INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

"PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE CARGA
ESPACIAL EM GEOMETRIAS PLANO—PLANO
E ASSEMELHADAS"

Ismael Francisco Dantas

Tese apresentada ao Instituto de Física e Química
de São Carlos, para a obtenção do Título de Doutor
em Ciências: Física Aplicada

Orientador

Prof. Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira

SÃO CARLOS

1992

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

**IFSC UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO**
Instituto de Física e Química de São Carlos

Fone (0162) 72-6222
Fax (0162) 72-2218

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
Caixa Postal 369
CEP 13560.970 - São Carlos - SP

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE LAUDORADO DE ISMAEL FRANCISCO PANTAS ^{Brasil} APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 14/09/1992

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira

Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos

Prof. Dr. René Armando Moreno Alfaro

Prof. Dr. José Alberto Cuminato

Prof. Dr. Antonio Cândido Faleiros

A minha esposa

Teresa Virgínia

Aos meus filhos

Clarissa

Marcílio

Igor

Márcia

Marcos Dimitri.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Guilherme F. Leal Ferreira, pela orientação segura e constante estímulo à superação das dificuldades encontradas.

Ao Prof. Dr. José Alberto Cuminato (Poti), pelas discussões e sugestões em aspectos importantes deste trabalho.

Aos Professores Dr. Roberto M. Faria e Dr. José Alberto Giacometti, pelo incentivo e amizade.

Aos demais Professores e Funcionários do Grupo de Eletretos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao casal amigo Auro e Sônia Tanaka, pelo apoio constante, hospitalidade e generosa amizade.

Aos colegas João Mariz, Paraná e Marta, José Ribeiro, Helder, Edinilton, Haroldo e Malmonge, pelo convívio e amizade.

Aos colegas Professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Piauí que suportaram minhas atividades docentes durante a realização deste trabalho.

À FUFPI e ao IFQSC—USP, pela oportunidade.

Agradecimento Especial

À Profa. Dra. Mariângela T. Figueiredo, pela valiosa colaboração, pelo interesse sempre renovado e paciência com os quais me assistiu em todas as fases deste trabalho. Digo-lhe, pois, e ao Prof. Guilherme, que se melhor não fiz foi por causa das minhas próprias limitações.

Resumo

A finalidade principal deste trabalho é a obtenção de soluções numéricas de movimento de carga espacial livre em que as grandezas pertinentes dependem de mais de uma coordenada espacial (casos não unidimensionais). Mais especificamente, os problemas estudados versam sobre casos em que um eletródio plano a um dado potencial emite carga não uniformemente ao longo de sua extensão e procura-se obter a deformação das linhas de campo daí resultantes, no espaço até um outro eletródio aterrado disposto paralelamente ao primeiro. Um método baseado em soluções tentativas bem como um outro global usando a "transformação hodográfica" recentemente formulada por Budd e Wheeler são apresentados. É também realizado um estudo breve sobre a validade da muito empregada "suposição de Deutsch".

Abstract

The aim of the present work is to obtain numerical solutions of free space charge motion in cases in which the pertinent quantities depend on more than one space coordinate (non uni-dimensional cases). More specifically, the problems under concern here are those in which a plane electrode, at a constant potential, emit charge in a non-uniform way along them and the resultant deformation of the field lines, in the space between it and another plane grounded electrode parallelly disposed, is looked for. A method based on guessed solutions and also a global one using the hodographic transformation recently developed by Budd and Wheeler are presented. A brief study of the validity of the often employed "Deutsch assumption" is also carried out.

Índice

CAPÍTULO I — INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II — EQUAÇÕES DO PROBLEMA DE CARGA ESPACIAL	3
2.1 — Formas Dimensionais	3
2.2 — Formas Adimensionais	4
2.3 — Características do Sistema de Equações	5
2.4 — Condições de Contorno.....	6
2.5 — Soluções Exatas	8
2.5.1 — Emprego de Soluções Exatas	10
2.6 — Soluções Aproximadas	11
CAPÍTULO III — SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CARGA ESPACIAL — UMA APROXIMAÇÃO EM SÉRIES DE TAYLOR TRUNCADAS	17
3.1 — Introdução.....	17
3.2 — Determinação de Coeficientes	18
3.3 — Sistema de Dois Eletrodos Planos	20
3.4 — Cálculo de Equipotenciais	22
3.5 — Resultados e Discussão	25
CAPÍTULO IV — O MÉTODO DE BUDD & WHEELER E AS EQUAÇÕES DE CARGA ESPACIAL	37
4.1 — Introdução.....	37
4.2 — Condições de Ortogonalidade do Sistema (Φ, Ψ)	38
4.3 — Transformação das Equações sob a Mudança de Coordenadas $(x, y) \rightarrow (\Phi, \Psi)$	40
4.3.1 — O Significado de $a(\Psi)$	41
4.3.2 — Condições de Contorno Apropriadas ao Sistema de Equações (4.11) em um Domínio Simplesmente Conexo ...	42

4.4 — O Método Numérico	44
CAPÍTULO V — INJEÇÃO DESCONTÍNUA DE CARGA ESPACIAL	
EM GEOMETRIA PLANAR	53
5.1 — Introdução	53
5.2 — As Condições de Contorno em $\partial\Gamma$	56
5.3 — Abordagem de Γ_1 e Γ_2 como Domínios Isolados	58
5.3.1 — Região de Laplace	58
5.3.2 — Região de Poisson	59
5.4 — Os Algoritmos para a Determinação de $\partial\Gamma$	62
CAPÍTULO VI — RESULTADOS E DISCUSSÃO	
6.1 — Introdução	68
6.2 — Sobre a Convergência dos Algoritmos	70
6.3 — Resultados Numéricos do Caso I e Discussão	71
6.4 — Resultados Numéricos para a Linha de Corrente	
$\partial\Gamma$ — Discussão	75
6.5 — Resultados Numéricos do Caso II — Discussão	87
6.6 — Considerações Finais	89
CAPÍTULO VII — A SUPOSIÇÃO DE DEUTSCH EM GEOMETRIAS	
SIMPLESMENTE CONEXAS	91
SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO	95
APÊNDICE — A — SOBRE O EMPREGO DAS SUB-ROTINAS NAG	
F04AXT E F01BRF	97
APÊNDICE — B — PROGRAMAS FORTRAN	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

CAPÍTULO I

Introdução

Os problemas de “carga espacial” estão geralmente ligados ao de transporte de cargas elétricas em isolantes. As cargas emitidas de um eletródio injetor acumulam-se no espaço entre este e o eletródio coletor mantendo-se assim mesmo no regime estacionário. Em simetria planar foram já apresentadas soluções para um grande número de problemas quer em regime estacionário ou não. Na maioria das vezes se admite que a velocidade do portador é proporcional à força elétrica sobre ele, o transporte sendo livre ou em presença de armadilhas que podem imobiliza-los temporariamente. Distinguem-se também dois casos: o de muita e o de pouca carga espacial comparadas com as cargas que residem no eletródio emissor. Um amplo estudo — embora com mais ênfase nos estados estacionários — é apresentado no livro “Current Injection in Solids” por Lampert & Mark [1]. Para situações não estacionárias vejam-se os artigos de Many & Rakavy [2] e Oliveira & Leal Ferreira [3].

Entre as situações não triviais, isto é, aquelas em que as grandezas pertinentes como o campo elétrico e a densidade de carga dependem de mais de uma coordenada espacial, a única a receber atenção foi a da descarga corona, de montagem frequentemente empregada na prática. Nesta, a descarga disruptiva junto a um condutor filiforme ou pontiagudo, devida à existência de um grande campo elétrico, confina-se às vizinhanças desse condutor, a corrente elétrica sendo na maior parte do espaço de natureza iônica. Pois bem, este problema da descarga corona recebeu algumas abordagens destacando-se as aproximações embasadas na suposição de Deutsch. No cap. II apresentamos as equações que descrevem o regime estacionário do movimento de carga espacial, alguns teoremas, as soluções exatas conhecidas e algumas poucas aproximações analíticas. Vê-se que, em geral, não é mais possível obter-se soluções analíticas nos casos não triviais, sendo então necessário o emprego de soluções numéricas.

O problema não trivial que estudamos nesta tese é o da emissão não uniforme de carga por um eletródio plano infinito, a um dado potencial. No cap. III estipulamos a densidade de carga e o campo elétrico sobre um eletródio plano emissor e através de um desenvolvimento em série até segunda ordem avançamos em direção ao outro eletródio que não resultará exatamente plano mas o será em uma muito boa aproximação. Os resultados obtidos por este método serão testados por um outro, muito mais sofisticado, desenvolvido por Budd & Wheeler [4] que consiste em resolver numericamente, depois de uma conveniente mudança de variáveis, o problema de contorno com fronteiras planas vindo da equação de Poisson e o problema hiperbólico de transporte de carga ao longo das linhas de fluxo. Este método está apresentado no cap. IV.

Já no cap. V voltamos ao problema da emissão não uniforme começando a estudar o seguinte caso: dois eletródios planos infinitos estão dispostos paralelamente. Um deles emite cargas com densidade de carga constante até um certo ponto (ou linha) em sua superfície. Qual será o locus da última linha de corrente e de suas vizinhas? Nesse capítulo desenvolvemos o nosso algoritmo que abrange a solução de problemas de carga espacial bem como de problemas de Laplace. A solução do problema proposto exige que se faça uma junção conveniente entre as duas regiões que têm como fronteira comum aquela procurada linha de corrente de modo que esta resulte determinada. No cap. VI apresentamos os resultados dos nossos cálculos, precedidos pelos testes que foram realizados do nosso algoritmo. Detalhes sobre a precisão dos cálculos — alguns deles muito peculiares — são também referidos.

No cap. VII, fazemos uma breve avaliação da aplicabilidade ou não da chamada suposição de Deutsch aos casos estudados e, por último, uma sugestão de cálculos futuros encerra este trabalho.

CAPÍTULO II

Equações do Problema de Carga Espacial

2.1 – Formas Dimensionais

Um dos problemas mais simples, formulados no contexto dos fenômenos de carga espacial (e nem por isso sempre fácil de resolver), é o de transporte de carga (íons) unipolar, em regime estacionário, entre dois eletródios mantidos em uma d.d.p constante. O transporte se dá em um meio de permissividade elétrica ϵ , onde os portadores possuem mobilidade μ e coeficiente de difusão κ .

As equações básicas que descrevem este problema são:

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (2.2)$$

$$J = \mu\rho E - \kappa\nabla\rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot J = 0. \quad (2.4)$$

A primeira destas equações é a forma diferencial da lei de Gauss. Nela, como nas demais, ρ é a densidade de carga espacial e E é a intensidade de campo elétrico, uma combinação do campo de uma fonte externa com a contribuição de campo da própria carga espacial. A eq. (2.2) trata com um campo estático ou que evolui muito lentamente com o tempo no caso quase estacionário e afirma a existência de um campo escalar Φ , o potencial elétrico, tal que

$$E = -\nabla\Phi, \quad (2.5)$$

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon. \quad (2.6)$$

(2.3) define a densidade de corrente, composta pelos termos de fluxo e de difusão, respectivamente, enquanto (2.4) estabelece a continuidade da corrente. O coeficiente de difusividade é definido pela relação de Einstein, isto é,

$$\kappa = \mu KT/e = U_D \mu \quad (2.7)$$

em que $U_D \simeq 0.026V$ em temperatura ambiente.

As equações de carga espacial podem ser acopladas em uma única equação em função do potencial elétrico Φ . Para deduzí-la substituem-se as eqs. (2.6) e (2.7) em (2.3), e esta última em (2.4) obtendo-se

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \Phi \nabla \Phi) + U_D \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = 0. \quad (2.8)$$

Na maioria das situações¹ o termo de difusão em (2.8) é desprezível em comparação com o de fluxo; em parte porque enquanto U_D é da ordem de centésimos do volt, a diferença de potencial entre os eletródios é medida em quilovolts. Assim, adotando por hipótese esta simplificação chega-se à equação mais comum do problema de carga espacial, a saber,

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \Phi \nabla \Phi) = 0. \quad (2.9)$$

Neste trabalho consideraremos somente o caso $\kappa=0$. Assim, quando nos referirmos às eqs. (2.1) a (2.4) estará implícita esta condição.

2.2 – Formas Adimensionais

Para efeito de tratamento numérico é usual e mais cômodo reescrever as equações do problema em termos de grandezas adimensionais. Isto implica na escolha prévia de fatores de escala pelos quais as grandezas originais serão normalizadas. Então, se l é uma distância típica entre os eletródios e ΔV a d.d.p entre eles, uma adimensionalização possível é obtida quando se fazem as seguintes mudanças de variáveis nas equações anteriores: $(x,y,z) \rightarrow (lx', ly', lz')$; $\nabla \rightarrow (1/l)\nabla'$; $\Phi \rightarrow \Delta V \Phi'$; $E \rightarrow (\Delta V/l)E'$; $\rho \rightarrow (\epsilon \Delta V/l^2) \rho'$; $J \rightarrow (\mu \epsilon \Delta V^2/l^3) J'$.

¹ Sigmond [5] caracteriza nos seguintes termos as situações em que a corrente de difusão pode ser desprezada:- sejam l_0, l_1, l_2 e l_3 os comprimentos de escala sobre os quais o potencial Φ e suas derivadas $\nabla \Phi, \nabla^2 \Phi, \nabla^3 \Phi$ variam muito, isto é, $\nabla \Phi \approx \Phi/l_0, \nabla^2 \Phi \approx \nabla \Phi/l_1 \approx \Phi/l_0 l_1$, etc. A eq. (2.8) dá (TMO. DE DIFUSÃO/TMO. DE FLUXO) $\approx \frac{U_D}{V} \cdot \frac{l_0^2 l_1^2 + l_0^2 l_2^2}{l_2^2 l_3^2}$, onde $U_D < 0.1$ Volt enquanto V é usualmente expresso em quilovolts. Assim, somente onde l_2 e l_3 para as derivadas mais altas são centenas de vezes menores que l_0 e l_1 , para as derivadas mais baixas, o termo de difusão será de alguma relevância.

Para evitar a repetição de equações, é bastante ter em mente que as mudanças se passam como se se tomassem as identidades $\epsilon \equiv 1$, $\mu \equiv 1$ (e $\kappa \equiv 0$ difusividade desprezível como foi dito na seção anterior) sobre as equações prévias e nestas, por último, como se as grandezas com dimensão dessem lugar às adimensionais.

Doravante as referências serão feitas tão somente a grandezas e equações adimensionais. E a representação particular do conjunto das equações será feita em função das variáveis sobre as quais se prescrevem diretamente as condições de contorno.

2.3 – Características do Sistema de Equações

O método hodográfico de Budd & Wheeler [4] para o tratamento das equações de carga espacial, a ser introduzido no cap.IV, é em parte o método das características. Para a sua compreensão é adequado proceder à determinação das características do sistema de equações da carga espacial bem como de alguma relação sobre elas. Isto também vai propiciar uma base para melhor se entender a escolha de condições de contorno.

Consideremos, pois, reescrever as eqs. (2.1) a (2.4) na forma matricial que se segue, em menção apenas a sistemas bidimensionais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_x \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_y \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ -\rho^2 \end{bmatrix}. \quad (2.10a)$$

A eq. (2.10a) é um caso particular dos sistemas $A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u)$ e por isso, é um sistema quase linear em $\{E_x, E_y, \rho\}$.

Seguindo o procedimento usual, Godounov [6], as características de

(2.10a) são dadas pelas raízes, $\lambda_i = dy/dx$, do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ dxI & dyI \end{bmatrix} \quad (2.10b)$$

em que A e B são, na ordem, as matrizes 3×3 de (2.10a) e I é a matriz identidade de mesmas dimensões. As raízes são duas imaginárias, $\lambda_{1,2} = \pm i$, e uma real, $\lambda_3 = E_y/E_x \equiv \Phi_y/\Phi_x$, razão pela qual o sistema das equações de carga espacial, ou resumidamente a eq. (2.9), é do tipo misto: elíptico — configurado na equação de Poisson (2.6) — e hiperbólico.

Certamente o mais importante nesta discussão é observar que as características reais são ortogonais às superfícies equipotenciais, isto é, são as próprias linhas de campo. A equação característica correspondente — a componente hiperbólica do sistema, válida mesmo para o fluxo não estacionário, conforme Sigmond [5] e Leal Ferreira [7] — é²

$$d(1/\rho) = \frac{ds}{E} \quad (2.11a)$$

em que ds é um elemento de comprimento tomado ao longo de uma dada linha de campo e E é a intensidade de campo na linha considerada.

2.4 – Condições de Contorno

As equações reunidas na sec. 2.1 deste capítulo relacionam, entre si (ou podem relacionar), a intensidade de campo, o potencial elétrico e a densidade de carga espacial entre outras grandezas. As condições de contorno a que deverão satisfazer, logicamente se estabelecem pela indicação dos valores destas funções ao longo das fronteiras que delimitam os domínios de solução. Os eletródios, geralmente mantidos a d.d.p constante, fazem a totalidade da fronteira, em alguns domínios uniconexos, ou parte dela nos domínios simplesmente conexos e/ou multiplamente conexos em outros casos. A prescrição do potencial sobre a

²Para deduzí-la, substitui-se uma coluna qualquer de (2.10b) pela coluna do lado direito da eq. (2.10a) devidamente prolongada pelas diferenciais dE_x , dE_y e $d\rho$. Faz-se, em seguida, o determinante desta nova matriz igual a zero. A expressão resultante é resolvida para $d(1/\rho)$ em termos de $(\pm)ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} dx = [E_x^2 + E_y^2]^{1/2} (dx/E_x) \equiv [E_x^2 + E_y^2]^{1/2} (dy/E_y)$.

fronteira constitui-se então numa condição de contorno natural do problema. Isto é corroborado ainda pela invariância da eq. (2.9) sob uma mudança de escala ou pela adição de uma constante ao potencial Φ (ou ainda pelo aspecto elíptico daquela equação).

A equação diferencial parcial não linear (2.9), por ser de terceira ordem, exige mais uma condição de contorno além da condição de Dirichlet (e/ou Neumann) sobre o potencial, para que se tenha um problema matemático bem definido. É usual aplicá-la na superfície do eletródio emissor especificando, ou os valores da densidade de carga espacial, como argumentam Felici [8,9] e Atten [10,11], ou os da intensidade de campo, como sugerem Sarma & Janischewskyj [12,13]. A primeira destas alternativas parece óbvia. Vê-se da eq. (2.11a) que se ρ é dada em um extremo de cada linha de campo então, em princípio, fica determinada nos demais pontos de linha por todo o domínio. Ora, as linhas de campo emanam todas do eletródio emissor e este fica, pois, ultimamente, definido por um conjunto de pontos extremos. Com r_e e ρ_e na fronteira emissora e r no ponto de linha, então

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_e} + \int_{r_e}^r \frac{ds}{E} . \quad (2.11b)$$

Na segunda alternativa a condição de contorno é mais apropriada a um emissor em que a carga é produzida por descarga corona. Trata-se da intensidade de campo harmônico (solução da equação de Laplace) quando a tensão atinge o valor de disparo de corona, pois, postula-se que o papel da corona é manter constante a intensidade do campo nas suas vizinhanças imediatas, independentemente do crescimento da voltagem acima do nível de disparo.

Revendo a discussão em alguns diferentes contextos, Budd & Wheeler [4] têm constatado a inexistência de uma condição de contorno universal. Assumem que existe uma dada relação entre intensidade de campo e carga espacial no emissor da forma

$$F(\theta, |E|, \rho) = 0 \quad (2.12)$$

onde F , a que se referem como “lei de injeção”, é uma função apropriada à situação considerada e θ é uma variável em termos da qual se parametriza a superfície de emissão.

2.5 – Soluções Exatas

Há poucas soluções algébricas exatas para o problema de carga espacial. A mais simples é a solução unidimensional descrevendo o fluxo entre dois eletródios planos. Para uso posterior nos Caps. III e IV, vamos explicitá-la detalhadamente. Com a distância y tomada ao longo da direção transversal aos eletródios, estando o emissor em $y=0$ e o coletor em $y=1$, tem-se,

$$\rho(y) = \rho_0 \left[1 + \frac{2\rho_0}{E_0} y \right]^{-1/2}, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2.13a)$$

$$E(y) = E_0 \left[1 + \frac{2\rho_0}{E_0} y \right]^{1/2} \hat{y}; \quad (2.13b)$$

$$\Phi(y) = 1 - \frac{E_0^2}{3\rho_0} \left[\left(1 + \frac{2\rho_0}{E_0} y \right)^{3/2} - 1 \right]; \quad (2.13c)$$

$$E_0^3 + (2\rho_0 - 1) E_0^2 + \frac{4}{3} \rho_0^2 E_0 - \frac{3}{2} \rho_0 = 0. \quad (2.13d)$$

A última relação é necessária para que a d.d.p entre os eletródios seja $\Delta\Phi=1$.

As soluções em duas e três dimensões mais frequentemente mencionadas têm fronteiras consistindo de cilindros coaxiais e de esferas concêntricas com densidade de carga espacial uniforme no emissor. São facilmente dedutíveis bastando dizer que a eq. (2.9) é trivialmente separável tanto em coordenadas polares cilíndricas quanto em coordenadas esféricas. Isto equivale a dizer que a presença de carga espacial nestas geometrias não afeta a direção das linhas do campo harmônico correspondente ou que as superfícies equipotenciais são congruentes às laplacianas, podendo apenas ser distribuídas de maneira diferente. Esta afirmação constitui a essência da chamada “suposição de Deutsch”, a qual será desenvolvida na sec. 2.6.

Smith [14], usando métodos da teoria de variáveis complexas,

determinou o conjunto completo das soluções exatas para as quais a suposição de Deutsch é correta. Assim o fez, motivado na frequente asserção de que a introdução de carga espacial afeta fortemente a direção do campo; e as soluções até então formuladas estavam em grande parte baseadas exatamente no contrário.

O conjunto de Smith está descrito por duas fórmulas canônicas envolvendo vários parâmetros livres. Uma delas,

$$z = k \int \exp(nw + \frac{1}{4}bw^2) dw, \quad (2.14a)$$

é uma transformação conforme representando as coordenadas espaciais (x, y) em termos do potencial e fluxo harmônicos (ϕ, ψ) , tais que $z = x + iy$ e $w = \phi + i\psi$. k e n são constantes complexas e b é uma constante real. Em (2.14a) está implícita mais uma constante de integração. A outra fórmula,

$$\Phi = f(\phi) = l \int d\phi \left\{ \int^{\phi} \exp(at + \frac{1}{2}bt^2) dt \right\}^{1/2}, \quad (2.14b)$$

define o potencial de carga espacial, Φ , em função unicamente do potencial laplaciano ϕ . l é uma constante, real ou imaginário puro, dependendo do sinal do radicando; $a = 2\Re(n)$ e t é uma variável (real) de integração. (2.14b) prevê ainda duas constantes de integração.

Com $m = \Im(n)$, a intensidade de campo, a densidade de carga espacial e o ângulo entre a direção do campo e o eixo x no plano z são, respectivamente,

$$E = \frac{l}{|k|} \exp(m\psi - \frac{1}{2}a\phi - \frac{1}{4}b(\phi^2 - \psi^2)) \left\{ \int^{\phi} \exp(at + \frac{1}{2}bt^2) dt \right\}^{1/2}, \quad (2.14c)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{l}{2|k|^2} \exp(2m\psi + \frac{1}{2}b\psi^2) \left\{ \int^{\phi} \exp(at + \frac{1}{2}bt^2) dt \right\}^{-1/2}, \quad (2.14d)$$

$$\arg(dz/dw) = \arg(k) + m\phi + \frac{1}{2}a\psi + \frac{1}{2}b\phi\psi. \quad (2.14e)$$

A dedução de todas as soluções se faz pelas escolhas possíveis dos parâmetros livres. Assim, qualitativamente, $n = b = 0$ dá a solução unidimensional; $\Im(n) = b = 0, a \neq 0$ produz a já mencionada solução bidimensional com equipotenciais em círculos concêntricos. Menos comum é a solução de corrente girante obtida pela escolha $a = b = 0, \Im(n) = m \neq 0$. Neste caso as linhas de campo

($\Im(w)=cte.$) são círculos e as equipotenciais ($\Re(w)=cte.$) são linhas retas irradiando-se de um ponto (o centro dos círculos). Mais três soluções são possíveis com dedução bem mais elaborada. A de Varley [15] que corresponde a $b=0, \Re(n) \neq 0, \Im(n) \neq 0$ e possui equipotenciais em espirais e linhas de campo em espirais que giram em sentido contrário. Por último vêm as duas novas soluções de Smith que correspondem às duas possibilidades $b \neq 0$ ($b > 0$ e $b < 0$). A transformação conforme envolve a função erro ($z=erf(w)$), de modo que as equipotenciais e linhas de campo destas soluções não têm uma forma geométrica comum.

Budd & Wheeler [16] demonstraram que as soluções representadas pelas eqs. (2.14a) e (2.14b) são as soluções separáveis das equações que resultam quando sua transformação hodográfica (a ser descrita em detalhes no cap.IV) é operada na equação de carga espacial, eq. (2.9). As coordenadas de separação são como antes, o potencial e o fluxo harmônicos (ϕ, ψ).

2.5.1 – Emprego de Soluções Exatas

O exposto nesta seção objetiva apenas exemplificar algumas aplicações de soluções exatas das equações de carga espacial em problemas de domínios diferentes. Não há a intenção de exaurir todas as possibilidades nem de descrever em detalhes os exemplos citados.

As soluções exatas são frequentemente empregadas para testar, por comparação direta, a precisão de métodos numéricos visando a resolução numérica de problemas em outras configurações. Eventualmente podem representar o limite assintótico da solução de um problema particular, bastando que a geometria e condições de contorno, no limite, se aproximem daquelas da solução exata considerada.

Uma das soluções congruentes com $b \neq 0$ ($b < 0$ e $n=0$ em (2.14a)) pode ser posta em uma configuração de equipotenciais e linhas que possui marcada semelhança com o problema prático do sistema linha - terra (ou fio-plano aterrado)

em regime de corona. Smith explicitou a característica voltagem-corrente desta solução em termos de funções elementares e em referência direta à geometria linha-terra:

$$V = \frac{V_0}{\chi_0} \int_0^{\chi_0} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \frac{i_A}{\epsilon \mu} \left(\frac{L \chi_0}{V_0} \right)^2 \left[\operatorname{erf}(\chi_0) - \operatorname{erf}(t) \right] \right\}^{1/2} dt, \quad (2.15a)$$

onde χ_0 é a solução positiva de

$$\frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}\chi_0^2)}{\chi_0} - \frac{r}{L} = 0, \quad (2.15b)$$

r é o raio da linha (fio condutor), L é a altura ao plano aterrado e V_0 é a tensão de disparo de corona. A concordância de (2.15a) com a experiência é satisfatória para todos os conjuntos de dados por ele considerados, notadamente se se referem a um fio de superfície polida.

2.6 – Soluções Aproximadas³

Nesta seção, a discussão será desenvolvida em torno de algumas das aproximações que estão embasadas na suposição de Deutsch. Apresentam-se, por último, breves comentários sobre uns poucos procedimentos numéricos destinados ao problema.

As aproximações analíticas compõem parte da literatura preliminar sobre o assunto e constituem o conteúdo dos trabalhos de Deutsch [17], Popkov [18,19,20] e os mais recentes de Sigmond [21] e Walsh, Gallo & Lama [22] entre outros. Invariavelmente tratam com a descarga corona nas geometrias (de grande interesse prático) fio-plano e ponta(hiperbolóide)-plano. Os dados experimentais são interpretados por comparação direta com as características voltagem-corrente calculadas e/ou com as distribuições angulares⁴ da densidade de corrente sobre o

³O termo "aproximadas" é usado para designar aproximações ao problema (de carga espacial) em que não ocorrem domínios em que sejam de fato soluções exatas das equações de carga espacial. Excluem-se do contexto, portanto, as aplicações mencionadas na seção anterior.

