TRANSIÇÃO POLARÔNICA DE ELÉTRONS
NA SUPERFÍCIE DE HÉLIO LÍQUIDO

Marcos Henrique Degani

Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de mestre em Física Básica.

Orientador:

Prof. Dr. Oscar Hipólito

USP / IFQC / 831

[Redacted]

8-2-83

OK

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos
1 9 8 3

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

Marcos Henrique Degani

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 13 DE dezembro DE 1983.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Oscar Hipólito - Orientador

Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas

Dr. Cylon E.T. Gonçalves da Silva

INDICE

CAPÍTULO		PÁGINA
	LISTA DAS FIGURAS.....	i
	RESUMO.....	ii
	ABSTRACT.....	iii
	AGRADECIMENTOS.....	iv
I	INTRODUÇÃO.....	1
II	PROPRIEDADES GERAIS DOS ELÉTRONS NA SUPERFÍCIE DE HÉLIO LÍQUIDO.....	5
III	MECANISMOS DE ESPALHAMENTO NO MOVIMENTO PARALELO À SUPERFÍCIE.....	19
IV	O MÉTODO VARIACIONAL.....	30
V	APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL.....	37
VI	DEPRESSÕES COM MUITOS ELÉTRONS NA SUPERFÍCIE DE HÉLIO LÍQUIDO.....	69
VII	CONCLUSÕES.....	117
APÊNDICE	QUANTIZAÇÃO DAS ONDAS DE CAPILARIDADE-GRAVIDADE.....	121
	REFERÊNCIAS.....	126

LISTA DAS FIGURAS

FIGURA		PÁGINA
1	potencial de interação elétron- átomo de hélio....	6
2	derivada da absorção.....	12
3	transições dos primeiros estados excitados.....	12
4	esquema do aparato experimental.....	13
5	esquema para filmes de hélio adsorvidos em um subs- trato.....	16
6	mobilidade dos elétrons na superfície de hélio....	20
7 (a)	barreira de potencial para íons positivos.....	40
(b)	barreira de potencial para íons negativos.....	40
8	superfície deformada devido aos íons.....	41
9	relação de dispersão para íons positivos.....	44
10	relação de dispersão para íons negativos.....	45
11	energia do estado fundamental de um elétron ligado à interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	51
12	massa efetiva de um elétron ligado à interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	53
13	energia do estado fundamental de um elétron ligado à superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido.....	60
14	massa efetiva de um elétron ligado à superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido.....	62
15	energia do estado fundamental de um elétron ligado à superfície de filmes de hélio adsorvidos em safi- ra.....	64
16	massa efetiva de um elétron ligado à superfície de filmes de hélio adsorvidos em safira.....	66
17	resultados experimentais para filmes de hélio adsor- vidos em safira.....	68

FIGURA		PÁGINA
18	esquema de uma depressão na superfície de ^4He líquido.....	71
19	energia de formação de uma depressão com muitos elétrons na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	77
20	raio médio da depressão na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	79
21	massa efetiva da depressão na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	81
22 (a)	fotografia de uma depressão na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	83
(b)	fotografia de várias depressões na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$	83
23 (a,b,b)	fotografias de depressões na superfície de ^4He líquido.....	92
24	perfil de uma depressão na superfície de ^4He líquido.....	88
25	densidade média de carga para uma depressão na superfície de filmes de hélio adsorvidos em :	
	(a) neon sólido.....	94
	(b) safira.....	95
26	energia de formação de uma depressão na superfície de filmes de hélio adsorvidos em:	
	(a) enon sólido.....	98
	(b) safira.....	100
27	raio médio de uma depressão na superfície de filmes de hélio adsorvidos em:	
	(a) neon sólido.....	102
	(b) safira.....	104

FIGURA

PÁGINA

28	massa efetiva de uma depressão na superfície de filmes de hélio adsorvidos em:	
	(a) neon sólido.....	106
	(b) safira	108
29	densidade de carga de uma depressão na superfície de ^4He líquido ($d \rightarrow \infty$).....	110
30	energia de formação de uma depressão na superfície de ^4He líquido ($d \rightarrow \infty$).....	112
31	fotografias da formação do cristal de depressões na superfície de ^4He líquido.....	114
32	espessura crítica em função do número de elétrons em depressões na superfície de filmes de hélio.....	116

Com o objetivo de investigar as propriedades do estado fundamental de elétrons ligados à superfície de hélio líquido e interagindo com os modos superficiais de oscilação (riplons), utilizamos um formalismo simples baseado em transformações canônicas, o qual é válido para todos os valores da constante de acoplamento e elétron-riplon. Calculamos a energia do estado fundamental e a massa efetiva de um elétron sobre a superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido, em safira e também na interface de misturas ^3He - ^4He . Um comportamento tipo transição de fase de primeira ordem, onde o elétron passa de um estado quase livre para um estado localizado quando o campo elétrico externo excede um certo valor crítico é observado. Este resultado foi recentemente confirmado experimentalmente através de medidas da mobilidade de elétrons na superfície de filmes de hélio adsorvidos em safira. Em seguida, calculamos a energia de formação, a massa efetiva, o raio médio e a densidade média de cargas em uma depressão ("dimple") contendo muitos elétrons localizada na superfície de ^4He líquido, na interface da mistura ^3He - ^4He e finalmente em filmes de ^4He líquido adsorvidos em neon sólido e em safira. No caso de ^4He líquido e misturas de ^3He - ^4He obtemos o campo elétrico crítico a partir do qual ocorrerá a localização da depressão. Para filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira, obtemos as espessuras críticas do filme entre as quais a depressão com muitos elétrons pode existir. Os resultados obtidos são comparados com dados experimentais e teóricos recentes e estão em excelente concordância.

iii

ABSTRACT

A simply unitary-transformations formalism is used in order to investigate the ground-state properties of an electron bounded on a liquid-helium surface and interacting with the surface modes of oscillation (ripplons). We have calculated the ground-state energy and the effective mass of an electron on films of helium adsorbed on solid neon and sapphire and electron at the interface of phase separated ^3He - ^4He mixtures. A first-order phase-transition-like behavior from the quasi free to the self-trapping electron state as the clamping external electrical field exceeds a certain critical value is observed. After, we have evaluated the ground-state energy, effective mass, the radius and the density of charge in an individual many electron dimple on the surface of helium liquid, films of helium adsorbed on solid neon and sapphire and at the interface of phase-separated ^3He - ^4He mixtures.

For the dimple on the surface of helium and at the interface of phase separated ^3He - ^4He mixtures we have evaluated the critical external electrical field where the localization occurs. For the films of helium adsorbed on solid neon and sapphire we have evaluated the range of critical thickness where the dimple exist.

The results are compared to those recently obtained and are in excellent concordance.

iv

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr.Oscar Hipólito pela orientação segura, constante apoio e paciência na realização deste trabalho.

Aos colegas Pedro. Giomal, Nelson e Umbelino pelas proveitosas discussões.

Ao Prof.Dr.Sylvio Goulart Rosa Jr. pela acolhida no Instituto de Física e Química de São Carlos.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Física e Ciência dos Materiais do Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, em especial do seu centro de computação, que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À Loreni pelo excelente trabalho de datilografia.

Ao CNPq e à FAPESP pelo suporte financeiro.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos as propriedades eletrônicas de sistemas bidimensionais têm sido intensamente estudadas tanto teórica quanto experimentalmente. Dentre os sistemas mais investigados está aquele formado de elétrons depositados na superfície de hélio líquido e que, também, será alvo de nossos estudos.

Elétrons localizados na superfície de hélio líquido exibem vários fenômenos interessantes dentre os quais podemos citar espectro de estados ligados, mobilidade, localização, cristalização de Wigner, ondas de plasma bidimensional e redes macroscópicas. Nestes sistemas os elétrons permanecem ligados à superfície sob a ação de uma força eletrostática imagem e de um campo elétrico externo perpendicular à superfície. Assim sendo, os elétrons estarão ligados, perpendicularmente à superfície em estados quânticos discretos e movendo-se mais ou menos livremente na direção paralela. Para temperaturas abaixo de 0,8K, os elétrons interagem sobre tudo com excitações térmicas superficiais (riplons) do hélio líquido sendo entre tanto desprezível suas interações com os átomos do vapor de hélio. Na presença de um campo elétrico externo intenso, o elétron interage fortemente com os riplons favorecendo assim sua localização na superfície do líquido. A pressão devido ao campo elétrico, faz com que a superfície se deforme formando uma pequena depressão na qual o elétron fica localizado.

Neste sistema, o intervalo de densidades eletrônicas acessível experimentalmente, tem sido entre 10^4 - 10^9 elétrons/cm². Para este intervalo de densidades o gás de elétrons bidimensional é um gás puramente clássico, mesmo para temperaturas de alguns milikelvins.

