UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO GRUPO
DE RENORMALIZAÇÃO EM REDES HIERÁRQUI-
CAS

Francisco de Assis Ribas Bosco

Dissertação de mestrado apresenta-
da ao Instituto de Física e Quími-
ca de São Carlos-USP para obten-
ção do título de Mestre em Física
Básica.

Orientador: Prof.Dr.Sylvio Goulart Rosa Junior

São Carlos - São Paulo
Outubro de 1988

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
Francisco de Assis Ribas Bosco APRESENTADA
AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSI
DADE DE SÃO PAULO, EM 21 DE novembro DE 1988.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Sylvio G. Rosa Junior

Orientador

Dr. Nestor Felipe Caticha Alfonso

Dr. Francisco Castilho Alcaraz

AGRADECIMENTOS

- . Carolina, Krishna, Nilton, Lucas, Estevão, Sra. Nazaré, Maurício, pelo apoio imprescindível do amor.
- . Márcio, Márcia, Lula, Chahine, Nestor, Clisthenis, Zé Fernando, Débora, Marco Antonio, Fernando, Abraham, Humberto, Odete, Alexandre, pelo apoio necessário da amizade e da alegria.
- . Aos Samaritanos e às pessoas que precisaram de mim, por tudo que me ensinaram sobre mim mesmo, fator necessário a qualquer realização.
- . Aos Profs. Nestor Caticha, Janey Daccach, Florêncio Guimarães, Hans J. Hermann, pelas discussões proveitosas.
- . Ao Prof. Sylvio Goulart Rosa Jr., pela orientação segura, o apoio profissional e a amizade sempre presente.
- . À Irene, pela arte datilográfica.
- . Ao IFQSC-USP e ao DFQ-UFES, pelo apoio institucional.

.....

Aos meus pais

eterna gratidão

Ciência e religião
razão e sentimento
o vôo do espírito humano
só se completa com as
duas asas do conhecimento.
A Pietro Ubaldi - admiração
profunda.

Na carícia do vento
Na força do sol
Na beleza da flor
Na paz da montanha
A certeza da minha transformação
permanente com você.
À Carolina - amor e carinho.

Ou a ciência assume o seu
papel de transformação
moral do Homem, ou ela se
prostituirá como mera
reprodutora de confortos
materiais inúteis.

PIETRO UBALDI

O que é belo na ciência é o que também
é belo em Beethoven. Há uma névoa de
eventos e repentinamente você vê uma
conexão. Isto expressa o complexo de
conceitos humanos que penetra profun-
damente em você, que conecta coisas que
sempre estiveram em você e que nunca
havam sido postas juntas antes.

V. F. WEISSKOPF

Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I . SISTEMAS DINÂMICOS COMO MAPEAMENTOS NA ESFERA DE RIEMANN	
I.1 Definições e teoremas básicos	9
I.2 Propriedades dos conjuntos de Julia e Fatou	16
CAPÍTULO II . O MODELO DE POTTS P-ESTADOS NA ÁRVORE DE CAYLEY : TRATAMENTO CANÔNICO	
II.1 A árvore de Cayley e o mapa de Bethe-Peierls	25
II.2 Propriedades do mapa BP :propriedades locais e globais do sistema de Potts.	36
II.3 A energia livre e a transição de ordem contínua	49
CAPÍTULO III . PROPRIEDADES DO CONJUNTO DE JULIA DO MAPA DE BETHE-PEIERLS	
III.1 O conjunto de Julia e os zeros de Yang-Lee	63
III.2 O locus do conjunto de Julia e do conjunto de zeros	65
III.3 A medida de probabilidade do conjunto de Julia	75
III.4 As dimensões do conjunto de Julia ...	82
III.5 A inclinação do conjunto de Julia ...	86
III.6 Comentários finais	92
APÊNDICE	96
REFERÊNCIAS	106

RESUMO

Neste trabalho estudamos o comportamento crítico do modelo de Potts p -estados na árvore de Cayley, através das propriedades do conjunto de zeros de Yang-Lee da função de partição. Tratando a transformação do grupo de renormalização como um mapeamento racional na esfera de Riemann utiliza-se alguns resultados da teoria de Julia e Fatou para obter-se uma descrição geométrica do comportamento crítico do modelo. Mostra-se de que forma o conjunto de zeros de Yang-Lee se relaciona com o conjunto de Julia do mapa do grupo de renormalização, e calcula-se alguns parâmetros geométricos desse conjunto que descrevem o comportamento não-universal do modelo.

ABSTRACT

We study the critical behaviour of the p -state Potts model on a Cayley tree, looking for the properties of the Yang-Lee zeros set of the partition function. We treat the renormalization group transformation as a rational mapping on the Riemann sphere, and use some results from the Julia and Fatou theory to obtain a geometrical description of the critical properties of the model. We show how the Yang-Lee zeros set is associated with the Julia set of the renormalization group map, and we also calculate some geometrical parameters of this set which describes the non-universal behaviour of the model.

INTRODUÇÃO

A teoria do grupo de renormalização⁽¹⁻⁹⁾ representou um dos maiores triunfos da física teórica da década passada. O método do GR tem sido aplicado desde então em uma variedade muito grande de problemas físicos.

Recentemente tem se intensificado o interesse pelo estudo da dinâmica não linear e aqui novamente o GR tem mostrado sua grande utilidade.

Quando Wilson⁽¹⁾ desenvolveu a teoria do GR, lançou mão de técnicas da teoria quântica de campos. Essa abordagem foi mais tarde ampliada por Brézin⁽⁵⁾, utilizando todo o poder da teoria de campos e da equação de Callan-Symanzik. Enquanto isso as idéias básicas do grupo de renormalização se tornaram mais claras, e foram feitas várias tentativas no sentido de se implementar as idéias do GR diretamente sem recorrer à teoria de campos.

Desse esforço resultou o chamado GR no espaço real^(8 - 16). Aqui os cálculos são feitos diretamente no espaço das posições em contraposição à expansão ϵ da teoria de campos no espaço dos momentos.

A idéia básica de renormalização foi introduzida por L. P. Kadanoff⁽⁷⁻⁹⁾. Ele considerou como um magneto deveria parecer quando observado em diferentes escalas. Consideremos, p. ex., um sistema de Ising ferromagnético em uma rede regular. À temperatura zero todos os spins estão alinhados, e essa configuração não muda quando o sistema é observado em diferentes escalas.

Esse comportamento é semelhante quando o sistema é observado a uma temperatura infinitamente alta. Os spins flutuam totalmente independentes uns dos outros, em todas as escalas e existe uma completa desordem e conseqüentemente o quadro, em dife

rentes escalas, é sempre o mesmo.

A formalização dessas idéias pode ser posta da seguinte maneira: agrupamos os spins da rede em blocos e substituímos cada bloco por um spin de bloco, cujo valor é definido pelo valor majoritário dos spins que formam o bloco, obtendo assim um novo sistema com parâmetro de rede maior, como na figura abaixo

A $T = 0$ os spins μ da rede renormalizada estarão no mesmo estado dos spins σ da rede original, e a $T = \infty$ a flutuação independente dos spins μ permanece como na rede dos spins σ .

Consideremos agora o sistema a uma temperatura intermediária, porém baixa o suficiente para que ainda exista ordem. A ordem não é completa devido às flutuações térmicas, porém a medida em que se processa a renormalização, as flutuações vão gradativamente desaparecendo, mostrando um quadro muito semelhante ao que o sistema apresenta a $T = 0$. A alta temperatura ($T \neq \infty$) a desordem não é completa. Existem agregados que apresentam alinhamento de spins. No entanto a mudança de escala faz com que esses pequenos aglomerados coerentes gradativamente desapareçam mostrando um quadro semelhante àquele do sistema a $T = \infty$.

A essência dessa idéia é associar transformações de escala com mudanças na temperatura. Nessa visão qualitativa identificamos os valores $T = 0$ e $T = \infty$ como atratores, pontos fixos de natureza estável, dessa transformação. Chamamos de domí-

nios de atração ou bacias atratores ao conjunto dos valores de T que estão associados aos atratores pela transformação do GR. Da mesma forma chamamos de fase do sistema ao conjunto dos estados associados aos valores de T de uma bacia atratora.

A temperatura crítica $T = T_c$ é a fronteira dos dois domínios de atração. Nessa temperatura o sistema possui flutuações de todas as ordens, em todas as escalas. Os spins estão todos correlacionados, e nessa temperatura o sistema apresenta sempre o mesmo quadro após ser renormalizado. Consequentemente a temperatura T_c é um ponto fixo da transformação, porém da natureza instável. Resumidamente, o padrão de flutuações na temperatura crítica é auto-similar.

No entanto, essa sugestiva descrição de flutuações auto-similares desapareceu à medida que a idéia de renormalização evoluiu da visão inicial de Kadanoff à construção do método por Wilson.

Porém, recentemente a teoria do grupo de renormalização revelou a existência de fronteiras de fase de natureza fractal^(17,18), que sugerem intuitivamente uma relação com a idéia de auto-similaridade de Kadanoff.

Para se entender essa ligação é necessário estender-se a noção de fronteira de fase para o plano complexo dos parâmetros do sistema.

Em 1952, Yang e Lee⁽¹⁹⁾ discutiram a questão de como o formalismo canônico da mecânica estatística formulado por Boltzmann e Gibbs poderia descrever transições. O problema era clarificar a natureza matemática das singularidades que deveriam apresentar as quantidades termodinâmicas para descrever as transições de fase.

O problema foi abordado permitindo que a fugacidade assumisse valores complexos. Embora somente valores reais da fuga

cidade tenham algum significado físico, o comportamento analítico das funções termodinâmicas só pode ser completamente revelado no plano complexo. Esse tratamento é de caráter bastante geral e pode ser aplicado a vários problemas como o gás na rede com interação atrativa entre primeiros vizinhos, ferromagnetismo, transição ordem desordem, etc..

As conclusões físicas de Yang e Lee derivam de alguns resultados matemáticos que foram apresentados na forma de três teoremas, cuja demonstração não apresentaremos aqui mas que podem ser encontradas na referência (19).

Teorema 1 : Para todo valor real positivo da fugacidade Y , o limite $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \log \Xi$ (V volume do sistema e Ξ função de grande partição), existe e é independente da forma de V . Além disso, esse limite é uma função contínua, monótona crescente de Y .

A função de grande partição de um sistema finito pode ser escrita como um polinômio de grau M em Y , podendo ser fatorada na forma

$$\Xi = \prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{Y}{Y_i} \right)$$

onde os Y_i são as raízes da equação $\Xi(Y) = 0$.

É claro que nenhuma dessas raízes pode ser real e positiva, pois todos os coeficientes do polinômio acima são positivos.

À medida que o tamanho do sistema (V) aumenta, essas raízes se movem no plano da fugacidade complexa e o número (M) de raízes aumenta. A distribuição das raízes no plano Y , no li-

mite termodinâmico fornece o comportamento analítico das funções termodinâmicas. Esse fato fica estabelecido no teorema :

Teorema 2 : Se no plano Y complexo uma região R que contém um segmento do eixo real positivo, não contém raízes da função de grande partição, então nessa região, no limite termodinâmico todas as grandezas:

$$\frac{1}{V} \log \Xi, \left(\frac{\partial}{\partial \log Y} \right) \frac{1}{V} \log \Xi, \left(\frac{\partial}{\partial \log Y} \right)^2 \frac{1}{V} \log \Xi, \dots$$

possuem limites que são analíticos em Y . Assim as operações $\left(\frac{\partial}{\partial \log Y} \right)$ e $\lim_{V \rightarrow \infty}$ comutam em R e portanto

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial \log Y} \right) \frac{1}{V} \log \Xi = \left(\frac{\partial}{\partial \log Y} \right) \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \log \Xi$$

Yang e Lee mostraram que o problema do gás na rede, para o qual se aplicam os teoremas 1 e 2 com Y sendo o peso de Boltzmann do potencial químico, é totalmente equivalente ao problema de Ising ferromagnético com campo magnético externo. A função de grande partição no problema do gás na rede é proporcional à função de partição do problema de Ising. O peso de Boltzmann do campo magnético externo

$$z = \exp(-2\beta H), \quad \beta = 1/k_B T$$

é proporcional à fugacidade Y . A função de partição do problema de Ising é proporcional a um polinômio em z

$$P(z) = \sum_n C_n z^n$$

onde os coeficientes C_n são as contribuições a campo zero para a fun

ção de partição.

Portanto o problema de estudar a transição de fase do problema de Ising ferromagnético se resume em determinar a distribuição dos zeros da função de partição no plano z complexo. Yang e Lee lograram demonstrar o seguinte teorema, que se tornou conhecido como teorema de Yang-Lee:

Teorema 3 : Se a interação U entre dois átomos de um gás é tal que

$U = \infty$ se os átomos ocupam o mesmo ponto

$U \leq 0$ caso contrário

então todas as raízes do polinômio $P(z)$ pertencem ao círculo unitário no plano z complexo.

Voltando ao problema de Ising podemos dizer que o conjunto dos zeros (na fugacidade z) da função de partição está contido no círculo unitário do plano z complexo, independentemente da geometria da rede, do alcance da interação, e do tamanho do sistema.

Dessa forma a teoria de Yang e Lee fornece uma descrição da transição de fase do modelo de Ising ferromagnético: a alta temperatura o conjunto de zeros não toca o eixo real, e portanto as funções termodinâmicas são analíticas para todo valor do campo externo. A partir da temperatura crítica, o conjunto de zeros se aproxima arbitrariamente do ponto $z = 1$ (campo externo nulo), e portanto temos dois domínios de analiticidade para as funções termodinâmicas separados pelo círculo unitário.

Embora o teorema de Yang-Lee não se aplique ao plano da temperatura complexa, pode-se imaginar a existência de uma fronteira complexa nesse plano, que no eixo real positivo é a temperatura crítica T_c , e que delimita dois domínios de analiti

cidade em $T^{(20)}$.

A maior dificuldade no tratamento de Yang-Lee é a determinação da distribuição do conjunto de zeros da função de partição. O problema da localização dos zeros de um polinômio não é um problema simples de ser atacado.

No entanto, para modelos definidos em redes hierárquicas é possível se determinar o locus do conjunto de zeros graças ao fato de ser a transformação do GR desses problemas um mapa racional ou polinomial que fornece de forma recursiva os zeros da função de partição⁽¹⁷⁻²¹⁾ associados à variável dinâmica (grandeza renormalizada) do mapa ou transformação do GR.

Extendido ao plano complexo, os mapas do GR dos problemas definidos em redes hierárquicas se tornam mapeamentos da esfera de Riemann na esfera de Riemann.

Esses mapeamentos foram primeiramente estudados por G. Julia e P. Fatou⁽²²⁾ no início do século, e recentemente B. B. Mandelbrot⁽²³⁾ estendeu o estudo do mapa logístico ao plano complexo.

Julia e Fatou mostraram que os mapeamentos racionais e polinomiais de grau maior ou igual a dois separam a esfera de Riemann em dois conjuntos disjuntos com propriedades matemáticas distintas. Um desses subconjuntos da esfera de Riemann, conhecido como conjunto de Julia, está associado ao ponto fixo instável do mapa e mantém estreita relação com o conjunto dos zeros da função de partição de modelos definidos em redes hierárquicas.

Esse fato sugere a seguinte questão: De que forma as propriedades geométricas dos conjuntos de Julia e consequentemente dos conjuntos de zeros da função de partição, descrevem o comportamento dos modelos em redes hierárquicas?

A resposta a essa pergunta exige o estudo do mapa do

GR e das suas propriedades geométricas usando a teoria de Julia e Fatou. Assim esse formalismo permite, no caso das redes hierárquicas, evidenciar a equivalência de dois tratamentos para o fenômeno de transição de fase: O grupo de renormalização, e a teoria de Yang-Lee, através da teoria de Julia e Fatou.

