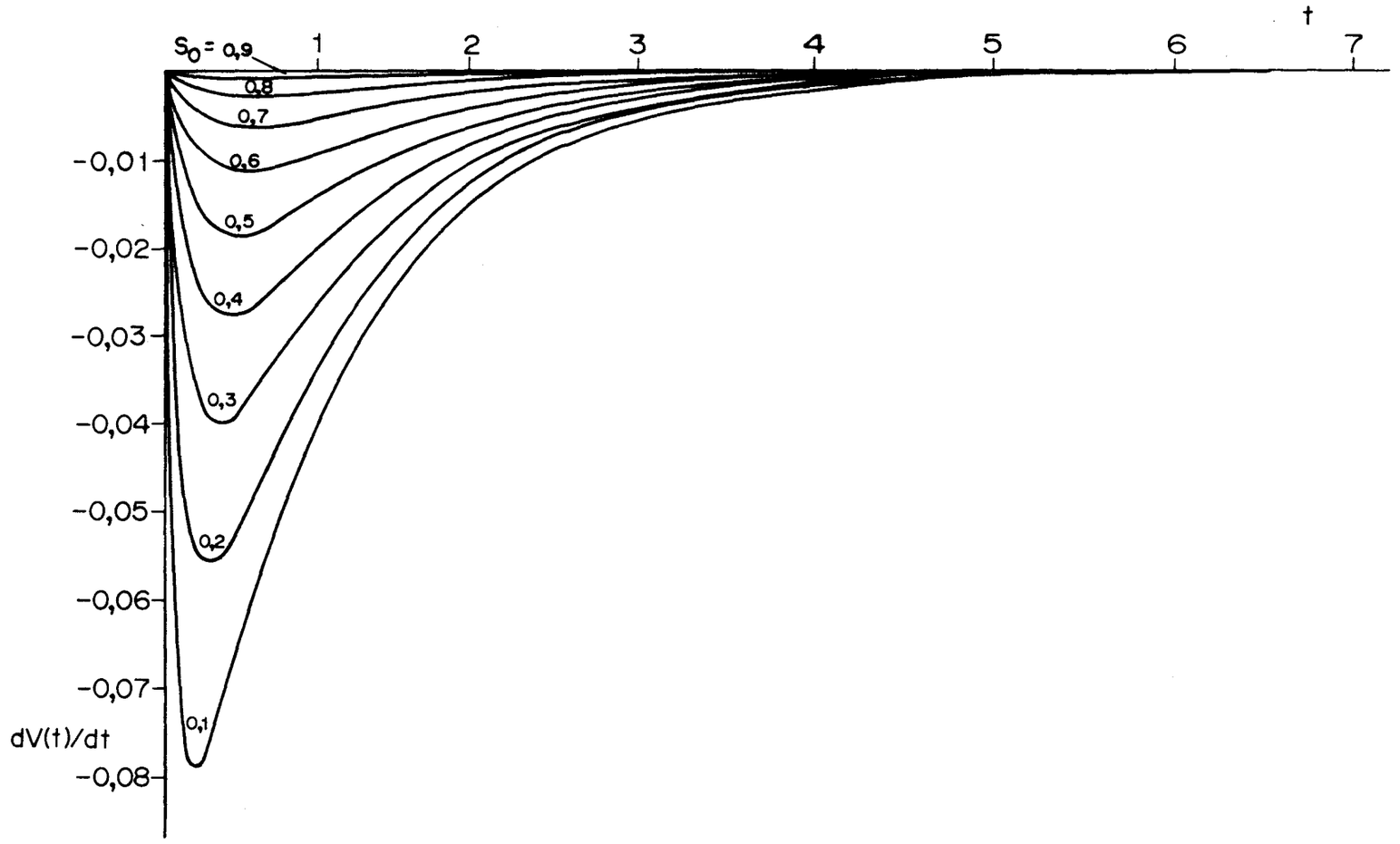


Fig. 9 - dV(t)/dt x t para circuito aberto

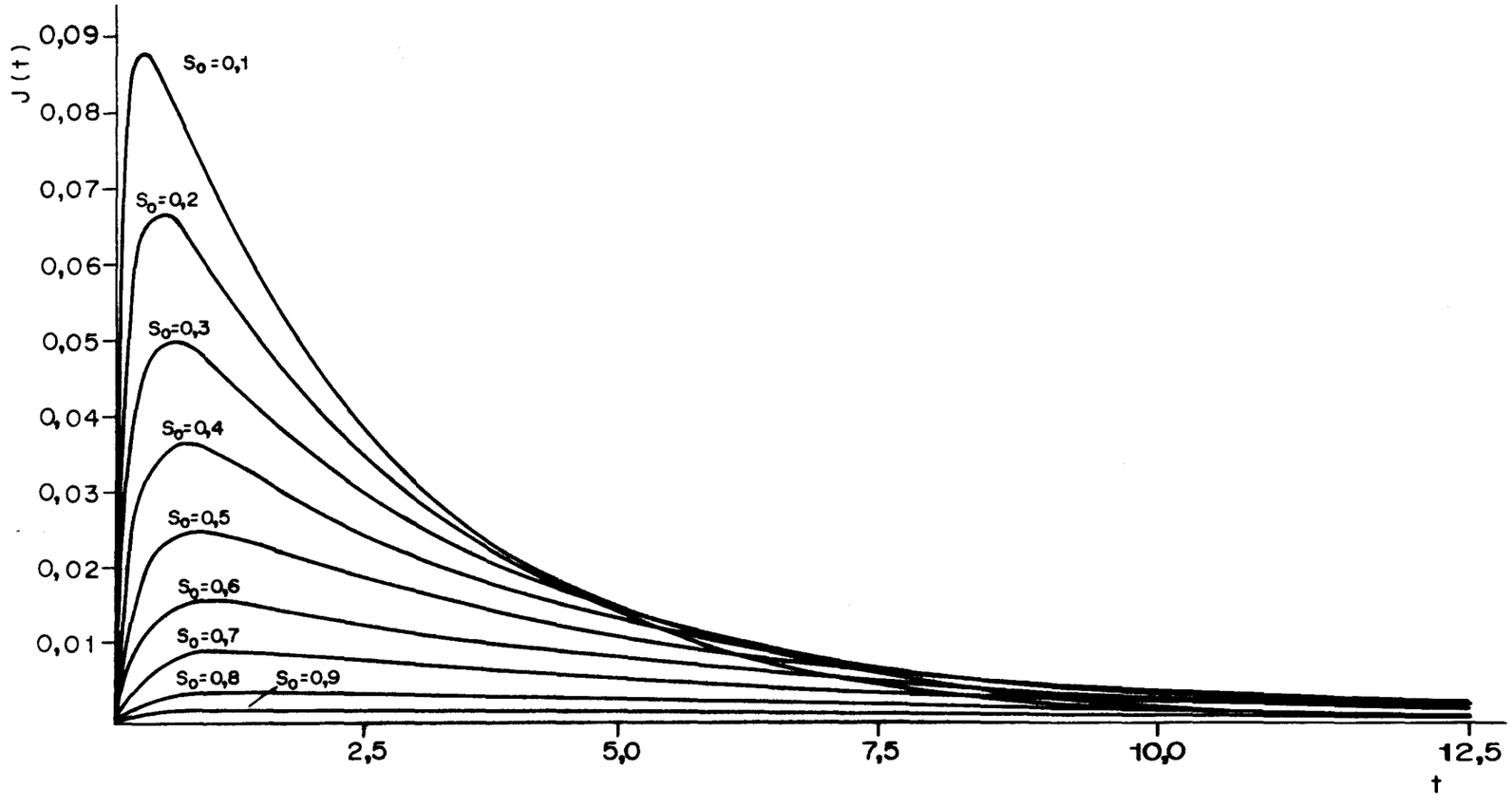


Fig. 10 - J(t)xt para circuito fechado

Sendo o excesso de carga e os campos maiores para menores S_0 é de se esperar correntes (e sua contrapartida em circuito aberto $-\frac{dV(t)}{dt}$) maiores e mais duradouras.

Isto, no entanto, não é perfeitamente válido pois que, enquanto as curvas de $-\frac{dV(t)}{dt}$ não se cruzam, as de corrente o fazem, sendo bem visível o cruzamento entre a de $S_0 = 0,1$ e $S_0 = 0,2$ e entre estas e as demais.

Para o mesmo valor de S_0 as correntes são maiores do que os $-\frac{dV(t)}{dt}$ devido à já mencionada transferência de carga positiva para o eletródio em $x = 0$ devido à corrente externa.

Quanto ao sentido positivo da corrente, ele pode ser entendido estudando-se o campo em $x = 1$ e sua variação temporal, que é igual à corrente externa. Como o campo é negativo, e se deve esperar uma tendência à diminuição do mesmo em valor absoluto (por se tratar de um processo dissipativo) a corrente deve então ser positiva.

Porém esta explicação não serviria para o caso $-\frac{dV(t)}{dt}$ quando a corrente é zero. Aqui deve-se argumentar da seguinte maneira: um movimento de carga para a direita significa uma diminuição do potencial do eletródio em $x = 0$ e um movimento para a esquerda, um aumento. No caso das distribuições aqui discutidas, o campo elétrico (inicial) em $x = 0$ é negativo, e em $x = S_0$, positivo, mas com o mesmo módulo. Desta forma, a velocidade inicial das cargas em S_0, para a direita e em $x = 0$ para a esquerda é a mesma, mas como o movimento em S_0 é livre enquanto que em $x = 0$ é limitado pelo eletródio em $x = 0$, o movimento é mais amplo para a direita do que para a esquerda, resultando disso um decréscimo do potencial do eletródio em $x = 0$. Este argumento também se aplica ao curto-circuito, pois a corrente externa é a média espacial da corrente de condução. É interessante notar que em circuito fechado, eq. (3.25) fornece uma "constante de tempo" $\tau = \frac{1}{(1-q_+)}$, ver coluna do

τ na tabela II, enquanto que em circuito aberto, por não apresentar a segunda fase da solução, não podemos definir uma constante análoga. A fig.11 mostra o gráfico de dV(t)/dt(mín.)xS_0 em circui-