Neste trabalho estaremos interessados em obter a energia do estado fundamental e a massa efetiva para os elétrons localizados em filmes de hélio adsorvidos em neon sólido, em safira e tam -

bem para elétrons na interface da mistura ^3He - ^4He . Os cálculos são desenvolvidos por meio de um formalismo variacional, baseado em transformações canônicas o qual já foi utilizado com sucesso para diferentes tipos de polarons e é válido para qualquer valor da constante de acoplamento elétron-excitação. Nossos resultados mostram que a energia do estado fundamental apresenta uma discontinuidade na sua derivada com relação ao campo elétrico externo, o que caracteriza um comportamento do tipo transição de fase onde o polaron passa de um regime quase-livre para um estado localizado. Esta previsão teórica foi recentemente confirmada experimentalmente, através de medidas da mobilidade dos elétrons em filmes de hélio adsorvidos em safira.

No capítulo II descrevemos algumas propriedades dos elétrons nos estados superficiais em hélio líquido. Discutimos o espectro destes estados ligados nos vários modelos propostos para o potencial que localiza o elétron sobre a superfície, bem como a mudança deste espectro devido à presença de campos elétricos externos. O sistema formado por filmes de hélio líquido adsorvidos em substratos também é discutido. Finalmente os resultados experimentais mais significativos são apresentados.

No capítulo III discutimos detalhadamente os mecanismos de espalhamento dos elétrons por átomos de hélio e pelas excitações térmicas da superfície do hélio. Obtemos o potencial de interação elétron-excitação superficial e a Hamiltoniana que descreve o sistema. Esta Hamiltoniana é formalmente igual à Hamiltoniana de Fröhlich para o polaron. A energia do estado fundamental e a massa efetiva deste polaron são calculadas através de um formalismo variacional, descrito no capítulo IV. Este método é válido para qualquer constante de acoplamento elétron-excitação e tem sido aplicado com sucesso em diferentes tipos de polarons.

O capítulo V é dedicado ao estudo de superfícies de fluidos carregadas bem como a análise relativa à estabilidade de tal

sistema. Aqui aplicamos o formalismo variacional desenvolvido, no capítulo anterior para o caso de um único elétron localizado na interface da mistura ^3He - ^4He e para filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira. Para estes sistemas obtemos a energia do estado fundamental e a massa efetiva. Nossos resultados estão em excelente acordo com os resultados obtidos por Farias³⁴ e Hipólito et.al³⁵ que empregaram o método das integrais de trajetória apenas no limite de campo externo intenso.

No capítulo VI estendemos a teoria para o caso em que se tem muitos elétrons localizados em uma depressão da superfície, como foi observado experimentalmente por Wanner e Leiderer¹³ e Giannetta e Ikezi¹⁴, na superfície de hélio líquido, em filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira e na interface da mistura ^3He - ^4He . Calculamos a energia de formação, a massa efetiva, o raio médio e a densidade eletrônica na depressão.

Finalmente no capítulo VII, resumizamos nossas conclusões e sugerimos alguns problemas, que deverão ser abordados futuramente.

CAPÍTULO II

PROPRIEDADES GERAIS DOS ELÉTRONS NA SUPERFÍCIE DE HÉLIO

Neste capítulo resumiremos os conceitos básicos envolvidos no sistema de elétrons em estados superficiais sobre hélio líquido e os principais resultados experimentais.

A origem dos estados superficiais dos elétrons sobre hélio líquido pode ser explicada usando a forma de energia potencial de interação de um elétron com um átomo de hélio. O resultado dos cálculos efetuados por Kestner et al.¹ utilizando um pseudo-potencial para a interação de um elétron com um átomo de hélio é mostrada na figura 1.

Figura 1

Para pequenas distâncias, existirá uma forte repulsão devido ao princípio de exclusão de Pauli exigir que a função de onda do elétron extra seja ortogonal aos estados atômicos ligados. Por outro lado, para distâncias maiores a interação dominante passa a ser atrativa, mas com uma intensidade muito fraca. É esta interação a responsável pelos estados que discutiremos aqui. O potencial atrativo origina-se da força entre o elétron e o momento de dipolo elétrico instantâneo do átomo.

Se os átomos de hélio preenchem a região $z < 0$, tal que a

superfície em $z=0$ seja plana, a repulsão devido ao princípio de exclusão de Pauli origina uma barreira de potencial de aproximadamente um elétron-volt, enquanto que a atração devido à polarização dá origem ao potencial imagem. A barreira de potencial para $z<0$ juntamente com o potencial imagem para $z>0$, formam um poço unidimensional no qual aparecem estados ligados. Vários modelos foram propostos para encontrar-se a forma do potencial que prende os elétrons na direção perpendicular à superfície e, portanto, determinar o espectro de auto-estados de energia.

Podemos supor que os movimentos dos elétrons sobre hélio líquido nas direções perpendicular e paralela à superfície são desacoplados e por hora ignoraremos o movimento paralelo ao líquido e nos concentramos no movimento perpendicular onde os elétrons estão confinados a um poço de potencial $V(z)$. Desta forma, podemos escrever a função de onda eletrônica (admitindo que a superfície do hélio seja plana) como o produto:

$$\psi_{\vec{k},n}(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \phi_n(z) \quad (2.1)$$

onde $\vec{r}$ é um vetor no plano x-y da superfície do líquido, e A é a área. Com isso estamos admitindo que os elétrons estão livres para o movimento paralelo e a função de onda $\phi_n(z)$ satisfaz a equação de Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_n(z)}{dz^2} + (E_n - V(z)) \phi_n(z) = 0 \quad (2.2)$$

A energia potencial $V(z)$ de um elétron fora do líquido de hélio, é, como já enfatizamos, constituída por dois termos:

(a) o potencial imagem clássico atrativo de longo alcance, devido à polarização eletrostática da superfície.

$$V(z) = - \frac{\epsilon-1}{4(\epsilon+1)} \frac{e^2}{z} = - \frac{\Omega_0}{z} \quad ; \quad z > 0 \quad (2.3)$$

onde ϵ é a constante dielétrica do hélio líquido, $\epsilon = 1.057$;

(b) uma barreira repulsiva de curto alcance, devido ao princípio de exclusão de Pauli, obrigando a função de onda de um elétron extra ser ortogonal às dos dois elétrons presentes em cada átomo de hélio.

Esta descrição é muito apropriada quando $|z|$ é maior que algumas distâncias atômicas. Entretanto próximo à $z=0$, o potencial não é conhecido com detalhe e informações sobre sua forma nesta região seriam de considerável interesse.

A primeira tentativa para descrever os estados ligados e obter as energias de ligação dos átomos foi feita independentemente por Sommer², Cole e Cohen³ e Shikin⁴.

O modelo mais simples para o potencial visto pelo elétron é o de uma barreira infinita na superfície mais o potencial imagem clássico. Nesta aproximação, a equação de Schrödinger é idêntica à equação radial para $\chi(r) = r R_{n,0}(r)$, onde $R_{n,0}$ é a n -ésima solução com $\ell=0$, ou seja, ondas "s" do átomo de hidrogênio. O espectro de energias será hidrogênico, ou seja:

$$E_n = - \frac{\Omega_0^2}{4n^2} \text{ Ryd} \approx - \frac{0,65}{n^2} \text{ meV} \quad (2.4)$$

Neste caso, o comprimento característico ou raio de Bohr efetivo será:

$$a = \frac{a_0 e^2}{\Omega_0} = 76 \text{ \AA} \quad (2.5)$$

O elétron será localizado longe da superfície nestes estados fracamente ligados. Os valores de $\langle z \rangle$ para os três mais baixos auto es-

tados são respectivamente 114, 456 e 1026 Å. Isto justifica usar a aproximação em que a superfície é plana. Como $E_0 \sim 0,7\text{meV}$ a aproximação de barreira infinita também é justificável.

Os resultados obtidos para a transição entre estes estados são aproximadamente 5% maiores que os valores preditos pelo modelo hidrogênico:

Transição	Teórico	Experimental
1→2	119,7GHz	125,9±0,2GHz
1→3	141,8GHz	148,6±0,3GHz

Esta pequena discrepância é atribuída aos efeitos interfaciais tais como: valor finito da barreira de potencial e o comportamento real da interação de polarização para pequenas distâncias.

Outro modelo consiste em introduzir a barreira de potencial finita V_0 , da ordem de um elétron-volt e o potencial imagem clássico:

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & z < 0 \\ -\frac{\Omega_0}{z} & z > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Neste caso, a exigência da continuidade da função de onda e de sua derivada em $z=0$, introduz sérias dificuldades matemáticas devido à singularidade do potencial.