Neste trabalho estuda-se o modelo de Potts p -estados na árvore de Cayley fechada assimétrica, no formalismo de Yang-Lee tratando o mapa do GR como um mapeamento na esfera de Riemann. A implementação do grupo de renormalização no espaço real fornece um mapa, conhecido como mapa de Bethe-Peierls (BP), cujas propriedades locais (na rede de Bethe), associadas aos atratores do mapa, descrevem a aproximação de Bethe-Peierls (campo médio) para o modelo⁽²⁴⁾. Os conjuntos de Julia descrevem geometricamente as propriedades globais⁽²⁵⁾ (na árvore de Cayley) do sistema.

No capítulo I são apresentados vários resultados da teoria de Julia e Fatou que serão utilizados no capítulo III. No capítulo II o modelo de Potts p -estados na árvore de Cayley é tratado canonicamente e mostra-se que o sistema apresenta uma transição de ordem contínua no campo magnético. Finalmente no capítulo III, descreve-se geometricamente, através das propriedades dos conjuntos de Julia, a transição de ordem contínua do sistema. Ainda nesse capítulo mostra-se que para $p > 2$ o modelo não obedece ao Teorema de Yang-Lee. No apêndice descreve-se de forma resumida alguns resultados recentes para determinação do espectro de dimensões de conjuntos, baseados no estudo das singularidades nas medidas desses conjuntos.

CAPITULO I

SISTEMAS DINÂMICOS COMO MAPEAMENTOS NA ESFERA DE RIEMANN

Neste capítulo apresentamos as noções básicas e os principais resultados sobre os mapeamentos racionais e polinômiais na esfera de Riemann. A teoria desses mapeamentos foi desenvolvida primeiramente por G. Julia e P. Fatou⁽²²⁾ no início do século. Mais recentemente novos resultados foram obtidos por J.H. Hubbard, A. Douady e D. Sullivan⁽³⁰⁾.

Para alguns dos teoremas apresentados aqui as respectivas demonstrações foram omitidas por envolverem uma quantidade excessiva de conceitos adicionais fugindo ao objetivo principal deste trabalho. Essas demonstrações, bem como um estudo mais aprofundado dos mapeamentos na esfera de Riemann podem ser encontrados nas referências^(22,29,30).

I.1 - Definições e Teoremas básicos

Um sistema dinâmico discreto é basicamente uma transformação que associa a um valor inicial, uma sequência de valores

$$z_{n+1} = R(z_n) \quad (I.1)$$

A fim de incluir os mapeamentos no ponto infinito e como o plano complexo não é compacto, definimos a transformação (I.1) na esfera de Riemann $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ (projeção estereográfica entre o plano C e a esfera complexa),

$$R : \bar{C} \longrightarrow \bar{C} \quad (I.2)$$

Estamos interessados particularmente em estudar a dinâmica de um sistema dinâmico discreto analítico em $\bar{\mathbb{C}}$ do tipo

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (1.3)$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios com coeficientes complexos e sem fatores comuns. Os pólos da transformação (1.3) são os pontos de $\bar{\mathbb{C}}$ que são mapeados no infinito (pólo norte da esfera de Riemann).

Definimos o grau $gr(R)$ do mapa R como

$$gr(R) = \max \{ gr(P), gr(Q) \} \quad (1.4)$$

O grau de R é o número (contado como multiplicidade) das imagens inversas de qualquer ponto em $\bar{\mathbb{C}}$. A teoria de Fatou e Julia se aplica a mapas racionais de grau maior ou igual a dois.

Definição 1.1 : Seja $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$. A sequência indutivamente definida pelo mapa (1.1) é chamada órbita direta do ponto z_0 , $\theta^+(z_0)$.

Definição 1.2 : Se $z_n = z_0$ para algum n , então z_0 é um ponto periódico e $\theta^+(z_0)$ é uma órbita periódica ou ciclo periódico. Se n é o primeiro número natural tal que $z_n = z_0$, então n é o período da órbita. Se $n = 1$ z_0 é chamado ponto fixo.

Denotamos por R^n a n -ésima composição

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_n$$

da função R . Nesse sentido $R^2(z)$ não é quadrado de R mas sim $R^2(z) = R[R(z)]$.

Definição 1.3 : Seja z_0 um ponto periódico de período n . Então o número $\gamma = (R^n)'(z_0)$ é o autovalor da órbita periódica.

O autovalor γ é o coeficiente da expansão de Taylor em torno do ciclo periódico do mapa. O seu módulo fornece portanto um critério de estabilidade para o ciclo periódico.

Definição 1.4 : Uma órbita periódica (ciclo) $\mathcal{O}^+(z_0)$ é:

- atratora (estável) se $0 < |\gamma| < 1$
- superatratora (superestável) se $\gamma = 0$
- repulsora (instável) se $|\gamma| > 1$
- neutra (indiferente) se $|\gamma| = 1$

Da mesma forma que temos órbitas diretas $\mathcal{O}^+(z_0)$, podemos também considerar as pré-imagens obtidas da inversa de R , $x_n = R^{-1}(x_{n+1})$. No caso da equação (I.3), a inversa será uma aplicação $1 \rightarrow \text{gr}(R)$. O conjunto das pré-imagens formam a órbita inversa $\mathcal{O}^-(z_0)$ de um ponto z_0 em $\bar{C}$.

Definição 1.5 : Um ponto C é chamado ponto crítico do mapa R se $R'(C) = 0$.

Definição 1.6 : Seja z_0 um ponto fixo estável de R . Então a bacia atratora de z_0 é o conjunto

$$W(z_0) = \left\{ z \mid R^n(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty \right\}$$

Como exemplo tomamos o mapa $R(z) = z^2$. Esse mapa pos-

sui três pontos fixos : $z_0 = 0$ e $z_0 = \infty$ estáveis e $z_0 = 1$ instável. Consideremos um ponto $z = \rho e^{i\theta}$. Se $\rho = 1$ é óbvio que $R(z)$ gera um outro ponto com $\rho = 1$. Porém se $\rho < 1$, então sua órbita direta é atraída ao ponto fixo $z_0 = 0$, e portanto o interior do círculo unitário é a bacia atratora do ponto fixo $z_0 = 0$.

Por outro lado se $\rho > 1$ então as iteradas de R levam ao ponto $z_0 = \infty$, e portanto o exterior do círculo unitário é a bacia atratora do ponto $z_0 = \infty$. O círculo unitário é a fronteira das duas bacias atradoras.

As n iteradas de um ponto z_0 , $R^n(z_0)$, podem ser vistas como transformação do ponto z_0 pela família de funções R^n . Portanto o estudo da dinâmica do mapa $R(z)$ se relaciona ao estudo das propriedades da família de funções R^n .

Nas definições a seguir utiliza-se a métrica esférica em $\bar{\mathbb{C}}$.

Definição 1.7 : Seja U um subconjunto aberto de $\bar{\mathbb{C}}$ e $F = \{f_i / i \in I\}$ (I um conjunto indexador) uma família de funções meromórficas (funções cujas singularidades são pólos). A família F é dita uma família normal se toda sequência f_n contém uma subsequência f_{n_j} , que converge uniformemente nas partes compactas de U .

Definição 1.8 : Seja X um espaço métrico com métrica d . Uma família de funções $\{f_i : X \rightarrow X\}$ é uma família equicontínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $d(x_1, x_2) < \delta$ implica $d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \varepsilon$, para todo i .

Como exemplo seja $R(z) = az$ com $|a| < 1$ e tomemos $R_n(z) = R^n(z)$. Então $\{R_n\}$ forma uma família normal em qualquer domínio de $\bar{C}$ pois R_n converge uniformemente para a função constante 0 em subconjuntos compactos. No caso $|a| > 1$ a família R_n é normal em todo domínio que não inclua o ponto 0, pois em qualquer vizinhança de 0 existe um ponto z para o qual $|R^n(z)|$ é arbitrariamente grande para algum n .

Os conceitos de normalidade e equicontinuidade estão ligados no teorema de Arzela.

Teorema 1.1 (ARZELA) : A família $F = \{f_i : U \rightarrow \bar{C}\}$ de funções meromórficas é uma família normal se e somente se F é uma família equicontínua em toda parte compacta de U .

Portanto as famílias normais assumem valores que não divergem por iteração.

Com o conceito de normalidade definimos bacia imediata de um atrator.

Definição 1.9 : Chama-se bacia imediata $A(z_0)$ de um ponto fixo estável ao máximo domínio contendo z_0 onde a família $\{R^n\}$ é normal.

A teoria de Julia e Fatou é voltada para a decomposição disjunta e invariante da esfera de Riemann em dois conjuntos, que ficaram conhecidos como o conjunto de Julia e o conjunto de Fatou.

Definição 1.9 : Um ponto $z \in \bar{C}$ é um elemento do conjunto de Fatou, $F(R)$, de R se existe uma vizinhança U

de z em $\bar{C}$ tal que a família de iteradas $\{R^n/U\}$ é uma família normal. O conjunto de Julia $J(R)$ é o complementar do conjunto de Fatou.

Consideremos novamente como exemplo o mapa $R(z)=z^2$. Primeiro observamos que o mapa $H(z) = 1/z$ é um mapa um por um, analítico fora da origem, e que $H \circ R \circ H^{-1} = R$, isto é, o mapa H conjugua o mapa R ao próprio mapa R . Como $H(z)$ leva o ponto 0 no infinito e vice-versa, então o comportamento local de R no infinito é levado ao ponto 0, ou seja, o comportamento analítico de R no infinito e no 0 é idêntico. Munido da métrica usual, e tendo em vista a conjugação de $R(z)$ por $H(z)$, é simples mostrar que a família $\{R^n(z)\}$ é equicontínua no interior e no exterior do círculo unitário.

Pelo teorema de Arzela (1.1) a família $\{R^n\}$ é normal nesse domínio.

Por outro lado o mapa $R(z)$ no círculo unitário se torna um mapa do tipo $\theta \rightarrow 2\theta$, e portanto nesse domínio a família $\{R^n\}$ não é equicontínua e conseqüentemente não é normal.

Portanto o conjunto de Fatou do mapa $R(z) = z^2$ tem duas componentes, o interior e o exterior do círculo unitário, e o conjunto de Julia é o círculo unitário.

O conjunto de Julia é a fronteira das duas bacias atratoras do mapa. Observamos que os pontos fixos estáveis pertencem ao conjunto de Fatou e que o ponto fixo instável pertence ao conjunto de Julia.

Devido ao fato de ser a transformação inversa $R^{-1}(z)$ pluvíroca, não se pode afirmar que o ponto fixo instável é um atrator do mapa inverso mas sim que o conjunto das pré-imagens do ponto fixo instável é um atrator para $R^{-1}(z)$.

Embora no caso $R(z) = z^2$ o conjunto de Julia tenha

uma forma bastante simples e de fácil determinação, são raros os exemplos em que isto ocorre.

Em muitos casos os conjuntos de Julia são fractais (sua dimensão de Hausdorff é maior que sua dimensão topológica). O exemplo talvez mais estudado seja o do mapa logístico extendido ao plano complexo, $R(z) = z^2 + c$, c complexo.

Quando $c = 0$ o conjunto de Julia é o círculo unitário. Porém para $|c| \sim 0$ o conjunto $J(R)$ é uma linha conexa não retificável, como mostra a figura (I.1) abaixo.

Fig. I.1

O mapa ainda possui dois atratores e um repulsor e o conjunto de Fatou possui duas componentes. Porém a fronteira das bacias atratoras é um fractal. D. Ruelle⁽³⁾ mostrou que para $|c| \sim 0$ a dimensão de Hausdorff é dada por

$$D \sim 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + \dots \quad (I.5)$$

O teorema seguinte, conhecido como teorema de Montel é fundamental para se obter várias propriedades dos conjuntos de Julia e Fatou.

Teorema 1.2 (MONTEL) : Seja F uma família de funções meromórficas definidas em um domínio U . Suponha que existam pontos a, b, c em $\bar{C}$ tal que $\left[\bigcup_{f \in F} f(U) \right] \cap \{a, b, c\} = \emptyset$. Então F é uma família normal em U .

Corolário : Seja $z \in J(R)$. Se U é uma vizinhança de z então o conjunto $E_U = \bar{C} - \bigcup_{\eta > 0} R^\eta(U)$ contém no máximo dois pontos. Tais pontos são chamados pontos excepcionais.

Com esse conjunto básico de definições e mais o teorema de Montel e seu corolário, várias propriedades dos conjuntos de Julia e Fatou podem ser derivadas. Essas propriedades serão utilizadas no capítulo III para os conjuntos de Julia do mapa de Bethe-Peierls para o problema de Potts.

1.2 - Propriedades dos conjuntos de Julia e Fatou

De acordo com a definição (1.7) o conjunto de Fatou $F(R)$ é aberto, e conseqüentemente o conjunto de Julia $J(R)$ é fechado. Como o mapa R é um mapeamento aberto e contínuo então $z \in F(R) \Rightarrow R(z) \in F(R)$ e ainda $R^{-1}(z) \subset F(R)$. Portanto $F(R)$ é completamente invariante, e $J(R)$ é invariante e compacto.

Outra propriedade que decorre da definição dos conjuntos $J(R)$ e $F(R)$ é :

Teorema 1.3 : O conjunto $J(R)$ é não vazio.

Prova : Suponhamos $J(R) = \emptyset$. Então $F(R) = \overline{C}$ e portanto a família $\{R^n\}$ é normal em C . Assim uma subsequência convergente R^{n_i} converge uniformemente (na métrica esférica) para uma função meromórfica R , e devemos ter $\text{gr}(R^{n_i}) \rightarrow \text{gr}(R)$. Mas por outro lado $\text{gr}(R^{n_i}) \rightarrow \infty$ se $n_i \rightarrow \infty$, e como $\text{gr}(R)$ é finito, então devemos ter $J(R) \neq \emptyset$.

Do teorema (1.1) e lembrando que se uma sequência R^n de funções analíticas converge uniformemente em um domínio U para um mapa R então R é analítica em U , e $R^{n(k)}(z) \rightarrow R^{(k)}(z)$ ($R^{(k)}$ a derivada k -ésima de R), temos

Teorema 1.4 : Se $\theta^+(z_0)$ é uma órbita periódica atratora ou superatratora, então ela está totalmente contida em $F(R)$. Se a órbita é repulsora então ela está totalmente contida em $J(R)$.

Prova : Apresentamos a prova para um ponto fixo. Para o ciclo periódico a prova é apenas um pouco mais complicada.

Consideremos um ponto fixo z_0 instável e digamos que $\{R^n\}$ é normal em uma vizinhança U de z_0 .

Como $R^n(z_0) = z_0$ para todo n segue que $R^n(z)$ não converge para ∞ em U . Portanto uma sequência $\{R^n\}$ tem uma subsequência $\{R^{n_i}\}$ que converge uniformemente para R em U .

Portanto $|(R^{n_i})'(z_0)| \rightarrow |R'(z_0)|$. Mas $|(R^{n_i})'(z_0)| \rightarrow \infty$. Consequentemente $\{R^n\}$ não é normal e o

ponto fixo instável z_0 pertence a $J(R)$. A prova para o caso em que z_0 é estável ou superestável é análoga.

Como consequência do corolário do teorema (1.2) pode-se mostrar que o conjunto $J(R)$ não possui pontos interiores, isto é, se o interior $\text{int } J(R) \neq \emptyset$ então $J(R) = \bar{C}$. Isto significa que $J(R)$ é uma linha conexa, um conjunto totalmente desconexo, ou $J(R) = \bar{C}$.

