UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

*Propagação da luz em meios não
lineares de dois níveis com es-
tado excitado degenerado".*

Marco Antonio Alves da Silva

*Dissertação de Mestrado apresen-
tada ao Instituto de Física e
Química de São Carlos, para ob-
tenção do Título de MESTRE EM FÍSICA
BÁSICA.*

Orientador: Prof. Dr. Rogério Cantarino T. da Costa

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos-1983

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

MARCO ANTONIO ALVES DA SILVA

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 16 DE junho DE 1983.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Rogério Cantarino T. da Costa - Orientador

Dr. Luiz Antonio Fávares

Dr. Gilmar Eugênio Marques

DEDICO

*A minha mãe e ao
meu pai (in memoriam)*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rogério Cantarino Trajano da Costa, pela orientação precisa, motivante e dinâmica e por sua compreensão das dificuldades encontradas durante a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Sylvio Goulart Rosa Jr., pelo constante apoio e pela atenção com que me recebeu.

Ao João Batista Peneireiro, pela sua amizade e também pelo incentivo recebido.

A todos os Mestres que contribuíram para minha forma
ção.

A todos os colegas.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - AS EQUAÇÕES DO MEIO MATERIAL	6
2.1 - A Equação de Schrödinger para átomos de dois níveis com estado excitado degenerado	6
2.2 - Valores esperados dos operadores $\vec{d}$, $\vec{L}$ e $\vec{H}_0$	10
2.3 - As equações de movimento para $\langle \vec{d} \rangle$ $\langle \vec{L} \rangle$ e $\langle \vec{H}_0 \rangle$	13
2.4 - Equações do meio material	15
2.5 - Interpretação da variável $\vec{S}$	21
CAPÍTULO III - PROPAGAÇÃO DO CAMPO PARA A TRANSIÇÃO ($\Delta m=0, \pm 1$) - AS EQUAÇÕES AUTO-CONSISTENTES	24
3.1 - Equações do Campo	24
3.2 - Solução das equações auto-consisten tes para o caso livre	31
3.3 - Sistema de equações para a transição $\Delta l=1$ ($\Delta m=0, \pm 1$) para acoplamento fra- co	33
3.4 - Conservação de energia	38

CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA A TRANSIÇÃO $\Delta l=1$ ($\Delta m=0, \pm 1$) (ACOPLAMENTO FRACO)	40
4.1 - Meio com largura de linha zero (pulsos transparentes "lentos")	40
4.2 - Meio com largura de linha finita	45
4.3 - Discussão para pulsos "rápidos"	63
4.4 - Conclusões ,	65
REFERÊNCIAS	70

RESUMO

Estudamos nesta dissertação, a propagação auto-transparente de um pulso luminoso num meio de átomos de dois níveis cujos estados excitados possuem a degenerescência característica do momento angular $\ell = 1$. O problema é abordado através de equações auto-consistentes, na aproximação semiclássica, escritos em termos do campo elétrico e dos valores médios de grandezas fisicamente relevantes que descrevem o estado do meio material. Obtemos soluções auto-transparentes elipticamente polarizados tanto para o caso em que a largura de linha é desprezível como para o caso onde ela é devido a um alargamento do tipo inhomogêneo.

ABSTRACT

We study in this dissertation the propagation of a self-transparent light pulse in a medium of two level atoms whose excited states have the typical degeneracy of the $\ell = 1$ angular momentum. The problem is discussed in the semi classical approximation with the help of self-consistent equations written in terms of the electrical field and the mean values of relevant physical quantities which describe the state of the medium. We obtain eliptically polarized self-transparent solutions for both cases of negligible line-width and when the line-width is due to inhomogeneous broadening.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O estudo da propagação da luz em meios não lineares tem sido realizado por muitos autores⁽¹⁻⁶⁾. Desde a descoberta da luz coerente ("Masers" e "Lasers") que pode produzir pulsos intensos de curtíssima duração, tem sido observada a propagação de pulsos luminosos através de meios opticamente ressonantes como se eles fossem transparentes. Houve também um refinamento nos modelos para descrever tal propagação⁽⁵⁾.

Vamos nos propor, no presente trabalho, a encontrar pulsos luminosos que se propaguem de modo *transparente*, isto é, como se fosse no espaço vazio (sem distorção) em meios não lineares de dois níveis (um fundamental e outro excitado) com degenerescência no estado excitado. Um estudo realista da interação da radiação eletromagnética com um meio material é extremamente complexo devido à multiplicidade de transições envolvidas (mesmo os átomos mais simples possuem uma estrutura complexa de estados excitados). Por isso, utilizamos o modelo de dois níveis, pois este permite um tratamento simplificado que pode dar resultados satisfatórios mesmo no domínio quantitativo. Para tornar o modelo de dois níveis viável, sintonizamos o campo numa frequência de transição dos átomos e trabalhamos na aproximação de dipolo elétrico, o que nos dá uma regra de seleção que restringe o número de transições permitidas.

Em 1967, S.L. McCall e E.L. Hahn⁽¹⁾, estudaram a propagação de pulsos transparentes em meios de dois níveis com estado excitado não degenerado, utilizando ondas circularmente polarizadas para selecionar transições do tipo $\Delta m = 1$. No nosso modelo o es

tado excitado é degenerado (com $\ell = 1$), isto faz aparecer novas variáveis e o número de soluções é aumentado consideravelmente.

Obviamente a propagação do pulso depende de um efeito coletivo em que todos os átomos estão envolvidos, alguns absorvendo, outros emitindo luz. O trabalho clássico a esse respeito é o de Dicke⁽¹¹⁾ (1954). Não vamos entrar em detalhes sobre o trabalho de Dicke, pois este considera o problema sob o ponto de vista de campo quantizado, enquanto que nós damos um tratamento diferente que passaremos a descrever.

As hipóteses fundamentais para o nosso modelo são as seguintes:

- a) a interação entre os átomos se dá apenas através do campo eletromagnético clássico descrito pelas equações de Maxwell;
- b) os átomos são considerados iguais, distinguíveis, descritos pela mesma função de onda (estado de *máxima cooperação*) dada pela equação de Schrödinger;
- c) os átomos são hidrogenóides e possuem apenas dois níveis de energia com estado excitado degenerado ($\ell = 1$) formando uma camada fechada.

As hipóteses (a) e (b) acima equivalem à comumente chamada aproximação *semi-clássica*, em que abandonamos o efeito da emissão espontânea (só tratada pelo campo quantizado), considerando apenas a emissão induzida⁽⁷⁻¹⁰⁾.

Para utilizar o modelo, vamos considerar as *fontes* das equações de Maxwell dadas pela polarização média do meio e a perturbação da hamiltoniana na equação de Schrödinger dada na aproximação de dipolo elétrico, que consiste na hipótese de que o campo externo que atua sobre um átomo varia lentamente no espaço em comparação com um diâmetro atômico, de tal modo que os elétrons vêem um campo uniforme variável no tempo. Não vamos considerar a relaxa

ção do meio, supondo pulsos rápidos cuja duração é muito menor que o tempo de relaxação (tempo necessário para que o meio atinja o estado de equilíbrio).

Para encontrar pulsos transparentes, consideramos interação fraca entre o meio e o campo, isto é, o valor médio da perturbação muito menor do que a separação entre os dois níveis de energia. Mas o campo é *sintonizado* com a frequência de transição do meio de tal modo que no fim de um tempo longo, muito maior que o período de uma oscilação atômica, possam ocorrer transições.

Obteremos através da equação de Schrödinger, um sistema de equações para um átomo que envolve o campo local e, entre outras grandezas médias o momento de dipolo elétrico. Para obtermos um sistema de equações auto-consistente, consideramos o campo elétrico que aparece na equação de Schrödinger igual ao campo elétrico *macroscópico* que aparece nas equações de Maxwell, e o momento de dipolo multiplicado pelo número de átomos por unidade de volume igual à polarização macroscópica. Essas hipóteses, que relacionam as grandezas macroscópicas com as locais, são verificadas experimentalmente para baixas densidades⁽²⁾. O sistema final será obtido, considerando uma propagação unidimensional num só sentido onde as soluções serão análogas às livres (ondas planas) com amplitudes lentamente variáveis. Desprezaremos os termos rapidamente oscilantes, pois esses não contribuem para as amplitudes lentamente variáveis, assim as equações obtidas dependerão apenas das amplitudes.

Existem duas situações, que serão resolvidas dentro das hipóteses e aproximações já mencionadas:

1^a) a de *largura zero*, isto é, todos os átomos do meio possuem a mesma frequência ω_0 com a qual o campo está em ressonância;

2^a) com *largura de linha* - neste caso consideramos que o meio possui uma distribuição de frequências causada pela instabi

lidade do estado excitado (alargamento homogêneo), ou por outros fatores mais importantes, como a inhomogeneidade de campos internos e o efeito Doppler⁽⁵⁾ no caso de um gás (alargamento inhomogêneo). O campo, para este caso é *sintonizado* em uma frequência ω correspondente à maior fração de átomos.

Para ambos os casos, os resultados obtidos são pulsos transparentes elipticamente polarizados que podem recair no caso particular da onda circularmente polarizada encontrada por McCall-Hahn ou na onda plana pela escolha conveniente de uma excitação particular.

O sistema de equações que obtemos possibilita a investigação de outros tipos de soluções que não serão consideradas, como por exemplo pulsos na forma de ondas esféricas ou cilíndricas.

Passaremos agora a apresentar um resumo do conteúdo dos capítulos seguintes. No segundo capítulo, obteremos as equações em termos de valores médios de grandezas fisicamente relevantes (momento de dipolo, momentum angular, energia não perturbada e momentum linear), que descrevem a evolução do meio material. Para isso, utilizamos a equação de Schrödinger para átomos hidrogenóides. No terceiro capítulo, encontramos uma equação aproximada de primeira ordem para o campo a partir das equações de Maxwell, impondo a condição de que o pulso se propague num só sentido. Resolvemos então o sistema de equações resultante (equações do meio e do campo) para o caso livre (corresponde a fazer o momento de dipolo nulo nas equações do campo) em uma dimensão obtendo ondas planas. A partir da solução do caso livre, encontramos um sistema de equações para acoplamento fraco do campo com a matéria fazendo as amplitudes variarem lentamente. Em seguida, discutimos brevemente a questão da conservação de energia, mostrando que ao vetor de Poyting está ligada uma energia que é a soma da energia do campo mais a acumulada no meio material.

Finalmente no quarto capítulo, resolvemos as equações para as amplitudes obtidas no terceiro capítulo para *largura zero* e com *largura de linha*. Inicialmente supomos pulsos transparentes *lentos* (velocidade de propagação menor que a da luz), em seguida, fazemos uma breve discussão para pulsos *rápidos* (velocidade de propagação maior que a da luz). Em todos os casos os pulsos obtidos são elipticamente polarizados. Na última secção do quarto capítulo (conclusões), discutimos com maior precisão as aproximações feitas; a propagação dos pulsos obtidos; as transições que ocorrem durante a propagação de tais pulsos e as relações entre largura do pulso, densidade do meio e tempos de relaxação.

Para encerrar, desejamos fazer alguns comentários sobre os resultados obtidos com nosso modelo. Embora tenhamos feito hipóteses e aproximações simplificadoras para obtermos um sistema solúvel exatamente, encontramos pulsos elipticamente polarizados cuja propagação envolve transições de todos os tipos ($\Delta m = 0, \Delta m = \pm 1$), recaiando como caso particular o pulso circularmente polarizado ($\Delta m = +1$) encontrado por McCall-Hahn. Assim, mesmo com todas as concessões feitas, o modelo de dois níveis com estado excitado degenerado ($l = 1$) obteve algum progresso no estudo da propagação de pulsos transparentes mostrando que as possibilidades de propagação de tais pulsos são mais amplas.

CAPÍTULO II

AS EQUAÇÕES DO MEIO MATERIAL

2.1 - A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER PARA ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS COM ESTADO EXCITADO DEGENERADO

Vamos considerar um sistema de átomos hidrogenóides, com dois níveis de energia, $+\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ e $-\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, onde o estado excitado é degenerado e possui momentum angular $\ell=1$. As funções de onda normalizadas^(*) são escritas na forma seguinte: para o estado excitado;

$$\begin{aligned}\psi_0 &= R_{21}(r) \cos \theta, \quad \ell=1, m=0, \\ \psi_1 &= -\frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad \ell=1, m=1, \\ \psi_2 &= \frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad \ell=1, m=-1,\end{aligned}\tag{2.1}$$

e, para o fundamental;

$$\psi_3 = R_{10}(r), \quad \ell=0, m=0.$$

A função de onda $\psi(t)$ mais geral que descreve a evolução do meio material é da forma:

(*) As expressões (2.1) acima correspondem à definição dos Harmônicos Esféricos dada em E. MEZBACHER: QUANTUM MECHANICS, JOHN WILEY & SONS, pag. 186.

$$\psi(t) = a_0(t)\psi_0 + a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2 + a_3(t)\psi_3^{(*)}, \quad (2.2)$$

ou, na forma de vetor coluna,

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad (2.3)$$

o que faz com que todos os operadores sejam representados por matrizes 4×4 .

Neste caso a hamiltoniana não perturbada é dada por:

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

No caso de nosso interesse, o tratamento é feito na aproximação de dipolo elétrico^(**), assim, a hamiltoniana de interação é dada por:

$$H_I = -\vec{d} \cdot \vec{E} \quad (2.5)$$

onde $\vec{d}$, é o momento de dipolo ($-e\vec{r}$) e $\vec{E}$ o campo elétrico que atua sobre o átomo.