M.Cole⁵ propôs então um modelo no qual evitava-se a singularidade do potencial imagem. O potencial proposto é dado por:

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\Omega_0}{z} & z > z_0 \\ -\frac{\Omega_0}{z_0} & 0 < z < z_0 \\ V_0 & z < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

onde a constante z_0 foi tomada como a distância interatômica do hélio, $3,6 \text{ \AA}$. Para este modelo devemos resolver as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \gamma^2 \phi = 0 & z < 0 \end{array} \right. \quad (2.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \mu^2 \phi = 0 & 0 < z < z_0 \end{array} \right. \quad (2.8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{\Omega_0}{z} \right) \phi = 0 & z > z_0 \end{array} \right. \quad (2.8c)$$

onde $\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$ e $\mu^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{\Omega_0}{z_0} \right)$ com as relações de continuidade usuais e a condição de contorno no infinito. A solução da última equação é a função de Whittaker $W_{\ell, 1/2}(2\Omega_0 z / \ell e^2 a_0)$ onde " ℓ " é um número quântico relacionado à energia através da equação:

$$E_\ell = - \frac{\Omega_0^2}{e^4 \ell^2} \text{ Ryd} \quad (2.9)$$

Embora a divergência do potencial imagem fôsse evitada neste modelo a altura da barreira de potencial V_0 é estimada em 1.3eV para que os resultados coincidam com os experimentais, com parâmetro $z_0 = 3,6 \text{ \AA}$. Para que a altura da barreira fôsse 1eV, como medida experimentalmente o parâmetro z_0 cresce rapidamente e os resultados diferem significativamente dos resultados experimentais.

Um outro potencial aproximado para o elétron na superfície de hélio que tem sido usado na determinação do espectro de energia é:

$$V(z) = \begin{cases} - \frac{\Omega_0}{z + \beta} & z > 0 \\ V_0 & z < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Fisicamente, trata-se o potencial fora da superfície como se o potencial imagem tivesse sua origem a uma pequena distância β dentro do líquido. Recentemente, Hipólito et.al.⁶ resolveram exatamente este modelo e calcularam os níveis de energia dos elétrons ajustando o parâmetro β com os resultados experimentais, O melhor ajuste foi encontrado quando $\beta = 1.01 \text{ \AA}$. A primeira evidência experimental da existência dos estados superficiais induzidos pelo potencial imagem para elétrons fora de superfície de hélio foi apontada por Sommer⁷. Em uma elegante experiência ele mediu a barreira de potencial, da ordem de 1eV , para a penetração de elétrons no hélio líquido. A observação experimental destes estados foi feita por Sommer e Tanner⁸ e Williams et al.⁹, através de medidas de mobilidades dos elétrons sobre hélio. Entretanto estes resultados mostraram estar em desacordo com os de Ostermeier e Schwarz¹⁰ obtidos por meio de outra técnica experimental. A prova definitiva da existência destes estados superficiais foi apresentada por Grimes e Brown¹¹ que utilizando técnicas espectroscópicas mediram a separação de energia entre o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados, observando a absorção de radiação de microondas pelos elétrons sobre hélio líquido, sujeitos a um campo elétrico externo perpendicular à superfície.

A figura 2 mostra o traço experimental tomado a 160GHz , onde aparecem os sinais da derivada de absorção mais pronunciados devido às transições do estado fundamental para os dois primeiros estados excitados em função do campo elétrico externo aplicado entre dois eletrodos planos localizados acima da superfície e dentro do hélio líquido.

Figura 2

Na figura 3 estão os resultados para transições dos primeiros estados excitados para o estado fundamental. A linha tracejada é a previsão do modelo de Grimes et al.³¹ e os símbolos (+) são os resultados experimentais por eles obtidos. A linha cheia são os resultados de Hipólito et al.⁶ baseado na solução exata do modelo de potencial dado pela equação (2.10) no qual utilizou-se $\beta = 1.01 \text{ \AA}$.

Em vista da concordância com os resultados experimentais, podemos concluir que o melhor modelo fenomenológico para o potencial é aquele dado pela equação (2.10).

Figura 3

Até agora temos discutido a origem e detecção dos estados superficiais em hélio líquido, mas nada dissemos do porquê da utilização deste dielétrico e não um outro qualquer. A vantagem de se usar hélio líquido é sobretudo devido à pequena diferença entre sua constante dielétrica e o vácuo ($\epsilon - 1 \approx 0.0057$). Como resultado, a função de onda do elétron superficial tem uma extensão de decaimento, no vácuo, macroscópica ($\sim 100 \text{ \AA}$). Assim os estados não são sensíveis à estrutura microscópica da superfície o que permite-nos descrevê-los melhor teoricamente.

O método prático para obter-se elétrons superficiais em hélio líquido é muito simples e não requer tecnologia especial. Uma placa metálica de um capacitor plano carregada positivamente localizada abaixo da superfície do líquido e uma fonte de elétrons situada na fase gasosa é suficiente. Na figura 4 esquematizamos o aparato experimental¹².

- F : filamento
P : gerador de pulsos
R : eletrômetro
HV : voltagem para descarga corona

Figura 4

Neste caso, a concentração de equilíbrio dos elétrons sobre a superfície é determinada pela condição que o campo elétrico externo, na fase gasosa, seja completamente blindado pelo campo dos elétrons superficiais, ou seja, o campo elétrico total E_T na fase gasosa é nulo. Se E_e for o campo elétrico externo e n_s a concentração superficial, a condição de equilíbrio será:

$$E_T = E_{\perp} - 4\pi n_s e = 0 \quad (2.11)$$

ou

$$E_{\perp} = 4\pi n_s e$$

Então, pela variação do campo elétrico externo é facilmente possível obter a densidade de elétrons n_s em um grande intervalo: 10^5 - 10^9 elétrons/cm². Para densidades variando neste intervalo, elétrons na superfície de hélio líquido formam um gás clássico bidimensional, mesmo para temperaturas acima de poucos milikelvins. Uma vez que energia de Fermi em duas dimensões é dada por:

$$\epsilon_F = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{m}, \quad (2.12)$$

para $n_s = 2 \times 10^9 \text{ cm}^{-2}$ $\epsilon_F < 10^{-2} \text{ K}$.

Além do mais, como pode-se variar a densidade por várias ordens de grandeza, a condensação dos elétrons em um sólido de Wigner pode ser detectada experimentalmente.

Precisamos, agora, verificar o efeito do campo elétrico externo $E_{\perp}$ que está sempre presente nos experimentos com elétrons superficiais. A presença do campo externo distorce a forma do potencial tal que:

$$V(z) = -\frac{\Omega_0}{z} + eE_{\perp}z \quad z > 0 \quad (2.13)$$

Neste caso é necessário calcularmos o efeito Stark para os estados eletrônicos superficiais. Infelizmente uma solução analítica exata para este problema ainda não foi obtida. Uma aproximação seria tratar o problema de um campo elétrico aplicado perpendicularmente à superfície através de teoria de perturbação de primeira ordem para o modelo hidrogênico, onde a barreira de potencial é infinita na origem $z=0$. Outro procedimento seria empregar o método variacional

para resolvermos a equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{\Omega_0}{z} \phi + eE_{\perp} z \phi = E \phi \quad (2.14)$$

Para a função de onda variacional do estado fundamental escolhemos:

$$\phi(z) = \left(\frac{4}{b^3}\right)^{1/2} z e^{-z/b} \quad (2.15)$$

onde o parâmetro variacional b é dado por:

$$b = \frac{4a}{3\lambda} \sinh \left[\frac{1}{3} \sinh^{-1} \frac{9\lambda}{4} \right] \quad (2.16)$$

com " a " sendo o raio de Bohr efetivo e $\lambda = \sqrt{2ma^3 eE_{\perp} / \hbar^2}$.

Na presença de um campo elétrico bastante forte ($E > 3000$ V/cm) o potencial imagem pode ser desprezado e a equação de onda reduz-se à equação de Airy onde os resultados para as autofunções e autovalores de energia são conhecidos e dados por:

$$\phi_n(z) = \text{const} \times A \left[\left(z - \frac{E_n}{eE_{\perp}} \right) \left(\frac{2E_{\perp}}{ea_0} \right)^{1/3} \right] \quad (2.17)$$

e

$$E_n = \xi_n eE_{\perp} \left(\frac{ea_0}{2E_{\perp}} \right)^{1/3} \quad n=1,2,3... \quad (2.18)$$

onde $A(z)$ é a função de Airy e ξ_n denota o seu n -ésimo zero (por exemplo $\xi_1 \approx 2,34$). Neste caso, o elétron no estado fundamental está localizado a uma distância $\langle z \rangle \approx 1,3 (ea_0/E_{\perp})^{1/3}$ da superfície.

Um outro sistema de relevante interesse, tem sido a localização de elétrons sobre filmes de hélio adsorvidos em um substrato sólido de constante dielétrica ϵ_s . O espectro dos estados ligados se modifica significativamente pois o substrato induz altera -

ções na força imagem. O arranjo experimental utilizado está esquematizado na figura 5 .

