UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

"ESTUDOS SOBRE UM MODELO UNI-
DIMENSIONAL PARA A EMISSÃO
ESPONTÂNEA NA APROXIMAÇÃO SE-
MICLÁSSICA"

Silvio Crestana

Dissertação apresentada ao Ins-
tituto de Física e Química de
São Carlos, para a obtenção do
título de: MESTRE EM FÍSICA BÁ-
SICA.

Orientador: Prof. Dr. Rogério C.
Trajano da Costa

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos - 1983

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

SILVIO CRESTANA

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 20 DE abril DE 198³.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Rogério Cantarino T. da Costa - Orientador

Dr. José Roberto Drugowich de Felício

Dr. Nelson Studart Filho

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rogério C. Trajano da Costa, que considero mais que orientador, pelo constante entusiasmo, paciência e competência dedicados durante a confecção desta tese.

Aos meus professores e colegas do DFCM-USP, com quem muito tenho aprendido.

Aos meus tios Armenio e Dina, por todo o estímulo que sempre ofereceram.

Ao amigo Antonio Calliri e equipe da área de computação do DFCM-USP, pelas proveitosas discussões que mantivemos.

A Luci Brunetti Costa, em nome da equipe de datilografia do INTEC - FEB.

Ao João José Nicolielo Confetti e equipe do INTEC - FEB, pela confecção dos desenhos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro e institucional.

Ao INTEC - FEB e a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente ao bom andamento deste trabalho.

RESUMO

Do estudo da emissão espontânea para um plano de átomos excitados, descritos pelo modelo do átomo de dois níveis, na transição $\Delta l=1$, $\Delta m=1$ e usando-se a aproximação semiclássica da radiação - ambos discutidos no texto - faz-se algumas generalizações. Investiga-se a taxa de radiação de um plano infinito de átomos excitados, na transição $\Delta l=1$, $\Delta m=0$. Constata-se um limite divisório de soluções regulado pelo acoplamento campo-matéria. Simula-se o efeito do tamanho do emissor (até então de espessura desprezível), usando-se dois planos infinitos de átomos paralelos, separados por uma distância finita. Estabelece-se o conjunto de equações auto-consistentes da interação da energia radiante com a matéria, no caso geral, quando $\Delta l=1$, $\Delta m=1$. Discutem-se ainda duas situações extremas:

- a) Os planos coincidem e
- b) estão infinitamente afastados.

Quando o acoplamento campo-matéria é fraco, investiga-se, em alguns casos, com auxílio de computação, a influência da separação dos planos, da diferença de fase dos dipolos elétricos e das energias iniciais de cada plano no comportamento da emissão.

ABSTRACT

Some generalizations are made on the spontaneous emission by a plane of excited atoms, described by two level atom-model, in the $\Delta l=1$, $\Delta m=1$, transition and using the semiclassical radiation approximation - both discussed in the text. Initially, the radiation rate of an infinite plane of excited atoms is investigated, using $\Delta l=0$, $\Delta m=0$, transition. It is shown that we can observe a limit solution depending on the coupling between field and matter. We simulate the effect of the emitter thickness, heretofore neglected, by using two infinite parallel planes of atoms, separated by a finite distance. The auto-consistent set of equation for the interaction between the radiant energy and matter was established, in the general case, when $\Delta l=1$, $\Delta m=1$. We still discussed two extreme situations:

- a) the planes are coincident and
- b) they are infinitely separated.

We investigate, in some cases, by means of a computer, the influence of plane separation, the phase difference between electric dipoles and initial energy of each plane in the spontaneous emission behaviour when the field-matter coupling is weak.

ÍNDICE

Capítulo I

Introdução	1
------------------	---

Capítulo II - DEDUÇÃO ABREVIADA DAS EQUAÇÕES DA MATÉRIA E DO CAMPO, NA APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA	9
2.1 - Obtenção das equações da matéria	9
2.2 - Obtenção das equações do campo	14

Capítulo III - APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA PARA A EMISSÃO ESPONTÂNEA NA TRANSIÇÃO $\Delta m = 0$	19
---	----

Capítulo IV - ESTUDO DA INTERAÇÃO PARA CAMPOS FRACOS DE UM SISTEMA DE DOIS PLANOS PARALELOS, IGUAIS E "INFINITAMENTE SEPARADOS", PARA O DECAIMENTO $\Delta m = 1$	36
4.1 - Dedução abreviada da emissão espontânea para o decaimento $\Delta m = 1$	38
4.2 - Estudo da interação para campos fracos de 2 planos "infinitamente afastados" na transição $\Delta m = 1$	41

Capítulo V - ESTUDO DA EMISSÃO ESPONTÂNEA PARA UM SISTEMA DE 2 PLANOS PARALELOS NA TRANSIÇÃO $\Delta m = 1$...	54
5.1 - Aproximação para campos fracos	60

Capítulo VI - BREVE ANÁLISE NUMÉRICA DO CAPÍTULO V, QUANDO A INTERAÇÃO CAMPO-MATÉRIA É FRACA	70
--	----

Referências Bibliográficas	81
----------------------------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O presente trabalho de tese pretende utilizar a aproximação semiclássica no estudo da emissão espontânea de energia radiante em algumas situações de particular interesse.

De início faremos algumas considerações de ordem geral. Assim, começamos ressaltando que o fenômeno físico da emissão ou absorção de energia por um meio material é, em essência, um problema de interação entre a radiação (ondas eletromagnéticas) e a matéria (átomos). Contudo, a descrição física deste problema num caso geral, tanto do ponto de vista quantitativo quanto qualitativo, é bastante complicada. Podemos citar, como um exemplo, o estudo da emissão coletiva de átomos, que envolve não só a análise da radiação produzida pelo meio, mas também a modificação que esta mesma produz no meio emissor.

Seguindo esta linha de raciocínio, as dificuldades existentes nesta descrição residem basicamente nos seguintes fatos: ⁽¹⁾
a) a matéria é composta de muitos átomos; b) os átomos possuem muitos níveis de energia (mesmo o mais simples deles: o átomo de hidrogênio) e finalmente; c) a Teoria Quântica dos Campos, que rege o tratamento destes problemas, dá origem a equações matemáticas de difícil solução.

Frente a estas complicações - algumas de natureza intrínseca do problema e outras dependentes da formulação ora existente - o que normalmente se tem feito é adotar um modelo físico que contenha hipóteses simplificadoras. Tal modelo, aplicado a situações determinadas a priori, permite aproximações que facilitam a análise qualitativa assim como os cálculos matemáticos.

Um trabalho clássico e de relevância no assunto, que merece ser destacado, é o estudo do fenômeno da emissão coletiva de

energia de um conjunto de átomos emissores (gás radiante) realizado por Dicke⁽²⁾ em 1954. Neste trabalho, fazendo uso da teoria da perturbação em 1ª ordem, Dicke discute a interação entre um sistema de átomos de dois níveis e o campo eletromagnético quantizado. Conseguiu calcular a taxa de emissão dos átomos na situação em que a dimensão de confinamento do gás é pequena comparada com o comprimento de onda da radiação emitida. Além disso, associou ao sistema um novo número quântico chamado "número de cooperação" que possui uma analogia estreita com a descrição clássica da relação de fase dos dipolos oscilantes.

Outros tratamentos mais recentes, embora não-perturbativos têm sido adotados, onde basicamente se faz uma integração aproximada das equações de campo (lineares) e posterior substituição dos resultados nas equações da matéria (não lineares).

Nesta tese adotaremos o tratamento chamado de aproximação semiclássica da interação da radiação com a matéria onde utilizaremos de início as equações de Maxwell (descrição clássica) para descrever o campo e a equação de Schrödinger (descrição quântica) para descrever o meio material.

Segue, sinteticamente, um relato desta aproximação:

- a') a matéria é descrita pela equação de Schrödinger no modelo do átomo de dois níveis. Isto é, seus átomos são iguais, distinguíveis e possuem somente dois níveis de energia: o fundamental e o excitado;
- b') do ponto de vista eletromagnético, as equações de Maxwell descrevem o campo na presença da polarização macroscópica, a qual representa a existência do meio material;
- c') a propagação do campo é unicamente unidimensional;
- d') a única interação presente entre os átomos é realizada pelo campo eletromagnético;
- e') a interação dos átomos do meio material com o campo obedece a

aproximação de dipolo elétrico. Ou seja, o campo externo atuante praticamente não varia num diâmetro atômico (ou equivalentemente: é uniforme do ponto de vista da interação).

À primeira vista, a aproximação semiclássica da radiação que acabamos de enunciar, apresenta simplificações por demais exageradas. No entanto, isto em geral não é verdade, pois tem sido utilizada com relativo sucesso na interpretação e previsão de resultados experimentais.

Evidentemente, como todo modelo, este que estamos utilizando também possui limitações, pois contém hipóteses pré-determinadas. Conseqüentemente, o modelo adotado nesta tese, possui pontos favoráveis e desfavoráveis.

Desfavoravelmente, podemos citar os seguintes:

- 1) a emissão espontânea (emissão que ocorre sem influência do campo de radiação externo) cede lugar à emissão induzida, isto é, o campo que atua num átomo é gerado pelos outros átomos;
- 2) devido ao estado excitado possuir momento de dipolo nulo (Simetria de Carga) aparecerá o fenômeno do "equilíbrio instável", ou seja, a emissão espontânea a partir de um estado totalmente excitado não tem início, pois não é "disparada" pelo campo por não ser este quantizado;
- 3) também aparecerão dificuldades em definir as "fontes" das equações de Maxwell, utilizadas para relacionar as grandezas macroscópicas e locais, supondo unicamente a interação eletromagnética. Isto exige hipóteses drásticas. É o caso, no capítulo II, da obtenção das equações do campo quando supomos a existência de efeito cooperativo máximo dos átomos⁽³⁾ no cálculo da polarização macroscópica total.

Embora os itens acima constituam "defeitos" intrínsecos do modelo, vamos contorná-los razoavelmente bem no decorrer da te-

se. No caso do item 2, podemos tomar a energia inicial infinitesimalmente abaixo do estado excitado. Por outro lado, o item 1 só possui validade no início do processo, pois é sabido dos resultados de Dicke⁽³⁾ que a emissão induzida para sistemas com muitos átomos, toma conta do processo depois de um tempo muito menor que o tempo de emissão do sistema.

O uso de 2 níveis é favorecido pelos fatores seguintes:

- 1') Uma radiação monocromática de frequência ω_0 provoca transições, principalmente quando dois níveis de energia a e b satisfazem a condição de Bohr, ou seja,

$$E_b - E_a = \hbar\omega_0 ;$$

- 2') No caso de um nível degenerado, há ainda possibilidade de selecionar somente as transições que nos interessam através da "sintonização" da frequência e da polarização do campo e;
- 3') Na aproximação de dipolo elétrico as regras de seleção restringem as transições permitidas.

Nesta oportunidade, em que estamos fazendo considerações a respeito do modelo adotado nesta tese, convém complementar - para evitar avaliações equivocadas - que os avanços conseguidos no campo da Óptica não-linear (que estuda os efeitos não lineares que ocorrem na interação entre a radiação e a matéria), não se devem exclusivamente à criação de modelos teóricos simplificadores, mas também a avanços no campo experimental, onde a construção do laser é um exemplo oportuno. Este, sem dúvida, proporcionou um grande impulso no desenvolvimento da Óptica, possibilitando a obtenção de novas técnicas de detecção, dando condições de medir sinais pouco intensos ou de curta duração. Do mesmo modo, foi possível gerar sinais quase instantâneos de alta intensidade, como o pulso de um laser de alta potência. A observação e explicação dos fenômenos do

eco dos ftons e da transparência auto-induzida⁽³⁾ é um exemplo do avanço teórico-experimental neste campo.

Voltando novamente ao problema do tratamento semiclássico da interação da radiação com a matéria, podemos certamente afirmar que este contribuiu bastante para simplificar o estudo da emissão de energia. Entretanto, não foi o suficiente, pois muitas dificuldades permanecem.

Mesmo nos tratamentos mais atuais, embora muitas vezes se consiga chegar a um sistema de equações não lineares auto-consistentes, este nem sempre possui método analítico de solução conhecido. Assim, a resolução do problema da emissão espontânea de um sistema de átomos continua complexa e mesmo impossível no caso mais geral. Resultados alentadores normalmente só são conseguidos em situações bastante particulares.

Para citar apenas um caso de nosso interesse, em que se obteve resultados satisfatórios, numa situação particular, basta ver o estudo da emissão espontânea para um plano infinito de átomos na transição $\Delta l = 1$, $\Delta m = 1$ que da Costa & Munguia⁽⁴⁾ realizaram utilizando o modelo e equações contidas no capítulo II desta tese.

Os autores conseguiram encontrar soluções exatas, independentemente da densidade do sistema, embora sujeitas a certas restrições a priori (relativas ao campo não quantizado).

Reobtiveram, como Dicke, uma dependência temporal para a taxa de emissão, da forma secante hiperbólica ao quadrado para a interação (campo-matéria) fraca e grande comprimento de onda da radiação é muito maior que a região onde os átomos estão confinados.

Dando prosseguimento à descrição sucinta do conteúdo de cada capítulo desta tese, pode ser observado que contribuimos no capítulo III com a generalização imediata do trabalho de da Costa & Munguia, estudando a transição $\Delta l = 1$, $\Delta m = 0$ ⁽⁵⁾. O estudo desta transição trouxe resultados interessantes, que diferem substan-

cialmente das soluções $\Delta l = 1$, $\Delta m = 1$.

O sistema de equações auto-consistentes que descreve a interação entre o campo e a matéria não possui solução analítica em termos de funções simples, como antes ($\Delta l = 1$, $\Delta m = 1$). Foi necessário apelar para a resolução numérica computacional.

No caso de campos fracos, que originam interações fracas entre a matéria e o campo quando comparadas com a energia de ligação atômica ($\hbar\omega_0$), conseguimos fazer, com relativo sucesso, previsões sobre as soluções. Finalmente, observamos por ora, que o que nos mais chamou a atenção, no capítulo III, foi o aparecimento de um limite divisório de soluções, regulado pela intensidade do acoplamento entre o campo e a matéria.

Após isto, resolvemos fazer outra generalização até então não investigada: o estudo da influência do tamanho do emissor (até o momento considerado como um plano de espessura desprezível).