Denotando por $(\vec{d})_{ij} = (\psi_i, \vec{d}\psi_j)$ os elementos da matriz do dipolo elétrico, com $i = 0, 1, 2, 3$ e $j = 0, 1, 2, 3$ temos de (2.1):

(*) No nosso problema vamos considerar ψ normalizada a 1, $\int \psi \psi^* dv = 1$ ou $\psi^* \psi = 1$, assim: $a_0^* a_0 + a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + a_3^* a_3 = 1$

(**) Veja por exemplo: R.C.T. da Costa, Tese de Livre Docência, IFQSC-USP, 1978, pág. 13.

$$\begin{aligned}
(\vec{d})_{00} &= (\vec{d})_{11} = (\vec{d})_{22} = (\vec{d})_{33} = (\vec{d})_{01} = (\vec{d})_{02} = (\vec{d})_{12} = (\vec{d})_{10} = (\vec{d})_{20} = (\vec{d})_{21} = 0 \\
(d_x)_{13} &= (d_x)_{31} = -(d_x)_{23} = -(d_x)_{32} = d \quad , \\
(d_y)_{13} &= -(d_y)_{31} = (d_y)_{23} = -(d_y)_{32} = -id \quad , \\
(d_z)_{03} &= (d_z)_{30} = -\sqrt{2} d \quad , \\
(d_y)_{03} &= (d_y)_{30} = (d_z)_{13} = (d_z)_{31} = (d_z)_{23} = (d_z)_{32} = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde

$$d = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi e \int_0^\infty R_{10}(r) R_{21}(r) r^3 dr$$

e

$$i = \sqrt{-1} \quad .$$

Os resultados nulos das equações (2.6) podem ser interpretados como sendo consequência da simetria esférica do potencial. Assim, os operadores de momento de dipolo são por (2.6) escritos na forma matricial:

$$d_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & d & -d & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad d_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -id \\ 0 & 0 & 0 & -id \\ 0 & id & id & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$d_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.7}$$

Notemos de (2.7) que o operador $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$ é representado por matrizes hermiteanas, como deve ser um operador que representa uma grandeza física.

Observando a expressão (2.5), escrevemos a hamiltoniana de interação na forma de operador

$$H_I = -\vec{E} \cdot \vec{d} = -(E_x d_x + E_y d_y + E_z d_z) ,$$

que com o uso de (2.7) fica

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} d E_z \\ 0 & 0 & 0 & -dE_x + idE_y \\ 0 & 0 & 0 & dE_x + idE_y \\ \sqrt{2} d E_z & -dE_x - idE_y & dE_x - idE_y & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

A hamiltoniana total por (2.4) e (2.8) é:

$$H = H_0 + H_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hbar \omega_0 & 0 & 0 & \sqrt{2} d E_z \\ 0 & \frac{1}{2} \hbar \omega_0 & 0 & -dE_x + idE_y \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \hbar \omega_0 & dE_x + idE_y \\ \sqrt{2} d E_z & -dE_x - idE_y & dE_x - idE_y & -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Utilizando na equação de Schrödinger,

$$H \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} ,$$

as expressões (2.3) e (2.9), obtemos após alguns desenvolvimentos

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{-i}{2} \omega_0 a_0 - i \sqrt{2} \frac{d}{\hbar} E_z a_3 , \\ \dot{a}_1 &= \frac{-i}{2} \omega_0 a_1 + i \frac{d}{\hbar} (E_x - i E_y) a_3 , \\ \dot{a}_2 &= \frac{-i}{2} \omega_0 a_2 - \frac{id}{\hbar} (E_x + i E_y) a_3 , \\ \dot{a}_3 &= \frac{i}{2} \omega_0 a_3 - i \sqrt{2} \frac{d}{\hbar} E_z a_0 + i \frac{d}{\hbar} (E_x + i E_y) a_1 - \frac{id}{\hbar} (E_x - i E_y) a_2 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

O sistema de equações (2.10), obtido a partir da equação de Schrödinger para átomos de dois níveis com estado excitado

degenerado, embora formalmente nos dê a evolução do meio material, não é conveniente por não se acoplar diretamente às equações de Maxwell que contêm a polarização, que pode ser escrita em termos do momento de dipolo, a qual não aparece explicitamente em (2.10). Na secção 2.4 encontraremos um sistema de equações em termos de grandezas fisicamente relevantes que pode ser acoplado às equações de Maxwell.

2.2 - VALORES ESPERADOS DOS OPERADORES $\vec{d}$, $\vec{L}$ e H_0

Para melhor descrever a evolução do meio material devemos encontrar as equações de movimento para valores esperados de grandezas fisicamente relevantes do problema, que no nosso caso são inicialmente: o momento de dipolo ($\langle \vec{d} \rangle$), o momentum angular ($\langle \vec{L} \rangle$) e a energia não perturbada ($\langle H_0 \rangle$). Para as componentes do momento de dipolo, utilizando as expressões (2.3) e (2.7) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle d_x \rangle &= \psi^* d_x \psi = d [a_3^* (a_1 - a_2) + a_3 (a_1^* - a_2^*)] , \\ \langle d_y \rangle &= \psi^* d_y \psi = i d [a_3^* (a_1 + a_2) - a_3 (a_1^* + a_2^*)] , \\ \langle d_z \rangle &= \psi^* d_z \psi = -\sqrt{2} d [a_0^* a_3 + a_0 a_3^*] . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Procuramos agora as matrizes do operador de momentum angular $\vec{L}$. Utilizando a notação $(\vec{L})_{ij} = (\psi_i, \vec{L} \psi_j)$ onde $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$ e as expressões (*)

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \\ L_y &= \frac{\hbar}{i} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \end{aligned}$$

(*) E. MEZBACHER: QUANTUM MECHANICS, JOHN WILEY & SONS, pág. 178.

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} ;$$

obtemos através do uso de (2.1)

$$\begin{aligned}
 (L)_{00} &= 0 \\
 (L_x)_{ij} &= (L_y)_{ij} = 0 \quad , \quad ij \neq 01, 02, 10, 20 ; \\
 (L_z)_{ij} &= 0 \quad , \quad ij \neq 11, 22 ; \\
 (L_x)_{01} &= (L_x)_{02} = (L_x)_{10} = (L_x)_{20} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} ; \\
 (L_y)_{01} &= (L_y)_{20} = -(L_y)_{10} = -(L_y)_{02} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} ; \\
 (L_z)_{11} &= -(L_z)_{22} = \hbar .
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim, por (2.12), os operadores de momentum angular são escritos na forma matricial

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_x &= \begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\
 \mathbb{L}_y &= \begin{pmatrix} 0 & i\hbar/\sqrt{2} & -i\hbar/\sqrt{2} & 0 \\ -i\hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ i\hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \\
 \mathbb{L}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

(2.13)

Como não poderia deixar de ser, notemos novamente que $\vec{L}$ é representado por matrizes hermiteanas.

Com as expressões (2.3) e (2.13) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{L}_x \rangle &= \psi^* \mathbb{L}_x \psi = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[a_0^* (a_1 + a_2) + a_0 (a_1^* + a_2^*) \right] , \\ \langle \mathbb{L}_y \rangle &= \psi^* \mathbb{L}_y \psi = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left[a_0^* (a_1 - a_2) - a_0 (a_1^* - a_2^*) \right] , \\ \langle \mathbb{L}_z \rangle &= \psi^* \mathbb{L}_z \psi = \hbar (|a_1|^2 - |a_2|^2) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Calculemos agora $\langle H_0 \rangle$:

$$\langle H_0 \rangle = \psi^* H_0 \psi = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 - |a_3|^2 \right) . \quad (2.15)$$

Para facilitar os cálculos façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} W_1 &= a_1 - a_2 , \\ W_2 &= a_1 + a_2 , \\ a &= a_3 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Então as expressões (2.11), (2.14) e (2.15), escritas em termos dessas novas variáveis dadas por (2.16), ficam sendo:

$$\begin{aligned} \langle d_{\mathbb{L}_x} \rangle &= d \left[a^* W_1 + a W_1^* \right] , \\ \langle d_{\mathbb{L}_y} \rangle &= id \left[a^* W_2 - a W_2^* \right] , \\ \langle d_{\mathbb{L}_z} \rangle &= -\sqrt{2} \, d \left[a_0^* a + a_0 a^* \right] ; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{L}_x \rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[a_0^* W_2 + a_0 W_2^* \right] , \\ \langle \mathbb{L}_y \rangle &= i \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[a_0^* W_1 - a_0 W_1^* \right] , \\ \langle \mathbb{L}_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} \left[W_1 W_2^* + W_1^* W_2 \right] ; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\langle H_0 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left[|a_0|^2 - |a|^2 + \frac{1}{2} \left(|W_1|^2 + |W_2|^2 \right) \right] \quad (2.19)$$

Os termos do membro esquerdo da equação

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 1 \quad (2.20)$$

dão a probabilidade de ocupação dos estados, a equação portanto, representa a conservação da probabilidade. A conservação da probabilidade (2.20), escreve-se em termos das novas variáveis dadas por (2.16) na forma

$$|a_0|^2 + |a|^2 + \frac{1}{2} \left(|W_1|^2 + |W_2|^2 \right) = 1 \quad (2.21)$$

De (2.21) e (2.19) escrevemos:

$$\langle H_0 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (1 - 2|a|^2) \quad (2.22)$$

As expressões (2.17), (2.18) e (2.22) nos fornece os valores esperados do momento de dipolo ($\vec{d}$), o momentum angular ($\vec{L}$) e da hamiltoniana não perturbada (H_0), os quais estavamos procurando.

2.3 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA $\langle \vec{d} \rangle$, $\langle \vec{L} \rangle$ e $\langle H_0 \rangle$

Utilizando as novas variáveis dadas por (2.16), o sistema de equações dado por (2.10) fica escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -\frac{i}{2} \omega_0 a_0 - \frac{i\sqrt{2}}{\hbar} d E_z a, \\ \dot{W}_1 &= -\frac{i}{2} \omega_0 W_1 + \frac{2i}{\hbar} d E_x a, \\ \dot{W}_2 &= -\frac{i}{2} \omega_0 W_2 + \frac{2i}{\hbar} d E_y a, \\ \dot{a} &= \frac{i}{2} \omega_0 a - \frac{i\sqrt{2}}{\hbar} d E_z a_0 + \frac{i}{\hbar} d E_x W_1 - \frac{i}{\hbar} d E_y W_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Observemos que o sistema acima é compatível com a equação da conservação da probabilidade (2.21), pois:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(|a_0|^2 + |a|^2 + \frac{1}{2} (|w_1|^2 + |w_2|^2) \right) &= 2a_0^* \dot{a}_0 + 2\dot{a}_0^* a + 2a^* \dot{a} + \\ &+ 2\dot{a}^* a + w_1^* \dot{w}_1 + \dot{w}_1^* w_1 + w_2^* \dot{w}_2 + \dot{w}_2^* w_2 = 0, \end{aligned}$$

onde esta última igualdade decorre do emprego das equações (2.23).

Vamos agora obter as equações satisfeitas por $\langle \vec{d} \rangle$, $\langle \vec{L} \rangle$ e $\langle H_0 \rangle$. Para começar, derivamos ambos os membros das equações (2.17) e utilizamos (2.23) obtendo

$$\begin{aligned} \langle \dot{d}_x \rangle &= d \left[i\omega_0 (a w_1^* - a^* w_1) + \frac{i\sqrt{2}}{\hbar} d E_z (a_0^* w_1 - a_0 w_1^*) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{\hbar} E_y (w_2^* w_1 + w_2 w_1^*) \right], \\ \langle \dot{d}_y \rangle &= id \left[-i\omega_0 (a^* w_2 + a w_2^*) + \frac{i\sqrt{2}}{\hbar} d E_z (a_0^* w_2 + a_0 w_2^*) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{id}{\hbar} E_x (w_1^* w_2 + w_1 w_2^*) \right], \\ \langle \dot{d}_z \rangle &= -\sqrt{2} d \left[i\omega_0 (a_0^* a - a_0 a^*) + \frac{id}{\hbar} E_x (w_1 a_0^* - w_1^* a_0) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{\hbar} E_y (w_2 a_0^* + w_2^* a_0) \right]. \end{aligned}$$

(2.24)

Substituindo as equações (2.18) nas equações (2.24) e lembrando as regras do produto vetorial temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \dot{\vec{d}}_x \rangle}{d} &= i\omega_0 (aW_1^* - a^*W_1) + \frac{2d}{\hbar^2} (\langle \vec{\mathbb{L}} \rangle \wedge \vec{E})_x, \\
\frac{\langle \dot{\vec{d}}_y \rangle}{d} &= \omega_0 (a^*W_2 + aW_2^*) + \frac{2d}{\hbar^2} (\langle \vec{\mathbb{L}} \rangle \wedge \vec{E})_y, \\
\frac{\langle \dot{\vec{d}}_z \rangle}{d} &= i\sqrt{2}\omega_0 (a_0 a^* - a_0^* a) + \frac{2d}{\hbar^2} (\langle \vec{\mathbb{L}} \rangle \wedge \vec{E})_z.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Derivando agora ambos os membros das equações (2.18), utilizando as equações (2.23) e as expressões (2.17), encontramos:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\vec{\mathbb{L}}}_x \rangle &= E_z \langle \vec{d}_y \rangle - E_y \langle \vec{d}_z \rangle = (\langle \vec{d} \rangle \wedge \vec{E})_x, \\
\langle \dot{\vec{\mathbb{L}}}_y \rangle &= E_x \langle \vec{d}_z \rangle - E_z \langle \vec{d}_x \rangle = (\langle \vec{d} \rangle \wedge \vec{E})_y, \\
\langle \dot{\vec{\mathbb{L}}}_z \rangle &= E_y \langle \vec{d}_x \rangle - E_x \langle \vec{d}_y \rangle = (\langle \vec{d} \rangle \wedge \vec{E})_z.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Repetindo o procedimento anterior com a equação (2.19) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{H}_0 \rangle &= -\hbar \omega_0 \left[i \frac{\sqrt{2}}{\hbar} d E_z (a_0^* a - a_0 a^*) + \frac{id}{\hbar} E_x (W_1 a^* - W_1^* a) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{d E_y}{\hbar} (W_2 a^* + W_2^* a) \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

As equações (2.25), (2.26) e (2.27) são, respectivamente, as equações de movimento para $\langle \vec{d} \rangle$, $\langle \vec{\mathbb{L}} \rangle$ e $\langle H_0 \rangle$ que estávamos procurando.