Figura 5

O potencial imagem neste caso é dado por (15) :

$$V(z) = - \frac{\Omega_0}{z} - \Omega_1 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-a)^{\ell-1}}{z+\ell d} \quad (2.19)$$

$$\text{onde: } \Omega_0 = \frac{(\epsilon-1)e^2}{4(\epsilon+1)} \quad ; \quad \Omega_1 = \frac{e^2 \epsilon (\epsilon_S - \epsilon)}{(\epsilon+1)^2 (\epsilon_S + \epsilon)} \quad \text{e} \quad a = \frac{(\epsilon-1)(\epsilon_S - \epsilon)}{(\epsilon+1)(\epsilon_S + \epsilon)}$$

Esta série, em geral, apresenta uma rápida convergência e pode ser aproximada pelo primeiro termo. Gabovich et al.¹⁶ obtiveram o espectro dos estados eletrônicos, para filmes de hélio adsorvidos em metal ($\epsilon_S \rightarrow \infty$). No limite de filmes finos o potencial será:

$$V(z) = - \frac{\Omega_0}{z} - \frac{\Omega_1}{z+d} \quad (2.20)$$

Neste limite a condição $d \gg \langle z \rangle_n$ é sempre satisfeita, então podemos expandir o potencial na seguinte forma:

$$V(z) \approx - \frac{\Omega_0}{z} - \frac{\Omega_1}{d} + \frac{\Omega_1 z}{d^2} \quad (2.21)$$

O substrato atuará como um campo externo de intensidade $E_1 = \frac{\Omega_1}{ed^2}$ e a presença do termo negativo $\frac{\Omega_1}{d}$ contribuirá para o aumento da energia potencial dos elétrons.

Platzman e Ikezi¹⁷ mostraram que no caso de filmes de hélio, a densidade máxima de carga na superfície será aumentada drasticamente devido ao campo elétrico efetivo e ao aparecimento das forças de van der Waals as quais tendem a estabilizar o sistema elétron-filme.

A correção no espectro de energia obtido na aproximação hidrogênica em função da espessura do filme será:

$$\Delta E_n(d) = - \frac{\Omega_1}{d} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m\Omega_0} \frac{n^2}{d} \right], \quad (2.22)$$

correspondendo a primeira ordem do efeito Stark do campo elétrico

$$E_d = \frac{\Omega_1}{ed^2}.$$

Como vimos, os elétrons na superfície de hélio podem ser considerados como um sistema de elétrons bidimensional dentro de um poço de potencial $V(z)$. Agora estudaremos as propriedades do movimento eletrônico na direção paralela à superfície. Para baixas densidades, o gás de elétrons pode ser tomado como um gás de elétrons livres ideal e neste regime, o movimento eletrônico é impedido por dois mecanismos de espalhamento:

- (a) espalhamento por átomos de hélio no vapor
- (b) espalhamento por riplons termicamente excitados sobre a superfície do líquido.

Estes riplons são quasi-partículas relacionadas com as oscilações da interface líquido-vapor. São ondas superficiais de capilaridade-gravidade dos líquidos em geral e que quando quantizadas recebem o nome de riplons. Estas quasi-partículas são bosons com concentração de equilíbrio:

$$N_K = \left(e^{\frac{\hbar\omega_K}{K_B T}} - 1 \right)^{-1} \quad (2.23)$$

e relação de dispersão:

$$W_K^2 = gK + \frac{\sigma_0}{\rho} K^3 \quad (2.24)$$

onde g é a constante da gravidade, σ_0 é a tensão superficial e ρ a densidade do líquido.

Uma análise quantitativa destes mecanismos de espalhamento será apresentada no próximo capítulo, mas podemos adiantar que em baixas temperaturas ($T < 0,7^\circ\text{K}$) o espalhamento predominante é devido à interação elétron-riplon, e que para campos externos da ordem de 400 V/cm este espalhamento é elástico. Para campos intensos ($E \sim 3000$ V/cm) a superfície de hélio deforma-se devido à pressão exercida pelo elétron. A depressão da superfície em torno de cada elétron forma um "dimple" no qual o elétron se localiza. Experimentos recentes de Wanner e Leiderer¹³ e Giannetta e Ikezi¹⁴ têm verificado com sucesso a localização de elétrons seja na interface de misturas de ^3He - ^4He ou de ^4He líquido.

Entre as características básicas dos elétrons superficiais em hélio, enfatizamos mais uma vez, a pureza do sistema, sua simplicidade de preparação e a possibilidade de variarmos alguns parâmetros do sistema num longo intervalo. Neste sentido, elétrons superficiais em hélio são objetos ideais para a investigação de princípios fundamentais da teoria de um gás de elétrons de baixa densidade e a física dos sistemas de baixa dimensão. Não é surpreendente que as descobertas básicas experimentais nesta linha tais como: plasmons bidimensionais, cristalização de Wigner e outros foram obtidos com o uso de elétrons superficiais em hélio?

No próximo capítulo faremos uma análise detalhada dos mecanismos de espalhamento e deduziremos a Hamiltoniana que descreve a interação do elétron com a superfície de hélio líquido para baixas temperaturas, ou seja, na região onde somente a interação elétron-riplon é importante.

CAPÍTULO III

MECANISMOS DE ESPALHAMENTO NO MOVIMENTO PARALELO À SUPERFÍCIE

Neste capítulo, estudaremos as propriedades do movimento eletrônico na direção paralela à superfície. Como citamos anteriormente, para baixas densidades, o gás de elétrons pode ser considerado como um gás de elétrons livres ideal e, neste regime, o movimento eletrônico é impedido por dois mecanismos de espalhamento: o espalhamento pelos átomos de hélio no vapor e o espalhamento devido às excitações térmicas da superfície do líquido.

M.Cole¹⁸, Crandall¹⁹ e Saitoh²⁰ estudaram o espalhamento de elétrons na superfície por átomos no vapor e encontraram que a variação de momentum devido ao espalhamento (inverso do tempo de colisão) depende somente da densidade dos átomos de vapor e é independente da energia do elétron. Como a densidade de vapor aumenta quase exponencialmente com o aumento da temperatura, o espalhamento pelos átomos no vapor é desprezível em baixas temperaturas e é predominante em altas temperaturas, como pode ser visto nos resultados experimentais para a mobilidade, mostrados na figura 6 .

Figura 6

Na figura anterior temos a mobilidade eletrônica paralela à superfície do hélio em função da temperatura e da densidade do vapor de hélio. A linha cheia é obtida considerando-se apenas o espalhamento com os átomos no vapor²³. A linha tracejada é o resultado dos cálculos efetuados por Saitoh²⁰ onde considera-se o espalhamento com os ríplons e os átomos no vapor. Os pontos experimentais (+) foram obtidos por Grimes e Adams²¹, (.) por Sommer e Tanner⁸ e (o) por Rybalko et al.²².

Nos cálculos de Saitoh²⁰, o tempo de colisão é obtido através da solução da equação de transporte de Boltzmann para a função distribuição de elétrons $f(\vec{k})$, quando um campo elétrico $E_{||}$ é aplicado paralelamente à superfície, por simplicidade na direção x :

$$-\frac{eE_{||}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k_x} f(\vec{k}) = \mathcal{L}f(\vec{k}) \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é o operador colisão.

Admitiremos que a função distribuição dos elétrons $f(\vec{k})$ tenha a forma:

$$f(\vec{k}) = h(\epsilon_k) + K_x G(\epsilon_k) \quad (3.2)$$

com um termo isotrópico e outro anisotrópico.

Para a colisão do elétron com o gás de hélio, consideramos um pseudo-potencial de contato do tipo:

$$H_{e-g} = U_G \sum_{i,\alpha} \delta(\vec{r}_i - \vec{R}_\alpha) \quad (3.3)$$

onde $\vec{r}_i$ e $\vec{R}_\alpha$ são vetores posição do i -ésimo elétron e do α -ésimo átomo de hélio.

O operador colisão atuando em $h(\epsilon_k)$, após alguma álgebra, pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}_G h(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \left[W_G(\epsilon) \left(h(\epsilon) + K_B T \frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \right] \quad (3.4)$$

onde:

$$W_G(\epsilon) = \frac{\pi \hbar A n_G}{4Mb} \left(\frac{\hbar^2}{mb^2} + 3\epsilon \right) \quad (3.5)$$

M é a massa do átomo de ^4He e K_B é a constante de Boltzmann. Com o parâmetro b dado por:

$$b = \frac{4a}{3\lambda} \sinh \left[\frac{1}{3} \sinh^{-1} \frac{9\lambda}{4} \right] \quad (3.6)$$

onde: $\lambda = \sqrt{2ma^3 e E_\perp / \hbar^2}$ e A é a seção de choque de um átomo de hélio relacionado com U_G , através da relação:

$$A = m^2 U_G^2 / \pi \hbar^4 \quad (3.7)$$

e n_G é a densidade do vapor saturado dado por:

$$n_G = \left(\frac{MTK_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-Q/K_B T} \quad (3.8)$$

onde Q é a energia de vaporização.

O operador colisão aplicado ao termo anisotrópico pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{L}_G(K_x G(\epsilon)) = - \frac{K_x G(\epsilon)}{\tau_G(\epsilon)} \quad (3.9)$$

onde τ_G é o tempo de colisão devido ao espalhamento do gás de hélio e dado pela expressão:

$$\frac{1}{\tau_G} = \frac{3\pi\hbar A n_G}{8mb} \quad (3.10)$$

que é independente da energia do elétron.