(*) Tentando fazer esta investigação nos deparamos com uma dificuldade já prevista anteriormente: a emissão originada em um ponto é influenciada pelo comportamento passado de outros pontos do próprio sistema. Para diminuir estas complicações, seguimos o caminho que imaginamos ser o mais simples a partir do conhecimento da solução do problema de um plano: considerar dois planos separados por uma distância finita, no vácuo (tentamos com isto simular efeitos de largura interna). Este problema ainda permite o limite que foi investigado no capítulo IV (o outro extremo possível consiste na superposição dos dois planos tratados no capítulo VI). Consiste em afastar os dois planos de tal modo que a emissão seja independente do campo externo. É como se os planos estivessem infinitamente separados. Isto na prática ocorrerá quando a separação entre eles for

(*) Uma outra possibilidade de estudo aventada inicialmente foi a análise da emissão de um sistema de átomos com um nível degenerado. No entanto, uma primeira abordagem deste caso foi recentemente realizada e pode ser vista em (1).

muito maior que a largura do pulso da emissão.

Levando em conta a validade desta hipótese, conseguimos determinar as equações de movimento do sistema e estudar com o auxílio do computador, a taxa de emissão de cada plano e consequentemente definir e calcular seus coeficientes de reflexão e transmissão em cada incidência.

Tanto no capítulo IV como no V, utilizamos a transição $\Delta l = 1$, $\Delta m = 1$, devido a maior simplicidade intrínseca de suas equações.

Nosso próximo passo, foi estudar no capítulo V, o problema dos dois planos propriamente dito, num caso genérico. Procuramos pelo sistema de equações que governam a matéria e o campo, assim como a lei que expressa a conservação da energia do sistema.

As equações resultantes em número de oito, que descrevem a evolução temporal do sistema, conforme era de se esperar, envolvem efeitos de retardo que trazem consigo complexidades matemáticas analiticamente insolúveis. Também não as resolvemos numericamente, através do computador, no caso mais geral. No entanto, para prosseguimento do estudo, passamos ao caso de acoplamento fraco entre a matéria e o campo, donde nos foi possível calcular numericamente, numa certa ordem de aproximação, a taxa de emissão, a variação temporal da fase entre os dipolos dos dois planos, o campo elétrico, etc.

Reservamos o capítulo VI para a realização da análise numérica envolvida no capítulo V em alguns casos de particular interesse, possibilitando-nos fazer alguns comentários gerais. A seguir, fornecemos uma explicação resumida do conteúdo de cada capítulo.

No capítulo II, utilizando a aproximação semiclássica da radiação, obtivemos o sistema de equações auto-consistentes que descrevem a interação entre o campo e a matéria, no caso de um

plano infinito de átomos.

No capítulo III, aplicamos as equações obtidas em II, no estudo da emissão espontânea para a transição $\Delta l = 1$, $\Delta m = 0$.

No início do capítulo IV fizemos um apanhado geral das principais equações e conclusões do estudo da emissão espontânea para um plano infinito de átomos, na transição $\Delta m = 1$. A partir daí, analisamos o problema de interação quando os campos são fracos em 2 planos iguais e "infinitamente separados".

No capítulo V, estudamos a emissão espontânea para dois planos no caso genérico.

No capítulo VI, parte final, podem ser vistas algumas figuras procedentes da análise numérica do capítulo V, que julgamos convenientes, assim como alguns comentários de ordem geral.

CAPÍTULO II

DEDUÇÃO ABREVIADA DAS EQUAÇÕES DA MATÉRIA
E DO CAMPO, NA APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA

Conforme foi discutido na Introdução, utilizaremos neste capítulo a equação de Schrödinger aplicada ao modelo do átomo de dois níveis para descrever a matéria; assim como as equações de Maxwell para descrever o campo eletromagnético. Isto nos fornecerá um sistema de equações auto-consistentes que vai nos permitir uma análise da interação entre o campo e a matéria. Esta análise será nosso objeto de estudo dos próximos capítulos.

2.1 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DA MATÉRIA

Consideremos um átomo constituído de dois estados de energia: um fundamental e outro excitado.

Vamos descrever sua função de onda $\psi(t)$ como combinação das funções de onda ϕ_a e ϕ_b (normalizadas à unidade) de seus dois estados estacionários, de energias respectivamente iguais a

$$-\frac{\hbar\omega_0}{2} \text{ e } +\frac{\hbar\omega_0}{2} :$$

$$\psi(t) = a(t)\phi_a + b(t)\phi_b. \quad (\text{II-1})$$

A hamiltoniana H deste átomo, na aproximação de dipolo elétrico, se escreve como

$$H = H_0 + H_I = H_0 - \vec{p} \cdot \vec{E}, \quad (\text{II-2})$$

onde H_0 é a hamiltoniana não perturbada; com

$$H_0 \phi_a = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \phi_a, \quad H_0 \phi_b = \frac{\hbar\omega_0}{2} \phi_b; \quad (\text{II-3})$$

$\vec{p}$ é o operador de dipolo elétrico e $\vec{E}$ é o campo elétrico que atua sobre o átomo.

Recorrendo-se agora à equação de Schrödinger

$$[H_0 + H_I] \psi(t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} , \quad (\text{II-4})$$

vamos obter um sistema de equações de movimento em termos de $a(t)$ e $b(t)$. Para obter uma expressão mais simples, admitiremos que a origem do sistema de coordenadas encontra-se no centro do átomo e que este possui um potencial com simetria esférica (potencial central). Assim, o valor médio do dipolo elétrico nos dois estados estacionários é nulo:

$$(\phi_a, \sum_i \vec{r}_i \phi_a) = (\phi_b, \sum_i \vec{r}_i \phi_b) = 0 , \quad (\text{II-5})$$

onde $\vec{r}_i$ é o vetor posição do i^o elétron do átomo.

Usando a ortogonalidade de ϕ_a e ϕ_b da maneira convencional (Veja referência 7) obtemos:

$$\frac{da}{dt} = \frac{i\omega_0 a}{2} - \frac{i}{\hbar} (\phi_a, H_I \phi_b) b , \quad (\text{II-6})$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{i\omega_0 b}{2} - \frac{i}{\hbar} (\phi_b, H_I \phi_a) a . \quad (\text{II-7})$$

É possível simplificar este sistema de equações de quatro incógnitas (a e b são variáveis complexas) usando as três funções reais r_x , r_y e r_z (*) introduzidas por Feynman, Vernon e

(*) Como veremos no decorrer do capítulo, r_x , r_y e r_z estão associadas a grandezas físicas relevantes.

Hellwarth⁽⁶⁾:

$$r_x = \langle \sigma_x \rangle = (\psi, \sigma_x \psi) = ab^* + ba^*$$

$$r_y = \langle \sigma_y \rangle = (\psi, \sigma_y \psi) = i(ba^* - ab^*) \text{ e } \quad (\text{II-8})$$

$$r_z = \langle \sigma_z \rangle = (\psi, \sigma_z \psi) = bb^* - aa^*,$$

onde σ_x , σ_y e σ_z são as matrizes de spin de Pauli e $*$ significa complexo conjugado:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

De (II-8) podemos escrever (II-6) e (II-7) numa forma mais compacta:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad (\text{II-9})$$

onde $\vec{r}$ e $\vec{\omega}$ possuem respectivamente as componentes (r_x, r_y, r_z) e

$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, com

$$\omega_x = \frac{2}{\hbar} \text{Re} (\phi_a, H_I \phi_b), \quad (\text{II-10})$$

$$\omega_y = \frac{2}{\hbar} \text{Im} (\phi_a, H_I \phi_b) \text{ e } \quad (\text{II-11})$$

$$\omega_z = \omega_0. \quad (\text{II-12})$$

(*) Veja que podemos descrever o operador H_0 definido em (II-3) na forma matricial adotando a notação vetorial:

$$\phi_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \text{ e } H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z.$$

O valor médio de H_0 pode ser calculado com o auxílio de (II-8):

$$\langle H_0 \rangle = (\psi, H_0 \psi) = \frac{\hbar\omega_0}{2} r_z.$$

Observe que r_z é proporcional ao valor médio da energia não perturbada.

Através das transformações (II-8) conseguimos reduzir a equação de Schrödinger (II-4) a uma equação análoga à da velocidade de um corpo em rotação na forma clássica, onde a velocidade angular $\vec{\omega}$ em (II-9) depende do campo elétrico. É fácil notar, como consequência direta de (II-9), que a conservação da probabilidade se escreve agora como $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$, pois

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \text{ e, de (II-8), que}$$

$$r^2 = [|a|^2 + |b|^2]^2 ; \quad (\text{II-13})$$

resultado este que nos será útil em cálculos futuros.

Para finalizar esta seção, calculemos os elementos de matriz (II-10) e (II-11). Devemos lembrar, para este fim, que o estado fundamental ϕ_a é um estado s (potencial central) enquanto que ϕ_b deve ter momento angular $\ell = 1$ (consequência das regras de seleção na aproximação de dipolo elétrico (referência 7)). Logo existem duas possibilidades para o valor m (em unidades de $\hbar$) da projeção, numa direção fixa, do momento angular do estado ϕ_b : $m = \pm 1$ ou $m = 0$. Assim, podemos escrever ϕ_a e ϕ_b em termos de funções de onda do tipo hidrogênio (funções radiais e harmônicas esféricas) (V. referência 7):

$$\phi_a = R_{10}(r) \quad \ell = 0, \quad m = 0 \quad (\text{II-14})$$

$$\phi_b = \begin{cases} R_{21}(r) \cos \theta & \ell = 1, \quad m = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) \sin \theta e^{i\phi} & \ell = 1, \quad m = 1 \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) \sin \theta e^{-i\phi} & \ell = 1, \quad m = -1 \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

De (II-14) e (II-15) obtemos as representações matriciais das componentes do operador de dipolo elétrico $\vec{p}$:

$$p_x = \frac{+}{-} p \sigma_x, \quad p_y = p \sigma_y, \quad p_z = 0 \quad \text{para } m = \frac{+}{-} 1 \quad (*) \quad (\text{II-16})$$

e

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = -\sqrt{2} p \sigma_x \quad \text{para } m = 0, \quad (\text{II-17})$$

onde $p = \frac{-4\pi e}{3\sqrt{2}} \int_0^\infty R_{21} R_{10} r^3 dr$. Com a ajuda de (II-16) e

(II-17) podemos calcular os elementos de matriz contidos em (II-10) e (II-11), o que nos fornece

$$\omega_x = \frac{+}{-} \frac{2p}{\hbar} E_x, \quad \omega_y = -\frac{2p}{\hbar} E_y \quad \text{para } m = \frac{+}{-} 1 \quad (\text{II-18})$$

e

$$\omega_x = \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z, \quad \omega_y = 0 \quad \text{para } m = 0. \quad (\text{II-19})$$

Finalmente, a partir de (II-9), obtemos as equações que descrevem o meio material

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_x}{\partial t} = -\omega_0 r_y - \frac{2p}{\hbar} E_y r_z, \\ \frac{\partial r_y}{\partial t} = \omega_0 r_x + \frac{2p}{\hbar} E_x r_z, \\ \frac{\partial r_z}{\partial t} = \frac{2p}{\hbar} (r_x E_y - r_y E_x) \end{array} \right. \quad m = \frac{+}{-} 1 \quad (\text{II-20})$$

(*) Note que, com o auxílio de (II-8), $\langle p \rangle = \frac{+}{-} p r$ e $\langle p \rangle = p r_y$. Logo r_x e r_y estão associadas à média das componentes do momento do dipolo.

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_x}{\partial t} = - \omega_0 r_y \quad , \\ \frac{\partial r_y}{\partial t} = \omega_0 r_x - \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z r_z \quad , \quad m = 0 \\ \frac{\partial r_z}{\partial t} = + \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z r_y \quad . \end{array} \right. \quad (\text{II-21})$$

2.2 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DO CAMPO

Vamos supor aqui, que a polarização macroscópica $\vec{P}(\vec{r}, t)$ é a única fonte do campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

Supomos ainda que o efeito cooperativo ⁽²⁾ dos dipolos é máximo (i.e: todos os átomos num mesmo ponto possuem a mesma função de onda) de modo que

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle \quad , \quad (\text{II-22})$$

onde $\langle \vec{p} \rangle$ é o valor médio do dipolo elétrico de um único átomo e n é o número de átomos de dois níveis por unidade de volume.

Lembrando (II-8), (II-16) e (II-17) a equação (II-22) se escreve como:

$$\vec{P} = np \left(\frac{+}{-} r_x \hat{x} + r_y \hat{y} \right) \quad , \quad m = \frac{+}{-} 1 \quad (\text{II-23})$$

e

$$\vec{P} = - \sqrt{2} n p r_x \hat{z} \quad . \quad m = 0 \quad (\text{II-24})$$

Escrita a polarização em termos de r_x e r_y , consideremos as equações de Maxwell, com a intenção de encontrar a equação de

propagação espaço-temporal do campo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (II-25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ,$$

com $\vec{B} = \vec{H}$ (meio não magnético) e $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$.

É possível, através de operações vetoriais elementares escrever, de (II-25), que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad e, \quad (II-26)$$

de (II-23) e (II-24), concluir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_x = \pm \frac{4\pi}{c^2} n p \frac{\partial^2}{\partial t^2} r_x \quad , \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_y = + \frac{4\pi}{c^2} n p \frac{\partial^2}{\partial t^2} r_y \end{array} \right. \quad m = \pm 1 \quad (II-27)$$

e

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_z = - \frac{4\pi}{c^2} n p \sqrt{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} r_x \quad . \quad m = 0 \quad (II-28)$$

As equações (II-27) e (II-28), juntamente com (II-20) e (II-21) constituem um sistema auto-consistente que descreve a interação entre a energia radiante e a matéria, na aproximação semi-clássica. No entanto, devido à complexidade destas equações é praticamente impossível resolvê-las num caso geral. Por isso, a partir de agora estudaremos a equação (II-26) num caso particular de nosso interesse (v. referência 8): um plano infinito de átomos localizados em $z = 0$, interagindo com um campo de radiação que se propaga no vácuo na direção $\hat{z}$, como indica a figura (1):

Figura (1): Emissão e absorção de radiação por um plano material ($z = 0$), mostrando os campos incidentes e refletidos onde convencionamos que d, e, I, R, significam respectivamente direita, esquerda, incidente e refletido.

Procuremos obter o campo $\vec{E}$ a partir das condições de contorno e propagação no vácuo existentes no problema.

No caso em estudo (figura 1) temos

$$n(x, y, z) = \sigma \delta(z) ; \quad (\text{II-29})$$

onde σ é o número de átomos por unidade de área do plano e $\delta(z)$ a "função" delta unidimensional.