Outra consequência importante do teorema (1.2) é:

Teorema 1.5 : Seja $E(R)$ o conjunto dos pontos excepcionais de R . Se $z \in (\bar{C} - E)$ então $J(R)$ está contido no conjunto dos pontos de acumulação da órbita inversa completa de z ,

$$J \subset \left\{ \text{pontos de acumulação de } \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right\}$$

e conseqüentemente, se $z \in J(R)$

$$J = \text{fecho} \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right)$$

Prova : Da definição do conjunto $E(R)$, como $J(R)$ e $F(R)$ são disjuntos, e como as iteradas de qualquer vizinhança de um ponto de $J(R)$ atinge um ponto não excepcional, segue a primeira afirmação do teorema.

Se $z \in J(R)$ então $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \subset J(R)$ pois $J(R)$ é invariante. Como $J(R)$ é fechado, então

$$J \supset \text{fecho} \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right)$$

Mas, da primeira afirmação do teorema segue que

$$J \subset \text{fecho} \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right).$$

O teorema (1.5) sugere um algoritmo para gerar numericamente uma figura do conjunto de Julia.

O conjunto das iteradas inversas de um ponto não excepcional do conjunto de Fatou se aproxima assintoticamente do conjunto de Julia. Ou ainda, se conhecermos um ponto do conjunto de Julia, a sua órbita inversa é densa em $J(R)$.

O teorema (1.5) sugere uma visualização do conjunto de Julia que às vezes é usada como definição de $J(R)$: seja $z \in (\bar{C} - E)$ e U uma vizinhança de z que não intercepta o conjunto $J(R)$. O conjunto das iteradas de U , $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(U)$ gera a bacia atratora de um ciclo estável, e assim o conjunto de Julia é a fronteira da bacia atratora. A fronteira da bacia imediata de um atrator é um subconjunto de $J(R)$.

Nas figuras (I.2) e (I.3) mostramos dois conjuntos de Julia do mapa $R(z) = z^2 + C$ quando o mapa possui um ciclo atrator do período 2 e 3 respectivamente. A parte hachureada é a bacia imediata. Observamos que nesses casos o conjunto de Fatou possui uma infinidade de componentes.

Fig. I.2

Fig. I.3

O teorema seguinte é muito útil para se testar numericamente a conectividade de $J(R)$.

Teorema 1.6 : A bacia imediata $A(z_0)$ de um atrator z_0 contém no mínimo um valor crítico do mapa.

Em virtude do teorema (1.6) o teste sobre a conectividade dos conjuntos de Julia de mapas polinomiais é imediato: se a órbita direta do ponto crítico atingir uma órbita estável então a fronteira da bacia atratora é conexa; se a órbita do ponto crítico divergir então o infinito é o único atrator, e aqui temos duas possibilidades: a fronteira é um conjunto desconexo ou então uma linha não fechada, e em ambos casos o conjunto de Fatou possui uma única componente.

Outras duas propriedades importantes dos conjuntos de Julia são:

Teorema 1.7 : O conjunto de Julia é perfeito (todos os pontos de $J(R)$ são pontos de acumulação de pontos em $J(R)$).

Como consequência do teorema (1.7) o conjunto de Julia é um conjunto não contável.

Teorema 1.8 : O conjunto $J(R)$ é o fecho dos pontos periódicos repulsores.

Prova : Como $J(R)$ é invariante, dos teoremas (1.4) e (1.5) segue o teorema (1.8).

Como consequência o conjunto das pré-imagens do ponto

fixo instável do mapa $R(z)$ é denso em $J(R)$.

O teorema (1.8), conhecido como teorema fundamental da decomposição, permite obter dois resultados notáveis sobre as componentes do conjunto de Fatou.

Teorema 1.9 : Se o número de componentes de $F(R)$ é finito, então $F(R)$ tem no máximo duas componentes.

Como o conjunto de Fatou é controlado pelos atratores do mapa então podemos ter as seguintes possibilidades:

1. O mapa possui dois pontos fixos estáveis e $F(R)$ possui duas componentes.
2. O mapa possui um ciclo atrator e o conjunto $F(R)$ tem infinitas componentes.
3. O mapa possui apenas um ponto fixo estável e portanto $F(R)$ possui uma única componente.

Exemplos dos casos (1) e (2) já foram apresentados nas figuras (I.1), (I.2) e (I.3). Para o caso (3) as figuras (I.4) e (I.5), conjuntos de Julia do mapa quadrático, são exemplos de um conjunto desconexo e uma linha conexa não fechada respectivamente.

fig. I.4

fig. I.5

Com relação à bacia imediata de um atrator os casos (1), (2) e (3) acima se relacionam no teorema seguinte.

Teorema 1.10 : Seja z_0 um ponto fixo estável do mapa. Então a sua bacia imediata $A(z_0)$ é simplesmente conexa ou tem conectividade infinita.

Assim, se o mapa possuir apenas um ponto fixo estável então: o conjunto de Fatou é simplesmente conexo no caso do conjunto de Julia ser uma linha não fechada, e $F(R)$ tem conectividade infinita no caso do conjunto de Julia ser desconexo.

Para concluir este capítulo, apresentamos de forma sucinta o conjunto que ficou conhecido como conjunto de Mandelbrot definido no espaço dos parâmetros do mapa.

Consideremos o mapa $R(z) = z^2 + C$, C complexo. Para cada valor de C o mapa possui um conjunto de Julia $J_C(R)$, que como vimos pode ser conexo ou desconexo. O conjunto de Mandelbrot M do mapa $R(z)$ é definido como o conjunto dos valores de $C \in \mathbb{C}$ tal que o conjunto de Julia $J_C(R)$ é conexo,

$$M = \left\{ C \in \mathbb{C} \mid J_C(R) \text{ é conexo} \right\}$$

O teorema (1.6) estabelece um critério que fornece um algoritmo para se obter uma imagem do conjunto de Mandelbrot. No caso dos mapas polinomiais, como o infinito é um atrator, a sua fronteira é o conjunto de Julia $J_C(R)$. Se a bacia imediata contém pelo menos um ponto crítico do mapa então se a sua órbita direta divergir, o conjunto $J_C(R)$ é desconexo, e caso contrário o conjunto de Julia é conexo.

Uma imagem do conjunto de Mandelbrot é mostrada na figura I.6.

Fig. I.6

No cardióide principal o mapa possui um ponto fixo estável, além do infinito que é sempre superestável, o conjunto de Fatou possui duas componentes e os conjuntos de Julia são deformações do círculo unitário (figura I.1). Nos domínios formados pelos "botões" o mapa possui ciclos atratores, o conjunto de Fatou possui infinitas componentes (figuras I.2 e I.3). No eixo real para valores de $c < 0$, o mapa apresenta a rota caótica conhecida, e os "botões" contíguos são os domínios dos ciclos estáveis 2^n .

Recentemente, A. Douady e J.H. Hubbard⁽³⁰⁾ mostraram que o conjunto de Mandelbrot é conexo, isto é, M não está contido na união de dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios. A questão se M é localmente conexo (se qualquer pedaço $U \cap M$ de M ($U \subset \mathbb{C}$ aberto) tem a propriedade de para qualquer $z \in U \cap M$ existe uma vizinhança $V \subset U$, $z \in V$, tal que $V \cap M$ é conexo) ainda está em aberto.

Outra caracterização de M foi recentemente obtida por F.v. Haeseler⁽³¹⁾, tendo mostrado que

$$M \subset \left\{ c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2 \right\}$$

Cada mapa $R(z,t)$ possui o seu conjunto de Mandelbrot no espaço do parâmetro complexo. Um estudo mais detalhado desses conjuntos certamente revelará propriedades interessantes dos mapeamentos na esfera de Riemann.

CAPÍTULO II

O MODELO DE POTTS P-ESTADOS NA ÁRVORE DE CAYLEY : TRATAMENTO CANÔNICO.

II.1 - A árvore de Cayley e o mapa de Bethe-Peierls

A árvore de Cayley aberta possui uma prescrição de construção bastante simples :

1. A um sítio conectam-se ℓ outros sítios através de ℓ ligações.
2. A cada um dos ℓ sítios conectam-se outros $(\ell - 1)$ sítios através de $(\ell - 1)$ ligações, e assim sucessivamente.

Denominamos geração ou camada da árvore de Cayley ao conjunto de sítios que são adicionados à árvore a cada passo no seu processo de construção. A última camada denomina-se superfície da árvore de Cayley. Chamaremos de ramificação (r) ao número de sítios adicionados a cada sítio de uma dada camada.

Dessa forma construímos uma estrutura ramificada onde cada sítio, à exceção daqueles pertencentes à superfície, possui $\ell = r + 1$ primeiros vizinhos, e que não apresenta "loops" fechados. (fig. II.1)

Essa estrutura confere à árvore de Cayley uma característica fundamental que a diferencia das redes de Bravais: ⁽²⁴⁻²⁶⁾ a razão entre o número de sítios na superfície e o número total de sítios é diferente de zero no limite de número de sítios infinito (limite termodinâmico).

A não existência de loops mostra que a árvore de Cayley aberta possui uma propriedade topológica análoga à da ca

fig. II.1

Fig. II.1 Árvore de Cayley com razão de ramificação $r = 2$ e número de coordenação $l = 3$.

deia de sítios, uma vez que o caminho que une dois sítios através de sítios distintos é único. Essa relação também fica evidenciada termodinamicamente pela igualdade das energias livres da cadeia de spins clássicos, e da árvore de Cayley aberta com spins clássicos colocados em seus sítios.

Para tornar não trivial a função de partição de um modelo de spins clássicos na árvore de Cayley aberta, é necessário introduzir-se um mecanismo que construa loops na rede⁽²⁴⁾.

Um possível mecanismo é a adição de um sítio externo à rede com um spin que acopla com todos os spins da árvore com um acoplamento distinto daquele existente entre os spins da própria árvore. A essa árvore chamaremos árvore de Cayley assimétrica fechada (fig. II.2).

Sem perda de generalidade, e para efeito de estudo das propriedades de um sistema de spins no limite termodinâmico na árvore de Cayley fechada, podemos considerar apenas um ramo da árvore como na fig. II.2.

Dessa forma indexamos as camadas da árvore com um índice $n = 1, \dots, N$ da superfície para o interior e um índice $S = 0, \dots, N-1$ do interior para a superfície, de tal forma que em qualquer geração teremos sempre $n+s = N$, onde N é o número de gerações da árvore.

Denominaremos por J o acoplamento entre spins na árvore propriamente dita, h o acoplamento entre os spins interiores da árvore e o spin adicional (g), e $h^{(s)}$ o acoplamento entre os spins da superfície da árvore e o spin (g).

Para tornar não trivial a função de partição do sistema é suficiente que tenhamos $h = 0$ e $h^{(s)} \neq 0$.

Assim, quando o spin (g) assume um valor fixo, os acoplamentos entre os spins da árvore e o spin (g) representam um campo magnético externo não homogêneo.

Fig. II.2

Fig. II.2 Ramo da árvore de Cayley assimétrica fechada, com o spin adicional (g) acoplado com os spins da árvore.

Associando a cada sítio da árvore uma variável (spin) de Potts, que pode assumir p valores $\sigma_p = 0, 1, \dots, (p-1)$, a Hamiltoniana do sistema de Potts na árvore de Cayley fechada assimétrica pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} - h^{(s)} \sum_{\langle s,g \rangle} \delta_{\sigma_s \sigma_g} - h \sum_{\langle i,g \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_g} \quad (\text{II.1})$$

Os pares de primeiros vizinhos no interior da árvore, vizinhos do spin (g) com a superfície e do spin (g) com o interior da árvore são representados por $\langle i,j \rangle$, $\langle s,g \rangle$ e $\langle i,g \rangle$ respectivamente. O acoplamento do spin (g) com os spins interiores e com os spins superficiais é denotado por h e $h^{(s)}$ respectivamente, e δ é a função delta de Kronecker (fig. II.3 a,b).

A árvore de Cayley assimétrica fechada é portanto, uma rede hierárquica⁽²⁴⁾ cujo processo de decoração é mostrado na fig. II.3 c. Nesse processo são formados r^S aglomerados na superfície.

Os spins da superfície podem ser decimados através do cálculo do traço da função de partição de cada cluster elementar da camada n , o que introduz um acoplamento efetivo entre o spin (g) e os spins da camada $n+1$ (fig. II.4).

Assim, a decimação dos spins da superfície, com a imposição de que as funções de partição do cluster e do par de spins por (g) e um spin da camada $n+1$ sejam proporcionais, fornece a transformação do grupo de renormalização^(9,27).

Em outras palavras, o campo efetivo (indexado por n) que atua em uma certa camada, é renormalizado pela transformação R e teremos de maneira geral

Fig. II.3a

Fig. II.3b

Fig. II.3c

- Fig. II.3** (a) Ramo da árvore de Cayley com o spin (g) com acoplamentos diferenciados com os spins interiores (h), superficiais ($h^{(s)}$), e os acoplamentos internos da árvore (J).
- (b) Ramo com o acoplamento $h = 0$, e com as camadas indexadas.
- (c) O processo de decoração do ramo da árvore assimétrica de ramificação 2 com acoplamento nos spins de superfície.

fig. II.4

Fig. II.4 Processo de decimação dos aglomerados de superfície, gerando um acoplamento efetivo entre o spin (g) e os spins de superfície.

$$h_{n+1}^{(s)} = R[h_n^{(s)}] \quad (\text{II.2})$$

A transformação R pode ser visualizada esquematicamente na forma

onde:

- i - spin da camada $n+1$
- j - spin adicional (g)
- k - spins da camada n (superfície)

$t = \exp(-p\beta j)$ - peso de Boltzmann dos acoplamentos internos da árvore, $\beta = 1/K_B T$.

$x_0 = \exp(-p\beta h)$ - peso de Boltzmann dos acoplamentos da árvore com o campo externo

$x_n = \exp(-p\beta h_n)$ - peso de Boltzmann dos acoplamentos do spin (g) com a superfície.

Para a obtenção da transformação do grupo de renormalização, calculamos o traço sobre os spins k do lado esquerdo da eq.(II.3), que fornece a relação

$$\left[\sum_{k=0}^{p-1} (t^{-1})^{\delta_{ik}} (\chi_n^{-1})^{\delta_{kj}} \right] (\chi_0^{-1})^{\delta_{ij}} = e^{C_n} (\chi_{n+1}^{-1})^{\delta_{ij}} \quad (\text{II.4})$$

onde $\exp(C_n)$ é um fator de proporcionalidade entre as funções de partição do cluster e do par (i, j) na equação (II.3).

Considerando as duas possibilidades, $i = j$ ou $i \neq j$ temos da equação (II.4)

$$\text{se } i = j \quad e^{C_n} \chi_{n+1}^{-1} = \left[t^{-1} \chi_n^{-1} + (p-1) \right] \chi_0^{-1} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{se } i \neq j \quad e^{C_n} = \left[t^{-1} + \chi_n^{-1} + (p-2) \right] \quad (\text{II.6})$$

Substituindo-se (II.6) em (II.5) obtem-se

$$\chi_{n+1} = R(\chi_n) = \chi_0 \left[\frac{t + \chi_n + t \chi_n (p-2)}{1 + t \chi_n (p-1)} \right] \quad (\text{II.7})$$

que é a transformação do GR para o acoplamento do $\text{spin}(g)$ com a superfície da árvore de Cayley. Essa transformação será denominada mapa de Bethe-Peierls (BP).

Definindo

$$y_n = \exp \left(\frac{C_n}{\tau} \right) \quad (\text{II.8})$$

temos da eq. (II.6)

$$y_n = t^{-1} + x_n^{-1} + (p-2) \quad (\text{II.9})$$

que na eq. (II.7) fornece o mapa

$$y_{n+1} = \frac{1}{t} + (p-2) + x_0 \left[\frac{t y_n + (t-1)[t(p-1)+1]}{t^2 y_n} \right]^r \quad (\text{II.10})$$

que denominamos mapa global, por razões que ficarão claras mais adiante.