Por outro lado, o espalhamento pelas excitações superficiais também apresenta muitos aspectos interessantes, pois depende detalhadamente da interação entre elétrons e as vibrações da interface líquido-vapor. Vários autores calcularam o tempo de colisão para o espalhamento elétron-riplon e contrariamente ao caso anterior, existe aqui bastante controvérsia tanto com os resultados teóricos quanto com os resultados experimentais, como podemos ver na figura 6. Sabemos dos resultados experimentais que o espalhamento por átomos do gás predomina acima de cerca de 0,8K e o espalhamento por riplons é dominante abaixo de 0,6K. Contudo, existe uma apreciável discrepância entre os valores medidos da mobilidade limitada aos riplons por diferentes autores, tal que medidas mais cuidadosas são necessárias para temperaturas mais baixas.

Em relação aos cálculos teóricos, o problema fundamental consiste na descrição correta da interação elétron-riplon. Shikin e Monarka¹⁵ usaram uma aproximação adiabática, no sentido que a função de onda eletrônica na aproximação de ordem zero, depende da coordenada do riplon. A mobilidade calculada por Saitoh²⁰, no regime de riplon, é essencialmente a mesma que a encontrada por Shikin e Monarka¹⁵.

Platzman e Beni²⁴ também mostraram que quando esta interação elétron-riplon é aplicada ao problema de largura de linha do plasmon os resultados obtidos concordam com os valores observados experimentalmente por Grimes e Adams²¹.

Gaspari e Bridges²⁵ reexaminaram o espalhamento elétron-riplon e concluíram que os resultados de Shikin e Monarka¹⁵ são corretos somente se a barreira de potencial na superfície é infinita. Monarka²⁶ reanalisou o espalhamento elétron-riplon usando o mesmo princípio adiabático e mostrou uma inconsistência no trabalho de Gaspari e Bridges²⁵, reconfirmando os resultados anteriores

de Shikin e Monarkha¹⁵.

A seguir calcularemos o potencial de interação elétron - riplon e identificaremos a Hamiltoniana resultante com a Hamiltoniana de Fröhlich, típica para o problema do polaron.

Para obtermos o potencial de interação elétron-riplon seguiremos os procedimentos de Shikin e Monarkha¹⁵.

A equação de Schrödinger para um elétron sobre a superfície de hélio líquido deformada devido à presença do campo elétrico $E_{\perp}$ é

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, z) + [E - V(\vec{r}, z) - eE_{\perp} z] \psi(\vec{r}, z) = 0 \quad (3.11)$$

As condições de contorno impostas à função de onda $\psi(\vec{r}, z)$ são:

$$\psi(\vec{r}, z) \Big|_{z=u(\vec{r})} = 0 \quad \text{e} \quad \psi(\vec{r}, z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.12)$$

onde $u(\vec{r})$ representa a deformação da superfície com relação ao plano $z=0$ devido à pressão exercida pelo elétron. $u(\vec{r})$ satisfaz a condição:

$$\int d^2 r \, u(\vec{r}) = 0 \quad (3.13)$$

O potencial $V(\vec{r}, z)$ representa a interação de polarização do elétron com os átomos de hélio e é dado por:

$$V(\vec{r}, z) = - \frac{\Omega_0}{\pi} \int d^2 r' \int_{-\infty}^{u(\vec{r}')} \frac{dz'}{[(\vec{r}' - \vec{r})^2 + (z' - z)^2]^2} \quad (3.14)$$

onde: $\Omega_0 = \frac{\epsilon - 1}{4(\epsilon + 1)}$; ϵ é a constante dielétrica do hélio ($\epsilon = 1.057$). Evidentemente, para $u \rightarrow 0$, reencontramos o potencial imagem clássico:

$$V(z) = - \frac{\Omega_0}{z} \quad (3.15)$$

Uma discussão detalhada de $V(\vec{r}, z)$ é realizada por M.W.Cole¹⁸.

Fazendo uma mudança de variáveis, tais que

$$\xi = z - u(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{r} \quad , \quad (3.16)$$

a equação de Schrödinger pode ser escrita na forma:

$$H = H_0 + H_1 \quad (3.17)$$

onde:

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left[p_\xi^2 + p_r^2 \right] - \frac{\Omega_0}{\xi} + eE_\perp \xi \quad ; \quad \xi > 0 \quad (3.18)$$

$$H_1 = - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{p}_r \right) p_\xi + \left(p_r \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \right) p_\xi \right] + \Delta V + eE u(\vec{r})$$

com: $\vec{p} = -i\hbar \nabla$

$$\Delta V = - \frac{\Omega_0}{\pi} \int d^2 r' \int_0^{u(\vec{r}') - u(\vec{r})} \frac{d\xi'}{\left[(\vec{r}' - \vec{r})^2 + (\xi' - \xi)^2 \right]^2} \quad (3.19)$$

O operador H_0 é o Hamiltoniano dos elétrons acima da superfície do líquido. O primeiro termo de H_1 , aparece devido a transformação do Laplaciano e apresenta a seguinte propriedade: os elementos de matriz entre dois estados que diferem apenas pelo vetor de onda paralelo à interface, ou seja, estados com mesmo número quântico, são todos zeros. A parte residual, equação (3.19), tem um intervalo de integração muito pequeno, o que permite-nos reescrever ΔV na forma:

$$\Delta V = \frac{\Omega_0}{\xi^2} u(\vec{r}) - \frac{\Omega_0}{\pi} \int \frac{u(\vec{r}')}{\left[(\vec{r}' - \vec{r})^2 + \xi^2 \right]^{3/2}} d^2 r' \quad (3.20)$$

Utilizando o conceito de riplons, podemos expandir um pequeno deslocamento arbitrário $u(\vec{r})$ da superfície de hélio em ter-^(*)mos dos operadores de criação e destruição de riplons, $a_{\vec{k}}^+$ e $a_{\vec{k}}$ res-pectivamente. Então:

$$u(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ + a_{-\vec{k}}) Q_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.21)$$

com:

$$Q_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar k}{2A\rho W_{\vec{k}}} \right)^{1/2} ; A \text{ é a área da superfície.}$$

Substituindo a equação (3.21) na equação (3.20) teremos:

$$\Delta V = \frac{\Omega_0}{\xi^2} u(\vec{r}) - \Omega_0 \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ + a_{-\vec{k}}) Q_{\vec{k}} \frac{k}{\xi} K_1(k\xi) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.22)$$

onde: $K_1(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie.

Agora reescrevemos H_1 com a nova expressão de ΔV :

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ + a_{-\vec{k}}) Q_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left[\frac{\Omega_0}{\xi^2} - \frac{\Omega_0 k}{\xi} K_1(k\xi) + eE \right] \quad (3.23)$$

No caso de filmes de hélio líquido adsorvidos em um substrato de constante dielétrica ϵ_s , haverá a interação do elétron com o substrato, e o potencial imagem que antes era $V(z) = -\frac{\Omega_0}{z}$ se-rá alterado para¹⁵,

$$V(z, d) = -\frac{\Omega_0}{z} - \Omega_1 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-a)^{\ell-1}}{z + \ell d} \quad (3.24)$$

com

(*) ver apêndice

$$\Omega_1 = \frac{e^2 \epsilon_s (\epsilon_s - \epsilon)}{(\epsilon + 1)^2 (\epsilon + \epsilon_s)} ; \quad a = \frac{(\epsilon - 1) (\epsilon_s - \epsilon)}{(\epsilon + 1) (\epsilon_s + \epsilon)}$$

onde d é a espessura do filme, ϵ e ϵ_s as constantes dielétricas do hélio e do substrato respectivamente.

Uma vez que a série da equação (3.24) apresenta uma rápida convergência, aproximaremos o potencial imagem da seguinte forma,

$$V(z, d) \approx - \frac{\Omega_0}{z} - \frac{\Omega_1}{z+d} \quad (3.25)$$

Fazendo a mesma mudança de variáveis, equação (3.16), em (3.25) e expandindo até primeira ordem em $u(\vec{r})$, teremos que a contribuição do substrato na interação elétron-riplon será dada por

$$V_S(\vec{r}, \xi) = \frac{\Omega_1}{(\xi+d)^2} u(\vec{r}) \quad (3.26)$$

Para este caso, H_1 eq. (3.18), terá a seguinte forma:

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ + a_{-\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} Q_{\vec{k}}^+ \left[\frac{\Omega_0}{\xi^2} - \frac{\Omega_0 k}{\xi} K_1(k\xi) + \frac{\Omega_1}{(\xi+d)^2} + eE_1 \right] \quad (3.27)$$

com

$$Q_{\vec{k}}^+ = \left(\frac{\hbar k \tanh(kd)}{2A\rho W_{\vec{k}}^+} \right)^{1/2}$$

onde $W_{\vec{k}}^+$ é a nova relação de dispersão dos riplons devido à presença do substrato,

$$W_{\vec{k}}^{+2} = \left[g' + \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) k^2 \right] k \tanh(kd) \quad (3.28)$$

$$g' = g + \frac{3\eta}{\rho d^4} \quad (3.28)$$

Aqui η é a constante de van der Waals, responsável pelas forças atrativas que atuam nos átomos de hélio no lado do substrato.