2.4 - EQUAÇÕES DO MEIO MATERIAL

Para simplificar vamos definir as seguintes variáveis reais adimensionais:

$$R_x \equiv \frac{\langle d_x \rangle}{\sqrt{2} d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^* W_1 + a W_1^*) ,$$

$$R_y \equiv \frac{\langle d_y \rangle}{\sqrt{2} d} = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^* W_2 - a W_2^*) ,$$

$$R_z \equiv \frac{\langle d_z \rangle}{\sqrt{2} d} = -(a_o^* a + a_o a^*) ,$$

$$S_x \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} (a W_1^* - a^* W_1) ,$$

$$S_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a^* W_2 + a W_2^*) ,$$

$$S_z \equiv i(a_o a^* - a_o^* a) ,$$

$$\epsilon_x \equiv \frac{\sqrt{2} d}{\hbar \omega_o} E_x ,$$

$$\epsilon_y \equiv \frac{\sqrt{2} d}{\hbar \omega_o} E_y ,$$

$$\epsilon_z \equiv \frac{\sqrt{2} d}{\hbar \omega_o} E_z ,$$

$$L_x \equiv \frac{\langle L_x \rangle}{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_o^* W_2 + a_o W_2^*] ,$$

$$L_y \equiv \frac{\langle L_y \rangle}{\hbar} = \frac{i}{\sqrt{2}} [a_o^* W_1 - a_o W_1^*] ,$$

$$L_z \equiv \frac{\langle L_z \rangle}{\hbar} = \frac{1}{2} [W_1 W_2^* + W_1^* W_2] ,$$

$$e \equiv \frac{2 \langle H_o \rangle}{\hbar \omega_o} = 1 - 2aa^* = (|a_o|^2 - |a|^2) + \frac{1}{2}(|W_1|^2 + |W_2|^2) ,$$

$$\tau \equiv \omega_o t .$$

(2.28)

Utilizando as variáveis definidas em (2.28) acima, nas equações (2.25), (2.26) e (2.27) obtemos:

$$\frac{dR_x}{d\tau} = S_x + (\vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon})_x ,$$

$$\frac{dR_y}{d\tau} = S_y + (\vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon})_y ,$$

$$\frac{dR_z}{d\tau} = S_z + (\vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon})_z ,$$

$$\frac{d\ell_x}{d\tau} = (\vec{R} \wedge \vec{\epsilon})_x , \quad (2.29)$$

$$\frac{d\ell_y}{d\tau} = (\vec{R} \wedge \vec{\epsilon})_y ,$$

$$\frac{d\ell_z}{d\tau} = (\vec{R} \wedge \vec{\epsilon})_z ,$$

$$\frac{de}{d\tau} = 2\epsilon_x S_x + 2\epsilon_y S_y + 2\epsilon_z S_z ,$$

ou, na forma vetorial compacta;

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{S} + \vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon} ,$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = \vec{R} \wedge \vec{\epsilon} \quad (\text{Equação de Torque}) , \quad (2.30)$$

$$\frac{de}{d\tau} = 2\vec{\epsilon} \cdot \vec{S} .$$

As equações (2.30) acima, representam equações que descrevem o comportamento do meio material.

Vamos agora obter a equação da conservação da probabilidade (2.20) com as variáveis definidas por (2.28). Fazendo as subs

tituições adequadas obtemos:

$$|\vec{R}|^2 + |\vec{S}|^2 + e^2 = [|a_0|^2 + |a|^2 + \frac{1}{2}(|W_1|^2 + |W_2|^2)]^2 ,$$

onde utilizando (2.21) vem:

$$|\vec{R}|^2 + |\vec{S}|^2 + e^2 = 1 . \quad (2.31)$$

Supondo que o campo elétrico seja conhecido, temos até agora as 8 equações, dadas por (2.29) e (2.31), e 10 incógnitas formadas pelas componentes dos vetores $\vec{R}$, $\vec{S}$, $\vec{\ell}$ e o escalar e que representa o valor esperado da energia não perturbada. Procuremos então outras relações para que nos dêem um sistema fechado. Utilizando apenas as definições (2.28) podemos verificar que:

$$\begin{aligned} R_Y S_Z - R_Z S_Y &= (1 - e) \ell_x , \\ R_Z S_X - R_X S_Z &= (1 - e) \ell_y , \\ R_X S_Y - R_Y S_X &= (1 - e) \ell_z . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Podemos escrever as equações (2.32) na forma vetorial compacta:

$$\vec{R} \wedge \vec{S} = (1 - e) \vec{\ell} . \quad (2.33)$$

Agora com o sistema formado por (2.30), (2.31) e (2.33), temos um excesso aparente de equações, pois (2.33) não nos fornece três equações independentes. Para vermos isto basta tentar escrever $\vec{S}^{(*)}$ em termos de $\vec{R}$, $\vec{\ell}$ e e de (2.33).

É conveniente para o uso em cálculos futuros obter a expressão para $d\vec{S}/dT$, portanto, passemos a encontrá-la. Inicialmen

(*) Essa mesma variável $\vec{S}$ aparece na Tese de Livre Docência de R.C. T. da Costa, *Um modelo semiclássico para a emissão espontânea*, IFQSC/USP, 1978, pag. 59. Mas lá, devido à natureza diferente do problema considerado, ela pode ser eliminada do sistema.

te derivemos ambos os membros de (2.33):

$$\vec{R} \wedge \frac{d\vec{S}}{d\tau} + \frac{d\vec{R}}{d\tau} \wedge \vec{S} = - \frac{de}{d\tau} \vec{\ell} + (1-e) \frac{d\vec{\ell}}{d\tau} ; \quad (2.34)$$

substituindo em (2.34) as expressões para $d\vec{R}/d\tau$, $d\vec{\ell}/d\tau$ e $de/d\tau$ dadas em (2.30) e após algumas operações utilizando a álgebra vetorial obtemos:

$$\left[\frac{d\vec{S}}{d\tau} - (1-e)\vec{\epsilon} \right] \cdot \vec{\ell} = 0 ,$$

o que implica em

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} - (1-e)\vec{\epsilon} = \alpha\vec{R} + \beta\vec{S} ; \quad (2.35)$$

uma vez que um vetor perpendicular a $\vec{\ell}$, por (2.33), pode ser escrito como combinação linear de $\vec{R}$ e $\vec{S}$. Resta agora determinar α e β para encontrarmos $d\vec{S}/d\tau$. Utilizando as definições de S_x , S_y e S_z , dadas em (2.28), e calculando suas derivadas, chegaremos a expressões (das quais vamos omitir o cálculo) que comparadas com (2.35) nos dão:

$$\alpha = - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{R}}{1-e} - 1 \quad \text{e} \quad \beta = - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}}{1-e} ;$$

substituindo esses valores em (2.35) e isolando $d\vec{S}/d\tau$ obtemos:

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = -\vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{R}}{1-e} \vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}}{1-e} \vec{S} + (1-e)\vec{\epsilon} . \quad (2.36)$$

Notemos que $e=1$ (estado excitado), implica em $\vec{R}=\vec{S}=0$, o que está coerente com (2.36) que é o resultado desejado. Podemos verificar também a compatibilidade de (2.36) com a equação da conservação da probabilidade (2.31). De fato, derivando ambos os membros de (2.31) vem:

$$\vec{R} \cdot \frac{d\vec{R}}{d\tau} + \vec{S} \cdot \frac{d\vec{S}}{d\tau} + e \cdot \frac{de}{d\tau} = 0 \quad (2.37)$$

Substituindo em (2.37) as expressões para $d\vec{R}/d\tau$, $d\vec{S}/d\tau$ e $de/d\tau$ dadas por (2.30) e (2.36), (2.37) torna-se uma identidade.

Observemos que dado $\vec{\epsilon}$, podemos agora formar o número exato de equações que determinam $\vec{R}$, $\vec{S}$, $\vec{\ell}$ e e com as expressões para $d\vec{R}/d\tau$ e $d\vec{S}/d\tau$ dadas em (2.30) e (2.36) e as constantes de movimento dadas por (2.31) e (2.33). De fato, dados $d\vec{R}/d\tau$ e $d\vec{S}/d\tau$ em termos de $\vec{R}$, $\vec{S}$, $\vec{\ell}$, e e $\vec{\epsilon}$, podemos determinar $de/d\tau$ de (2.37) e em seguida determinar $d\vec{\ell}/d\tau$ em termos de $\vec{R}$ e $\vec{\epsilon}$ de (2.34). Assim, o conjunto de 10 equações formado por $d\vec{R}/d\tau$ e as constantes de movimento (2.31) e (2.33) é suficiente para determinar $\vec{R}$, $\vec{S}$, $\vec{\ell}$ e e .

Supondo o campo elétrico conhecido, o sistema constitui-se pelas equações (2.30), (2.31), (2.33) e (2.36) descreve o comportamento do meio material numa situação onde a única interação entre os átomos é efetuada através do campo eletromagnético. Sabemos entretanto que há outras formas de interação que são inclusive responsáveis pela tendência do sistema para um estado de equilíbrio. Em baixas temperaturas este estado corresponde ao estado fundamental ψ_3 onde $\vec{R} = \vec{S} = 0$ e $e = e_0 = -1$. Podemos introduzir um efeito deste tipo em nossas equações acrescentando nas derivadas de $\vec{R}$, e e $\vec{S}$, termos característicos de um decaimento exponencial (correção fenomenológica de relaxação)^(6,10). Chamaremos de T_1 , T_2 e T_3 , respectivamente, os tempos de relaxação associados à energia, à polarização e ao momentum. Assim as equações (2.30) para $d\vec{R}/d\tau$, $de/d\tau$ e $d\vec{S}/d\tau$ ficam:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{d\tau} &= \vec{S} + \vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon} - \frac{\vec{R}}{T_2'} \quad ; \\ \frac{de}{d\tau} &= 2\vec{\epsilon} \cdot \vec{S} - \frac{e}{T_1'} \quad ; \\ \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= -\vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{R}}{1-e} \vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}}{1-e} \vec{S} + (1-e)\vec{\epsilon} - \frac{\vec{S}}{T_3'} \quad , \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $T'_1 = \omega_0 T_1$, $T'_2 = \omega_0 T_2$ e $T'_3 = \omega_0 T_3$.

No nosso modelo, desprezamos a relaxação do meio abandonando tais termos na equação (2.38).

2.5 - INTERPRETAÇÃO DA VARIÁVEL $\vec{S}$

De nossas deduções surgiu uma nova variável ($\vec{S}$), a qual é conveniente interpretar fisicamente. Notemos que as grandezas fisicamente relevantes mencionadas até agora foram o momentum angular, o momento de dipolo e a energia. Uma quarta grandeza igualmente importante que pode fazer parte de nosso sistema de equações é o momentum. Procuremos, então, as matrizes que representam os operadores de momentum. Denotando por $(\vec{p})_{ij} = -i\hbar \int \psi_i^* \vec{\nabla} \psi_j d^3r$, com $i, j = 0, 1, 2, 3$; notando (através das definições de $R_{10}(r)$ e $R_{21}(r)$)⁽¹⁵⁾ que

$$\frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{2}} \int_0^\infty R_{21}(r) \frac{\partial}{\partial r} R_{10}(r) r^2 dr = -\frac{8\pi\hbar}{3\sqrt{2}} \int_0^\infty R_{10}(r) R_{21}(r) r dr \equiv p$$

e

$$\int_0^\infty R_{10}(r) \frac{\partial}{\partial r} R_{21}(r) r^2 dr = 0 ,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} (p_x)_{ij} &= (p_y)_{ij} = 0 && \text{para } ij \neq 13, 23, 31, 32; \\ (p_x)_{13} &= (p_x)_{32} = -(p_x)_{31} = -(p_x)_{23} = ip && ; \\ (p_y)_{13} &= (p_y)_{23} = (p_y)_{31} = (p_y)_{23} = p && ; \\ (p_z)_{ij} &= 0 && \text{para } ij \neq 03, 30; \\ (p_z)_{30} &= -(p_z)_{03} = i\sqrt{2} p && ; \end{aligned} \tag{2.39}$$

assim, através de (2.39) escrevemos as matrizes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ip \\ 0 & 0 & 0 & -ip \\ 0 & -ip & ip & 0 \end{pmatrix} ; \\ \mathbb{P}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & p & p & 0 \end{pmatrix} e \\ \mathbb{P}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{2}p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Podemos deduzir facilmente utilizando (2.3) e (2.40) que

$$S_x = \frac{\langle \mathbb{P}_x \rangle}{\sqrt{2} p} , \quad S_y = \frac{\langle \mathbb{P}_y \rangle}{\sqrt{2} p} \quad e \quad S_z = \frac{\langle \mathbb{P}_z \rangle}{\sqrt{2} p} . \quad (2.41)$$

Através de (2.41) obtemos as matrizes que representam as componentes de $\vec{S}$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e \quad S_z &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se ao invés de utilizarmos os índices x,y,z em (2.42) usarmos 1,2,3, podemos escrever na forma compacta a regra de comutação:

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \frac{i}{\hbar} \epsilon_{ijk} \mathbb{L}_k \quad . \quad (2.43)$$

As expressões (2.41) nos diz que $\vec{S}$ representa o momentum, mas, ao mesmo tempo (2.43) parece contradizer esse fato. Todavia, estamos trabalhando num subespaço do sistema (estamos considerando apenas dois níveis!), portanto as regras de comutação para as grandezas físicas não são em geral válidas; como podemos verificar para os operadores de momento de dipolo, os quais não comutam, enquanto que, no espaço todo sabemos que eles comutam. Assim, podemos afirmar que dentro das limitações relativas a esse subespaço de dimensão menor, $\vec{S}$ representa o momentum.

CAPÍTULO III

PROPAGAÇÃO DO CAMPO PARA A TRANSIÇÃO $\Delta l = 1$ ($\Delta m = 0, \pm 1$) -
AS EQUAÇÕES AUTO-CONSISTENTES

3.1 - EQUAÇÕES DO CAMPO

As equações de Maxwell que descrevem a propagação de uma onda eletromagnética são⁽¹⁶⁾:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.1)$$

Consideremos um meio descarregado e não magnético descrito apenas pela polarização macroscópica $\vec{P}$ ou seja:

$$\rho = 0, \quad \vec{H} = \vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2) vem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.3)$$

e,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E} + 4\pi\vec{P}). \quad (3.4)$$

Seja n , constante, o número de átomos por unidade de volume, e $\vec{d} = \vec{d}(x, y, z, t)$ o momento médio de dipolo associado ao átomo na posição (x, y, z) num tempo t . Temos de (3.4)

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

onde utilizamos o fato de que $\vec{P} = n\vec{d}$.

Estamos considerando um meio homogêneo no qual há cancelamento completo das cargas nas extremidades dos dipolos individuais distribuídos no volume, não havendo portanto cargas de polarização⁽¹⁶⁾. Assim sendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Utilizando (3.3) e (3.6) em (3.2) vem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Aplicando (3.7) em (3.5) temos:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \quad . \quad (3.8)$$

Como no futuro vamos acoplar a equação de Maxwell (3.8) com as equações do meio (2.30), (2.31), (2.33) e (2.36), temos que fazer duas hipóteses fundamentais^(9,14).