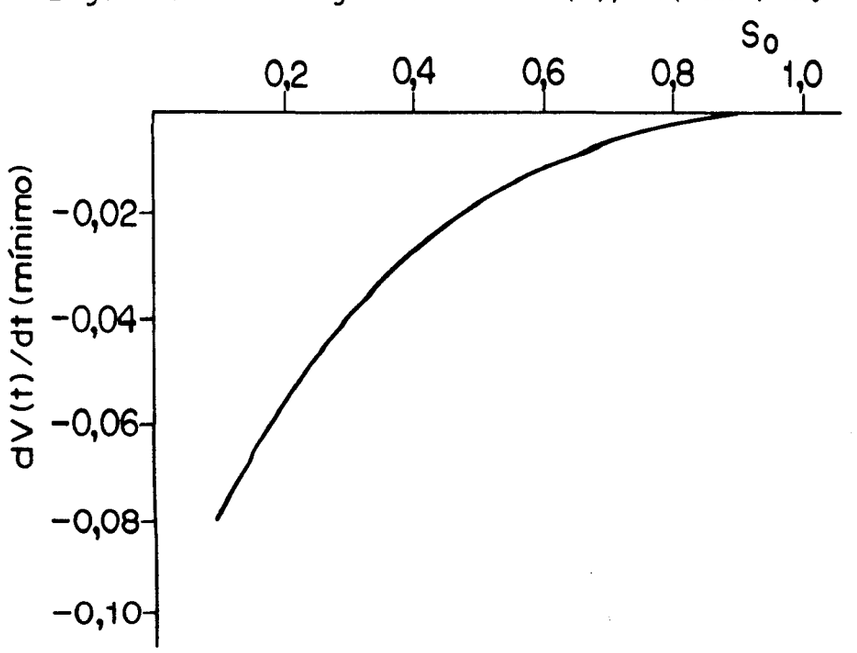


Fig. 11 - dV(t)/dt(mín.)xS_0 para circuito aberto

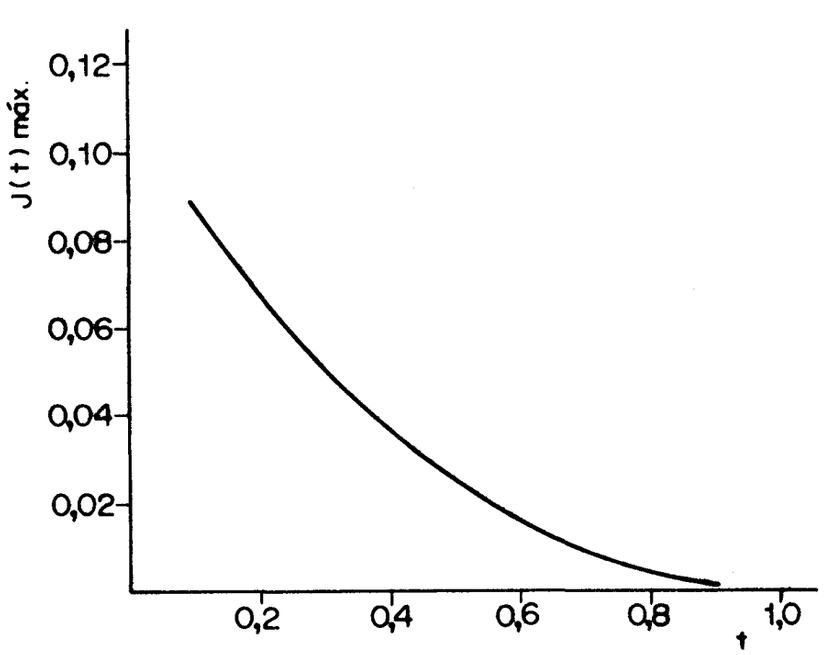


Fig. 12 - J(t)(máx.)xS_0 para circuito fechado

to aberto e a fig.12,J(t)(máx.)xS_0 para circuito fechado. Notamos que para pequenos S_0 os J(t)(máx.) são ligeiramente maiores do que os -dV(t)/dt(mín.) e esta diferença diminui quando S_0 aumenta.

A fig. 13 mostra o gráfico de S(t)xt para cada S_0 em circuito aberto e a fig. 14 em circuito fechado.

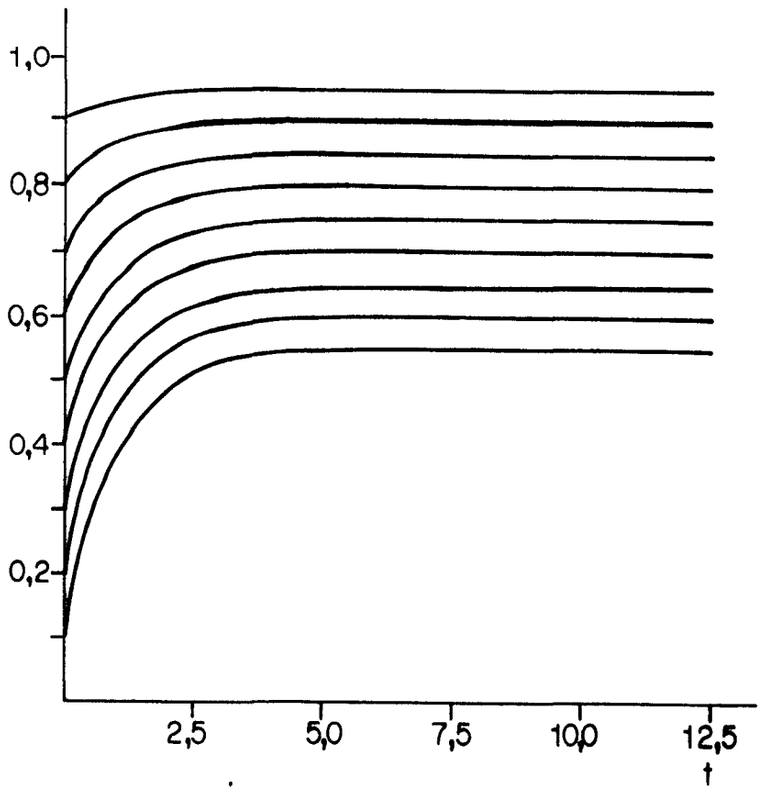


Fig. 13 - S(t)xt para circuito aberto

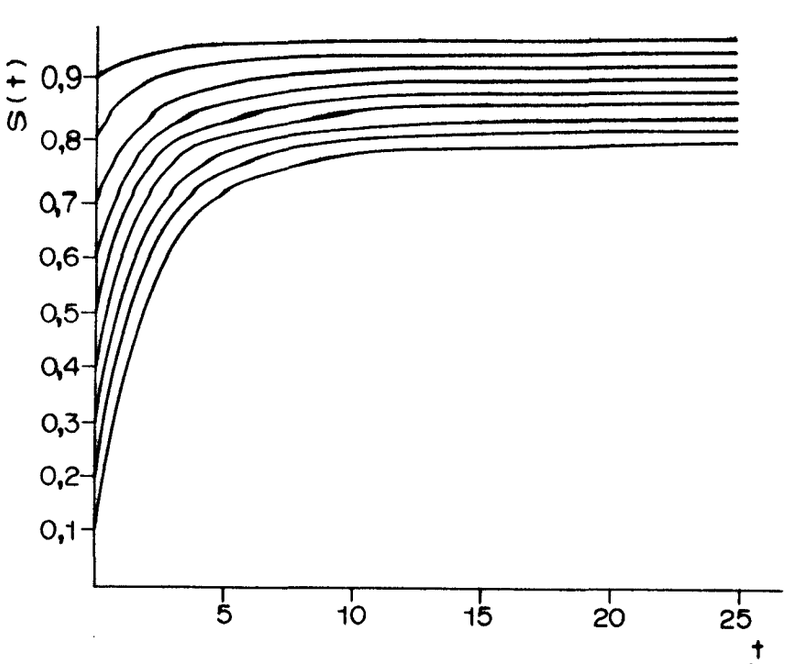
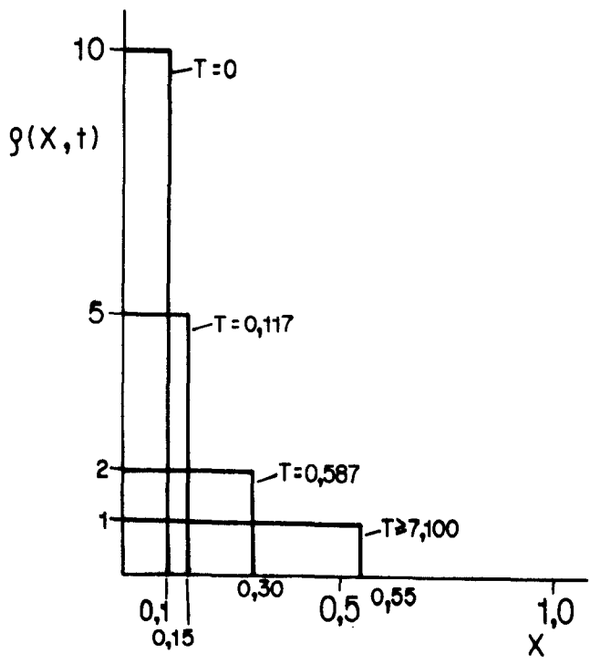
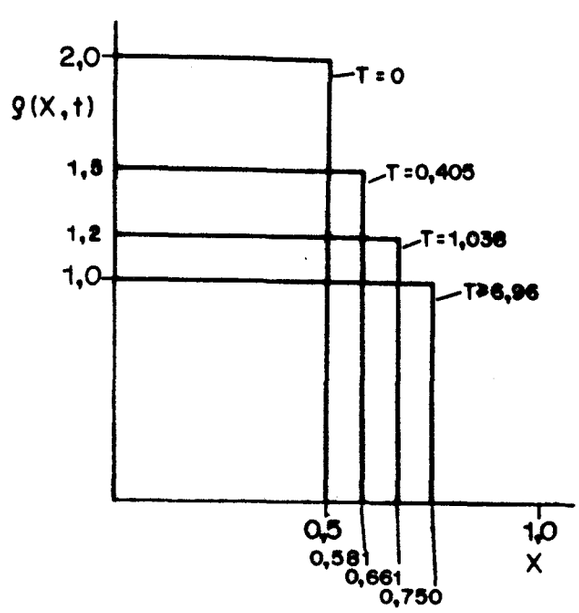


Fig. 14 - S(t)xt para circuito fechado

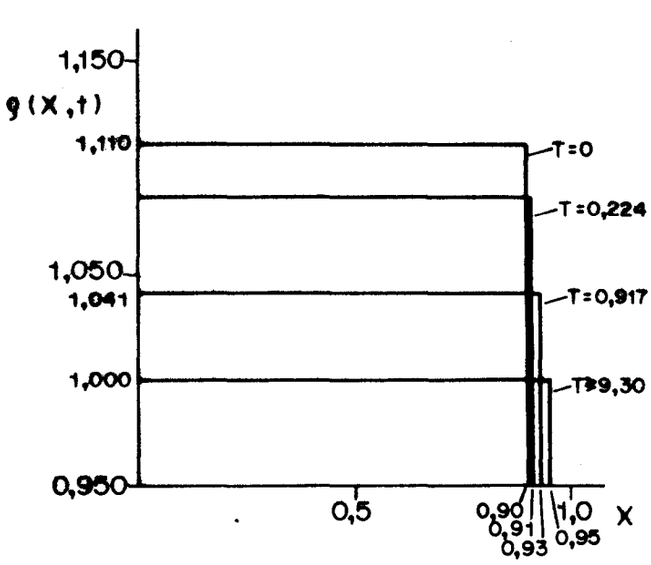
Verificamos que as posições finais da frente de carga S_F (tabs. I e II) para cada S_0 são bem menores em circuito aberto do que os correspondentes em curto circuito. Uma explicação para isto é que em circuito aberto só existe uma fase de deslocamento das