O potencial de interação elétron-riplon para filmes de hélio de espessura d é então dado por,

$$V_{\vec{k}} = Q'_{\vec{k}} \left[\frac{\Omega_0}{\xi^2} - \frac{\Omega_0 k}{\xi} K_1(k\xi) + \frac{\Omega_1}{(\xi+d)^2} + eE_{\perp} \right]. \quad (3.29)$$

Em geral, utilizamos filmes onde $d \gg \langle \xi \rangle$. No limite de grandes comprimentos de onda, onde os experimentos têm sido feito, podemos aproximar $K_1(k\xi) \approx \frac{1}{k\xi}$, tal que o termo de polarização desaparece e obtemos,

$$V_{\vec{k}} = Q'_{\vec{k}} \left[\frac{\Omega_1}{d^2} + eE_{\perp} \right]. \quad (3.30)$$

É evidente que neste caso limite, a interação elétron - riplon pode existir somente se os fatores externos, ou seja, o campo elétrico perpendicular à superfície e/ou o potencial do substrato estiverem presentes.

Finalmente a Hamiltoniana para um elétron interagindo com os riplons será, então

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} + a_{-\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.31)$$

onde o primeiro termo é a energia cinética do elétron, o segundo a energia dos riplons e o terceiro termo nos dá a interação elétron-riplon.

Farias³⁴ e Hipólito et al.³⁵ resolveram esta Hamiltoniana utilizando-se o formalismo de integral de trajetória, entretanto os cálculos foram concluídos somente no regime de campo elétri

co externo intenso correspondendo ao regime de acoplamento forte . Jackson e Platzman³⁷ utilizaram este mesmo formalismo para um sistema particular, onde a espessura do filme de hélio líquido é de $100\text{\AA}$ e não há restrições no valor do campo elétrico externo. No próximo capítulo, entretanto, discutiremos o método variacional que utilizaremos na resolução da Hamiltoniana (3.31), o qual é baseado em transformações canônicas e tem sido empregado com sucesso no problema do polaron.

CAPÍTULO IV
O MÉTODO VARIACIONAL

Neste capítulo apresentaremos o formalismo do método variacional que será utilizado. Este método é válido para todos os valores da constante de acoplamento e tem sido empregado com sucesso no estudo de diferentes tipos de polarons.

O movimento de uma partícula carregada com uma carga Q e massa M paralelamente à superfície e interagindo com as excitações superficiais, é descrito pela Hamiltoniana de Frölich

$$H = \frac{p^2}{2M} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}} (a_{-\vec{k}}^{\dagger} + a_{\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.1)$$

onde $\vec{p}$ e $\vec{r}$ são o momentum e a coordenada da partícula, $a_{\vec{k}}^{\dagger}$ e $a_{\vec{k}}$ são os operadores de criação e destruição respectivamente das excitações superficiais com um vetor de onda $\vec{k}$ paralelo à superfície, $V_{\vec{k}}$ é o coeficiente de Fourier do potencial de interação e $\omega_{\vec{k}}$ é a relação de dispersão das excitações.

A Hamiltoniana (4.1) é translacionalmente invariante, portanto o momentum total do sistema, isto é, a soma do momentum da partícula com o momento das excitações superficiais deve ser conservado. Ou seja:

$$[H, \vec{P}_t] = 0 \quad (4.2)$$

onde: $\vec{P}_t = \vec{p} + \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}$.

Para o estado fundamental partícula carregada-excitação, a função de onda variacional $|\psi\rangle$ será postulada ser o produto da função de onda da partícula com um estado coerente de excitação. Consequentemente este estado superficial não será um auto-estado do operador momentum total $\vec{P}_t$ e não preservará a invariança da Hamil-

toniana (4.1). Por esta razão a minimização da energia será realizada vinculando-se o operador momentum total $\vec{P}_t$ através do método dos multiplicadores de Lagrange. Introduz-se o multiplicador de Lagrange $\vec{\mu}$, para manter-se o valor esperado do momentum total uma constante. Faremos então a variação da seguinte forma

$$\delta \langle \psi | H - \vec{\mu} \cdot \vec{P}_t | \psi \rangle = 0 \quad (4.3)$$

onde $\vec{\mu}$ será identificado com a velocidade do "polaron superficial" ou seja do sistema partícula-excitação superficial.

A técnica introduzida por Huybrechts²⁷, consiste em empregar as transformações de Lee-Low-Pines²⁸ modificadas à Hamiltoniana $\mathcal{H}$, onde

$$\mathcal{H} = H - \vec{\mu} \cdot \vec{P}_t \quad (4.4)$$

A primeira transformação unitária é definida por

$$S_1 = \exp \left(-i a \sum_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{r} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} \right) \quad (4.5)$$

onde a é um parâmetro variacional a ser determinado pela minimização do estado fundamental do sistema. É interessante notar que esta expressão reproduz os resultados de Lee-Low-Pines para acoplamentos fracos no caso em que $a=1$. Por outro lado, no limite $a \rightarrow 0$ obtemos a aproximação para acoplamentos fortes, o qual tem sido discutido recentemente por Hipólito et.al.²⁹

Definimos, então, $\mathcal{H}'$ tal que

$$\mathcal{H}' = S_1^{-1} \mathcal{H} S_1 \quad (4.6)$$

Ou, explicitamente

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2M} (\vec{p} - a \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}})^2 + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}} (a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}}) \exp[i(1 - a) \vec{k} \cdot \vec{r}] \quad (4.7)$$

A função de onda variacional do estado fundamental $|\psi\rangle$, é escolhida como sendo

$$|\psi\rangle = S_2 |0\rangle |e\rangle, \quad (4.8)$$

onde $|e\rangle$ é a função de onda da partícula carregada, $|0\rangle$ é a função de onda do estado fundamental dos riplons obtida por $a_{\vec{k}} |0\rangle = 0$ e $\langle 0|0\rangle = 1$; S_2 é um operador unitário, também chamado de segunda transformação de Lee-Low-Pines definido por

$$S_2 = \exp \left[\sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ f_{\vec{k}} - a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^*) \right], \quad (4.9)$$

onde $f_{\vec{k}}$ e $f_{\vec{k}}^*$ são funções variacionais a serem determinadas requerendo-se que a energia do sistema seja minimizada.

A transformação unitária S_2 atua como um operador deslocamento sobre os operadores $a_{\vec{k}}^+$ e $a_{\vec{k}}$, ou seja

$$\begin{aligned} S_2^{-1} a_{\vec{k}}^+ S_2 &= a_{\vec{k}}^+ + f_{\vec{k}}^* \\ S_2^{-1} a_{\vec{k}} S_2 &= a_{\vec{k}} + f_{\vec{k}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Este cálculo variacional é baseado no uso do vetor de estado $S_2 |0\rangle$ e está intimamente relacionado à aproximação introduzida por Tomonaga³⁰ no tratamento do acoplamento entre mésons e núcleons, o qual mais tarde foi chamado de aproximação de acoplamento intermediário. A aproximação de Tomonaga consiste numa técnica variacional

baseada na hipótese que os mésons (riplons) no campo em torno do núcleon (partícula-carregada) são emitidos independentemente, então não há correlação, isto é interação, entre mésons (riplons) diferentes.

Para a função de onda do estado fundamental da partícula escolhemos

$$|e\rangle = \left(\frac{M\lambda}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M\lambda}{2\hbar} r^2\right) \exp(-i \frac{M\lambda}{2\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}) \quad (4.11)$$

onde $\vec{p}_0$ e λ são dois parâmetros variacionais, os quais serão obtidos minimizando a energia do sistema.