⁴Uma distribuição angular expressa J sobre o plano coletor como uma função do ângulo compreendido entre o plano e/ou eixo de simetria dos sistemas com a reta que vai de um ponto mais avançado do emissor ao ponto de observação no coletor.

plano coletor.

O ponto de partida para o cálculo é a relação entre a intensidade do campo com carga espacial, E , e a do campo laplaciano correspondente, E_L , a saber,

$$E = \theta E_L, \quad (2.16a)$$

em que θ é uma função escalar das coordenadas. Seguindo-se a exposição de Sigmond [5], as equações do problema assumem as seguintes formas quando se incorpora a suposição de Deutsch, eq. (2.16a):

— Equação de Poisson, eq. (2.6):

$$\nabla \cdot E = \nabla \theta \cdot E_L + \theta \nabla \cdot E_L = \nabla \theta \cdot E_L = E_L \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (2.16b)$$

s é a coordenada de posição ao longo das linhas de campo.

— $\nabla \times E = 0$, eq. (2.2):

$$\nabla \times E = \nabla \theta \times E_L + \theta \nabla \times E_L = E_L \times \nabla \theta = 0; \quad (2.16c)$$

então $\nabla \theta$ é paralelo a E_L , o que significa $\theta = \theta(\phi) = \text{cte.}$ ao longo das superfícies equipotenciais laplacianas ($\phi = \text{cte.}$).

— Conservação da corrente, eqs. (2.4) e (2.3):

$$\nabla \cdot J = \nabla \cdot (\mu \rho \theta E_L) = \nabla (\mu \rho \theta) \cdot E_L + \mu \rho \theta \nabla \cdot E_L = E_L \frac{\partial (\mu \rho \theta)}{\partial s} = 0,$$

donde se conclui que

$$\mu \rho \theta = J/E_L = C(\tau), \quad (2.16d)$$

com as coordenadas perpendiculares a $\underline{s}$ representadas por $\underline{\tau}$.

Sobre uma linha de campo $ds = \mu E dt$, em que dt é o tempo infinitesimal durante o qual o portador percorre a distância ds . Em termos do tempo de trânsito dos portadores, $t = \int_0^s (1/\mu E) ds$, a eq. (2.11a) pode ser integrada para dar, em grandezas dimensionais,

$$\rho(t) = \frac{\rho_e}{[1 + (\mu \rho_e t / \epsilon)]}, \quad \rho_e = \rho(t=0). \quad (2.16e)$$

Se a densidade de carga ρ_0 torna-se muito grande no eletródio emissor, $\rho(t) \rightarrow (\epsilon/\mu t)$. Por outro lado se $\rho_0 \ll (\epsilon/\mu t)$, então $\rho(t) \approx \rho_0$.

A) Sobre uma superfície equipotencial laplaciana qualquer ($\theta = \theta(\phi = \text{cte.})$) a densidade de carga espacial é, por (2.16b),

$$\rho = \epsilon E_L \frac{\partial \theta}{\partial s} = \epsilon \frac{d\theta}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} E_L = - \epsilon E_L^2 \frac{d\theta}{d\phi},$$

o que substituído em (2.16d) produz

$$J = \mu \rho \theta E_L = -\mu \epsilon \left(\theta \frac{d\theta}{d\phi} \right) E_L^3, \quad \text{ou,}$$

$$J(\tau) \propto E_L^3(\tau). \quad (2.16f)$$

Este é o resultado de Walsh-Gallo-Lama.

B) Combinando as eqs. (2.16b) e (2.16d) encontra-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\rho}{\epsilon E_L} = \frac{C}{\mu \epsilon \theta E_L}. \quad (2.16g)$$

Deutsch tomou neste resultado $\theta=1$, aproximação que corresponde a uma pequena corrente (ou pequena carga espacial injetada), e integrou (2.16g) para obter

$$\theta = \frac{C}{\epsilon} \int_e \frac{ds}{\mu E_L} + \theta_e = \frac{C}{\epsilon} t_L + \theta_e.$$

A d.d.p entre o eletródio emissor (e), ao potencial V , e o coletor (c), aterrado, é dada por

$$V = \int_e^c E ds = \int_e^c \theta E_L ds = \frac{C}{\epsilon} \int_e^c E_L t_L ds + \theta_e V$$

ou, usando outra vez (2.16d),

$$V = \frac{J_c}{\epsilon E_{Lc}} \int_e^c E_L t_L ds + \theta_e V. \quad (2.16h)$$

Para determinar θ_e Deutsch supôs a intensidade de campo sobre o emissor, E_e , igual à do campo sobre a fronteira da região de ionização, $E_o(\tau_e)$, no limiar de corona. Tomou então $\theta_e = E_e/E_L = v_o(\tau_e)/V$, de modo que o nível mais baixo de v_o sobre a superfície⁵ da corona é a tensão de disparo, V_o . Substituindo θ_e em

(2.16h) e resolvendo para J_c , encontra-se a fórmula de Deutsch,

$$J_c = \frac{\epsilon E_{LC}}{\int_0^c E_L t_L ds} (V - v_0), \quad (2.16i)$$

ou, ainda, com $t_L = \int_0^c (1/\mu E_L) ds$, $E_L = -d\phi/ds$, $u = \phi/V$ e $g_L = E_L/V$,

$$J_c = \frac{\mu \epsilon E_{LC} (V - v_0)}{\int_0^c (\phi/E_L^2) d\phi} = \frac{\mu \epsilon g_{LC}}{\int_0^1 (u/g_L^2) du} V (V - v_0). \quad (2.16j)$$

C) Popkov evitou a aproximação de baixa corrente ($\theta=1$) usada por Deutsch e integrou a eq. (2.16g) para θ , encontrando, com t_L definido como antes,

$$\theta \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{C}{\mu \epsilon E_L} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{2Ct_L}{\epsilon} + \theta_e^2}. \quad (2.16k)$$

Também fez $\theta_e = v_0/V$. A d.d.p entre os eletródios é agora,

$$V = \int_e^c E ds = \int_e^c E_L \sqrt{\frac{2Ct_L}{\epsilon} + \left(\frac{v_0}{V}\right)^2} ds. \quad (2.16k)$$

Outra vez com $C = J_c/E_{LC}$, $t_L = \int_0^c (1/\mu E_L) ds$, $E_L = -d\phi/ds$,

$$V = \int_0^V d\phi \sqrt{\frac{2J_c}{\mu \epsilon E_{LC}} \int_0^V (1/E_L)^2 d\phi' + (v_0/V)^2}. \quad (2.16l)$$

As mudanças de variáveis $u = \phi/V$, $g_L = E_L/V$ e $M_c = 2J_c/(\mu \epsilon g_{LC} v_0^2)$ permitem reescrever a eq. (2.16l) na forma adimensional que segue, conhecida por fórmula "L" de Popkov:

$$\frac{V}{v_0} = \int_0^1 du \sqrt{M_c \int_u^1 (1/g_L^2) du' + 1}. \quad (2.16m)$$

Para evitar as dificuldades de cálculo inerentes a (2.16m), Popkov deduziu também uma outra fórmula para determinar $J(\tau_c)$ em correspondência a cada V dado. Do fato de que $\theta = \theta(\phi)$, conforme (2.16c), concluiu que sobre a superfície do coletor (τ_c),

⁵Para a geometria fio-plano em que o fio é muito delgado, faz-se, em última análise, $v_0 = V_0$.

$$CT_L = (J_C/E_{LC}) \int_e^c \frac{ds}{\mu E_L} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad J_C \propto \frac{E_L}{T_L},$$

do que resulta imediatamente a fórmula "T" de Popkov,

$$J_C/I = (E_{LC}/T_L) / \int_{T_C} (E_{LC}/T_L) d^2\tau. \quad (2.16n)$$

D) A distribuição de densidade de corrente de Sigmond [21] é válida para o fluxo em carga espacial saturada e estabelece um limite superior desta densidade para cada voltagem dada, V. Assim, tomando $\rho_e \gg (\epsilon/\mu t)$ em (2.16e) obtém-se a aproximação $\rho \approx \epsilon/\mu t$ ou $\rho_C \approx \epsilon/\mu T$ sobre o coletor. Para uma linha de campo de comprimento L, Sigmond considerou $E \approx V/L$ e $T \approx L/\mu E \approx L^2/\mu V$, com o que chega finalmente a sua fórmula,

$$J_C = \mu \rho_C E \approx \mu \epsilon V^2 / L^3. \quad (2.16o)$$

Para calcular L em (2.16o), Sigmond recorreu à suposição de Deutsch, isto é, tomou o padrão de linhas laplacianas. O seu resultado, em que $J_C \propto E/T$, assemelha-se à fórmula T de Popkov, $J_C \propto E_L/T_L$. Todavia a diferença entre E_L e $E = V/L$ as torna diferentes.

As soluções de campo laplaciano para as geometrias fio-plano e ponta (hiperbolóide)-plano são há muito conhecidas de modo que podem ser usadas para reescrever as distribuições de corrente aqui apresentadas, em forma de distribuições angulares. Isto está feito extensa e detalhadamente no artigo de revisão de Sigmond [5], onde também se encontram comparações gráficas (Figuras 3 e 4) das várias curvas teóricas com as experimentais e algumas poucas exatas calculadas por métodos numéricos (elementos finitos).

No caso das geometrias fio-plano e ponta-plano, concordância mais satisfatória e consistente é encontrada entre os dados experimentais e as distribuições de densidade de corrente ditas do tipo "L"⁶ (distribuições de

⁶Por causa da sua dedução ao longo das linhas de campo essas distribuições são rotuladas por "L". As deduzidas transversalmente às linhas de campo são ditas do tipo "T".

Deutsch, L de Popkov, de Sigmond e outras), principalmente nos pontos de coletor (plano aterrado) mais próximos do plano e eixo de simetria desses sistemas de corona. Entretanto tal concordância parece estar limitada pela própria essência da suposição de Deutsch, porque, como afirma Sigmond [5], “fórmulas calculando a densidade de corrente das condições laplacianas em um ponto local do espaço da corona não poderiam refletir a natureza global das interações da carga espacial”.

Os procedimentos numéricos são, talvez, os métodos mais eficientes de solução do problema de carga espacial. Dão resultados de primeiros princípios e somente estão sujeitos às limitações das técnicas numéricas particulares empregadas.

O procedimento iterativo de Atten [11], muito citado na literatura, consta dos seguintes passos: (1) resolve a eq. (2.6), isto é, $\nabla^2 \Phi = -\rho$, usando uma escolha adequada de ρ (usualmente $\rho = 0$) e os valores do potencial nos eletródios como condição de contorno; (2) a solução determinada para Φ é então substituída na equação da continuidade do fluxo, reescrita por conveniência na forma $\nabla \Phi \cdot \nabla(1/\rho) = -1$, e uma nova distribuição de carga ρ é obtida. Os valores de ρ no eletródio emissor são a condição de contorno. Com a nova distribuição ρ , o processo retorna ao passo (1) e segue até a convergência. O procedimento foi empregado às geometrias já referidas nesta seção. E a principal dificuldade é determinar ρ sobre a região de ionização, isto é, dar a condição de contorno em ρ .

Janischewshyj et.al. [23] e Takuma et.al. [24] recorreram a técnicas de elementos finitos como método de tratamento das equações de carga espacial.

A mais recente novidade dentre os enfoques numéricos do problema de carga espacial é o método hodográfico de Budd & Wheeler [4]. O cap.IV será dedicado à sua descrição. Por enquanto é bastante dizer que consiste essencialmente em inverter o sistema de coordenadas e resolver as equações para a densidade de carga e coordenadas de posição sobre uma malha composta por equipotenciais e linhas de fluxo.

CAPÍTULO III

Solução das Equações de Carga Espacial – uma Aproximação em Séries de Taylor Truncadas

3.1 – Introdução

Neste capítulo esboçaremos uma solução das equações de carga espacial na forma de séries de Taylor truncadas nos primeiros termos. Não pretendemos abranger geometrias e condições de contorno gerais, senão tratar, inicialmente, com um problema extremamente simples como o de um fluxo estacionário de carga espacial unipolar a partir de uma equipotencial plana infinita, então suposta a fonte da carga, com densidade espacial de carga e intensidade de campo prescritos. Para maior clareza, suponhamos que o fluxo se estenda em todo o semiplano superior em um sistema de coordenadas cartesianas onde a fonte está representada pelo eixo x (ou plano xz), conforme Fig.— 3.1.

Fig.— 3.1 Diagrama do domínio de solução.

Posteriormente, nas seções (3.3) e (3.4), faremos uma aplicação da solução para calcular equipotenciais no domínio definido por um par de eletródios planos paralelos, na situação não usual de uma densidade de carga não uniforme no emissor. O teste de validade é a comparação com equipotenciais correspondentes calculadas pelo método hodográfico.

Preliminarmente a densidade $\rho(x,y)$ e as componentes do campo, $E_x(x,y)$ e $E_y(x,y)$, são expandidas em termos de potências de x e y . Os coeficientes são então determinados por substituição das expansões nas eqs. (2.1), (2.2) e (2.4) ou, para termos mais explícitos, nas versões correspondentes

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \rho, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} E_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} E_y = -\rho^2, \quad (3.1c)$$

e exigindo que estas sejam satisfeitas pelo menos em uma aproximação de 2ª ordem. Obviamente a determinação se dá em uma relação formal entre coeficientes por um lado e as condições de contorno por outro, como veremos na próxima seção.

3.2 – Determinação de Coeficientes

Tomando a forma usual da série de Taylor de uma função de duas variáveis em torno do ponto (x_0, y_0) e tendo em mente a notação simplificada $(x-x_0) \rightarrow x$, $(y-y_0) \rightarrow y$, $E_x(x_0, y_0) \rightarrow E_{x0}$, $E_y(x_0, y_0) \rightarrow E_{y0}$ e $\rho(x_0, y_0) \rightarrow \rho_0$, podemos escrever

$$E_x(x,y) = E_{x0} + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + O(3) \quad (3.2)$$

$$E_y(x,y) = E_{y0} + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + O(3) \quad (3.3)$$

$$\rho(x,y) = \rho_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2 + O(3) \quad (3.4)$$

em que os a_i , b_i e c_i ($i=1,2, \dots, 5$) são funções de E_{x0} , E_{y0} , ρ_0 e das derivadas em x , no ponto (x_0, y_0) , de E_x , E_y e ρ . Para que as expansões (3.2) a (3.4) sejam compatíveis com uma equipotencial em $y-y_0=0$, é necessário que

$$E_{x0}(x_0, 0) = a_1(x_0, 0) = a_3(x_0, 0) = 0, \quad \forall x_0. \quad (3.5)$$

Alguns dos coeficientes seguem diretamente da fórmula de Taylor, a saber,

$$a_{2i-1} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{(i)} E_x(x_0, y_0)}{\partial x^{(i)}}, \quad (3.6)$$

$$b_{2i-1} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{(i)} E_y(x_0, y_0)}{\partial x^{(i)}}, \quad (3.7)$$

$$c_{2i-1} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{(i)} \rho(x_0, y_0)}{\partial x^{(i)}}, \quad i=1,2. \quad (3.8)$$

Os demais são obtidos por substituição direta das séries (3.2) a (3.4) nas eqs. de carga espacial (3.1a) a (3.1c) :

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= b_1, \\ a_4 &= 2b_3, \\ a_5 &= \frac{1}{2}c_1 - c_3; \end{aligned} \right\} (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \rho_0 - a_1, \\ b_4 &= c_1 - 2a_3, \\ b_5 &= -b_3 + \frac{1}{2}c_2; \end{aligned} \right\} (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= -\left(\frac{\rho_0^2}{E_{y0}} + \frac{E_{x0}}{E_{y0}} c_1\right); \\ c_4 &= -\left(\frac{2\rho_0}{E_{y0}} c_1 + \frac{1}{E_{y0}} b_1 c_2 + \frac{1}{E_{y0}} a_1 c_1 + \frac{2E_{x0}}{E_{y0}} c_3\right); \\ c_5 &= \left(\frac{1}{2E_{y0}} a_1 - \frac{3\rho_0}{2E_{y0}}\right) c_2 - \frac{1}{2E_{y0}} b_1 c_1 - \frac{E_{x0}}{2E_{y0}} c_4. \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Estes coeficientes estão todos relacionados com a_{2i-1} , b_{2i-1} e c_{2i-1} , $i=1,2$, numa afirmação de que se a densidade de carga ρ_0 e a componente de campo E_{y0} são dados na fonte, como supostamente o são, as grandezas de campo ficam completamente determinadas, em 2ª ordem, em todos os ponto do domínio. A 2ª ordem aqui é apenas uma opção. Poder-se-ia tomar uma ordem mais alta e ainda assim todas as deduções seriam exequíveis apesar do algebrismo crescer.

3.3 – Sistema de Dois Eletrodos Planos

A geometria da família de equipotenciais representadas pela solução em séries, eqs. (3.2) a (3.11), é completamente dominada pela natureza das condições de contorno impostas na equipotencial $\Phi(x,0)=1$ da Fig.—3.1. Para exemplificar, suponhamos que, em todo ponto x do eletrodio emissor, $\rho(x,0)=\rho_0=\text{cte.}$ e $E_y(x,0)=E_0=\text{cte.}$ Como consequência todos os coeficientes se anulam, com exceção apenas de b_2 , b_5 , c_2 e c_5 que têm os valores

$$b_2 = \rho_0; \quad b_5 = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{E_0}; \quad c_2 = -\frac{\rho_0^2}{E_0}; \quad c_5 = \frac{3}{2}\frac{\rho_0^3}{E_0^2}. \quad (3.12)$$

No presente caso as expansões se resumem a

$$\rho(y) = \rho_0 - \frac{\rho_0^2}{E_0}y + \frac{3}{2}\frac{\rho_0^3}{E_0^2}y^2 + O(3), \quad (3.13a)$$

$$E_y(y) = E_0 + \rho_0 y - \frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{E_0}y^2 + O(3). \quad (3.13b)$$

Por simples inspeção podemos verificar que elas encerram os três primeiros termos do desenvolvimento binomial da solução de equipotenciais planas das eqs. (2.13a,b). Assim as expansões representam, neste caso, uma aproximação à solução unidimensional, válida em $0 \leq y \leq 1$ e sob a condição $(2\rho_0/E_0) < 1$.

Para tratar o sistema de dois eletrodios planos, paralelos, em condição não trivial de injeção, admitiremos em princípio que, para algumas densidades particulares dadas, $\rho(x,0)$, haverá pelo menos um campo de injeção, $E_y(x,0)$, sob o qual a solução em séries apresenta mais uma equipotencial plana, digamos $\Phi(x,1)=0$, além daquela já existente $\Phi(x,0)=1$. Estas equipotenciais acomodariam então os dois eletrodios do sistema e as séries resultantes aproximariam a solução do problema (de carga espacial) nessa geometria.

Suponhamos que a carga espacial no emissor tenha a seguinte distribuição

$$\rho(x,0) = \rho_0 \{ 2[1 - \tanh(nx)] + \alpha \}, \quad (3.14)$$

onde ρ_0 , n e α são parâmetros constantes, todos positivos. Esta particular escolha de $\rho(x,0)$ é muito conveniente às nossas finalidades, a começar pela definição da condição de contorno $E_y(x,0)$. Em $x \leq -(6/n)$ e $x \geq (6/n)^1$ a densidade de carga injetada assume os valores assintóticos $(4+\alpha)\rho_0$ e $\alpha\rho_0$, respectivamente, conforme a eq. (3.14). Ora, se os valores correspondentes do campo de emissão forem também constantes, E_0 e E'_0 por definição, fica assegurado que a solução do problema tem equipotenciais todas planas nos subdomínios $x \leq -(6/n)$ e $x \geq (6/n)$. Os valores E_0 e E'_0 serão determinados a partir das constantes ρ_0 e α (eq. (3.14)) de modo que a equipotencial $\Phi=0$ coincida completamente com o plano $y=1$, nas condições da Fig.—3.2.

Fig.—3.2 Condições de contorno na região assintótica

As distribuições de campo nas regiões assintóticas são, pela eq. (2.13b) e no sentido da Fig.—3.2,

$$E(x,y) = E_0 \left\{ 1 + \frac{2[\rho_0(4+\alpha)]}{E_0} y \right\}^{1/2}, \quad x \leq -(6/n), \quad (3.15a)$$

$$E'(x,y) = E'_0 \left\{ 1 + \frac{2(\rho_0\alpha)}{E'_0} y \right\}^{1/2}, \quad x \geq (6/n). \quad (3.15b)$$

Integrando $E(x,y)$ e $E'(x,y)$ de $y=0$ a $y=1$ e lembrando que os resultados assim obtidos são iguais à d.d.p $\Delta\Phi = \Phi(x,0) - \Phi(x,1) = 1$, obtém-se relações do tipo (2.13d), isto é,

$$E_0^3 + \{2[\rho_0(4+\alpha)] - 1\}E_0^2 + \frac{4}{3}[\rho_0(4+\alpha)]^2 E_0 - \frac{3}{2}[\rho_0(4+\alpha)] = 0, \quad (3.16)$$

$$E'_0^3 + [2(\rho_0\alpha) - 1]E'^2_0 + \frac{4}{3}(\rho_0\alpha)^2 E'_0 - \frac{3}{2}(\rho_0\alpha) = 0. \quad (3.17)$$

¹ $\tanh(\pm 6) = \pm 0.999987712 \approx \pm 1$.

Dados ρ_0 e α os valores interessantes de E_0 e E'_0 são a raiz real de (3.16) e de (3.17) respectivamente. Como $\rho_0(4+\alpha) > \rho_0\alpha$, obviamente $E_0 < E'_0$.

As condições de contorno ainda não estão completamente definidas pois resta dar $E_y(x,0)$ no intervalo $-(6/n) \leq x \leq (6/n)$. Em princípio parece intuitivo que uma boa aproximação de $E_y(x,0)$ deve evoluir de E_0 a E'_0 segundo uma tangente hiperbólica também. Consideremos, pois, que

$$E_y(x,0) = E_0 \left\{ 1 + \left(\frac{E'_0 - E_0}{2E_0} \right) \left[1 + \tanh[m(x-d)] \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Se $m(x-d) \leq -6$, $E_y(x,0) \simeq E_0$; também se $m(x-d) \geq 6$, $E_y(x,0) \simeq E'_0$. As constantes m e d serão escolhidas de modo a forçar que a equipotencial $\Phi=0$ agora aproxime o plano $y=1$ em todo o domínio. Este é, aliás, o principal compromisso da condição de contorno em (3.18). E se tal não ocorrer, uma outra expressão para $E_y(x,0)$ deve ser testada².

3.4 – Cálculo de Equipotenciais

Para calcular algumas equipotenciais associadas ao sistema de dois eletródios planos, nas condições descritas na seção anterior, é mais adequado reescrevermos as expansões como segue,

$$E_x(x_0, y) = E_x(x_0, y_0) + a_2 \Delta y + a_5 \Delta y^2, \quad (3.19a)$$

$$E_y(x_0, y) = E_y(x_0, y_0) + b_2 \Delta y + b_5 \Delta y^2, \quad (3.19b)$$

$$\rho(x_0, y) = \rho(x_0, y_0) + c_2 \Delta y + c_5 \Delta y^2, \quad (3.19c)$$

de modo que as grandezas nelas presentes são calculadas nos pontos (x_0, y) .

A discretização do domínio está representada na matriz de pontos da Fig.—3.3. Nela cada ponto nodal é localizado pela dupla de inteiros (i,j) , onde i varia ao longo de linhas horizontais espaçadas por Δy e j ao longo de verticais separadas por Δx .

²Não nos ocorre uma regra para estabelecer a condição de contorno $E_y(x, 0)$ na situação mais geral em que $\rho(x, 0)$ é dada por uma função mais complexa.

As grandezas E_x , E_y e ρ nas eqs. (3.19a,b,c) são calculadas no ponto (i,j) enquanto os desenvolvimentos ocorrem em torno do ponto $(i,j-1)$ de modo que

Fig.—3.3 Discretização do espaço inter-eletródios. Os pontos $(i,0)$ pertencem ao emissor enquanto (i,M) estão sobre o coletor.

$$E_x(i,j) = E_x(i,j-1) + a_2(i,j-1)\Delta y + a_5(i,j-1)\Delta y^2; \quad (3.20a)$$

$$E_y(i,j) = E_y(i,j-1) + b_2(i,j-1)\Delta y + b_5(i,j-1)\Delta y^2; \quad (3.20b)$$

$$\rho(i,j) = \rho(i,j-1) + c_2(i,j-1)\Delta y + c_5(i,j-1)\Delta y^2; \quad (3.20c)$$

$$a_2(i,j-1) = [E_y(i+1,j-1) - E_y(i-1,j-1)] / (2\Delta x), \quad (3.21a)$$

$$a_5(i,j-1) = \frac{1}{4\Delta x} [\rho(i+1,j-1) - \rho(i-1,j-1)] - \frac{1}{2\Delta x^2} [\rho(i+1,j-1) - 2\rho(i,j-1) + \rho(i-1,j-1)]; \quad (3.21b)$$

$$b_2(i,j-1) = \rho(i,j-1) - [E_x(i+1,j-1) - E_x(i-1,j-1)] / (2\Delta x), \quad (3.21c)$$

$$b_5(i,j-1) = -\frac{1}{2\Delta x^2} [E_y(i+1,j-1) - 2E_y(i,j-1) + E_y(i-1,j-1)] + \frac{1}{2} c_2(i,j-1); \quad (3.21d)$$

$$c_2(i,j-1) = -\frac{1}{E_y(i,j-1)} \left\{ \rho^2(i,j-1) + \frac{E_x(i,j-1)}{2\Delta x} [\rho(i+1,j-1) - \rho(i-1,j-1)] \right\}, \quad (3.21e)$$

$$c_5(i,j-1) = \frac{1}{2E_y(i,j-1)} \left\{ \left[\frac{E_x(i+1,j-1) - E_x(i-1,j-1)}{2\Delta x} \right] - 3\rho(i,j-1) \right\} c_2(i,j-1) - \frac{1}{4\Delta x E_y(i,j-1)} [\rho(i+1,j-1) - \rho(i-1,j-1)] a_2(i,j-1) - \frac{E_x(i,j-1)}{2E_y(i,j-1)} c_4(i,j-1); \quad (3.21f)$$

com

$$\begin{aligned}
c_4(i, j-1) = & -\frac{\rho(i, j-1)}{\Delta x E_y(i, j-1)} [\rho(i+1, j-1) - \rho(i-1, j-1)] - \frac{a_2(i, j-1) c_2(i, j-1)}{E_y(i, j-1)} - \\
& - \frac{1}{4 \Delta x^2 E_y(i, j-1)} [E_x(i+1, j-1) - E_x(i-1, j-1)] [\rho(i+1, j-1) - \rho(i-1, j-1)] - \\
& - \frac{E_x(i, j-1)}{\Delta x^2 E_y(i, j-1)} [\rho(i+1, j-1) - 2\rho(i, j-1) + \rho(i-1, j-1)]. \quad (3.21g)
\end{aligned}$$

Os coeficientes estão todos representados por diferenças-finitas de 2ª ordem, numa forma facilmente comparável com as suas expressões originais nas eqs. (3.6) a (3.11). Para assegurar a precisão de 2ª ordem, porém, abandona-se um ponto nos extremos de cada linha horizontal em relação à linha imediatamente inferior. Desta forma, como se vê na Fig.—3.3, cada ponto de desenvolvimento (i, j-1) estará sempre ladeado pelos nodos (i-1, j-1) e (i+1, j-1), para todo ponto de cálculo (i, j), permitindo assim o emprego de diferenças-centrais. Por outro lado isto resulta em um afunilamento do domínio discretizado em direção ao eletródio coletor. Entretanto se se deseja cobrir uma maior extensão desse eletródio, deve-se partir então com um número maior de pontos sobre o emissor³.