1a.) o campo elétrico que aparece em (3.8) é o mesmo de (2.30) e (2.36);

2a.) o momento de dipolo médio $\vec{d}$ é o mesmo para cada átomo, ou seja $\vec{d} = \langle \vec{d}_i \rangle$.

A 2a. hipótese equivale a dizer que todos os átomos possuem a mesma função de onda, ou seja, a situação é a de máxima cooperação. Pelas hipóteses acima e pelas definições (2.28) para $\vec{\epsilon}$, τ e $\vec{R}$ escrevemos:

$$\vec{E} = \frac{\hbar \omega_0 \vec{\epsilon}}{\sqrt{2} d} \quad ; \quad t = \frac{\tau}{\omega_0} \quad \text{e} \quad \vec{d} = \sqrt{2} d \vec{R} \quad . \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.8) vem:

$$\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}d} \vec{\nabla}^2 \vec{\epsilon} = \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}d} \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial \tau^2} + \frac{4\pi n}{c^2} \omega_0 \sqrt{2} d \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \tau^2} \quad (3.10)$$

Dividindo (3.10) por $\hbar\omega_0/\sqrt{2}d$ membro a membro e fazendo a mudança de variáveis de posição

$$x = \lambda x' \quad ; \quad y = \lambda y' \quad e \quad z = \lambda z' \quad (3.11)$$

onde x' , y' e z' são variáveis adimensionais e

$$\lambda = \frac{c}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \quad , \quad (3.12)$$

obtemos:

$$\vec{\nabla}'^2 \vec{\epsilon} = \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial \tau^2} + \frac{8\pi n d^2}{\hbar\omega_0} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \tau^2} \quad , \quad (3.13)$$

onde

$$\vec{\nabla}'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad .$$

Denominando

$$\beta = \frac{8\pi n d^2}{\hbar\omega_0} \quad , \quad (3.14)$$

(3.13) fica escrita na forma

$$\vec{\nabla}'^2 \vec{\epsilon} = \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \tau^2} \quad , \quad (3.15)$$

onde $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ são funções de x' , y' , z' e τ .

Devemos notar que nas equações do meio (2.30) e (2.36) está implícito que todos os átomos possuem a mesma frequência ω_0 de transição.

É muito trabalhoso e difícil resolvermos o sistema de

equações dado por (2.30), (2.31), (2.33), (2.36) e (3.15) para obter um pulso luminoso de propagação tridimensional (por exemplo, como uma onda esférica) pelo número de variáveis que envolvem o problema e a não linearidade do sistema de equações. Por isso, vamos nos limitar a um pulso cuja propagação seja unidimensional (como uma onda plana) considerando o caso particular em que se propaga na direção z com

$$E_z = 0, P_z = 0, \vec{E} = \vec{E}(z, t) \text{ e } \vec{P} = \vec{P}(z, t),$$

o que satisfaz trivialmente (3.6) e (3.7). Com $\vec{P} = n\vec{d}$ e as expressões (3.9), o caso particular considerado acima fica:

$$\epsilon_z = 0, R_z = 0, \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(z', \tau) \text{ e } \vec{R} = \vec{R}(z', \tau). \quad (3.16)$$

Considerando então (3.16) e separando (3.15) nas componentes de $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ temos

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^2 R_x}{\partial \tau^2}; \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^2 R_y}{\partial \tau^2}. \quad (3.17b)$$

Verifiquemos que uma solução particular para (3.17a) possui a forma

$$\epsilon_x(z', \tau) = -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} R_x(\bar{z}', \tau - |z' - \bar{z}'|) d\bar{z}', \quad (3.18)$$

e para (3.17b)

$$\epsilon_y(z', \tau) = -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} R_y(z', \tau - |z' - \bar{z}'|) d\bar{z}'. \quad (3.19)$$

A conveniência de escolhermos as soluções (3.18) e (3.19) para (3.17) ficará evidente no final desta secção. Podemos escrever (3.18) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(z', \tau) = & -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} R_x \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' + \\ & -\frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} R_x \left(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z') \right) d\bar{z}', \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z'} = & -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial z'} R_x \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' + \\ & -\frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} R_x \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) \Big|_{\bar{z}'=z'} + \\ & -\frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial z'} R_x \left(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z') \right) d\bar{z}' + \\ & +\frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} R_x \left(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z') \right) \Big|_{\bar{z}'=z'}, \end{aligned}$$

dando portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z'} = & \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_x \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' + \\ & -\frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_x \left(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z') \right) d\bar{z}' \quad . \quad (3.20) \end{aligned}$$

Derivando (3.20) em relação a z' e após algumas operações algébricas vem:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial z'^2} = \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_X(z', \tau) - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} R_X(\bar{z}', \tau - |z' - \bar{z}'|) d\bar{z}' . \quad (3.21)$$

Derivando agora (3.18) duas vezes em relação a τ vem:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial \tau^2} = - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} R_X(\bar{z}', \tau - |z' - \bar{z}'|) d\bar{z}' . \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_X(z', \tau) ,$$

que é a equação (3.17a). Fica assim verificado que (3.18) é solução de (3.17a). Da mesma forma verificamos que (3.19) é solução de (3.17b). Com os resultados (3.18) e (3.19) podemos escrever $\vec{\epsilon}$ na forma

$$\vec{\epsilon} = - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R}(\bar{z}', \tau - |z' - \bar{z}'|) d\bar{z}' . \quad (3.23)$$

O campo num ponto pode ser decomposto em duas partes, uma ($\vec{\epsilon}_d$) devido a porção do meio à esquerda do ponto em questão, e outra ($\vec{\epsilon}_e$) devido a porção à direita. Por (3.23) escrevemos

$$\vec{\epsilon}_d = - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R}(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}')) d\bar{z}' , \quad (3.24)$$

$$\vec{\epsilon}_e = - \frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R}(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z')) d\bar{z}' , \quad (3.25)$$

onde

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_d + \vec{\epsilon}_e \quad . \quad (3.26)$$

O fato de utilizarmos os índices "d" e "e" para as parcelas do campo, é que (3.24) só dá um resultado apreciável para ondas que *camínham* para a direita e (3.25) apenas para aquelas que *camínham* para a esquerda, como veremos na secção 3.3 e mais precisamente na secção 4.4 do capítulo IV.

Neste trabalho, vamos considerar apenas o termo do campo que contribui para ondas que caminham para a direita dado por (3.24)

$$\vec{\epsilon} = - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R} \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' \quad . \quad (3.27)$$

Derivando (3.27) em relação a z' e em relação a τ obtemos:

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial z'} = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \vec{R} \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R}(z', \tau) \quad (3.28)$$

e

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial \tau} = - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \vec{R} \left(\bar{z}', \tau - (z' - \bar{z}') \right) d\bar{z}' \quad . \quad (3.29)$$

Somando (3.28) e (3.29) membro a membro obtemos:

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial \tau} = - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{R}(z', \tau) \quad . \quad (3.30)$$

Com (3.30) nossa equação de propagação fica reduzida a uma equação de 1.ª ordem.

3.2 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES AUTO-CONSISTENTES PARA O CASO LIVRE

Como já foi dito, vamos desprezar os termos devido à relaxação do meio, assim as equações (2.30), (2.36) e a equação do campo (3.30) forma nosso sistema de equações auto-consistente:

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{S} + \vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon} \quad , \quad (3.31a)$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = \vec{R} \wedge \vec{\epsilon} \quad , \quad (3.31b)$$

$$\frac{de}{d\tau} = 2\vec{\epsilon} \cdot \vec{S} \quad , \quad (3.31c)$$

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = -\vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{R}}{1-e} \vec{R} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}}{1-e} \vec{S} + (1-e)\vec{\epsilon} \quad , \quad (3.31d)$$

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial \tau} = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau} \quad . \quad (3.31e)$$

Vamos resolver o sistema auto-consistente para o caso livre, que significa campo desacoplado do meio. Para desacoplar fazemos $d \rightarrow 0$, assim, pelas definições de $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ (2.28), (3.31e) fica^(*)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} = 0 \quad ,$$

cuja solução é uma onda plana. Das equações (3.31a,b,c e d) vem:

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{S} \quad , \quad (3.32a)$$

(*) Poderíamos fazer $d \rightarrow 0$ em (3.8), o que daria $\partial^2 \vec{E} / \partial z^2 - \frac{1}{c^2} \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = 0$, fornecendo ondas planas caminhanes para a direita e para a esquerda. Mas, no nosso problema estamos trabalhando apenas com aquelas que vão para a direita.

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = 0 \quad , \quad (3.32b)$$

$$\frac{de}{d\tau} = 0 \quad , \quad (3.32c)$$

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = -\vec{R} \quad . \quad (3.32d)$$

Observemos que pela definição de $\vec{\epsilon}$ em (2.28), $d \rightarrow 0$ implica $\vec{\epsilon} \rightarrow 0$.

De (3.32b e c) temos:

$$\vec{\ell} = \text{constante} \quad e \quad e = \text{constante} \quad . \quad (3.33)$$

Os resultados (3.33) nos diz que o momentum angular médio e a energia não variam. Nosso modelo semi-clássico não prevê emissão espontânea, portanto, mesmo que o sistema esteja inicialmente no estado excitado este não mudará caso não haja nenhuma perturbação. Isto está de acordo com as expressões (3.33). Derivando (3.32a) com relação a τ e utilizando (3.32d) obtemos:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\tau^2} = -\vec{R} \quad . \quad (3.34)$$

Resolvendo (3.34) vem

$$\begin{aligned} R_x &= A_x \cos \tau + A_y \sin \tau \quad , \\ R_y &= B_x \cos \tau + B_y \sin \tau \quad , \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde A_x , A_y , B_x e B_y são constantes que dependem do estado inicial do meio. Substituindo (3.35) em (3.32a) encontramos:

$$\begin{aligned} S_x &= -A_x \sin \tau + A_y \cos \tau \quad , \\ e \quad S_y &= -B_x \sin \tau + B_y \cos \tau \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Notemos que a polarização (representada por $\vec{R}$) neste caso, depende apenas do momentum (representado por $\vec{S}$).

De (3.35) e (3.36) vemos que as extremidades de $\vec{R}$ e $\vec{S}$ descrevem elipses

$$\vec{B}^2 R_x^2 + \vec{A}^2 R_y^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} R_x R_y = (\vec{A} \wedge \vec{B})^2, \quad (3.37)$$

$$\vec{B}^2 S_x^2 + \vec{A}^2 S_y^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} S_x S_y = (\vec{A} \wedge \vec{B})^2, \quad (3.38)$$

onde introduzimos

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} \quad ; \\ \vec{A}^2 &= \vec{A} \cdot \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{B}^2 = \vec{B} \cdot \vec{B} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Os eixos das elipses estão rodados no sentido anti-horário de um ângulo α em relação ao eixo x tal que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{A}^2 - \vec{B}^2} \quad . \quad (3.40)$$

A excentricidade $\bar{e}$ é dada por:

$$\bar{e} = \frac{\sqrt{2 \left[(\vec{A}^2 + \vec{B}^2) \sqrt{(\vec{A}^2 - \vec{B}^2)^2 + 4(\vec{A} \cdot \vec{B})^2} - [(\vec{A}^2 - \vec{B}^2)^2 + 4(\vec{A} \cdot \vec{B})^2] \right]}}{2|\vec{A} \wedge \vec{B}|} \quad (3.41)$$

Embora as elipses (3.37) e (3.38) tenham sido deduzidas para o caso livre, veremos na próxima secção que elas podem representar elipses instantâneas no caso de acoplamento fraco.

3.3 - SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA A TRANSIÇÃO $\Delta l = 1$ ($\Delta m = 0, \pm 1$) PARA ACOPLAMENTO FRACO.

Suponhamos que $\epsilon \ll 1$, o que implica $E \ll \hbar \omega_0 / \sqrt{2} d$ (vem da definição de $\vec{\epsilon}$ de (2.28)) ou $dE \ll \hbar \omega_0$, que significa perturba-

ção fraca, porque dE é muito menor que a diferença entre os dois níveis de energia. Por outro lado, significa acoplamento fraco na equação do campo elétrico, pois a hipótese $\epsilon \ll 1$ está próxima da solução livre $\epsilon = 0$. Estamos interessados na propagação unidimensional, portanto, podemos tratar $\vec{E}$ como um pulso próximo a uma onda plana, lentamente variável em relação a ω_0 , assim $\partial \vec{E} / \partial z' \approx \vec{E}$ e $\partial \vec{E} / \partial \tau \approx \vec{E}$, sendo $\left| \left| \partial \vec{E} / \partial z' \right| - \left| \partial \vec{E} / \partial \tau \right| \right| \ll \epsilon$. Como $\partial \vec{R} / \partial \tau \approx \vec{S}$ (veja 3.31a) e $|\vec{S}| < 1$ (veja a equação da conservação da probabilidade (3.31)), temos de (3.31e) que $\beta \ll \epsilon \ll 1$. Observemos que $E \ll \hbar \omega_0 / \sqrt{2} d$ não significa necessariamente campo fraco relativamente aos disponíveis no laboratório. De fato, sendo $\hbar \approx 10^{-27}$ erg.seg, $\omega_0 \approx 10^{15}$ seg $^{-1}$ e $d \approx 10^{-18}$ ues.cm implica que $\hbar \omega_0 / \sqrt{2} d \approx 3 \times 10^8$ V/cm^(*), assim, por exemplo $E \approx 10^3$ din/ues satisfaz à condição $E \ll \hbar \omega_0 / \sqrt{2} d$ e não é campo fraco. Fazer $\epsilon \ll 1$ nas equações (3.31) consiste em perturbar as soluções de tal sistema para o caso livre. Vamos fazer isto considerando $\vec{A} = \vec{A}(z', \tau)$ e $\vec{B} = \vec{B}(z', \tau)$ nas definições (3.39) lentamente variáveis no tempo em relação aos valores das amplitudes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Com as hipóteses de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ lentamente variáveis no tempo e a propagação do campo na direção z , as expressões (3.35) e (3.36) para $\vec{R}$ e $\vec{S}$ tomam a forma:

$$R_x(z', \tau) = A_x(z', \tau) \cos(\tau - z') + A_y(z', \tau) \sin(\tau - z'), \quad (3.42a)$$

$$R_y(z', \tau) = B_x(z', \tau) \cos(\tau - z') + B_y(z', \tau) \sin(\tau - z'), \quad (3.42b)$$

$$S_x(z', \tau) = -A_x(z', \tau) \sin(\tau - z') + A_y(z', \tau) \cos(\tau - z'), \quad (3.42c)$$

(*) Esta é a ordem de intensidade do campo capaz de induzir um momento de dipolo $\underline{d}$ num átomo de hidrogênio⁽¹⁷⁾.

$$S_Y(z', \tau) = -B_X(z', \tau) \sin(\tau - z') + B_Y(z', \tau) \cos(\tau - z') . \quad (3.42d)$$

Observemos que embora tenhamos escrito $\vec{R}$ e $\vec{S}$ em termos de novas variáveis $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o número de funções incógnitas não mudou.