Definindo a função $F(a, \lambda, f_{\vec{k}}, \vec{p}_0, \vec{\mu})$ por

$$F(a, \lambda, f_{\vec{k}}, \vec{p}_0, \vec{\mu}) = \langle e | 0 | S_2^{-1} \mathcal{H}' S_2' | 0 \rangle | e \rangle, \quad (4.12)$$

e utilizando as equações (4.7), (4.9) e (4.11), temos

$$\begin{aligned} F(a, \lambda, f_{\vec{k}}, \vec{p}_0, \vec{\mu}) = & \frac{\hbar\lambda}{2} + \frac{\hbar\lambda}{4} p_0^2 + \sqrt{\frac{m\hbar\lambda}{2}} \vec{\mu} \cdot \vec{p}_0 + \sum_{\vec{k}} (\hbar\omega_{\vec{k}} + \\ & + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \hbar\vec{\mu} \cdot \vec{k}) |f_{\vec{k}}|^2 + \sum_{\vec{k}} (v_{\vec{k}}^* f_{\vec{k}} + \\ & + v_{\vec{k}} f_{\vec{k}}) \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar}{4m\lambda} k^2\right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

A função variacional $f_{\vec{k}}$ e o parâmetro $\vec{p}_0$ são determinados minimizando a equação (4.13) com respeito a $f_{\vec{k}}$ e $\vec{p}_0$ respectivamente, ou seja

$$\frac{\delta F}{\delta f_{\vec{k}}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta F}{\delta p_{0j}} = 0 \quad \text{para } j = x, y \quad (4.14)$$

Os valores ótimos de $f_{\vec{k}}$ e $\vec{p}_0$ obtidos são

$$f_{\vec{k}} = - \frac{V_{\vec{k}} \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar k^2}{4M\lambda}\right]}{\hbar\omega_{\vec{k}} + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \hbar\vec{\mu} \cdot \vec{k}} \quad (4.15)$$

e

$$\vec{p}_0 = \left(\frac{2M}{\hbar\lambda}\right)^{1/2} \vec{\mu} \quad (4.16)$$

Substituindo as equações (4.15), (4.16) em (4.13) e expandindo a função F até termos da ordem de μ^2 , obtêm-se

$$F(a, \lambda, \vec{\mu}) = \frac{\hbar\lambda}{2} - \sum_{\vec{k}} \frac{|V_{\vec{k}}|^2 \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar k^2}{2M\lambda}\right]}{\hbar\omega_{\vec{k}} + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M}} - \frac{M}{2} \mu^2 \left[1 + \frac{\hbar^2}{M} \sum_{\vec{k}} \frac{k^2 |V_{\vec{k}}|^2 \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar k^2}{2M\lambda}\right]}{\left(\hbar\omega_{\vec{k}} + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M}\right)^3} \right] \quad (4.17)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito representam a energia do estado fundamental E_0

$$E_0 = \frac{\hbar\lambda}{2} - \sum_{\vec{k}} \frac{|V_{\vec{k}}|^2 \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar k^2}{2M\lambda}\right]}{\hbar\omega_{\vec{k}} + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M}} \quad (4.18)$$

e o coeficiente do termo μ^2 é a massa efetiva da partícula,

$$\frac{m^*}{M} = 1 + \frac{\hbar^2}{M} \sum_{\vec{k}} \frac{|V_{\vec{k}}|^2 k^2 \exp\left[-\frac{(1-a)^2 \hbar k^2}{2M\lambda}\right]}{\left(\hbar\omega_{\vec{k}} + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M}\right)^3} \quad (4.19)$$

A equação (4.18) deverá agora, ser minimizada com relação aos parâmetros variacionais a e λ e estes mesmos valores serão utilizados no cálculo da massa efetiva. Como a equação da energia do estado fundamental não é linear nos parâmetros a e λ em geral é

necessário utilizarmos aproximações numéricas para resolver o sistema de equações

$$\frac{\partial E_0}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_0}{\partial a} = 0 \quad (4.20)$$

No capítulo seguinte, aplicaremos este método, para obtermos a energia do estado fundamental e a massa efetiva para os seguintes dois sistemas: elétrons na superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira e finalmente, para elétrons na interface de misturas separadas de ^3He - ^4He .

CAPÍTULO V
APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL

Neste capítulo aplicamos o formalismo desenvolvido anteriormente para obtermos a energia do estado fundamental e a massa efetiva de elétrons localizados na superfície de filmes de hélio líquido adsorvidos em neon sólido e safira e também para elétrons localizados na interface de mistura separada de ^3He - ^4He . A escolha dos substratos neon sólido e safira foi devida às experiências que têm sido realizadas recentemente por Kajita³² e Andrei³³, respectivamente.

Recentemente Farias³⁴, depois Hipólito et.al³⁵ utilizaram o formalismo de integrais de trajetória introduzido por Feynman³⁶ para o problema do polaron, nos cálculos da energia do estado fundamental e da massa efetiva do complexo formado pelo elétron e os ríplons o qual chamaremos aqui de polaron. Os cálculos citados acima, foram desenvolvidos estritamente na região de acoplamentos fortes (campos elétricos fortes). Um cálculo similar foi realizado por Jackson e Platzman³⁷ para um filme de espessura $100\text{\AA}$. Eles encontraram um comportamento tipo transição de fase para o polaron. Utilizando este mesmo método Saitoh³⁸ tem investigado as propriedades deste polaron na presença de um campo magnético forte.

Antes porém de aplicarmos o método variacional propriamente dito aos sistemas, será útil discutirmos com algum detalhe a estabilidade de uma interface quando carregada com elétrons. A superfície de um líquido está normalmente sujeita a duas forças, devido à gravidade e à tensão superficial. Ambas são responsáveis pela estabilidade da superfície do líquido.

Quando um campo elétrico é aplicado perpendicularmente à superfície, uma força adicional aparecerá reduzindo os efeitos de estabilização devido à gravidade e à tensão superficial. Evidente-

mente o espectro das excitações superficiais será marcadamente alterado e para campos suficientemente fortes uma instabilidade, chamada instabilidade eletrohidrodinâmica, é esperada.

A condição para termos igualdade de pressão na interface de dois fluídos é governada pela equação³⁹

$$(\rho_- + \rho_+) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\rho_- - \rho_+) g \xi + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

onde estamos considerando a interface situada no plano x-y, ρ_- e ρ_+ são as densidades da fase abaixo e acima da interface respectivamente, Φ é o potencial velocidade, g é a aceleração da gravidade, σ a tensão superficial e ξ é a elongação da interface da posição de equilíbrio.

Fazendo: $\xi = \xi_0 e^{i(Kx - \omega t)}$, e utilizando: $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, obteremos a relação de dispersão para ondas interfaciais, que é dada por:

$$(\rho_- + \rho_+) \omega^2 = (\rho_- - \rho_+) g K + \sigma K^3. \quad (5.2)$$

Aqui utilizamos uma simplificação (que em geral é satisfeita experimentalmente): a distância da interface à base e ao teto do recipiente que contém os fluídos é grande o suficiente tal que a aproximação $\tanh(Kd_{\pm}) \approx 1$ é verificada, onde d_+ (d_-) é a espessura do fluído a cima (abaixo) da interface.

Para valores pequenos de K a equação (5.2) terá o comportamento das ondas de gravidade onde $\omega \propto K^{1/2}$ e para grandes valores de K o comportamento das ondas de capilaridade onde $\omega \propto K^{3/2}$, será obtido. A transição entre estes dois tipos de onda ocorre em torno do comprimento de capilaridade a :

$$a = \left[\sigma / (\rho_- - \rho_+) g \right]^{1/2} \quad (5.3)$$

Incidentalmente a velocidade de fase das ondas interfaciais tem um mínimo em $K=1/a$. No caso da interface estar carregada, as ondas com este particular vetor de onda serão importantes.

Leiderer et al.⁴⁰ mostraram que a equação (5.2) descreve muito bem a interface de misturas de ^3He - ^4He onde uma fase rica superfluída de ^4He coexiste com uma fase rica normal de ^3He . É conhecido⁴¹ que para temperaturas abaixo do ponto tricrítico, a interface de mistura ^3He - ^4He apresenta uma barreira de potencial através da qual íons podem formar estados ligados. A direção na qual esta barreira é efetiva depende do sinal das cargas dos íons, ou seja, íons positivos não penetram do ^4He para o ^3He e íons negativos não penetram do ^3He para o ^4He . Então com a aplicação de um campo elétrico apropriado pode-se localizar os íons próximos à interface. Para temperaturas da ordem 0,3K a barreira de potencial tem sido estimada ser $\Delta W \sim 220\text{K}$. Quando aproxima-se do ponto tricrítico, onde a temperatura T_t é de 0,867K e a concentração de ^3He é de 0,675, a barreira decresce rapidamente tal que ΔW fica comparável a $K_B T$ e os íons podem passar a barreira pela simples excitação térmica.

Nas figuras 7a e 7b mostramos as barreiras de potencial para íons positivos e negativos respectivamente.

Figura 7a

Figura 7b

Nestas figuras as linhas pontilhadas são os cálculos de Leiderer et.al.⁴¹, a linha tracejada representa um campo elétrico externo perpendicular à interface (neste caso $E=50\text{V/cm}$) e a linha sólida é a soma das duas contribuições iniciais.

Estaremos restritos às baixas temperaturas, onde o tempo em que os íons permanecem ligados é suficientemente longo ($\tau \propto \exp(\Delta W/K_B T)$), de tal forma que eles se reorganizam formando uma camada de cargas bidimensional em equilíbrio. O sinal dos íons será irrelevante para os efeitos que aqui serão estudados.