O mapa BP (eq. II.7) é um mapa racional de grau r , parametrizado por t e p que pode ser visto como um mapeamento da esfera de Riemann $R : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$, se sua variável dinâmica X_n puder assumir valores em $\bar{C}$.

Dessa forma, a órbita direta de um valor inicial X_1 corresponde aos valores do campo efetivo nas camadas internas da árvore de Cayley quando se implementa o processo de decimação dos clusters da superfície. Em outras palavras, isso corresponde à determinação do campo efetivo em spins no interior da árvore de Cayley, afastados da sua superfície.

No limite termodinâmico ($n \rightarrow \infty$), o processo de renormalização dos acoplamentos é representado pelo ciclo atrator do mapa BP. Como esse limite corresponde a um afastamento infinito da superfície da rede, o atrator do mapa BP descreve as propriedades locais no interior do sistema, isto é, as propriedades livres dos efeitos que possam ser introduzidos pela superfície da árvore de Cayley. É um resultado já bastante conhecido que as propriedades do ciclo atrator do mapa BP reproduzem, no limite termodinâmico, a aproximação de Bethe-Peierls de sistemas definidos em re-

des de Bravais, isto é, a aproximação de Bethe-Peierls é exata na árvore de Cayley^(24,28).

Por outro lado, a órbita inversa de uma dada condição inicial gera um conjunto no limite termodinâmico que possui estreita relação com os conjuntos de Julia do mapa BP⁽¹⁷⁾. Essa órbita inversa está associada ao processo de decoração da rede, do interior para a superfície da árvore de Cayley. Assim, os conjuntos de Julia do mapa BP possuem uma relação com as propriedades globais do sistema, isto é, da árvore de Cayley incluindo sua superfície.

O mapa global (eq. II.10) determina, como veremos adiante, a função energia livre global, quando incorporam-se às propriedades termodinâmicas do sistema as contribuições dos spins da superfície.

Daqui em diante passaremos a denominar o sistema de árvore de Cayley quando se inclui efeitos de superfície, e de rede de Bethe quando se desprezam esses efeitos.

II.2 - Propriedades do mapa BP: propriedades locais e globais do sistema de Potts

A partir deste ponto vamos considerar o sistema de Potts na árvore de Cayley sem campo externo, somente com campo na superfície. Portanto o mapa BP fica

$$x_{n+1} = R(x_n) = \left[\frac{t + x_n + t x_n (p-2)}{1 + t x_n (p-1)} \right]^r \quad (\text{II.11})$$

Do exame do gráfico do mapa podemos inferir a existência de pontos fixos e ciclos e a sua natureza quanto à estabilidade. Nas figuras II.5 a-c e II.6 a-e são mostrados os

Fig. II.5a

Fig. II.5b

fig. III.5c

Fig. II.5 Gráfico $X_{n+1} = R(X_n)$ para o caso $p = 2$.

- (a) O ponto fixo $X^* = 1$ é o único atrator do mapa. A partir de $t = 1$ a derivada do mapa no ponto fixo aumenta com o decréscimo do parâmetro t .
- (b) A derivada do mapa em $X^* = 1$ é unitária e o ponto fixo se torna indiferente. Nessa situação se define o valor crítico t_{BP} do parâmetro t .
- (c) Abaixo do valor crítico t_{BP} , o ponto fixo $X^* = 1$ é instável e o mapa apresenta dois atratores não triviais.

fig. II.6a

fig. II.6b

fig. II.6c

fig. II.6d

fig. IV.6e

Fig. II.6 Gráfico $X_{n+1} = R(X_n)$ para o caso $p = 2$.

- (a) Somente o ponto fixo $X^* = 1$ é atrator.
- (b) No valor crítico t' o mapa apresenta uma bifurcação tangente.
- (c) O mapa possui dois pontos não triviais, um estável e outro instável, e o ponto fixo $X^* = 1$ continua estável.
- (d) No valor crítico t_{BP} , o ponto fixo $X^* = 1$ se torna indiferente. O ponto fixo instável da situação (c) colapsa no atrator $X^* = 1$.
- (e) O ponto fixo $X^* = 1$ se torna instável entre dois atratores não triviais.

gráficos para os casos $p = 2$ e $p > 2$ respectivamente.

O gráfico do mapa para $p = 2$ (Ising) mostra apenas um ponto fixo estável no intervalo $t \in [t_{BP}, 1]$. Esse ponto se torna indiferente para o valor crítico de $t = t_{BP}$ (fig. II.5b), a partir do qual apresenta uma bifurcação tipo pitchfork.

Já os casos $p > 2$ apresentam essencialmente o mesmo comportamento : um ponto fixo real estável num intervalo do parâmetro t (fig. II.6a), até um valor crítico (t') onde ocorre uma bifurcação tangente (fig. II.6b), apresentando dois pontos fixos estáveis e um instável, todos reais (fig. II.6c). A natureza dos pontos fixos se altera novamente quando o ponto fixo instável colapsa no ponto fixo estável $x^* = 1$ (fig. II.6d), e que se torna instável para valores $t < t_{BP}$ (fig. II.6e).

Essas propriedades do ponto fixo podem ser determinadas analiticamente através da equação do ponto fixo, obtida a partir do mapa BP

$$x^* = R(x^*) = \left[\frac{t + x^* + t x^* (p-2)}{1 + t x^* (p-1)} \right]^r \quad (\text{II.12})$$

Pode-se, sem perda de generalidade, efetuar os cálculos analiticamente para $r = 2$. Observando que $x^* = 1$ é solução da equação (II.12) para todo valor de t , temos

$$x^{*2} t^2 (p-1)^2 + x^* [t^2 (2p-3) + 2t - 1] + t^2 = 0 \quad (\text{II.13})$$

Portanto as soluções da equação II.12 são dadas por

$$\chi_+^* = -\frac{t^2(2p-3)+2t-1}{2t^2(p-1)^2} + \frac{t-1}{2t^2(p-1)^2}$$

$$\left[(5-4p) \left(t - \frac{1}{2(p-1)^{1/2}+1} \right) \cdot \left(t - \frac{1}{1-2(p-1)^{1/2}} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.14})$$

$$\chi_-^* = -\frac{t^2(2p-3)+2t-1}{2t^2(p-1)^2} - \frac{t-1}{2t^2(p-1)^2}$$

$$\left[(5-4p) \left(t - \frac{1}{2(p-1)^{1/2}+1} \right) \cdot \left(t - \frac{1}{1-2(p-1)^{1/2}} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.15})$$

$$\chi^* = 1, \quad \forall t \quad (\text{II.16})$$

cujo gráfico é mostrado nas figuras II.7a,b para os casos $p=2$ e $p > 2$. O ponto fixo $x^* = 1$ chamaremos ponto fixo paramagnético e os pontos fixos (II.14) e (II.15), $x_{\pm}^*$, chamaremos pontos fixos não triviais.

Para os acoplamentos internos ferromagnéticos na árvore de Cayley, e consequentemente na rede de Bethe, o parâmetro t assume valores $t \in [0,1]$.

No intervalo $0 < t < t'$

$$t' = \frac{1}{1+2(p-1)^{1/2}} \quad (\text{II.17})$$

os três pontos fixos do mapa são reais, e no intervalo $t' < t < 1$ os pontos fixos $x_{\pm}^*$ são complexos, $x_+^* = \text{C.C.}(x_-^*)$.

Fig. II.7a

Fig. II.7b

Fig. II.7 Os pontos fixos do mapa BP em função da temperatura.

(a) $p = 2$. $X^* = 1$ é estável para $t > t_{BP}$ e instável para $t < t_{BP}$. Os pontos fixos $X_{\pm}^*$ são estáveis para $t < t_{BP}$ e instáveis para $t > t_{BP}$. Aqui $t' = t_{BP} = \frac{1}{3}$

(b) $p > 2$. $X^* = 1$ estável no intervalo $[t_{BP}, 1]$. Os pontos fixos $X_{\pm}^*$ são ambos instáveis para $t > t'$, X_+^* é estável e X_-^* é instável no intervalo $[t_{BP}, t']$, e $X_{\pm}^*$ são estáveis para $t < t_{BP}$.

Observando que $\text{Re}(x_+^*) = \text{Re}(x_-^*)$ $\text{Im}(x_+^*) = -\text{Im}(x_-^*)$ após alguma manipulação algébrica obtemos

$$|x_+^*| = |x_-^*| = \frac{1}{p-1} \quad (\text{II.18})$$

As figuras II.8a,b mostram o diagrama (x^*, t) $x^* \in \mathbb{C}$ em todo o intervalo $t \in [0, 1]$.

A estabilidade dos pontos fixos do mapa é determinada pela análise do comportamento do autovalor $\gamma(t)$ do mapa BP

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left. \frac{dR(x_n)}{dx_n} \right|_{x_n = x^*} = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^* [1 + t(p-2)]}{t + x^* [1 + t(p-2)]} - \frac{x^* t(p-1)}{1 + x^* t(p-1)} \right] \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

O ponto fixo paramagnético merece especial interesse por ser comum para todos os valores de p . Para $x^* = 1$ temos

$$\gamma(t) = 2 \cdot \frac{1-t}{1+t(p-1)} \quad (\text{II.20})$$

A condição $|\gamma(t)| < 1$ (> 1) de (in) estabilidade determina que o ponto fixo trivial é (in) estável para $t \in [t_{BP}, 1]$ ($t \in [0, t_{BP}]$). A condição $|\gamma(t)| = 1$ determina o valor de t que torna o ponto fixo trivial indiferente. Esse valor é chamado temperatura de Bethe-Peierls (t_{BP}),

fig. II.8a

fig. II.8b

Fig. II.8 Pontos fixos do mapa BP em função da temperatura.

(a) $p = 2$, mostrando os pontos fixos $X_{\pm}^*$ instáveis a alta temperatura com módulo unitário.

(b) $p > 2$. A alta temperatura os pontos fixos instáveis $X_{\pm}^*$ possuem módulo $(1/p-1)$.

$$t_{BP} = \frac{r-1}{r+p-1} \quad (\text{II.21})$$

No caso particular de $r = 2$

$$t_{BP} = \frac{1}{p+1} \quad (\text{II.22})$$

Uma análise numérica do auto-valor (eq.II.19) para os pontos fixos $x_{\pm}^*$ mostra que:

- para $p = 2$, $x_{\pm}^*$ são estáveis para $t < t_{BP}$ e instáveis para $t > t_{BP}$.
- para $p > 2$ $x_{\pm}^*$ são estáveis para $t < t_{BP}$; x_+^* e o ponto fixo $x^* = 1$ são estáveis e x_-^* é instável no intervalo $t_{BP} < t < t'$; $x_{\pm}^*$ são instáveis e $x^* = 1$ é estável para $t' < t < 1$.

A estabilidade dos pontos fixos como função do parâmetro t define as fases do modelo de Potts p -estados na rede de Bethe :

- para $p = 2$ temos uma fase paramagnética se $t > t_{BP}$. No ponto $t = t_{BP}$ o modelo apresenta uma transição de 2ª ordem com os expoentes clássicos. Os ramos estáveis $x_{\pm}^*$ para $t < t_{BP}$ representam uma fase ferromagnética $\langle \uparrow \rangle$ ou $\langle \downarrow \rangle$. Os dois pontos fixos estáveis a baixa temperatura podem ser atingidos pela órbita direta do mapa BP dependendo das condições iniciais. (campo na superfície da árvore de Cayley positivo ou negativo).
- para $p > 2$ no intervalo $t' < t < 1$ o modelo é paramagnético; no intervalo $t_{BP} < t < t'$ onde os pontos fixos $x^* = 1$ e x_+^* são estáveis temos coexistência de fases, o que ca-

racteriza uma transição de 1ª ordem para o modelo. Nessa região se a condição inicial para a órbita direta do mapa BP for menor que o ponto fixo instável x_-^* , então na rede de Bethe temos a solução x_+^* ; se a condição inicial for maior que o ponto fixo instável então temos a solução $x^* = 1$ na rede de Bethe. Porém independentemente das condições iniciais do mapa BP, a dúvida sobre qual dos dois pontos fixos é mais estável só pode ser resolvida comparando-se os valores da energia livre na rede de Bethe para os dois pontos fixos. Todavia, sabe-se, por outros métodos diferentes dos utilizados aqui, que o ponto fixo paramagnético corresponde ao mínimo absoluto da energia livre do modelo na rede de Bethe no intervalo $t_{BP} < t < t'$. Finalmente a baixa temperatura $0 < t < t_{BP}$ o sistema é ferromagnético.

O mapa global (eq. II.10) possui propriedades muito semelhantes às do mapa BP, modificando-se somente os valores dos pontos fixos (figuras II.9 a-c e figuras II.10 a-e).

O grande interesse neste mapa associado ao mapa BP é que a energia livre do sistema na árvore de Cayley é uma soma de funções na variável dinâmica Y_n do mapa global.

II.3 - A energia livre e a transição de ordem contínua

Nesta seção analisaremos o comportamento global do sistema de Potts através do cálculo direto de sua energia livre. Dessa forma mostra-se o comportamento não universal do modelo, resultado obtido originalmente de outra forma por Müller-Hartmann e Zittartz (25) para o modelo de Ising na árvore de Cayley.

Consideremos uma árvore com N gerações e de ramifica

Fig. II.9 Gráfico do mapa global $Y_{n+1} = T(Y_n)$ para o caso $p = 2$.

(a) $t > t_{BP}$. O ponto fixo paramagnético (Y_{par}^*) é o único atrator.

(b) $t = t_{BP}$. O ponto fixo Y_{par}^* é indiferente.

(c) $t < t_{BP}$. O ponto Y_{par}^* é instável, e o mapa BP possui dois atratores.

O ponto fixo paramagnético é $Y_{par}^* = t^{-1} + p - 1$

FIG. II 10 d

FIG. II 10 e

Fig. II.10 Gráfico do mapa global $Y_{n+1} = T(Y_n)$ para $p > 2$.

- (a) $t > t'$. O ponto Y_{par}^* é o único atrator.
- (b) $t = t'$. O mapa apresenta uma bifurcação tangente no ponto $Y^* = t^{-1} + 2p - 3$.
- (c) $t_{\text{BP}} < t < t'$. O mapa possui um repulsor não trivial entre dois atratores. Y_{par}^* é atrator.
- (d) $t = t_{\text{BP}}$. O ponto Y_{par}^* é indiferente.
- (e) $t < t_{\text{BP}}$. O ponto Y_{par}^* é repulsor entre dois atratores não triviais.

ção r . Então o número de sítios na superfície da árvore e o número total de sítios são respectivamente

$$N_s = r^{N-1} \quad (\text{II.24})$$

$$N_t = \frac{r^N - 1}{r - 1} \quad (\text{II.25})$$

O cálculo do traço sobre os spins de superfície da árvore com N gerações gera a árvore com $(N-1)$ gerações com um acoplamento renormalizado na superfície. Denotamos $Z_N(t, x_1)$ e $Z_{N-1}(t, x_2)$ as funções de partição das duas redes com N e $(N-1)$ gerações respectivamente. Considerando $\exp(C_n)$ o fator de proporcionalidade entre as funções de partição, teremos

$$Z_N(t, x_1) = Z_{N-1}(t, x_2) \exp(r^{N-2} C_1) \quad (\text{II.26})$$

onde r^{N-2} é o número de clusters na superfície.

O uso dessa relação de recorrência fornece

$$Z_N(t, x_1) = Z_1(t, x_N) \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} r^{N-n-1} C_n\right) \quad (\text{II.27})$$

onde $Z_1(t, x_N)$ é a função de partição do par de spins com acoplamento renormalizado N vezes.