Durante o cálculo de $E_x(i, j)$, $E_y(i, j)$ e $\rho(i, j)$, eqs. (3.20a,b,c), os pontos nodais são varridos sistematicamente da esquerda para a direita, a iniciar pela linha horizontal (i, 2), i=2, 3, 4, ..., N-1, e verticalmente de baixo para cima.

O potencial elétrico no ponto (x, y) é por definição

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, 0) - \int_0^y E_y(x, y') dy' . \quad (3.22a)$$

Considerando que a componente $E_y(x, y)$ está ultimamente definida por um conjunto discreto de valores, optamos por aproximar a integral de (3.22a) pela regra do trapézio. Tomando explicitamente $\Phi(x, 0)=1$, o potencial elétrico em cada ponto nodal (i, j) é obtido pelo seguinte algoritmo:

$$\Phi(i, j) = 1 - \sum_{p=2}^j \frac{1}{2} [E_y(i, p-1) + E_y(i, p)] \Delta y , \quad (3.22b)$$

em que i=M, M+1, ..., N-M, N+1-M e j=2, 3, ..., M.

³Se o cálculo partisse com N pontos sobre a linha (i, 1), ele terminaria com no máximo N-2(M-1) pontos sobre a linha (coletor) (i, M).

Finalmente, para cada $x(i)$, calculamos por interpolação linear a ordenada $Y(j)$ da equipotencial $\Phi(x(i), Y(j)) = \Phi_0$, isto é

$$Y(j) = y(j) - [\Phi_0 - \Phi(i, j)] \frac{[y(j) - y(j-1)]}{[\Phi(i, j-1) - \Phi(i, j)]} . \quad (3.23)$$

Para melhor compreensão do procedimento representado em (3.23), é preciso observar que não há necessariamente relação entre as coordenadas $x(i)$ e $y(j)$ do ponto nodal (i, j) com as coordenadas do ponto de equipotencial Φ_0 , a exceção naturalmente de pontos de $\Phi_0=1$ e $\Phi_0=0$. Para simplificar os cálculos, o mais direto é arbitrar $x(i)$ como abscissa comum e sobre a linha de nodos vertical $x(i)$ determinar os valores discretos de potencial mais próximos de Φ_0 : $\Phi(i, j-1)$ no ponto $(i, j-1)$, de coordenadas $x(i)$ e $y(j-1)$, e $\Phi(i, j)$ no ponto $(x(i), y(j))$. A ordenada $Y(j)$ do ponto de potencial Φ_0 é então obtida entre $y(j-1)$ e $y(j)$ por interpolação linear, conforme explicitado na eq. (3.23).

Uma outra observação deve ser feita a cerca do limite superior de j em (3.22b). M deve ser acrescido de algumas unidades (ver programa FORTRAN "Taylor" no Apêndice B para detalhes) de modo a permitir que $Y(j)$ na eq. (3.23) possa assumir valores superiores a 1 e assim revelar por inteiro a amplitude das flutuações da equipotencial $\Phi_0=0$ em torno do plano $y=1$. Em última análise a escolha dos melhores valores de m e d da condição de contorno $E_y(x, 0)$, eq. (3.18), estará determinada pela menor dessas flutuações.

3.5 - Resultados e Discussão

Os nossos resultados estão apresentados em grupos de três gráficos rotulados (os gráficos) invariavelmente pelas letras A, B e C. Cada grupo, a que nos referimos por "Fig.—3.4", "Fig.—3.5", etc, reúne uma amostra de equipotenciais calculadas para um caso particular (uma escolha dos parâmetros ρ_0 , n e α) da densidade de carga injetada, eq. (3.14). Nos gráficos A nós mantemos constante um dos dois parâmetros do campo de injeção (eq. (3.18)), $d=0.0$, e variamos o outro, m , para obter a equipotencial $\Phi_0=0$ mais próxima do plano $y=1$.

Esta equipotencial está marcada com círculos para ser destacada das demais. Nos gráficos B, construídos em escala idêntica à dos gráficos A (1.00V:10.04in, para as ordenadas), repetimos o mesmo tipo de experimentação numérica para selecionar o valor adequado de d , tendo-se mantido m no valor previamente selecionado. É oportuno observar que insistindo com a experimentação numérica não conseguimos refinar estes valores. Por último, nos gráficos C (1V:2.51in, para as ordenadas), temos a amostra de equipotenciais propriamente dita, cujo cálculo é processado tendo em conta os "melhores" m e d .

A eficiência da solução formulada neste capítulo depende fundamentalmente do grau de acerto no qual é construída a condição de contorno no campo elétrico sobre o emissor e , em segundo plano, da ordem do truncamento das expansões (3.2) a (3.4).

O número de termos a somar nas expansões é ditado pelos valores de ρ_0 , isto é, pela magnitude da carga injetada. Considerada a segunda ordem, a variação de ρ_0 através dos valores 0.5, 1.0 e 2.0, como se pode observar da Fig.—3.4 à Fig.—3.10, muda consideravelmente o padrão de equipotenciais do campo, de tal modo que, no último destes casos (Fig.—3.10), a equipotencial $\Phi_0=0.0$ já não pode representar nem mesmo grosseiramente um eletródio plano. Entretanto termos de segunda ordem são o bastante para tratar com os valores de ρ_0 entre 0.0 e 1.0, pois obtem-se equipotenciais de coletor suficientemente planas e os resultados estão em muito boa concordância com os dados que calculamos com base nas ideias do método hodográfico de Budd & Wheeler [4]. Uma comparação está feita na Fig.—3.8(C) onde representamos os dados de referência pelos pequenos círculos.

Está subentendido que enquanto se observa a dependência da solução com os valores de ρ_0 , os demais parâmetros da carga injetada (n e α) são mantidos nos mesmos níveis constantes. Podemos observar por todos os resultados que a solução é também sensível a variações, mesmo pequenas, desses parâmetros. Assim, n , que tem o papel de estreitar ou alargar a extensão de eletródio em que a densidade de carga injetada varia marcadamente, tem relação idêntica com as equipotenciais. Os pequenos valores de n seriam inconvenientes porque o cálculo

deveria cobrir uma maior extensão do eletródio emissor de modo a permitir uso mais correto dos valores assintóticos $\rho_0(4 + \alpha)$ e $\rho_0\alpha$ da carga injetada. Já os grandes valores tornam muito abrupta a variação de $\rho(x,0)$ o que exige um refinamento crescente na discretização do domínio, sobretudo na direção paralela aos eletródios. Na prática, por uma razão que ainda não compreendemos, este refinamento é limitado. O máximo que conseguimos é $\Delta x = 30\Delta y$ e em todos os nossos cálculos tomamos $\Delta y = 0.005$. O parâmetro α mantém com as equipotenciais relação parecida com a existente entre elas e ρ_0 . O crescimento de ambos, α e ρ_0 , faz crescer a carga injetada e o efeito disto é um deslocamento das equipotenciais em direção ao coletor. Porém, como a variação relativa que α produz em $\rho(x,0)$ é bem maior na região $x > 0$, é aí também onde ocorrem, com α , as mudanças mais acentuadas nas equipotenciais.

O ajuste da equipotencial $\Phi_0 = 0.0$ com o plano $y = 1.0$ conduz a relações de dependência muito interessantes entre campo de injeção e a carga injetada. Nota-se que os "melhores" valores de m são quase sempre iguais aos de n ; para ρ_0 e α fixos, o produto $n \times d$ é uma constante; por último, mantendo-se n e α , o crescimento geométrico de ρ_0 por um fator 2 ($\rho_0 = 0.5, 1.0, 2.0$) faz d crescer aritmeticamente com razão 0.4 ($d = 0.6, 1.0, 1.4$).

FIG.-3.6 (C) Equipotenciais calculadas com os parametros $\rho_0=0.5$, $n=0.75$, $\alpha=0.5$; $m=0.70$, $d=0.40$. Os valores de Φ_0 estao indicados sobre cada curva.

CAPÍTULO IV

O Método de Budd & Wheeler e as Equações de Carga Espacial

4.1 - Introdução

O método de Budd & Wheeler [4] para o tratamento das equações de carga espacial envolve aspectos analíticos e numéricos. Quanto aos primeiros, o método reedita as equações em formas mais adequadas a aproximações numéricas tanto quanto precisas usando técnicas de diferenças finitas. Enquanto numérico, o método discute e emprega algoritmos iterativos para resolver o problema algébrico resultante.

A análise está fundamentada na reformulação das equações de carga espacial em termos de um sistema de coordenadas ortogonais planas, cujas curvas coordenadas são as equipotenciais e as linhas do campo da própria carga espacial. Especificamente, faz-se uma transformação¹ do sistema ortogonal de coordenadas espaciais, (x,y) , ao sistema (Φ,ψ) em que Φ é o potencial elétrico da carga espacial e ψ é uma função cujas curvas de nível ($\psi=\text{cte.}$) são definidas como as linhas de campo associadas.

Sob uma tal transformação (a) as equações de carga espacial passam a exprimir x , y , $1/\rho$ e outras grandezas de campo como funções de Φ e ψ — e é de fato nesta perspectiva que elas são resolvidas; (b) os domínios de solução, independentemente da natureza geométrica de suas fronteiras, são sempre transformados em um retângulo no espaço (Φ,ψ) . É necessário, porém, que essas fronteiras possam ser originalmente construídas por segmentos de equipotenciais e de linhas de campo, em princípio conhecidas; (c) as curvas características do sistema das equações de carga espacial tornam-se coincidentes com as curvas coordenadas $\psi=\text{cte.}$, consequência da construção do sistema (Φ,ψ) . Isto tem a

---

¹Por falta de um termo mais aceitável, os autores denominaram esta transformação de "hodográfica" e por extensão também o seu método. Nós preferimos chamá-lo de "Método de Budd & Wheeler".

vantagem de tornar mais fácil a integração da componente hiperbólica do sistema, eq. (2.11a) ou, mais tarde, eq. (4.11b).

Do ponto de vista numérico a transformação $(x,y) \rightarrow (\Phi,\psi)$ equivale à geração de uma grade ortogonal de corpo ajustado. Neste domínio computacional linhas nodais são dispostas paralelas às curvas coordenadas $\Phi=\text{cte.}$ de tal modo que as fronteiras do domínio passam obrigatoriamente por pontos nodais, não existindo necessidade de interpolações, quando da aplicação das condições de contorno. O uso de uma grade ortogonal de corpo ajustado é assim muito importante na resolução numérica de sistemas diferenciais parciais em que as condições de contorno têm influência dominante no caráter das soluções.

4.2 – Condição de Ortogonalidade do Sistema (Φ,ψ)

Em geral uma base de vetores unitários $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ associada a um sistema de coordenadas (Φ,ψ) é definida como

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{1}{h_1}(x_\psi \hat{i} + y_\psi \hat{j}), \\ \hat{e}_2 &= \frac{1}{h_2}(x_\Phi \hat{i} + y_\Phi \hat{j}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

em que h_1 e h_2 , os fatores de escala, são dados por

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= (x_\psi^2 + y_\psi^2)^{1/2}, \\ h_2 &= (x_\Phi^2 + y_\Phi^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

O sistema (Φ,ψ) é dito ortogonal quando em cada ponto (Φ,ψ) $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$; consequentemente as primeiras derivadas parciais de x e y com respeito a Φ e ψ devem satisfazer à relação de ortogonalidade

$$x_\Phi x_\psi + y_\Phi y_\psi = 0. \quad (4.3)$$

Se $d\Phi$ e $d\psi$ são variações infinitesimais em Φ e ψ , então

$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= \Phi_x dx + \Phi_y dy, \\ d\psi &= \psi_x dx + \psi_y dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.4a)$$

Expressando os infinitésimos dx e dy em termos de Φ e ψ e substituindo-os em (4.4a), encontram-se

$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= (\Phi_x x_\Phi + \Phi_y y_\Phi) d\Phi + (\Phi_x x_\psi + \Phi_y y_\psi) d\psi, \\ d\psi &= (\psi_x x_\Phi + \psi_y y_\Phi) d\Phi + (\psi_x x_\psi + \psi_y y_\psi) d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.4b)$$

Igualando os coeficientes de $d\Phi$ e de $d\psi$ entre os lados das duas últimas igualdades, resultam

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Phi \\ y_\Phi \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\psi \\ y_\psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

A solução do sistema (4.5) para Φ_x , Φ_y , ψ_x e ψ_y é

$$\Phi_x = J y_\psi, \quad \Phi_y = -J x_\psi, \quad \psi_x = -J y_\Phi, \quad \psi_y = J x_\Phi, \quad (4.6)$$

em que J é o jacobiano da transformação de coordenadas, isto é,

$$J = \Phi_x \psi_y - \Phi_y \psi_x. \quad (4.7)$$

Os resultados (4.6) permitem reescrever a condição de ortogonalidade (4.3) na forma

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \psi = 0, \quad (4.8)$$

a qual reafirma que o vetor campo elétrico é tangente às curvas $\psi = \text{cte}$.

4.3 – Transformação das Equações sob a Mudança de Coordenadas $(x,y) \rightarrow (\Phi,\psi)$

A condição (4.8) é geralmente satisfeita quando

$$\Phi_x = \lambda \psi_y, \quad \Phi_y = -\lambda \psi_x, \quad (4.9)$$

em que λ é uma função a ser determinada. Isto quer dizer que para definir-se o sistema de coordenadas (Φ,ψ) faz-se necessário mais uma variável, λ .

As equações de carga espacial podem agora ser reescritas na forma de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, a saber,

$$\left. \begin{aligned} -\rho &= \lambda_x \psi_y - \lambda_y \psi_x, \\ \rho^2 &= \rho_x \Phi_x + \rho_y \Phi_y, \\ \Phi_x &= \lambda \psi_y, \quad \Phi_y = -\lambda \psi_x. \end{aligned} \right\} \quad (4.10a)$$

A primeira destas é deduzida da equação de Poisson ($\nabla^2 \Phi = -\rho$) em combinação com as identidades (4.9) e a segunda é uma outra versão da equação característica. Substituindo em (4.10a) as derivadas λ_x , λ_y , ρ_x e ρ_y por suas expressões em Φ e ψ e eliminando do resultado todas as derivadas de Φ e ψ por intermédio das eqs. (4.6) e (4.8), o sistema pode ser simplificado a

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\psi &= -\lambda \rho (x_\psi^2 + y_\psi^2), \\ (1/\rho)_\psi &= -(x_\psi^2 + y_\psi^2), \\ y_\psi &= \lambda x_\Phi, \quad x_\psi = -\lambda y_\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (4.10b)$$

As duas primeiras equações podem ser resolvidas facilmente para dar $\lambda = a(\psi)\sigma$, com $\sigma = 1/\rho$ e $a(\psi)$ uma função arbitrária de ψ , em termos do que se deduzem finalmente

$$\left. \begin{aligned} y_{\psi} &= a(\psi) \sigma x_{\Phi}, \\ x_{\psi} &= -a(\psi) \sigma y_{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.11a)$$

$$\sigma_{\Phi} = -(x_{\Phi}^2 + y_{\Phi}^2). \quad (4.11b)$$

Este conjunto de equações compreende um sistema elíptico, eq. (4.11a), acoplado a uma equação diferencial ordinária para σ — sobre as características $\psi = \text{cte.}$, obviamente. Nele está subentendida a existência da transformação inversa² de (Φ, ψ) a (x, y) , significando fisicamente que para cada valor do potencial, ao longo de cada linha de campo, lhe corresponde um único ponto no espaço.

A intensidade de campo elétrico é facilmente dedutível a

$$|E| = (x_{\Phi}^2 + y_{\Phi}^2)^{-1/2} = a(\psi) \sigma (x_{\psi}^2 + y_{\psi}^2)^{-1/2}, \quad (4.12)$$

sendo a última versão muito importante para se estabelecer a relação entre a carga emitida e o campo de emissão.

É importante observar que o sistema (4.11) também se aplica corretamente à solução do problema harmônico associado ($\rho = 0$), bastando para tanto usar $\sigma = 1$. Para demonstrá-lo é necessário apenas partir da equação de Laplace e transformá-la no resultado $\nabla^2 \lambda_{\Phi} = 0$, por aplicações seguidas das eqs. (4.9), (4.6) e regra da cadeia. A solução deixa de ser $\lambda = a(\psi) \sigma$, quando era $\rho \neq 0$, para ser agora $\lambda = \lambda(\psi) \equiv a(\psi)$.

4.3.1 — O Significado de $a(\psi)$

Conclui-se imediatamente de (4.12) que o produto $|a(\psi)| \sigma$ está relacionado com a natureza da transformação $(x, y) \rightarrow (\Phi, \psi)$ através da razão entre seus coeficientes métricos, ver (4.2),

$$|a(\psi)| \sigma = \frac{h_2}{h_1}. \quad (4.13)$$

²Budd & Wheeler [4] justificam-na apelando a um princípio de máximo para Φ , segundo o qual se $|\nabla \Phi|$ se anula em um ponto isolado do domínio, então ele não deve ser nem um máximo e nem um mínimo local de Φ .

Em decorrência pode-se afirmar seguramente que $|a(\psi)|\sigma$ é, em parte, determinante da geometria do reticulado de campo.

Seria, porém, bem mais interessante buscar o significado de $a(\psi)$ isoladamente. Considerem-se, uma após outra, as definições da densidade de corrente, J , e do gradiente de Φ nas coordenadas (Φ, ψ) :

$$J = \rho E = -\rho \nabla \Phi = -\frac{1}{\sigma} \frac{\hat{e}_1}{h_1} = -\frac{|a(\psi)|}{h_2} \hat{e}_1. \quad (4.14)$$

Aqui se usou (4.13) para eliminar $1/\sigma h_1$ no penúltimo termo. Por outro lado, o fluxo de corrente dI através do elemento de arco $ds = h_2 d\psi$, tomado ao longo de uma equipotencial entre ψ e $\psi + d\psi$, é dado por

$$dI = J \cdot (h_2 d\psi)(-\hat{e}_1) = |a(\psi)| d\psi. \quad (4.15)$$

Portanto, apreende-se que $a(\psi)$ representa, no novo espaço de coordenadas, a taxa de variação do fluxo de corrente por unidade de ψ .

4.3.2 – Condições de Contorno Apropriadas ao Sistema de Equações (4.11) em um Domínio Simplesmente Conexo

Como mencionado no cap.I, os interesses neste trabalho estarão voltados exclusivamente para a solução de problemas de carga espacial em um sistema de dois eletródios planos paralelos e/ou, quando muito, de dois eletródios que nalguma extensão apresentam ainda essa geometria planar.

Em terminologia matemática, cada um desses sistemas constitui o que se define, assim como na Fig.—4.1, um domínio curvilíneo simplesmente conexo. A fronteira $\partial\Omega_0$ representa o eletródio emissor ou a fonte da carga espacial, enquanto $\partial\Omega_1$ simboliza o coletor (em geral aterrado). Estes eletródios são mantidos aos potenciais constantes Φ_0 e Φ_1 , sendo $\Phi_0 > \Phi_1$ e $\Phi_1 = 0$ sem perda de generalidade. Por conveniência, a superfície $\partial\Omega_0$ é descrita parametricamente por $x = lf_1(\theta)$ e $y = lg_1(\theta)$, onde l é uma distância típica entre os eletródios; e as demais,

$\partial\Omega_i$ ($i=1,2,3$), são definidas nas formas $H(x/l, y/l)=0$, $G_2(x/l, y/l)=0$ e $G_3(x/l, y/l)=0$, respectivamente. Sobre os contornos laterais $\partial\Omega_2$ e $\partial\Omega_3$ impõe-se que $\partial\Phi/\partial n=0$, o que equivale a restringi-los simplesmente a linhas de campo e/ou de corrente.

FIG.—4.1 Domínio simplesmente conexo — representação dos sistemas de eletródios estudados.

Antes de estabelecer as condições de contorno em x , y , σ e $a(\psi)$ a que deverão estar sujeitas as eqs. do sistema (4.11), de modo a se ter o problema completamente definido no espaço (Φ, ψ) , é necessário relacionar a variável ψ com a geometria dos sistemas de eletródios. O procedimento é associar cada linha de campo ($\psi=\text{cte.}$) a uma posição sobre a superfície condutora da qual emanam. Isto pode ser feito das mais diferentes formas, contanto que a correspondência seja única. Em particular, para um domínio simplesmente conexo, Fig.—4.1, uma opção³ de Budd & Wheeler [4] é fazer $\psi=\theta$, em que θ é o parâmetro em termos do qual se descreve a superfície emissora $\partial\Omega_0$. Os limites de θ , ou optativamente de ψ (ψ_0 e ψ_1) são definidos segundo a conveniência de cada problema e $0 \leq \Phi \leq 1$, $\psi_0 \leq \psi \leq \psi_1$, define a região retangular em que são mapeados os domínios físicos, como já mencionado no início deste capítulo.

As condições de contorno para as eqs. (4.11) são então, (em grandezas adimensionais),

³Os procedimentos de parametrização em domínios uniconexos e conexos múltiplos estão descritos, respectivamente, nas duas últimas secções de Budd & Wheeler [4] e em Budd & Wheeler [26].

$$F(\psi, |E|, 1/\sigma) = 0, \quad x = f_1(\psi), \quad y = g_1(\psi), \quad \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1, \quad \Phi = 1;$$

$$H(x, y) = 0, \quad \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1, \quad \Phi = 0;$$

(4.16)

$$G_2(x, y) = 0 \quad \text{em } \psi = \psi_1;$$

$$G_3(x, y) = 0 \quad \text{em } \psi = \psi_0.$$

Observe-se que se x e y estão prescritos em $\Phi = 1$, o problema definido por (4.11) juntamente com as condições (4.16) parece estar super determinado. Todavia em nenhum ponto do domínio os valores de $a(\psi)$ ou suas derivadas têm sido fornecidos. A liberdade em se definir x e y como funções de ψ em $\Phi = 1$ é controlada por $a(\psi)$ que passa a ser parte da solução do problema. Em outras palavras, para cada escolha de parametrização da superfície emissora, ter-se-á uma nova função $a(\psi)$ tal que, sempre, $I = A(\psi_0) - A(\psi_1)$, em que $A(\psi) = \int_{\psi} a(\psi') d\psi'$ e I é o fluxo total de corrente entre ψ_0 e ψ_1 .

4.4 - O Método Numérico

Para resolver numericamente as equações de carga espacial (4.11), Budd & Wheeler [4] empregam um esquema padrão, cuja implementação depende da conexidade do domínio original e, mesmo em se restringindo à classe representada na Fig.—4.1, da forma particular que tomam as condições de contorno definidas em (4.16).

O esquema compreende dois passos distintos, porém executados de uma tal forma que, no conjunto, garante-se o acoplamento das componentes (elíptica e hiperbólica) do problema. São eles:

1. Dado $\sigma(\Phi, \psi)$, resolve-se o problema elíptico (4.11a) para $x(\Phi, \psi)$, $y(\Phi, \psi)$ e $a(\psi)$.

Aqui emprega-se invariavelmente uma formulação de diferenças finitas, posto que a transformação $(x, y) \rightarrow (\Phi, \psi)$ permite sempre o uso de uma grade retangular uniforme.

2. Dados $x(\Phi, \psi)$, $y(\Phi, \psi)$ e $a(\psi)$, determina-se $\sigma(\Phi, \psi)$ a partir da equação diferencial ordinária

$$\sigma_{\Phi} = - (x_{\Phi}^2 + y_{\Phi}^2). \quad (4.17a)$$

O processo numérico pode ser iniciado com uma solução tentativa para $\sigma(\Phi, \psi)$ e prossegue em iteração dos passos 1 e 2 até a convergência (se houver). O passo 1 é o mais dispendioso em implementação e processamento e onde também ocorrem as maiores dificuldades numéricas.

A condição inicial em $\sigma(\Phi, \psi)$, necessária à integração de (4.17a), é dada pelas relações funcionais

$$F(\psi, |E|, 1/\sigma) = 0, \quad \Phi=1, \quad (4.17b)$$

$$\sigma a(\psi) = |E|(f_{1\psi}^2 + g_{1\psi}^2)^{1/2}, \quad \Phi=1, \quad (4.17c)$$

em que a última é deduzida da eq. (4.12) em combinação com (4.16). Os valores $\sigma(1, \psi)$ são estritamente positivos por força do que se convencionou para os potenciais do emissor e coletor. Dada a possibilidade de se poder considerar formas bastante gerais para $F(\psi, |E|, 1/\sigma)$, $\sigma(1, \psi)$ poderia ser especificado diretamente de (4.17b) tomando $F(\psi, |E|, 1/\sigma) \equiv \sigma_0(\psi) - \sigma$, ou então de (4.17c), caso se prescrevesse o campo no emissor. A primeira alternativa é o procedimento explicitamente adotado pelos autores.

Budd & Wheeler [4] consideraram o modelo matemático de um domínio simplesmente conexo que pode acomodar ao mesmo tempo a geometria planar e outros sistemas menos convencionais de dois eletródios. O primeiro caso permite uma comparação direta de resultados computados com a solução unidimensional exata descrita pelas equações (2.13). O segundo proporciona uma experimentação numérica mais sistemática, em geometria menos trivial, de algumas situações interessantes, tais como testar diferentes parametrizações do contorno $\Phi=1$ (ou $\partial\Omega_0$ na Fig. — 4.1), formas e magnitudes diferentes da carga injetada ($\sigma_0(\psi)$), etc.

O modelo acima é definido a partir das eqs. (4.16) pondo-se (a) $H(x, y) \equiv x - 1 = 0$ e (b) $x = f_1(\psi) \equiv f(\psi) \rightarrow 0$ quando $\psi \rightarrow \psi_0$ e $\psi \rightarrow \psi_1$. (a) corresponde a um eletródio plano localizado em $x=1$; se $f(\psi) \equiv 0$, (b) dá um segundo eletródio plano em $x=0$ e o conjunto é, obviamente, a geometria planar; se $f(\psi)$ é doutra

forma, (b) dá um segundo eletródio (emissor) não plano mas que ultimamente se torna paralelo ao primeiro. Assim, considerando a parametrização $y = g_1(\psi) \equiv \psi$ e particularizando $G_2(x, y)$ e $G_3(x, y)$ à forma $G_{2,3}(x, y) \equiv x - G(\Phi) = 0$, o problema para x, y, σ e $a(\psi)$ definido pelas eqs. (4.11) satisfaz às condições de contorno (4.16) agora reescritas como

$$\{x, y\} = \{f(\psi), \psi\}, \quad \sigma(\Phi, \psi) = \sigma_0(\psi) \quad \text{em} \quad \Phi = 1;$$

$$x = 1 \quad \text{em} \quad \Phi = 0; \quad (4.17d)$$

$$x = G(\Phi) \quad \text{em} \quad \psi = \psi_0, \psi_1.$$

É importante observar que, se nestas geometrias $\sigma_0(\psi) \rightarrow \sigma_0 = \text{cte.}$, quando $\psi \rightarrow \psi_0$ e $\psi \rightarrow \psi_1$, então na última condição de contorno $G(\Phi)$ é a solução unidimensional em (2.13c,d). Seja como for, as eqs. (4.11a) juntamente com as condições acima definem agora um problema elíptico com condições de contorno do tipo de Dirichlet para $x(\Phi, \psi)$ (ver eq. (4.18b)).

Neste tipo particular de geometrias e condições de contorno, os autores estabelecem o seu esquema numérico na implementação do seguinte algoritmo convergente.