(a) $S_0 = 0,1$



(b) $S_0 = 0,5$



(c) $S_0 = 0,9$

Fig. 15 - $\rho(x,t)xx$ para circuito aberto

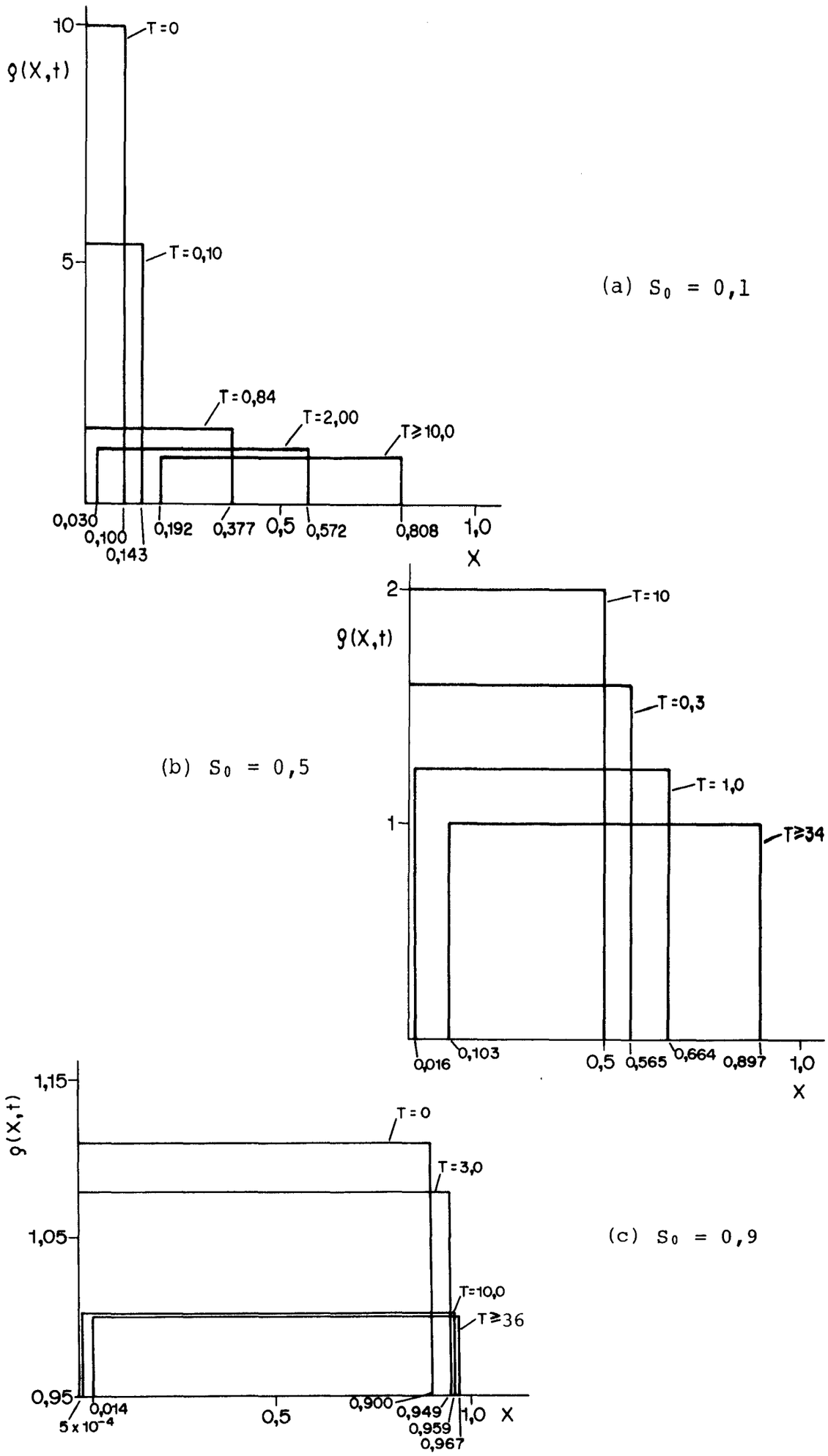


Fig. 16 - ρ(x,t)xx para circuito fechado

cargas para a direita enquanto que no circuito fechado existem duas, a segunda fase, que é o descolamento da traseira de carga do eletródio em $x = 0$ e o deslocamento da distribuição para o centro da amostra até atingir uma posição de simetria entre os eletródios, é a responsável por esta diferença, pois no início as velocidades das frentes de carga são idênticas. Em circuito aberto esta posição é atingida sem que a traseira se descole do eletródio em $x = 0$. Esta evolução até atingir o equilíbrio final, com as densidades de cargas positivas iguais a um em ambos os circuitos estão representadas pelas figs. 15 e 16 para alguns valores de t e sendo (a) para $S_0 = 0,1$; (b) para $S_0 = 0,5$; (c) $S_0 = 0,9$.

Note-se o descolamento que ocorre em circuito fechado, fig. 16, (a), (b) e (c).

O total de carga positiva que permanece dentro do material, q_+, nos dois circuitos para cada valor de S_0 está mostrado nas tabelas I e II respectivamente para circuito aberto e fechado, foram calculados usando a eq. (3.21). Notar que os valores de q_+ crescem com S_0 e que em circuito fechado, são ligeiramente maiores do que em curto, para explicar isto, os argumentos usados são os já citados acima e em conseqüência, os valores de χ_L para os dois circuitos (os do circuito aberto são maiores).

Embora não se tenha construído os gráficos, apresentamos os valores mínimos de V(t) - diferença de potencial entre os eletródios - na tabela I, bem como os valores de algumas grandezas de interesse no instante do descolamento das cargas positivas do eletródio em $x = 0$, t_L, em circuito fechado - tabela II, temos a posição da frente de carga S_L, a densidade de cargas positivas ρ_L e a corrente total J_L.

No capítulo IV faremos a aplicação do método à distribuição linear $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$, em circuito aberto e fechado.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO LINEAR: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$

4.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de carga

As cargas totais positivas e negativas são iguais a 1(um), logo (ver fig. 17) temos:

- densidade de cargas negativas $\rho_0 = 1$ em $0<x<1$
- densidade de cargas positivas $\rho(x_0,0)=8(\frac{1}{2}-x_0)$ em $0<x<\frac{1}{2}$

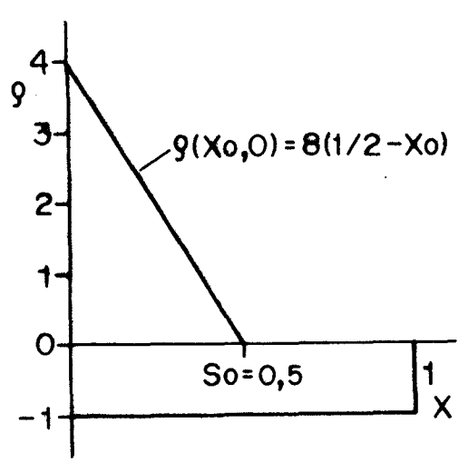


Fig. 17 - Distribuição inicial de cargas

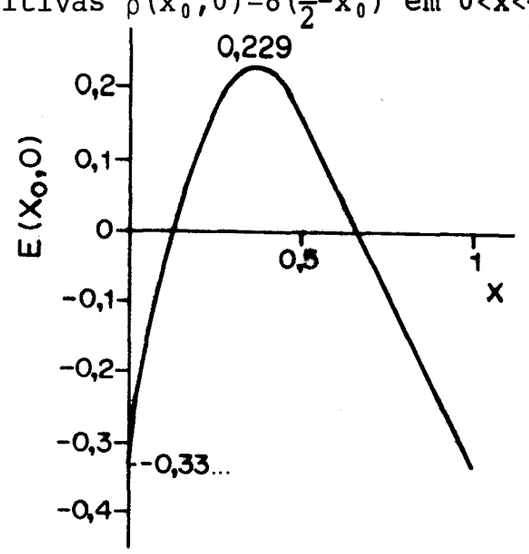


Fig. 18 - Campo elétrico inicial

E a configuração de campo elétrico inicial é do tipo da fig. 18 (segundo o apêndice I-b), logo:

$$E(\chi) = -4\chi^2 + 3\chi - \frac{1}{3} \tag{4.1}$$

$$E(S_0) = \frac{1}{6} \tag{4.2}$$

4.2 - Circuito aberto

Comparando as eqs. (3.5) e (4.1):

$$\chi(t) = \frac{\frac{4-3e^{-t}}{4(1-e^{-t})} - \sqrt{\left(\frac{4-3e^{-t}}{4(1-e^{-t})}\right)^2 - \frac{1}{3}}}{2} \tag{4.3}$$

para valores de $t \approx 0$ calculamos $\chi(t)$ por:

$$\chi(t) \simeq \frac{1-e^{-t}}{3} \tag{4.4}$$

Pelas eqs. (3.4) e (3.6) obtemos o campo elétrico em cada eletródio:

$$E(0,t) = -(4\chi^2 - 3\chi + \frac{1}{3})e^{-t} \tag{4.5}$$

$$E(1,t) = E(0,t)-4(\chi-\chi^2) \tag{4.6}$$

usando as eqs. (1.11) e (4.2) obtemos a posição da frente de cargas positivas:

$$S(t) = \frac{2}{3} - \frac{e^{-t}}{6} \tag{4.7}$$

Substituindo $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$ e as eqs. (4.1) e (4.3) na eq. (2.1) - condição de contorno - e resolvendo, obtemos a d.d.p. (ver apêndice II-b) entre os eletródios:

$$V(t) = e^{-t}\{\frac{1}{24}+(1-e^{-t})\left[(4\chi^2-3\chi+\frac{1}{3})^2+\frac{3\chi^2}{2}-\frac{8\chi^3}{3}+\frac{1}{72}-\frac{\chi^2}{2}(1-e^{-t})\right]\} -$$

$$- (\frac{2+e^{-t}}{72})(2-e^{-t}) \tag{4.8}$$

substituindo as eqs. (4.5), (4.6) e (4.8) na eq. (3.2):

$$\frac{dV(t)}{dt} = -V(t)-4(\chi-\chi^2)\left[(4\chi^2-3\chi+\frac{1}{3})e^{-t}+2(\chi-\chi^2)\right] \quad . \tag{4.9}$$

Pela eq. (1.9) temos a densidade:

$$\rho(x,t) = \frac{8(\frac{1}{2}-x_0)}{8(\frac{1}{2}-x_0)(1-e^{-t})+e^{-t}} \tag{4.10}$$

e pela eq. (1.11) temos a posição da carga que no instante $t = 0$ estava em x_0.

$$x(t) = x_0 - (4x_0^2 - 3x_0 + \frac{1}{3})(1-e^{-t}) \tag{4.11}$$

4.3 - Circuito fechado

Substituindo as expressões de $E(\chi)$, $E(S_0)$ dadas pelas eqs. (4.1) e (4.2) e,

$$V(\chi) = -\frac{4\chi^3}{3} + \frac{3\chi^2}{2} - \frac{\chi}{3} \tag{4.12}$$

$$V(S_0) = \frac{1}{24} \tag{4.13}$$

dadas pelo apêndice III-b, na eq. (2.24):

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{(4-8\chi)(1-e^{-t})+e^{-t}}\{e^{-t}[8\chi^4-\frac{44\chi^3}{3}+10\chi^2-3\chi+\frac{1}{3}]-8\chi^4-16\chi^3+8\chi^2\} \tag{4.14}$$

Resolvemos, por integração numérica a eq. (4.14) obtendo $\chi(t)$, substituindo na eq. (2.10) calculamos a posição da frente de carga $S(t)$, usando as eqs. (2.17) e (2.23) obtemos a corrente $J(t)$ pela eq. (2.3) e, finalmente, a densidade pela eq. (4.10), que é válida para todo t. As expressões a serem usadas são:

$$S(t) = 1-4\chi(1-\chi)+e^{-t}(-4\chi^2 + 3\chi - \frac{1}{2}) \tag{4.15}$$

para obter a posição da frente.

$$E(0,t) = 8\chi^4-16\chi^3+8\chi^2-e^{-t}(8\chi^4 - \frac{44\chi^3}{3} + 10\chi^2 - 3\chi + \frac{1}{3}) \tag{4.16}$$

e

$$E(1,t) = 8\chi^4-16\chi^3+12\chi^2-4\chi-e^{-t}(8\chi^4 - \frac{44\chi^3}{3} + 10\chi^2 - 3\chi + \frac{1}{3}) \tag{4.17}$$

na eq. (2.3) para obter a corrente $J(t)$.

E, finalmente, a posição da carga que no instante $t = 0$ estava em x_0:

$$x(t) = x_0+S(t)-4x_0^2+3x_0+e^{-t}(4x_0^2 - 3x_0 - \frac{1}{2}) \qquad (4.18)$$

Aqui, como no caso da distribuição tipo caixa para circuito fechado, também ocorre uma segunda parte da solução, usando a expressão da carga positiva que resta dentro do material, q_+, obtida através da primeira parte da eq. (3.21):

$$q_+ = 1-4\chi_L(1-\chi_L) \qquad (4.19)$$

e a eq. (3.27) - ambas são válidas para os três tipos de distribuição, em circuito fechado - para calcular $J(t)$ e $S(t)$.