Com (II-29) a equação de propagação (II-27) fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(z, t) = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \delta(z) \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{p}(0, t) \rangle , \quad (\text{II-30})$$

$$\text{onde } \vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \hat{x} + E_y(z, t) \hat{y} .$$

Observando a figura (1), onde convencionamos chamar por d, e, I, R respectivamente direita, esquerda, incidente e refletido, podemos escrever o campo elétrico dos dois lados do plano na forma,

$$\vec{E}^d(z, t) = \vec{E}_R^d(z - ct) + \vec{E}_I^d(z + ct) \quad \text{para } z > 0 ; \quad (\text{II-31})$$

$$\vec{E}^e(z, t) = \vec{E}_I^e(z - ct) + \vec{E}_R^e(z + ct) \quad \text{para } z < 0 ; \quad (\text{II-32})$$

e, da continuidade da componente tangencial do campo eletromagnético em $z = 0$, obtemos que,

$$\vec{E}^d(0, t) = \vec{E}^e(0, t) = \vec{E}(t) , \quad (\text{II-33})$$

onde $\vec{E}(t)$ é o campo local (campo "sentido" pelos átomos do plano).

Integrando agora a equação (II-30) em z , de $z = -\epsilon$ a $z = \epsilon$, e fazendo, a posteriori, $\epsilon \rightarrow 0$ ficamos com

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \vec{E}^d - \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}^e \right]_{z=0} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{p}(0, t) \rangle , \quad (\text{II-34})$$

que, com a ajuda de (II-31) e (II-32), se escreve como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} [\vec{E}_R^d(z-ct) + \vec{E}_I^d(z+ct)] \Big|_{z=0} - \frac{\partial}{\partial z} [\vec{E}_I^e(z-ct) + \vec{E}_R^e(z+ct)] \Big|_{z=0} = \\ & = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{p}(0, t) \rangle . \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

Escrevendo em termos das derivadas em relação a t vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{ -\vec{E}_R^d(0, t) + \vec{E}_I^d(0, t) - [-\vec{E}_I^e(0, t) + \vec{E}_R^e(0, t)] \} = \\ & = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{p}(0, t) \rangle . \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

Integrando (II-36) em relação ao tempo, chegamos à igualdade

$$\vec{E}_I^d(0, t) - \vec{E}_R^d(0, t) + \vec{E}_I^e(0, t) - \vec{E}_R^e(0, t) = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}(0, t) \rangle , \quad (\text{II-37})$$

onde anulamos a constante de integração de modo que o estado fundamental (onde $\langle \vec{p} \rangle = 0$) fosse compatível com a ausência de campos externos.

Podemos ainda eliminar o campo refletido utilizando (II-33) e reescrever (II-37) em função unicamente dos campos incidentes

$$\vec{E}_I^e(o,t) + \vec{E}_I^d(o,t) - \vec{E}(t) = \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}(o,t) \rangle \quad . \quad (\text{II-38})$$

Interessa-nos estudar uma situação mais simples em que

$$\vec{E}_I^e(o,t) + \vec{E}_I^d(o,t) = 0 \quad , \quad (\text{II-39})$$

que é o caso da emissão espontânea, o que leva (II-38) a ficar escrita como

$$\vec{E}(t) = - \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}(o,t) \rangle \quad . \quad (\text{II-40})$$

A equação (II-40) constitui junto com (II-20) e (II-21) o principal resultado dos quais faremos uso nos nossos estudos.

No próximo capítulo estudaremos para efeito de aplicação, as equações (II-21) e (II-40) num caso particular de emissão espontânea em que a transição obedece à regra $\Delta m = 0$ ⁽⁵⁾.

CAPÍTULO III

APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA PARA A
EMIÇÃO ESPONTÂNEA NA TRANSIÇÃO $\Delta m = 0$

Na transição $\Delta m = 0$ só existe polarização na direção $\hat{z}$, como pode ser observado de (II-24). Portanto, neste caso, para aproveitar melhor expressões anteriores, consideremos o plano infinito de átomos excitados da figura (1) localizados em $y = 0$ contendo portanto o eixo $\hat{z}$. O campo externo está então polarizado na direção do eixo $\hat{z}$ e se propaga na direção $\hat{y}$, isto é, $E_x = E_y = 0$ e $E = E_z$.

Passemos a estudar, a partir de agora, o sistema de equações auto-consistentes dado por (II-21) e (II-40).

Utilizando (II-17) podemos obter

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_x}{\partial t} = -\omega_0 r_y, \\ \frac{\partial r_y}{\partial t} = \omega_0 r_x - \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E r_z, \\ \frac{\partial r_z}{\partial t} = \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E r_y, \end{array} \right. \quad (\text{III-1})$$

$$E = \frac{2\pi p}{c} \sigma \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial t} r_x.$$

Vamos simplificar (III-1) eliminando o campo E .

Para isto, deduzimos facilmente de (III-1) que

$$r_y = -\frac{\sqrt{2} p E}{\alpha \hbar \omega_0}, \quad (\text{III-2})$$

onde definimos a constante adimensional

$$\alpha = \frac{2\pi p \sigma}{c} \quad K \text{ e } K = \frac{2p}{\hbar} \cdot \text{Logo (III-1) reduz-se a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_x}{\partial \tau} = -r_y, \\ \frac{\partial r_z}{\partial \tau} = -2\alpha r_y^2, \\ r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1, \end{array} \right. \quad (\text{III-3})$$

onde introduzimos a grandeza adimensional $\tau = \omega_0 t$. A última das equações (III-3) (conservação da probabilidade: Ver II-13) nos sugere uma representação em coordenadas esféricas:

$$r_x = \sin\theta \cos\psi, \quad r_y = \sin\theta \sin\psi, \quad r_z = \cos\theta, \quad (\text{III-4})$$

em termos da qual chegamos com facilidade ao sistema de equações diferenciais simplificado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha \sin\theta \sin^2\psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \alpha \cos\theta \sin(2\psi). \end{array} \right. \quad (\text{III-5})$$

Não foi possível resolver analiticamente o sistema (III-5) em termos de funções simples, razão pela qual apelamos para resolução numérica. Entretanto, antes disto, estudaremos alguns casos particulares onde as equações podem ser integradas, como é o caso da aproximação para campos fracos. Para formalizar melhor esta idéia, podemos observar de (III-2) que a constante adimensional α caracteriza a intensidade do campo. De fato, o valor máximo E_m de

$|\vec{E}|$ ocorre quando $r_y = 1$.

Nestas condições

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} p E_m}{\hbar \omega_0} , \quad (\text{III-6})$$

o que nos dá uma idéia da intensidade relativa da interação campo-matéria. Se $\alpha \ll 1$, a interação entre os átomos (pE) é fraca em relação a energia de ligação ($\hbar\omega_0$). Se $\alpha \gg 1$ ocorre exatamente o contrário e quando $\alpha \sim 1$ podemos grosseiramente dizer que existe uma equivalência entre as energias de interação e ligação atômicas.

Voltemos novamente a (III-5) e estudemos o caso $\alpha \ll 1$ (campo fraco).

Podemos integrar ψ a partir de $\frac{d\psi}{d\tau} \simeq 1$, obtendo

$$\psi = \tau + \psi_0 \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha \sin\theta \sin^2(\tau + \psi_0) , \quad (\text{III-7})$$

onde chamamos de ψ_0 o valor de ψ em $\tau = 0$. Integrando (III-7) em termos de θ e τ ficamos com

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \alpha \tau - \frac{\alpha \sin 2(\tau + \psi_0)}{2} + \text{constante} . \quad (\text{III-8})$$

Para efeito de simplificação vamos determinar a constante de integração em (III-8) utilizando a condição inicial $\tau = 0$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$, que corresponde a contar o tempo da emissão a partir do instante em que metade da energia já foi emitida^(*). Assim obtemos:

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \{ \exp [\alpha (\tau - \cos (\tau + 2\psi_0) \sin \tau] \} . \quad (\text{III-9})$$

(*) Veja (III-4) e a nota ao pé da página 11, no capítulo II.

Convém notar que a fase ψ_0 não é muito relevante para $\alpha \ll 1$, pois

$$e^{\alpha [\tau - \cos(\tau + 2\psi_0) \sin \tau]} \approx e^{\alpha \tau} \quad (\text{III-10})$$

(Note que τ varia de $-\infty$ a ∞ enquanto que o co-seno e o seno são funções limitadas).

Motivados por (III-9) e (III-10) analisemos a influência de ψ_0 no comportamento das funções

$$\left\{ \begin{array}{l} r_x \approx \text{sen}\theta(\tau) \cos(\tau + \psi_0) \approx \text{sec h}(\alpha\tau) \cos(\tau + \psi_0) \\ \\ r_y \approx \text{sen}\theta(\tau) \text{sen}(\tau + \psi_0) \approx \text{sec h}(\alpha\tau) \text{sen}(\tau + \psi_0) \end{array} \right. \quad (\text{III-11})$$

onde fizemos uso de (III-7), (III-9) e (III-10). (É conveniente observar de (II-24) e (III-2) que r_x e r_y são respectivamente proporcionais à polarização e ao campo elétrico.)

A função $\text{sen}\theta(\tau) \approx \text{sec h}(\alpha\tau)$ é a amplitude de uma modulação lentamente variável (tempo de vida $\approx \frac{1}{\alpha\omega_0}$) de r_x e r_y , que se anula em $\pm \infty$, enquanto que $\cos(\tau + \psi_0)$ e $\text{sen}(\tau + \psi_0)$ oscilam rapidamente (período = 2π). Com isto, nos produtos que aparecem em (III-11), a fase ψ_0 torna-se irrelevante, numa escala de tempo onde o poder de resolução é da ordem do tempo de vida do sistema. Isto também pode ser visto na taxa de emissão, que é definida como sendo proporcional ao quadrado do campo elétrico (vetor de Poynting). De fato, podemos prever uma influência de ψ_0 análoga à que ocorre em (III-11), devido ao fato do tempo de vida do sistema ser da ordem de $\frac{1}{\alpha\omega_0}$ enquanto que o tempo de oscilação de $\text{sen}^2(\tau + \psi_0)$ é da ordem de $\frac{1}{\omega_0}$ (para $\alpha \ll 1$, temos $\frac{1}{\alpha\omega_0} \gg \frac{1}{\omega_0}$, onde $\frac{1}{\omega_0}$ é um valor muito pe

queno (da ordem de 10^{15} s)).

Tomando a média temporal da taxa de emissão num intervalo de tempo Δt , $\frac{1}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \frac{1}{\alpha \omega_0}$, obtemos que esta não depende de ψ_0 . Isto porque a média da função $\sin^2(\tau + \psi_0)$ é igual a $\frac{1}{2}$, fazendo com que a taxa de emissão média seja proporcional ao $\sin^2 \theta(\tau)$, somente.

Dando continuidade ao nosso estudo prévio de (III-5), podemos entender melhor as soluções $\theta(\tau)$ e $\psi(\tau)$ para valores arbitrários de α , notando algumas propriedades de simetria existentes nas soluções do sistema (III-5). De fato, sejam $\theta(\tau)$ e $\psi(\tau)$ soluções de (III-5) satisfazendo a condição $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \psi_0$ quando $\tau = 0$. Trocando $\tau \rightarrow -\tau$, $\psi(\tau) \rightarrow -\psi(-\tau)$ e $\theta(\tau) \rightarrow \pi - \theta(-\tau)$ em (III-5) verificamos que para uma solução $\theta_1(\tau)$ e $\psi_1(\tau)$ existe uma outra

$$\theta_2(\tau) = \pi - \theta_1(-\tau) \quad \text{e} \quad \psi_2(\tau) = -\psi_1(-\tau) \quad . \quad (\text{III-12})$$

Quando $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_1 = \psi_0$ em $\tau = 0$ temos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_2 = -\psi_0$. No caso de $\psi_0 = 0$ teremos naturalmente $\theta_1 = \theta_2$ e $\psi_1 = \psi_2$ para qualquer α , o que mostra que esta solução particular possui a simetria

$$\theta(\tau) = \pi - \theta(-\tau) \quad \text{e} \quad \psi(\tau) = -\psi(-\tau) \quad . \quad (\text{III-13})$$

De modo inteiramente análogo verifica-se que se, $\theta(\tau)$ e $\psi(\tau)$ são soluções, então $\theta(\tau)$ e $\psi(\tau) + \pi$ também o são. Isto efetivamente significa inverter o sinal de r_x e r_y . Devido a esta simetria contida nas equações (III-5) vamos restringir nosso intervalo de observação de ψ_0 a um comprimento igual a π .

Escolhemos este intervalo entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para melhor ilustrar a simetria (III-12).

Nosso próximo passo na busca das soluções de (III-5) é notar que o valor 1 para a constante α constitui um limite divisório

de dois tipos de soluções: $\alpha > 1$ e $\alpha < 1$ (isto é um fato novo que não ocorre no caso $\Delta m = \pm 1$ ⁽⁴⁾).

De fato, quando $\alpha < 1$ temos sempre $\frac{d\psi}{d\tau} > 0$, de modo que a função $\psi(\tau)$ é sempre crescente e portanto ilimitada. Quando $\alpha > 1$ é melhor analisarmos o comportamento de $\psi(\tau)$ na região assintótica de (III-5), ou seja, quando $\tau \rightarrow \pm\infty$ onde $\cos\theta \rightarrow \pm 1$. Para efeito de análise vamos tomar $\frac{d\psi}{d\tau} = (1 \pm \alpha \sin 2\psi)$ que possui a solução constante $\sin 2\psi' = \mp \frac{1}{\alpha}$.

Definindo $\psi_\infty = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\alpha}$, com $0 < \psi_\infty < \frac{\pi}{2}$, nós temos

$$a) \psi' = \psi_\infty + n\pi, \quad b) \psi' = \frac{2n+1}{2}\pi - \psi_\infty, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

$$c) \psi' = +n\pi - \psi_\infty, \quad d) \psi' = \frac{2n+1}{2}\pi + \psi_\infty, \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

(III-14)

Estes valores de ψ' determinam como as curvas $\psi(\tau)$ devem se comportar em $\pm\infty$. Podemos prever neste limite ($\tau \rightarrow \pm\infty$) o comportamento de $\psi(\tau)$ com $\psi(0)$ restrito ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Para tanto, vamos supor que $\theta = \varepsilon$ para $\tau \rightarrow -\infty$, $\theta = \pi - \varepsilon$ para $\tau \rightarrow \infty$, $0 < \varepsilon \ll 1$; e $\psi = \psi' + \mu$ com $|\mu| \ll 1$, $\sin 2\psi' = \mp \frac{1}{\alpha}$ para $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Substituindo estas equações em (III-5) nós obtemos através de aproximações imediatas que

$$\varepsilon = A \exp \{-2\alpha |\tau| \sin^2 \psi'\}, \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (III-15)$$

e

$$\mu = B \exp \{-2\alpha |\tau| \cos 2\psi'\}, \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (III-16)$$

onde A e B são constantes que dependem da solução considerada. A equação (III-15) será utilizada mais tarde na análise do comporta-

mento da taxa de emissão. De (III-16) fica evidente que a) e c) em (III-14) são estáveis ($\cos(2\psi') > 0$) enquanto que b) e d) são instáveis ($\cos(2\psi') < 0$).