Algoritmo I. *Sejam x_n, a_n e σ_n ($n \geq 1$) os n -ésimos valores iterados de x, a e σ , respectivamente.*

1. *Inicialmente supõem-se, tentativamente, $x_0(\Phi, \psi)$ e $a_0(\psi)$ tal que $\sigma_0(1, \psi)$ é consistente com (4.17b,c).*
2. *Resolve-se para $\hat{\sigma}$ a seguinte equação ordinária,⁴*

$$\hat{\sigma}_\Phi = -(x_\Phi^2 + x_\Phi^2/a^2 \sigma_{n-1}^2), \quad (4.18a)$$

com $\hat{\sigma}(1, \psi)$ determinado por (4.17b,c).

3. *Resolve-se a equação diferencial parcial*

$$(a(\psi)\sigma \hat{x}_\Phi)_\Phi + (\hat{x}_\Phi/a(\psi)\sigma)_\psi = 0, \quad (4.18b)$$

que resulta do desacoplamento das eqs. (4.16a) para $\hat{x}$.

⁴Esta é a forma de (4.11b) quando nela se substitui $y_\Phi = -x_\Phi/(a(\psi)\sigma)$ dado em (4.11a).

4. *Atualizam-se σ e x por*

$$\sigma_n = \omega \sigma_{n-1} + (1 - \omega) \hat{\sigma}, \quad x_n = \omega x_{n-1} + (1 - \omega) \hat{x}, \quad (4.18c)$$

onde ω é um parâmetro de relaxação adequado.

5. *Repetem-se os passos 2 a 4 até a convergência de x e σ .*

6. *Calcula-se e atualiza-se $a(\psi)$ por, respectivamente,*

$$\hat{a} = (x_\Phi|_{\Phi=1} \sigma|_{\Phi=1})^{-1}, \quad a_n = \omega a_{n-1} + (1 - \omega) \hat{a}. \quad (4.18d)$$

7. *Repetem-se os passos 2 a 6 até a convergência.*

A equação para $\hat{a}(\psi)$, em (4.18d), foi obtida da primeira das eqs. (4.11a) calculada sobre o emissor ($\Phi=1$) na parametrização $y = g_1(\psi) \equiv \psi$ (ver eq. (4.16)).

Antes de prosseguir a implementação deste algoritmo, três observações devem ser feitas: (a) não há indicação explícita dos autores sobre como proceder o cálculo de $y(\Phi, \psi)$. É certo, porém, que pode ser feito por meio da equação diferencial

$$y_\Phi = -x_\Phi / (a(\psi)\sigma), \quad (4.18e)$$

com $y(\Phi, \psi)$ satisfazendo às condições de contorno

$$y = \psi, \quad \Phi=1 \quad \text{e} \quad y_\Phi = 0, \quad \Phi=0; \quad (4.18f)$$

(b) geometrias simplesmente conexas mais gerais, com fronteiras em ψ_0 e ψ_1 dadas por linhas de campo, exigem um tratamento numérico diferente. Os autores sugerem idéias sobre um algoritmo mas não consideram estes casos na prática; (c) também não deixam clara a maneira como procederam a discretização das eqs. (4.18a,d,e). As formas (4.19b—22) expostas aqui são a nossa interpretação.

Para implementar o Algoritmo I, as equações a derivadas parciais (4.18a,b,d,e) são adequadamente aproximadas por equações de diferenças finitas e, então, resolvidas nos pontos de uma grade retangular uniforme, tal como a esquematizada na Fig.—4.2.

FIG.—4.2 Grade de discretização das eqs. (4.18a,b,d,e). Os nodos principais “●” formam um arranjo de corpo ajustado de espaçamento h , ($h=|\Delta\Phi|=|\psi|$) cujas malhas estão centradas pelos nodos secundários “○”.

A discretização de (4.18b) emprega diferenças centrais para todas as derivadas ali presentes e é processada sobre a molécula da Fig.—4.3.

FIG.—4.3 Molécula para aproximar a eq. (4.18b) por diferenças finitas.

Se $\hat{x}(i,j)$ é uma aproximação de $x(\Phi,\psi)$ nos nodos principais “●” e $a(j)$ e $\sigma(i,j)$ as de $a(\psi)$ e $\sigma(\Phi,\psi)$ nos nodos secundários “○”, esta discretização produz o seguinte

sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} & \alpha_4(i-1,j) \hat{x}(i-2,j) + \alpha_3(i,j-1) \hat{x}(i,j-2) + A(i,j) \hat{x}(i,j) + \\ & + \alpha_2(i,j+1) \hat{x}(i,j+2) + \alpha_1(i+1,j) \hat{x}(i+2,j) = 0 \end{aligned} \quad (4.19a)$$

com

$$\alpha_1(i+1,j) = \frac{1}{2h^2} [a(j-1) \sigma(i+1,j-1) + a(j+1) \sigma(i+1,j+1)],$$

$$\alpha_2(i,j+1) = \frac{2}{h^2} \{a(j+1) [\sigma(i-1,j+1) + \sigma(i+1,j+1)]\}^{-1},$$

$$\alpha_3(i,j-1) = \frac{2}{h^2} \{a(j-1) [\sigma(i-1,j-1) + \sigma(i+1,j-1)]\}^{-1},$$

$$\alpha_4(i-1,j) = \frac{1}{2h^2} [a(j-1) \sigma(i-1,j-1) + a(j+1) \sigma(i-1,j+1)],$$

$$A(i,j) = -[\alpha_1(i+1,j) + \alpha_2(i,j+1) + \alpha_3(i,j-1) + \alpha_4(i-1,j)],$$

$$i = 2(N-2)2, \quad j = 2(M-2)2,$$

que deve ser resolvido em conjunto com as condições de contorno

$$\hat{x}(0,j) = f(\psi_0 + \frac{j\hbar}{2}), \quad \hat{x}(N,j) = 1, \quad \hat{x}(i,0) = G(1 - \frac{i\hbar}{2}) = \hat{x}(i,M). \quad (4.19b)$$

A solução numérica da equação ordinária (4.18a) emprega a regra trapezoidal e diferenças centrais (quando possível) para aproximar as derivadas x_φ e x_ψ .

FIG.—4.4 Moléculas de diferença para aproximar a eq. (4.18a) — (a) próximo do emissor ($\Phi=1$) e (b) no corpo do domínio (Fig.—4.2).

A discretização de (4.18a) é tomada sobre as moléculas da Fig.—4.4 para dar as fórmulas

$$\sigma_{(1,j)} = \sigma_{(0,j)} + \frac{h}{2} \left[x_{\Phi}^2(1,j) + \frac{x_{\Psi}^2(1,j)}{a^2(j) \sigma_{n-1}^2(1,j)} \right] \quad (4.20a)$$

com

$$x_{\Phi}(1,j) = -\frac{1}{2h} [x(2,j-1) + x(2,j+1) - x(0,j-1) - x(0,j+1)],$$

$$x_{\Psi}(1,j) = \frac{1}{2h} [x(2,j+1) + x(0,j+1) - x(2,j-1) - x(0,j-1)],$$

$$\sigma_{(0,j)} = \sigma_0(\psi_0 + jh/2),$$

$$j = 1(M-1)2.$$

$$\hat{\sigma}(i,j) = \hat{\sigma}(i-2,j) + \frac{h}{2} \left[x_{\Phi}^2(i,j) + \frac{x_{\Psi}^2(i,j)}{a^2(j) \sigma_{n-1}^2(i,j)} + x_{\Phi}^2(i-2,j) + \frac{x_{\Psi}^2(i-2,j)}{a^2(j) \sigma_{n-1}^2(i-2,j)} \right] \quad (4.20b)$$

com

$$x_{\Phi}(i,j) = -\frac{1}{2h} [x(i+1,j-1) + x(i+1,j+1) - x(i-1,j-1) - x(i-1,j+1)],$$

$$x_{\Phi}(i-2,j) = -\frac{1}{2h} [x(i-1,j-1) + x(i-1,j+1) - x(i-3,j-1) - x(i-3,j+1)],$$

$$x_{\Psi}(i,j) = \frac{1}{2h} [x(i+1,j+1) + x(i-1,j+1) - x(i+1,j-1) - x(i-1,j-1)],$$

$$x_{\Psi}(i-2,j) = \frac{1}{2h} [x(i-1,j+1) + x(i-3,j+1) - x(i-1,j-1) - x(i-3,j-1)],$$

$$i = 3(N-1)2, \quad j = 1(M-1)2.$$

que devem ser resolvidas sobre cada linha nodal secundária $j=\text{cte.}$

FIG.—4.5 Moléculas de diferença para aproximar (a) a eq. (4.18e) e (b) a eq. (4.18d).

Uma discussão semelhante se aplica às equações restantes. Tendo-se por base as moléculas de discretização das Fig.—4.5, (4.18d) é aproximada pelas equações

$$a(j) = [\sigma(0,j) x_{\Phi}(0,j)]^{-1} \quad (4.21)$$

com

$$x_{\Phi}(0,j) = -\frac{1}{4h} \{4[x(2,j+1) + x(2,j-1)] - 3[x(0,j-1) + x(0,j+1)] - [x(4,j+1) + x(4,j-1)]\},$$

$$j = 1(M-1)2,$$

e por último, no passo extra, (4.18e) é aproximada por

$$y(i,j) = y(i-2,j) + h x_{\Psi}(i-1,j) / \left\{ \frac{1}{2} [a(j+1)\sigma(i-1,j+1) + a(j-1)\sigma(i-1,j-1)] \right\}, \quad (4.22a)$$

com

$$x_{\Psi}(i-1,j) = \frac{1}{4h} [x(i,j+2) + x(i-2,j+2) - x(i,j-2) - x(i-2,j-2)],$$

$$j = 2(M-2)2, \quad i = 2(N-2)2.$$

$$y(N,j) = y(N-2,j), \quad y(0,j) = y(0,0) + jh/2 = \psi_0 + jh/2. \quad (4.22b)$$

Quando o sistema de equações (4.19a) é posto na forma matricial $Mx=b$, M resulta uma matriz esparsa $[(\frac{N-2}{2})(\frac{M-2}{2})] \times [(\frac{N-2}{2})(\frac{M-2}{2})]$, com $[\frac{5}{4}NM - \frac{7}{2}(N+M) + 9]$ elementos não nulos distribuídos sobre cinco diagonais apenas:— a diagonal principal, as duas secundárias principais e duas outras que se iniciam nas posições $(1, N/2)$ e $(N/2, 1)$ — quando a grade na Fig.—4.2 é varrida da esquerda para a direita e de baixo para cima. Para resolver este sistema os autores empregaram o "Procedimento Fortemente Implícito" de Stone, conforme descrito por Jacobs [25].

Baseados na hipótese de que $x(\Phi, \psi)$ seja uma função razoavelmente suave de (Φ, ψ) , Budd & Wheeler [4] fazem uma breve análise para prever que o seu esquema calcula $x(\Phi, \psi)$ e $\sigma(\Phi, \psi)$ com uma precisão de segunda ordem ($O(h^2)$). Isto foi verificado em experimentações numéricas nas quais se computa uma aproximação para a solução unidimensional exata. Além destas, outras experiências numéricas foram realizadas para se firmar a avaliação de que o algoritmo é de

fato rapidamente convergente, tanto para um certo conjunto de parâmetros de relaxação ω , quanto para diferentes parametrizações da fronteira $\Phi=1$. Em particular, considera-se o caso em que $f_1(\psi)=0.5\exp\{-0.25\psi^2\}$ e $\sigma(1,\psi)=1-0.9\exp(-|\psi|)\sin(3\psi)$, cujos resultados estão mostrados na Fig.—4.6 para uma comparação futura.

FIG.—4.6 O caso $f_1(\psi)=0.5\exp(-0.25\psi^2)$, $\sigma(1,\psi)=1-0.9\exp(-|\psi|)\sin(3\psi)$: (i) mostra linhas de campo e equipotenciais e (ii) as curvas de nível de $\sigma(\Phi,\psi)$. Extraído de Budd & Wheeler [4], pp. 401.

CAPÍTULO V

Injeção Descontínua de Carga Espacial em Geometria Planar

5.1 – Introdução

Neste capítulo nós empregamos o Método de Budd & Wheeler [4] na determinação de uma solução numérica para o sistema das equações (4.11) em uma geometria simplesmente conexa, cujas fronteiras e/ou condições de contorno estão parcialmente definidas pelas seguintes equações (ver notação na sec.4.3.2, cap.IV):

$$x = f_1(\psi) \equiv 0, \quad \Phi = 1; \quad H(x, y) \equiv x - 1 = 0, \quad \Phi = 0. \quad (5.1a)$$

$$y = g_1(\psi) \equiv \psi, \quad \Phi = 1; \quad y_* = 0, \quad \Phi = 0. \quad (5.1b)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\psi, |E|, \sigma) &\equiv \sigma(\Phi, \psi) - \sigma_0 = 0, \quad 0 \leq \psi \leq +\psi_0, \quad \Phi = 1; \\ F(\psi, |E|, \rho) &\equiv \rho(\Phi, \psi) = 0, \quad -\psi_0 \leq \psi < 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.1c)$$

$$G_3(x, y) \equiv x - (1 - \Phi) = 0, \quad \psi = -\psi_0. \quad (5.1d)$$

$$\left. \begin{aligned} G_2(x, y) &\equiv x - \frac{1}{2} \sigma_0 E_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\} = 0, \quad \psi = +\psi_0; \\ E_0^3 + \left(\frac{2}{\sigma_0} - 1 \right) E_0^2 + \frac{4}{3 \sigma_0^2} E_0 - \frac{3}{2 \sigma_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1e)$$

Em (5.1a) definimos um par de eletródios planos, paralelos, com a disposição espacial mostrada na Fig.—5.1(a), enquanto (5.1b) mostra nossa escolha particular de parametrização da superfície emissora (parcialmente emissora), significando dizer que a linha de campo que a intersecta (superfície) no ponto (x^*, y^*) , tal que $(x^*, y^*) = (1, \psi^*)$, é precisamente a curva $\{x(\Phi, \psi^*), y(\Phi, \psi^*)\}$ com $0 \leq \Phi \leq 1$.

O problema em definição se distingue dos já formulados nessa geometria, pela forma particular segundo a qual a carga espacial é injetada no espaço inter-eletródios. Segundo (5.1c)—em que σ_0 e ψ_0 são constantes

positivas — ao invés de se dar ao longo de toda a extensão do eletródio ativo, a emissão é descontínua, só ocorrendo na região compreendida entre $y=0$ e $y=+y_0$ ou, no plano (Φ, ψ) , conforme a Fig.—5.1(b), no segmento $0 \leq \psi \leq +\psi_0$ da equipotencial $\Phi=1$.

O caráter hiperbólico das equações de carga espacial permite estabelecer [26] um importante resultado: — *em uma geometria simplesmente conexa ou uniconexa, se a densidade de carga espacial é nula em alguma região do eletródio emissor, então $\rho \equiv 0$ sobre as linhas de campo que dela emanam e assim regiões de carga espacial nula estarão presentes no espaço entre os eletródios.* Consequentemente a emissão descrita em (5.1c) dá origem a duas regiões distintas no domínio considerado.

FIG.—5.1 (a) Sistema de dois eletródios planos, paralelos, com emissão de carga restrita à extensão $0 \leq y \leq +y_0$, $x=0$ do eletródio ativo; (b) mapeamento do espaço inter-eletródios no plano (Φ, ψ) .

Em uma delas, Γ_1 — que poderíamos chamar de “região de Laplace” — a carga espacial é nula e o campo é descrito apenas pelas equações elípticas (4.11a) com $\sigma(\Phi, \psi) \equiv 1$. A outra, Γ_2 — a “região de Poisson” — é onde ocorre o fluxo de carga propriamente dito.

Como mostramos na Fig.—5.1(a), as regiões Γ_1 e Γ_2 estão separadas ao

longo da curva contínua $\partial\Gamma$. Esta deve coincidir com a linha de campo emanada do último ponto de emissão de carga espacial, $(x,y)=(0,0)$, e cuja determinação constitui o problema central deste capítulo.

Com relação às eqs. (5.1d) e (5.1e), a nossa suposição é a de que, em pontos distantes da fronteira interna $\partial\Gamma$, o potencial elétrico se torne linear na região de Laplace, como deveria ser na ausência total de carga espacial e, na de Poisson, seja a solução unidimensional exata das equações de carga espacial (como seria caso a injeção fosse uniforme em todo o emissor).

A existência de duas regiões distintas no domínio considerado sugere, de imediato, um esquema natural de solução:

1. Dado $x(\Phi, \psi)$ sobre a fronteira comum $\partial\Gamma$, resolvem-se iterativamente as equações de 'carga espacial' em cada uma das regiões Γ_1 e Γ_2 , como se fossem domínios simples isolados, para determinar x_1 , y_1 e $a_1(\psi)$ em Γ_1 e x_2 , y_2 , $a_2(\psi)$ e σ_2 em Γ_2 .

2. Dadas as soluções em Γ_1 e Γ_2 , buscam-se condições de contorno apropriadas para determinar $x(\Phi, \psi)$ e $y(\Phi, \psi)$ sobre $\partial\Gamma$.

Uma implementação adequada deste esquema¹ deve considerar inicialmente as condições que tornariam possível juntar em $\partial\Gamma$ a solução de fluxo estacionário de carga por um lado, com a solução de campo harmônico por outro. Estas condições são deduzidas na sec.5.1 a partir da continuidade do potencial e do vetor campo elétrico através de $\partial\Gamma$. Nessa secção nós também discutimos uma forma aproximada para $x(\Phi, \psi)$ sobre $\partial\Gamma$. Com ela, não só completamos as condições de contorno para o tratamento individualizado dos subdomínios Γ_1 e Γ_2 na sec.5.2, como damos início às iterações necessárias à convergência do esquema.

Para tratarmos os problemas numéricos específicos de Γ_1 e Γ_2 , nós adotamos um procedimento análogo ao que Budd & Wheeler [4] (B&W) dispensaram a um domínio simplesmente conexo. Mais precisamente, nós usamos o seu (deles) Algoritmo I (sec.4.4, cap.IV) com algumas modificações introduzidas nos passos 1 e 2 e no método de relaxação empregado. Estas modificações são discutidas

---

¹Agradecemos aqui as sugestões feitas pelo Prof. José Alberto Cuminato (ICMSC—USP—S. CARLOS).

juntamente com a definição do nosso algoritmo na sec.5.3.

Na consideração isolada de Γ_2 , a simples adaptação das condições de contorno nos permite fazer uma variedade de experiências numéricas diferentes. Numa primeira etapa nós realizamos apenas duas:— uma, para reproduzir qualitativamente os resultados de B&W, nas condições da Fig.—4.6; a outra, para computar os dados com os quais confrontamos a solução desenvolvida no cap.III (sec.3.5, Fig.—3.8(c)). Porém no capítulo VII voltaremos a repeti-las em condições diferentes.

Os nossos resultados numéricos são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

5.2 – As Condições de Contorno em $\partial\Gamma$

No plano (Φ, ψ) , como mostramos na Fig.—5.1(b), a transformação hodográfica de $\partial\Gamma$ ($\partial\Gamma'$) está definida pela curva de nível $\psi=0$. Se $x(\Phi, 0)$ e $y(\Phi, 0)$, com $0 \leq \Phi \leq 1$, definem as coordenadas de um ponto de $\partial\Gamma$ na transformação inversa, então a continuidade do potencial por todos os pontos do domínio permite estabelecer as seguintes condições de contorno [26] em $\partial\Gamma$:

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} x_1(\Phi, \psi_1) = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} x_2(\Phi, \psi_2) = x(\Phi, 0), \quad (5.2a)$$

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} y_1(\Phi, \psi_1) = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} y_2(\Phi, \psi_2) = y(\Phi, 0), \quad (5.2b)$$

ambas com $0 \leq \Phi \leq 1$.

Nestas identidades, bem como nas seguintes, os sub-índices 1 e 2 significam que as correspondentes variáveis tomam seus valores nos subdomínios Γ_1 e Γ_2 , respectivamente.

Por outro lado, como efetivamente Γ_1 e Γ_2 não constituem dois meios de diferentes constantes dielétricas, o vetor campo elétrico deve também ser contínuo através de $\partial\Gamma$. Desta propriedade resultam mais duas condições de

contorno [26], a saber, com $0 \leq \Phi \leq 1$,

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} [x_{1\psi_1}(\Phi, \psi_1) / a_1(\psi_1)] = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} [x_{2\psi_2}(\Phi, \psi_2) / (a_2(\psi_2) \sigma_2(\Phi, \psi_2))] = y_\Phi(\Phi, 0), \quad (5.3a)$$

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} [y_{1\psi_1}(\Phi, \psi_1) / a_1(\psi_1)] = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} [y_{2\psi_2}(\Phi, \psi_2) / (a_2(\psi_2) \sigma_2(\Phi, \psi_2))] = x_\Phi(\Phi, 0). \quad (5.3b)$$

As condições de contorno (5.2) são satisfeitas por construção, já que a curva $\partial\Gamma$ define necessariamente a fronteira entre as duas regiões (rever a Fig. -5.1). Torna-se portanto evidente, que somente as eqs. (5.3) são susceptíveis de implementar o passo 2 do esquema de cálculo em consideração.

Para implementar o passo 1, nós vamos agora deduzir uma solução tentativa para $x(\Phi, 0)$ sobre $\partial\Gamma$. Observemos então, que se não houvesse carga espacial no domínio, a solução seria exatamente o resultado dado em (5.1d). Por outro lado, se a presença da carga se desse pela injeção uniforme ($\rho(1, \psi) = 1/\sigma_0 = \text{cte.}$) em toda a extensão da fonte, (5.1e) daria a forma exata de $x(\Phi, 0)$. Esses resultados definem os limites para $x(\Phi, 0)$ na coexistência das duas situações, dentro dos quais a nossa solução computada deve se encontrar. Portanto, uma aproximação razoável para $x(\Phi, 0)$ parece ser a média das funções em (5.1d) e (5.1e), ou seja,

$$x(\Phi, 0) = \frac{1}{2}(1 - \Phi) + \frac{1}{4}\sigma_0 E_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\}, \quad (5.4)$$

com

$$E_0^3 + \left(\frac{2}{\sigma_0} - 1 \right) E_0^2 + \frac{4}{3\sigma_0^2} E_0 - \frac{3}{2\sigma_0} = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \Phi \leq 1.$$

Vale a pena observar que na prática a função em (5.4) é de fato uma excelente aproximação para as soluções computadas de $x(\Phi, 0)$, e que portanto deve levar a uma considerável redução do número de iterações necessárias à convergência.

5.3 – Abordagem de Γ_1 e Γ_2 como Domínios Isolados

Nesta secção nós reunimos os sistemas de equações e as condições de contorno apropriadas para tratar as regiões Γ_1 e Γ_2 como dois domínios simplesmente conexos independentes, conforme planejado no passo 1 do nosso esquema numérico.

5.3.1 – Região de Laplace

Como a carga espacial é nula em Γ_1 , as equações do problema nesta região se reduzem ao sistema elíptico

$$\left. \begin{aligned} y_{\psi} &= b(\psi) x_{\Phi}, \\ x_{\psi} &= -b(\psi) y_{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

que resultam imediatamente das eqs. (4.11) com a adaptação necessária $\sigma(\Phi, \psi) \equiv 1$ e a mudança de notação $a(\psi) \rightarrow b(\psi)$. Efetivamente não se tratando mais de um problema de carga espacial, as condições de contorno se referem tão somente à parametrização das fronteiras de Γ_1 . São elas, coerentemente com as eqs. (5.1),

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \Phi=1; \quad x=1, \quad \Phi=0; \\ x=1-\Phi, \quad \psi=-\psi_0; \quad x=x(\Phi, 0), \quad \psi=0^-; \end{aligned} \right\} \quad (5.6a)$$

$$y=\psi, \quad \Phi=1; \quad y_{\Phi}=0, \quad \Phi=0; \quad (5.6b)$$

onde 0^- denota o limite superior (Fig.—5.1(a)) da região de Laplace junto à fronteira $\partial\Gamma$. É importante observar que na última condição de (5.6a), $x(\Phi, 0)$ é uma função que está prescrita em $\partial\Gamma$, seja inicialmente pela fórmula em (5.4), seja por sucessivos valores iterados como será mostrado depois.

Na prática, aliás como sugerem B&W no seu Algoritmo I (sec.4.4,

cap.IV), usamos também a formulação que consiste em colocar o problema em três estágios de cálculo diferentes: 1° — determinar $x(\Phi, \psi)$, ainda em função de $b(\psi)$, através da equação

$$[b(\psi)x_\Phi]_\Phi + [x_\Psi / b(\psi)]_\Psi = 0, \quad (5.7)$$

juntamente com as condições de contorno em (5.6a). Esta equação é obtida por eliminação das derivadas y_Φ e y_Ψ entre as duas de (5.5); 2° — calcular $b(\psi)$, em função de x , por meio da identidade

$$b(\psi) = (x_\Phi(1, \psi))^{-1}, \quad (5.8)$$

que se deduz substituindo $y(1, \psi) = \psi$ na primeira equação de (5.5); 3° — obter $y(\Phi, \psi)$, em função de $b(\psi)$ e x , por meio da integração ordinária da última equação de (5.5) ou seja, de

$$y_\Phi = -x_\Psi / b(\psi), \quad (5.9)$$

com a condição inicial $y(1, \psi) = \psi$.

Nós iniciamos os cálculos em Γ_1 usando as duas seguintes funções tentativa para $x(\Phi, \psi)$ e $b(\psi)$, respectivamente,

$$x(\Phi, \psi) = \gamma(\Phi, \psi)(\psi + \psi_0) + (1 - \Phi), \quad 0 < \Phi < 1, \quad -\psi_0 < \psi < 0 \quad (5.10)$$

com $\gamma(\Phi, \psi) = \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 E_0 \left[\left(1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right)^{2/3} - 1 \right] - (1 - \Phi) \right\} / 2 \psi_0$,

$$E_0^3 + \left(\frac{2}{\sigma_0} - 1 \right) E_0^2 + \frac{4}{3 \sigma_0^2} E_0 - \frac{3}{2 \sigma_0} = 0.$$

$$b(\psi) = -1, \quad -\psi_0 < \psi < 0 \quad (5.11)$$

5.3.2 — Região de Poisson

No domínio representado por Γ_2 o problema está completamente definido pelas equações de carga espacial (4.11) juntamente com as condições de contorno abaixo, em que σ_0 é uma constante positiva.

$$x=0, \quad \Phi=1; \quad x=1, \quad \Phi=0;$$

$$x=x(\Phi,0), \quad \psi=0; \quad \left. \vphantom{x=x(\Phi,0)} \right\} \quad (5.12a)$$

$$x=\frac{1}{2}\sigma_0 E_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2} (1-\Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\}, \quad \psi=+\psi_0.$$

$$\sigma(\Phi,\psi)=\sigma_0, \quad 0 \leq \psi \leq +\psi_0, \quad \Phi=1. \quad (5.12b)$$

$$y=\psi, \quad \Phi=1; \quad y=0, \quad \Phi=0. \quad (5.12c)$$

Outra vez a fronteira $\partial\Gamma$ se faz presente pela função prescrita $x(\Phi,0)$. Todas as considerações dispensadas a $x(\Phi,0)$ na secção anterior também se aplicam aqui. Da mesma forma que antes, o cálculo em Γ_2 é posto em estágios distintos para x , $a(\psi)$, σ e y , cujas fórmulas específicas estão expostas no Algoritmo II da sec.5.3 (ou no Algoritmo I do cap.IV).