4.4 - Resultados e comparações

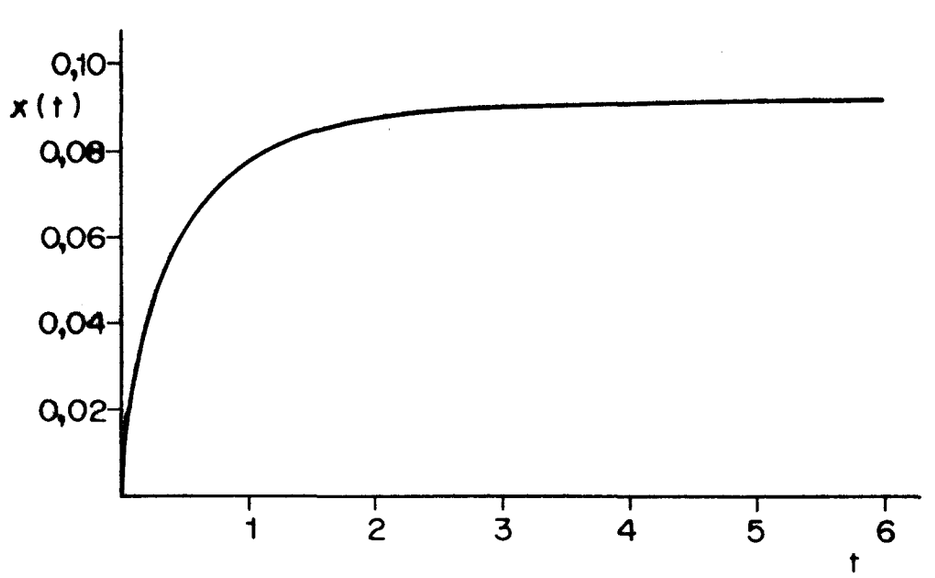


Fig. 19 - $\chi(t)xt$ para circuito aberto

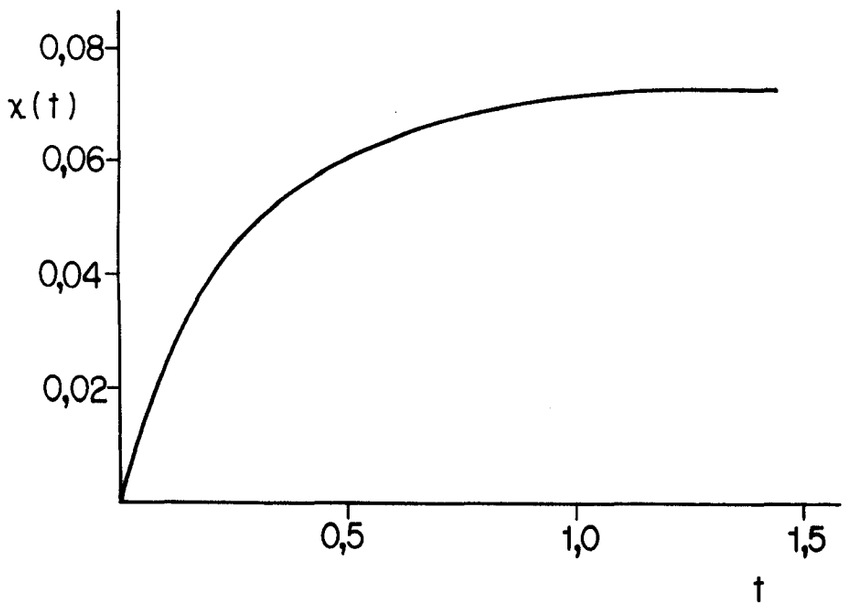


Fig. 20 - $\chi(t)$xt para circuito fechado

A fig. 19 mostra o gráfico $\chi(t)$xt para circuito aberto e a fig. 20 para circuito fechado. Como no caso da distribuição tipo caixa o valor de χ_L (último plano de cargas a atingir o eletródio em x = 0) para circuito aberto é significativamente maior do que para circuito fechado. Isto vai significar que a carga positiva que resta ao final do processo, q_+, em circuito aberto é menor do que em circuito fechado. Por outro lado, comparados com os resultados da distribuição caixa com S_0 = 0,5, figs. 4 e 5, os de agora são inferiores. Mas como a distribuição linear acumula mais carga perto de x = 0, apesar de χ_L ser menor, acabará mais carga sendo eliminada (coluna q_+ na tabela II) para a distribuição linear.

Note-se que a distribuição final será do mesmo tipo, em cada caso (circuito aberto e fechado), que a encontrada com as distribuições caixa. Inclusive o descolamento, em circuito fechado, ocorre também aqui.

A fig. 21 mostra o gráfico dV(t)/dtxt para circuito aberto e a fig. 22, J(t)xt para circuito fechado.

Todas as observações feitas para um valor de S_0 na distribuição tipo caixa, para os dois circuitos, são válidas também

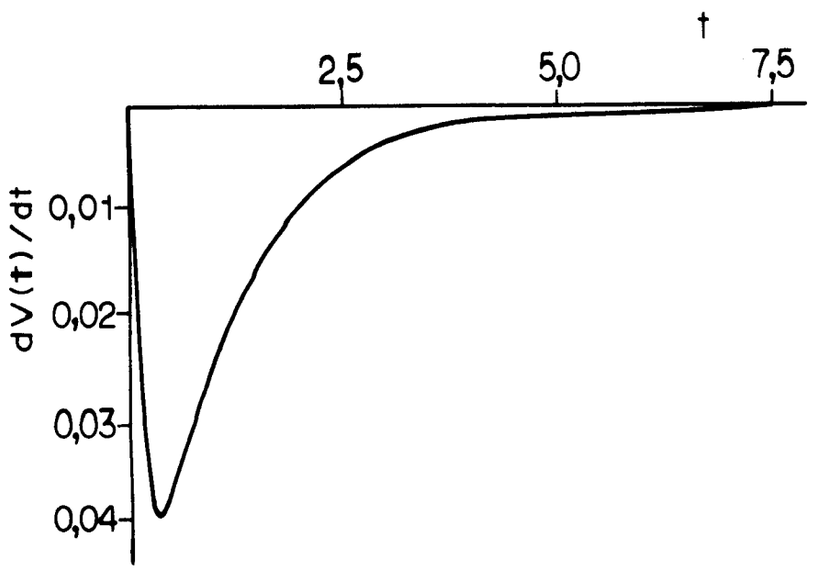


Fig. 21 - dV(t)/dt x t para circuito aberto

agora.

O valor máximo da corrente J(t) é maior do que o de -dV(t)/dt e mais duradoura do que este último.

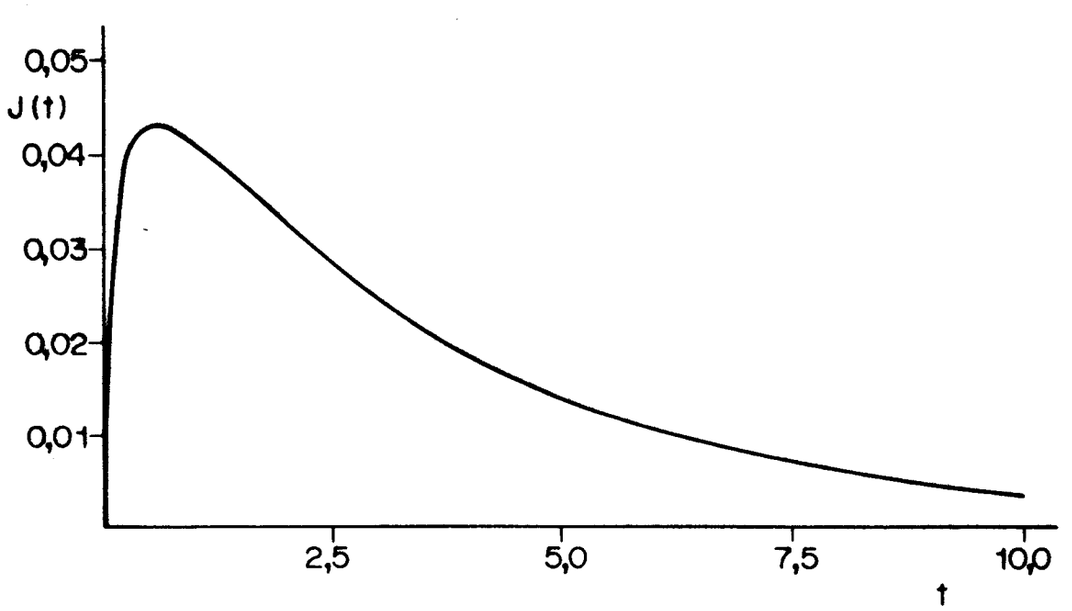


Fig. 22 - J(t)xt para circuito fechado

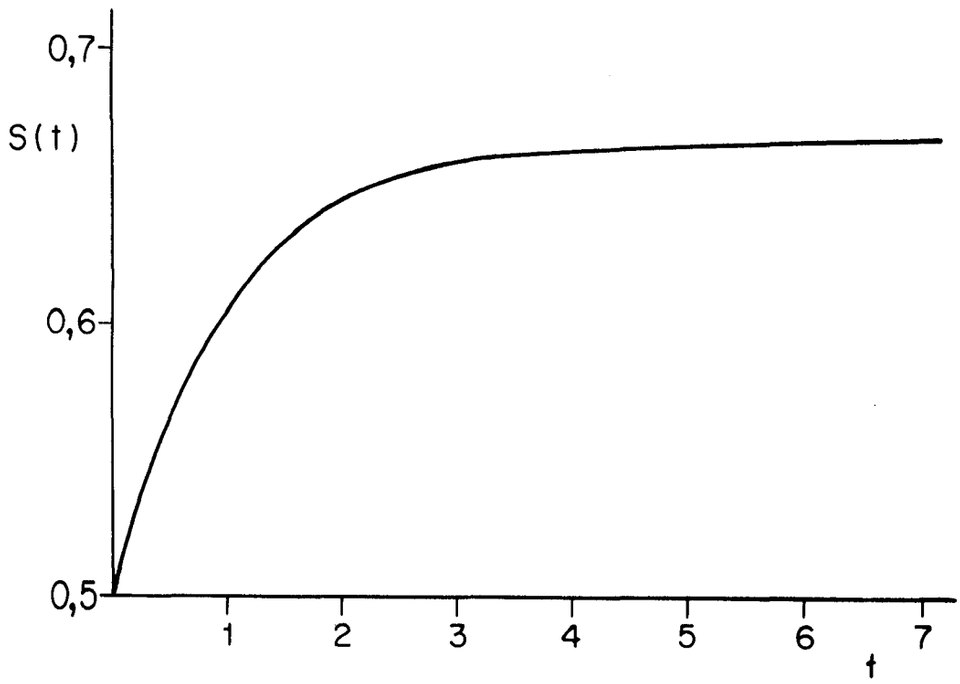


Fig. 23 - S(t)xt para circuito aberto

A fig. 23 mostra o gráfico S(t)xt para circuito aberto e a fig. 24, para circuito fechado.

A posição final da frente de carga S_F, em circuito aberto é menor do que em circuito fechado, como no caso da distribuição tipo caixa.

A fig. 25 mostra, para alguns valores do tempo t, os gráficos de ρ(x,t)xx para o circuito aberto e a fig. 26 para o fechado