Portanto a energia livre total do sistema será dada por

$$F_N(t, x_1) = F_1(t, x_N) + \sum_{n=1}^{N-1} r^{N-n-1} C_n \quad (\text{II.28})$$

onde $F_1(t, x_N)$ é a energia livre do par com acoplamento efetivo

x_N , dado pela órbita direta da condição inicial x_1 , do mapa de Bethe-Peierls (equações II.7 e II.11).

No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), a energia livre por sítio será dada por

$$f(t, x_1) = \frac{(r-1)}{r} \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} C_n \quad (\text{II.29})$$

que pode ser reescrita como (veja equação II.8 - 10)

$$f(t, x_1) = (r-1) \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \log y_n \quad (\text{II.30})$$

Desta forma a energia livre do sistema de Potts na árvore de Cayley depende somente da órbita direta completa de uma dada condição inicial para o mapa global (equação II.11).

No caso de campo superficial nulo (árvore de Cayley aberta), a condição inicial do mapa global coincide com o ponto fixo paramagnético

$$y_1 = y_{\text{par.}}^* = t^{-1} + \beta - 1 \quad (\text{II.31})$$

Portanto a energia livre será dada por

$$f(t) = \log \left(t^{-1} + \beta - 1 \right) \quad (\text{II.32})$$

que é idêntica à energia livre do modelo na cadeia de sítios.

Para efeito de análise, consideramos o sistema com um campo superficial inicial suficientemente pequeno para garantir a existência de loops na rede. Portanto tomaremos

$$x_1 \simeq 1 \quad \text{e} \quad y_1 \simeq \frac{1}{t} + p - 1.$$

Nesse caso consideramos a expansão da energia livre (equação II.30) em torno do ponto fixo trivial. Como no intervalo de definição do parâmetro t a função $\log y_n$ é analítica, temos que

$$\log y_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\frac{\partial^j}{\partial x_1^j} (\log y_n) \right]_{x_1=1} (x_1 - 1)^j \quad (\text{II.33})$$

e substituindo na equação II.30 temos que

$$f(t, x_1) = (r-1) \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j}{\partial x_1^j} (\log y_n) \right)_{x_1=1} (x_1 - 1)^j \right] \quad (\text{II.34})$$

que pode ser reescrita como

$$f(t, x_1) = (r-1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) (x_1 - 1)^j \quad (\text{II.35})$$

onde

$$a_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{j,n} r^{-n} \quad (\text{II.35a})$$

$$d_{j,n} = \frac{1}{j!} \left[\frac{\partial^j}{\partial x_1^j} (\log y_n) \right]_{x_1=1} \quad (\text{II.35b})$$

O ponto crucial na análise da equação II.35 está na

equação II.35 b, cujo comportamento dominante pode ser obtido indutivamente.

Para $j = 1$ temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} (\log y_n) \right|_{x_1=1} = \frac{t}{1+t(p-1)} \left. \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} \quad (\text{II.36})$$

mas

$$\left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} = \left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right)_{x_1=1} = \gamma(t) \cdot \left. \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} \quad (\text{II.37})$$

e portanto

$$\left. \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} = \gamma^{(n-1)}(t) \quad (\text{II.38})$$

o termo $j = 2$ é dado por

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\log y_n) \right|_{x_1=1} = - \left[\frac{1}{y_n^2} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1} \right)^2 \right]_{x_1=1} + \left[\frac{1}{y_n} \cdot \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=1} \quad (\text{II.39})$$

Considerando a equação II.9, então o termo dominante na equação II.39 pode ser obtido de

$$\left. \frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=1} = \gamma(t) \cdot \alpha(t) \cdot \left(\left. \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} \right)^2 + \gamma(t) \left. \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=1} \quad (\text{II.40})$$

onde

$$\alpha(t) = \frac{1 - 3t}{1 + t^2(p-1)} \quad (\text{II.40a})$$

e portanto

$$\left. \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=1} = \alpha(t) \gamma^{(n-1)}(t) \left(\frac{\gamma^n(t) - 1}{\gamma(t) - 1} \right) \quad (\text{II.41})$$

ou ainda

$$\left. \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=1} \sim \gamma^{2n}(t) \quad (\text{II.42})$$

Das relações recursivas II.37 e II.40 observamos que as derivadas de ordem $j > 2$ possuem o termo dominante com um grau a mais em $\gamma(t)$, ou seja

$$\left. \frac{\partial^j x_n}{\partial x_1^j} \right|_{x_1=1} \sim \gamma^{jn}(t) \quad (\text{II.43})$$

Portanto a equação II.35-b será um polinômio em $\gamma(t)$

$$d_{j,n} = P[\gamma(t)] \sim \frac{1}{j!} \gamma^{jn}(t) \quad (\text{II.44})$$

e conseqüentemente a equação II.35-a nessa aproximação fica

$$a_j(t) \sim \frac{1}{j!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma^j(t)}{r} \right)^n \quad (\text{II.45})$$

Portanto a energia livre equação II.35 terá não analiticidade de ordem j nos valores de t dados por

$$\gamma(t) = r^{1/j} \quad (\text{II.46})$$

Considerando a equação II.21, o comportamento não analítico da energia livre está no intervalo $t \in [0, t_{BP}]$. Para $j=1$ temos $t=0$ e quando $j \rightarrow \infty$ temos $t \rightarrow t_{BP}$. Este resultado já revela o comportamento não universal do sistema de Potts na árvore de Cayley que se deve a efeitos de superfície, isto é, à geometria da árvore de Cayley.

A imposição de que a implementação do grupo de renormalização não altere as propriedades físicas do sistema (equação II.26), implica que a função energia livre por sítio do sistema, $f(x_1, t)$ e $f(x_2, t)$, antes e após uma renormalização da rede estejam relacionadas como

$$f(x_1, t) = \frac{1}{r} f(x_2, t) + g(x_1, t) \quad (\text{II.47})$$

onde $g(x_1, t)$ é uma função regular e r^{-1} é o fator de escala (razão entre o número total de sítios da árvore de Cayley antes e após uma renormalização).

A repetição desse procedimento fornece a seguinte relação

$$f(x_1, t) = r^{-(N-1)} f(x_N, t) + \sum_{n=1}^{N-1} r^{-(n-1)} g(x_n) \quad (\text{II.48})$$

No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) temos que

$$f(x_1, t) = r \int_{n=1}^{\infty} r^{-n} g(x_n) \quad (\text{II.49})$$

Comparando as equações II.49 e II.30 obtem-se

$$g(x_n) = \frac{r-1}{r} \log \left(t^{-1} + x_n^{-1} + \beta - 2 \right) \quad (\text{II.50})$$

Se a função energia livre tiver um comportamento singular, sabemos que ⁽⁹⁾

$$f_{\text{sing}}(x_n, t) = \frac{1}{r} f_{\text{sing}}[R(x_n), t] \quad (\text{II.51})$$

$$f_{\text{sing}}(x_1, t) \sim |x_1 - 1|^K \cdot H \left[\frac{\log |x_1 - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] \quad (\text{II.52})$$

na vizinhança do ponto fixo instável do mapa $x_{n+1} = R(x_n)$, onde K é um expoente e a função H é uma amplitude.

Expandindo-se o mapa BP em torno do ponto fixo paramagnético, que é instável em $t \in [0, t_{\text{BP}}]$ temos

$$R(x_n) \sim 1 + \gamma(t)(x_n - 1) \quad (\text{II.53})$$

Das equações II.51 e II.52 temos

$$|x_1 - 1|^K \cdot H \left[\frac{\log |x_1 - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] = r^{-1} |R(x_1) - 1|^K \cdot H \left[\frac{\log |R(x_1) - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] \quad (\text{II.54})$$

e portanto teremos

$$|x_i - 1|^K H \left[\frac{\log |x_i - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] = r^{-1} \gamma(t)^K |x_i - 1|^K H \left[1 + \frac{\log |x_i - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] \quad (\text{II.55})$$

Portanto temos

$$1. \text{ a função } H \left[\frac{\log |x_i - 1|}{\log |\gamma(t)|} \right] \text{ é periódica}$$

de período 1.

$$2. \quad r^{-1} \gamma(t)^K = 1$$

e portanto o expoente crítico K será dada por

$$K(t) = \frac{\log r}{\log |\gamma(t)|} \quad (\text{II.56})$$

que varia continuamente com a temperatura na fase de baixa temperatura, isto é $t \in [0, t_{BP}]$, caracterizando o que Müller-Hartmann e Zittartz classificaram como transição de fase de ordem contínua.

CAPÍTULO III

PROPRIEDADES DO CONJUNTO DE JULIA DO MAPA DE BETHE-PEIERLS

Neste capítulo utilizamos as propriedades do conjunto de Julia apresentadas no capítulo I, aplicadas ao mapa de Bethe Peierls (equação II.11), identificando de que forma esse conjunto reflete o comportamento termodinâmico do sistema de Potts p-estados na árvore de Cayley.

III.1 - O conjunto de Julia e os zeros de Yang-Lee

Observando o caráter hierárquico da árvore de Cayley fechada assimétrica, consideramos inicialmente um par de spins cujo peso de Boltzmann do acoplamento é X_1 .

A função de partição do par será dada por

$$Z_1(x_1) = \sum_{\langle i,j \rangle} e^{-\beta h \delta_{ij}} = \sum_{\langle i,j \rangle} x_1^{-\delta_{ij}} = p (x_1^{-1} + p - 1) \tag{III.1}$$

O passo seguinte no processo de decoração é considerar a árvore com duas gerações, cuja função de partição é dada por

$$Z_2(t, x_1) = \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\sum_{k=0}^{p-1} x_1^{-\delta_{kj}} t^{-\delta_{ik}} \right]^2 =$$

$$= p \left(\frac{1}{x_1 t} + p - 1 \right)^2 + p(p-1) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x_1} + p - 2 \right)^2 =$$

$$= p \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{t} + p - 2 \right)^2 \left(\frac{1}{x_2} + p - 1 \right) \quad (\text{III.2})$$

com $x_2 = R(x_1)$.

Para a árvore de três gerações

$$Z_3(t, x_1) = \sum_{\langle i, j \rangle} \left[\sum_{l=0}^{p-1} t^{-\delta_{il}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} x_1^{-\delta_{kj}} t^{-\delta_{kl}} \right]^2 \right]^2 =$$

$$= p \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x_1} + p - 2 \right)^4 \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{t} + p - 2 \right)^2 \left(\frac{1}{x_3} + p - 1 \right) \quad (\text{III.3})$$

com $x_3 = R(x_2) = R^2(x_1)$.

Indutivamente, para a árvore de N gerações temos

$$Z_N(t, x_1) = p \left(\frac{1}{x_N} + p - 1 \right) \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x_n} + p - 2 \right)^{2^{N-n}} =$$

$$= p \left(\frac{1}{x_N} + p - 1 \right) \prod_{n=1}^{N-1} y_n^{2^{N-n}} \quad (\text{III.4})$$

onde y_n é dado pelo mapa global (equação II.10).

A equação (III.4) é um polinômio de grau 2^{N-1} em x_1^{-1} e grau (2^N-2) em t^{-1} .

Portanto da equação (III.4), os zeros da fugacidade da função de partição são soluções da equação

$$x_N = \frac{1}{1-p} \quad (\text{III.5})$$

onde $x_N = R^N(x_1)$ é o peso de Boltzmann do acoplamento do spin (g) com a superfície da árvore de Cayley renormalizado N vezes e p é número de estados. Portanto os zeros da função de partição para a árvore de N gerações são dados por

$$x_1 = R^{-N} \left(\frac{1}{1-p} \right) \quad (\text{III.6})$$

Ou seja, os zeros da função de partição $Z_N(t, x_1)$ são as 2^{N-1} pré-imagens do ponto $(1/1-p)$. Observando a equação (III.1) verifica-se que $(1/1-p)$ é o zero da função de partição do par $Z_1(t, x_1)$.

A equação (III.6) mostra que o conjunto de zeros pode ser gerado recursivamente através do mapa BP, e que esse conjunto guarda estreita relação com o conjunto de Julia do mapa BP.

III.2 - O locus do conjunto de Julia e do conjunto de zeros

Para se determinar a localização do conjunto $J(R)$ do mapa BP e do conjunto de zeros devemos considerar as órbitas inversas do mapa.

Invertendo o mapa BP (equação II.11), as pré-imagens do ponto x_{n+1} são dadas pela equação

$$x_n = \frac{t - z_{n+1}}{t z_{n+1} (\beta - 1) - t(\beta - 2) - 1} \quad (\text{II.7})$$

onde

$$z_{n+1} = \pm \sqrt{x_{n+1}} \quad (\text{III.8})$$

para razão de ramificação $r = 2$.

Portanto o módulo das pré-imagens é dado por

$$|x_n|^2 = \frac{t^2 - t(z_{n+1} + z_{n+1}^*) + |z_{n+1}|^2}{t^2(\beta - 1)^2 |z_{n+1}|^2 + [t(\beta - 2) + 1] [t(\beta - 2) + 1 - t(\beta - 1)(z_{n+1} + z_{n+1}^*)]} \quad (\text{III.9})$$

Consideremos primeiramente o caso $p = 2$ (Ising). Nesse caso a equação (III.9) fica

$$|x_n|^2 = \frac{t^2 - t(z_{n+1} + z_{n+1}^*) + |z_{n+1}|^2}{t^2 |z_{n+1}|^2 + 1 - t(z_{n+1} + z_{n+1}^*)} \quad (\text{III.10})$$

Como neste caso o zero do par ($x_1 = -1$) tem módulo unitário, então da equação (III.10) temos $|x_2| = 1$ e portanto

$$|x_n| = 1 \quad (\text{III.11})$$

Assim os zeros da função de partição estão distribuídos no círculo unitário, verificando o teorema de Yang-Lee.

Para a determinação dos conjuntos de Julia $J(R)$ devemos considerar duas possibilidades distintas, a baixa e a alta-temperatura:

1. Na fase de baixa temperatura ($t \in [0, t_{BP}]$), o mapa BP possui dois atratores (equações II.14 e II.15), e o ponto fixo paramagnético é instável com módulo unitário. Portanto dos teoremas (1.8) e (1.9) do capítulo I pode-se afirmar que o conjunto de Fatou tem duas componentes, o exterior e o interior do círculo unitário que representam as fases $\langle \uparrow \rangle$ e $\langle \downarrow \rangle$ (fig.III.1a), e o conjunto de Julia é o círculo unitário.

2. Na fase de alta temperatura ($t \in [t_{BP}, 1]$) os pontos fixos $x_{\pm}^*$ complexo conjugados são estáveis e possuem módulo unitário (equação II.18).

O ponto fixo paramagnético $x^* = 1$ é o único atrator do mapa. O zero do par $x_1 = -1$ (uma das pré-imagens do ponto fixo $x^* = 1$) pertence ao conjunto de Fatou. Dessa forma, devido à simetria de $J(R)$ em relação ao eixo real, o conjunto de Julia está contido em dois arcos do círculo unitário separados pelo ponto $x_1 = -1$. Portanto se o conjunto $J(R)$ for formado por dois arcos conexos, o conjunto $F(R)$ não é simplesmente conexo, uma vez que o teorema (1.9) garante que $F(R)$ tem apenas uma componente neste caso. Portanto o teorema (1.10) assegura que o conjunto de Fatou tem conectividade infinita e $J(R)$ é desconexo (fig. III.1b).