O cálculo em Γ_2 é iniciado com três funções tentativa. Para $x(\Phi,\psi)$ nós usamos a mesma média ponderada descrita na eq. (5.10). Para $\sigma(\Phi,\psi)$ e $a(\psi)$ empregamos as suas expressões associadas à solução unidimensional exata, a saber,

$$\sigma(\Phi,\psi)=\sigma_0 \left[1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2} (1-\Phi) \right]^{1/3}, \quad 0 < \Phi < 1, \quad 0 < \psi < +\psi_0; \quad (5.13)$$

$$a(\psi)=-E_0/\sigma_0, \quad 0 < \psi < +\psi_0, \quad (5.14)$$

valendo para as constantes E_0 e σ_0 a mesma relação em (5.10).

A consideração de Γ_2 com vistas à repetição dos resultados de B&W, nas condições da Fig.—4.6 do cap.IV, e/ou para gerar os dados de comparação usados no cap.III, é enfocada no sentido mais geral no qual estaremos tratando com um domínio de fronteiras fixas, onde há carga espacial por toda parte. A alusão a Γ_2 deve então ser vinculada ao fato de que usaremos a mesma formulação básica e o mesmo procedimento numérico, enquanto tratamos Γ_2 como um domínio isolado. Assim, tendo em mente o primeiro objetivo, supomos que o domínio inteiro na Fig.—5.1(a) seja uma única região de Poisson e que além disto, o eletródio emissor (emissor por inteiro) seja não plano com uma deformação gaussiana centrada em $y=0$. Nestas circunstâncias nós temos a estrutura de eletródios desejada e

resolvemos as equações de carga espacial com as devidas condições de contorno, quais sejam,

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.5 \exp(-0.25 \psi^2), \quad \Phi = 1; & x &= 1, \quad \Phi = 0; \\ x &= \frac{1}{2} \sigma'_0 E'_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma'_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\}, & \psi &= \pm \psi_0; \end{aligned} \right\} \quad (5.15a)$$

$$\sigma = 1 - 0.9 \exp(-|\psi|) \sin(3\psi), \quad \Phi = 1; \quad (5.15b)$$

$$y = \psi, \quad \Phi = 1; \quad y_* = 0, \quad \Phi = 0. \quad (5.15c)$$

A constante σ'_0 em (5.15a) é um dos dois valores de σ em (5.15b) quando $\psi = \pm \psi_0$. Se $\psi_0 > 4$, $\sigma'_0 \approx 1$ e é por esta razão que $x(\Phi, \psi)$ tem a forma da solução unidimensional exata nas fronteiras $\psi = \pm \psi_0$ (ver em (5.15a)).

Aqui o cálculo é iniciado com as seguintes funções tentativa:

$$\begin{aligned} x(\Phi, \psi) &= \frac{1}{2} \sigma'_0 E'_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma'_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\} + 0.5 \exp(-0.25 \psi^2) \Phi, \\ 0 < \Phi < 1, \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi, \psi) &= \sigma'_0 \left[1 + \frac{3}{\sigma'_0 E_0^2} (1 - \Phi) \right]^{1/3} [1 - 0.9 \exp(-|\psi|) \sin(3\psi)], \\ 0 < \Phi < 1, \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$a(\psi) = -E'_0 / \sigma'_0, \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0. \quad (5.18)$$

Finalmente, para resolver, pelo presente método, o problema colocada no cap. III, tomamos as condições de contorno coerentes com a estrutura de eletródios e o tipo de injeção de carga ali considerados:

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad \Phi = 1; & x &= 1, \quad \Phi = 0; \\ x &= \frac{1}{2} \sigma_{oi} E_{oi} \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma_{oi} E_{oi}^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\}, & 0 \leq \Phi \leq 1, & \psi = -\psi_0; \\ x &= \frac{1}{2} \sigma_{os} E_{os} \left\{ \left[1 + \frac{3}{\sigma_{os} E_{os}^2} (1 - \Phi) \right]^{2/3} - 1 \right\}, & 0 \leq \Phi \leq 1, & \psi = +\psi_0; \end{aligned} \quad (5.19a)$$

$$\sigma = \{ 2 [1 - \tan(0.5\psi)] + 0.5 \}^{-1}, \quad \Phi = 1; \quad (5.19b)$$

$$y = \psi, \quad \Phi = 1; \quad y_{\neq} = 0, \quad \Phi = 0; \quad (5.19c)$$

em que σ_{oi} e σ_{os} são, respectivamente, os valores $\sigma(-\psi_0)$ e $\sigma(+\psi_0)$ dados por (5.19b). A relação entre σ_{oi} e E_{oi} (σ_{os} e E_{os}) é do tipo que vimos usando já desde o começo do capítulo (ver eq. (5.1e)).

Tomamos para soluções tentativa iniciais:

$$x(\Phi, \psi) = (x(\Phi)|_{\psi=-\psi_0} + x(\Phi)|_{\psi=+\psi_0}) / 2, \quad 0 < \Phi < 1, \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0; \quad (5.20)$$

$$\sigma(\Phi, \psi) = \frac{1}{2} [\sigma(-\psi_0) + \sigma(+\psi_0)] [\sigma(\psi)|_{\Phi=1}], \quad 0 < \Phi < 1, \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0; \quad (5.21)$$

$$a(\psi) = -\frac{1}{2} (E_{oi} / \sigma_{oi} + E_{os} / \sigma_{os}), \quad -\psi_0 < \psi < +\psi_0. \quad (5.22)$$

Nas duas últimas expressões $x(\Phi)$ e $\sigma(\Phi)$ estão definidas entre as eqs. (5.19).

5.4 – Os Algoritmos para a Determinação de σ

Antes mesmo de procedermos a construção de um algoritmo mais amplo, visando abranger a totalidade dos cálculos numéricos necessários à determinação da fronteira $\partial\Gamma$, primeiro nós vamos descrever os passos empregados para computarmos, isoladamente, as inúmeras soluções nas regiões Γ_1 e Γ_2 . Como já mencionamos, o que se segue é uma modificação do algoritmo empregado por B&W e cuja implementação será feita pelo uso de diferenças finitas.

Algoritmo II. Sejam, com $n \geq 1$, x_{2n} , σ_n e a_n os respectivos valores iterados de x_2 , σ e $a(\psi)$ em Γ_2 .

1. Prescrevem-se x_{20} , $\sigma_0(\Phi, \psi)$ e $a_0(\psi)$ em Γ_2 , usando as funções tentativa como definidas na sec.5.2.2.

2. Resolve-se a equação ordinária

$$\hat{\sigma}_{\neq} = -(x_{\neq}^2 + x_{\neq}^2 / a^2 \sigma_{n-1}^2) \quad (5.23)$$

para determinar $\hat{\sigma}(\Phi, \psi)$ com as condições iniciais adequadas a cada caso

considerado (ver eqs. (5.12b), (5.15b) e (5.19b)).

3. Atualiza-se $\sigma(\Phi, \psi)$ pela média ponderada

$$\sigma_n = \omega_\sigma \sigma_{n-1} + (1 - \omega_\sigma) \hat{\sigma}, \quad (5.24)$$

em que ω_σ é um parâmetro de sub-relaxação. A atualização é imediata ao cálculo de $\hat{\sigma}(\Phi, \psi)$ em cada ponto.

4. Repetem-se os passos 2 e 3 ponto a ponto até a convergência de $\sigma(\Phi, \psi)$.

5. Resolve-se a equação diferencial de segunda ordem para $\hat{x}_2$

$$(a(\psi) \sigma \hat{x}_{2,\phi})_\phi + (\hat{x}_{2,\phi} / a(\psi) \sigma)_\phi = 0. \quad (5.25)$$

6. Atualiza-se x_2 pela média

$$x_n = \omega_x x_{n-1} + (1 - \omega_x) \hat{x}, \quad (5.26)$$

onde ω_x é um parâmetro de sub-relaxação.

7. Repetem-se os passos 2 a 6 até a convergência de x_2 .

8. Calcula-se e atualiza-se $a(\psi)$ através de

$$\hat{a} = (x_{2,\phi} |_{\phi=1} \sigma |_{\phi=1})^{-1}, \quad a_n = \omega_a a_{n-1} + (1 - \omega_a) \hat{a}, \quad (5.27)$$

respectivamente, onde ω_a é um coeficiente também de sub-relaxação.

10. Repetem-se os passos 2 a 8 até a convergência para $a(\psi)$.

11. Determina-se y_2 através da equação ordinária (sobre as características)

$$y_{2,\phi} = -x_{2,\phi} / a(\psi) \sigma \quad (5.28)$$

com a condição inicial $y(1, \psi) = \psi$.

Ao nível de concepção, este algoritmo se distingue do adotado por B&W em dois aspectos. (a) emprega para o cálculo de $\sigma(\Phi, \psi)$ o método de Gauss e Seidel [27] que em princípio é bem mais rápido do que o de Jacobi; (2) a atualização de $\sigma(\Phi, \psi)$ é feita antes mesmo de se processar o cálculo de $x(\Phi, \psi)$ que na prática é o mais dispendioso em tempo de computação, mesmo se realizado por um método específico como o de Stone. Com esta modificação nós acreditamos ter reduzido o

número de iterações dispensáveis ao cálculo de $x(\Phi, \psi)$, que a cada vez agora toma um valor mais refinado de $\sigma(\Phi, \psi)$.

A nossa interpretação global deste algoritmo é a de um conjunto de operações repetidas, com as quais vai-se gradativamente ajustando uma solução tentativa às condições de contorno do problema. Assim, por exemplo, a repetição do passo 8 implica nas sucessivas relaxações do campo elétrico sobre o eletródio emissor, com consequentes mudanças na distribuição de carga espacial no interior do domínio. Evolutivamente o espectro do campo avança em direção a uma configuração "saturada" final, que é a solução do problema, dentro de uma tolerância pré-estabelecida.

Algoritmo III. Sejam x_{1n} e b_n os n -ésimos valores iterados de x_1 e $b(\psi)$ em Γ_1 ($n \geq 1$).

1. Prescrevem-se x_{10} e $b_0(\psi)$ em Γ_1 por meio das funções tentativa das eqs. (5.10) e (5.11).

2. Calcula-se $\hat{x}_1$ pela expressão

$$(b(\psi) \hat{x}_{1\varphi})_{\varphi} + (\hat{x}_{1\varphi} / b(\psi))_{\varphi} = 0, \quad (5.29)$$

3. Atualiza-se x_1 pela mesma média

$$x_{1n} = \omega_x x_{1n-1} + (1 - \omega_x) \hat{x}_1. \quad (5.30)$$

4. Repetem-se os passos 2 e 3 até a convergência para x_1 .

5. Calcula-se e atualiza-se $b(\psi)$ por, respectivamente,

$$\hat{b} = (x_{1\varphi} |_{\varphi=1})^{-1}, \quad b_n = \omega_b b_{n-1} + (1 - \omega_b) \hat{b}. \quad (5.31)$$

6. Repetem-se os passos 2 e 5 até a convergência de $b(\psi)$.

7. Determina-se y_1 através de

$$y_{1\varphi} = -x_{1\varphi} / b(\psi) \quad (5.32)$$

com a condição inicial $y_1(1, \psi) = \psi$ e a final $y_{1\varphi}(1, \psi) = 0$.

Algoritmo IV. Seja x_n o n -ésimo valor iterado de x sobre $\partial\Gamma$ ($n \geq 1$).

1. Prescreve-se x_0 sobre $\partial\Gamma$ por meio da função tentativa da eq. (5.4).
2. Aplica-se o algoritmo III para calcular x_1 , y_1 e $b(\psi)$ na região Γ_1 .
3. Aplica-se o algoritmo II para calcular x_2 , y_2 , σ e $a(\psi)$ na região Γ_2 .
4. Calcula-se $\hat{x}$ por meio da condição

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} [x_{1\psi_1}(\Phi, \psi_1) / b(\psi_1)] = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} [x_{2\psi_2}(\Phi, \psi_2) / (a(\psi_2)\sigma(\Phi, \psi_2))] = y_\Phi(\Phi, 0). \quad (5.33)$$

5. Atualiza-se x ainda pela média

$$x_n = \omega_r x_{n-1} + (1 - \omega_r) \hat{x}, \quad (5.34)$$

em que ω_r é um parâmetro de sub-relaxação específico para x em $\partial\Gamma$.

6. Repetem-se os passos 2 a 5 até a convergência para x .
7. Determina-se y por meio de

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow 0} [y_{1\psi_1}(\Phi, \psi_1) / b(\psi_1)] = \lim_{\psi_2 \rightarrow 0} [y_{2\psi_2}(\Phi, \psi_2) / (a(\psi_2)\sigma(\Phi, \psi_2))] = x_\Phi(\Phi, 0). \quad (5.35)$$

Esta sucessão de passos equivale de fato permitir à fronteira $\partial\Gamma$ relaxar até que através dela, numa "última" configuração, se tenha satisfeito a condição de continuidade do campo elétrico.

Todos os cálculos descritos no Algoritmo IV são efetuados sobre os nodos do domínio discretizado da Fig.—5.2. As varreduras são feitas sistematicamente da esquerda para a direita e de baixo para cima. Em particular o cálculo da fronteira $\partial\Gamma$ está restrito à zona definida por $(M-3) \leq j \leq (M+3)$.

As equações compreendidas pelos Algoritmos II e III são aproximadas nos mesmos padrões descritos na sec.4.4 do capítulo anterior. Assim, para completarmos a formulação do nosso esquema numérico resta apenas deduzir as equações de diferenças finitas para uma aproximação conveniente das condições de continuidade em (5.33) e (5.34). Considerando a molécula de discretização da Fig.—5.3, nós podemos aproximar a eq. (5.33) pela seguinte identidade de diferença

FIG.—5.2 Discretização do domínio da Fig.—5.1(b). A linha nodal $j=M$ coincide com a fronteira $\partial\Gamma$. Todos os pontos nodais com $0 \leq j < M$ estão em Γ_1 , enquanto os demais em Γ_2 . O espaçamento de grade é $h=|\Delta\Phi|=|\psi|$. $x(\Phi,\psi)$ e $y(\Phi,\psi)$ são aproximados nos nodos principais “●” e as restantes funções nos secundários “○”.

$$\left[\frac{x(i,M) - x(i,M-2)}{h} \right] / b(M) = \left[\frac{x(i,M+2) - x(i,M)}{h} \right] / [a(M)\sigma(i,M)]. \tag{5.36a}$$

O primeiro termo desta relação contém uma ‘diferença para frente’ enquanto o segundo uma ‘diferença para trás’. Trata-se, portanto, de uma aproximação de primeira ordem ($O(h)$).

FIG.—5.3 Molécula de diferença finita para aproximar x e y sobre $\partial\Gamma$.

Não existindo nodos "o" sobre a linha (i, m) , o denominador $b(m)$ é aproximado por extrapolação linear dos correspondentes valores nas linhas $(i, m-1)$ e $(i, m-3)$, isto é,

$$b(m) = \frac{3}{2} b(m-1) - \frac{1}{2} b(m-3), \quad (5.36b)$$

havendo uma expressão análoga para $a(m)\sigma(i, m)$, ou seja,

$$\begin{aligned} a(m)\sigma(i, m) &= \frac{3}{2} a(m+1) [\sigma(i+1, m+1) + \sigma(i-1, m+1)] - \\ &\quad - \frac{1}{4} a(m+3) [\sigma(i+1, m+3) + \sigma(i-1, m+3)]. \end{aligned} \quad (5.36c)$$

Em termos destas definições para $b(m)$ e $a(m)\sigma(i, m)$, os valores de x são calculados sobre $\partial\Gamma$ pela aproximação

$$x(i, m) = \frac{[a(m)\sigma(i, m)x(i, m-2) - b(m)x(i, m+2)]}{[a(m)\sigma(i, m) + b(m)]}. \quad (5.37)$$

Desenvolvendo um procedimento inteiramente análogo, demonstra-se facilmente que os valores de y em $\partial\Gamma$ são aproximados de forma idêntica à de x em (5.37).

No próximo capítulo nós comentaremos como na prática o Algoritmo IV convergiu em cada caso considerado.

CAPÍTULO VI

Resultados e Discussão

6.1 – Introdução

Neste capítulo apresentamos e discutimos os resultados da solução numérica do problema proposto no capítulo anterior, bem como aqueles relativos às duas experiências numéricas ali mencionadas.

Os resultados obtidos para as distribuições $x(\Phi, \psi)$ e $y(\Phi, \psi)$ são apresentados em conjunto na forma usual de reticulados [linhas de campo] $\times$ [curvas equipotenciais]. Nesses reticulados mantém-se uma rígida relação de escalas de modo a preservar as mesmas proporções de cada domínio considerado. Isto é necessário para que a noção de perpendicularidade entre os padrões de linhas de campo e equipotenciais seja transmitida corretamente.

Por uma questão de clareza nós apresentamos as distribuições calculadas de carga espacial em gráficos tridimensionais $\sigma(\Phi, \psi) \times x(\Phi, \psi) \times y(\Phi, \psi)$ ou $\rho(\Phi, \psi) \times x(\Phi, \psi) \times y(\Phi, \psi)$. Os valores de $x(\Phi, \psi)$ e $y(\Phi, \psi)$ são agora recalculados nos mesmos pontos nodais — “o” — que $\sigma(\Phi, \psi)$, por interpolação dos correspondentes valores calculados originalmente nos nodos “●” (ver Fig.—5.2 ou Fig.—4.2). O nosso propósito é mostrar, através desses gráficos, não só a evolução completa das distribuições de carga a partir das suas formas iniciais no eletródio emissor, mas também as possíveis flutuações que a propagação de erros pode introduzir no cálculo de $\sigma(\Phi, \psi)$. Certamente estes detalhes não poderiam ser revelados tão claramente em um gráfico de contorno, muito embora seja esta a forma usual de apresentação das distribuições $\sigma(\Phi, \psi)$.

Mostramos também os resultados obtidos para as distribuições de campo elétrico sobre o eletródio emissor (ver eq. (4.17c)). A importância deste tipo de resultados torna-se evidente no fato de podermos compará-los diretamente com limites assintóticos esperados. Para exemplificar, consideremos o domínio da

Fig.—5.1(b). Na linha de campo $\psi = -\psi_0$, quando suficientemente afastada da região de carga espacial, a solução para o potencial elétrico é da forma $\Phi(x,y) = 1-x$ (ver eq. (5.1d)). Portanto a distribuição de campo sobre o emissor deve tender para a unidade quando $\psi \rightarrow -\psi_0$. No extremo oposto, em $\psi = +\psi_0$, a solução é bem conhecida também e dada pela primeira das eqs. (5.1e). Obviamente, o limite calculado do campo sobre o emissor, quando $\psi \rightarrow +\psi_0$, deveria ser E_0 dado pela raiz real da última equação (5.1e), em que σ_0 é o valor conhecido do inverso da carga injetada também em $\psi = +\psi_0$.

Outros resultados igualmente significativos para o tipo de cálculo que processamos são aqueles relacionados com a condição de ortogonalidade entre linhas de campo e curvas equipotenciais, ou seja, $x_{\#}x_{\#} + y_{\#}y_{\#} = 0$. Invariavelmente para todos os casos estudados, calculamos uma aproximação para o primeiro membro desta identidade em cada ponto nodal “●” dos respectivos domínios. Infelizmente, por se tratar de tabelas numéricas volumosas, deixamos de apresentá-los em toda a sua extensão. Indicaremos porém, em cada caso, o máximo desvio da condição e as regiões do reticulado onde ocorre com maior frequência.

Em todos os cálculos efetuados consideramos um único espaçamento de grade $h = 0.05$. Para ‘reproduzir’ os resultado de B&W nas condições das eqs. (5.15a — 5.18), a que nos reportaremos doravante como CASO I, tomamos na grade da Fig.—4.2 $\psi_0 = -5.0$ e $\psi_1 = +5.0$ ou seja, cobrimos uma extensão de emissor equivalente a 10 distâncias ($l=1$) entre os eletródios. Em outras palavras, consideramos uma rede de nodos “●” de 20×200 malhas ($N=40$ e $M=400$). Uma rede semelhante de 20×240 malhas ($N=40$, $M=480$, $\psi_0 = -6.0$ e $\psi_1 = +6.0$) foi utilizada para o cálculo nas condições das eqs. (5.19a — 5.22) — o CASO II neste capítulo. Lembre-se que neste último caso nós obtemos os dados de comparação da Fig.—3.8(c) do cap.III.

Na determinação da fronteira $\partial\Gamma$, sob as diferentes condições de carga espacial definidas por $\rho_0 = 0.5, 2.0, 4.0, 6.0$ ($\sigma_0 = 1/\rho_0$ em (5.1c)), nós empregamos uma grade idêntica à da Fig.—5.2 com $\psi_0 = 4.0$, $N=40$ e $M=160$. Isto equivale a tomar uma rede de 20×80 malhas para cada uma das regiões $\partial\Gamma_1$ e $\partial\Gamma_2$.

6.2 – Sobre a Convergência dos Algoritmos

Nesta secção nós descrevemos brevemente as condições em que os algoritmos II, III e IV (ver cap.V) serão efetivamente convergentes.

Inicialmente fixamos em 12 o número máximo de iterações permissíveis a qualquer dos cálculos iterativos, significando dizer que além deste número o fluxo de processamento é interrompido. Em cada uma destas interrupções experimenta-se um novo conjunto de tolerâncias e parâmetros de relaxação. A experimentação numérica prossegue até que a convergência seja atingida. Daí em diante faz-se o que poderíamos chamar de ajuste fino de tolerâncias. Nesta fase, se uma maior precisão fosse requerida, seria razoável permitir um aumento conveniente no número máximo de repetições além do valor 12 prefixado.

Na prática estabelecemos os seguintes conjuntos de tolerâncias (δ) e parâmetros de relaxação:

TAB. I— Tolerâncias e parâmetros de relaxação.

CASO I	CASO II	DETERMINAÇÃO DE ∂F
$\omega_\sigma = 0.25,$ $\omega_x = 0.50,$ $\omega_a = 0.25,$ $\delta_\sigma = 0.001,$ $\delta_x = 0.015,$ $\delta_a = 0.020;$	$\omega_\sigma = 0.25,$ $\omega_x = 0.85,$ $\omega_a = 0.75,$ $\delta_\sigma = 0.005,$ $\delta_x = 0.015,$ $\delta_a = 0.020;$	$\omega_r = 0.25,$ $\omega_\sigma = 0.25,$ $\omega_x = 0.25,$ $\omega_a = \omega_b = 0.25,$ $\delta_r = 0.0005,$ $\delta_\sigma = 0.005,$ $\delta_x = 0.015,$ $\delta_a = \delta_b = 0.020.$

Não podemos afirmar, entretanto, que estes conjuntos sejam os ‘melhores’ possíveis uma vez que o seu refinamento está fortemente limitado por tempos de processamento relativamente longos, como explicaremos a seguir.

A determinação de $x(\Phi, \psi)$ demanda, como já mencionamos, a resolução de um sistema de $((N-2)/2) \times ((M-2)/2)$ equações lineares. Enquanto B&W as resolveram pelo “Procedimento Fortemente Implícito” de Stone, que é um dos métodos mais rápidos e de aplicação específica a problemas desta natureza [25], tivemos que empregar as sub-rotinas NAG F04AXF e F01BRF, para cuja

implementação sugerimos o modelo do Apêndice—A. Este método é talvez até mais preciso que o primeiro, porém quanto à taxa de convergência, não possuímos dados de comparação. Considerando o CASO I, em que o sistema linear consiste de 3781 equações, gasta-se cerca de 3.5min de CPU em um computador VAX(vector) 6000—420 para uma única iteração do cálculo de $x(\Phi, \psi)$. Neste exemplo, o laço interno do Algoritmo II (onde se calcula $x(\Phi, \psi)$) toma cinco iterações iniciais seguidas de uma depois, enquanto o laço externo (onde $a(\psi)$ é calculado) toma oito iterações, com um tempo total de 54min de CPU.

6.3 —Resultados Numéricos do Caso I e Discussão

Nas Fig.—6.1(a),(b),(c),(d) temos, respectivamente, o reticulado de campo, a distribuição de carga espacial (inversa) e as intensidades do campo de injeção determinados numericamente para o CASO I.

No reticulado, as equipotenciais estão regularmente espaçadas por $\Delta\Phi=0.10$ e as linhas de campo por $\Delta\psi=0.25$. A condição de ortogonalidade calculada apresenta um desvio máximo da ordem de grandeza de 10^{-3} acentuadamente em duas estreitas regiões. Uma, onde a ocorrência do desvio é mais frequente, está delimitada pelas linhas de campo $\psi=1.40$ e $\psi=2.00$. A outra se estende por duas ou três linhas nas vizinhanças de $\psi=2.80$. Se observarmos as Fig.—6.1(b),(c),(d) não vamos encontrar qualquer comportamento excepcional nestas regiões, nem na distribuição de carga e nem na do campo de injeção. Assim o máximo desvio da condição de ortogonalidade deve estar, neste caso, associado intrinsecamente a erros inerentes ao procedimento numérico

Fig.—6.1(a)

empregado, e não propriamente a valores grandes ou pequenos ou mesmo a mudanças bruscas da carga espacial ou do campo sobre o emissor. Pelos demais pontos do domínio o desvio está entre 10^{-4} e 10^{-7} .

Considerando a magnitude das tolerâncias empregadas nos nossos cálculos, os dados da condição de ortogonalidade já constituem, por si só, um bom resultado, pois desvios mesmo da ordem de 3×10^{-2} ou um pouco maiores seriam perfeitamente toleráveis.

É completa a semelhança entre o reticulado da Fig.—6.1(a) e aquele da Fig.—4.2(i) do cap.IV, determinado por B&W em idênticas condições de carga e geometria de eletródios (eqs. (5.15a,b,c)). Muito embora a comparação seja de natureza qualitativa, é permitido afirmar, neste caso, que os nossos cálculos reproduzem os resultados encontrados por B&W.

FIG.—6.1(b)

Nas Fig.—6.1(b),(c) observa-se comportamento esperado para a distribuição de carga no espaço inter-eletródios, ou seja, um decrescimento monotônico em direção ao coletor, o que se deve a um transporte mais rápido da

carga em região de campo mais intenso. Por outro lado, é de alguma forma surpreendente que a distribuição de carga evolua espacialmente em direção ao outro eletródio, em $x=1$, preservando dominantemente a sua forma inicial no eletródio emissor em $x=0$.

FIG.—6.1(c)

Isto é o que se observa mesmo ao longo das direções sobre as quais a carga apresenta um máximo e/ou um mínimo locais. Tudo ocorre como se o fluxo de carga fosse dominado inteiramente pelo campo externo da estrutura de eletródios.

Da mesma forma, na Fig.—6.1(a), não se observa nenhuma perturbação nas linhas de campo nas regiões em que a carga possui valores relativamente maiores. Pelo exposto, conclui-se que possivelmente se trate ainda de um regime de pequena carga espacial onde a suposição de Deutsch torna-se satisfatória. Entretanto, somente novos cálculos em condições de maior carga espacial e/ou de campos menos intensos nos permitiriam uma resposta definitiva. Voltaremos a este problema no cap. VII.

A distribuição de campo no eletródio fonte, conforme a Fig.—6.1(d), é também da forma esperada.

FIG.—6.1(d)

Por exemplo o pico principal observado na região de $\psi=0$ é devido a duas causas independentes. Por um lado ele é coincidente com a maior depressão da distribuição de carga como deve ser; por outro ele ocorre na região em que os eletródios estão nas vizinhanças da menor distância entre si. Além disto, os seus valores esperados e calculados nos limites são respectivamente, em $\psi=-5.0$: 0.6345 e 0.6514; e em $\psi=+5.0$: 0.6324 e 0.6393.

Uma comparação mais quantitativa entre os nossos cálculos e os correspondentes de B&W poderá ser tomada nos gráficos de contorno de $\sigma(\Phi, \psi)$ mostrados na Fig.—6.1(e),(f). Ali o gráfico (e) é o nosso resultado, sendo o outro, (f), uma cópia ampliada da Fig.—4.6(ii) do cap. IV (sec.4.4). A semelhança entre os

resultados é bem visível.