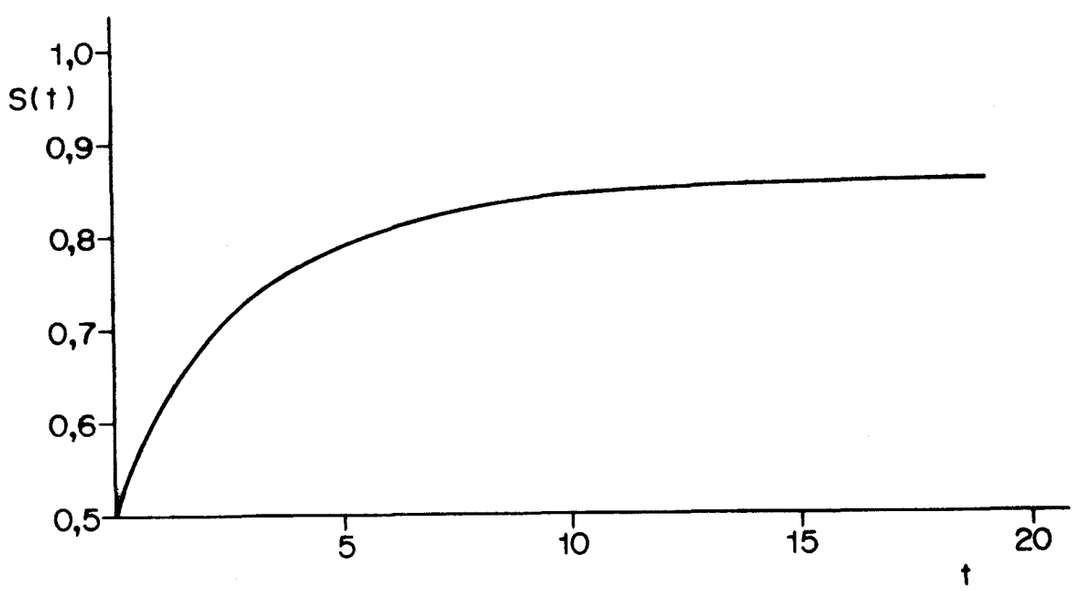


Fig. 24 - S(t)xt para circuito fechado

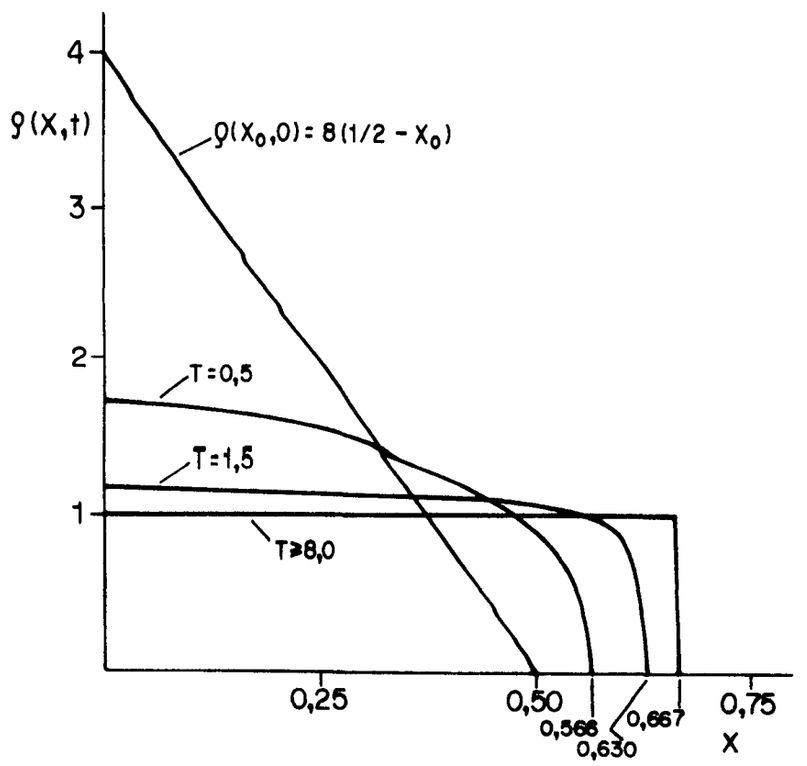


Fig. 25 - ρ(x,t)xx para circuito aberto

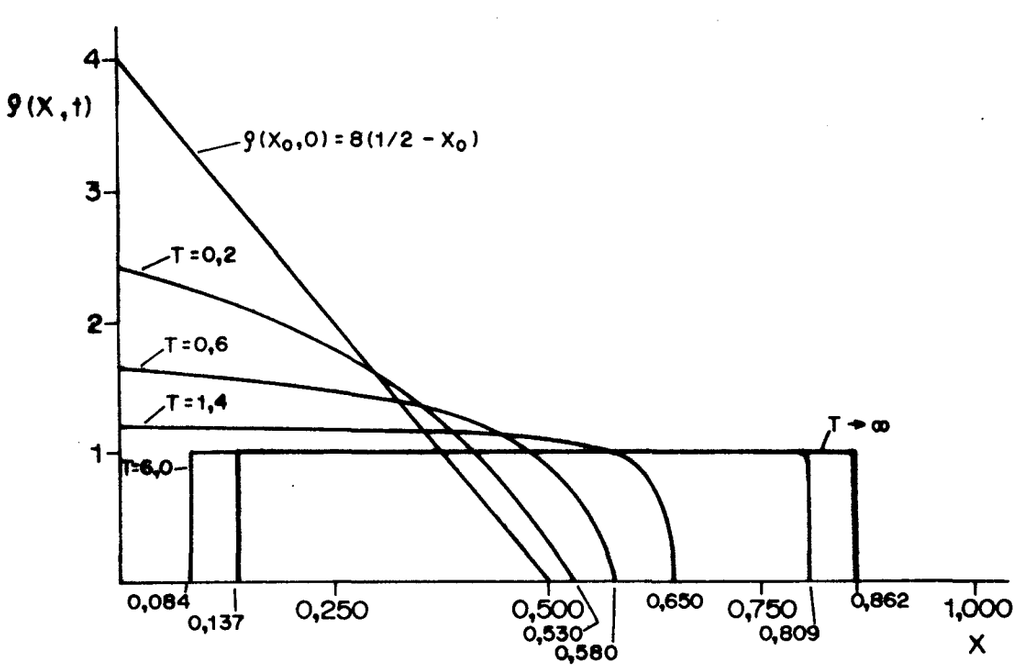


Fig. 26 - ρ(x,t)xx para circuito fechado

Notamos que as distribuições, em ambos os circuitos tendem a se uniformizar espacialmente e que para tempos correspondentes, não deferem significativamente.

Note-se que na coluna ρ_L os valores se referem, neste ca

so e no do capítulo V, a $\rho(0,t_L)$, pois para as distribuições lineares a função distribuição de carga positiva é parametrizada em x_0 através de $x(t)$ que também o é.

No capítulo V aplicaremos o método à distribuição linear $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$ em circuito aberto e fechado.

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DO MÉTODO À DISTRIBUIÇÃO LINEAR: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$

5.1 - Condições iniciais de campo elétrico e densidades de cargas

As cargas totais positivas e negativas são iguais a 1(um) logo (ver fig. 27) temos:

- densidade de cargas negativas $\rho_0 = 1$ em $0<x<1$
- densidade de cargas positivas $\rho(x_0,0)=2(1-x_0)$ em $0<x<1$

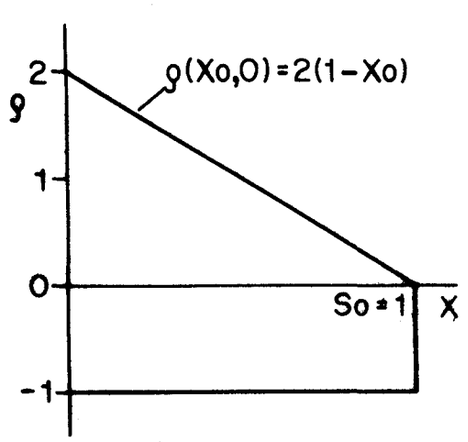


Fig. 27 - Distribuição inicial de cargas

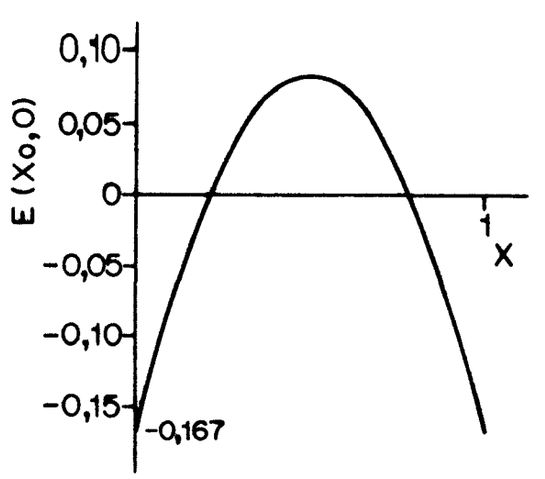


Fig. 28 - Campo elétrico inicial

E a configuração do campo elétrico inicial é do tipo da fig. 28 (seguindo o apêndice I-c), logo

$$E(\chi) = -\chi^2 + \chi - \frac{1}{6} \tag{5.1}$$

$$E(S_0) = -\frac{1}{6} \tag{5.2}$$

5.2 - Circuito aberto

Comparando as eqs. (3.5) e (5.1):

$$\chi(t) = \frac{\frac{2-e^{-t}}{1-e^{-t}} - \sqrt{\left(\frac{2-e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)^2 - \frac{2}{3}}}{2} \tag{5.3}$$

mas para valores de $t \approx 0$, calculamos $\chi(t)$ por:

$$\chi(t) \simeq \frac{1-e^{-t}}{6} \tag{5.4}$$

Pelas eqs. (3.4) e (3.6) obtemos o campo elétrico em cada eletródio

$$E(0,t) = (-\chi^2 + \chi - \frac{1}{6})e^{-t} \tag{5.5}$$

$$E(1,t) = E(0,t) - \chi(2-\chi) \tag{5.6}$$

Usando as eqs. (1.11) e (5.2) obtemos a posição da frente de cargas positivas:

$$S(t) = \frac{5+e^{-t}}{6} \tag{5.7}$$

Substituindo $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$ e as eqs. (5.1) e (5.3) na eq. (2.1) - condição de contorno - e resolvendo, obtemos a d.d.p. (ver apêndice II-c) entre os eletródios como:

$$V(t) = e^{-t}\{\frac{1-e^{-t}}{2}(\chi^2-\chi+\frac{1}{6})^2 - \frac{2\chi^3}{3} + \frac{1-e^{-t}}{72}\} - \frac{1-e^{-t}}{72}(1+e^{-t}) \ . \tag{5.8}$$

Substituindo agora as eqs. (5.5) e (5.6) na eq. (3.2) obtemos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -V(t) - \frac{\chi}{2}(2-\chi)[\chi(2-\chi) + 2(\chi^2-\chi+\frac{1}{6})e^{-t}] \ . \tag{5.9}$$

Pela eq. (1.9) temos a densidade:

$$\rho(x,t) = \frac{2(1-x_0)}{2(1-x_0)(1-e^{-t})+e^{-t}} \ , \tag{5.10}$$

e pela eq. (1.11) a posição da carga que no instante $t = 0$ estava em x_0:

$$x(t) = x_0 - (x_0^2 - x_0 + \frac{1}{6})(1-e^{-t}) \quad . \tag{5.11}$$

5.3 - Circuito fechado

Substituindo as expressões de $E(\chi)$ e $E(S_0)$ dadas pelas eqs. (5.1) e (5.2) e,

$$V(\chi) = -\frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi}{6} \tag{5.12}$$

$$V(S_0) = 0 \tag{5.13}$$

dadas pelo apêndice III-c, na eq. (2.24) obtemos:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{2(1-\chi)(1-e^{-t})+e^{-t}}\{e^{-t}[\frac{\chi^4}{2}-\frac{5\chi^3}{3}+2\chi^2-\chi+\frac{1}{6}]-\frac{\chi^4}{2}+2\chi^3-2\chi^2\} \quad . \tag{5.14}$$

Integramos numericamente, obtendo $\chi(t)$, substituímos na eq. (2.10) e obtemos $S(t)$; usando as eqs. (2.17) e (2.23) obtemos $J(t)$ pela eq. (2.3) e finalmente a densidade, pela eq. (5.10), que vale também para $t > t_L$. As expressões a serem usadas são:

$$S(t) = 1 - 2\chi + \chi^2 + e^{-t}(\chi-\chi^2) \tag{5.15}$$

$$E(0,t) = \frac{\chi^4}{2} - 2\chi^3 + 3\chi^2 - 2\chi - e^{-t}(\frac{\chi^4}{2}-\frac{5\chi^3}{3}+2\chi^2-\chi+\frac{1}{6}) \tag{5.16}$$

$$E(1,t) = \frac{\chi^4}{2} - 2\chi^3 + 2\chi^2 - e^{-t}(\frac{\chi^4}{2}-\frac{5\chi^3}{3}+2\chi^2-\chi+\frac{1}{6}) \tag{5.17}$$

e a posição da carga que no instante $t = 0$ estava em x_0:

$$x(t) = x_0 + S(t) - 1 + x_0 - x_0^2 - e^{-t}(x_0-x_0^2) \tag{5.18}$$

A segunda fase da solução será obtida usando a eq. (3.25) onde

$$q_+ = (\chi_L - 1)^2 \tag{5.19}$$

e a eq. (3.27) para calcular J(t) e S(t).