Deste modo podemos dizer que quando $\tau \rightarrow \infty$ o limite $\psi = \psi_\infty$ significa uma linha de estabilidade de soluções para ψ , enquanto que de instabilidade para $\frac{\pi}{2} - \psi_\infty$. A fase ψ_0 é importante pois determinará para um dado $\alpha > 1$ se a solução ψ transporá ou não $\frac{\pi}{2} - \psi_\infty$. De modo semelhante, quando $\tau \rightarrow -\infty$, ψ_∞ é uma linha de estabilidade de enquanto que $-\tau + \psi_\infty$ de instabilidade.

A figura (2) ilustra o comportamento previsto de $\psi(\tau)$, na região assintótica.

Para efeito de comparação com nossas previsões anteriores, ilustramos com as figuras (3) e (4) respectivamente o comportamento de $\psi(\tau)$ nos dois tipos de soluções $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$, obtidas através do cálculo numérico computacional, utilizando a condição inicial $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\psi(0) = \psi_0$ e $-\frac{\pi}{2} < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Figura (2): Gráfico mostrando o comportamento assintótico esperado de $\psi(\tau)$ para $\alpha > 1$, com ψ_0 restrito ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nos limitamos a desenhar as curvas de estabilidade $\pm\psi_\infty$ e $\pm\pi \pm \psi_\infty$ e de instabilidade $\pm\pi/2 \mp \psi_\infty$ quando $\tau \rightarrow \pm\infty$. As previsões de $\psi(\tau)$ fora da região assintótica não foram realizadas, pois nesta região $\psi(\tau)$ não possui solução analítica conhecida.

Figura (3): Gráficos de $\psi(\tau)$ para $\alpha = 0.5$. Os valores diferentes de ψ_0 ; $0, \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm3\pi/4$ e $\pm\pi$ são dados pelas intersecções com o eixo vertical.

Figura (4): Gráficos de $\psi(\tau)$ para $\alpha = 1.5$. Os valores de ψ_0 ; de $-\pi/2$ a $\pi/2$ são dados pelas intersecções com o eixo vertical. Também são mostradas as soluções assintóticas estável ($\psi_\infty = 0,365\text{rd}$) e instável ($\pi/2 - \psi_\infty = 1,206\text{rd}$).

Para finalizar nossa discussão sobre a função $\psi(\tau)$, fazemos uma analogia estreita entre esta e a solução de um oscilador harmônico amortecido. Esta motivação advém do fato de que para $\alpha > 1$, o campo e o dipolo elétrico (respectivamente proporcionais a $\sin\psi$ e $\cos\psi$) não oscilam no limite $\tau \rightarrow \pm\infty$, como no caso $\alpha < 1$.

Para $\alpha < 1$, temos uma espécie de oscilador fracamente amortecido, que perde uma pequena quantidade de energia por ciclo (pequena variação em sua amplitude de oscilação) obrigando-o a muitas oscilações antes de praticamente parar.

Para $\alpha > 1$, $\psi(\tau)$ comporta-se como um oscilador superamortecido, onde não chega a haver um ciclo; situação em que a amplitude do oscilador varia significativamente sem mudar o sinal.

Como parte final deste capítulo, segue um estudo da taxa de emissão de energia. A taxa de emissão fornece a taxa de conversão de energia dos átomos (meio material) para o campo (onda eletromagnética).

Do balanço de energia do plano (figura (1)) e de (III-1) e (III-2) podemos escrever que a taxa de emissão é:

$$2|\vec{S}| = \frac{c}{2\pi} E_z^2 = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma r_z \right) \quad (\text{III-17})$$

(onde $\vec{S}$ é o valor do vetor de Poynting calculado em cada lado do plano), cujo valor é

$$- \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma \frac{dr_z}{dt} = \alpha \hbar \omega_0^2 \sigma \sin^2\theta \sin^2\psi \quad (\text{III-18})$$

De (III-18) é fácil ver que a emissão de energia depende criticamente das condições iniciais de ψ_0 .

Por exemplo, se $\psi(0) = 0$ nós temos $\vec{S}(0) = 0$, enquanto que se $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$, $2\vec{S}(0)$ adquire o valor máximo $\hbar\omega_0^2\alpha\sigma$. É de se esperar então que no primeiro caso a curva de emissão apresente dois picos

simetricamente localizados em relação a origem, enquanto no segundo caso apareça um único pico, bastante intenso em $\tau = 0$.

Para valores de α menores que 1 o decaimento de energia o corre de modo oscilante. Isto era de se esperar devido ao comportamento também oscilante do campo elétrico (figuras (5) e (8)). Como já visto a partir de (III-11), quanto menor o valor de α , mais lento é o decaimento, tornando-se irrelevante o valor da fase. Quando α aumenta muito (maior que a unidade) ocorre o contrário no sentido de que a taxa de emissão passa a depender criticamente do valor de ψ_0 . Assim, variando a fase ψ_0 de 0 a $\frac{\pi}{2}$ quando $\alpha > 1$ notamos a existência de picos simétricos em relação a origem. À medida em que nos aproximamos de $\frac{\pi}{2}$ os dois picos tendem a um único, como pode ser comprovado através das figuras (6) e (7).

Observa-se ainda que a amplitude dos picos cresce, conforme nos aproximamos de $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ (figura (5)) forçando a emissão ocorrer em tempo mais curto que antes. A dependência da taxa de emissão com o valor de α é diferente do caso $\alpha < 1$, pois passa a crescer relativamente menos em amplitude (figura (7)).

A partir da análise da taxa de emissão para $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$ é fácil inferir uma diferença na solução $\theta(\tau)$ e $\psi(\tau)$, como de fato já foi verificado nos dois casos.

Finalizando, é oportuno observar que o decaimento de radiação para grandes valores de tempo apresenta diferenças conforme $\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$.

Quando $\alpha \ll 1$, a perda de energia aumenta com α como pode ser visto em (III-17), (III-18) e (III-11).

Acontece o contrário quando $\alpha > 1$, pois o expoente em (III-15) $\alpha \sin^2 \psi' = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})/2$ decresce com α (figura (6)).

Este efeito pode também ser observado na transição $\Delta m = \pm 1$ ⁽⁴⁾.

Desenhamos através de cálculos computacionais, as figuras (5), (6) e (7) como exemplos de taxa de emissão para diferentes valores de α e ψ_0 . O comportamento do campo e do dipolo elétrico está ilustrado nas figuras (8) e (9) para os dois casos de decaimento: oscilante ($\alpha < 1$) e não oscilante ($\alpha > 1$).

Figura (5): Taxas de emissão para $\alpha = 0.1$; $\psi_0 = \pi/2$ (linha cheia) e $\psi_0 = 0$ (linha tracejada). A envoltória destas curvas é dado aproximadamente por $\alpha \sec h^2(\alpha\tau)$.

Figura (6): Taxas de emissão para $\alpha = 1,5$ ($\psi_0 = \pi/2$, $\pm\pi/4$) e $\alpha = 2$ ($\psi_0 = \pi/2$). As linhas são cheias ($\psi_0 = \pi/2$), tracejadas ($\psi_0 = \pi/4$) ou pontilhadas ($\psi_0 = -\pi/4$).

Figura (7): Taxas de emissão para $\psi_0 = 0$ e $\alpha = 1, 1.5, 2.5, 4$ e 7.5 (na mesma ordem de altura dos picos).

Figura (8): Gráficos de $\alpha \sin \theta \sin \psi$ (proporcional a E_z) para $\psi_0 = 0$ ($\alpha = 0.5, 1$ e 1.5 ; linhas tracejadas) e $\psi_0 = \pi/2$ ($\alpha = 0.5, 1$ e 1.5 ; linhas cheias). Os valores de α estão na mesma ordem da altura dos picos).

Figura (9): Gráficos de $r = \sin \theta \cos \psi$ (proporcional ao dipolo elétrico para $\psi_0 = 0$, $\alpha = 0,5$ (tracejado), $\alpha = 1$ (pontilhado), $\alpha = 0,5$ (cheia); e $\psi_0 = \pi/2$, $\alpha = 0,5$ e $1,5$ (linhas cheias) que passam pela origem).

CAPÍTULO IV

ESTUDO DA INTERAÇÃO PARA CAMPOS FRACOS
 DE UM SISTEMA DE DOIS PLANOS PARALELOS, IGUAIS E
 "INFINITAMENTE SEPARADOS", PARA O DECAIMENTO $\Delta m = 1$

A partir do conhecimento da solução do problema da emissão espontânea de um plano para campos fracos, na transição $\Delta m=1$, nos foi possível fazer uma generalização um pouco mais ampla e estudar o problema mais complicado da interação de um plano com um pulso incidente pré-estabelecido (tipo secante hiperbólica).

Isto nos possibilitou simular o efeito da emissão simultânea de dois planos "infinitamente separados". Ou seja, estamos entendendo por "infinitamente separados" a situação em que os dois planos estão tão afastados um do outro que a emissão de um deles a caba (ou praticamente acaba, visto ter ela uma cauda do tipo exponencial) antes que o pulso emitido comece a interagir com o outro plano.

Para precisar melhor o que estamos dizendo, consideremos um plano como o da figura (10), sujeito a um campo incidente $\vec{E}_I$. Este campo incidente é absorvido pelo plano (campo $\vec{E}(t)$) que emite em seguida, dando origem a dois outros campos: um refletido $\vec{E}_R$ e um transmitido $\vec{E}_t$.

O campo refletido $\vec{E}_R$ ("campo de volta") será considerado como incidente para o outro plano (na figura está localizado infinitamente a esquerda do plano desenhado). Deste modo, sucessivamente, os processos de emissão e absorção vão sendo repetidos embora com correspondentes decréscimos nas intensidades dos campos envolvidos.

Figura (10): Em $z = 0$ localiza-se um plano infinito de átomos que recebe o campo incidente $\vec{E}_i$, reflete o campo $\vec{E}_r$ e transmite o campo $\vec{E}_t$. Infinitamente afastado na direção do lado esquerdo encontra-se outro plano.

É nosso mister - a partir deste entendimento qualitativo prévio que estabelece como "funciona" a interação entre os dois planos - encontrar uma lei de formação para as equações da matéria e do campo que traduza quantitativamente as sucessivas etapas de emissão e excitação contidas nos planos "infinitamente separados".

Com este fim, estudaremos um plano em que todos os seus átomos encontram-se no estado fundamental e estão sujeitos a um campo incidente conhecido (figura (10)). No entanto, antes disso, necessitamos conhecer melhor os resultados da emissão espontânea de um plano na transição $\Delta m=1$. Resolvemos adotar a transição $\Delta m=1$ ao invés de $\Delta m=0$ devido a maior simplicidade existente nas suas equações, o que nos permite como uma das consequências importantes, integrá-las exatamente. Deste modo, aproveitamos a oportunidade para deduzí-las no caso mais geral, como ilustração, e somente no final obter os resultados para campos fracos que serão utilizados neste capítulo.

Finalmente, para maior clareza na apresentação deste capítulo, achamos melhor separar sua descrição em duas partes, como seguem.

4.1 DEDUÇÃO ABREVIADA (*) DA

EMIÇÃO ESPONTÂNEA PARA O DECAIMENTO $\Delta m = 1$

As equações (II-20), (II-40) e (II-16) podem ser reduzidas, sem dificuldade, a um sistema diferencial não linear de cinco incógnitas: r_x , r_y , r_z , E_x e E_y . Este sistema descreve a emissão espontânea de um plano de átomos de dois níveis, quando $\Delta m = 1$.

Para resolvê-lo, comecemos eliminando os campos E_x e E_y das equações do sistema para obter, através de simples substituições, que:

$$\frac{dr_x}{dt} = \left(\frac{-r_y + \alpha r_x r_z}{1 + \alpha^2 r_z^2} \right) \omega_0 \quad (\text{IV-1})$$

e

$$\frac{dr_y}{dt} = \left(\frac{r_x + \alpha r_y r_z}{1 + \alpha^2 r_z^2} \right) \omega_0 \quad (\text{IV-2})$$

onde $\alpha = 2\pi\sigma K/c$ (constante adimensional) e $K = 2p/\hbar$, como definimos em (III-2).

Podemos agora escrever (IV-1) e (IV-2) numa forma mais compacta definindo $r^+ = r_x + ir_y$:

$$\frac{dr^+}{dt} = \omega_0 \left(\frac{i + \alpha r_z}{1 + \alpha^2 r_z^2} \right) r^+ \quad (\text{IV-3})$$

(*) Mais detalhes podem ser encontrados na referência(4).

Sabemos através de (II-13) que $r^2 = 1$, o que nos permite escrever r^+ e r_z em coordenadas esféricas, como segue:

$$r^+ = \text{sen}\theta e^{i\varphi}, \quad r_z = \cos\theta. \quad (\text{IV-4})$$

Substituindo, (IV-4) em (IV-3) e igualando as partes reais e imaginárias correspondentes dos dois membros, chegamos a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha \omega_0 \text{sen}\theta}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{IV-5})$$

e

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta}, \quad (\text{IV-6})$$

que traduzem o comportamento temporal da função de onda dos átomos durante o processo de emissão.

De maneira semelhante a utilizada para obter (IV-5) e (IV-6) (eliminando agora $\frac{dr_x}{dt}$ e $\frac{dr_y}{dt}$) podemos obter o campo elétrico

$$E^+ = \frac{\alpha \omega_0}{K} \left(\frac{-ir^+}{1 + i\alpha r_z} \right), \quad (\text{IV-7})$$

onde definimos $E^+ = E_x + iE_y$.

O módulo de $\vec{E}$ ($|\vec{E}|$) é, a partir de (IV-7) e (IV-4), igual a:

$$|\vec{E}| = \frac{\alpha \omega_0}{K} \frac{\text{sen}\theta}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{IV-8})$$

Para encontrar o valor de $|\vec{E}|$ explicitamente em função do tempo vamos integrar (IV-5) e (IV-6).

Note que (IV-5) e (IV-6) podem ser reduzidas a

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d\theta}{dt} = \alpha \frac{d\varphi}{dt} , \quad (\text{IV-9})$$

cuja integral nos fornece:

$$\ln \left(\operatorname{tg} h \frac{\theta}{2} \right) = \alpha \varphi + c . \quad (\text{IV-10})$$

Escolhendo a origem do ângulo azimutal ψ sobre o equador da esfera $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtemos $c = 0$. Logo (IV-10) fica

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{\alpha \varphi} \quad (\text{IV-11})$$

donde

$$\sin\theta = \sec h (\alpha \varphi) , \quad \cos\theta = -\operatorname{tg} h (\alpha \varphi) . \quad (\text{IV-12})$$

As equações (IV-12) representam a trajetória seguida pela extremidade do vetor $\vec{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$ sobre a esfera de raio unitário, sendo que a primeira nos dá o comportamento do módulo da polarização e a segunda a lei de decaimento da energia (Ver rodapés das páginas 10 e 11 no capítulo II, juntamente com (IV-4)). Esta trajetória tem a forma de uma espiral com eixo $\hat{z}$, com φ variando entre $-\infty$ e ∞ , enquanto θ varia de 0 a π .