FIG.—6.1

6.4 —Resultados Numéricos para a Linha de Corrente ar — Discussão

As linhas de campo que emanam da origem em cada um dos reticulados das Fig.—6.2(a),(b),(c),(d) são fronteiras $\partial\Gamma$ (ou linhas de corrente extremas) calculadas numericamente em quatro distintas condições de carga espacial como

explicaremos a seguir.

FIG.—6.2

Da primeira para a última destas figuras, a carga injetada na região de Poisson — a porção superior dos reticulados onde o campo é menos uniforme — tem os valores $\rho_0=0.5, 2.0, 4.0$ e 6.0 . O espaçamento das linhas de campo é agora $\Delta\psi=0.05$, isto é, o próprio parâmetro da grade empregada nos cálculos ou ainda, um vigésimo da separação entre os eletródios. Por outro lado tem-se ainda $\Delta\Phi=0.1$ em todos os casos.

Relembremos aqui que de acordo com nossa parametrização (ver cap. IV), $y=\psi$ no eletródio emissor ($x=0$) e isto explica porque as linhas saem igualmente espaçadas do mesmo. Por outro lado o avanço ao longo de uma linha de campo gera um valor aproximado para o campo elétrico cuja variação, ainda ao longo da mesma linha, daria um valor aproximado para a densidade de carga. De posse destes valores, o deslocamento ao longo das equipotenciais nos forneceria um valor aproximado para $a(\psi)$ e $b(\psi)$, já que na região de Poisson $a(\psi)d\psi=[\text{incremento do fluxo de corrente}]$ e na de Laplace $b(\psi)=[\text{incremento do fluxo de campo elétrico}]$.

Enquanto as Fig.—6.2 se destinam a mostrar a disposição relativa das curvas $\partial\Gamma$ na coletividade das demais linhas de campo (de carga espacial e laplacianas), na Fig.—6.3 nós mostramos estas curvas ($\partial\Gamma$) em comparação entre si, para uma melhor compreensão dos efeitos do crescimento da carga sobre elas.

Na Fig.—6.7 apresentaremos a distribuição de carga espacial correspondente à situação em que $\rho_0=2.0$ e, na Fig.—6.8, as distribuições de intensidades de campo sobre o eletródio emissor.

FIG.—6.3

Nas quatro situações estudadas, as fronteiras $\partial\Gamma$ (calculadas) esboçam os aspectos esperados, em particular, o encurvamento para baixo, mostrando o avanço da carga em direção à 'região de Laplace'. Na ordem das Fig.— 6.2, este avanço corresponde aproximadamente a 1, 3, 3.3 e 3.5 espaçamentos de grade ($h=0.05$) em $x=1$, o que indica uma rápida tendência à saturação, como melhor se vê na Fig.—6.3. Cálculos adicionais foram feitos com $\rho_0=8.0$ e 10.0 para observarmos a progressão no encurvamento das fronteiras $\partial\Gamma$. Os resultados obtidos indicam, porém, que além de $\rho_0=6.0$ a situação não mais se modifica. Isto pode ser completamente explicado pelo fato de não se conseguir aumentar substancialmente a carga espacial entre os eletródios quando ρ_0 cresce além de 6.0 (a condição de d.d.p constante entre os eletródios limita o conteúdo da carga espacial entre estes).

A descontinuidade da carga injetada, por outro lado, produz uma perturbação mais ampla nos padrões de linhas de campo. Ela (a perturbação) se estende, em estimativa grosseira, no total de 1 a 1.5 da distância entre os eletródios quando a carga (ρ_0) varia de 0.5 a 4.0, porém mais profundamente na 'região de Laplace' do que na de Poisson.

O cálculo da condição de ortogonalidade produz resultados satisfatórios para os três menores valores da carga injetada. Na condição $\rho_0=0.5$, ou reticulado de Fig.—6.2(a), o desvio do zero é predominantemente menor do que 10^{-3} . Sobre os pontos de $\partial\Gamma$ e da linha de corrente vizinha, o desvio é sistematicamente da ordem de 10^{-3} . Porém em alguns poucos pontos isolados da região de Laplace, consideravelmente distantes da carga espacial, o desvio assume valores de 2×10^{-2} a 2.5×10^{-2} .

No reticulado da Fig.—6.2(b), em que $\rho_0=2.0$, o desvio na ortogonalidade assume o valor máximo de 3.9×10^{-2} nos pontos iniciais de $\partial\Gamma$, entre as duas primeiras equipotenciais, e cai para 10^{-3} nos pontos seguintes; persiste em 2×10^{-2} no trecho inicial das quatro linhas de corrente imediatamente acima de $\partial\Gamma$.

Com o crescimento da carga aos valores $\rho_0=4.0$ e 6.0 , a ortogonalidade apresenta desvios cada vez maiores. Na Fig.—6.2(c) isto se verifica entre as duas

linhas de campo do topo da região de Laplace às dez seguintes na região de Poisson, notadamente na margem do eletródio emissor acima da fronteira $\partial\Gamma$. Aí os máximos calculados são 9, 7 e 6%. Em $\partial\Gamma$ propriamente, o desvio está abaixo dos 4%. Em zona idêntica do reticulado da Fig.—6.2(d) ($\rho_0=6.0$) calculam-se desvios de até 17%, talvez porque, além da condição de carga $\rho_0=4.0$ as aproximações já não são mais adequadas.

O tempo de processamento dos cálculos cresce a 42min com o crescimento da carga até $\rho_0=4.0$; daí decresce e cai abruptamente a partir de $\rho_0=8.0$, aos 6min gastos quando $\rho_0=0.5$.

FIG.—6.4

As distribuições $x(\Phi, 0)$ calculadas sobre as linhas de corrente extremas ($\partial\Gamma$) estão surpreendentemente em coincidência com os valores fornecidos pela função tentativa, eq. (5.4) (sec.5.1, cap.V), que empregamos para dar início aos cálculos iterativos, seja qual for a condição de carga espacial considerada. Note-se aqui que o número de iterações específicas para a obtenção da distribuição $x(\Phi, 0)$ é zero para $\rho_0=0.5$ e cresce para 4 e 6 quando $\rho_0=2.0$ e 4.0. Neste último caso a distribuição calculada inicialmente se afasta para depois voltar à distribuição tentativa. Diante deste fato passamos a prescrever outras funções tentativa.

FIG.—6.5

A intenção é verificar se nestas novas condições os cálculos ainda convergem à mesma solução $x(\Phi, 0)$ já obtida. Para melhor compreensão do que fizemos, consideremos reescrever a função tentativa da eq. (5.4) sob a forma

$$x_{(1)}(\Phi, 0) = \frac{1}{2}\{1 - \Phi\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_0 E_0\left[\left[1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2}(1 - \Phi)\right]^{2/3} - 1\right]\right\}. \quad (6.1)$$

A função do primeiro par de chaves desta equação é a reta da Fig.—6.4, enquanto a do segundo par é a curva superior; os círculos descrevem $x_{(1)}(\Phi, 0)$ e a curva central com eles coincidindo é a solução a que convergiu o cálculo inicial.

FIG.—6.6

A situação de carga espacial é $\rho_0=0.5$. Um segundo cálculo é iniciado com a função tentativa

$$x_{(2)}(\Phi, 0) = \{1 - \Phi\} \quad (6.2)$$

e viu-se que não há convergência, pelo menos quando usamos o mesmo conjunto de parâmetros $\{\omega, \delta\}$ do cálculo precedente. No terceiro cálculo é tomada a função

$$x_{(3)}(\Phi, 0) = \frac{1}{2}\{1 - \Phi\} + \frac{1}{2}x_{(1)}(\Phi, 0). \quad (6.3)$$

A convergência é alcançada se mudarmos ω_x de 0.25 para 0.5 (ver penúltima coluna da TAB.1, pp. 70) e os resultados estão mostrados na Fig.—6.5: as curvas inferior e superior são como antes na Fig.—6.4; a segunda, de baixo para cima, é $x_{(3)}(\Phi, 0)$, a terceira é a solução a que convergiu o cálculo enquanto os círculos são agora a solução calculada da Fig.—6.4 (ali em curva contínua). Por último, no quarto cálculo, escolhemos a função tentativa

$$x_{(4)}(\Phi, 0) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_0 E_0\left[\left(1 + \frac{3}{\sigma_0 E_0^2}(1 - \Phi)\right)^{2/3} - 1\right]\right\} + \frac{1}{2}x_{(1)}(\Phi, 0). \quad (6.4)$$

Os parâmetros sendo ainda os mesmos do terceiro cálculo, verificamos que o tempo de processamento aqui é bem menor que o do caso precedente. Na Fig.—6.6 a segunda curva de cima para baixo é $x_{(4)}(\Phi, 0)$, a terceira é a última solução na convergência e os círculos, outra vez, como na Fig.—6.5.

A experimentação numérica descrita demonstra que o nosso Algoritmo IV não é suficientemente estável para nos permitir afirmar, conclusivamente, que a função tentativa da eq. (6.1) é a expressão analítica das distribuições $x(\Phi, 0)$ sobre $\partial\Gamma$. Entretanto em um ponto é decisiva: — as soluções a que convergiram os últimos dois cálculos não são efetivamente as funções tentativa iniciais prescritas e elas se aproximam sistematicamente por ambos os lados da solução “esperada”. Se variássemos outra vez ω_x de 0.5 para 0.25 nas últimas iterações do cálculo de $x(\Phi, 0)$, provavelmente melhor resultado seria obtido. Então é razoável e intuitivo admitir apenas que a função na eq. (6.1) é uma boa aproximação para as distribuições $x(\Phi, 0)$.

Os resultados encontrados para a distribuição da carga espacial na região de Poisson é de grande regularidade. Como se pode observar na Fig.—6.7, ela tem simetria planar até próximo à descontinuidade onde experimenta um crescimento suave indicando a presença de um campo elétrico menos intenso, como se pode inferir dos padrões mostrados nas Fig.—6.2.

FIG.—6.7

Antes de comentar sobre os resultados da Fig.—6.8, é importante relembrarmos que a intensidade de campo elétrico pode ser calculada por uma das duas seguintes equações:

$$|E| = (x_{\Phi}^2 + y_{\Phi}^2)^{-1/2}, \quad (6.5)$$

$$|E| = a(\psi)\sigma(\Phi, \psi)(x_{\psi}^2 + y_{\psi}^2)^{-1/2}. \quad (6.6)$$

Quando a última é aplicada aos dois distintos segmentos do eletródio emissor (ver Fig.—5.1(b)), reduz-se às expressões muito simples

$$|E| = a(\psi)\sigma(1, \psi), \quad 0 \leq \psi \leq +\psi_0 \quad (6.7)$$

e

$$|E| = b(\psi), \quad -\psi_0 \leq \psi < 0. \quad (6.8)$$

Foi com base nas eqs. (6.7) e (6.8) que realizamos o cálculo do campo, até porque, em princípio, são preferíveis à eq. (6.5) por não possuírem termos em derivadas.

FIG.—6.8

As distribuições de campo para os diversos conteúdos de carga espacial tendem rapidamente à intensidade unitária e por esta razão estão em acordo com o que esperávamos na região não ativa do eletródio emissor. A TAB.II abaixo permite a comparação entre os valores esperados e os calculados no limite assintótico $\psi \rightarrow 4.0$, sobre o segmento propriamente emissor ($0 \leq \psi \leq 4.0$).

TAB. II — Valores esperados e calculados do campo elétrico sobre o emissor em $\psi \rightarrow 4.0$.

ρ_0	E(4)	
	V. esperado	V. calculado
0.5	0.7871	0.7885
2.0	0.4385	0.4730
4.0	0.2585	0.3583
6.0	0.1800	0.3202

Como podemos daí constatar, há uma diferença crescente entre estes valores à medida em que a carga espacial vai aumentando e supera os 10% após $\rho_0 = 4.0$.

Uma explicação plausível para a discrepância acima, pode ser formulada a partir da eq. (6.7). Ora, nessa equação a intensidade de campo depende de uma única grandeza calculada iterativamente, que é $a(\psi)$. Assim, se os valores do campo estão acima dos esperados, é porque a aproximação empregada para $a(\psi)$ também fornece valores majorados.

FIG. —6.9

Para evidenciar melhor este fato, calculamos o campo elétrico ao longo da linha $\psi=3.825$, abaixo do limite $\psi=4.0$. Consideramos as situações de carga espacial $\rho_0=0.5$, 2.0 e 4.0 cujos resultados estão mostrados nas Fig.—6.9, 6.10, 6.11, respectivamente. As curvas contínuas destas figuras são os valores obtidos pela solução exata — eq. (2.13b) do cap.II, os círculos são os valores calculados por uma aproximação de segunda ordem da eq. (6.5) enquanto os triângulos representam os valores de uma idêntica aproximação da eq. (6.6).

FIG.—6.10

Para $\rho_0=0.5$ (Fig.—6.9) estes três diferentes cálculos são concordantes entre si. Porém, para $\rho_0=2.0$ e 4.0, somente os dois primeiros ainda fornecem os mesmos resultados, enquanto o terceiro, aquele que envolve a distribuição $a(\psi)$, resulta sempre em valores mais elevados, comprovando-se a nossa suposição.

FIG.—6.11

A eq. (6.5) também não oferece uma boa aproximação para o campo sobre o eletródio emissor, pelo menos quando se envolve na sua discretização um número pequeno de pontos nodais. Por esta razão ela não foi usada para cálculo alternativo.

6.5 – Resultados Numéricos do Caso II – Discussão

Nesta secção nos limitaremos à apresentação de apenas três resultados típicos obtidos para o CASO II: o padrão de campo na Fig.—6.12, os dados sobre a condição de ortogonalidade e os valores do campo de emissão, os quais representamos pela curva pontilhada da Fig.—6.13. Nesta mesma figura a curva contínua dá o correspondente campo que tomados como condição de contorno no

problema do Cap. III, isto é,

$$E(y) = E_0 \left\{ 1 + \left(\frac{E'_0 - E_0}{2E_0} \right) [1 + \tanh(\frac{1}{2}(y-1))] \right\}, \quad (6.9)$$

em que $E_0 \simeq E(-6) = 0.233$ e $E'_0 \simeq E(+6) = 0.783$ são os valores esperados.

No reticulado (Fig.—6.12), as sete primeiras equipotenciais a partir de $x=0$ estão espaçadas igualmente por $\Delta\Phi=0.15$ e as duas últimas por $\Delta\Phi=0.1$. As linhas de campo estão incrementadas de $\Delta\psi=0.25$.

Os desvios verificados na condição de ortogonalidade são da ordem de 10^{-3} ou menores para mais de 99% dos pontos nodais internos. Todavia valores de 7% são observados precisamente nas linhas de campo quase limites, em $\psi = -5.950$ e 5.950 , não havendo uma explicação aparente para tal irregularidade.

Outra vez voltamos a enfatizar que é satisfatória a concordância entre as equipotenciais determinadas pelos dois diferentes tratamentos numéricos descritos neste trabalho, como se pode rever na Fig.—3.8(c), cap.III. Apesar disto, a já mencionada falta de precisão no cálculo do campo sobre o eletródio emissor, via eq. (6.7), torna completamente dispensável que igual concordância deva existir entre as curvas da Fig.—6.13. Mesmo assim, há um comportamento muito semelhante entre estes resultados: verifica-se que a curva pontilhada é bem aproximada pela eq. (6.9) quando nesta E_0 e E'_0 são os valores extremos calculados 0.369 e 0.698 respectivamente.

FIG.—6.12

Por último, ainda com relação aos dados da Fig.—6.13, é necessário dizer que na região do emissor onde a carga é cerca de 0.5, próximo a $y=6.0$, o valor calculado do campo é bastante diferente do esperado

(0.783), ao contrário do que se vinha observando regularmente em todos os casos já estudados.

FIG.—6.13

6.6 – Considerações Finais

Devemos informar, inicialmente, que além dos escassos resultados publicados por B&W, o nosso elemento de comparação, quando possível, tem sido a solução unidimensional do problema de carga espacial em geometria planar.

Com relação aos primeiros, há fortes evidências de termos chegado a resultados semelhantes no que diz respeito ao cálculo de algumas grandezas de campo e isto nos encoraja ao estudo das outras situações. Quanto a parâmetros de relaxação, tolerâncias e tempos de processamento não podemos traçar qualquer paralelo porque B&W não dão informações precisas sobre estes elementos. Também

não temos qualquer informação sobre que funções tentativa teriam usado ou se a convergência do seu algoritmo (deles) teria alguma dependência marcante ou não com essas funções. Enfim, B&W se ativeram muito pouco ao estudo de domínios simplesmente conexos.

Os nossos cálculos, a concluir de algumas comparações com a solução unidimensional exata, direta ou em limites assintóticos, têm se mostrado mais eficazes em condições de pequena carga espacial. Nas situações de maior carga a convergência se torna mais delicada e os resultados passam a ter maior dependência com as funções tentativa empregadas para as grandezas calculadas iterativamente. Por outro lado, dada a natureza global do cálculo, a se traduzir pelos sistemas lineares para a distribuição $x(\Phi, \psi)$, podemos garantir uma certa estabilidade aos resultados embora discrepâncias localizadas sejam observadas.

CAPÍTULO VII

A Suposição de Deutsch em Geometrias Simplesmente Conexas

Enquanto analisávamos os resultados apresentados na sec.6.3 do capítulo anterior, não constatamos qualquer ação visível da carga espacial sobre a direção das linhas do campo em que era transportada. De fato o padrão da Fig.—6.1(a) somente é identificável com um campo de carga espacial pela distribuição não uniforme das equipotenciais nos limites onde os eletródios então considerados tornam-se paralelos. O mesmo ocorre dentro da precisão visual com os padrões de campo obtidos no estudo do cap.III e depois repetido no cap.VI, Fig.—6.12 (sec.6.5).

Para evidenciar mais diretamente estas observações, nós vamos reapresentar o espectro de campo da Fig.—6.1(a) ao lado do correspondente para o campo harmônico (laplaciano) do mesmo sistema de eletródios, Fig.—7.1(b). Vê-se então que a presença da carga no espaço inter-eletródios tão somente modifica a distribuição das equipotenciais ao passo que as linhas de campo permanecem inalteradas. Não há dúvida, pois, de que estamos aqui — como nos casos citados acima — diante de uma situação onde a conhecida suposição de Deutsch tem efetiva aplicabilidade.

Se por um lado a independência das linhas de campo com a carga espacial pode ensejar opção diferente de cálculo para o problema, talvez à guisa dos trabalhos pioneiros referidos no cap.II, por outro não pode naturalmente ser tomada como a regra geral, devendo se limitar estritamente a certas condições particulares em que se tem “baixos” conteúdos de carga fluindo em campos relativamente “elevados” impostos pela geometria de eletródios. Por esta razão seria interessante mostrar pelo menos um caso simples, próximo aos já estudados, onde a carga espacial distorce as linhas de campo em relação às laplacianas do mesmo sistema de eletródios. No que segue falaremos brevemente de duas

experimentações numéricas realizadas com este objetivo.

FIG.—7.1

Inicialmente consideramos o sistema de eletródios plano — plano com deformação gaussiana centrada em $y=0$ e as densidades de carga (inversas) no emissor dadas por

$$\sigma(1, \psi) = 0.5 - 0.3 \exp(-0.5(\psi \pm 1)^2). \quad (7.1)$$

De acordo com a eq. (7.1), tem-se sobre o eletródio ativo um patamar de densidade de magnitude igual a 2.0, sobre o qual se superpõe um pico em $\psi = \pm 1$ (ou $y = \pm 1$)

de valor igual a 5.0. Os resultados calculados ainda não revelaram o efeito esperado da distorção das linhas de campo nas proximidades de $y = \pm 1$; talvez porque os picos da carga tenham sido colocados ainda muito próximos do centro do emissor ($y=0$), onde o campo é muito intenso. Apesar disto, um efeito interessante foi observado na distribuição da carga: o pico de carga se desloca para o coletor buscando a direção que virtualmente leva ao centro do emissor imagem refletido no plano coletor.

Finalmente retomamos os cálculos no sistema de dois eletródios planos infinitos, onde a contribuição de campo externo é bem mais regular, e estipulamos como condição de contorno a densidade de carga da forma

$$\sigma(1, \psi) = 1 - 1.1988 \exp(-|\psi|) \sin(3\psi). \quad (7.2)$$

Esta densidade tem um extremo de carga mais pronunciado do que o usual dado na eq. (5.15b) (sec.5.3.2, cap.V), o qual atinge o valor 4.0 nas proximidades de $y = \psi = 0.4163$.

Nas Fig.—7.2(a),(b),(c) estamos mostrando em escala adequada diferentes porções do espectro de campo calculado numericamente. A ação da carga espacial prontamente se manifesta sobre as linhas de campo com origem nas vizinhanças de $y = \psi = 0.4163$ e é um fenômeno grandemente localizado, como já havíamos observado em condições diferentes nas Fig.—6.2. Além desta visível repulsão entre as linhas de campo, o padrão também esboça um comportamento oscilatório imposto pela densidade de carga, indicando que a disposição geométrica das linhas necessariamente é diferente do que seria no caso puramente laplaciano.

Sugestões para Trabalho Futuro

1. Quanto à constatação feita no final da sec. 6.4 do cap.VI de que o cálculo numérico então empregado para a determinação da distribuição $a(\psi)$ fornece em geral valores maiores do que os esperados, propõe-se a seguinte revisão: após obter-se uma solução numérica para todas as grandezas pertinentes via convergência do Algoritmo II (ver cap.V, sec. 5.3), os valores de $a(\psi)$ sejam corrigidos, em princípio, através do emprego combinado das eqs. (6.5) e (6.6). Pela primeira dessas equação calcula-se $E(\Phi, \psi)$ em cada ponto nodal "●" de cada linha de fluxo ($\psi = \text{cte.}$). Os valores obtidos serão transportados para a segunda equação que por seu turno permitirá recalcular um valor médio para $a(\psi)$ sobre as linhas consideradas. Estas operações definiriam um 12º passo no Algoritmo II que poderia ser repetido convenientemente algumas vezes. Nessa fase e/ou precedentemente, o procedimento de Stone [25] poderia ser implementado para economia de tempo. Poder-se-ia também aumentar o número de pontos na discretização da equação que vimos usando para o cálculo iterativo de $a(\psi)$ (eq. (4.21)) e experimentar valores do espaçamento de grade maiores e menores do que $h=0.05$.

2. Empregar um outro método numérico tal como o de Newton e Raphson em que $x(\Phi, \psi)$, $y(\Phi, \psi)$ e $a(\psi)$ seriam tratados como as variáveis, obtendo assim novos resultados para uma comparação com os presentes.

3. Estudar numericamente o comportamento das distribuições de carga espacial como uma função da distância tomada ao longo das linhas de corrente. Uma hipótese inicial de trabalho é supor que essa função é do tipo da que se determina exatamente no problema do fluxo de carga entre dois eletrodos planos, paralelos e infinitos, produzido por injeção uniforme de carga espacial.

4. Recentemente [28] fizemos um cálculo aproximado e intuitivo de linhas de corrente extremas, $\partial\Gamma$, em um sistema de eletrodos e em condição de injeção de carga espacial ambos semelhantes aos descritos na Fig.—5.1(a). Consideramos, de início, uma parede impermeável às cargas colocada em $y=0$, de

$x=0$ até $x=a$ (esse caso os eletródios estavam separados por $\Delta x=a$ e não $\Delta x=1$ como na Fig.—5.1(a)). A componente de campo, $E_{xL}(x,0)$, tangente à parede, foi deduzida supondo que na região de Poisson e devido à carga superficial acumulada na parede, o campo fosse como num dielétrico infinito sob injeção uniforme de carga por toda a extensão do eletródio (emissor); a componente transversal, $E_{yL}(x,0)$, foi calculada pelo uso da função de Green do tipo Dirichlet para o problema da semibanda definida pela região de Laplace. Na ausência da parede o campo e a distribuição de carga espacial são distorcidos. A carga injetada penetra numa faixa do que antes era região de Laplace e delimita uma linha de corrente extrema. Sugerimos, intuitivamente, que nessa linha as cargas se deslocariam sob a ação de um campo cujas componentes eram ainda dadas por $E_{xL}(x,0)$ e $E_{yL}(x,0)$, sendo o perfil da linha descrito por $dy/dx = E_{yL}(x,0)/E_{xL}(x,0)$. Propõe-se então que esses cálculos sejam refeitos considerando as mesmas densidades de carga e as mesmas grandezas adimensionais usadas nesta tese para mais uma comparação com os resultados presentes. Poder-se-ia resolver no caso contemplado neste trabalho, um problema de Laplace dando em uma das linhas de campo limites ($\psi = \psi_1$) do domínio a função $x(\Phi, \psi_1)$ correspondente à situação de carga espacial em simetria planar e, na outra (linha limite oposta), a de campo uniforme. Da solução resultaria a função $y(x(\Phi, \psi_1))$ que não deverá, espera-se, diferir significativamente dos resultados ($\partial\Gamma$'s) obtidos pelos diferentes métodos. Será mesmo assim?

5. Estender o método ao estudo de outras situações de interesse. Considerar, por exemplo, o problema de simetria cilíndrica em que um fluxo estacionário de carga espacial em um condensador plano tem por fonte um círculo de raio a sobre um dos eletródios. As linhas de campo limites do domínio de solução seriam o eixo de simetria, em $r=0$, e uma linha de campo laplaciano em $r \gg a$. Por último, os efeitos da emissão descontínua de carga espacial sobre as linhas de campo seriam investigados em outros eletródios não planos.

A P Ê N D I C E – A

Sobre o Emprego das Sub-Rotinas NAG F04AXF e F01BRF

O uso das sub-rotinas NAG F04AXF e F01BRF para calcular soluções aproximadas de um sistema de equações reais lineares esparças da forma $MX=B$, da qual as eqs. (4.19a,b) (sec.4.4, cap.IV) são um exemplo, é muito simples quando a matriz dos coeficientes, M , tem pequena dimensão. Com o crescimento do número de elementos não nulos da matriz o emprego dessas sub-rotinas torna-se algo mais elaborado e por esta razão oferecemos aqui um esquema para tratar especificamente com equações lineares do tipo descrito pelas eqs. (4.19a,b).

A sub-rotina F04AXF resolve o sistema de equações $MX=B$ por substituição para frente e para trás enquanto F01BRF (e/ou F01BSF), precedentemente, faz a decomposição LU de uma permutação da matriz M , $PMQ=LU$, em que P e Q são matrizes de permutação (para maiores detalhes ver documento de implementação que acompanha a biblioteca NAG).

Entre os muitos parâmetros ou argumentos (consultar Apend.—B), estamos particularmente interessados em construir N, NZ, A, IRN e ICN na sub-rotina F01BRF(N,NZ,A,IRN,ICN,...) e RHS na sub-rotina F04AXF(N,...,RHS,...). Eis o seu significado quando da entrada:

- N — inteiro que especifica a ordem da matriz M ;
- NZ — inteiro que especifica o número de elementos não nulos da matriz M ;
- A — arranjo unidimensional contendo, em qualquer ordem, os NZ elementos não nulos da matriz M ;
- IRN — arranjo inteiro unidimensional contendo os índices de linhas dos elementos não nulos estocados em A;
- ICN — arranjo inteiro unidimensional contendo os índices de colunas dos elementos não nulos estocados em A;
- RHS — arranjo unidimensional contendo as N componentes do vetor coluna B dos

termos independentes do sistema de equações. Na saída RHS contém as componentes do vetor solução X.

Tomemos em conta, no que se segue, o domínio discretizado da Fig.—4.2 (cap.IV). A eq. (4.19a) será aplicada a cada nodo interno “●” para o cômputo da aproximação $\hat{X}(i,j)$. Há $(N/2 - 1)$ desses nodos na direção Φ , $(M/2 - 1)$ na direção Ψ e o total deles, isto é, o número de equações do sistema resultante ou ordem da matriz é, pois,

$$N = (N/2 - 1)(M/2 - 1), \tag{A.1}$$

onde N e M estão explicitados na Fig. — 4.2 .