5.4 - Resultados e comparações

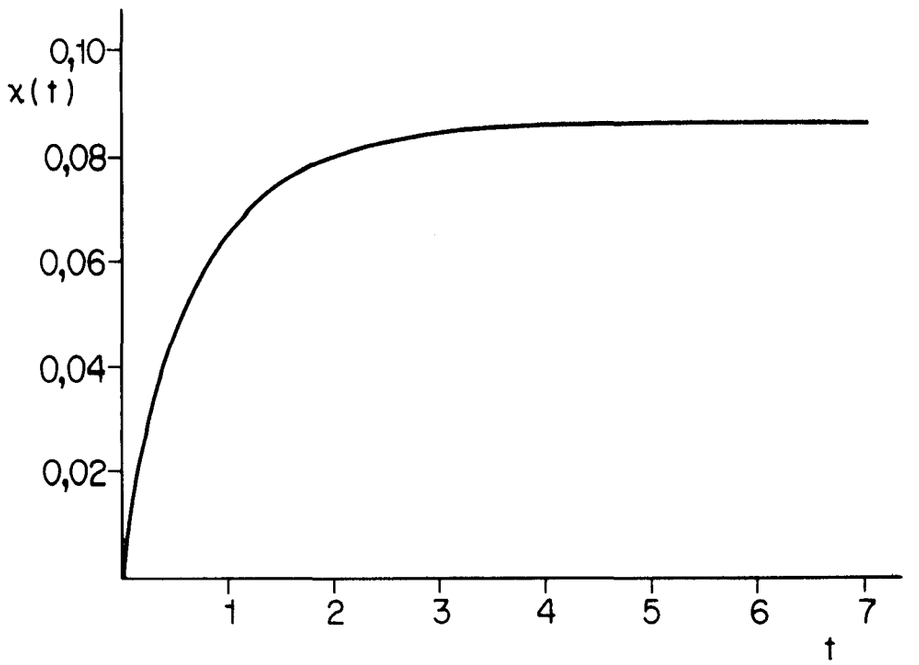


Fig. 29 - $\chi(t)$xt para circuito aberto

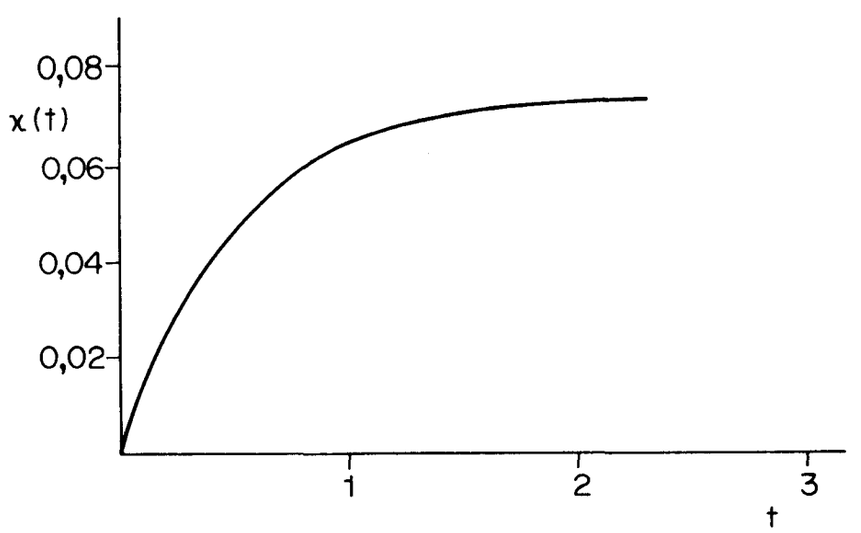


Fig. 30 - $\chi(t)$xt para circuito fechado

A fig. 29 mostra o gráfico $\chi(t)$xt para o circuito aberto e a fig. 30, para o circuito fechado. Aqui também o valor de χ_L é significativamente maior em circuito aberto, acarretando um valor menor na carga positiva que permanece dentro do material, q_+, no circuito aberto em relação ao circuito fechado, ver também colu-

nas χ_L nas tabelas I e II.

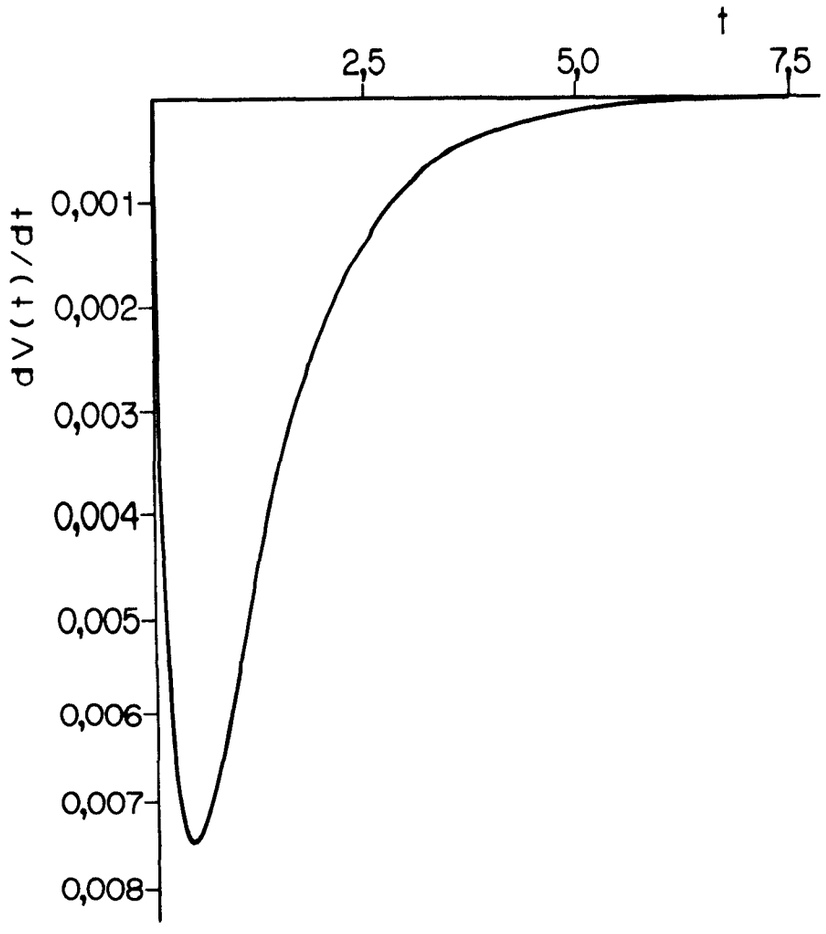


Fig. 31 - dV(t)/dt x t para circuito aberto

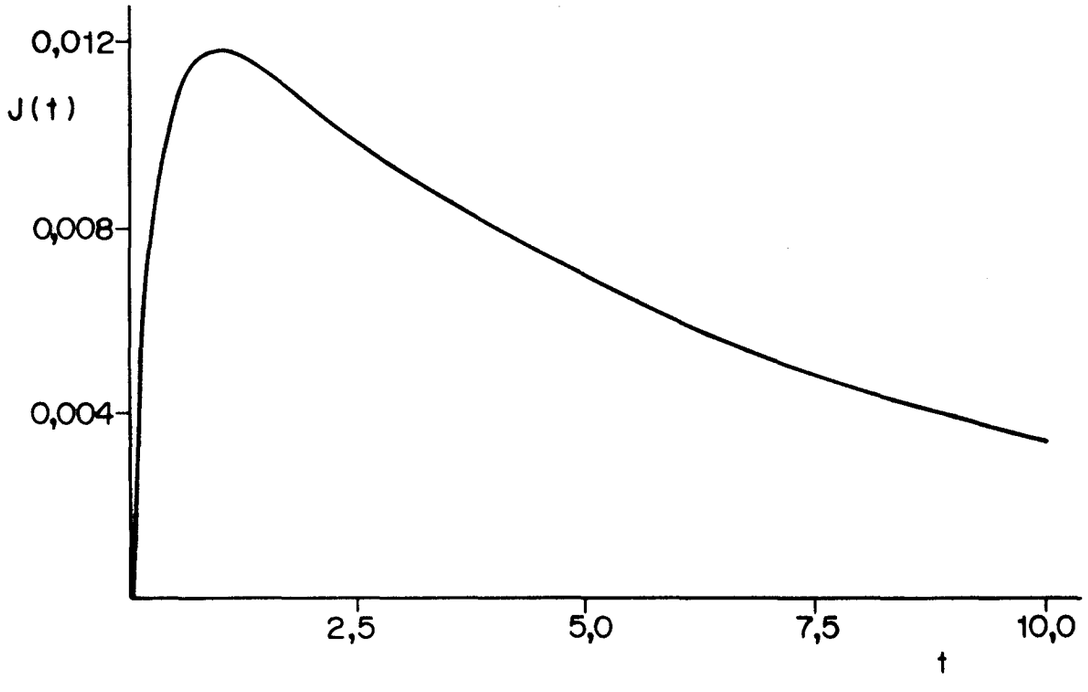


Fig. 32 - J(t)xt para circuito fechado

A fig. 31 mostra o gráfico dV(t)/dtxt para o circuito aberto e a fig. 32 o gráfico J(t)xt para o circuito fechado. O tem

po gasto para atingir o ponto de máxima corrente J(t) e de máxima -dV(t)/dt é bem menor no circuito aberto, ver colunas dV(t)/dt na tab. I e J(t) na tabela II, assim como -dV(t)dt<J(t) neste ponto e também que o tempo para atingir novamente o zero é menor em c. aberto. Tudo isto se deve à diferença fundamental existente entre as respectivas eqs., ou seja, o termo V(t) que só aparece na eq. de dV(t)/dt.

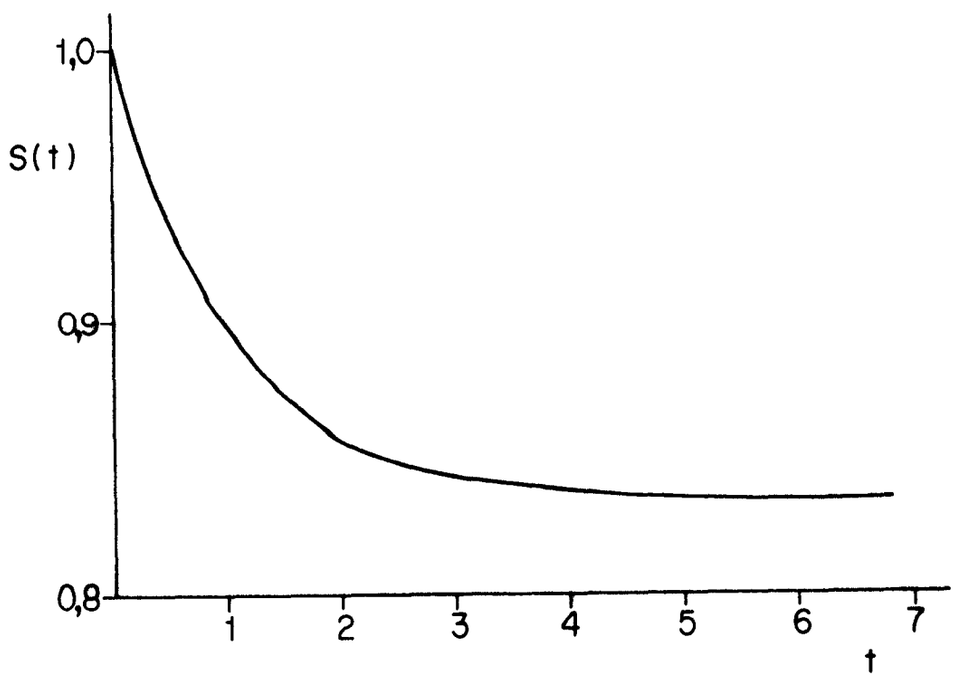


Fig. 33 - S(t)xt para circuito aberto

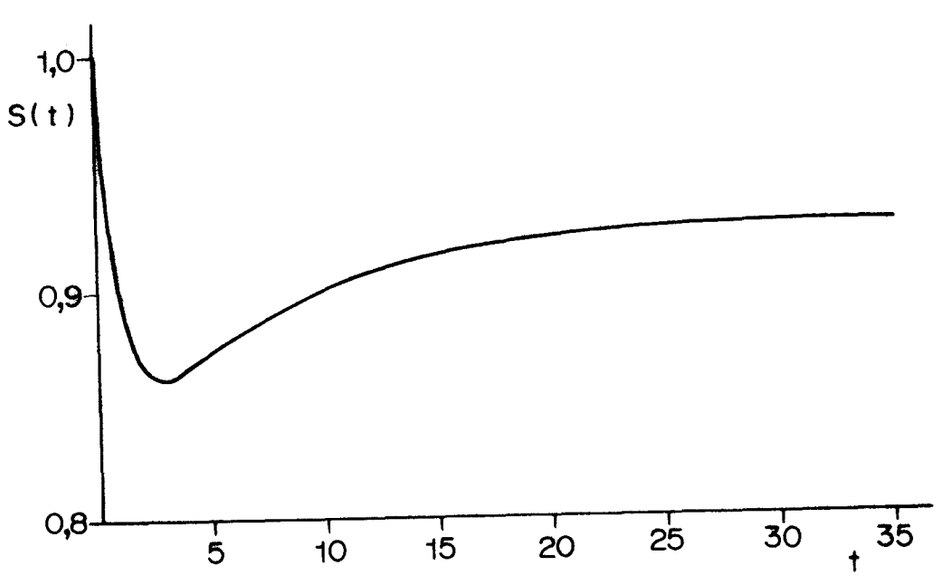


Fig. 34 - S(t)xt para circuito fechado

A fig. 33 mostra o gráfico S(t)xt para o circuito aberto e a fig. 34 para o circuito fechado.