A polarização representada por $\vec{R}$ e o momentum representado por $\vec{S}$, de acordo com (3.42), possuem uma envoltória descrita por $\vec{A}$ e $\vec{B}$ que varia lentamente e uma parte rapidamente oscilante que *caminha* com a velocidade da luz c , mas notemos que a velocidade de propagação (de grupo) é dada pela velocidade da envoltória.

Substituindo (3.42a) na componente x de (3.27) vem:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial A_X}{\partial \tau} \cos(\tau - z') d\bar{z}' + \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} A_X \sin(\tau - z') d\bar{z}' + \\ & -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \frac{\partial A_Y}{\partial \tau} \sin(\tau - z') d\bar{z}' - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} A_Y \cos(\tau - z') d\bar{z}' , \end{aligned}$$

ou, agrupando os termos em $\cos(\tau - z')$ e $\sin(\tau - z')$

$$\epsilon_x = \left[\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \left(A_X - \frac{\partial A_Y}{\partial \tau} \right) d\bar{z}' \right] \sin(\tau - z') - \left[\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{z'} \left(A_Y + \frac{\partial A_X}{\partial \tau} \right) d\bar{z}' \right] \cos(\tau - z') . \quad (3.43)$$

A expressão (3.43) nos sugere a expressão para ϵ_x :

$$\epsilon_x = F_X \sin(\tau - z') - F_Y \cos(\tau - z') . \quad (3.44)$$

Da mesma forma, substituindo (3.42b) em (3.27) escrevemos:

$$\epsilon_y = G_X \sin(\tau - z') - G_Y \cos(\tau - z') . \quad (3.45)$$

Vamos introduzir as notações:

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{G} = G_x \hat{x} + G_y \hat{y} \quad . \quad (3.46)$$

Substituindo as expressões (3.42a,b,c e d), (3.44) e (3.45) em (3.31b e c) obtemos expressões para $de/d\tau$ e $d\vec{\ell}/d\tau$ em termos de $\cos(\tau-z')$, $\sin(\tau-z')$ e seus quadrados (vamos omitir o cálculo). Lembrando que só se realizam transições após muitas oscilações atômicas, $\cos(\tau-z')$ e $\sin(\tau-z')$ não contribuem para valores médios no tempo, pois são funções rapidamente oscilantes (o período é $2\pi/\omega_0$ com $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ seg}^{-1}$!), restando apenas termos com seus quadrados que contribuem com o valor médio 1/2. Arranjando esses termos, utilizando (3.46) e (3.39) obtemos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = \frac{1}{2} (\vec{G} \wedge \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{F}) \quad , \quad (3.47)$$

$$\frac{de}{d\tau} = -(\vec{A} \cdot \vec{F} + \vec{B} \cdot \vec{G}) \quad . \quad (3.48)$$

Com as considerações acima, levando (3.42), (3.44) e (3.45) nas expressões (3.31 a e d), após muitas operações algébricas chegamos a:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} = \frac{1}{2(1-e)} \left[\vec{A}^2 \vec{F} + \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{G} \right] - \frac{(1-e)}{2} \vec{F} - \frac{1}{2} \vec{\ell} \wedge \vec{G} \quad , \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau} = \frac{1}{2(1-e)} \left[\vec{B}^2 \vec{G} + \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{F} \right] - \frac{(1-e)}{2} \vec{G} + \frac{1}{2} \vec{\ell} \wedge \vec{F} \quad . \quad (3.50)$$

Considerando que $\partial \vec{R}/\partial \tau \approx \vec{S}$, levando as expressões (3.42 c,d), (3.44) e (3.45) na equação de Maxwell reduzida (3.31e) tiramos:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} = \frac{\beta}{2} \vec{A} \quad , \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \tau} = \frac{\beta}{2} \vec{B} \quad . \quad (3.52)$$

Substituindo agora as expressões (3.42) nas constantes de movimento (2.31) e (2.33) obtemos:

$$\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + e^2 = 1 \quad , \quad (3.53)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (1-e) \vec{\ell} \quad . \quad (3.54)$$

Notemos que as equações (3.49) a (3.54) formam um sistema fechado de 10 equações e 10 incógnitas ($\vec{\ell}$ aponta sempre na direção z).

Estamos agora em condições de demonstrar que $\epsilon_e \ll \epsilon_d$ para a solução que consideramos. Escrevendo a componente x de (3.25)

$$\epsilon_{e_x} \approx - \frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} S_x \left(\bar{z}', \tau - (\bar{z}' - z') \right) d\bar{z}' \quad ,$$

ou utilizando (3.42c)

$$\epsilon_{e_x} \approx - \frac{\beta}{2} \int_{z'}^{\infty} \left(-A_x \sin(\tau + z' - 2\bar{z}') + A_y \cos(\tau + z' - 2\bar{z}') \right) d\bar{z}' \quad .$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \epsilon_{e_x} \approx - \frac{\beta}{2} & \left[- \frac{1}{2} \sin(\tau + z' - 2\bar{z}') A_y \Big|_{z'}^{\infty} + \frac{1}{2} \int \sin(\tau + z' - 2\bar{z}') \frac{\partial A_y}{\partial \bar{z}'} d\bar{z}' \Big|_{z'}^{\infty} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \cos(\tau + z' - 2\bar{z}') A_x \Big|_{z'}^{\infty} + \frac{1}{2} \int \cos(\tau + z' - 2\bar{z}') \frac{\partial A_x}{\partial \bar{z}'} d\bar{z}' \Big|_{z'}^{\infty} \right] . \end{aligned}$$

Vamos supor que no início do pulso ($\tau \rightarrow -\infty$), o momento de dipolo é nulo e o campo elétrico é nulo, assim por (3.42) temos $A_x(\infty, -\infty) =$

$= A_Y(\infty, -\infty) = 0$, o que nos dá

$$\epsilon_{e_x} \approx -\frac{\beta}{4} \left[A_X \cos(\tau - z') + A_Y \sin(\tau - z') + \int \left(\cos(\tau + z' - 2\bar{z}') \frac{\partial A_X}{\partial \bar{z}'} + \sin(\tau + z' - 2\bar{z}') \frac{\partial A_Y}{\partial \bar{z}'} \right) d\bar{z}' \right]_{z'}^{\infty}.$$

De (3.53) temos $|A_X| < 1$ e $|A_Y| < 1$. Supondo $|\partial A_X / \partial \bar{z}'| \ll |A_X|$ e $|\partial A_Y / \partial \bar{z}'| \ll |A_Y|$ (envoltória lentamente variável) temos que $|\epsilon_{e_x}| \sim \beta$. Da mesma forma $|\epsilon_{e_y}| \sim \beta$, assim, $\epsilon_e \sim \beta$. No início desta secção chegamos à conclusão que $\beta \ll \epsilon \ll 1$, assim $\epsilon_e \ll \epsilon_d \ll 1$ como queríamos demonstrar.

3.4 - CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Derivando (3.53) e (3.54), em seguida substituindo (3.47) e (3.48) nas derivadas obtidas, verificamos a identidade, mostrando assim a compatibilidade entre as equações.

É conveniente verificar também se nosso sistema é compatível com o princípio de conservação de energia, ou seja, se é compatível com a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \quad (3.55)$$

onde μ é a densidade de energia e $\vec{\mathcal{P}}$ é o vetor de Poyting.

Para a densidade de energia temos a relação

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (3.56)$$

ou

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial t} + \frac{\vec{E}}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.57)$$

Utilizando a expressão (3.2) para $\vec{D}$, (3.57) fica:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad . \quad (3.58)$$

A parcela $(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)/8\pi$ é a densidade de energia associada ao campo eletromagnético e a parcela $\vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t$ é a variação da densidade de energia com relação ao tempo associada à interação do campo com a matéria, a qual representamos por

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad . \quad (3.59)$$

Utilizando (3.9) e lembrando que $\vec{P} = n\vec{d}$, escrevemos

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial t} = \hbar \omega_o^2 n \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau} \quad . \quad (3.60)$$

Levando (3.31a) em (3.60) e dividindo ambos os membros por ω_o obtemos:

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial \tau} = \left(\frac{\hbar \omega_o n}{2} \right) 2\vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar \omega_o n}{2} \frac{\partial e}{\partial \tau} \quad , \quad (3.61)$$

onde a última igualdade decorre de (3.31c). A equação da continuidade (3.55) é consequência direta das equações de Maxwell, das quais derivou a equação de propagação (3.31e). Por outro lado, (3.61) nos mostra a compatibilidade da energia de interação do campo com a matéria e as equações do meio através de $\partial e / \partial \tau$. Assim no sistema de equações (3.31), portanto, também o sistema nas novas variáveis $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ e $\vec{G}$ (que vai de (3.47) a (3.54)) são compatíveis com a equação da continuidade (3.55).

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA O DECAIMENTO

$\Delta l = 1$ ($\Delta m = 0, \pm 1$) (ACOPLAMENTO FRACO).

4.1 - MEIO COM LARGURA DE LINHA ZERO (PULSOS TRANSPARENTES "LENTOS").

Uma onda eletromagnética plana possui o campo na forma $E = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ut)$, onde $\hat{k}$ é o versor que nos dá a direção de propagação da onda, $\vec{r}$ é o vetor posição onde calculamos o campo e u a velocidade de propagação. Denominamos de pulsos transparentes aqueles que se propagam sem deformação num meio opticamente ativo como se fôsse no vácuo. Tal propagação, no nosso caso, é dada pela envoltória do pulso que vamos considerar em particular na forma de uma onda plana descrita acima.

Vamos iniciar nossa discussão para pulsos transparentes *lentos*, ou seja $u < c$, com o campo em ressonância com o meio (largura desprezível). Neste caso mantemos o sistema de equações formado por (3.49) a (3.54). Como estamos considerando a propagação do pulso na direção z , escrevemos sua envoltória como $\vec{F} = \vec{F}(\tau - \alpha z')$ e $\vec{G} = \vec{G}(\tau - \alpha z')$ onde $\alpha = c/u > 1$. Assim de (3.51) e (3.52) obtemos:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} = -k^2 \vec{A} \quad , \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \tau} = -k^2 \vec{B} \quad , \quad (4.2)$$

onde

$$k^2 = \frac{\beta}{2(\alpha-1)} \quad . \quad (4.3)$$

(O leitor que estiver apenas interessado nos resultados pode passar direto para as equações (4.21).)

Vamos agora obter algumas equações que facilitam a solução de nosso sistema formado pelas expressões (3.49), (3.50), (3.53), (3.54), (4.1) e (4.2). Consideremos a condição inicial de que para $\tau \rightarrow -\infty$, o campo elétrico é nulo, o momento de dipolo elétrico é nulo e os átomos estão no estado fundamental ($e = -1$). Esta condição, como veremos é necessária para obtermos pulsos *lentos*. Multiplicando ambos os membros de (4.1) escalarmente por $\vec{F}$ e (4.2) por $\vec{G}$, somando os resultados membro a membro e utilizando (3.48) obtemos

$$\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} + \vec{G} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial e}{\partial \tau} \quad . \quad (4.4)$$

Integrando (4.4) vem:

$$\vec{F}^2 + \vec{G}^2 = 2 k^2 (1+e) \quad . \quad (4.5)$$

Calculando a derivada de $\vec{A} \cdot \vec{B} / 1-e$, utilizando as expressões (3.48), (3.49), (3.50), (3.54), (4.1) e (4.2) chegamos à equação

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{1-e} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2k^2} \right) \quad ,$$

cuja integração nos fornece

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{1-e} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2k^2} \quad . \quad (4.6)$$

Da mesma forma calculamos a derivada de $\vec{A} \wedge \vec{B} / 1-e$ e chegamos a

$$\frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{1-e} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{G}}{2k^2} \quad . \quad (4.7)$$

Agora calculamos as derivadas de $\vec{A} \wedge \vec{F}$ e $\vec{B} \wedge \vec{G}$, e, do mesmo modo que encontramos (4.6) e (4.7) chegamos a

$$\vec{A} \wedge \vec{F} = \vec{B} \wedge \vec{G} = 0 \quad . \quad (4.8)$$

Façamos a mudança de variável

$$e = \cos \theta \quad . \quad (4.9)$$

Levando (4.9) em (4.5) vem

$$\vec{F}^2 + \vec{G}^2 = 4 k^2 \cos^2 \theta / 2 \quad . \quad (4.10)$$

A equação (4.10) nos sugere as seguintes formas para $|\vec{F}|$ e $|\vec{G}|$:

$$|\vec{F}| = 2k |\cos \theta / 2| |\cos \phi| \quad , \quad (4.11a)$$

$$|\vec{G}| = 2k |\cos \theta / 2| |\sin \phi| \quad . \quad (4.11b)$$

Substituindo (4.9) em (3.53) vem:

$$\vec{A}^2 + \vec{B}^2 = \sin^2 \theta \quad . \quad (4.12)$$

A equação (4.12) nos sugere que

$$|\vec{A}| = |\sin \theta| |\cos \gamma| \quad , \quad (4.13a)$$

$$|\vec{B}| = |\sin \theta| |\sin \gamma| \quad . \quad (4.13b)$$

Como $\vec{A}$ é paralelo a $\vec{F}$ e $\vec{B}$ é paralelo a $\vec{G}$ (veja 4.8), podemos escrever de (4.6) ou (4.7)

$$\frac{|\vec{A}| |\vec{B}|}{1-e} = \frac{|\vec{F}| |\vec{G}|}{2k^2} \quad . \quad (4.14)$$

Com (4.11), (4.13) e (4.14), chegamos à conclusão de que $\gamma = \phi + n\pi$, com n inteiro. Reescrevemos, então (4.11) e (4.13):

$$|\vec{F}| = 2k |\cos \theta/2| |\cos \phi| , \quad (4.15a)$$

$$|\vec{G}| = 2k |\cos \theta/2| |\sin \phi| , \quad (4.15b)$$

$$|\vec{A}| = |\sin \theta| |\cos \phi| , \quad (4.15c)$$

$$|\vec{B}| = |\sin \theta| |\sin \phi| . \quad (4.15d)$$

Notemos, pelo paralelismo dado por (4.8), que podemos escrever (4.1) e (4.2) na forma

$$\frac{\partial |\vec{F}|}{\partial \tau} = -k^2 |\vec{A}| , \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial |\vec{G}|}{\partial \tau} = k^2 |\vec{B}| . \quad (4.16b)$$

Substituindo as expressões (4.15) em (4.16) obtemos

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = k \sin \theta \cos \phi , \quad (4.17a)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = k \sin \theta \sin \phi , \quad (4.17b)$$

com $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, \pi/2]$.