Para finalizar, analisemos rapidamente (IV-5) e (IV-6) e consequentemente (IV-8) e (IV-12) quando $\alpha \ll 1$ (campo fraco). Neste caso podemos desprezar o termo α^2 que aparece no denominador em (IV-6) e obter

$$\varphi = \omega_0 t \quad . \quad (IV-13)$$

O valor de (IV-4) quando vale (IV-13), passa a ser

$$r^+ = \sec h (\alpha \omega_0 t) e^{i\omega_0 t} \quad , \quad r_z = -\operatorname{tg} h (\alpha \omega_0 t) \quad , \quad (IV-14)$$

e o valor de E^+ pode ser escrito a partir de (IV-7) e (IV-8) como

$$E^+ = \begin{cases} \frac{\alpha \omega_0}{K} \sec h \left[\alpha \omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] e^{i \left[\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\pi}{2} \right]} & z > 0 \\ \frac{\alpha \omega_0}{K} \sec h \left[\alpha \omega_0 \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] e^{i \left[\omega_0 \left(t + \frac{z}{c} \right) - \frac{\pi}{2} \right]} & z < 0 \end{cases} \quad (IV-15)$$

que corresponde a emissão simétrica de dois pulsos circularmente polarizados, onde a amplitude varia muito mais lentamente do que a fase ($\alpha \ll 1$).

4.2 ESTUDO DA INTERAÇÃO PARA CAMPOS FRACOS DE 2 PLANOS

"INFINITAMENTE AFASTADOS" NA TRANSIÇÃO $\Delta m = 1$

Nesta seção estamos interessados em estudar a situação em que $\alpha \ll 1$ (campo fraco), que nos permite encontrar com o auxílio das equações (II-16), (II-20), (II-38) e da figura (10) o resultado que se segue:

$$\frac{dr^+}{dt} = i \omega_0 r^+ + \frac{i \alpha c E_I^+(t) r_z}{2 \pi p \sigma} + \alpha r_z \omega_0 r^+ \quad (IV-16)$$

$$\text{com } r^+ = r_x + i r_y \quad \text{e} \quad E_I^+ = E_{Ix} + i E_{Iy} \quad .$$

A equação (IV-16) coincide com (IV-3) (no caso $\alpha \ll 1$) quando $E_I^+ = 0$, o que naturalmente era de se esperar.

Procurando escrever (IV-16) numa forma mais conveniente, vamos seguir um procedimento análogo ao desenvolvido na seção 4.1 deste capítulo, fazendo a substituição:

$$r^+ = \text{sen}\theta_1 e^{i\omega_0 t} \quad , \quad r_- = \cos\theta_1 \quad (\text{IV-17})$$

e

$$E_I^+(t) = \varepsilon(t) e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{IV-18})$$

onde o índice 1 designa a 1ª incidência (o plano está sendo excitado pela 1ª vez pelo campo $\vec{E}_I$ após ter emitido toda sua energia inicial) e $\varepsilon(t)$ é a amplitude do campo emitido espontaneamente por um plano excitado. O valor de $\varepsilon(t)$ é encontrado a partir da solução da equação (IV-5), que é dada por (IV-15) quando $\alpha \ll 1$, e vale:

$$\varepsilon = \frac{\alpha\omega_0}{K} \text{sen}\theta_0 = \frac{\alpha\omega_0}{K} \sec h(\alpha\omega_0 t) = \frac{1}{K} \frac{d\theta_0}{dt} \quad (\text{IV-19})$$

De (IV-17) e (IV-18) obtemos para (IV-16):

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha\omega_0 \text{sen}\theta_1 - K\varepsilon \quad , \quad (\text{IV-20})$$

que com o auxílio de (IV-19) fica:

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = \text{sen}\theta_1 - \text{sen}\theta_0 = \text{sen}\theta_1 - \frac{d\theta_0}{d\xi} \quad , \quad (\text{IV-21})$$

onde introduzimos a variável adimensional $\xi = \alpha\omega_0 t$.

A equação (IV-21) expressa o resultado conjunto da excitação (θ_0) e da emissão (θ_1). Dela é possível prever o comportamento da curva $\text{sen}\theta_1$ em função de ξ , quando da condição inicial

$\theta_1 \approx \pi$ em $t \rightarrow -\infty$. Como pode ser visto a partir de (IV-21), o valor de $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ está limitado pela diferença das funções $\text{sen}\theta_1$ e $\text{sen}\theta_0$.

No início ($\theta_0 \approx 0$, $\theta_1 \approx \pi$ quando $t \rightarrow -\infty$), o valor da função $\text{sen}\theta_1$ é menor do que o da função $\text{sen}\theta_0$, pois como θ_1 começa a proximadamente em π (valor máximo), ele só pode diminuir com o tempo, obrigando $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ ficar negativo. Devido a este fato a curva do $\text{sen}\theta_1$ começa por baixo da curva do $\text{sen}\theta_0$. Entretanto, na medida em que θ_0 e θ_1 vão se aproximando de $\frac{\pi}{2}$ este comportamento vai se modificando ao ponto da curva $\text{sen}\theta_1$ alcançar $\text{sen}\theta_0$. Isto certamente ocorre após a origem (na origem $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), quando a função $\text{sen}\theta_1$ atinge o seu máximo valor (no cruzamento das curvas $\frac{d\theta_1}{d\xi} = 0$). Em seguida, $\text{sen}\theta_1$ começa a decrescer (já atingiu o máximo) até a região assintótica ($t \rightarrow +\infty$). Estas previsões - fruto da limitação da função seno e do sinal de $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ - serão confirmadas ainda neste capítulo.

Transformemos agora os campos incidente, refletido, transmitido e local para as variáveis angulares θ_0 e θ_1 definidas em (IV-17) e (IV-19).

O campo incidente é encontrado facilmente a partir de (IV-18) e (IV-19) fornecendo

$$E_I^+(t) = \frac{\alpha\omega_0}{K} \text{sen}\theta_0 e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} = \frac{\alpha\omega_0}{K} \text{sec h}(\alpha\omega_0 t) e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})}. \quad (\text{IV-22})$$

A partir de (II-38), (II-16), (IV-17) e (IV-22) nos é possível encontrar o campo no plano

$$E^+(t) = \frac{\alpha\omega_0}{K} (\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta_1) e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{IV-23})$$

e concluir de (II-33) (como tinha de ser pela condição de contorno) que o campo transmitido

$$E_t^+ = E^+ \quad (\text{IV-24})$$

Este resultado obviamente faz com que a taxa de emissão (definida em (III-17)) dependa somente do quadrado do campo transmitido que se obtém de (IV-23) e (IV-24).

De (IV-23), (IV-24), (II-33) e (II-38), é possível encontrar o campo refletido:

$$E_R^+ = \frac{-\alpha\omega_0}{K} \sin\theta_1 e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{IV-25})$$

Conforme era de se esperar, o campo transmitido e refletido dependem de θ_1 (estado do plano), enquanto que o incidente depende somente de θ_0 (isto é proveniente de (IV-18)).

Agora, antes de estudar o que acontece no outro plano, convém fazer o balanço de energia do plano que estamos considerando.

De (III-17) e da figura (10) vemos que o fluxo do vetor de Poynting $\vec{S}$ calculado em cada lado do plano (próximo a este), deve ser igual a variação temporal da energia do plano. Deste modo, a taxa de emissão fica:

$$\frac{C}{4\pi} [E_t^2 + E_R^2 - E_I^2] = \hbar\omega_0^2\alpha(\sin^2\theta_1 - \sin\theta_0 \sin\theta_1) \quad (\text{IV-26})$$

que coincide com a derivada da energia do plano. Isto confirma o evidente: uma parte da energia incidente é refletida e a outra parte é transmitida.

Nesta altura, é nos possível calcular os coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T) do plano, na 1ª incidência (1ª reflexão e 1ª transmissão), como abaixo definimos:

$$R = \frac{\text{Energia total refletida}}{\text{Energia total incidente}} = \frac{\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_R^2 dt}{\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_I^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta_1 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta_0 dt} \quad (\text{IV-27})$$

onde usamos (IV-22) , (IV-25) e

$$T = \frac{\text{Energia total transmitida}}{\text{Energia total incidente}} = \frac{\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_t^2 dt}{\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_I^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\sin \theta_1 - \sin \theta_0)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta_0 dt} \quad (\text{IV-28})$$

onde usamos (IV-23) e novamente (IV-22)

Lembrando que o cálculo das integrais (IV-27) e (IV-28) não pode ser feito analiticamente, passemos ao cálculo dos novos coeficientes de reflexão e transmissão, assim como as "equações de movimento" do segundo plano. Para isto não devemos esquecer que o campo refletido $\vec{E}_R$, em módulo, passa agora a ser incidente.

Assim, de modo completamente análogo ao que fizemos para obter (IV-21), encontramos:

$$\frac{d\theta_2}{d\xi} = \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \quad (\text{IV-29})$$

onde constatamos, de imediato, que a equação do segundo plano (θ_2) está vinculada à do primeiro (θ_1).

Isto é óbvio, de acordo com o processo de emissão - absorção sucessiva de energia pelos planos, que estamos empregando.

Vejamos agora como ficam os campos incidente, refletido e transmitido respectivamente no 2º plano em função dos parâmetros angulares θ_1 e θ_2 :

$$E_I^{+(')}(t) = E_R^+ = \frac{-\alpha\omega_0}{K} \sin \theta_1 e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad , \quad (\text{IV-30})$$

$$E_R^{+''}(t) = \frac{-\alpha\omega_0}{K} \sin\theta_2 e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{IV-31})$$

e

$$E_t^{+''}(t) = E^{+''}(t) = \frac{\alpha\omega_0}{K} (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{IV-32})$$

onde conservamos a mesma notação para os campos, com o apóstrofe (') designando os campos do segundo plano.

De imediato, é fácil deduzir através de (IV-30), (IV-31), (IV-32) e (III-17) que a conservação da energia deste plano (balanço entre energia absorvida e emitida) é verificada. Isto é um método que nos ajuda a aferir os cálculos realizados. Dando prosseguimento, se repetirmos passo a passo o processo acima (incidências, reflexões e transmissões mútuas) será válido generalizar os resultados (IV-27), (IV-28) e (IV-29).

Feito isto, as equações do plano ficam:

$$\frac{d\theta_n}{d\xi} = \sin\theta_n - \sin\theta_{n-1} \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-33})$$

onde $\underline{n}$ designa o número de incidências (ou reflexões ou transmissões) ocorridas sobre o plano, tendo como valores iniciais (1ª incidência) de E_I^+ , E_R^+ e E^+ respectivamente as equações (IV-22), (IV-23) e (IV-24).

Da mesma maneira que obtivemos (IV-33), os coeficientes de reflexão e transmissão são encontrados:

$$R^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\theta_n dt / \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\theta_{n-1} dt \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-35})$$

e

$$T^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sen}\theta_{n-1} - \text{sen}\theta_n)^2 dt / \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2\theta_{n-1} dt \text{ para } n=1,2,3\dots$$

(IV-35)

Conseguidas as generalizações desejadas, vamos agora fi xar nossa atenção principalmente na equação (IV-21) para comprovar melhor alguns dos resultados previstos anteriormente para o comportamento das curvas $\text{sen}\theta$ em função de ξ , assim como verifi car analiticamente outros. Neste caminho podemos dizer que a ener gia refletida é necessariamente menor ou igual à refletida na vez anterior, ou seja, é possível demonstrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2\theta_n d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2\theta_{n-1} d\xi \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-36})$$

De fato, multiplicando-se (IV-33) membro a membro por $\text{sen}\theta_n$, integrando-a entre $-\infty +\infty$ e lembrando a Desigualdade de Schwarz, que nos permite escrever que

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\theta_n \text{sen}\theta_{n-1} d\xi \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2\theta_n d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2\theta_{n-1} d\xi, \quad (\text{IV-37})$$

é possível concluir a validade da desigualdade (IV-36).

A exemplo de (IV-36) podemos afirmar: as áreas A_n sob as curvas $\text{sen}\theta_n$, são necessariamente iguais a π , onde definimos

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\theta_n d\xi \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-38})$$

Para demonstrar (IV-38) integramos (IV-33) em ξ entre $-\infty$ e ∞ , para concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\theta_n d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\theta_{n-1} d\xi \quad \text{"} \quad (\text{IV-39})$$

e como esta igualdade vale inclusive para $n = 1$, é fácil concluir a validade de (IV-38), levando-se em conta que $\operatorname{sen} \theta_0 = \sec h \xi$ (Veja (IV-19)).

Ainda de (IV-33) calculemos os valores assintóticos de θ_n quando $\xi \rightarrow -\infty$. Nesta região, podemos afirmar que

$$\operatorname{sen} \theta_1 \approx \theta_1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta_0 = \sec h \xi = \frac{2}{e^\xi + e^{-\xi}} \approx 2e^\xi, \quad (\text{IV-40})$$

donde (IV-21) fica

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} + \theta_1 = 2e^\xi, \quad (\text{IV-41})$$

cuja solução, com a condição inicial $\theta_1 = 0$ para $\xi = -\infty$, é

$$\theta_1 \approx e^\xi \quad (\text{IV-42})$$

De modo análogo

$$\theta_2 \approx e^{\xi/2} \quad (\text{IV-43})$$

e assim sucessivamente escrevemos que

$$\theta_n \approx e^{\xi} 2^{-(n-1)} \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \xi \rightarrow -\infty \quad (\text{IV-44})$$

De maneira semelhante obtemos os valores assintóticos de (IV-33) quando $\xi \rightarrow \infty$. Assim

$$\operatorname{sen} \theta_1 \approx \theta_1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta_0 = \sec h \xi \approx 2e^{-\xi}, \quad (\text{IV-45})$$

donde (IV-21) fica

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = + \theta_1 = 2e^{-\xi} \quad , \quad (\text{IV-46})$$

cuja solução é

$$\theta_1 = C^{(1)} e^{-\xi} + 2\xi e^{-\xi} = 2\xi e^{-\xi} \quad , \quad (\text{IV-47})$$

onde $C^{(1)}$ é uma constante.

De modo análogo

$$\theta_2 = C^{(2)} e^{-\xi} + \xi^2 e^{-\xi} = \xi^2 e^{-\xi} \quad , \quad (\text{IV-48})$$

onde $C^{(2)}$ é uma constante e assim sucessivamente escrevemos que

$$\theta_n = C^{(n)} e^{-\xi} + \frac{2\xi^n e^{-\xi}}{n} = \frac{2\xi^n e^{-\xi}}{n} \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-49})$$

onde $C^{(n)}$ é uma constante.