Considerando que os nodos “●” são varridos sistematicamente da esquerda para a direita e de baixo para cima, a matriz M dos coeficientes das equações lineares resultantes tem a seguinte caracterização¹: é uma matriz esparsa cujos elementos não nulos estão arranjados ao longo de cinco diagonais — a diagonal principal (DP), duas diagonais superiores (DS1 e DS2) e duas diagonais inferiores (DI1 e DI2) — como sugere o esquema da Fig. —A.1

FIG.—A.1 Representação esquemática da matriz M dos coeficientes das equações lineares (4.19a,b). As linhas sugerem a posição dos elementos não nulos e os brancos a dos zeros da matriz.

DS1

Número de elementos (NDS1): $NDS1 = (N/2 - 1)(M/2 - 2)$.

Posição [I;J]² na matriz:

¹Na prática construímos uma matriz M 25X25, levantamos suas características e as generalizamos para uma matriz [(N/2-1)(M/2-1) x (N/2-1)(M/2-1)] por indução matemática.

²I e J são os mesmos que i e j na Fig.-4.2 .

INÍCIO $\rightarrow [1; N/2],$

FIM $\rightarrow [(N/2-1)(M/2-2); (N/2-1)(M/2-1)].$

Expressão genérica para os elementos $(\alpha_1(I, J+1))$:

$$\alpha_1(I, J+1) = \frac{2}{h^2} [a(J+1)(\sigma(I-1, J+1) + \sigma(I+1, J+1))]^{-1}, \quad J = 2(M-4)2 \quad e \quad I = 2(N-2)2.^3$$

DI1

Número de elementos (NDI2): $NDI2 = (N/2-1)(M/2-2).$

Posição $[I; J]$ na matriz:

INÍCIO $\rightarrow [N/2; 1],$

FIM $\rightarrow [(N/2-1)(M/2-1); (N/2-1)(M/2-2)].$

Expressão genérica para os elementos $(\alpha_3(I, J-1))$:

$$\alpha_3(I, J-1) = \frac{2}{h^2} [a(J-1)(\sigma(I-1, J-1) + \sigma(I+1, J-1))]^{-1}, \quad J = 4(M-2)2 \quad e \quad I = 2(N-2)2.$$

DS2

Esta diagonal possui $(M/2-1)$ segmentos intercalados por um zero, contendo $(N/2-2)$ elementos (não nulos) cada.

Número de elementos (NDS2): $NDS2 = (N/2-2)(M/2-1).$

Posição $[I; J]$ de cada um dos $(M/2-1)$ segmentos ($SDS2(K)$) da diagonal DS2 na matriz — $SDS2(K), \quad K = 1(M/2-1)1$:

INÍCIO $\rightarrow [(K-1)(N/2-1)+1]; [(K-1)(N/2-1)+2],$

FIM $\rightarrow [K(N/2-1)-1]; [K(N/2-1)].$

Expressão genérica para os elementos $(\alpha_2(I+2, 2K))$:

$$\alpha_2(I+2, 2K) = \frac{1}{2h^2} [a(2K-1)\sigma(I+1, 2K-1) + a(2K+1)\sigma(I+1, 2K+1)], \quad I = 2(N-4)2 \quad (J = 2K).$$

DI2

Como no caso de DS2 esta diagonal possui também $(M/2-1)$ segmentos intercalados por um zero, contendo $(N/2-2)$ elementos cada.

Número de elementos (NDI1): $NDI1 = (N/2-2)(M/2-1).$

Posição $[I; J]$ de cada um dos $(M/2-1)$ segmentos ($SDI1(K)$) da diagonal DI1 na matriz — $SDI1(K), \quad K = 1(M/2-1)1$:

³Esta notação significa que o inteiro I toma valores de 2 a $(N-2)2$ com incremento 2.

INÍCIO → $[(k-1)(N/2-1)+2];[(K-1)(N/2-1)+1]$,

FIM → $[K(N/2-1)];[K(N/2-1)-1]$.

Expressão genérica para os elementos $(\alpha_4(I-1,2K))$:

$$\alpha_4(I-1,2K) = \frac{1}{2h^2} [a(2K-1)\sigma(I-1,2K-1)+a(2K+1)\sigma(I-1,2K+1)], \quad I = 4(N-2)2 \quad (J = 2K).$$

DP

Número de elementos (NDP): $NDP = (N/2-1)(M/2-1)$.

Posição $[I;J]$ na matriz:

INÍCIO → $[1;1]$,

FIM → $[(N/2-1)(M/2-1);(N/2-1)(M/2-1)]$.

Expressão genérica para os elementos $(A(I,J))$:

$$A(I,J) = - [\alpha_1(I,J+1)+\alpha_2(I+2,J)+\alpha_3(I,J-1)+\alpha_4(I-1,J)], \quad J = 2(M-2)2 \quad \text{e} \quad I = 2(N-2)2.$$

NÚMERO DE ELEMENTOS NÃO NULOS DA MATRIZ (NZ)⁴

$$NZ = NDS1 + NDI2 + NDS2 + NDI1 + NDP = \frac{5}{4}NM - \frac{7}{2}(N+M) + 9. \quad (A.2)$$

Indexemos na forma $X(K)$ o vetor solução da equação matricial $MX=B$. A dimensão de $X(K)$ é, obviamente, a ordem da matriz, ou seja, $K=1,2,3,\dots,(N/2-1)(M/2-1)$. A transformação das componentes de $X(K)$ para os elementos da aproximação $\hat{X}(I,J)$ é dada pelo seguinte fluxograma:

(A.3)

⁴O número total de elementos nulos (Z) da matriz é $Z = [(N/2-1)(M/2-1)]^2 - NZ$.

O vetor dos termos independentes, B , possui $(M/2-1)$ segmentos verticais com $(N/2-1)$ elementos (nulos e não nulos) cada. O primeiro segmento (ou superior) reúne as condições de contorno na base do domínio discretizado, o último segmento está relacionado com as condições no contorno do topo e os segmentos intermediários, no que concerne aos elementos não nulos, têm relação tão somente com as condições nas fronteiras $\Phi=1$ e $\Phi=0$ do domínio. As componentes de $B(K)$ e por conseguinte os elementos do arranjo RHS , $RHS(K) \equiv B(K)$, estão definidos no fluxograma abaixo, com $K=1, 2, 3, \dots, (N/2-1)(M/2-1)$.

O arranjo, A , dos elementos não nulos da matriz, é construído (poderia ser diferente) numa ordenação linear tal que,

$$A(\kappa) = (DS1(K1), DI2(K2), DP(K3), DS2(K4), DI1(K5)), \quad (A.5a)$$

com $\kappa=1(NZ)1$; $K1=1(NDS1)1$; $K2=1(NDI2)1$; $K3=1(NDP)1$; $K4=1(NDS2)1$; $K5=1(NDI1)1$. Forçosamente a ordenação dos índices de linhas e colunas nos arranjos $IRN(\kappa)$ e $ICN(\kappa)$ será a mesma definida em $A(\kappa)$.

A construção de $A(\kappa)$, $IRN(\kappa)$ e $ICN(\kappa)$ está dada no fluxograma que segue.

APÊNDICE - B

PROGRAMAS FORTRAN

1. Programa Gross

```

C  PROGRAMA GROSS. FOR
C  *****
C  Este programa resolve numericamente as equações de carga espacial sob a
C  transformação hodográfica de Budd & Wheeler [4] em um domínio
C  simplesmente conexo. Usa um método iterativo simples e emprega a
C  biblioteca NAG para a resolução do sistema de equações lineares resultante
C  da discretização das equações. O programa determina a fronteira de choque
C  que subdivide o domínio em dois subdomínios, SUBDOM2 e SUBDOM1,
C  respectivamente. Há carga espacial no primeiro subdomínio e inexistente no
C  segundo. A fronteira conecta dois eletrodos ou equipotenciais.
C  *****
C
C  PARAMETER ( N=40 ,M=160 ,NZ=7309 ,NEQ=1501 )
C  PARAMETER ( LICN=80000 ,LIRN=60000 )
C  PARAMETER ( PSII=-4. ,PSIF=4. )
C
C  REAL SIGG(0:(N-1),1:(2*M-1)) ,XG(0:N,0:(2*M)) ,YG(0:N,0:(2*M)) ,
*  APSIG(1:(2*M-1)) ,RHO0
C  INTEGER  ITEREX ,IDOM1 ,IDOM2 ,NXGIMB
C
C  ... "G" nas grandezas acima quer dizer que elas são globais para
C  ... os dois subdomínios, "Subdom1" e "Subdom2".
C  TYPE '(A)','$ WSIG (PESO P/SIG), TOLSIG (TOLER.P/SIG):'
C  ACCEPT *,WSIG,TOLSIG
C  TYPE '(A)','$ WX (PESO P/X), TOLX (TOLER.P/X):'
C  ACCEPT *,WX,TOLX
C  TYPE '(A)','$ WAP (PESO P/APSI), TOLAP (TOLER.P/APSI):'
C  ACCEPT *,WAP,TOLAP
C  TYPE '(A)','$ RHO0:'
C  ACCEPT *,RHO0
C  H= 2./N
C  HP= H
C
C  NZ= 5*((N*M)/4)-7*((N+M)/2)+9
C  NEQ= (N/2-1)*(M/2-1)
C  LICN= 10*NZ
C  LIRN= INT(8.*NZ)
C
C  A0 = 1.
C  A1 = 2.*RHO0-1.
C  A2 = 4.*RHO0*RHO0/3.
C  A3 = -3.*RHO0/2.
C  H0 = (3.*A0*A2-A1*A1)/(9.*A0*A0)
C  G = 2.*((A1/(3.*A0))**3)-A1*A2/(3.*A0*A0)+A3/A0
C  U0 = (-G+SQRT(G*G+4.*H0*H0*H0))/2.
C  U13 = U0**(1./3.)
C  E0 = U13-H0/U13-A1/(3.*A0)
C  C1S = E0/(2.*RHO0)
C  C2S = 3.*RHO0/(E0*E0)
C

```



```

      APSIGG2= .75*APSIG(M+1)*(SIGG(I+1,M+1)+SIGG(I-1,M+1))-
      *      .25*APSIG(M+3)*(SIGG(I+1,M+3)+SIGG(I-1,M+3))
      XGIMAT= (APSIGG1*XG(I,M+2)+APSIGG2*XG(I,M-2))/(APSIGG1+APSIGG2)
C      XGIMNOVO= WX*XG(I,M)+(1.-WX)*XGIMAT
      XGIMNOVO= .25*XG(I,M)+.75*XGIMAT
      DELXGIM= ABS(XGIMNOVO-XG(I,M))
C      IF(DELXGIM.LE.TOLX) NXGIMB=NXGIMB+1
      IF(DELXGIM.LE..0005) NXGIMB=NXGIMB+1
      XG(I,M)= XGIMNOVO
90      CONTINUE
      APROXGIM= (REAL(NXGIMB)/(REAL(N/2-1)))*100.
      IF(ITEREX.LT.12) THEN
      IF(APROXGIM.LT.100.) THEN
      GO TO 80
      ENDIF
      GO TO 100
      ENDIF
      IF(APROXGIM.LT.100.) THEN
      TYPE 'A)', '$ NUMERO DE ITERACOES PARA XG(I,M) ,ITEREX,=12'
      TYPE 'A)', '$ NAO HA CONVERGENCIA PARA XG(I,M)'
      TYPE 'A)', '$ TENTE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
      GO TO 180
      ENDIF
C
C      ...Calculo de YG(I,M) - FRONTEIRA de CHOQUE.
100      DO 110 I=2,(N-2),2
      APSIGG1= 1.5*APSIG(M-1)-.5*APSIG(M-3)
      APSIGG2= .75*APSIG(M+1)*(SIGG(I+1,M+1)+SIGG(I-1,M+1))-
      *      .25*APSIG(M+3)*(SIGG(I+1,M+3)+SIGG(I-1,M+3))
      YG(I,M)= (APSIGG1*YG(I,M+2)+APSIGG2*YG(I,M-2))/(APSIGG1+APSIGG2)
110      CONTINUE
      YG(N,M)= YG((N-2),M)
C
C      ...Neste ponto poder-se-iam calcular SIGG(I,M) e APSIG(M) na fronteira de
C      ...choque.
C      ...Resultados para  $a(\psi)$  e  $E(1,\psi)$ :
      DO 120 J=1,(M-1),4
      PSI=PSII+J*HP/2.
      CAMP=ABS(APSIG(J))
      WRITE(20,*) PSI,CAMP
120      CONTINUE
C
C      DO 130 J=1,(M-1),8
C      PSI= J*HP/2.
C      WRITE(20,*) PSI, APSIG(J+M)
C130      CONTINUE
C
      DO 130 J=1,(M-1),4
      PSI=J*HP/2.
      CAMP=ABS(APSIG(J+M)*SIGG(0,J+M))
      WRITE(20,*) PSI,CAMP
130      CONTINUE
C      ...Resultados para  $\sigma(\Phi,\psi)$  e\ou  $\sigma(X,Y)$ :
      DO 150 J=1,(M-1),8
C      PSI=J*HP/2.
C      WRITE(10,*) PSI, (1./SIGG(I,J+M))
C150      CONTINUE
C140      CONTINUE
C
      DO 140 J=1,(M-1),2
      XM=0.
      YM=J*HP/2.
      WRITE(10,*) XM, YM, 1/SIGG(0,J+M)

```

```

140  CONTINUE
C
DO 150 I=1,(N-1),2
DO 151 J=1,(M-1),2
XM=(XG(I-1,J+M-1)+XG(I-1,J+M+1)+XG(I+1,J+M-1)+XG(I+1,J+M+1))/4.
YM=(YG(I-1,J+M-1)+YG(I-1,J+M+1)+YG(I+1,J+M-1)+YG(I+1,J+M+1))/4.
WRITE(10,*) XM, YM, 1/SIGG(I,J+M)
151  CONTINUE
150  CONTINUE
C
C  ...Cálculo do campo elétrico sobre uma linha de campo no topo da região de
C  ...Poisson.
FI= 1.
EFI= ABS(APSIG(2*M-7)*SIGG(0,2*M-7))
WRITE(50,*) FI, EFI
DO 300 I= 1,(N-1),2
FI= 1.-I*H/2.
XPSI= (XG(I+1,2*M-6)+XG(I-1,2*M-6)-XG(I+1,2*M-8)-
1  XG(I-1,2*M-8))/(2.*HP)
XPSI2= XPSI*XPSI
YPSI= (YG(I+1,2*M-6)+YG(I-1,2*M-6)-YG(I+1,2*M-8)-
1  YG(I-1,2*M-8))/(2.*HP)
YPSI2= YPSI*YPSI
AP= ABS(APSIG(2*M-7))
EFI= AP*SIGG(I,2*M-7)*(XPSI2+YPSI2)**(-1./2.)
WRITE(50,*) FI, EFI
300  CONTINUE
FI= 1.
EXAT= E0
WRITE(60,*) FI, EXAT
DO 400 I= 1,(N-1),2
FI= 1.-I*H/2.
X= C1S*((C2S*(1.-FI)+1.))**(2./3.)-1.)
EXAT= E0*(1.+(2.*RHO0/E0)*X)**(1./2.)
WRITE(60,*) FI, EXAT
400  CONTINUE
FI= 1.
XFI= -(XG(2,2*M-6)+XG(2,2*M-8)-XG(0,2*M-6)-
1  XG(0,2*M-8))/(2.*H)
XFI2= XFI*XFI
YFI= -(YG(2,2*M-6)+YG(2,2*M-8)-YG(0,2*M-6)-
1  YG(0,2*M-8))/(2.*H)
YFI2= YFI*YFI
EFI1= (XFI2+YFI2)**(-1./2.)
WRITE(70,*) FI, EFI1
DO 500 I= 1,(N-1),2
FI= 1.-I*H/2.
XFI= -(XG(I+1,2*M-6)+XG(I+1,2*M-8)-XG(I-1,2*M-6)-
1  XG(I-1,2*M-8))/(2.*H)
XFI2= XFI*XFI
YFI= -(YG(I+1,2*M-6)+YG(I+1,2*M-8)-YG(I-1,2*M-6)-
1  YG(I-1,2*M-8))/(2.*H)
YFI2= YFI*YFI
EFI1= (XFI2+YFI2)**(-1./2.)
WRITE(70,*) FI, EFI1
500  CONTINUE
C
C  ...Cálculo e resultados para a condição de ortogonalidade entre linhas de
C  ...campo e curvas equipotenciais.
DO 161 J=2,(2*M-2),2
DO 162 I=2,(N-2),2
XFI=-(XG(I+2,J)-XG(I-2,J))/(2.*H)
XPSI=(XG(I,J+2)-XG(I,J-2))/(2.*HP)

```

```

C      YFI=-(YG(I+2,J)-YG(I-2,J))/(2.*H)
C      YPSI=(YG(I,J+2)-YG(I,J-2))/(2.*HP)
C      ORTO=XFI*XPSI+YFI*YPSI
C      WRITE(33,*) I, J, ORTO
C162   CONTINUE
C161   CONTINUE
C
C      ...Resultados de XG(I,J) e YG(I,J):
C      DO 160 J=0,(2*M),8
C      DO 160 J=120,200,2
C      DO 170 I=0,N,6
C      DO 170 I=0,N,4
C      WRITE(30,*) XG(I,J), YG(I,J)
170   CONTINUE
C      WRITE(30,*) XG(N,J), YG(N,J)
160   CONTINUE
180   STOP
      END
C
C      -----
C      SUB-ROTINAS CHAMADAS PELO PROGRAMA:
C      -----
C
C      SUB-ROTINA SUBDOM1
C      -----
C      Esta Sub-rotina resolve numericamente as eqs. de "carga espacial" sob
C      uma transformação hodográfica de Budd & Wheeler [4], no subdomínio
C      subdom1. Pode ser transformada em programa principal para a solução do
C      problema de Laplace -----
C
C      SUBROUTINE SUBDOM1(SIGG,APSIG,XG,YG,IDOM1,
C      *                  WX,TOLX,WAP,TOLAP)
C
C      PARAMETER ( N=40 ,M=160 ,NZ=7309 ,NEQ=1501 )
C      PARAMETER ( LICN=80000 ,LIRN=60000 )
C      PARAMETER ( PSII=-4. )
C      REAL SIGG(0:(N-1),1:(2*M-1)) ,XG(0:N,0:(2*M)) ,YG(0:N,0:(2*M)) ,
C      *   APSIG(1:(2*M-1))
C      REAL SIG(0:(N-1),1:(M-1)) ,X(0:N,0:M) ,APSI(1:(M-1)) ,Y(0:N,0:M)
C      *   ,WX ,TOLX ,WAP ,TOLAP ,H ,HP ,A(LICN) ,BLADO(NEQ) ,
C      *   RESID ,RHS(NEQ)
C      INTEGER IRN(LIRN) ,ICN(LICN) ,LAP ,LX ,ITERAP ,ITERX ,KK , NXB
C      *   ,NAPB ,I ,J ,IDOM1
C
C      H= 2./N
C      HP= H
C
C      -----
C      CONDICÕES DE CONTOR EM SIG, X E Y:
C      -----
C
C      DO 10 J=1,(M-1),2
C      SIG(0,J)=SIGG(0,J)
10   CONTINUE
C      DO 20 I=0,N,2
C      X(I,0) = XG(I,0)
C      X(I,M) = XG(I,M)
C      Y(I,0) = PSII
20   CONTINUE
C      DO 30 J=0,M,2
C      Y(0,J)= YG(0,J)
C      X(0,J) = XG(0,J)
C      X(N,J) = XG(N,J)

```



```

TYPE *, 'CALCULANDO APSI(J) EM SUBDOM1.*****ITERAP=', ITERAP
TYPE *, '#####'
DO 120 J=1,(M-1),2
  XFI= -(4.*(X(2,J+1)+X(2,J-1))-3.*(X(0,J-1)+X(0,J+1))-X(4,J+1)-
*   X(4,J-1))/(4.*H)
  APAT= 1./(SIG(0,J)*XFI)
  APNOVO= WAP*APSI(J)+(1.-WAP)*APAT
  DELAP= ABS(APNOVO-APSI(J))
  IF(DELAP.LE.TOLAP) NAPB= NAPB+1
  APSI(J)= APNOVO
120  CONTINUE
  APROAP= (REAL(NAPB)/(REAL(M/2)))*100.
  IF(ITERAP.LT.15) THEN
  IF(APROAP.LT.100.) THEN
    GO TO 80
  ENDIF
  GO TO 139
  ENDIF
  IF(APROAP.LT.100.) THEN
    TYPE '(A)', '$ NAO HA CONVERGENCIA PARA APSI EM SUBDOM1.'
    TYPE '(A)', '$ TENTE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
    IDOM1=1
    GO TO 210
  ENDIF
C    ...Cálculo de Y.
139  DO 140 J=2,(M-2),2
      DO 150 I=2,(N-2),2
        ASIG= (APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1)+APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1))/2.
        XPSI= (X(I,J+2)+X(I-2,J+2)-X(I,J-2)-X(I-2,J-2))/(4.*HP)
        Y(I,J)= Y(I-2,J)+H*XPSI/ASIG
150  CONTINUE
      Y(N,J)= Y((N-2),J)
140  CONTINUE
C    -----
C    ...Conversão dos resultados de APSI(J) para APSIG(J):
      DO 160 J=1,(M-1),2
        APSIG(J)= APSI(J)
160  CONTINUE
      DO 170 I=1,(N-1),2
        DO 180 J=1,(M-1),2
          SIGG(I,J)= SIG(I,J)
180  CONTINUE
170  CONTINUE
C    -----
C    ...Conversão dos resultados de X(I,J) e Y(I,J) para os
C    ...correspondentes XG(I,J) e YG(I,J):
      DO 190 J=2,(M-2),2
        DO 200 I=2,(N-2),2
          XG(I,J)= X(I,J)
          YG(I,J)= Y(I,J)
200  CONTINUE
        YG(N,J)= Y(N,J)
190  CONTINUE
210  RETURN
      END
C
C
C    SUB-ROTINA SUBDOM2
C    -----
C    Esta Sub-rotina resolve numericamente as eqs. de carga espacial sob
C    uma transformação hodográfica de Budd & Wheeler [4], no subdomínio
C    subdom2. Pode ser transformada em programa principal para tratar o
C    problema de carga espacial ocupando totalmente um domínio simplesmente

```

```

C      conexo. -----
C      -----
C
C      SUBROUTINE SUBDOM2(SIGG,APSIG,XG,YG,IDOM2,
*          WSIG,TOLSIG,WX,TOLX,WAP,TOLAP)
C
C      PARAMETER ( N=40 ,M=160 ,NZ=7309 ,NEQ=1501 )
C      PARAMETER ( LICN=80000 ,LIRN=60000 )
C      REAL SIGG(0:(N-1),1:(2*M-1)) ,XG(0:N,0:(2*M)) ,YG(0:N,0:(2*M)) ,
*      APSIG(1:(2*M-1))
C      REAL SIG(0:(N-1),1:(M-1)) ,X(0:N,0:M) ,APSI(1:(M-1)) ,Y(0:N,0:M)
*      ,WSIG ,TOLSIG ,WX ,TOLX ,WAP ,TOLAP ,H , HP ,A(LICN)
*      ,BLADO(NEQ) ,RESID ,RHS(NEQ)
C      INTEGER IRN(LIRN) ,ICN(LICN) ,LAP ,LX ,ITERAP ,ITERX ,KK ,NXB
*      ,NAPB ,I ,J ,INDSIG ,IDOM2
C
C      H= 2./N
C      HP= H
C
C      -----
C      CONDICÕES DE CONTOR EM SIG, X E Y:
C      -----
C
C      DO 10 J=1,(M-1),2
C      SIG(0,J)= SIGG(0,J+M)
10  CONTINUE
C      DO 20 I=0,N,2
C      X(I,0) = XG(I,M)
C      X(I,M) = XG(I,2*M)
20  CONTINUE
C      DO 30 J=0,M,2
C      Y(0,J)= YG(0,J+M)
C      X(0,J) = XG(0,J+M)
C      X(N,J) = XG(N,J+M)
30  CONTINUE
C
C      -----
C      FUNÇÕES TENTATIVA PARA SIG, X E APSI:
C      -----
C
C      DO 40 J= 1,(M-1),2
C      APSI(J)= APSIG(J+M)
C      DO 50 I=1,(N-1),2
C      SIG(I,J)= SIGG(I,J+M)
50  CONTINUE
40  CONTINUE
C      DO 60 J=2,(M-2),2
C      DO 70 I=2,(N-2),2
C      X(I,J)= XG(I,J+M)
70  CONTINUE
60  CONTINUE
C      -----
C      ITERAP= 0
80  ITERAP= ITERAP+1
C      ITERX= 0
90  ITERX= ITERX+1
C      INDSIG= 0
C      CALL SUBSIG(SIG,X,APSI,N,M,H,HP,WSIG,TOLSIG,INDSIG)
C      IF(INDSIG.EQ.1) THEN
C      IDOM2=1
C      GO TO 210
C      ENDIF
C      CALL SUBGAN(X,SIG,APSI,A,BLADO,IRN,ICN,LIRN,LICN,N,M,H,HP)
C      TYPE *,'-----'

```

```

TYPE *, '----RESOLVENDO O SISTEMA DE EQS. LINEARES----'
TYPE *, '-----EM SUBDOM2.-----'
TYPE *, '-----'
CALL SUBSOL(A,IRN,ICN,N,M,LIRN,LICN,BLADO,NEQ,NZ)
KK= 0
NXB= 0
C ...Cálculo iterativo de X.
TYPE *, '*****'
TYPE *, 'CALCULANDO X(I,J) EM SUBDOM2.***** ITERX=',ITERX
TYPE *, '*****'
DO 100 J=2,(M-2),2
DO 110 I=2,(N-2),2
KK= KK+1
XNOVO= WX*X(I,J)+(1.-WX)*BLADO(KK)
DELX= ABS(XNOVO-X(I,J))
IF(DELX.LE.TOLX) NXB= NXB+1
X(I,J)= XNOVO
110 CONTINUE
100 CONTINUE
APROVX= (REAL(NXB)/((N/2-1)*(M/2-1)))*100.
IF(ITERX.LT.12) THEN
IF(APROVX.LT.100.) THEN
GO TO 90
ENDIF
NAPB= 0
TYPE *, '@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@'
TYPE *, 'CALCULANDO APSI(J) EM SUBDOM2.***** ITERAP=',ITERAP
TYPE *, '@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@'
GO TO 119
ENDIF
IF(APROVX.LT.100.) THEN
TYPE '(A)', '$ NAO HA CONVERGENCIA PARA X EM SUBDOM2.'
TYPE '(A)', '$ TENDE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
IDOM2=1
GO TO 210
ENDIF
NAPB= 0
C ...Cálculo iterativo de APSI.
TYPE *, '@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@'
TYPE *, 'CALCULANDO APSI(J) EM SUBDOM2.*****ITERAP=',ITERAP
TYPE *, '@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@'
119 DO 120 J=1,(M-1),2
XFI= -(4.*(X(2,J+1)+X(2,J-1))-3.*(X(0,J-1)+X(0,J+1))-X(4,J+1)-
* X(4,J-1))/(4.*H)
APAT= 1./(SIG(0,J)*XFI)
APNOVO= WAP*APSI(J)+(1.-WAP)*APAT
DELAP= ABS(APNOVO-APSI(J))
IF(DELAP.LE.TOLAP) NAPB= NAPB+1
APSI(J)= APNOVO
120 CONTINUE
APROAP= (REAL(NAPB)/(REAL(M/2)))*100.
IF(ITERAP.LT.15) THEN
IF(APROAP.LT.100.) THEN
GO TO 80
ENDIF
GO TO 139
ENDIF
IF(APROAP.LT.100.) THEN
TYPE '(A)', '$ NAO HA CONVERGENCIA PARA APSI EM SUBDOM2.'
TYPE '(A)', '$ TENDE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
IDOM2=1
GO TO 210
ENDIF