Notamos que em curcuito aberto a posição da frente de carga positiva se desloca no sentido negativo de x atingindo assintoticamente um valor mínimo de S(t) que será o seu valor final, S_F.

No caso do circuito fechado há um recuo muito rápido da frente de cargas positivas até o seu valor mínimo (que é um pouco maior do que o do circuito aberto) e depois torna a se deslocar no sentido positivo de x, muito lentamente atingindo um valor limite assintoticamente S_F, que é significativamente maior do que o de circuito aberto, ver colunas S_F nas tabelas I e II. Esta diferença de comportamento se deve ao fato de que no caso do circuito fechado as cargas positivas se descolam do eletródio em x = 0, para tempos maiores do que t_L, tal como nos outros casos anteriores, e todo o conjunto caminha para uma posição centralizada no material de modo que na posição de equilíbrio final as cargas positivas estão de tal modo distribuidas que a densidade ρ(x,t) é igual a 1 (um) e a sua configuração fica tipo caixa como pode ser visto na fig. 36.

No caso do circuito aberto não ocorre o descolamento, embora a configuração final seja também tipo caixa ver fig. 35 e sua densidade igual a um, como nos casos anteriores.

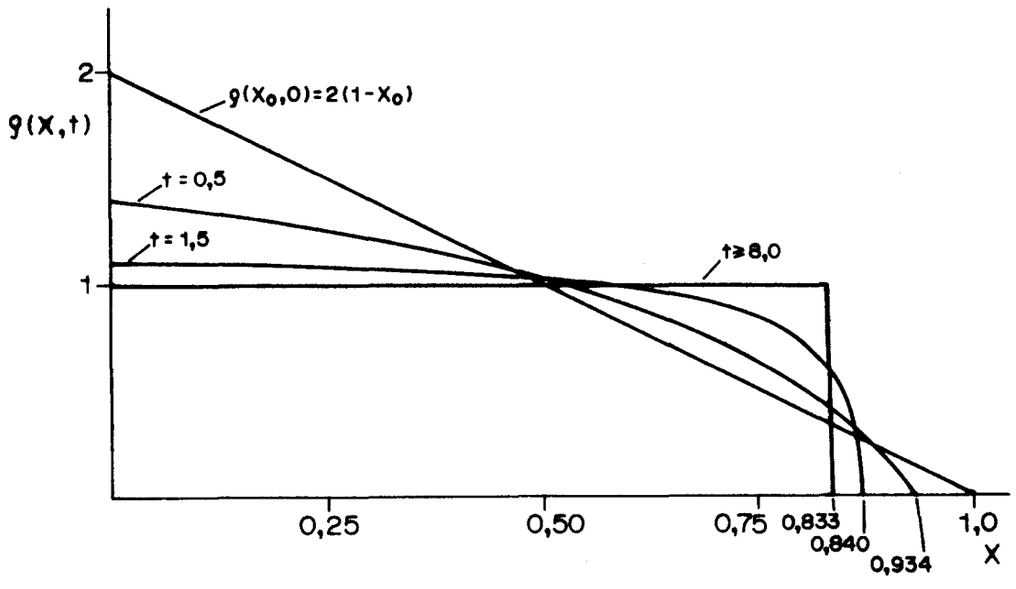


Fig. 35 - ρ(x,t) para circuito aberto

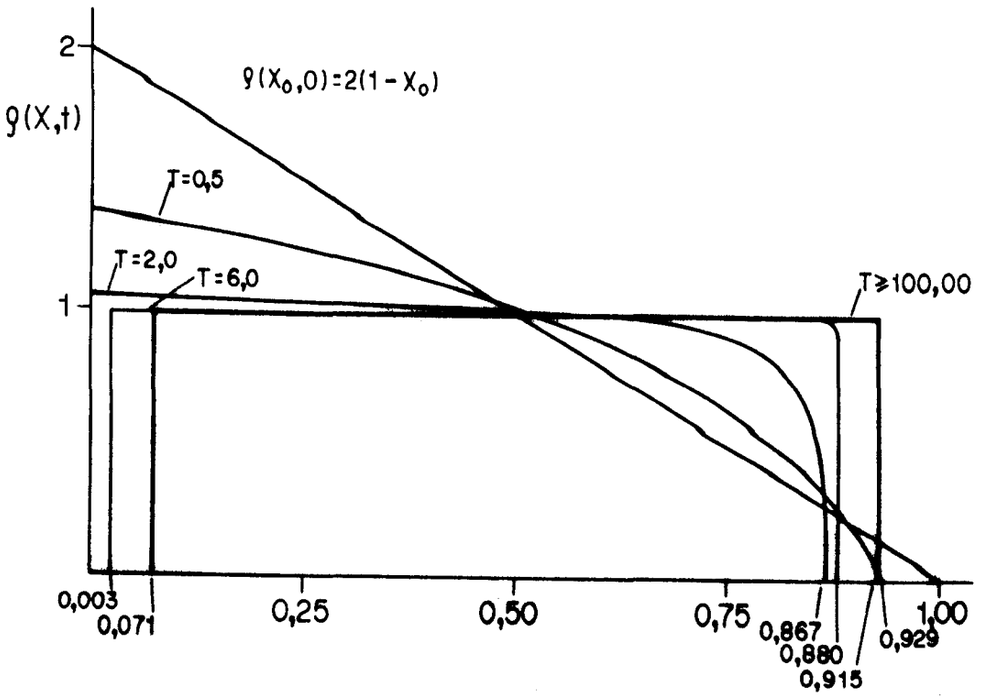


Fig. 36 - ρ(x,t) para circuito fechado

A fig. 35 mostra como a densidade de cargas positivas ρ(x,t) evolui no tempo, para o circuito aberto, o gráfico ρ(x,t)xx tende para tipo caixa ao final do processo.

A fig. 36 mostra a mesma tendência, com a diferença de haver o deslocamento para o centro do material e o respectivo descolamento do eletródio em x = 0.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Nesta dissertação, pelo emprego de técnicas de solução para o movimento de carga espacial monopolar livre, problemas envolvendo uma matriz imóvel com densidade constante, puderam ser resolvidos. Embora nas ilustrações a matriz imóvel tenha sido escolhida de sinal oposto ao das cargas móveis, a teoria desenvolvida cobre também o caso em que as móveis e as fixas têm o mesmo sinal. E neste caso, problemas envolvendo preenchimento total de armadilhas - por injeção prévia - e a acompanhante carga livre, poderiam ser atacados, necessitando-se somente fazer a extensão do método de forma a descrever a saída de carga também pelo outro eletródio (em x = 1). Seria, em suma, semelhante à generalização feita da ref. 2 à ref. 3, com carga espacial livre.

APÊNDICE I

CAMPOS ELÉTRICOS INICIAIS: $E(\chi)$, $E(S_0)$, $E(1,0)$ e E_0

I.a - Distribuição tipo caixa

Usando a eq. de Poisson:

$$\frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0} = \rho(x_0,0)-\rho_0$$

que na região I, $x_0 < S_0$, fornece:

$$\frac{dE_I(x_0,0)}{dx_0} = \frac{1}{S_0} - 1$$

integrando em x_0, para $x_0 < S_0$:

$$\int_{E_0}^{E_I(x_0,0)} dE_I(x_0,0) = \int_0^{x_0} (\frac{1}{S_0} - 1)dx_0$$

obtemos,

$$E_I(x_0,0) = E_0 + \frac{1-S_0}{S_0} x_0 \qquad (I.1)$$

e na região II, $x_0 > S_0$, fornece:

$$\frac{dE_{II}(x_0,0)}{dx_0} = -1$$

Os campos $E_I(S_0,0)$ e $E_{II}(S_0,0)$ tem o mesmo valor, pois o campo elétrico é contínuo na frente de carga, logo:

$$E_{II}(S_0,0) = E_0 + 1 - S_0$$

e a integral fica:

$$\int_{E_0+1-S_0}^{E_{II}(x_0,0)} dE_{II}(x_0,0) = -\int_{S_0}^{x_0} dx_0$$

fornecendo:

$$E_{II}(x_0,0) = E_0 + 1 - x_0 \quad . \tag{I.2}$$

Agora podemos determinar E_0, usando:

$$\frac{dV}{dx} = E(x,t)$$

Como $V(t) = 0$, para $t = 0$ temos

$$0 = \int_0^{S_0} E_I(x_0,0)dx_0 + \int_{S_0}^{1} E_{II}(x_0,0)dx_0$$

$$0 = E_0 S_0 + \frac{(1-S_0)}{2} S_0 + E_0(1-S_0) + 1 - S_0 - \frac{1}{2} + \frac{S_0^2}{2}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2}(1-S_0) \tag{I.3}$$

A eq. (I.1) para $x_0 = 0$ fornece:

$$E(S_0) = \frac{1}{2}$$

A eq. (I.2) para $x_0 = 1$:

$$E_{II}(1,0) = E_0 = -\frac{1}{2}(1-S_0) \tag{I.4}$$

logo $E_I(0,0) = E_{II}(1,0)$, ou seja, os campos elétricos iniciais nos eletródios são iguais !

Substituindo E_0 na eq. (I.1), vem:

$$E_I(x_0,0) = -\frac{1}{2}(1-S_0) + \frac{1-S_0}{S_0}x_0 \quad .$$

Logo:

$$E(\chi) = -\frac{1}{2}(1-S_0) + \frac{1-S_0}{S_0}\chi \qquad (I.5)$$

e

$$E(S_0) = \frac{1}{2}(1-S_0) \qquad (I.6)$$

Note que para construir a configuração inicial do campo elétrico bastam as eqs. (I.3) e (I.6), com o respectivo valor de S_0, pois vemos que as eqs. (I.1) e (I.2) são lineares em x_0.

I.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$

A eq. de Poisson, para t = 0, neste caso é:

$$\frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0} = 4-8x_0-\rho_0$$

que na região I, $x_0 < S_0$, fornece:

$$\int_{E_0}^{E_{II}(x_0)} dE_I(x_0) = \int_0^{x_0}(4-8x_0)dx_0 - \int_0^{x_0} dx_0$$

$$E_I(x_0) = E_0+3x_0-4x_0^2 \qquad (I.7)$$

na frente de carga,

$$E_I(S_0) = E_0 + \frac{1}{2}$$

e, na região II, $x_0 > S_0$, fornece:

$$\int_{E_{II}(S_0)}^{E_{II}(x_0)} dE_{II}(x_0) = -\int_{S_0}^{x_0} dx_0$$

Como no caso (a), $E_I(S_0) = E_{II}(S_0)$, logo

$$E_{II}(S_0) = E_0 + \frac{1}{2}$$

e a integral fica:

$$\int_{E_0+\frac{1}{2}}^{E_{II}(x_0)} dE_{II}(x_0) = -x_0 + \frac{1}{2}$$

$$E_{II}(x_0) = E_0+1-x_0 \qquad \text{(I.8)}$$

Agora, E_0, usando $dV/dx = E(x,t)$

$$0 = \int_0^{S_0} (E_0+3x_0-4x_0^2)dx_0+\int_{S_0}^{1} (E_0+1-x_0)dx_0$$

$$E_0 = -\frac{1}{3} \qquad \text{(I.9)}$$

também aqui, ocorre,

$$E_{II}(1,0) = E_0$$

e em S_0:

$$E(S_0) = \frac{1}{6} \qquad \text{(I.10)}$$

Substituindo E_0 na eq. (I.7),

$$E_I(x_0) = -4x_0^2 + 3x_0 - \frac{1}{3} \quad , \qquad \text{(I.11)}$$

logo

$$E(\chi) = -4\chi^2 + 3\chi - \frac{1}{3} \qquad (I.12)$$

Neste caso a configuração inicial de campo elétrico é uma parábola invertida de $x = 0$ até $x = \frac{1}{2}$ eq. (I.11) e de $x = \frac{1}{2}$ até $x = 1$ é uma reta, eq. (I.2).