Os resultados (IV-44) e (IV-49) além de comprovarem o que previmos na página 43 sobre o comportamento assintótico das curvas $\text{sen}\theta_n$, permitem-nos impor as condições iniciais utilizadas na solução de (IV-33) quando da resolução numérica computacional.

Finalmente, com base na condição inicial $\theta_0 \rightarrow 0$ em $\xi \rightarrow -\infty$ e (IV-44), resolvemos através do computador a equação (IV-33) e desenhemos as curvas de $\text{sen}\theta_n$, $\text{sen}^2\theta_n$ (reflexão) e $(\text{sen}\theta_n - \text{sen}\theta_{n-1})^2$ (proporcional a taxa de emissão), que podem ser respectivamente analisadas observando as figuras (11), (12) e (13). A figura (13) contém os valores de (IV-27) e (IV-28), calculados na 1ª incidência.

Referindo-se ainda à figura (13), não podemos deixar de observar um fato curioso: o aparecimento de dois picos de emissão. O plano de átomos da figura (10) não emite toda sua energia num só intervalo de tempo, como antes (1 plano), mas sim em dois in-

tervalos. O primeiro, é quando o pulso incidente atinge o plano e o segundo, só começa a aparecer após o desaparecimento completo do primeiro. É como se o plano armazenasse parte de sua energia durante algum tempo, só a emitindo (emissão "retardada") após a total emissão da primeira parte.

Figura (11): Curvas do $\text{sen } \Phi_{n'}$, em função de ξ , para $n' = 0, 1, 2, 3$ e 4 , obtidas a partir de (IV-19) e (IV-33) observadas as condições $\theta_0 \rightarrow 0^n$ em $\xi \rightarrow -\infty$ e (IV-44), no caso de dois planos iguais, paralelos e "infinitamente se parados". As áreas sob as curvas são iguais e valem π , o que confirma nossa proposição da página 47.

Figura (12): Curvas do $\text{sen}^2 \theta_n'$, em função de ξ obtidas a partir de (IV-19) e (IV-33) com $n' = 0, 1, 2, 3$ e 4, no caso de dois planos paralelos, iguais e "infinitamente separados". Foram observadas as condições iniciais dadas por $\theta_0 \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow -\infty$ e (IV-44). As curvas acima são proporcionais às reflexões dos planos.

Figura (13): Curvas do $(\text{sen } \theta_n - \text{sen } \theta_{n-1})^2$ em função de ξ obtidas através de (IV-19) e (IV-33) com $n=1, 2, 3$ e 4 , no caso de dois planos paralelos, iguais e "infinitamente separados". Utilizamos as condições iniciais dadas por $\theta_0 \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow -\infty$ e (IV-44). As curvas acima são proporcionais às taxas de emissão dos planos. Obtivemos ainda, através de (IV-34) e (IV-35) respectivamente os valores dos coeficientes de reflexão R e transmissão T para $n=1$: $R = 0,796268$ e $T = 0,203732$.

CAPÍTULO V

ESTUDO DA EMISSÃO ESPONTÂNEA PARA UM SISTEMA
DE 2 PLANOS PARALELOS NA TRANSIÇÃO $\Delta m = 1$

Interessa-nos abordar, neste capítulo, o problema da emissão espontânea de energia no caso em que o emissor possui uma espessura não desprezível.

No entanto, devido à complexidade dos cálculos matemáticos envolvidos, faremos uma abordagem mais simples a partir do conhecimento da solução do problema de um plano. Trata-se do estudo da emissão espontânea, no vácuo, de dois planos paralelos, separados pela distância finita $2d$ (que simula a espessura do emissor), como pode ser visto na figura (14), onde $\vec{E}_1(t)$ e $\vec{E}_2(t)$ são respectivamente os campos externos emergentes dos planos 1 e 2, $\vec{E}_e$ é o campo interno caminhante para a esquerda e $\vec{E}_c$ é o campo interno caminhante para a direita.

No capítulo anterior, tratamos o problema de dois planos só que numa situação bastante particular: a separação entre eles era tal que nos permitia desprezar totalmente os efeitos de retardo devido à propagação interna. Aqui, pelo contrário, vamos conviver com a presença destes efeitos nas equações o que não deixa de ser um fato novo, para nós, até então não estudado. Neste estudo, resolvemos manter ainda a transição $\Delta m = 1$ devido ao mesmo argumento anterior: maior simplicidade das equações utilizadas.

Figura (14): Interação de dois planos materiais (1 e 2) localizados respectivamente em $z = -d$ e $z = d$. Estão indicados os campos emergentes $\vec{E}_1(t)$ e $\vec{E}_2(t)$, os campos internos, caminhante para a direita $\vec{E}_d$ e caminhante para a esquerda $\vec{E}_e$.

Como primeiro passo, desejamos obter as equações do campo e da matéria. Para isto, iniciemos pela equação (II-38) que se escreve agora como

$$\vec{E}_e(-d, t) - \vec{E}_1(t) = \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_1(-d, t) \rangle \quad (V-1)$$

e

$$\vec{E}_d(d, t) - \vec{E}_2(t) = \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_2(d, t) \rangle \quad , \quad (V-2)$$

para os planos 1 e 2, respectivamente, com $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ representando os momentos de dipolo correspondentes.

Da condição de continuidade do campo em $z = -d$ e $z = d$:

$$\vec{E}_d(-d, t) + \vec{E}_e(-d, t) = \vec{E}_1(t) \text{ e } \vec{E}_d(d, t) + \vec{E}_e(d, t) = \vec{E}_2(t) \quad , \quad (V-3)$$

em dada condição de propagação do campo no vácuo:

$$\vec{E}_d(d,t) = \vec{E}_d(-d,t-\tau) \text{ e } E_e(-d,t) = \vec{E}_e(d,t-\tau) \quad , \quad (V-4)$$

é nos possível concluir que

$$\vec{E}_d(d,t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_1(-d,t-\tau) \rangle \quad (V-5)$$

e

$$\vec{E}_e(-d,t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_2(d,t-\tau) \rangle \quad (V-6)$$

onde definimos $\tau = \frac{2d}{c}$ (*) como sendo o "tempo de retardo" ou seja, o tempo gasto pela onda eletromagnética caminhar de um plano ao outro.

Eliminando os campos $\vec{E}_d$ e $\vec{E}_e$ em (V-1) e (V-2) através de (V-5) e (V-6) obtemos que

$$\vec{E}_1(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_1(-d,t) + \vec{p}_2(d,t-\tau) \rangle \quad (V-7)$$

e

$$\vec{E}_2(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_2(d,t) + \vec{p}_1(-d,t-\tau) \rangle \quad . \quad (V-8)$$

Para maior simplificação dos cálculos que (V-7) e (V-8) envolvem, vamos lançar mão das substituições:

(*) Observe que esta definição de τ não corresponde, necessariamente, àquela dada anteriormente na página 20 do capítulo III.

$$r_1^+ = r_{x_1} + i r_{y_1}, \quad r_2^+ = r_{x_2} + i r_{y_2} \quad (V-9)$$

e

$$E_1^+ = E_{x_1} + i E_{y_1}, \quad E_2^+ = E_{x_2} + i E_{y_2} \quad (V-10)$$

para obter

$$E_1^+(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} [p_1 r_1^+(t) + p_2 r_2^+(t-\tau)] \quad (V-11)$$

e

$$E_2^+(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} [p_2 r_2^+(t) + p_1 r_1^+(t-\tau)] \quad (V-12)$$

Vemos aparecer agora, explicitamente, o retardo no momento de dipolo. É sem dúvida o efeito da emissão num instante anterior devido, obviamente, a presença do outro plano (Confere com (II-40) quando $\tau = 0$).

Por razão semelhante à mencionada em (IV-2), utilizamos a transformação angular

$$r_1^+ = \text{sen}\theta_1 e^{i\varphi_1}, \quad r_{z_1} = \cos\theta_1 \quad (V-13)$$

e

$$r_2^+ = \text{sen}\theta_2 e^{i\varphi_2}, \quad r_{z_2} = \cos\theta_2 \quad (V-14)$$

para escrever (V-11) e (V-12) na forma

$$E_1^+(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} [p_1 \text{sen}\theta_1 e^{i\varphi_1} + p_2 \text{sen}\theta_{2R} e^{i\varphi_{2R}}] \quad (V-15)$$

e

$$E_2^+(t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} [p_2 \sin\theta_2 e^{i\psi_2} + p_1 \sin\theta_{1R} e^{i\psi_{1R}}] , \quad (V-16)$$

que são as equações do campo, onde o índice R significa "retardado", isto é, a função correspondente é calculada no tempo $t-\tau$.

Encontradas as equações do campo, procuremos pelas equações da matéria. Faremos isto através das equações (II-20) e (V-9) até (V-16) igualando correspondentemente as partes reais e imaginárias. Assim, após cálculos algébricos simples, porém extensos, chegamos a partir da igualdade das partes reais de (V-11) e (V-12) a

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha \sin\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \alpha [\cos\theta_{2R} \frac{d\theta_{2R}}{dt} \sin(\psi_{2R}-\psi_1) + \sin\theta_{2R} \frac{d\psi_{2R}}{dt} \cos(\psi_{2R}-\psi_1)] \quad (V-17)$$

e

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \alpha \sin\theta_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \alpha [\cos\theta_{1R} \frac{d\theta_{1R}}{dt} \sin(\psi_{1R}-\psi_2) + \sin\theta_{1R} \frac{d\psi_{1R}}{dt} \cos(\psi_{1R}-\psi_2)] \quad (V-18)$$

e, das partes imaginárias, a

$$\begin{aligned} \sin\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 \sin\theta_1 - \alpha \cos^2\theta_1 \frac{d\theta_1}{dt} - \alpha \cos\theta_1 [\cos\theta_{2R} \frac{d\theta_{2R}}{dt} \cos(\psi_{2R}-\psi_1) - \\ - \sin\theta_{2R} \frac{d\psi_{2R}}{dt} \sin(\psi_{2R}-\psi_1)] \quad (V-19) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin\theta_2 \frac{d\psi_2}{dt} = \omega_0 \sin\theta_2 - \alpha \cos^2\theta_2 \frac{d\theta_2}{dt} - \alpha \cos\theta_2 [\cos\theta_{1R} \frac{d\theta_{1R}}{dt} \cos(\psi_{1R}-\psi_2) - \\ - \sin\theta_{1R} \frac{d\psi_{1R}}{dt} \sin(\psi_{1R}-\psi_2)] \quad (V-20) \end{aligned}$$

onde α , como antes, vale $\frac{2\pi p\sigma}{c} K$, onde $K = \frac{2p}{\hbar}$.

O sistema de equações constituído por (V-17), (V-18), (V-19) e (V-20) governa o meio material e, juntamente com (V-15) e (V-16), descreve a interação entre o campo e a matéria, no caso de dois planos paralelos, no vácuo, de densidade σ cada um.

Se desprezarmos o retardo, o sistema de equações (V-17), (V-18), (V-19) e (V-20) se reduz ao sistema de 1 plano de densidade dupla (Ver (IV-5) e (IV-6)), o que mostra coerência dos resultados.

Nesta altura, é oportuno aplicar a lei da conservação da energia, para o problema dos dois planos, em termos das variáveis até então empregadas.

Das equações de Maxwell (II-25) é possível deduzir que (Ver referência 8)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0 \quad , \quad (V-21)$$

onde $\vec{S}$ é o vetor de Poynting e U a energia eletromagnética definidos como

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad , \quad U = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad . \quad (V-22)$$

Lembrando agora as equações (II-23) e (II-20) é fácil mostrar que

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{n\hbar\omega_0}{2} \frac{\partial r_z}{\partial t} \quad , \quad (V-23)$$

donde (V-21) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{n\hbar\omega_0}{2} r_z \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad . \quad (V-24)$$

No caso mais específico dos dois planos da figura (14) em que $n(z) = \sigma \delta(z)$ a equação (V-24) é transformada em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-d}^d [\vec{E}_d^2(z,t) + \vec{E}_e^2(z,t)] dz + \hbar \omega_0 \sigma r_z \right\} = -2 \left\{ \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2) \right\}, \quad (V-25)$$

que expressa a lei da conservação da energia, estabelecendo que o fluxo do vetor $\vec{S}$, em cada plano, tem origem na variação temporal da energia interna e da energia dos planos (energia do meio material), o que é intuitivamente convincente.

Retornando novamente a (V-17), (V-18), (V-19) e (V-20) é fácil notar a presença do retardo nas equações, o que torna o método de solução numérico muito complicado. Por outro lado, uma solução matematicamente exata é ainda mais difícil. No entanto, isto não compromete irremediavelmente a busca de soluções para o problema como parece à primeira vista, pois já estamos fazendo uso de um modelo que é aproximado. Assim, faz sentido buscar uma solução aproximada do problema e analisar sua validade em cada caso. Deste modo, para prosseguir na busca da solução do problema de dois planos abordado neste capítulo, apelaremos a situações mais particulares. Por exemplo, a situação em que os planos apresentam completa simetria (estão nas mesmas condições iniciais) e ou quando o campo é fraco ($\alpha \ll 1$). A segunda situação, permite-nos tratar a interação dipolo - campo elétrico como uma perturbação, quando comparada com a energia de ligação atômica. Passemos a estudar de agora em diante, esta situação.

5.1 APROXIMAÇÃO PARA CAMPOS FRACOS

No limite, em que $\alpha \ll 1$, podemos simplificar o sistema composto pelas equações (V-17), (V-18), (V-19) e (V-20) com o auxílio de aproximações. Assim, comecemos por (V-19) e (V-20), admitin

do que possuam como solução as funções

$$\psi_1(t) = \omega_0 t + \psi_1(\alpha, t) \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \omega_0 t + \psi_2(\alpha, t) \quad , \quad (\text{V-26})$$

onde $\psi_1(\alpha, t)$ e $\psi_2(\alpha, t)$ são funções de α e de t satisfazendo a condição: $\psi_{1R} \sim \psi_1$ e $\psi_{2R} \sim \psi_2$ (i.e: variam lentamente durante o intervalo de tempo igual a τ). Devemos acrescentar ainda que devido a $\alpha \ll 1$ desprezamos o retardo da função θ . Isto equivale a considerar, no caso, que a distância entre os planos é pequena comparada com a largura do pulso emitido por um único plano. Com isto, substituindo (V-26) em (V-19) e (V-20) e considerando somente os termos que dependem de α até ordem 1 (são lineares em α) obtemos:

$$\text{sen}\theta_1 \frac{d\psi_1}{d\xi} = \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \text{sen}(\Delta\psi - \omega_0\tau) \quad , \quad (\text{V-27})$$

$$\text{sen}\theta_2 \frac{d\psi_2}{d\xi} = - \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \text{sen}(\Delta\psi + \omega_0\tau) \quad , \quad (\text{V-28})$$

onde adotamos a variável adimensional $\xi = \alpha\omega_0 t$ e chamamos de $\Delta\psi = \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \psi_2 - \psi_1$, a diferença de fase entre os dipolos dos dois planos.