```



```

C      ...Cálculo de Y.
139    DO 140 J=2,(M-2),2
        DO 150 I=2,(N-2),2
            ASIG= (APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1)+APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1))/2.
            XPSI= (X(I,J+2)+X(I-2,J+2)-X(I,J-2)-X(I-2,J-2))/(4.*HP)
            Y(I,J)= Y(I-2,J)+H*XPSI/ASIG
150    CONTINUE
        Y(N,J)= Y((N-2),J)
140    CONTINUE
C      -----
C      ...Conversão dos resultados de SIG(J) e APSI(J) para
C      ...SIGG(I,J) e APSIG(J):
        DO 160 J=1,(M-1),2
            APSIG(J+M)= APSI(J)
160    CONTINUE
        DO 170 I=1,(N-1),2
            DO 180 J=1,(M-1),2
                SIGG(I,J+M)=SIG(I,J)
180    CONTINUE
170    CONTINUE
C      -----
C      ...Conversão dos resultados de X(I,J) e Y(I,J) para os
C      ...correspondentes XG(I,J) e YG(I,J):
        DO 190 J=2,(M-2),2
            DO 200 I=2,(N-2),2
                XG(I,J+M)= X(I,J)
                YG(I,J+M)= Y(I,J)
200    CONTINUE
            YG(N,J+M)= Y(N,J)
190    CONTINUE
210    RETURN
        END

C
C      SUB-ROTINA PARA CALCULAR SIGMA
C      -----
        SUBROUTINE SUBSIG(SIG,X,APSI,N,M,H,HP,WSIG,TOLSIG,INDSIG)
        REAL SIG(0:(N-1),1:(M-1)) ,X(0:N,0:M) ,APSI(1:(M-1)) ,H , WSIG ,
*      TOLSIG, HP
        INTEGER N ,M ,I ,J ,LSIG ,INDSIG
        TYPE *,'#####'
        TYPE *,'#####CALCULANDO SIG(I,J) EM SUBDOM2.#####'
        TYPE *,'#####'
        DO 10 J=1,(M-1),2
            DO 20 I=1,(N-1),2
                LSIG=0
30      LSIG=LSIG+1
                IF(I.EQ.1) THEN
                    SIGV=SIG(I,J)
C      ...Nos nossos cálculos DELPSI=H e DELFI=-H.
                    XF= X(2,J+1)+X(2,J-1)-X(0,J+1)-X(0,J-1)
                    XF2= XF*XF
                    XP= X(2,J+1)+X(0,J+1)-X(2,J-1)-X(0,J-1)
                    XP2=XP*XP
                    ASIG2= APSI(J)*APSI(J)*SIGV*SIGV
                    SIG(I,J)= SIG(0,J)+XF2/(8.*H)+(XP2*H)/(8.*ASIG2*HP*HP)
                    SIG(I,J)= WSIG*SIGV+(1.-WSIG)*SIG(I,J)
                    DELSIG=ABS(SIG(I,J)-SIGV)
                    IF(DELSIG.GT.TOLSIG) THEN
                        IF(LSIG.EQ.25) THEN
                            TYPE '(A)', '$ NUMERO DE ITERACOES DE SIGMA=12'
                            TYPE '(A)', '$ NAO HA CONVERGENCIA PARA SIGG EM SUBDOM2.'
                            TYPE '(A)', '$ TENTE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
                            INDSIG= 1

```

```

GO TO 21
ENDIF
GO TO 30
ENDIF
GO TO 20
ENDIF
SIGV1= SIG(I,J)
SIGV2= SIG(I-2,J)
XF1= X(I+1,J-1)+X(I+1,J+1)-X(I-1,J-1)-X(I-1,J+1)
XF12=XF1*XF1
XF2= X(I-1,J-1)+X(I-1,J+1)-X(I-3,J-1)-X(I-3,J+1)
XF22= XF2*XF2
XP1= X(I+1,J+1)+X(I-1,J+1)-X(I+1,J-1)-X(I-1,J-1)
XP12=XP1*XP1
ASIG1= APSI(J)*APSI(J)*SIGV1*SIGV1
XP2= X(I-1,J+1)+X(I-3,J+1)-X(I-1,J-1)-X(I-3,J-1)
XP22= XP2*XP2
ASIG2= APSI(J)*APSI(J)*SIGV2*SIGV2
SIG(I,J)= SIG(I-2,J)+(XF12+XF22)/(8.*H)+(XP12*H)/(8.*ASIG1*HP*HP)
*      +(XP22*H)/(8.*ASIG2*HP*HP)
SIG(I,J)= WSIG*SIGV1+(1.-WSIG)*SIG(I,J)
DELSIG= ABS(SIG(I,J)-SIGV1)
IF(DELSIG.GT.TOLSIG) THEN
IF(LSIG.EQ.25) THEN
TYPE '(A)','$ NUMERO DE ITERACOES DE SIGMA=12'
TYPE '(A)','$ NAO HA CONVERGENCIA PARA SIGG EM SUBDOM2.'
TYPE '(A)','$ TENTE NOVOS PESOS E TOLERANCIAS'
INDSIG= 1
GO TO 21
ENDIF
GO TO 30
ENDIF
20 CONTINUE
10 CONTINUE
21 RETURN
END

```

SUB-ROTINA SUBGAN

Ordena os elementos não-nulos da matriz diagonal esparsa, M, e constroi o vetor BLADO $\equiv B$, eq. matricial $MX=B$. Em outras palavras, constroi os arranjos ordenados A(LICN), IRN(LIRN), ICN(LINC) e $RHS(N) \equiv BLADO(N)$ para futuras chamadas da biblioteca NAG.

```

SUBROUTINE SUBGAN(X,SIG,APSI,AP,BLADO,IRN,ICN,LIRN,LICN,N,M,H,HP)
REAL X(0:N,0:M) ,SIG(0:(N-1),1:(M-1)) ,APSI(1:(M-1)),AP(LICN),
*   BLADO(1:(N/2-1)*(M/2-1)) ,H, HP
INTEGER IRN(LIRN) ,ICN(LICN) ,LIRN ,LICN ,N ,M ,K ,IR ,IC ,L ,
*   LL
C   ... Construção de AP  $\equiv A$ , IRN e ICN.
K= 0
IR= 0
IC= (N/2-1)
DO 10 J=2,(M-4),2
DO 20 I=2,(N-2),2
K= K+1
IR= IR+1
IC= IC+1
ALF1= 2./(APSI(J+1)*(SIG(I-1,J+1)+SIG(I+1,J+1)))
AP(K)= ALF1
IRN(K)= IR
ICN(K)= IC

```

```

20  CONTINUE
10  CONTINUE
    IR= N/2-1
    IC= 0
    DO 30 J=4,(M-2),2
    DO 40 I=2,(N-2),2
    K= K+1
    IR= IR+1
    IC= IC+1
    ALF3= 2./((APSI(J-1))*(SIG(I-1,J-1)+SIG(I+1,J-1)))
    AP(K)= ALF3
    IRN(K)= IR
    ICN(K)= IC
40  CONTINUE
30  CONTINUE
    IR= 0
    IC= 0
    DO 50 J=2,(M-2),2
    DO 60 I=2,(N-2),2
    K= K+1
    IR= IR+1
    IC= IC+1
    ALF1= 2./((APSI(J+1))*(SIG(I-1,J+1)+SIG(I+1,J+1)))
    ALF2= (APSI(J-1)*SIG(I+1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I+1,J+1))/2.
    ALF2= (HP/H)*(HP/H)*ALF2
    ALF3= 2./((APSI(J-1))*(SIG(I-1,J-1)+SIG(I+1,J-1)))
    ALF4= (APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1))/2.
    ALF4= (HP/H)*(HP/H)*ALF4
    ALF= -(ALF1+ALF2+ALF3+ALF4)
    AP(K)= ALF
    IRN(K)= IR
    ICN(K)= IC
60  CONTINUE
50  CONTINUE
    DO 70 L=1,(M/2-1)
    IR= (L-1)*(N/2-1)
    IC= (L-1)*(N/2-1)+1
    DO 80 I=2,(N-4),2
    K= K+1
    IR= IR+1
    IC= IC+1
    ALF2= (APSI(2*L-1)*SIG(I+1,2*L-1)
*      +APSI(2*L+1)*SIG(I+1,2*L+1))/2.
    ALF2= (HP/H)*(HP/H)*ALF2
    AP(K)= ALF2
    IRN(K)= IR
    ICN(K)= IC
80  CONTINUE
70  CONTINUE
    DO 90 LL=1,(M/2-1)
    IR= (LL-1)*(N/2-1)+1
    IC= (LL-1)*(N/2-1)
    DO 100 I=4,(N-2),2
    K= K+1
    IR= IR+1
    IC= IC+1
    ALF4= (APSI(2*LL-1)*SIG(I-1,2*LL-1)
*      +APSI(2*LL+1)*SIG(I-1,2*LL+1))/2.
    ALF4= (HP/H)*(HP/H)*ALF4
    AP(K)= ALF4
    IRN(K)= IR
    ICN(K)= IC
100 CONTINUE

```

```

90      CONTINUE
C      ...Construção de BLADO  $\equiv$  B.
      K= 0
      DO 110 J=2,(M-2),2
      IF(J.EQ.2) THEN
      DO 120 I=2,(N-2),2
      K= K+1
      IF(I.EQ.2) THEN
      ALF3= 2./((APSI(J-1)*(SIG(I-1,J-1)+SIG(I+1,J-1)))
      ALF4= (APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1))/2.
      ALF4= (HP/H)*(HP/H)*ALF4
      BLADO(K)= -ALF4*X(I-2,J)-ALF3*X(I,J-2)
      GO TO 120
      ENDIF
      IF(I.NE.(N-2)) THEN
      ALF3= 2./((APSI(J-1)*(SIG(I-1,J-1)+SIG(I+1,J-1)))
      BLADO(K)= -ALF3*X(I,J-2)
      GO TO 120
      ENDIF
      ALF2= (APSI(J-1)*SIG(I+1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I+1,J+1))/2.
      ALF2= (HP/H)*(HP/H)*ALF2
      ALF3= 2./((APSI(J-1)*(SIG(I-1,J-1)+SIG(I+1,J-1)))
      BLADO(K)= -ALF3*X(I,J-2)-ALF2*X(I+2,J)
120     CONTINUE
      GO TO 110
      ENDIF
      IF(J.NE.(M-2)) THEN
      DO 130 I=2,(N-2),2
      K= K+1
      IF(I.EQ.2) THEN
      ALF4= (APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1))/2.
      ALF4= (HP/H)*(HP/H)*ALF4
      BLADO(K)= -ALF4*X(I-2,J)
      GO TO 130
      ENDIF
      IF(I.NE.(N-2)) THEN
      BLADO(K)= 0
      GO TO 130
      ENDIF
      ALF2= (APSI(J-1)*SIG(I+1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I+1,J+1))/2.
      ALF2= (HP/H)*(HP/H)*ALF2
      BLADO(K)= -ALF2*X(I+2,J)
130     CONTINUE
      GO TO 110
      ENDIF
      DO 140 I=2,(N-2),2
      K= K+1
      IF(I.EQ.2) THEN
      ALF1= 2./((APSI(J+1)*(SIG(I-1,J+1)+SIG(I+1,J+1)))
      ALF4= (APSI(J-1)*SIG(I-1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I-1,J+1))/2.
      ALF4= (HP/H)*(HP/H)*ALF4
      BLADO(K)= -ALF4*X(I-2,J)-ALF1*X(I,J+2)
      GO TO 140
      ENDIF
      IF(I.NE.(N-2)) THEN
      ALF1= 2./((APSI(J+1)*(SIG(I-1,J+1)+SIG(I+1,J+1)))
      BLADO(K)= -ALF1*X(I,J+2)
      GO TO 140
      ENDIF
      ALF1= 2./((APSI(J+1)*(SIG(I-1,J+1)+SIG(I+1,J+1)))
      ALF2= (APSI(J-1)*SIG(I+1,J-1)+APSI(J+1)*SIG(I+1,J+1))/2.
      ALF2= (HP/H)*(HP/H)*ALF2
      BLADO(K)= -ALF1*X(I,J+2)-ALF2*X(I+2,J)

```

```

140 CONTINUE
110 CONTINUE
    RETURN
    END

C
C
C SUB-ROTINA SUBSOL
C -----
C Chama a biblioteca NAG e resolve o sistema de equações lineares
C  $MX=B$  para o vetor  $X$ . A solução sai em  $RHS$ .-----
C -----
C
SUBROUTINE SUBSOL(A,IRN,ICN,N,M,LIRN,LICN,RHS,NEQ,NZ)
PARAMETER ( NEQ1=1501 )
REAL A(LICN),RHS(NEQ1),W(NEQ1),U,RESID
INTEGER IRN(LIRN),ICN(LICN),IKEEP(5*NEQ1),IDISP(20),
* IW(8*NEQ1),IFAIL
INTEGER N,M,LIRN,LICN,NZ,NEQ
LOGICAL LBLOCK,GROW,ABORT(4)

C
U= 0.1
LBLOCK= .TRUE.
GROW= .TRUE.
ABORT(1)= .TRUE.
ABORT(2)= .TRUE.
ABORT(3)= .FALSE.
ABORT(4)= .TRUE.

C ...Decomposição LU de uma permutação de M, PMQ=LU.
CALL F01BRF(NEQ,NZ,A,LICN,IRN,LIRN,ICN,U,IKEEP,IW,W,LBLOCK,GROW,
* ABORT,IDISP,IFAIL)
TYPE *, ' IDISP(2)=',IDISP(2)
TYPE *, ' IDISP(3)=',IDISP(3)
TYPE *, ' IDISP(4)=',IDISP(4)
TYPE *, ' IDISP(6)=',IDISP(6)
TYPE *, ' IDISP(7)=',IDISP(7)
IF(GROW) TYPE *, ' W(1)=',W(1)
IF(LBLOCK) TYPE *, ' IDISP(8:10)=',(IDISP(I),I=8,10)

C ...Solução aproximada de equações lineares reais esparsas.
CALL F04AXF(NEQ,A,LICN,ICN,IKEEP,RHS,W,MTYPE,IDISP,RESID)
RETURN
END

```

2. Programa Taylor

```

C PROGRAMA TAYLOR. FOR
C *****
C Este programa integra as equações de carga espacial expandidas em séries
C de Taylor truncadas em segunda ordem num domínio simplesmente conexo.
C Ver desenvolvimento formal no Cap.III .
C *****
C
character*15 arqeq,arqey,arqex1,arqex2,arqex3,arqex4
real*8 k,mm,nn,ex(1201,401),ey(1201,401),ro(1201,401),
* x(1201),y(401),w,xm,xn,v(1201,2)
tanh(w) = (dexp(w)-dexp(-w))/(dexp(w)+dexp(-w))
sech(w) = 2./(dexp(w)+dexp(-w))
10000 format(A)
type '(a)', '$Campos=1; Equipotenciais=2: '

```

```

accept *,l
if(l.eq.1) then
type '(A)', '$Arquivo para gravar ey(x=0): '
accept 10000,arqey
open(unit=15,status='new',file=arqey)
type '(A)', '$Arquivo para gravar ex(y=1/4): '
accept 10000,arqex1
open(unit=11,status='new',file=arqex1)
type '(A)', '$Arquivo para gravar ex(y=1/2): '
accept 10000,arqex2
open(unit=12,status='new',file=arqex2)
type '(A)', '$Arquivo para gravar ex(y=3/4): '
accept 10000,arqex3
open(unit=13,status='new',file=arqex3)
type '(A)', '$Arquivo para gravar ex(y=1): '
accept 10000,arqex4
open(unit=14,status='new',file=arqex4)
ml = 0
else
type '(A)', '$Arquivo para gravar y(x) da equipotencial: '
accept 10000,arqeq
open(unit=10,status='new',file=arqeq)
type '(a)', '$v0 (da sup. equipotencial) - NEGATIVO!: '
accept *,v0
type '(a)', '$Quantos dely quer ir alem de y=pi? '
accept *,ml
endif
type '(a)', '$rho0: '
accept *,rho0
type '(a)', '$mm, nn: '
accept *,mm,nn
type '(a)', '$m,n (m multiplo de 4 se a opcao for Campo): '
accept *,m,n
type '(a)', '$delx/dely: '
accept *,delxdely
type '(a)', '$X0: '
accept *,X0
dely= 1./m
delx= delxdely*dely
xi= -n*delx
xs= n*delx
rhoi= rho0*(2.*(1.-tanh(nn*xi))+.5)
rhos= rho0*(2.*(1.-tanh(nn*xs))+.5)
A0=1.
A1=2.*rhoi-1.
A2=4.*rhoi*rhoi/3.
A3=-3.*rhoi/2.
H0=(3.*A0*A2-A1*A1)/(9.*A0*A0)
G=2.*((A1/(3.*A0))**3)-A1*A2/(3.*A0*A0)+A3/A0
U0=(-G+SQRT(G*G+4.*H0*H0*H0))/2.
U13=U0**(1./3.)
E0i=U13-H0/U13-A1/(3.*A0)
type *,'E0i=',E0i
A0=1.
A1=2.*rhos-1.
A2=4.*rhos*rhos/3.
A3=-3.*rhos/2.
H0=(3.*A0*A2-A1*A1)/(9.*A0*A0)
G=2.*((A1/(3.*A0))**3)-A1*A2/(3.*A0*A0)+A3/A0
U0=(-G+SQRT(G*G+4.*H0*H0*H0))/2.
U13=U0**(1./3.)
E0s=U13-H0/U13-A1/(3.*A0)
type *,'E0s=',E0s

```

```

k = .5*(E0s-E0i)/E0i
type *,'k=',k
m = m + ml
j=1
do 1000 i=1,(2*n+1)
ii = i - (n+1)
x(i) = ii*delx
ex(i,1) = 0
xm = mm*x(i)
if(xm.le.87..and.xm.ge.-87.) then
ey(i,1) = E0i*(1. + k*(1.+tanh(mm*(x(i)-X0))))
else if(xm.gt.87) then
ey(i,1) = E0i*(1. + 2.*k)
else
ey(i,1) = E0i
endif
xn = nn*x(i)
if(xn.le.87..and.xn.ge.-87.) then
C ro(i,1) = rho0*(2.*(1.-tanh(nn*x(i)))+.5)
ro(i,1) = rho0*(2.*(1.-tanh(nn*x(i)))+.25)
else if(xn.gt.87) then
C ro(i,1) = .5*rho0
ro(i,1) = .25*rho0
else
C ro(i,1) = 4.5*rho0
ro(i,1) = .25*rho0
endif
1000 continue
do 500 j=1,m+1
jj=j-1
y(j)=jj*dely
500 continue
C eyexato = (1.+k)*sqrt(1.+c*y(1)/(1.+k))
if(l.eq.1) then
write(15,*),y(1),ey(n+1,1)
endif
C type *,ex(n/2,1),ex(n+1,1),ex(3*n/2+1,1)
a1 = 0.
a3 = 0.
do 1500 i=2,2*n
xm = mm*(x(i)-X0)
xn = nn*x(i)
if(xm.le.87..and.xm.ge.-87.) then
b1 = E0i*k*mm*sech(xm)*sech(xm)
b3 = -E0i*k*mm*mm*sech(xm)*sech(xm)*tanh(xm)
else
b1 = 0.
b3 = 0.
endif
if(xn.le.87..and.xn.ge.-87) then
c1 = -2.*rho0*nn*sech(xn)*sech(xn)
c3 = 2.*rho0*nn*nn*sech(xn)*sech(xn)*tanh(xn)
else
c1 = 0.
c3 = 0.
endif
c2 = -(ro(i,1)*ro(i,1)+c1*ex(i,1))/ey(i,1)
b5 = -b3 + c2/2.
c4 = -2.*c1*ro(i,1)/ey(i,1)-b1*c2/ey(i,1)-a1*c1/ey(i,1)-
* 2.*ex(i,1)*c3/ey(i,1)
c5 = .5*(a1/ey(i,1)-3.*ro(i,1)/ey(i,1))*c2-.5*b1*c1/ey(i,1)-
* .5*ex(i,1)*c4/ey(i,1)
dely2 = dely*dely

```

```

ex(i,2) = ex(i,1) + b1*dely + (.5*c1-a3)*dely2
ey(i,2) = ey(i,1) + (ro(i,1)-a1)*dely + b5*dely2
ro(i,2) = ro(i,1) + c2*dely + c5*dely2
C
1500 type *,2,i,x(i),ex(i,2)
      continue
C
      eyexato = (1.+k)*sqrt(1.+c*dely/(1.+k))
      if(l.eq.1) then
        write(15,*)y(2),ey(n+1,2)
      endif
C
      type *,ex(n/2,2),ex(n+1,2),ex(3*n/2+1,2)
      do 3000 j=2,m
        do 2000 i=j+1,(2*n-j+1)
          ale = (ex(i+1,j)-ex(i-1,j))/(2.*delx)
          ble = (ey(i+1,j)-ey(i-1,j))/(2.*delx)
          cle = (ro(i+1,j)-ro(i-1,j))/(2.*delx)
          c2e = -(ro(i,j)*ro(i,j)+cle*ex(i,j))/ey(i,j)
          a3e = .5*(ex(i+1,j)-2.*ex(i,j)+ex(i-1,j))/(delx*delx)
          b3e = .5*(ey(i+1,j)-2.*ey(i,j)+ey(i-1,j))/(delx*delx)
          c3e = .5*(ro(i+1,j)-2.*ro(i,j)+ro(i-1,j))/(delx*delx)
          b5e = -b3e + c2e/2.
          car = ex(i,j)
          if(car.gt.0.) then
            alr = (ex(i,j)-ex(i-1,j))/delx
            blr = (ey(i,j)-ey(i-1,j))/delx
            clr = (ro(i,j)-ro(i-1,j))/delx
          else if(car.lt.0.) then
            alr = (ex(i+1,j)-ex(i,j))/delx
            blr = (ey(i+1,j)-ey(i,j))/delx
            clr = (ro(i+1,j)-ro(i,j))/delx
          else if(car.eq.0.) then
            alr = ale
            blr = ble
            clr = cle
          endif
          c2r = -(ro(i,j)*ro(i,j)+clr*ex(i,j))/ey(i,j)
          c3r = .5*(ro(i+1,j)-ro(i,j)+ro(i-1,j))/(delx*delx)
          c4r = -2.*ro(i,j)*clr/ey(i,j)-blr*c2r/ey(i,j)-alr*clr/ey(i,j)-
*          2.*ex(i,j)*c3r/ey(i,j)
          c5r = -.5*(c2r*(3.*ro(i,j)-alr)+clr*blr+ex(i,j)*c4r)/ey(i,j)
          dely2 = dely*dely
          ex(i,j+1) = ex(i,j) + ble*dely + (cle/2.-a3e)*dely2
          ey(i,j+1) = ey(i,j) + (ro(i,j)-ale)*dely + b5e*dely2
          ro(i,j+1) = ro(i,j) + c2r*dely + c5r*dely2
          if(l.eq.1) then
            if(j.eq.m/4) then
              write(11,*) x(i),ex(i,j+1)
            else if(j.eq.m/2) then
              write(12,*) x(i),ex(i,j+1)
            else if(j.eq.3*m/4) then
              write(13,*) x(i),ex(i,j+1)
            else if(j.eq.m) then
              write(14,*) x(i),ex(i,j+1)
            endif
          endif
2000      continue
C
      eyexato = (1.+k)*sqrt(1.+c*y(j+1)/(1.+k))
      if(l.eq.1) then
        write(15,*)y(j+1),ey(n+1,j+1)
      endif
C
      type *,ex(n/2,j+1),ex(n+1,j+1),ex(3*n/2+1,j+1)
3000      continue
C
C
...Procura da superficie equipotencial

```


C

```

      if(l.eq.2) then
      mf = (2*n+1)-m
      do 6000 i=m,mf
      v(i,1) = 1.
      v(i,2) = 1.
      do 5000 j=1,m
      v(i,2) = v(i,2) - (ey(i,j)+ey(i,j+1))*dely/2.
      if(v(i,2).le.v0) then
      y0 = ((v0-v(i,1))*y(j+1)+(v(i,2)-v0)*y(j))/(v(i,2)-v(i,1))
      write(10,*) x(i),y0
      goto 6000
      endif
      v(i,1) = v(i,2)
5000  continue
6000  continue
      endif
      stop
      end

```

Referências Bibliográficas

- [1] Lampert, M. A. e Mark, P., *Current Injection in Solids*. N. York, Academic Press, 1970.
- [2] Many, A. e Rakavy, G., *Phys. Rev.* 126, (1962) 1980.
- [3] Oliveira, L. N. e Leal Ferreira, G. F., *J. Electrostatics* 1, (1975) 371.
- [4] Budd, C. J. e Wheeler, A. A., *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, (1988) 389.
- [5] Sigmond, R. S., *J. Electrostatics* 18, (1986) 249.
- [6] Godounov, S., *Équations de la Physique Mathématique*. Moscou, MIR, 1973.
- [7] Leal Ferreira, G. F., *J. Nonmetals* 2, (1974) 109.
- [8] Felici, N. J., *Direct Current*, sept., (1963) 252.
- [9] Felici, N. J., *Direct Current*, oct., (1963) 278.
- [10] Atten, P., *C. R. Acad. Sci. Paris B* 266, (1968) 1188.
- [11] Atten, P., *R. G. E. Tome 83*, N° 3, (1974) 143.
- [12] Sarma, M. P. e Janischewskyj, W., *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, **PAS-88**, 5, (1969) 718.
- [13] Sarma, M. P. e Janischewskyj, W., *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, **PAS-88**, 10, (1969) 1476.
- [14] Smith, S. A., *IMA J. Appl. Math.* 39, (1987) 189.
- [15] Varley, E., *Oxford Study Group*, report (1985).
- [16] Budd, C. J. e Wheeler, A. A., *IMA J. Appl. Math.* 40, (1988) 1.
- [17] Deutsch, W., *Ann. Phys. (Leipzig)* 16, (1933) 588.
- [18] Popkov, V. I., *Dokl.* 58, (1947) 1043.
- [19] Popkov, V. I., *Electrichestvo* 1, (1949) 33.
- [20] Popkov, V. I. e Ryabaya, S. I., *Electrichestvo* 11, (1974) 45.
- [21] Sigmond, R. S., *J. Appl. Phys. Vol. 53*, 2, (1982) 892.
- [22] Walsh, P. J., Gallo, C. F. e Lama, W., *Photogr. Sci. Eng.*, 28, (1984) 109.
- [23] Janischewskyj, W., Sarma, M. P. e Gela, G. *CIGRE paper* 336—09, (1982).
- [24] Takuma, T., Ikeda, T. e Kowamoto, T., *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, **PAS—100** (12) (1981) 4802.
- [25] Jacobs, D. A. H., *PDEs. CERL (Letherhead, London) RD/L/N 66/72* (1972).
- [26] Budd, C. J., Friedman, A., McLeod, B. e Wheeler, A. A., *SIAM J. Appl. Math. Vol. 50*, 1, (1990) 181.
- [27] Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press (1965).
- [28] Dantas, I. F., Leal Ferreira, G. F. e Figueiredo, M. T. — *Cálculo Aproximado da Linha de Corrente Extrema em um Eletrodo Parcialmente Emissor*. In: XIII Encontro Nac. de Fis. da Mat. Condensada, Caxambu, 8—12 maio (1990).