Para que as equações (4.17a) e (4.17b) sejam válidas simultaneamente é necessário que

$$\phi = \text{constante} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2k \cos \theta/2 , \quad (4.18)$$

excluídas as soluções $\theta = 0$ (átomos permanentemente no estado excitado) e $\theta = \pi$ (átomos permanentemente no estado fundamental) que não nos interessam.

A solução de (4.18) é

$$\theta = \pi - 4 \arctg e^{-k\tau} ,$$

assim,

$$e = \cos \theta = -1 + 2 \operatorname{sech}^2 k\tau \quad . \quad (4.19)$$

O campo elétrico descreve a elipse instantânea

$$|\vec{G}|^2 \epsilon_x^2 + |\vec{F}|^2 \epsilon_y^2 - 2\vec{F} \cdot \vec{G} \epsilon_x \epsilon_y = |\vec{F} \wedge \vec{G}| \quad , \quad (4.20)$$

com

$$|\vec{F}| = 2k \cos \phi \operatorname{sech} k\tau \quad ,$$

$$|\vec{G}| = 2k \sin \phi \operatorname{sech} k\tau \quad .$$

A polarização e o momentum descrevem elipses instantâneas dadas por (3.37) e (3.38), onde

$$|\vec{A}| = 2 \cos \phi \operatorname{sech} k\tau \operatorname{tgh} k\tau \quad ,$$

$$|\vec{B}| = 2 \sin \phi \operatorname{sech} k\tau \operatorname{tgh} k\tau \quad .$$

Lembrando a condição de pulsos transparentes escrevemos (4.19) e as expressões para $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{F}|$ e $|\vec{G}|$ acima na forma:

$$e = -1 + 2 \operatorname{sech}^2 k(\tau - \alpha z') \quad , \quad (4.21a)$$

$$|\vec{F}| = 2k \cos \phi \operatorname{sech} k(\tau - \alpha z') \quad , \quad (4.21b)$$

$$|\vec{G}| = 2k \sin \phi \operatorname{sech} k(\tau - \alpha z') \quad , \quad (4.21c)$$

$$|\vec{A}| = 2 \cos \phi \operatorname{sech} k(\tau - \alpha z') \operatorname{tgh} k(\tau - \alpha z') \quad , \quad (4.21d)$$

$$|\vec{B}| = 2 \sin \phi \operatorname{sech} k(\tau - \alpha z') \operatorname{tgh} k(\tau - \alpha z') \quad , \quad (4.21e)$$

onde $\phi = \text{constante} \in [0, \pi/2]$.

A excentricidade das elipses da polarização e do campo elétrico são iguais (veja 3.41) a

$$ex = \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{\cos^2 2\phi + \cos^2 \psi \sin^2 2\phi} - (\cos^2 2\phi + \cos^2 \psi \sin^2 2\phi) \right]}{\sin 2\phi}$$

onde ψ é o ângulo constante (veja (4.1), (4.2), (4.14) e (4.16)) entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (ou $\vec{F}$ e $\vec{G}$). O ângulo com que os eixos das elipses estão rodados (veja 3.40) fica da do por:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\phi \cos \psi \quad .$$

A condição de propagação de campos representados por (4.21) tiramos da equação (3.51) ou (3.52),

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{c} = \frac{\beta}{2c} T^2 \quad ,$$

onde $T = 1/k$ é a largura do pulso. Tal condição de propagação, é a mesma relação entre a largura e a velocidade obtida por McCall-Hahn.

4.2 - MEIO COM LARGURA DE LINHA FINITA

Suponhamos inicialmente que o meio tenha uma distribuição de frequências $g(\omega_0)$ simétrica e centrada em uma determinada frequência ω , como indica a figura 1. A fração de átomos com frequências de transição no intervalo $[\omega_0, \omega_0 + d\omega_0]$ é dada por $g(\omega_0)d\omega_0$.

FIGURA 1

Esta distribuição de frequências é devido ao alargamento homogêneo (*largura natural*) e ao alargamento inhomogêneo. Como a largura natural é pequena, podemos considerar cada átomo com uma frequência fixa, que, varia no entanto de átomo para átomo.

A polarização que entra nas equações de Maxwell é a soma das contribuições, num mesmo lugar e num dado tempo, de todos os átomos, isto é, integrais em ω_0 com peso $g(\omega_0)$. Assim $\vec{R}$ é dado por:

$$\vec{R} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(\omega_0) g(\omega_0) d\omega_0, \quad (4.22)$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega_0) d\omega_0 = 1. \quad (4.23)$$

Vamos considerar agora o campo com frequência ω (provisoriamente igual àquela indicada na figura 1, após obtidos os resultados ela adquire valores arbitrários). Por isso, e para que não apareçam variáveis dependentes de ω_0 indesejáveis, trocaremos ω_0 por ω nas definições iniciais do campo e de τ em (2.28) e nas expressões (3.12) e (3.14). Assim, nosso sistema auto-consistente (3.31) fica:

$$\frac{d\vec{R}(\omega_0)}{d\tau} = \frac{\omega_0}{\omega} \vec{S}(\omega_0) + \vec{\ell}(\omega_0) \wedge \vec{\epsilon}, \quad (4.24a)$$

$$\frac{d\vec{\ell}(\omega_0)}{d\tau} = \vec{R}(\omega_0) \wedge \vec{\epsilon}, \quad (4.24b)$$

$$\frac{d\epsilon(\omega_0)}{d\tau} = 2\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}(\omega_0), \quad (4.24c)$$

$$\frac{d\vec{S}(\omega_0)}{d\tau} = -\frac{\omega_0}{\omega} \vec{R}(\omega_0) - \frac{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{R}(\omega_0)}{1-e(\omega_0)} \vec{R}(\omega_0) - \frac{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{S}(\omega_0)}{1-e(\omega_0)} \vec{S}(\omega_0) + (1-e(\omega_0)) \vec{\varepsilon} , \quad (4.24d)$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial z'} + \frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial \tau} = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(\omega_0) g(\omega_0) d\omega_0 . \quad (4.24e)$$

Vamos utilizar as novas variáveis

$$\xi = 1 - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} , \quad (4-25)$$

$$\eta = \tau - \alpha z' ,$$

$$V(\xi) = \omega g[\omega(1-\xi)] .$$

Observemos que no nosso tratamento $\Delta\omega \ll \omega$, pois estamos considerando átomos de dois níveis de uma mesma espécie, assim as frequências não devem se afastar muito da frequência natural de transição ω_0 , isto é $\xi \ll 1$.

Considerando (4.23), temos para $V(\xi)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) d\xi = 1 . \quad (4.26)$$

Da mesma forma que obtemos as equações (3.49) a (3.54), chegamos ao sistema:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \eta} = \xi \hat{z} \wedge \vec{A} + \frac{1}{2(1-e)} \left[\vec{A}^2 \vec{F} + \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{G} \right] - \frac{(1-e)}{2} \vec{F} - \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \wedge \vec{G} , \quad (4.27a)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \eta} = \xi \hat{z} \wedge \vec{B} + \frac{1}{2(1-e)} \left[\vec{B}^2 \vec{G} + \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{F} \right] - \frac{(1-e)}{2} \vec{G} + \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \wedge \vec{F} , \quad (4.27b)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A} v(\xi) d\xi , \quad (4.27c)$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \eta} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{B} v(\xi) d\xi , \quad (4.27d)$$

$$\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + e^2 = 1 , \quad (4.27e)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (1 - e) \vec{\ell} , \quad (4.27f)$$

onde agora $\vec{A}$, $\vec{B}$, e e $\vec{\ell}$ são funções do par (ξ, η) ; $\vec{F}$ e $\vec{G}$ apenas de η .

Do sistema (4.27) com a condição inicial $\eta \rightarrow \infty$, $e \rightarrow -1$, $\vec{F} \rightarrow 0$, $\vec{G} \rightarrow 0$, $\vec{A} \rightarrow 0$ e $\vec{B} \rightarrow 0$, obtemos da mesma forma que (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) as expressões:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\vec{F} \wedge \vec{A} + \vec{G} \wedge \vec{B} + \xi(1+e) \hat{z}] v(\xi) d\xi = 0 , \quad (4.28a)$$

$$\vec{F}^2 + \vec{G}^2 = 2k^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+e) v(\xi) d\xi , \quad (4.28b)$$

$$\frac{\vec{F} \wedge \vec{G}}{2k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{1-e} v(\xi) d\xi , \quad (4.28c)$$

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{1-e} v(\xi) d\xi . \quad (4.28d)$$

Suponhamos agora a seguinte forma para o campo

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= M(\eta) \cos(\tau - z') , \\ \epsilon_y &= N(\eta) \sin(\tau - z') , \end{aligned} \quad (4.29)$$

ou seja, um campo elipticamente polarizado. Assim,

$$M = -F_y, \quad N = G_x \quad \text{e} \quad F_x = G_y = 0, \quad (4.30)$$

o que implica $\vec{F} \cdot \vec{G} = 0$. Da equação (4.28d) vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{1-e} V(\xi) d\xi = 0, \quad ,$$

o que nos permite escolher $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ por simplicidade. Com essas considerações, as equações (4.27 a,b,c e d) em termos de suas componentes ficam:

$$\frac{\partial A_x}{\partial \eta} = -\xi A_y, \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial \eta} = \xi A_x - \frac{\vec{A}^2 M}{2(1-e)} + \frac{(1-e)}{2} M - \frac{\ell N}{2}, \quad (4.31b)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial \eta} = -\xi B_y + \frac{\vec{B}^2 N}{2(1-e)} - \frac{(1-e)}{2} N + \frac{\ell M}{2}, \quad (4.31c)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial \eta} = \xi B_x, \quad (4.31d)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_y V(\xi) d\xi, \quad (4.31e)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_x V(\xi) d\xi, \quad (4.31f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_x V(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} B_y V(\xi) d\xi = 0. \quad (4.31g)$$

(Se ao leitor interessar apenas os resultados pode passar diretamente para (4.81)).

Como $g(\omega_0)$ é simétrico em relação a ω , então $V(\xi)$ é uma função par de ξ . Assim (4.31g) nos sugere a seguinte forma para A_x e B_y :

$$A_x = A_x^1(\xi) A_x^2(\eta) \text{ e } B_y = B_y^1(\xi) B_y^2(\eta) \quad (4.32)$$

onde $A_x^1(\xi)$ e $B_y^1(\xi)$ são funções ímpares de ξ . Com A_x e B_y separáveis, as equações (4.31a e d) nos levam a fazer A_y e B_x também separáveis:

$$A_y = A_y^1(\xi) A_y^2(\eta) \text{ e } B_x = B_x^1(\xi) B_x^2(\eta) \quad (4.33)$$

Substituindo (4.32) e (4.33) em (4.31 a e d) vem:

$$\frac{1}{A_y^2(\eta)} \frac{\partial A_x^2(\eta)}{\partial \eta} = -\xi \frac{A_y^1(\xi)}{A_x^1(\xi)} = M_1 = \text{const.} \quad (4.34a)$$

$$\frac{1}{B_x^2(\eta)} \frac{\partial B_y^2(\eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{B_x^1(\xi)}{B_y^1(\xi)} = M_2 = \text{const.} \quad (4.34b)$$

onde a última igualdade decorre do fato de que os primeiros membros dependem somente de η e os segundos de ξ . Devido a arbitrariedade na definição de A_x^1 , A_x^2 , B_y^1 e B_y^2 dada por (4.32), escolhemos $M_1 = M_2 = 1$ obtendo:

$$\frac{\partial A_x^2}{\partial \eta} = A_y^2 \quad (4.35a)$$

$$\frac{\partial B_y^2}{\partial \eta} = B_x^2 \quad (4.35b)$$

$$A_X^1 = -\xi A_Y^1, \quad (4.35c)$$

$$B_Y^1 = \xi B_X^1. \quad (4.35d)$$

Levando (4.33) em (4.31 e e f) vem:

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = k^2 A_Y^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_Y^1 V(\xi) d\xi, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = -k^2 B_X^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_X^1 V(\xi) d\xi.$$

Definindo

$$L_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A_Y^1 V(\xi) d\xi \quad e \quad L_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} B_X^1 V(\xi) d\xi, \quad (4.37)$$

reescrevemos (4.36):

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = k^2 L_1 A_Y^2 \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial \eta} = -k^2 L_2 B_X^2. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.35a e b) em (4.38) e levando em conta a condição inicial $\tau \rightarrow \infty$, $A_X^2 = B_Y^2 = 0$ e $M = N = 0$, obtemos:

$$M = k^2 L_1 A_X^2, \quad (4.39)$$

$$N = -k^2 L_2 B_Y^2.$$

Como $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, temos

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \eta} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \eta} = 0. \quad (4.40)$$

Utilizando (4.27 a e b) em (4.40) vem

$$\vec{F} \cdot \vec{B} = -\vec{G} \cdot \vec{A} \quad , \quad (4.41)$$

ou, escrevendo em termos de (4.30)

$$N A_x = M B_y \quad \text{ou} \quad N A_x^1 A_x^2 = M B_y^1 B_y^2 \quad . \quad (4.42)$$

Levando (4.35 c e d) e (4.39) em (4.42) obtemos

$$-L_2 A_x^1 = L_1 B_y^1 \quad . \quad (4.43)$$

Tentemos agora encontrar uma expressão para e em termos de A_x e B_y , para que com o uso da constante de movimento (4.27e) e a condição de separabilidade das variáveis A_x e B_y , possamos achar o conjunto de funções de ξ e η que determinam A_x e B_y .