As equações (V-27) e (V-28) podem ser reduzidas a uma única equação que fornece a variação temporal da diferença de fase $\Delta\psi$, isto é:

$$\frac{d\Delta\psi}{d\xi} = - [\text{sen}\theta_1 \cotg\theta_2 \text{sen}(\Delta\psi + \omega_0\tau) + \text{sen}\theta_2 \cotg\theta_1 \text{sen}(\Delta\psi - \omega_0\tau)] \quad . \quad (\text{V-29})$$

Procedendo de modo análogo ao que fizemos para obter (V-27) e (V-28), as equações (V-17) e (V-18) podem ser escritas, na forma aproximada, como:

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = \text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 \cos(\Delta\psi - \omega_0\tau) \quad , \quad (\text{V-30})$$

e

$$\frac{d\theta_2}{d\xi} = \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \cos(\Delta\psi + \omega_0\tau) \quad . \quad (\text{V-31})$$

O tratamento que desenvolvemos até esse ponto permitiu-nos reduzir o sistema de equações (V-10), (V-11), (V-12) e (V-13) ao sistema de equações (V-29), (V-30) e (V-31), que descrevem o meio material. Continuando nesta mesma linha, reduzimos as equações do campo (V-15) e (V-16), com auxílio de (V-26), a

$$E_1^+(t) = \frac{-2\pi p\sigma}{c} \frac{d}{dt} [\text{sen}\theta_1 e^{i\psi_1} + \text{sen}\theta_2 e^{i(\psi_2 - \omega_0\tau)}] \quad (\text{V-32})$$

e

$$E_2^+(t) = \frac{-2\pi p\sigma}{c} \frac{d}{dt} [\text{sen}\theta_2 e^{i\psi_2} + \text{sen}\theta_1 e^{i(\psi_1 - \omega_0\tau)}] \quad , \quad (\text{V-33})$$

onde consideramos $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ (o momento de dipolo dos dois planos possuem o mesmo módulo).

Como uma forma de esclarecimento da natureza das aproximações introduzidas até aqui, que nos possibilitaram obter as equações (V-29), (V-30), (V-31), (V-32) e (V-33), vamos fazer o cálculo da energia do sistema (2 planos), conforme estabelece a equação (V-25). Para isto começamos calculando o valor de $|\vec{E}_1(t)|^2$ a partir de (V-29), (V-30), (V-31) e (V-32). Após cálculos algébricos e expansões até ordem 1 em α , obtemos:

$$|E_1(t)|^2 = \frac{\pi\sigma\omega_0^2\hbar\alpha}{c} [\text{sen}^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_2 + 2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\cos(\Delta\psi - \omega_0\tau)] \quad (\text{V-34})$$

e de maneira análoga calculamos $|\vec{E}_2(t)|^2$. Logo

$$-2 \left\{ \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2) \right\} = -\sigma\omega_0^2 \hbar \alpha [\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\omega_0\tau\cos\Delta\psi]. \quad (V-35)$$

O termo que envolve a variação temporal da energia do plano (*) pode ser calculado e vale

$$\alpha\hbar\omega_0^2 \frac{d}{dt} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) = -\alpha\hbar\sigma\omega_0^2 \{\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\Delta\psi\cos\omega_0\tau\}. \quad (V-36)$$

A equação (V-36) coincide com (V-35), o que nos permite considerar desprezível - na ordem de aproximação em que estamos trabalhando - a contribuição da energia entre os planos. Com isto, (V-36) passa a ser a taxa de emissão, que é sempre negativa ou nula, conforme tem de ser devido às condições adotadas. A taxa de emissão, como pode ser visto, passa a depender de $\Delta\psi$ (fase entre os dipolos dos dois planos), de τ (que é proporcional à distância entre os planos) e dos co-senos de θ_1 e θ_2 (energia de cada plano), o que não ocorria anteriormente, no caso de 1 plano, o que constitui complexidade maior, conforme demonstra (III-17) e (IV-7).

Se quisermos observar a contribuição da energia entre os planos, é necessário fazer um cálculo mais preciso desta, onde escolhemos uma situação particular que possui simetria. Antes disto, porém, vamos manter ainda nossa atenção voltada para as equações (V-29), (V-30) e (V-31), pois elas nos fornecerão um resultado interessante quando valer a simetria

$$|\vec{E}_1(t)| = |\vec{E}_2(t)| = |\vec{E}(t)| \text{ e } |\vec{p}_1(-d,t)| = |\vec{p}_2(d,t)| = |\vec{p}(t)|, \quad (V-37)$$

(*) Não podemos dizer, por enquanto, que este termo corresponde à taxa de emissão do sistema, pois para isto ser verdade, precisamos demonstrar que a energia entre os planos não contribui para a equação (V-25).

o que equivale a fazer $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ e $\Delta\psi = 0$, ou seja, os dois planos são completamente simétricos (encontram-se nas mesmas condições iniciais). Assim, de (V-29), (V-30) e (V-31) escrevemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha' \omega_0 \sin \theta \quad , \quad (V-38)$$

com

$$\alpha' = 2\alpha \cos^2 \frac{\omega_0 \tau}{2} \quad , \quad (V-39)$$

onde estamos esquecendo os índices 1 e 2 devido a simetria (V-37). A equação (V-38) coincide com a equação do problema de 1 plano (ver (IV-5), $\alpha \ll 1$), quando trocamos α' por α . A solução já é conhecida:

$$\sin \theta = \sec h (\alpha' \omega_0 t) \quad \text{e} \quad \cos \theta = -\operatorname{tg} h (\alpha' \omega_0 t) \quad . \quad (V-40)$$

No entanto, não podemos deixar de observar uma diferença substancial entre (V-40) e o resultado para um plano, pois aqui o tempo de retardo τ aparece como que "embutido" em (V-39) levando as soluções (V-40) à dependência da função co-seno ao quadrado, que pode ser visto na figura (15) onde $z = d$ é uma variável e λ_0 é o comprimento de onda da radiação emitida.

Figura (15): Gráfico do quadrado do co-seno (Eq. (V-39)) mostrando os pontos $z = \pm \lambda_0/4, \pm 2\lambda_0/4, \pm 3\lambda_0/4, \dots$ em que a função se anula e os planos não emitem (V-42). A variável z indica a distância do plano à origem e λ_0 é o comprimento de onda da radiação emitida.

A função (V-39) se anula quando

$$z_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi c}{\omega_0} \quad \text{com } n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{V-41})$$

ou quando

$$z_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{com } n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Podemos afirmar, portanto, que na medida em que vamos variando a distância entre os planos, vamos encontrando pontos z_n em que cessa a emissão de energia. Para melhor ver isto, basta calcular a taxa de emissão (V-36) quando vale a simetria (V-37):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hbar \omega_0 \sigma r_z) = -\alpha \hbar \sigma \omega_0^2 \sec^2 h (\alpha' \omega_0 t) \quad (\text{V-42})$$

(Na verdade, nos pontos z_n a emissão não deve cessar completamente como estamos observando, se, pelo contrário, levarmos em conta os termos que desprezamos. No entanto, mesmo assim, deve diminuir bastante.)

O fato de existirem distâncias entre os planos em que não ocorre emissão de energia, chamou-nos a atenção. Vemos nisto, uma analogia bastante estreita com o fenômeno da interferência destrutiva que ocorre entre duas ondas. Os pontos z_n são exatamente as posições em que há o cancelamento entre os campos internos dos dois planos (Número ímpar de $\frac{\lambda_0}{2}$ como pode ser visto de (V-42)).

Vamos voltar novamente ao cálculo mais refinado do termo em (V-25) (até 2ª ordem em α , uma vez que não há contribuição em 1ª) que nos fornece a energia entre os planos.

Para isto vamos fazer uma expansão em θ até 2ª ordem em α . No entanto, isto só nos será possível se considerarmos o caso simétrico (V-37), o que nos permite desacoplar (e portanto viabilizar os cálculos) θ de ψ no sistema (V-17), (V-18), (V-19) e (V-20). Com isto ($\Delta\psi=0$), é possível expressar $(\frac{d\psi}{dt})$ em função de θ e posteriormente integrar.

Assim, (V-27) ou (V-28) se reduzem a

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 (1 - \alpha \cos\theta \sin\omega_0 \tau) \quad . \quad (V-43)$$

Integrando (V-43) podemos calcular^(*) $(\psi_R - \psi)$ que aparece em (V-17) ou (V-18), até ordem 1 em α :

$$\psi_R - \psi = \int_t^{t-\tau} d\psi = -\omega_0 \tau - \alpha \omega_0 \sin(\omega_0 \tau) \int_t^{t-\tau} \cos\theta dt \quad , \quad (V-44)$$

(*) Observe que embora estejamos fazendo $d\psi_R/dt \approx d\psi/dt$ por (V-26) e (V-27), não podemos necessariamente afirmar que $\psi_R \approx \psi$.

cuja integral será calculada considerando a hipótese do $\cos\theta$ não variar significativamente^(*) no intervalo de integração (i.e: durante o tempo de retardo τ). Logo:

$$\psi_R - \psi \cong \omega_0 \tau [\alpha \sin(\omega_0 \tau) \cos\theta - 1] \quad (V-45)$$

Esta equação (V-45) será utilizada em breve no cálculo de $\frac{d\theta}{dt}$ até 2ª ordem em α , que se obtém considerando (V-37) e esquecendo os índices 1 e 2 em (V-17) e (V-18):

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha [\sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\theta \sin(\omega_0 \tau) \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta_R \cos(\psi_R - \psi) \frac{d\psi_R}{dt}] \quad (V-46)$$

(Note que estamos confundindo $\frac{d\theta_R}{dt}$ com $\frac{d\theta}{dt}$, mas não θ_R com θ)

De acordo com as aproximações consideradas ($\psi_R \cong \psi, \frac{d\theta_R}{dt} \cong \frac{d\theta}{dt}$) é possível mostrar - com o auxílio de (V-45) e de cálculos e expansões algébricas simples, porém trabalhosos, do $\sin\theta_R$ e $\cos(\psi_R - \psi)$ - que

$$\begin{aligned} \sin\theta_R \cos(\psi_R - \psi) \frac{d\psi_R}{dt} &\cong \sin\theta \cos(\omega_0 \tau) \frac{d\psi}{dt} + \sin\theta \sin^2(\omega_0 \tau) \omega_0^2 \tau \alpha \cdot \cos\theta \\ &\quad - \cos\theta \cos(\omega_0 \tau) \frac{d\theta}{dt} (\omega_0 \tau) \end{aligned} \quad (V-47)$$

e escrever (V-46), até 2ª ordem em α , como:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 \sin\theta \left\{ 2\alpha \cos^2 \frac{\omega_0 \tau}{2} + \alpha^2 \cos\theta \left[-2\cos^2 \frac{\omega_0 \tau}{2} (2\sin\omega_0 \tau + \omega_0 \tau \cos\omega_0 \tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega_0 \tau \sin^2 \omega_0 \tau \right] \right\} \end{aligned} \quad (V-48)$$

(*) Esta hipótese já foi usada antes (Ver (V-26)).

Nesta altura, com o auxílio de (V-43), (V-45) e (V-48) estamos em condições de calcular $|\vec{E}(t)|^2$ a partir de (V-15) e (V-37). Após cálculos algébricos bastante extensos, é nos possível afirmar que:

$$-2\left\{\frac{\hbar}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} E^2(t)\right\} = -2\hbar\omega_0^2\sigma\cos^2\frac{\omega_0\tau}{2}\sin^2\theta\alpha\{1-2\alpha\cos\theta(\sin\omega_0\tau+\omega_0\tau\cos\omega_0\tau)\} \quad (V-49)$$

O termo que em (V-25) nos fornece a variação temporal da energia do plano pode ser calculado utilizando (V-48):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\hbar\omega_0\sigma\cos\theta) = & -\hbar\omega_0^2\sigma\sin^2\theta\alpha\left\{2\cos^2\frac{\omega_0\tau}{2}+\alpha\left\{\cos\theta\left[-2\sin\omega_0\tau\cos^2\frac{\omega_0\tau}{2}+\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.+\omega_0\tau\sin^2\omega_0\tau-2\cos^2\frac{\omega_0\tau}{2}(\sin\omega_0\tau+\omega_0\tau\cos\omega_0\tau)\right]\right\}\right\} . \end{aligned} \quad (V-50)$$

Para completar o balanço de energia que a equação (V-25) requer, precisamos calcular a energia contida entre os planos. Neste sentido, calculemos primeiramente os campos $\vec{E}_d(z,t)$ e $\vec{E}_e(z,t)$ que aparecem em (V-1) e (V-2), levando em conta (V-37). Das condições de continuidade da componente tangencial (Ver equação (V-3)) e da propagação no vácuo (Ver equação (V-4)) do campo eletromagnético é possível afirmar que

$$\vec{E}_d(z,t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} < \vec{p}(-d, t - \frac{\tau}{2} - \frac{z}{c}) > \quad (V-51)$$

e

$$\vec{E}_e(z,t) = \frac{-2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} < \vec{p}(d, t - \frac{\tau}{2} + \frac{z}{c}) > . \quad (V-52)$$

Auxiliando-se em (II-16) e na definição

$$r^+ = r_x + ir_y = \sin\theta e^{i\varphi} , \quad (V-53)$$

obtemos que:

$$\langle \vec{p}(t) \rangle = p \sin\theta e^{i\psi} , \quad (V-54)$$

donde, de (V-25), (V-53) e (V-54):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-d}^d [\vec{E}_d^2(z,t) + \vec{E}_e^2(z,t)] dz = \frac{\pi\sigma^2}{c^2} \{ \int_{-d}^d [\left| \frac{d}{dt} \langle \vec{p}(-d, t - \frac{\tau}{2} - \frac{z}{c}) \rangle \right|^2 + \\ + \left| \frac{d}{dt} \langle \vec{p}(d, t - \frac{\tau}{2} + \frac{z}{c}) \rangle \right|^2] dz \} . \quad (V-55) \end{aligned}$$

Integrando o 2º membro de (V-55) e considerando termos até 1ª ordem em α , concluímos que o valor da energia interna é:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-d}^d [\vec{E}_d^2(z,t) + \vec{E}_e^2(z,t)] dz = \frac{\hbar\omega_0^2\sigma\alpha\tau}{2} \sin^2\theta , \quad (V-56)$$

cujas variações temporais são

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^d [\vec{E}_d^2(z,t) + \vec{E}_e^2(z,t)] dz = \alpha^2 \sigma \hbar \omega_0^3 \cos^2 \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin\theta \sin 2\theta \quad (V-57)$$

que possui dependência de 2ª ordem em α .