I.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$

Neste caso a eq. de Poisson é:

$$\frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0} = 1-2x_0$$

e para toda a amostra, já que $S_0 = 1$, vale:

$$\int_{E_0}^{E(x_0)} dE(x) = \int_0^{x_0} dx_0 - \int_0^{x_0} 2x_0 dx_0$$

$$E(x_0) = E_0 + x_0 - x_0^2 \qquad (I.13)$$

e, na frente de carga,

$$E(1,0) = E_0$$

usando $dV/dx = E(x,t)$, e integrando por partes:

$$0 = \int_0^1 E(x_0,0)dx_0 = E(1,0) - \int_0^1 x_0 dE(x_0,0)$$

$$E(1,0) = \int_0^1 x_0 \frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0} dx_0$$

$$E(1,0) = \int_0^1 x_0 dx_0 - 2\int_0^1 x_0^2 dx_0$$

$$E(1,0) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \tag{I.14}$$

$$E_0 = -\frac{1}{6} \tag{I.15}$$

e a eq. (I.13) fica:

$$E(x_0) = -x_0^2 + x_0 - \frac{1}{6} \tag{I.16}$$

$$E(S_0) = -\frac{1}{6} \tag{I.17}$$

Aqui a configuração do campo elétrico inicial é uma parábola invertida de $x = 0$ até $x = 1$ com valor máximo, $E(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$, pela eq. (I.16).

APÊNDICE II

D.D.P. ENTRE OS ELETRÓDIOS: V(t)

II.a - Distribuição tipo caixa

A eq. (2.1) pode ser escrita:

$$V(t) = \int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx + \int_{S(t)}^1 E_{II}(x,t)dx$$

com,

$$E_I(x,t) = E(x_0,0)e^{-\rho_0 t}$$

e, pela eq. (2.12), levando em conta que $\frac{dE(x_0,0)}{dx_0} = \frac{\partial E(x_0,0)}{\partial x_0} = \rho(x_0, 0) - \rho_0$

$$\frac{dx}{dx_0} = 1 + (1-e^{-\rho_0 t})\left(\frac{1-S_0}{S_0}\right)$$

então:

$$V(t) = \int_\chi^{S_0} e^{-t} E(x_0,0)\left[1+(1-e^{-t})\left(\frac{1-S_0}{S_0}\right)\right]dx_0 + \int_{S(t)}^1 E_{II}(x,t)dx$$

mas:

$$\frac{dE_{II}(x,t)}{dx} = -1$$

$$\int_{E(S,t)}^{E_{II}(x,t)} dE_{II}(x,t) = -\int_{S(t)}^{x} dx$$

$$E_{II}(x,t) = E(S,t) - x + S(t)$$

logo:

$$V(t) = e^{-t}\left[1+(1-e^{-t})\left(\frac{1-S_0}{S_0}\right)\right]\left[S_0E(S_0)-\chi E(\chi)-\int_{\chi}^{S_0} x_0 dE(x_0,0)\right] +$$

$$+ \int_{S(t)}^{1} \left[E(S,t)-x+S(t)\right]dx$$

$$V(t) = e^{-t}\left[1+(1-e^{-t})\left(\frac{1-S_0}{S_0}\right)\right]\left[S_0E(S_0)-\chi E(\chi)-\left(\frac{1-S_0}{S_0}\right)\left(\frac{S_0^2-\chi^2}{2}\right)\right] +$$

$$+ E(S,t)(1-S(t)) - \frac{1}{2}(1-S(t))^2$$

usando as eqs. (3.1) e (3.2):

$$V(t) = \frac{1}{8}(1-e^{-t})(1-S_0)^2\left\{\frac{S_0e^{-t}}{1-e^{-t}(1-S_0)}\left[2+(1-e^{-t})\left(\frac{1}{S_0}-1\right)\right]-1-e^{-t}\right\} \tag{II.1}$$

II.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8(\frac{1}{2} - x_0)$

$$V(t) = \int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx+\int_{S(t)}^{1} E_{II}(x,t)dx$$

$$\int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx = \int_{\chi}^{S_0} e^{-t}E(x_0,0)\frac{dx}{dx_0}\, dx_0$$

onde:

$$\frac{dx}{dx_0} = 1+(1-e^{-t})\frac{dE(x_0,0)}{dx_0}$$

substituindo:

$$\int_{\chi}^{S_0} e^{-t}E(x_0,0)\left[1+(1-e^{-t})\frac{dE(x_0,0)}{dx_0}\right]dx_0 = S_0E(S_0)-\chi E(\chi) -$$

$$- \int_{\chi}^{S_0} x_0(4-8x_0)dx_0+\int_{\chi}^{S_0} x_0dx_0 + \frac{1}{2}(1-e^{-t}) \quad .$$

$$(E^2(S_0)-E^2(\chi))$$

resultando em:

$$\int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx = e^{-t}\left[S_0E(S_0)-\chi E(\chi)-\frac{3}{2}(S_0^2-\chi^2)+\frac{8}{3}(S_0^3-\chi^3)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(1-e^{-t})(E^2(S_0)-E^2(\chi)) \qquad \text{(II.2)}$$

por outro lado:

$$\int_{S(t)}^{1} E_{II}(x,t)dx = \left[E(S,t) - \frac{1}{2}(1-S(t))\right](1-S(t)) \qquad \text{(II.3)}$$

Substituindo as eqs. (II.1) e (II.2) na eq. de V(t), usando as eqs. (4.1) e (4.2), obtemos:

$$V(t) = e^{-t}\{\frac{1}{24}+(1-e^{-t})\left[(4\chi^2-3\chi+\frac{1}{3})^2+\frac{3\chi^2}{2}-\frac{8\chi^3}{3}+\frac{1}{72}-\frac{\chi^2}{2}(1-e^{-t})\right]\} \qquad \text{(II.4)}$$

II.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$

$$V(t) = \int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx+\int_{S(t)}^{1} E_{II}(x,t)dx$$

Como no caso anterior (II.b):

$$\int_0^{S(t)} E_I(x,t)dx = S_0E(S_0)-\chi E(\chi)-\int_\chi^{S_0} x_0(2-2x_0)dx_0+\int_\chi^{S_0} dx_0 +$$

$$+\frac{1}{2}(1-e^{-t})(E^2(S_0)-E^2(\chi)) \qquad \text{(II.5)}$$

e

$$\int_{S(t)}^{1} E_{II}(x,t)dx =\left[(1-S(t))\ E(S,t)-\frac{1}{2}(1-S(t))\right] \qquad \text{(II.6)}$$

resultando:

$$V(t) = S_0E(S_0)-\chi E(\chi) - \frac{(S_0^2-\chi^3)}{2} + \frac{2}{3}(S_0^3-\chi^3) + \frac{1}{2}(1-e^{-t}) \quad .$$

$$\left[E^2(S_0)-E^2(\chi)\right]+(1-S(t)\left[E(S,t) - \frac{1}{2}(1-S(t))\right]$$

Substituindo as eqs. (5.1) e (5.2):

$$V(t) = e^{-t}\{\frac{1}{2}(1-e^{-t})(\chi^2 - \chi + \frac{1}{6})^2 - \frac{2\chi^3}{3} + \frac{1-e^{-t}}{72}\} - \frac{1-e^{-t}}{72}(1+e^{-t}) \qquad \text{(II.7)}$$

APÊNDICE III

D.D.P. INICIAIS: $V(\chi)$ e $V(S_0)$

III.a - Distribuição tipo caixa

Pela definição:

$$V(\chi) \equiv \int_0^{\chi} E(x_0,0)\,dx_0$$

$$V(\chi) = \int_0^{\chi} \left(\frac{\chi}{S_0} - \frac{1}{2}\right)(1-S_0)\,dx_0$$

$$V(\chi) = (1-S_0)\left(\frac{\chi^2}{2S_0} - \frac{\chi}{2}\right)$$

$$V(\chi) = -\frac{\chi}{2}(1-S_0)\left(1 - \frac{\chi}{S_0}\right) \qquad \text{(III.1)}$$

e,

$$V(S_0) = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

III.b - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 8\left(\frac{1}{2} - x_0\right)$

$$V(\chi) \equiv \int_0^{\chi} E(x_0,0)\,dx_0$$

$$V(\chi) = \int_0^{\chi} \left(-4x_0^2 + 3x_0 - \frac{1}{3}\right)dx_0$$

$$V(\chi) = -\frac{4\chi^3}{3} + \frac{3\chi^2}{2} - \frac{\chi}{3} \qquad \text{(III.3)}$$

e,

$$V(S_0) = \frac{1}{24} \qquad \text{(III.4)}$$

III.c - Distribuição linear: $\rho(x_0,0) = 2(1-x_0)$

$$V(\chi) \equiv \int^{\chi} E(x_0,0)dx_0$$

$$V(\chi) = \int_0^{\chi} (-x_0^2 + x_0 - \frac{1}{6})dx_0$$

$$V(\chi) = -\frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi}{6} \qquad \text{(III.5)}$$

e,

$$V(S_0) = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

Estas expressões de $V(\chi)$ e $V(S_0)$ são usadas na eq.(2.24) em circuito fechado, para as três distribuições.

APÊNDICE IV

TEOREMA DE LINDMAYER

A seguir apresentamos a demonstração do teorema de Lindmayer[10] como apresentado na referência (11).

A eq. (1.4) é:

$$J(t) = \rho(x,t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad ,$$

e a derivada do campo em relação ao tempo:

$$\frac{dE(x,t)}{dt} = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}$$

como nos interessa o ponto de campo nulo,

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0$$

usando a eq. de Poisson,

$$\frac{dx}{dt}(\rho(x,t)-\rho_0) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

mas pela eq. (1.4):

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = J(t)-\rho(x,t)E(x,t)$$

substituindo na eq. (IV.1),

$$\frac{dx}{dt}(\rho(x,t)-\rho_0)+J(t)-\rho(x,t)E(x,t) = 0$$

mas se no ponto de interesse, $E(x,t) = 0$, ficamos com:

$$\frac{dx}{dt}(\rho(x,t)-\rho_0)+J(t) = 0$$

ou,

$$J(t) = -\frac{dx}{dt}(\rho(x,t)-\rho_0) \qquad \text{(IV.2)}$$

que é a relação desejada. Para circuito aberto, $J(t) = 0$ e como em geral $\rho(x,t) \neq \rho_0$, conclui-se que $\frac{dx}{dt} = 0$, ou seja, o ponto de campo zero permanece em repouso, durante todo o processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. OLIVEIRA, L.N. & FERREIRA, G.F.L. - J. Electrostatics, 2, 187 (1976)
2. ALMEIDA, L.E.C. - Dissertação de Mestrado (1974) - IFQSC/USP
   ALMEIDA, L.E.C. & FERREIRA, G.F.L. - Rev. Bras. Fis. 5, 349 (1975)
3. CAMARGO, P.C. - Dissertação de Mestrado (1975) - IFQSC/USP
   CAMARGO, P.C. & FERREIRA, G.F.L. - Rev. Bras. Fis. 6,231(1976)
4. LEPIENSKI, C.M. & FERREIRA, G.F.L. - Rev. Bras. Fis. 11, 387 (1981)
5. FERNANDES, A. - Dissertação de Mestrado (1980) - IFQSC/USP
6. OLIVEIRA, L.N. & FERREIRA, G.F.L. - J. Electrostatics, 2, 249 (1976/1977)
7. MANY, A. & RAKAVY, G. - Phys. Rev. 126, 1980 (1962)
8. MOTTA, J.M. - Dissertação de Mestrado (1981) - IFQSC/USP
9. CARNAHAN, B. "Runge-Kutta Methods". In: Applied Numerical Methods. 1a. ed. John Wiley & Sons, Inc., 1969, cap. 6, p.361 -380
10. LINDMAYER, J. - J. App. Phys. 36, 196 (1965)
    GROSS, B. & PERLMAN, M. - J. App. Phys. 43, 853 (1972)
11. FERREIRA, G.F.L. - Tese de Livre Docência "Alguns casos integráveis de cinética de carga espacial". 1973 - IFQSC/USP