Considerando as conclusões acima e o teorema (1.5) podemos identificar a ligação entre o conjunto de Julia do mapa BP para $p = 2$, e o conjunto de zeros da função de partição no

Fig. III.1 O conjunto de Julia no semi plano $\text{Im}(x_1) > 0$ para o caso $p = 2$ obtido numericamente através da órbita inversa de repulsor do mapa BP. Os dois conjuntos foram gerados para uma árvore com 10 gerações e à temperatura (a) $t = 0.01$ e (b) $t = 0.4$. Na figura

- (a) O conjunto de Julia é o círculo unitário conexo, e o conjunto de Fatou possui duas componentes simplesmente conexas que correspondem aos pontos fixos estáveis $X_{\pm}^*$. Na figura
- (b) o conjunto de Julia é desconexo e está contido no círculo unitário. O conjunto de Fatou possui uma componente com conectividade infinita, dominada pelo ponto fixo para-magnético, único atrator do mapa.

limite termodinâmico como:

1. A baixa temperatura, como o zero do par $(x_1 = -1)$ pertence ao conjunto de Julia, então o conjunto de zeros é denso em $J(R)$.
2. A condição que um ponto excepcional seja sua única pré-imagem mostra através da (equação II.11) que a alta temperatura o mapa BP não possui pontos excepcionais. Dessa forma, como o zero do par pertence ao conjunto $F(R)$, então os zeros para redes finitas de N gerações pertencem a $F(R)$ e no limite termodinâmico o conjunto de zeros é idêntico ao conjunto de Julia.

Para o caso $p > 2$, o teorema de Yang-Lee só é válido quando $t = 0$ no limite termodinâmico, e a determinação do conjunto de Julia não é tão simples como no modelo de Ising.

A iteração numérica da órbita inversa do repulsor fornece uma imagem dos conjuntos de Julia para diferentes valôres de parâmetro t que são mostrados nas figuras (III.2 a-d).

Considerando o comportamento dos pontos fixos (equações II.14-16) e os teoremas (1.8) e (1.9) podemos afirmar que:

1. Para $t = 0$ e para todo valor de p o mapa BP fica

$$R(x_n) = x_n^2 \quad (\text{III.12})$$

e portanto o conjunto de Julia é o círculo unitário.

2. Na fase de baixa temperatura, $t \in [0, t_{BP}]$, o conjunto de Julia é interior ao círculo unitário S^1 e $S^1 \cap J(R) = \{1\}$,

fig. III.2a

fig. III.2b

Fig. III.2 O conjunto de Julia no semi plano $\text{Im}(X_1) > 0$ para o caso $p > 2$ ($p = 4$), com os círculos unitário e de raio $(1/p-1)$. As figuras foram geradas privilegiando-se determinadas pré-imagens alterando assim a visitação do mapa BP com o objetivo de preencher as regiões menos visitadas.

- (a) $t = 0.05$. O mapa possui dois atratores $X_{\pm}^*$ e o ponto fixo paramagnético é instável. O conjunto de Julia é conexo, está compreendido entre o círculo unitário e o de raio $(1/3)$ e o ponto $(1,0)$ é comum a $J(R)$ e ao círculo unitário. O conjunto de Fatou possui duas componentes simplesmente conexas.
- (b) $t = t_{BP} = 0.2$. O mapa possui um atrator (X_+^*) e o ponto $(1,0)$ é indiferente : para os pontos pertencentes à componente do conjunto de Fatou dominada pelo atrator X_+^* , o ponto $(1,0)$ é um repulsor, e para os pontos da componente externa ao conjunto de Julia, o ponto $(1,0)$ é um atrator.
- (c) $t = 0.212$ ($t_{BP} < t < t'$). O mapa possui um repulsor (X_-^*) entre dois atratores $(X_+^*$ e $X^* = 1)$. O conjunto de Julia é conexo e o conjunto de Fatou possui duas componentes simplesmente conexas.
- (d) $t = 0.35$. O mapa BP possui um único atrator $(x^* = 1)$. O conjunto de Julia é desconexo, e o conjunto de Fatou possui conectividade infinita.

pois o ponto fixo paramagnético pertence ao conjunto de Julia (figura III.2a). O mapa BP possui dois atratores, $x_{\pm}^*$, e portanto o conjunto de Julia é conexo, e o conjunto de Fatou possui duas componentes.

3. Na região de coexistência de fase na rede de Bethe, $t \in [t_{BP}, t']$, temos $S^1 \cap J(R) = \emptyset$ pois o ponto fixo instável do mapa BP está no intervalo $]1, 1/p-1[$. Os pontos fixos x_+^* e x_p são estáveis e portanto o conjunto de Julia continua conexo, e o conjunto de Fatou possui duas componentes (figura III.2c).
4. Na fase de alta temperatura, $t \in [t', 1]$ os pontos fixos $x_{\pm}^*$ são instáveis com módulo $(1/p-1)$, e o ponto fixo paramagnético é o único atrator do mapa. Como os pontos fixos $x_{\pm}^*$ são complexos, as suas duas primeiras pré-imagens não são reais, e consequentemente o conjunto de Fatou não é simplesmente conexo, de maneira análogo ao caso $p = 2$ na fase de alta temperatura. Portanto o teorema (1.10) garante que o conjunto $F(R)$ tem conectividade infinita e $J(R)$ é desconexo (figura III.2d).

Considerando, a) os resultados acima, b) o teorema (1.5), c) o zero do par, $x_1 = 1/1-p$, pertence ao conjunto de Fatou, d) o mapa BP não possui pontos excepcionais para $t \neq 0$, podemos afirmar que o conjunto de zeros e o conjunto de Julia são iguais no limite termodinâmico, para todo valor de t .

Nas próximas seções passamos a estudar algumas propriedades do conjunto de Julia do mapa BP que revelam o comportamento crítico não universal (equação II.56) do modelo de Potts p -estados na árvore de Cayley.

III.3 A medida de probabilidade do conjunto de Julia

A equação (III.4) que fornece a função de partição para a árvore de N gerações é um polinômio de grau 2^{N-1} na fugacidade, e portanto pode ser escrita em função dos zeros como

$$Z_N = \prod_{i=1}^{2^{N-1}} (w - w_i) \tag{III.13}$$

onde $w_i = 1/x_{1,i}$ são os zeros de Yang-Lee da função Z_N .

Da equação (III.13) a energia livre por sítio, no limite termodinâmico é dada por

$$f(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{i=1}^{2^{N-1}} \log(w - w_i) \tag{III.14}$$

A fim de descrever a distribuição de zeros gerada pela órbita inversa do ponto $(1/1-p)$ (equação III.6), definimos a função

$$G_N(w) = \frac{1}{2^{N_S}} \sum_{j=1}^{N_S} S(w - w_j) \tag{III.15}$$

onde N_S (equação II.24) é o número de sítios na superfície da árvore de N gerações e $S(w - w_j)$ é a função degrau.

A função $G_N(w)$ assim definida faz uma contagem de pontos sobre o conjunto de zeros associando a cada ponto do conjunto um número no intervalo $[0,1]$. Dessa forma a equação (III.15) é uma medida da frequência com que o mapa visita cada região do conjunto de zeros. Existindo uma função $G(w)$ no limite $N \rightarrow \infty$, a sua derivada expressa uma densidade sobre o conjunto de zeros.

Considerando as equações (III.14) e (III.15), a energia livre pode ser escrita como

$$f(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{w'} \log(w - w') dG_N(w') \quad (\text{III.16})$$

A existência de uma medida de probabilidade $G(w)$ no limite $N \rightarrow \infty$ é garantida pelo fato de existir uma medida invariante de Borel com suporte em $J(R)^{(33)}$. O gráfico da função $G(w)$ no intervalo $[0, \pi]$ foi gerado numericamente e pode ser visto nas figuras III.3.

Dessa forma integrando por partes a equação (III.16) temos

$$f(w) = - \int_{w'} \frac{G(w')}{w - w'} dw' \quad (\text{III.17})$$

A equação (III.17) define uma função do campo na superfície da árvore de Cayley, analítica a menos possivelmente no ponto de campo nulo ($w = 1$), que é o ponto fixo instável do mapa BP no intervalo $[0, t_{BP}]$ para $p \gg 2$.

Considerando o comportamento da energia livre na vizinhança do ponto fixo instável a baixa temperatura (equação II.52), teremos nessa vizinhança

$$G(w) \sim |1 - w|^K \quad (\text{III.18})$$

onde K é dado pela equação (II.56).

A equação (III.18) fornece uma medida μ que é invariante pelo mapa BP nas proximidades do repulsor do mapa a baixa

$$\frac{1}{2} G(\theta)$$

77

Fig. III.3a

Fig. III.3b

Fig. III.3c

$$\frac{1}{2} G(\theta)$$

$$\frac{1}{2} G(\theta)$$

$$\frac{1}{2} G(p)$$

Fig. III.3 A medida de probabilidade $G(w)$, gerada numericamente através da órbita inversa do repulsor do mapa BP. Os dados foram obtidos para uma árvore de 12 gerações.

- (a) $p = 2, t = 0$. A distribuição das pré-imagens é uniforme no círculo unitário. A medida de probabilidade é $G(\theta) = \theta$.
- (b) $p = 2, t = 0.15 < t_{BP}$. A distribuição das pré-imagens é não uniforme. Nas proximidades da origem a medida de probabilidade é governada por uma lei de potência $G(\theta) \sim |\theta|^K$, confirmada numericamente, onde K é o expoente crítico da energia livre do modelo.
- (c) $p = 2, t = t_{BP}$. O decréscimo da visitação nas proximidades das pré-imagens do repulsor com o aumento da temperatura revela a tendência do aparecimento de patamares na medida de probabilidade.

- (d) $p = 2$, $t > t_{BP}$. O conjunto de Julia é desconexo e a medida de probabilidade é formada por degraus. As singularidades na medida se relaciona diretamente com a dimensão do conjunto $J(R)$ (veja apêndice).
- (e) $p = 4$, $t < t_{BP}$. A medida de probabilidade em função do argumento (θ) das pré-imagens. Observamos numericamente o mesmo comportamento do caso $p = 2$ na origem, $G(\theta) \sim |\theta|^K$.
- (f) $p = 4$, $t < t_{BP}$. A medida de probabilidade em função do módulo (ρ) das pré-imagens. Confirmamos numericamente na origem do eixo ($1 - \rho$) como $G(\rho) \sim (1 - \rho)^K$, o comportamento da medida de probabilidade.

temperatura.

De fato, consideremos o espaço de medida $(J(R), A, \mu)$, onde A é uma σ -álgebra em $J(R)$ e $\mu: A \rightarrow [0, \infty]$ uma medida sobre A . A transformação $R: J \rightarrow J$ preserva a medida μ (μ é R -invariante), se $X \in A$ implica $R^{-1}(X) \in A$ e $\mu[R^{-1}(X)] = \mu(X)$ ⁽³²⁾.

Uma vez que a invariança do conjunto de Julia pelo mapa BP está garantida, e lembrando que a baixa temperatura o conjunto $J(R)$ é conexo, definimos a medida do intervalo $[w_1, w_2]$

$$\mu[w_1, w_2] = |G(w_1) - G(w_2)| \quad (\text{III.19})$$

com w_1 e $w_2 \in J(R)$, próximos ao ponto $x^* = 1$.

A partir do mapa BP expandido em torno do repulsor a baixa temperatura (equação II.53), consideremos uma das pré-imagens do intervalo $[w_1, w_2]$. Das equações (III.18) e (III.19) temos

$$\mu[R^{-1}([w_1, w_2])] = \frac{1}{\gamma(t)^K} \mu[w_1, w_2] \quad (\text{III.20})$$

Mas da equação (II.56) que fornece o expoente crítico K temos

$$\mu[R^{-1}([w_1, w_2])] = \frac{1}{r} \mu[w_1, w_2] \quad (\text{III.21})$$

Como o mapa inverso é uma aplicação $1 \rightarrow r$, então a medida (equação III.19) é a medida preservada pelo mapa BP nas proximidades do repulsor a baixa temperatura.

Observamos que em virtude da equação (II.46), nas tem

peraturas onde as derivadas da energia livre em relação ao campo divergem, a medida μ obedece a uma lei de potência com expoentes inteiros.

Para o caso $p = 2$ ⁽²⁵⁾ o teorema de Yang-Lee permite escrever os zeros como $\omega_j = \exp(i\theta_j)$, e como $\theta_j \sim 0$ próximo ao repulsor, a equação (III.18) se simplifica podendo ser escrita como

$$G(\theta) \sim |\theta|^k \quad (\text{III.22})$$

A equação (III.18) mostra que a visitação da região próxima ao repulsor no conjunto $J(R)$ decresce com o aumento da temperatura uma vez que o expoente K é uma função crescente de t e maior ou igual a um no intervalo $[0, t_{BP}]$.

III.4 - As dimensões do conjunto de Julia

Nesta seção utilizamos os resultados descritos no apêndice para obter informações a respeito das dimensões do conjunto de Julia do mapa BP.

Consideremos primeiramente o caso $p = 2$. Como foi visto na seção III.2, na fase de baixa temperatura o conjunto de Julia é o círculo unitário, e a alta temperatura é um subconjunto desconexo do círculo unitário.

A medida de probabilidade a $t = 0$, $G(\theta) = \theta$ (figura III..3) mostra que o mapa preenche o círculo unitário de maneira uniforme. Para $0 < t < t_{BP}$ a densidade em um intervalo $[0, \theta]$ diminui com a temperatura.

A uniformidade na distribuição das pré-imagens a $t = 0$ significa que o intervalo $[0, \pi]$ é subdividido pelas iteradas inversas do repulsor em intervalos iguais. Para $t \neq 0$ a

subdivisão em setores do intervalo $[0, \pi]$ é desigual, e as propriedades de escala desses setores são determinadas pela pré-imagem (θ_2) do ponto $x_1 = -1$, que divide o intervalo $[0, \pi]$ em dois intervalos $[0, \theta_2]$ e $[\theta_2, \pi]$. Em seguida estes intervalos são subdivididos em outros dois intervalos que guardam a mesma relação de proporcionalidade dos dois primeiros, e assim sucessivamente. Observamos que o fato de o intervalo $[0, \theta_2]$ ser maior que o intervalo $[\theta_2, \pi]$ e θ_2 crescer com a temperatura, é um reflexo do decréscimo da medida de probabilidade com a temperatura, comentado na seção anterior.

Dessa forma a dimensão de Hausdorff será

$$D_H = 1 \quad , \quad 0 < t < t_{BP} \quad (\text{III.23})$$

e as restantes dimensões do espectro serão soluções da equação (A.26) dada por

$$\left(\frac{\pi}{\pi - \theta_2} \right)^{\tau(q)} + \left(\frac{\pi}{\theta_2} \right)^{\tau(q)} = 2^q \quad \begin{aligned} \tau(q) &= (q-1) D_q \\ D_q &: \text{dimensões generalizadas} \\ D_0 &: \text{dimensão de Hausdorff} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

onde as probabilidades das duas caixas (arcos) são $p_1 = p_2 = 1/2$.

Os diferentes valores do parâmetro q fornecem o valor das dimensões obtido numericamente, cujo gráfico é mostrado na figura III.4.

Na fase de alta temperatura mostramos que o conjunto $J(R)$ é desconexo, e uma vez que $J(R)$ é não contável (teorema 1.7), então sua dimensão de Hausdorff $0 < D_H < 1$.

A partir da temperatura crítica t_{BP} , o módulo do argumento do ponto fixo instável (θ_1) é maior que zero e o intervalo do círculo unitário $[-\theta_1, \theta_1]$ é vazio. Uma vez que a alta temperatura o ponto $x_1 = -1$ pertence ao conjunto de Fatou,

Fig. III.4

Fig. III.4 Espectro de dimensões do conjunto de Julia para o modelo $p = 2$, como função da temperatura.