Já verificamos a importância relativa em ordem zero e 1ª em α de cada termo de (V-25). Podemos fazer o mesmo em 2ª ordem observando que a soma de (V-50) com (V-57) fornece um resultado que coincide com o de (V-49).

É oportuno observar que (V-50) não é a taxa de emissão dos planos, pois o termo dado por (V-57) (2ª ordem em α) não é nulo.

Reservamos para o próximo capítulo, os comentários finais deste trabalho de tese, assim como a solução numérica através de cálculos computacionais das equações que consideramos pertinentes (e que nos foi possível resolver).

CAPÍTULO VI

BREVE ANÁLISE NUMÉRICA DO CAPÍTULO V,
QUANDO A INTERAÇÃO CAMPO-MATÉRIA É FRACA

Para compreender melhor alguns dos resultados obtidos no capítulo anterior e considerando a impossibilidade de encontrar soluções analíticas exatas, decidimos resolver numericamente, através de computador^(*), o sistema constituído pelas equações (V-29), (V-30) e (V-31) (Equações da matéria e do campo para 2 planos, no vácuo, quando $\alpha \ll 1$). Isto foi feito para algumas situações de interesse imediato. É o caso da análise das influências da diferença de fase $\Delta\psi$, da separação entre os planos e de suas energias iniciais no comportamento da taxa de emissão, do decaimento de energia, etc.

Começamos por analisar inicialmente o sistema (V-29), (V-30) e (V-31) quando vale a simetria $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ (os dois planos estão nas mesmas condições iniciais em θ) e os dois planos estão superpostos (i.e. $\tau=0$). Nestas circunstâncias (V-29), (V-30) e (V-31) se transformam em:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \text{sen}\theta(1+\cos\Delta\psi) , \quad (\text{VI-1})$$

$$\frac{d\Delta\psi}{d\xi} = -2\cos\theta\text{sen}\Delta\psi \quad (\text{VI-2})$$

ou ainda, eliminando ξ e fazendo transformações trigonométricas elementares chegamos a

* O método utilizado foi o de Runge-Kutta (4ª ordem⁽⁹⁾) através dos computadores Vax - Digital pertencentes ao IFQSC - USP.

$$\frac{d\theta}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{2} \cotg\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) d\Delta\psi \quad . \quad (\text{VI-3})$$

Integrando (VI-3), obtemos que

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) = c \quad , \quad (\text{VI-4})$$

que é uma equação de "vínculo" entre θ e $\Delta\psi$, onde c , $-1 \leq c \leq 1$, é uma constante. Um fato interessante a se observar, que advém de (VI-4), é o comportamento de $\Delta\psi$ na região de emissão ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$), quando o valor de θ inicial é próximo de zero. Nesta circunstância, o valor da constante c (por VI-4) é também próximo de zero. Entretanto, conforme o tempo passa, a função $\operatorname{sen}\theta$ vai aumentando em valor até atingir o máximo (quando $\theta = \frac{\pi}{2}$). Obrigatoriamente, o inverso ocorre com a função $\operatorname{sen}\frac{\Delta\psi}{2}$, de modo que na região de máxima emissão em que θ é próximo de $\frac{\pi}{2}$, a função $\operatorname{sen}\frac{\Delta\psi}{2}$ atinge o seu valor mínimo, ou seja, $\Delta\psi$ torna-se nula. É o que pode ser constatado, por exemplo, através das figuras 16 e 17. A dependência temporal de θ , pode ser encontrada substituindo (VI-4) em (VI-1):

$$\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{d\xi} = 2\operatorname{sen}^2\theta - 2c^2 \quad . \quad (\text{VI-5})$$

Integrando (VI-5) e impondo a condição $\theta = \frac{\pi}{2}$ quando $\xi=0$, obtemos

$$\cos\theta = -\sqrt{1-c^2} \operatorname{tg} h(2\sqrt{1-c^2} \xi) \quad (\text{VI-6})$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = [c^2 + (1-c^2) \sec^2 h(2\sqrt{1-c^2} \xi)]^{1/2} \quad (\text{VI-7})$$

Vemos que (VI-6) e (VI-7) se reduzem a (IV-12), com densidade dupla, quando $c=0$, como era de se esperar. É oportuno lembrar de

(VI-4) que $c=0$ também quando $\theta=0$, $\theta=\pi$ e/ou $\Delta\psi=0$, $\Delta\psi=2\pi$; valores estes iniciais.

De (V-36) podemos calcular a taxa de emissão quando $\theta_1=\theta_2=\theta$ e $\tau=0$, que nos fornece

$$+2\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 \frac{d}{dt} (\cos\theta) = -2\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 \sin^2\theta (1+\cos\Delta\psi) = -4\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 \sin^2\theta \cos^2\frac{\Delta\psi}{2}. \quad (\text{VI-8})$$

Usando (VI-4) e (VI-7) em (VI-8) esta se transforma em

$$-2\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 \frac{d}{dt} (\cos\theta) = -4\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 (\sin^2\theta - c^2) = -4\alpha\sigma\hbar\omega_0^2 (1-c^2) \sec^2\theta \sqrt{1-c^2} \xi. \quad (\text{VI-9})$$

De (VI-9) podemos ainda analisar a figura 16 que mostra a influência de $\Delta\psi$ e θ iniciais, na taxa de emissão.

É fácil observar através da figura 16 (ou equações (VI-4) e (VI-9)) que se θ inicial é nulo ($c=0$) $\Delta\psi$ não influencia na taxa de emissão. O mesmo não pode ser dito quando θ inicial é, por exemplo, $\frac{\pi}{4}$ donde $\Delta\psi$ passa a ser relevante. O primeiro resultado (irrelevância de $\Delta\psi$ inicial quando θ inicial é próximo de zero) é muito importante, pois convalida resultados utilizados anteriormente, como é o caso de Munguia e da Costa⁽⁴⁾, em que todo o estudo da emissão de um plano foi feito supondo sempre $\Delta\psi=0$.

Na figura 17 podemos ver com mais detalhes o comportamento de $\Delta\psi$ quando θ inicial é nulo, refletindo o resultado de (VI-4). Note que na região de emissão (ver taxa de emissão (VI-9) e figura (16)), $\Delta\psi$ é numericamente nula.

Figura (16): Curvas proporcionais à taxa de emissão de energia (VI-9) mostrando a influência dos valores iniciais de $\Delta\psi$ e θ , na condição em que os planos coincidem ($\tau = 0$) e são simétricos em relação a θ . A curva 1 mostra que o valor de $\Delta\psi$ inicial, não altera a curva de emissão quando θ inicial é nulo, pois as curvas coincidem para quaisquer valores iniciais de $\Delta\psi$. As curvas 2, 3, 4, 5 e 6 foram desenhadas para o valor $\frac{\pi}{4}$ de θ inicial com valores iniciais de $+\Delta\psi$ respectivamente iguais a π , $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ e 0.

Figura (17): Curvas de $\Delta\psi$ em função de ξ , obtidas numericamente a partir de (VI-1) e (VI-2), na condição em que θ inicial é nulo e os dois planos coincidem ($\tau=0$). As curvas mostram os valores iniciais de $\Delta\psi$: curva a, $\Delta\psi=\pi$; curva b, $\Delta\psi=\pi/4$ e curva c, $\Delta\psi=\pi/2$. O caso $\Delta\psi=0$ coincide com o eixo dos ξ pois por (VI-2), $\Delta\psi$ não oscila (é sempre nulo). Das curvas pode ser observado o resultado (VI-4), assim como o fato de $\Delta\psi$ não trazer alteração importante ao processo de emissão (compare com a figura (16)).

Na figura 18 podemos observar a influência da separação dos planos na variação de energia de cada um deles, a partir de cálculos numéricos utilizando (V-30) e (V-31). Observe que agora θ_1 não coincide com θ_2 , necessariamente.

Figura 18 - Curvas de $\cos \theta$ em função de ξ , obtidas numericamente a partir de (V-30) e (V-31) para dois planos 1 e 2, mostrando a influência de τ (separação dos planos) na energia de cada plano. A curva 1 mostra novamente a irrelevância de $\Delta\psi$ inicial, com $\cos \theta_1$ coincidindo com $\cos \theta_2$ para quaisquer valores de $\Delta\psi$ inicial, quando $\tau = 0$ (planos coincidentes). As curvas 2 e 3 mostram respectivamente $\cos \theta_2$ e $\cos \theta_1$ quando $\tau = \Delta\psi = \pi$ (planos separados), situação em que a variação de energia de cada plano é oscilante.

É possível observar que quando $\tau = 0$ (planos superpostos), $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ (possuem simetria perfeita em relação a energia durante todo o tempo) e nestas condições, o valor de $\Delta\psi$ inicial não é

importante, novamente. Já havíamos observado coisa parecida antes, nas figuras (16) e (17).

Quando $\tau \neq 0$ (planos estão separados) há uma espécie de atraso no começo da emissão de energia. É como se demorasse mais para iniciar o "disparo" do processo de emissão, além de que este possui comportamento diferente do usual, pois é oscilante.

Para comparação e maior riqueza em detalhes, traçamos na figura 19 o gráfico da taxa de emissão, quando os planos estão juntos ($\tau=0$) e separados ($\tau \neq 0$).

Figura 19 - Taxa de emissão de dois planos quando coincidentes ($\tau=0$), curva 1 e separados ($\tau=\frac{\pi}{2}$), curva 2. Note que para $\tau \neq 0$ aparece o pico duplo de emissão.

Vê-se claramente o aparecimento de 2 picos de emissão (emissão dupla) quando $\tau \neq 0$, evidenciando que esta é oscilante (o que não ocorria antes quando $\tau = 0$), além de atrasar o início da emissão.

Na figura 20 está traçado o gráfico da taxa de emissão de cada plano, mostrando com maior clareza a emissão isolada, o que nos permite visualizar melhor a emissão dupla.

Um estudo talvez interessante de se fazer a partir das figuras (18) e (19) é a análise mais detalhada da influência da separação dos planos no aparecimento da emissão dupla.

Uma outra situação interessante que também estudamos foi o da taxa de emissão para dois planos superpostos quando um possui energia inicial muito diferente da do outro. É o caso, por exemplo, de um deles estar praticamente no estado excitado ($\theta \sim 0$), e o outro no fundamental ($\theta \sim \pi$). Aquele que possui maior energia perde para o outro de menor energia que a recebe, fazendo com que a emissão para fora dos planos seja muito pequena. Este processo predomina por muito tempo (sucessivas emissões e absorções de energia) até que as energias finais fiquem próximas, quando a emissão passa a ser parecida com aquela de um único plano com densidade dupla.

Figura 20 - Taxa de emissão de cada plano (1 e 2) ilustrando o aparecimento da emissão dupla (figura 19), na situação em que a separação τ entre eles coincide com $\Delta\psi$ inicial e vale $\frac{\pi}{2}$, para θ inicial praticamente nulo

Para finalizar, queremos registrar que iniciamos o estudo da influência da distância entre os dois planos em função da diferença de fase $\Delta\psi$ entre seus dipolos. No entanto, achamos por bem não fazer constar nesta tese, uma vez que julgamos não ser essencial aos seus propósitos, além de que não encontramos nenhuma conclusão que pudesse ser interessante. Como foi dito na introdução e no interior dos capítulos, nossa intenção, nesta tese, era tão somente conseguir equacionar o problema da interação dos dois planos

usando a aproximação semiclássica, sem contudo nos preocuparmos tanto com a busca de soluções. Exceto quando a solução foi possível e imediata, como fizemos no caso de acoplamento fraco ($\alpha \ll 1$) entre o campo e a matéria. Podemos antecipar que o sistema (V-17), (V-18), (V-19), (V-20) e (V-15), (V-16), pode ser numericamente resolvido mesmo considerando a presença do retardo nas equações. Para isto ser feito, podemos guardar na memória do computador uma função do tipo secante hiperbólica ao quadrado (solução da emissão de um plano excitado), por exemplo, que servirá a todo instante para o programa do computador como condição de contorno^(*). Entendemos, porém, que embora o procedimento acima seja viável, é extremamente trabalhoso e foge aos objetivos imediatos desta tese. Deixamos esta idéia como sugestão de continuidade futura do nosso trabalho.

Posto isto, podemos concluir a partir dos resultados alcançados nesta tese que pudemos dar uma contribuição nova no estudo da transição $\Delta m = 0$ (capítulo III), também no caso limite em que os planos estão "infinitamente separados" (capítulo IV) e finalmente no equacionamento e solução parcial do problema da interação de dois planos paralelos, no vácuo, aplicando a aproximação semiclássica da radiação (capítulos V e VI).

Neste último caso, que simula efeitos de dimensão volumétrica do emissor, pudemos demonstrar (como prevíamos), que o problema da emissão e propagação de energia não é simples e por ora não é possível ser resolvido no caso mais geral devido basicamente à presença do retardo nas equações (diferenciais parciais não lineares a várias variáveis), de solução analítica impossível.

(*) Devido ao retardo nas equações, o passo do programa exige para dar prosseguimento, a cada instante, valores anteriores.

REFERÊNCIAS

1. R.C.T. da Costa: Tese de Livre-Docência, USP-São Carlos (1978).
2. R.H. Dicke: Physical Rev. 93, 99 (1954). Outros tratamentos mais recentes podem ser encontrados em:
J.H. Eberly e N.E. Rehler: Phys.Rev. A, 2, 1607 (1970)
R.K. Nesbet: Phys.Rev. L e H, 27, 553 (1971)
I.R. Senitzky: Phys. Rev. A, 6, 1175 (1972)
J.A. Ackerhalt, P.L. Knight e J. H. Eberly: Phys. Rev. L e H, 30, 456 (1973).
3. R.C.T. da Costa: Curso de Introdução à Ótica Não-Linear (IV Simpósio Brasileiro de Física Teórica, PUC, R.J.), (1972).
4. R.C.T. da Costa & G.A.P. Munguia: Physical Rev. A, 14, 5 (1976).
5. R.C.T. da Costa & S.Crestana: Revista Brasileira de Física 8 nº2 (1978).
6. R.P. Feynman, F.L. Vernon e R.W. Hellwarth: J. Appl. Physics 28, 49 (1957).
7. V.Merzbacher: Quantum Mechanics, John Wiley & Sons (2ª edição).
8. G.A.P. Munguia: Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, R.J. (1973).
9. V. Moderna Introdução às Equações Diferenciais - Richard Bronson - McGraw - Hill do Brasil - Coleção Schaum.