Substituindo (4.30) em (3.48) e em seguida utilizando (4.39) e (4.33) encontramos:

$$\frac{de}{d\tau} = k^2 L_1 A_x^2 A_y^1 A_y^2 + k^2 L_2 B_y^2 B_x^1 B_x^2 \quad . \quad (4.44)$$

Como $\eta = \tau - \alpha z'$ e levando (4.35 a e b) em (4.44) vem:

$$\frac{\partial e}{\partial \eta} = k^2 L_1 A_y^1 A_x^2 \frac{\partial A_x^2}{\partial \eta} + k^2 L_2 B_x^1 B_y^2 \frac{\partial B_y^2}{\partial \eta} \quad . \quad (4.45)$$

Integrando (4.45) levando em conta as condições iniciais do problema obtemos:

$$e = -1 + \frac{k^2 L_1}{2} A_y^1 (A_x^2)^2 + \frac{k^2 L_2}{2} B_x^1 (B_y^2)^2 \quad . \quad (4.46)$$

Substituindo (4.35d) em (4.43) obtemos

$$- L_2 A_X^1 = \xi L_1 B_X^1 , \quad (4.47)$$

e, utilizando (4.35c) em (4.47) vem

$$B_X^1 = \frac{L_2}{L_1} A_Y^1 . \quad (4.48)$$

Levando (4.48) em (4.46) encontramos a expressão:

$$e = -1 + \frac{k^2}{2L_1} A_Y^1 \left[L_1^2 (A_X^2)^2 + L_2^2 (B_Y^2)^2 \right] . \quad (4.49)$$

Fazendo

$$T(\eta) = L_1^2 (A_X^2)^2 + L_2^2 (B_Y^2)^2 , \quad (4.50)$$

a equação (4.49) fica escrita na forma

$$e = -1 + \frac{k^2}{2L_1} A_Y^1 T . \quad (4.51)$$

Substituindo (4.51), (4.32) e (4.33) em (4.27e) obtemos:

$$\begin{aligned} & (A_X^1)^2 (A_X^2)^2 + (A_Y^1)^2 (A_Y^2)^2 + (B_X^1)^2 (B_X^2)^2 + (B_Y^1)^2 (B_Y^2)^2 - \\ & + \frac{k^2}{L_1} A_Y^1 T + \frac{k^4}{4L_1^2} (A_Y^1)^2 T^2 = 0 . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Utilizando agora (4.35 c e d), (4.48) em (4.52) e arranjando os termos chegamos a

$$A_Y^1 \left[\frac{\xi^2}{L_1 k^2} + \frac{(L_1^2 (A_Y^2)^2 + L_2^2 (B_X^2)^2 + \frac{k^4}{4} T^2)}{k^2 L_1 T} \right] = 1 . \quad (4.53)$$

Como A_Y^1 é função apenas de ξ e A_Y^2 , B_X^2 e T de η , devemos ter:

$$C_1 = (L_1^2 (A_Y^2)^2 + L_2^2 (B_X^2)^2 + \frac{k^4}{4} T^2) / k^2 L_1 T = \text{constante}, \quad (4.54)$$

e, portanto

$$A_Y^1 = \frac{1}{\xi^2 / L_1 k^2 + C_1}. \quad (4.55)$$

Dividindo o numerador e o denominador de (4.55) por C_1 obtemos:

$$A_Y^1 = \frac{\frac{1}{C_1}}{1 + C\xi^2}, \quad (4.56)$$

onde

$$C = \frac{1}{C_1 L_1 k^2}. \quad (4.57)$$

Podemos arbitrar A_Y^1 respeito a uma constante multiplicativa, assim

$$A_Y^1 = \frac{1}{1 + C\xi^2}. \quad (4.58)$$

De (4.58) e (4.35c) obtemos

$$A_X^1 = - \frac{\xi}{1 + C\xi^2}, \quad (4.59)$$

e de (4.48) vem

$$B_X^1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{1}{1 + C\xi^2}. \quad (4.60)$$

Levando (4.60) em (4.35d) vem

$$B_Y^1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{\xi}{1 + C\xi^2} \quad . \quad (4.61)$$

Observe que de fato $A_X(\xi)$ e $B_Y(\xi)$ são funções ímpares de ξ .

Utilizando (4.32), (4.58), (4.59), (4.60) e (4.61) podemos escrever (4.50):

$$T(\eta) = \frac{L_1^2}{\xi^2} (1 + C\xi^2)^2 \left[(A_X)^2 + (B_Y)^2 \right] \quad (4.62)$$

e (4.54)

$$C_1 = \left[L_1 (1 + C\xi^2)^2 \left((A_Y)^2 + (B_X)^2 \right) + \frac{k^4 T^2}{4} \right] / k^2 L_1 T$$

ou

$$k^2 L_1 C_1 T = L_1^2 (1 + C\xi^2)^2 \left[(A_Y)^2 + (B_X)^2 \right] + \frac{k^4 T^2}{4} \quad . \quad (4.63)$$

Considerando (4.32), (4.58), (4.59) e (4.61) escrevemos (4.39) na forma abaixo:

$$M = -k^2 L_1 \frac{(1 + C\xi^2)}{\xi} A_X = - \frac{k^2 L_1}{\xi A_Y^1} A_X \quad , \quad (4.64)$$

$$N = -k^2 L_1 \frac{(1 + C\xi^2)}{\xi} B_Y = - \frac{k^2 L_1}{\xi A_Y^1} B_Y \quad .$$

Derivando (4.63), utilizando a derivada de (4.62), as equações (4.31 a,b,c e d), (4.51) e (4.64), após muitas manipulações algébricas chegamos a

$$\frac{e}{C_1} = -1 + \frac{k^2 A_Y^1}{2L_1} T \quad . \quad (4.65)$$

Comparando (4.65) com (4.51) tiramos $c_1 = 1$, que levando em (4.57) vem:

$$C = \frac{1}{L_1 k^2} \quad . \quad (4.66)$$

A equação (4.66) nos dá a condição de propagação do pulso na forma (4.29).

Passemos agora a procurar as equações que determinam o campo. Utilizando (4.62) e (4.64) em (4.51) escrevemos

$$e = -1 + \frac{A_Y^1(\xi)}{2k^2 L_1} H^2 \quad , \quad (4.67)$$

onde

$$H^2 = M^2 + N^2 \quad . \quad (4.68)$$

Substituindo (4.67) na constante de movimento (4.27e) obtemos:

$$\begin{aligned} (A_X)^2 + (A_Y)^2 + (B_X)^2 + (B_Y)^2 - \frac{A_Y^1(\xi)}{k^2 L_1} H^2 + \\ + \frac{A_Y^1(\xi)}{4k^2 L_1^2} H^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Tirando A_X e B_Y de (4.64), substituindo em (4.69) e utilizando (4.68) vem:

$$\begin{aligned} (A_Y)^2 + (B_X)^2 + \xi^2 \frac{A_Y^1(\xi)}{k^4 L_1^2} H^2 - \frac{A_Y^1(\xi)}{k^2 L_1} H^2 + \\ + \frac{A_Y^1(\xi)}{4k^4 L_1^2} H^4 = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.70)$$

Colocando $A_Y^1(\xi) H^2 / k^2 L_1$ em evidência nos dois termos de (4.70) que

possuem H^2 , lembrando (4.66) e (4.58) vem:

$$(A_Y)^2 + (B_X)^2 - \frac{A_Y^1(\xi)^2 H^2}{k^2 L_1} + \frac{A_Y^1(\xi)^2 H^4}{4k^4 L_1^2} = 0 \quad . \quad (4.71)$$

Utilizando agora (4.33) e sucessivamente (4.35 a e b), (4.39) ,
(4.59), (4.60) juntamente com (4.66) obtemos:

$$(A_Y)^2 + (B_X)^2 = \frac{A_Y^1(\xi)^2}{k^4 L_1^2} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^2 \right] \quad . \quad (4.72)$$

Substituindo (4.72) em (4.71) e cancelando o fator $A_Y^1(\xi)^2/k^2 L_1$ que é comum a todos os termos obtemos

$$\frac{1}{k^2 L_1} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^2 \right] - H^2 + \frac{H^4}{4k^4 L_1} = 0 \quad . \quad (4.73)$$

Por outro lado supomos $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ou $A_X B_X + A_Y B_Y = 0$, o que implica, utilizando (4.32) e (4.33) em

$$A_X^1 A_X^2 B_X^1 B_X^2 + A_Y^1 A_Y^2 B_Y^1 B_Y^2 = 0 \quad . \quad (4.74)$$

Levando (4.38), (4.39) e as expressões (4.58) a (4.61) em (4.74) obtemos

$$M \frac{\partial N}{\partial \eta} = N \frac{\partial M}{\partial \eta} \quad . \quad (4.75)$$

De (4.68) e (4.75) escrevemos

$$\begin{aligned} M &= H \cos \phi \quad , \\ N &= H \sin \phi \quad , \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde ϕ é uma constante.

Substituindo as expressões (4.76) e (4.66) em (4.73)

obtemos:

$$C \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^2 - H^2 + C \frac{H^4}{4} = 0 \quad , \quad (4.77)$$

cuja solução é

$$H = \frac{2}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \quad , \quad (4.78)$$

onde $\zeta^2 = C$, sendo ζ a largura do pulso. De (4.66) escrevemos:

$$C = \zeta^2 = \frac{1}{L_1 k^2} \quad . \quad (4.79)$$

Utilizando (4.79) em (4.58), substituindo o resultado em (4.37) obtemos:

$$L_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{(\zeta \xi)^2 + 1} d\xi \quad . \quad (4.80)$$

De (4.79), (4.80) e (4.3), lembrando que $\alpha = c/u$, obtemos o recíproco da velocidade do pulso

$$u^{-1} = \frac{1}{c} + \frac{\beta \zeta^2}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{(\zeta \xi)^2 + 1} d\xi \quad . \quad (4.81)$$

Substituindo (4.78) em (4.76) vem:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \cos \phi \quad , \\ N &= \frac{2}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \sin \phi \quad . \end{aligned} \quad (4.82)$$

Com (4.82), (4.68), (4.79) e (4.58), (4.67) fica:

$$e = -1 + \frac{2}{(\zeta \xi)^2 + 1} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta}{\zeta} \quad . \quad (4.83)$$

Substituindo (4.82) em (4.39), obtendo $A_X^2(\eta)$ e $B_Y^2(\eta)$, levando-os juntamente com (4.59) e (4.61) em (4.32) chegamos a

$$A_X = - \frac{2(\zeta\xi)}{(\zeta\xi)^2 + 1} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \cos \phi , \quad (4.84)$$

$$B_Y = - \frac{2(\zeta\xi)}{(\zeta\xi)^2 + 1} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \sin \phi .$$

Levando (4.84) em (4.31 a e d) obtemos:

$$A_Y = - \frac{2}{(\zeta\xi)^2 + 1} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \operatorname{tgh} \frac{\eta}{\zeta} \cos \phi , \quad (4.85)$$

$$B_X = \frac{2}{(\zeta\xi)^2 + 1} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \operatorname{tgh} \frac{\eta}{\zeta} \sin \phi .$$

Os resultados (4.83), (4.84) e (4.85) independem de L_2 , e pela sua definição em (4.37) vemos que este pode ser arbitrário. Vamos fazer então $L_2 = 1$.

Com (4.82), (4.84) e (4.85) escrevemos as expressões para as componentes de $\vec{R}$ e $\vec{\epsilon}$

$$\begin{aligned} R_X &= - \frac{2 \cos \phi}{1 + (\zeta\xi)^2} \left[(\zeta\xi) \cos(\tau - z') + \operatorname{tgh} \frac{\eta}{\zeta} \sin(\tau - z') \right] \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} , \\ R_Y &= \frac{2 \sin \phi}{1 + (\zeta\xi)^2} \left[-(\zeta\xi) \sin(\tau - z') + \operatorname{tgh} \frac{\eta}{\zeta} \cos(\tau - z') \right] \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} , \\ \epsilon_X &= \frac{2 \cos \phi}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \cos(\tau - z') , \\ \epsilon_Y &= \frac{2 \sin \phi}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{\eta}{\zeta} \sin(\tau - z') . \end{aligned} \quad (4.86)$$

A equação da elipse instantânea descrita por $\vec{\epsilon}$ é

$$\frac{\varepsilon_x^2}{M^2} + \frac{\varepsilon_y^2}{N^2} = 1 \quad , \quad (4.87)$$

e a sua excentricidade é dada por

$$ex = \frac{\sqrt{|M^2 - N^2|}}{|M|} \quad . \quad (4.88)$$

Utilizando (4.82) em (4.88) obtemos

$$ex = \sqrt{|1 - \operatorname{tg}^2 \phi|} \quad (4.89)$$

De (3.37) vemos que a elipse instantânea descrita por R é:

$$\frac{R_x}{|A|^2} + \frac{R_y}{|B|^2} = 1 \quad , \quad (4.90)$$

assim sua excentricidade é dada por:

$$ex = \frac{\sqrt{|\vec{A}^2 - \vec{B}^2|}}{|\vec{A}|} \quad (4.91)$$

Substituindo as expressões (4.84) e (4.85) em (4.91) obtemos $ex = \sqrt{|1 - \operatorname{tg}^2 \phi|}$, que é igual à expressão (4.89). Vemos portanto, que as elipses instantâneas de $\vec{R}$ e $\vec{\varepsilon}$ possuem a mesma excentricidade, a qual independe da posição e frequência característica dos átomos e não varia com o tempo. A escolha da excentricidade deve ser feita então através do pulso inicial que coloca os átomos no estado excitado.

Suponhamos agora uma distribuição de frequências $g(\omega_0)$ não simétrica. Neste caso demonstraremos que os resultados (4.81) e (4.86) continuam válidos, se trocarmos nas equações (4.29) z' por mz' onde:

$$m = 1 - \frac{\beta \epsilon^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi V(\xi)}{1 + (\epsilon \xi)^2} d\xi, \quad (4.92)$$

com $V(\xi)$ definido em (4.25).