Na fase de baixa temperatura ($0 < t < 1/3$) o conjunto de Julia tem dimensão de Hausdorff $D_0 = 1$ e as demais dimensões do espectro são diferentes refletindo dessa forma a não homogeneidade no preenchimento do círculo unitário pelo mapa BP. A alta temperatura todas as dimensões do espectro são iguais o que mostra o caráter auto-similar do conjunto de Julia nessa fase. Para $t \gg t_{BP}$ as dimensões do conjunto de Julia possuem um expoente crítico $\beta_D = 1/2$. Cumpre notar que no cálculo numérico das dimensões D_q ($q \neq 0$) para $t \lesssim t_{BP}$ notamos que a derivada $D_q' \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_{BP}$.

então as propriedades de escala do conjunto de Julia são determinadas por dois arcos de tamanhos iguais a $(\pi - |\theta_i|)$, dentro da precisão numérica dos nossos cálculos, onde o conjunto $J(R)$ fica confinado.

Portanto as dimensões são soluções da equação (veja apêndice equação A.22).

$$2 \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^q}{\left(\frac{\pi - |\theta_i|}{2\pi} \right)^{z(q)}} \right] = 1 \quad \begin{array}{l} 2\pi : \text{fator de normalização} \\ \text{das caixas (arcos).} \end{array} \quad (\text{III.25})$$

$z(q) = (q-1) D_q$
 D_q : dimensões generalizadas

A equação (III.25) mostra que todas dimensões do es-
 pector são iguais a ⁽³⁴⁾

$$D(t) = \sigma(t) = \nu(t) = \dots \cong \frac{\log 2}{\log \left[\frac{2\pi}{(\pi - |\theta_i|)} \right]} \quad (\text{III.26})$$

onde o valor de θ_i pode ser obtido diretamente das equações (II. 14,15); σ e ν são as dimensões de informação e correlação.

A expressão (III.26) mostra que o conjunto de Julia é um conjunto tipo Cantor e um fractal auto-similar.

Da equação (III.26), expandindo em torno da temperatura
 ra t_{BP} temos

$$D(t) \sim 1 - \frac{1}{\pi \log 2} \cdot \left. \frac{d\theta_i}{dt} \right|_{t=t_{BP}} (t - t_{BP}) \quad (\text{III.27})$$

Após o cálculo da derivada na equação (III.27) obtemos

$$1 - D(t) \sim (t - t_{BP})^{1/2} \quad (\text{III.28})$$

Portanto o comportamento singular das dimensões do conjunto de Julia em t_{BP} é caracterizado pelo expoente $\beta_D = 1/2$.

A não validade do teorema de Yang-Lee para $p > 2$ faz com que o cálculo das dimensões não seja tão simples como no modelo de Ising.

O cálculo numérico da capacidade que acredita-se seja igual à dimensão de Hausdorff^(18,35,36), do conjunto $J(R)$ no caso $p > 2$, se mostrou impraticável dentro de uma precisão mínima aceitável, devido a limitações computacionais.

No entanto o fato de que a medida de probabilidade é caracterizada por uma lei de potência nas proximidades do repulsor a baixa temperatura (equação III.18), mostra que nessa região a dimensão de Hausdorff de $J(R)$ é $D_H = 1$, (veja apêndice).

De fato, a figura (III.5) mostra um detalhe do conjunto de Julia a baixa temperatura para $p > 2$ próximo ao repulsor, que sugere um comportamento linear do conjunto $J(R)$.

O ajuste desses pontos para vários valores de t por uma reta se mostrou excelente com um desvio da ordem de 0,01% para o seu coeficiente angular.

Esse fato sugeriu um estudo numérico da inclinação do conjunto de Julia em relação ao eixo real no caso $p > 2$, na fase de baixa temperatura quando o conjunto é conexo.

III.5 - A inclinação do conjunto de Julia

Para a determinação da inclinação de $J(R)$ é necessário um cuidado especial devido à não homogeneidade e ao decréscimo da visitação com a temperatura na região em torno do repulsor do mapa.

Para evitar esse problema é necessário, durante o cálculo das pré-imagens, privilegiar determinadas raízes para que

$Im(x_1) (10^{-13})$
 $8.04 \hat{=}$

87

Fig. III.5 Detalhe do conjunto de Julia para $p = 3$ na fase de baixa temperatura ($t < t_{BP}$) em uma vizinhança $Im(x_1) \sim 10^{-13}$ próxima ao repulsor do mapa ($X^* = 1$). O ajuste dos pontos por uma reta se mostrou bastante satisfatório.

o mapa visite com uma maior frequência as proximidades do repulsor $x^* = 1$.

Dessa forma selecionamos pontos de $J(R)$ próximos ao repulsor de tal forma que $\text{Im}(x_1) \sim 10^{-13}$. Um exemplo é mostrado na figura (III.5).

Assim a inclinação ($|\tan \varphi|$) foi obtida para vários valores da temperatura para o caso $p = 3$ (figura III.6).

A $t = 0$ a inclinação evidentemente é $|\tan \varphi| = \infty$. Com o aumento da temperatura a inclinação diminui até chegar a zero na temperatura t_{BP} . Nessa temperatura os pontos fixos $x_{\pm}^*$ e o parâmetro magnético coincidem e são indiferentes. Aqui a componente do conjunto de Fatou externa ao conjunto de Julia forma a chamada pétala⁽²⁹⁾, (figura III.7a).

Na região de coexistência de fase na rede de Bethe a inclinação aumenta, atinge o valor $|\tan \varphi| = \infty$ e volta a diminuir até $|\tan \varphi| = 0$ na temperatura $t = t'$ quando os pontos fixos $x_{\pm}^*$ coincidem e são indiferentes.. Nessa temperatura a componente do conjunto de Fatou interna ao conjunto de Julia se torna uma pétala (figura III.7b).

Próximo à temperatura t_{BP} o ajuste dos valores da inclinação por uma lei de potência fornecem o comportamento crítico da inclinação como

$$\begin{aligned} |\tan \varphi| &\sim |t - t_{BP}|, & t < t_{BP} \\ |\tan \varphi| &\sim |t - t_{BP}|^{0.118}, & t > t_{BP} \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Cumpramos observar que o ajuste se mostrou muito melhor para $t < t_{BP}$ que para $t > t_{BP}$.

Embora a inclinação parece ser um parâmetro relevante na descrição do comportamento crítico do modelo para $p > 2$, não

Fig. III.6 O módulo da inclinação do conjunto de Julia em relação ao eixo real do plano da fugacidade complexa para o caso $p = 3$. Na temperatura crítica t_{BP} a inclinação tende a zero com o expoente $\eta = 1$ quando $t \lesssim t_{BP}$ e com o expoente $\eta \approx 0.118$ quando $t \gtrsim t_{BP}$.

fig. III.7a

fig. III.7b

Fig. III.7 (a) A $t = t_{BP}$ a inclinação do conjunto de Julia para $p > 2$ é nula e o ponto fixo $X^* = 1$ é indiferente. A componente do conjunto de Fatou externa ao conjunto de Julia forma a chamada pétala (parte hachureada da figura).

(b) A $t = t'$ o ponto fixo $(1/p-1)$ é atrator para os pontos pertencentes à componente do conjunto de Fatou interior ao conjunto de Julia e repulsor para os pontos da componente externa ao conjunto de Julia. A componente interna ao conjunto de Julia forma a pétala.

conseguimos identificar nenhuma analogia termodinâmica satisfatória para o parâmetro.

III.6 - Comentários finais

O modelo de Potts p-estados ferromagnético possui um comportamento crítico na rede de Bethe⁽²⁴⁾ caracterizado pelas propriedades do atrator do mapa do grupo de renormalização. O caso $p = 2$ (Ising) apresenta uma transição de 2ª ordem, enquanto o caso $p > 2$ apresenta uma transição de 1ª ordem, onde o diagrama de fase apresenta uma região de coexistência de fase com os pontos fixos ferromagnético e paramagnético estáveis.

No entanto o comportamento crítico do modelo na árvore de Cayley é bastante distinto.

Mostramos que para todos os valores de p o modelo possui uma transição que foi classificada como transição de fase de ordem contínua por Müller-Hartmann e Zittartz para o caso $p = 2$ ⁽²⁵⁾. Na fase de baixa temperatura a energia livre possui uma não analiticidade de ordem j no campo magnético, de $j = 1$ à temperatura zero até $j = \infty$ na temperatura de Bethe-Peierls (temperatura crítica do modelo na rede de Bethe).

Observando o caráter hierárquico da árvore de Cayley fechada assimétrica, a implementação do grupo de renormalização no espaço real fornece uma transformação para o campo magnético efetivo na superfície da árvore.

Mostramos que o mapa do grupo de renormalização determina os zeros de Yang-Lee da função de partição de forma recursiva através da órbita inversa do zero da rede completamente renormalizada.

Tratando o mapa do GR como um mapeamento na esfera de Riemann, utilizamos os resultados da teoria de Julia e

Fatou^(22,29,30), mostrando a relação entre o conjunto de zeros de Yang-Lee e o conjunto de Julia do mapa do GR (mapa de Bethe-Peierls).

No caso $p = 2$ o teorema de Yang-Lee se verifica e está associado à propriedade de invariância do conjunto de Julia pelo mapa BP. A baixa temperatura o conjunto de zeros é denso no conjunto de Julia e a alta temperatura os dois conjuntos são iguais. As fases ferromagnética e paramagnética do modelo são caracterizadas pela conectividade e desconectividade do conjunto de Julia respectivamente.

No caso $p > 2$ o teorema de Yang-Lee não se verifica. A baixa temperatura o conjunto de Julia é conexo e possui um ponto em comum com o círculo unitário. Na região de coexistência de fase na rede de Bethe o conjunto de Julia permanece conexo mas sua intersecção com o círculo unitário é vazia, e a alta temperatura o conjunto é desconexo. Aqui o conjunto de zeros e o de Julia são iguais para todos os valores da temperatura.

Mostramos que a medida de probabilidade do conjunto de Julia possui um comportamento crítico análogo ao da energia livre do sistema, sendo a grandeza associada ao conjunto de Julia que reflete o comportamento não universal do modelo. Devido à lei de potência que regula o comportamento crítico da medida de probabilidade a baixa temperatura, concluímos que para $p > 2$ a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia é unitária nas proximidades do repulsor do mapa.

Mostramos ainda que a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia pode ser determinada no caso $p = 2$. Na fase ferromagnética o conjunto de Julia tem dimensão unitária e na fase paramagnética do modelo o conjunto é um fractal auto-similar e sua dimensão possui um comportamento crítico cu

jo expoente é $\beta_D = 1/2$.

O fato de o conjunto de Julia não ser um fractal nas proximidades do repulsor a baixa temperatura sugere que a inclinação do conjunto de Julia em relação ao eixo real no plano da fugacidade complexa seja um parâmetro geométrico relevante para o caso $p > 2$.

Através de um estudo numérico verificamos que o conjunto de Julia nessa região do plano complexo se comporta como uma reta, cuja inclinação para $p=3$ possui um comportamento crítico dominado pelos expoentes $\eta = 1$ para $t \leq t_{BP}$ e $\eta \approx 0.118$ para $t \geq t_{BP}$.

Esses fatos fornecem uma descrição geométrica do comportamento crítico do modelo de Potts p -estados na árvore de Cayley. Aqui a teoria de Julia e Fatou desempenha o papel de ponte entre a teoria do grupo de renormalização e a teoria de Yang-Lee.

Com este trabalho identificamos várias questões que deixamos em aberto para investigações futuras, algumas das quais já vem merecendo a nossa atenção presentemente.

Embora tenhamos determinado numericamente o comportamento da inclinação do conjunto de Julia com a temperatura no caso $p > 2$, não identificamos o seu análogo termodinâmico. Existem conjecturas⁽¹⁷⁾ de que esse parâmetro está relacionado à amplitude crítica da energia livre.

No entanto, não existem até hoje evidências que sustentem essa conjectura.

A determinação da dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia para o caso $p > 2$ através de outros métodos que não o de contagem de caixas (que apresenta obstáculos computacionais só superáveis com máquinas velozes), deve revelar propriedades geométricas importantes que se relacionam com o comportamento crítico do modelo como mostramos neste trabalho para o caso $p = 2$.

O fato de o conjunto de Julia para $p = 2$ ser desconexo somente na fase onde o ponto fixo paramagnético é o único atrator do mapa mostra que a temperatura crítica é a fronteira do conjunto de Mandelbrot no eixo real do plano da temperatura complexa. Isso sugere a possível existência de uma relação entre a fronteira do conjunto de Mandelbrot e o conjunto de zeros da temperatura da função de partição.

A ramificação da árvore de Cayley não altera os expoentes críticos do modelo. Esse fato sugere um possível comportamento crítico universal dos mapas em relação ao seu grau e a universalidade do conjunto de Mandelbrot desses mapas em sua fronteira no eixo real.

O caso $p = 1$ merece especial interesse. Nesse caso o mapa do GR se torna polinomial de grau r . Dessa forma quando $r = 2$ o mapa é quadrático e está conjugado analiticamente ao mapa logístico através de uma transformação de Möbius que relaciona os parâmetros dos dois mapas. Quando o acoplamento na rede de Bethe é ferromagnético o atrator do mapa fornece o resultado de campo médio do problema de percolação. No entanto, no caso do acoplamento antiferromagnético o atrator exibe a rota de bifurcação para os caos.

A existência de uma fase caótica no modelo $p = 1$ coloca a questão de qual o valor do parâmetro p para o qual o mapa do GR possui um atrator estranho.

Sem dúvida, todas essas questões merecem um estudo detalhado que pretendemos desenvolver futuramente.

APÊNDICE

Dimensões Generalizadas de Fractais e Atratores Estranhos

Apresentamos aqui um resumo do procedimento desenvolvido inicialmente por P. Grassberger, I. Procaccia e H. G. Hentschel^(36,38), ampliado posteriormente por T. C. Halsey et. al⁽³⁷⁾, através do qual a caracterização dos conjuntos chamados "estranhos" é feita através do estudo das singularidades nas medidas desses conjuntos.

Esse procedimento fornece uma maneira para se calcular a dimensão desses conjuntos, se conhecidas as propriedades de escala dos conjuntos, tornando-se uma alternativa ao método de contagem de caixas.

Muitos são os exemplos de objetos fractais e conjuntos estranhos que a física não-linear apresenta. Os atratores estranhos de sistemas dinâmicos caóticos, as configurações de spins de Ising em pontos críticos, os aglomerados de percolação, as regiões de alta vorticidade em sistemas com turbulência, são alguns exemplos.

Em todos os casos o interesse reside em caracterizar o objeto, e determinar com que frequência as suas diferentes regiões são visitadas, isto é, localizar e caracterizar um evento deste objeto.

De maneira genérica os eventos podem ser descritos dividindo-se o objeto em pedaços indexados por $i = 1, \dots, N$. O tamanho do i -ésimo pedaço é l_i e o evento desse pedaço é descrito por um número M_i . No contexto dos fenômenos críticos M_i pode ser a magnetização de uma região de um magneto indexada por i . Dessa forma se a região i tem um tamanho l_i , a sua magnetização assume um valor da ordem de

$$M_i \sim l^Y \quad (A.1)$$

onde Y é um dos expoentes críticos.

Se imaginarmos que os magnetos elementares do sistema preenchem todo o espaço, então sua densidade será

$$\rho(l) \sim \frac{1}{l^d} \quad (A.2)$$

onde d é a dimensão Euclideana do espaço onde o sistema está definido. Pode-se definir uma seqüência de expoentes Y_q que regulam o comportamento de $(M_i)^q$ com o tamanho l .

De maneira geral o número M_i tem o significado de uma probabilidade de ocorrência de um evento na i -ésima parte de um objeto. No caso de um sistema dinâmico dispomos de uma trajetória $\{x_i\}_{i=1,N}$ gerada pelo sistema em um espaço de fase d -dimensional. Pode-se perguntar, por exemplo, quantas vezes N_i a trajetória visita a i -ésima região do objeto. Quando o tamanho da trajetória $N \rightarrow \infty$ o número

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N_i}{N} \right) \quad (A.3)$$

define tipicamente uma medida de probabilidade. Quando a seqüência $\{x_i\}_{i=1,N}$ é um atrator de um sistema dinâmico a existência do limite (A.3) está garantida pelo teorema de Birkhoff⁽³²⁾ e o número p_i gera uma medida $d\mu$ com suporte no atrator

$$p_i = \int_{i\text{-ésima caixa}} d\mu \quad (A.4)$$

Os objetos observados em problemas não lineares pos

suas visitas que variam ao longo do objeto e esse fato faz com que o seu possível comportamento de escala tenha uma riqueza especial. Dessa forma o número p_i terá um conjunto de expoentes de escala α correspondendo a diferentes regiões da medida que caracterizam o seu comportamento, e teremos

$$p_i^q \sim l_i^{\alpha q} \quad (A.5)$$

Motivados pela relação (A.2), com o sistema dividido em pedaços de tamanho l , o número de vezes que α assume valores entre α' e $\alpha' + d\alpha'$ terá a forma

$$d\alpha' p(\alpha') l^{-f(\alpha')} \quad (A.6)$$

onde $f(\alpha')$ é uma função contínua. A diferença entre as expressões (A.2) e (A.6) é que agora não temos mais a dimensão d do espaço que é ocupado pelos eventos mas sim uma dimensão fractal $f(\alpha')$. Em outras palavras a medida possui singularidades de intensidade α caracterizadas por suas dimensões $f(\alpha)$.

A determinação de $f(\alpha)$ depende de se estabelecer uma relação entre a função $f(\alpha)$ e propriedades observáveis da medida.

Consideremos um conjunto de dimensões definido como⁽³⁸⁾

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \left[\frac{1}{q-1} \cdot \frac{\log X(q)}{\log l} \right] \quad (A.7)$$

onde

$$X(q) = \sum_i p_i^q \quad (A.8)$$

Com a definição (A.7) D_0 é a dimensão fractal do suporte da medida, $D_1 = \sigma$ é a dimensão de informação e $D_2 = \nu$ é a dimensão de correlação⁽³⁶⁾.

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.8) temos

$$\chi(q) = \int d\alpha' \rho(\alpha') e^{-f(\alpha')} e^{q\alpha'} \quad (\text{A.9})$$

Desde que $\rho(\alpha') \neq 0$, uma vez que l é muito pequeno o valor da integral em (A.9) é dominado pelo valor de α' que minimiza o expoente $(q\alpha' - f(\alpha'))$. Assim teremos um valor $\alpha(q)$ determinado pela condição

$$\left. \frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha' = \alpha(q)} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\left. \frac{d^2}{d\alpha'^2} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha' = \alpha(q)} > 0 \quad (\text{A.11})$$

que fornece

$$f'[\alpha(q)] = q \quad (\text{A.12})$$

$$f''[\alpha(q)] < 0 \quad (\text{A.13})$$

Portanto das equações (A.7) e (A.9) temos

$$\mathcal{D}_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f[\alpha(q)]] \quad (\text{A.14})$$

A equação (A.12) fornece ainda a relação

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1) D_q] \quad (A.15)$$

Portanto sabendo-se $f(q)$ e o espectro $\alpha(q)$, determina-se da equação (A.14) as dimensões D_q . Ou ainda, dado D_q determina-se da equação (A.15) o espectro $\alpha(q)$, e a função $f(q)$ é obtida da equação (A.14).

No entanto, pode-se definir as dimensões D_q de maneira mais geral. Seja S um conjunto definido em um espaço Euclidiano d -dimensional, e $\{S_i\}_{i=1,N}$ uma partição disjunta de S e p_i a medida de probabilidade da partição. Suponhamos uma cobertura com bolas de raio l_i de tal forma que $l_i < l$. Assim definimos uma função de partição sobre o conjunto S como

$$\Gamma(q, \tau, \{S_i\}, l) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^q}{l_i^\tau} \quad (A.16)$$

No limite N grande, para se determinar a relação entre os índices τ e q que mantém a função de partição (A.16) da ordem da unidade, consideremos duas regiões dos índices :

$$\begin{array}{lll} \text{região A :} & q \geq 1 & \tau \geq 0 \\ \text{região B :} & q \leq 1 & \tau \leq 0 \end{array}$$

Nessas duas regiões, ajustamos a partição $\{S_i\}$ de tal forma a maximizar a função de partição (A.16) na região A e minimizar (A.16) na região B. Assim definimos

$$\Gamma(q, \tau, l) = \sup \Gamma(q, \tau, \{S_i\}, l) \quad \text{em A}$$

$$\Gamma(q, \tau, l) = \inf \Gamma(q, \tau, \{S_i\}, l) \quad \text{em B}$$

O supremo de (A.16) existe se a probabilidade p_i for limitada por l_i , isto é, se existirem constantes $a > 0$ e $\alpha_0 > 0$ para toda partição $\{S_i\}$ de S ,

$$p_i \leq a (l_i)^{\alpha_0} \quad (\text{A.17})$$

Ou seja, na região A teremos

$$a^q \sum_{i=1}^N l_i^{(q\alpha_0 - \tau)} \geq \sum_{i=1}^N \frac{p_i^q}{l_i^\tau} \quad (\text{A.18})$$

Como nessa região $q \geq 1$ e $\tau \geq 0$ então

$$\alpha_0 (q-1) > \tau \quad (\text{A.19})$$

para que a função de partição exista e seja menor que infinito.

Tomando o limite $l \rightarrow 0$, definimos

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{l \rightarrow 0} [\Gamma(q, \tau, l)] \quad (\text{A.20})$$

A função (A.20) é monótona não decrescente de τ e não crescente de q . Assim pode-se afirmar que existe uma função $\tau(q)$ de tal forma que

$$\Gamma(q, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{se } \tau > \tau(q) \\ 0 & \text{se } \tau \leq \tau(q) \end{cases}$$

Dessa forma definimos a dimensão generalizada D_q co-

mo

$$(q-1)D_q = \tau(q) \quad (A.21)$$

de tal forma que D_0 coincida com a dimensão de Hausdorff (veja equações A.16 e A.7).

A seguir consideramos alguns exemplos como aplicação do formalismo.

Exemplo 1: Conjuntos de Cantor

Consideremos o conjunto de Cantor tradicional construído a partir do intervalo unitário. Substitui-se o intervalo por dois segmentos de tamanho $l = 1/3$, $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Cada intervalo recebe a medida $p = 1/2$. Esse processo é repetido sucessivamente, e portanto para essa medida devemos ter da equação A.16.

$$2 \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{3}\right)^q} \right] = 1 \quad (A.22)$$

Portanto

$$\tau(q) = (q-1) \frac{\log 2}{\log 3} \quad (A.23)$$

e conseqüentemente da equação (A.21)

$$D_q = \frac{\log 2}{\log 3} \quad (A.24)$$

que mostra que o conjunto é auto-similar.

Podemos generalizar a construção tomando os dois in-

tervalos com comprimentos l_1 e l_2 com medidas p_1 e p_2 . Dessa forma da equação A.16 temos

$$\frac{p_1^q}{l_1^q} + \frac{p_2^q}{l_2^q} = 1 \quad (A.25)$$

que com o auxílio da equação (A.21) permite determinar as dimensões D_q . Aqui as dimensões são distintas e a medida é não homogênea ao longo do conjunto.

No capítulo III mostramos que o conjunto de Julia do mapa BP para o modelo de Ising na fase paramagnética é um conjunto desconexo contido em dois arcos do círculo unitário de tamanho $[\theta_i, \pi]$ (θ_i é o argumento do repulsor a alta temperatura). Aqui o tamanho das duas caixas varia com a temperatura e a medida associada às caixas é $p_i = 1/2$ uma vez que o mapa inverso é $1 \rightarrow 2$ para ramificação 2.

Exemplo 2: Intervalo com densidade não homogênea

Consideremos o preenchimento do intervalo unitário. Observando um comportamento de escala no preenchimento, somente no caso em que os sub-intervalos e suas medidas forem homogêneos é que teremos todas as dimensões $D_q = 1$. De maneira geral então para scaling de dois intervalos teremos

$$\frac{p_1^q}{l_1^q} + \frac{p_2^q}{l_2^q} = 1 \quad \text{ou} \quad l_1 + l_2 = 1 \quad (A.26)$$

Esse é o caso do conjunto de Julia do mapa BP do modelo de Ising a baixa temperatura. O conjunto é o círculo uni

tário mas a densidade de pontos não é homogênea. A sua dimensão de Hausdorff é unitária mas as demais dimensões do espectro são diferentes de um.

Exemplo 3: Medida com lei de potência

Consideremos uma medida $p(x) = x^{\bar{\alpha}}$, com $x \in [0, 1]$. Subdividimos o intervalo em N segmentos $[x_i, x_i + \Delta x]$ com $\Delta x = 1/N$. A medida de probabilidade total sobre todos os intervalos pode ser aproximada por $\rho(x_i)\Delta x$ (exceto para o intervalo com o ponto zero quando $0 < \bar{\alpha} < 1$), onde $\rho(x_i)$ é a densidade de probabilidade.

O intervalo com o ponto zero tem probabilidade $\rho_0 = (\Delta x)^{\bar{\alpha}}$.

A equação (A.16) será então

$$\Gamma(q, \tau, \Delta x) \sim \frac{(\Delta x)^{\bar{\alpha}q}}{(\Delta x)^{\tau}} + \sum_{i \neq 0} \frac{\bar{\alpha}(x_i)^{\bar{\alpha}-1} (\Delta x)^q}{(\Delta x)^{\tau}} \quad (\text{A.27})$$

Observando que a soma possui $(\Delta x)^{-1}$ termos, então

$$\Gamma(q, \tau, \Delta x) \sim (\Delta x)^{\bar{\alpha}q - \tau} + (\Delta x)^{q - 1 - \tau} \quad (\text{A.28})$$

Portanto, para que a função de partição não seja zero nem infinito, devemos ter da equação (A.21)

$$D_q = \frac{1}{q-1} \min \left\{ q-1, \bar{\alpha}q \right\} \quad (\text{A.29})$$

Conseqüentemente as dimensões serão $D_q = 0$ ou $D_q = 1$.

No capítulo III mostramos que a medida de probabilidade do conjunto de Julia do mapa BP para o caso $p > 2$ nas proximidades

dades do repulsor a baixa temperatura apresenta um comportamento de potência. Como nesse caso mostramos que o conjunto de Julia é conexo, então a sua dimensão é $D_q = 1$ nessa região.

Esse formalismo pode ser aplicado a vários outros casos como o atrator de Feigenbaum e a transformação de Baker com resultados satisfatórios^(37,38). O ponto principal para a implementação deste formalismo é identificar a lei de escala que obedece o conjunto no seu processo de construção determinando assim o tamanho das caixas l_i e suas respectivas probabilidades associadas.

REFERÊNCIAS

- (1) Wilson, K.G. Kogut, J.B. Phys. Rep. 12C (1974) 75
Wilson, K.G. Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 773
- (2) Kogut, J.B: Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659
- (3) Wallace, D.J. Zia, R.K.P. Rep. Prog. Phys. 41 (1978) 1
- (4) Brézin, E. Methods in Field Theory, eds. R. Balian e J. Zinn-Justin (North-Holland Co., 1976) 329
- (5) Brézin, E. Le Guillon, J.C. Zinn-Justin, J.
Phase Transitions and Critical Phenomena, eds. C.Domb e M.S. Green, vol. 6 (Academic Press, 1976)
- (6) Amit, D. Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena (Mc Graw-Hill, 1977)
- (7) Kadanoff, L.P. Physics 2 (1966) 263
- (8) Kadanoff, L.P. Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 267
- (9) Niemeijer, Th. van Leeuwen, J.M.J.
Phase Transitions and Critical Phenomena, eds. C. Domb e M.S. Green, vol. 6 (Academic Press, 1976)
- (10) Wegner, F. Phys. Rev. B5 (1972) 4529; Lectures Notes in Physics 37 (1973) 171
- (11) Kadanoff, L.P. Houghton, A. Phys. Rev. B11 (1975) 377
- (12) Migdal, A.A. Zh. Eksp. Theor. Fiz. 69 (1975) 810
- (13) Kadanoff, L.P. Houghton, A. Yalabick, M.C.
J. Stat. Phys. 14 (1976) 171
- (14) Kadanoff, L.P. Ann. of Physics 100 (1976) 359
- (15) Martinelli, G. Parisi, G. Nuc. Phys. B150 (1981) 201
- (16) Niemeijer, Th. van Leeuwen, J.M.J. Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 1411 Physica 71 (1974) 17
- (17) Derrida, B. De Seze, L. Itzykson, C. J. Stat. Phys. 33 (1983) 559

- (18) Saupe, D. Physica 28D (1987) 358
- (19) Yang, C.N. Lee, T.D. Phys. Rev. 87 (1952) 404
- (20) Fisher, M.E. Lectures in Theoretical Physics VII C
(1965) 1 (University of Colorado Press)
- (21) Peitgen, H.D. Richter, R.H. The Beauty of Fractals
Springer-Verlag 1986
- (22) Julia, G. Jou. de Mat. Pure et Appl. 8 (1918) 47
Fatou, P. Bull. Soc. Mat. Fr. 47 (1919) 161
Bull. Soc. Mat. Fr. 48 (1920) 33, 208
- (23) Mandelbrot, B.B. Ann. NY Acad. Sc. 357 (1980) 249
- (24) Moraal, H. Lectures Notes in Physics 214 (1984)
Physica 85A (1976) 457
Physica 92A (1978) 305
Christiano, P.L. Rosa Jr., S.G. Physics Let. 110A
(1984) 235
- (25) Müller-Hartmann, E. Zittartz, J. Phys. Rev. Let. 33
(1974) 893
Müller-Hartmann, E. Z. Phys. B27 (1977) 61
- (26) Eggarter, T.P. Phys. Rev. B9 (1974) 2989
- (27) Hu, B. Phys. Rep. 91 (1982) 233
- (28) Baxter, R.J. Exactly Solved Models in Statistical
Mechanics (1982) New York : Academic
- (29) Devaney, R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical
Systems (Benjamin / Cummings : 1986)
- (30) Blanchard, P. Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984) 85
Douady, A. Hubbard, J.H. CRAS Paris 294 (1982) 123
Mañé , R. Sad., P. Sullivan, D. Ann. Sc. Ec. Nor. Sup.
161 (1983) 193
Ruelle, D. Ergod. Th. Dyn. Sys. 2 (1982) 99
Siegel, C.L. Ann. of Math. 43 (1942) 607
Sullivan, D. preprint IHES (1982)

- (31) Haeseler, F.V. (1985) : Tese de Doutorado : Univ. de Bremen.
- (32) Mañé , R. Introdução à Teoria Ergódica, IMPA (1979)
Breiman, I. Probability (Addison Wesley Pub. Co. (1968)
- (33) Ljubich, M.J. Ergod. Th. Dyn. Sys. 3 (1983) 351
- (34) Bosco, F.A. Rosa Jr., S.G. Europh. Let. 4 (10) (1987)
1103
de Aguiar, F.S. Bosco, F.A. Rosa Jr., S.G. Phys. Let. A127 (4) (1988) 194
- (35) Farmer, J.D. Ott, E. Yorke, J.A. Physica 7D (1983) 153
- (36) Grassberger, P. Procaccia, I. Physica 13D (1984) 34
- (37) Halsey, T.C. Jensen, M.H. Kadanoff, I.P. Procaccia, I. Shraimann, B. Phys. Rev. A33 (1986) 1141
- (38) Hentschel, H.G.E. Procaccia, I. Physica 8D (1983) 435