Supondo um campo na forma

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= M \cos(\tau - z' + \phi), \\ \epsilon_y &= N \sin(\tau - z' + \phi), \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde $\phi = \phi(z')$; utilizando a equação de Maxwell na forma reduzida (4.24e), as condições de amplitudes lentamente variáveis e as definições (4.25) e (3.42), chegamos a

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_y V(\xi) d\xi, \quad (4.94a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_x V(\xi) d\xi, \quad (4.94b)$$

$$M \frac{\partial \phi}{\partial z'} = -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_x V(\xi) d\xi, \quad (4.94c)$$

$$N \frac{\partial \phi}{\partial z'} = -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_y V(\xi) d\xi. \quad (4.94d)$$

Supondo $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ e A_x , A_y , B_x e B_y separáveis na forma (4.32) e (4.33), obtemos de (4.94 c e d)

$$M \frac{\partial \phi}{\partial z'} = -\frac{\beta}{2} L'_1 A_x^2, \quad (4.95)$$

$$N \frac{\partial \phi}{\partial z'} = -\frac{\beta}{2} L'_2 B_y^2,$$

onde $L'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_x^1 V(\xi) d\xi$ e $L'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_y^1 V(\xi) d\xi$.

Como o sistema de equações para A_x, A_y, B_x e B_y é o mesmo que (4.31a, b, c, d, e e f), podemos utilizar (4.39) em (4.95) para obter:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z'} = \frac{\beta/2}{k^2} \frac{L_2'}{L_2} = \frac{-\beta/2}{k^2} \frac{L_1'}{L_1} \equiv K, \quad (4.96)$$

onde L_1 e L_2 foram definidos em (4.37). De (4.96) obtemos:

$$-\frac{L_1'}{L_1} = \frac{L_2'}{L_2}, \quad (4.97)$$

$$\phi = Kz' \quad . \quad (4.98)$$

Substituindo (4.98) em (4.93) escrevemos

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= M \cos(\tau - (1-K)z') \\ \epsilon_y &= N \sin(\tau - (1-K)z') \end{aligned} \quad (4.99)$$

Levando $L_1 = 1/k^2 \tau^2$ (vem de 4.79) em (4.96) e utilizando a definição de L_1' dada em (4.95) encontramos

$$K = \frac{\beta}{2} \cdot \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi V(\xi)}{1 + (\tau \xi)^2} d\xi, \quad ,$$

e, observando (4.99), identificamos

$$m = 1 - K = 1 - \frac{\beta}{2} \cdot \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi V(\xi)}{1 + (\tau \xi)^2} d\xi, \quad ,$$

que é a expressão (4.92).

4.3 - DISCUSSÃO PARA PULSOS "RÁPIDOS"

No caso de pulsos *lentos*, tínhamos os átomos inicialmente no estado fundamental, e o pulso, ao começar a atingí-los, ia excitando-os até que no seu máximo os átomos em ressonância com o pulso estavam totalmente excitados (os demais parcialmente). A desexcitação se dava à medida que o pulso deixava-os. Desse modo a velocidade do pulso coincide com a da transferência de energia $u/c < 1$.

Se inicialmente os átomos estão no estado excitado, a parcela de energia contida num átomo é afetada pela cauda anterior do pulso devido a desexcitação de outros átomos dando uma emissão mais forte. Assim, um átomo localizado num ponto z emite um pulso com tal intensidade que nos dá a impressão que é proveniente do pulso o qual, na verdade ainda não chegou ao ponto z , ou seja, parece que a energia andou mais depressa do que na realidade. Neste caso $u/c > 1$ e chamamos tais pulsos de *rápidos*. A causalidade não é violada⁽⁶⁾ pois a energia se propaga com velocidade menor que c . Para o caso de pulsos *rápidos* a condição inicial é: para $\tau \rightarrow -\infty$ (início do pulso), o campo elétrico é nulo, o momento de dipolo elétrico é nulo e os átomos estão no estado excitado ($e=1$). Para esses pulsos as equações (4.1) e (4.2) ficam:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} = k'^2 \vec{A} \quad , \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \tau} = k'^2 \vec{B} \quad ,$$

onde $k'^2 = \frac{1}{2} \beta / 1 - \alpha$.

No caso do campo em ressonância com o meio a energia é

dada por:

$$e = -1 + 2 \operatorname{tgh}^2 k' \tau \quad . \quad (4.101)$$

A amplitude do campo e momento de dipolo possui a mesma forma que (4.21) trocando k por k' e a condição de propagação fica:

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{c} = - \frac{1}{2} \frac{\beta}{c} T'^2 \quad , \quad (4.102)$$

onde $T' = 1/k'$.

Para o caso fora da ressonância a energia fica:

$$e = 1 - \frac{2}{1 + (\epsilon' \xi)^2} \operatorname{sech}^2 \eta / \epsilon' \quad , \quad (4.103)$$

$$\text{onde } \epsilon'^2 = 1/L_1' k'^2 \quad \text{e} \quad L_1' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{1 + (\epsilon' \xi)^2} d\xi \quad .$$

As expressões para as componentes de $\vec{R}$ e $\vec{\epsilon}$ ficam iguais a (4.86) trocando ϵ por ϵ' , e a condição de propagação fica sendo

$$u^{-1} = \frac{1}{c} - \frac{\beta \epsilon'^2}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{1 + (\epsilon' \xi)^2} d\xi \quad . \quad (4.105)$$

Todos os resultados para pulsos *rápidos* são obtidos da mesma forma que para pulsos *lentos*, pois basicamente as equações não mudam, trocando apenas a condição inicial. Por isso as expressões (4.102) e (4.105) continuam semelhantes à expressão obtida por McCall-Hahn.

4.4 - CONCLUSÕES

Notemos que a condição $\zeta \gg 1$ (ou seja $\epsilon \ll 1$) é necessária para que outros níveis de energia não sejam perturbados, pois caso contrário ($\zeta \sim 1$), o campo seria excessivamente forte e o nosso modelo certamente falharia. Portanto, pela definição (4.3), a velocidade do pulso não deve ser muito próxima de c , ek é da ordem de $\beta^{1/2}$ ($k \sim \beta^{1/2}$). Por outro lado através de (4.79) vemos que

$$\zeta \sim k^{-1} \sim \beta^{-1/2} , \quad (4.106)$$

que é compatível com a condição $\zeta \gg 1$, pois $\beta \ll 1$ na nossa hipótese inicial (acoplamento fraco).

Podemos verificar que a contribuição do termo responsável pela propagação da onda para a esquerda é desprezível, substituindo as expressões (4.86) para a polarização em (3.25) resultando

$$\begin{aligned} \epsilon_{e_x} &= -\frac{\beta}{4} R_x \sim -\frac{1}{4\zeta^2} R_x , \\ \epsilon_{e_y} &= \frac{\beta}{4} R_y \sim \frac{1}{4\zeta^2} R_y . \end{aligned} \quad (4.107)$$

Comparando (4.107) com (4.86) vemos que (4.107) representa uma contribuição de segunda ordem, portanto pode ser desprezada. Notemos que (4.107) representa uma onda caminante para a direita, isto significa que o termo dado por (3.25) só permite que se propaguem ondas dirigidas para a esquerda. Se inicialmente tivéssemos introduzido também um pulso dirigido para a esquerda (3.25) não poderia ser ignorada.

Como podemos ver pelas expressões para as componentes do campo em (4.86), este é composto de duas partes, uma rapidamente

te oscilante e outra que nos dá sua amplitude (vide fig. 2) e é esta que nos dá a velocidade do pulso (transparente) expressa por (4.81).

As excentricidades das elipses instantâneas do campo elétrico e a polarização do meio são iguais à expressão (4.89). O fato das excentricidades serem iguais representa o acoplamento do campo com a matéria, já que é consequência disso.

FIG. 2

Supondo todos os alargamentos desprezíveis, podemos escrever $g(\omega_0)$ como uma função δ . Isto faz com que as expressões obtidas para o campo, polarização e energia para o caso de largura de linha finita recaia no caso do campo em ressonância com o meio com a frequência natural ω_0 (largura zero).

Nosso sistema de equações é de natureza vetorial, portanto invariante sob rotações. Nossa escolha inicial da direção do pulso nos deu o eixo de quantização (z) e neste caso ($E_z = R_z = S_z = 0$). Podemos demonstrar que a menos de fatores de fase irrelevantes, dados $\vec{R}$ e $\vec{S}$ podemos encontrar a_0, a_1, a_2 e a_3 que determinam a função de onda ψ que descreve a evolução do meio material (veja 2.2). Assim, $R_z = S_z = 0$ implica $a_0 = 0$, isto significa transições apenas do tipo $\Delta m = \pm 1$. Como a permutação de eixos não altera nosso sistema, a direção que escolhemos poderia ser x ou y sem mu-

dar o pulso obtido. Temos portanto, a possibilidade de transições do tipo $\Delta m = 0$, $\Delta m = \pm 1$ onde os estados $m = +1$ e $m = -1$ possuem a mesma probabilidade de ocupação (neste caso $R_x = S_x = 0$ ou $R_y = S_y = 0$, o que implica em $|a_1| = |a_2|$). Se escolhessemos a direção de propagação do pulso no plano x, y com $E_x = E_y = R_x = R_y = S_x = S_y = 0$ (onda plana), teríamos selecionado a transição do tipo $\Delta m = 0$ (ou seja $a_1 = a_2 = 0$); vemos portanto que a seleção do tipo de transição é feita pela direção da polarização do pulso. De fato, substituindo (4.84), (4.85) e (4.83) em (3.54) obtemos

$$\vec{\ell} = \frac{\sin 2\phi}{1 + (\tau\xi)^2} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta}{\zeta} \hat{z} \quad , \quad (4.108)$$

o que implica em $\vec{\ell} = 0$ para $\phi = 0$, recaindo no caso $\Delta m = 0$ ($\phi = 0$ em (4.86) nos dá uma onda de polarização plana).

Nosso modelo, embora limitado para dois níveis, não restringe demais a intensidade do campo elétrico. Podemos ver com um exemplo. Suponhamos a propagação de um campo elétrico circularmente polarizado cuja intensidade é dada por

$$E = \frac{\hbar\omega}{d\zeta} \operatorname{sech} \frac{\omega}{\zeta} \left(t - \frac{z}{u}\right) \quad . \quad (4.109)$$

A expressão (4.109) é obtida de (4.86), utilizando as definições (2.28), (4.25), (3.11) e (3.12). Substituindo os valores de $\hbar$, ω e d em (4.109) vem

$$E \approx \left[\frac{3 \cdot 10^8}{\zeta} \operatorname{sech} \frac{10^{15}}{\zeta} \left(t - \frac{z}{u}\right) \right] \text{ V/cm} \quad . \quad (4.110)$$

De (3.14) tiramos $n = \hbar\omega\beta/8\pi d^2$, assim a densidade do meio é expressa por

$$\rho = n M = \frac{\hbar \omega \beta}{8\pi d^2} M, \quad (4.111)$$

onde M é a massa do núcleo do átomo que suporemos da ordem de 10^{-23} gr.

A densidade do meio não deve ser excessivamente baixa para que possamos desprezar a relaxação do meio, responsável pela atenuação do pulso^(3,12,13). De acordo com (2.38), para desprezarmos os termos que envolvem a relaxação do meio teremos que fazer $T_1' \gg \tau$, $T_2' \gg \tau$ e $T_3' \gg \tau$ ou seja $T_1 \gg \tau/\omega$, $T_2 \gg \tau/\omega$ e $T_3 \gg \tau/\omega$. Portanto o tempo de relaxação do meio deverá ser $T \gg \tau/\omega$.

Para $\tau \approx 10^3$, a duração do pulso é da ordem de 10^{-12} seg. (veja 4.110)

$$\begin{aligned} \beta &\sim \tau^{-2} = 10^6 \\ \rho &\sim 10^{-7} \text{ g/cm}^3 \\ T &\gg 10^{-12} \text{ seg} \end{aligned}$$

FIG. 3

Para $\tau \sim 10^6$, a duração do pulso é da ordem de 10^{-9} seg.

$$\begin{aligned} \beta &\sim \tau^{-2} = 10^{-12} \\ \rho &\sim 10^{-13} \text{ g/cm}^3 \\ T &\gg 10^{-9} \text{ seg} \end{aligned}$$

FIG. 4

Vemos então que a propagação de um dado pulso está vinculada à densidade do meio e seu tempo de relaxação. Pulsos que não possuem largura e intensidade apropriados para um determinado meio são ate-

nuados. Mesmo com esse número de restrições, o intervalo que podemos utilizar para campos aplicados é relativamente grande como podemos observar pelas figuras 3 e 4. Os valores possíveis de ζ são essencialmente limitados pelas características do meio. Para valores de ζ acima de 10^6 , o meio deveria ter um tempo de relaxação muito alto, fora da realidade e para valores de ζ abaixo de 10^3 a densidade do meio deveria ser muito alta ocasionando uma perturbação muito forte e o modelo de dois níveis falharia.

REFERÊNCIAS

1. McCall, S.L. and Hahn, E.L., Physical Review Letters. Vol.18, nº 21, 908 (1967).
2. Matulic, L. and Eberly, J.H., Physical Review Letters, vol. A6, 822 (1972).
3. Icsevgy, A. and Lamb, Jr., W.E., Physical Review vol. 185, 517 (1969).
4. Crisp, M.D. , Physical Review Letters, vol. 22, 820 (1969).
5. Mandel, L. and Wolf, E., Coherence and Quantum Optics, Plenum Press. New York - London. 1973.
6. Costa, R.C.T., Journal of Mathematical Physics Vol. 11, nº 9, 2799 (1970).
7. Costa R.C.T. and Munguia, G.A.P., Physical Review A Vol. 14, nº 5, 1745 (1976).
8. Costa, R.C.T., Introdução à ótica não linear, IV Simpósio Brasileiro de Física Teórica, Fascículo II (1972).
9. Costa, R.C.T., "Um modelo semiclássico para a emissão espontânea". Tese apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, U.S.P., para a obtenção do título de Livre Docente, em 1978.

10. Munguia, G.A.P., "Um modelo solúvel para a emissão espontânea na aproximação semiclássica". Tese apresentada à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, para a obtenção do título de Mestre em Ciências, em dezembro de 1973.
11. Dicke, R.H., Physical Review vol. 93, 99 (1954).
12. Hopf, F.A. and Scully, M.O., Physical Review vol.179,399(1969).
13. Geschwind, S., Devlin, G.E., Cohen, R.L. and Chinn, S.R., Physical Review vol. 137, nº 4A, 1087 (1965).
14. Senitzky, I.R., Physical Review A, vol. 6, 1175 (1972).
15. Merzbacher, E., Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, second edition (1970), pg. 178.
16. Panofsky, W.K.H. and Phillips, M., Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley Publishing Company, second edition, (1975), pgs. 24 e 159.
17. Schiff, L.I., Quantum Mechanics Third Edition, McGraw-Hill, 1968, pag. 265.