Quando a interface está carregada, os íons, sob a influência de um campo elétrico externo homogêneo, exercem uma pressão na interface. Para uma distribuição de cargas completamente uniforme esta pressão será também uniforme. Qualquer deslocamento local da interface resultará num rearranjo dos íons, os quais se acumularão, para uma perturbação senoidal por exemplo, nos "vales", deixando as "cristas" com uma densidade abaixo da média. Os íons tendem, então, a aumentar qualquer deformação da interface (Veja esquematicamente este comportamento na Figura 8).

Figura 8

Consequentemente na equação de movimento da interface carregada um termo adicional aparecerá devido à pressão provocada pela descontinuidade na componente perpendicular do campo elétrico

$$(\rho_- + \rho_+) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\rho_- - \rho_+) g \xi + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{|E(x)^+|^2 - |E(x)^-|^2}{8\pi} \quad (5.4)$$

onde os sinais (+) e (-) se referem a fase superior e inferior respectivamente.

Supondo que a interface esteja carregada com a densidade de saturação n_s , o campo médio na fase superior ou inferior (dependendo do tipo de íon usado) será completamente blindado e no outro lado da interface será

$$E_{0\perp} = 4\pi n_s e \quad (5.5)$$

onde e é a carga elementar.

Para determinarmos a modulação da pressão eletrostática na interface devido à redistribuição dos íons na presença dos ríplons, consideraremos o potencial eletrostático nas vizinhanças da interface como sendo⁴²

$$\phi(z=\xi) = \phi_0 + \phi_1 e^{i(Kx-\omega t)} e^{-Kz} \quad (5.6)$$

com $\phi_0 = -4\pi n_s e z$, ou seja, o potencial da interface não perturbada e ϕ_1 uma pequena correção que satisfaz a equação de Laplace, $\Delta\phi_1 = 0$. A partir da equação de continuidade para as cargas movendo-se na interface sob a ação de um campo elétrico paralelo $E_{\parallel}$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div}(n\vec{\mu}E_{\parallel}) = -\text{div}\left[n\vec{\mu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\Big|_{z=\xi}\right] \quad (5.7)$$

e lembrando que

$$n = \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=\xi} \quad (5.8)$$

obtemos

$$\phi_1 = \frac{(4\pi n_s)^2 e \mu K \xi_0}{4\pi n_s \mu K - i\omega} \quad (5.9)$$

Então, a pressão devido ao campo elétrico será dada por

$$p(x) = \frac{|E(x)|^2}{8\pi} \approx \frac{1}{8\pi} \left[(4\pi n_s e)^2 + 8\pi n_s e \phi_1 e^{i(Kx - \omega t)} \right] \quad (5.10)$$

Inserindo este termo na equação (5.4), obteremos a relação de dispersão para a interface completamente carregada

$$(\rho_- + \rho_+) \omega^2 = (\rho_- - \rho_+) gK + \sigma K^3 - \frac{16\pi^2 (n_s e)^3 \mu K}{4\pi n_s e \mu K - i\omega} K^2 \quad (5.11)$$

Desta equação observamos, que em geral, os íons além de diminuir a frequência dos riplons eles também os amortecem. Podemos analisar dois casos limites que ocorrem na equação (5.11):

$$(a) \quad \omega \ll 4\pi n_s e \mu K, \text{ ou equivalentemente } v_f = \frac{\omega}{K} \ll E_1 \mu.$$

Neste limite a equação (5.11) reduzirá à seguinte forma

$$(\rho_- + \rho_+) \omega^2 = (\rho_- - \rho_+) gK + \sigma K^3 - 4\pi (n_s e)^2 K^2 \quad (5.12)$$

o que concorda excelentemente com os resultados de Gor'kov e Cherenikova⁴³ e Mima et.al.⁴⁴

$$(b) \quad \omega \gg 4\pi n_s e \mu K$$

Neste limite o último termo da equação (5.11) será nulo, uma vez que a mobilidade dos íons será tão pequena que eles não poderão seguir as ondas interfaciais. Então o espectro de excitação será igual ao de uma interface não carregada.

A instabilidade da interface mencionada no início segue imediatamente da equação (5.11), uma vez que para uma densidade crítica

$$n_s e = \left[(\rho_- - \rho_+) g \sigma / 4\pi^2 \right]^{1/4} \quad (5.13)$$

A frequência dos riplons anula-se, $\omega(K_c) \rightarrow 0$, correspondendo a um campo crítico

$$E_c = \left[64\pi^2 (\rho_- - \rho_+) g \sigma \right]^{1/4} \quad (5.14)$$

O vetor de onda K_c desta instabilidade é

$$K_c = \left[(\rho_- - \rho_+) g / \sigma \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

que é igual ao inverso do comprimento de capilaridade definido em (5.3).

Wanner e Leiderer¹³ obtiveram excelentes resultados experimentais para a relação de dispersão tanto para íons positivos quanto para íons negativos. Os resultados por eles obtidos estão mostrados nas figuras 9 e 10.

Figura 9

Na figura 9 estão os resultados da relação de dispersão na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$, com a interface completamente carregada de íons positivos para uma temperatura de 0.665K. O campo crítico é $E_c = 875\text{V/cm}$ e corresponde a uma densidade $n_s = 4.8 \times 10^8 \text{ cm}^{-2}$. Os símbolos (▲) são para um campo tal que $E/E_c = 0.71$, (■) para $E/E_c = 0.995$. As linhas tracejadas são calculadas pela equação (5.12).^c A linha cheia é obtida para a interface não carregada. O vetor de onda crítico é $K_c \approx 82 \text{ cm}^{-1}$.

Figura 10

A figura 10 mostra os resultados da relação de dispersão na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$, com a interface completamente carregada com íons negativos para uma temperatura de 0.567K. O campo crítico é $E_c = 1130\text{V/cm}$ e o vetor de onda crítico é $K_c \approx 63\text{cm}^{-1}$. Os símbolos (▲) são para um campo elétrico tal que $E/E_c = 0.88$, (■) para $E/E_c = 0.99$. As linhas tracejadas são calculadas pela equação (5.12) e a linha cheia representa a dispersão para a interface não carregada nesta temperatura.

Pode-se observar quão sensível é o campo elétrico crítico com a temperatura, pois ele depende das propriedades da interface, mais propriamente da tensão interfacial a qual varia fortemente com a temperatura.

Se a aproximação feita na equação (5.2), de que $\tanh Kd \approx 1$ não é aplicável, deveremos levar em conta o efeito do substrato. Para um filme de hélio superfluido, as equações linearizadas que governam o movimento do fluido são

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \nabla p + \left[\left(\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - e n \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta(z-\xi) - \frac{3\eta}{(z+d)^4} - \rho g \right] \hat{z} \quad (5.16)$$

A condição de incompressibilidade é dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.17)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade do fluido, p é a pressão, σ é a tensão superficial, d é a espessura do filme, η é a constante de van der Waals caracterizando a força entre o substrato e o hélio, ξ é o desvio da superfície da posição de equilíbrio, ϕ é o potencial eletrostático, n é a densidade de carga, ρ é a densidade do hélio e e é a carga elementar. Novamente analisaremos o caso de perturbações da forma

$$\xi = \xi_0 e^{i(Kx - \omega t)} \quad (5.18)$$

Agora se faz necessário, a condição de contorno em $z = -d$, de que a componente z da velocidade seja nula, ou seja

$$\vec{v} \cdot \hat{z} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (5.19)$$

Então, a relação de dispersão será

$$\omega^2 = \omega_0^2 \tanh(Kd) \quad (5.20)$$

onde

$$\omega_0^2 = \left(\frac{3\eta}{\rho d^4} + g \right) K + \frac{\sigma}{\rho} K^3 - \frac{4\pi e^2 n^2}{\rho} K^2 F(K) \quad (5.21)$$

onde $F(K)$ é a função que considera o efeito das cargas imagens no substrato.

$$F(K) = \frac{1 + \epsilon_s - (1 - \epsilon_s) e^{-2Kd}}{1 + \epsilon_s + (1 - \epsilon_s) e^{-2Kd}} \quad (5.22)$$

onde ϵ_s é a constante dielétrica do substrato.

Evidentemente no limite $d \rightarrow \infty$, a equação (5.12) é reobtida.

No limite de filmes finos ($Kd \ll 1$) a equação (5.22) será

$$F(K) = \epsilon_s \quad (5.23)$$

A instabilidade eletrohidrodinâmica ocorre para uma densidade crítica

$$n_c = \frac{(3\eta\sigma)^{1/4}}{(2\pi e^2 \epsilon_s)^{1/2} d} \quad (5.24)$$

e o vetor de onda K_c desta instabilidade é

$$K_c = \frac{(3\eta/\sigma)^{1/2}}{d^2} \quad (5.25)$$

Após termos feito uma análise detalhada das propriedades de uma interface carregada, faremos a aplicação do método variacional para obtermos a energia do estado fundamental e a massa efetiva para elétrons na interface de misturas separadas de ^3He - ^4He e depois para filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e safira.

(A) - Misturas ^3He - ^4He

O potencial que descreve a interação elétron-riplon na interface da mistura ^3He - ^4He pode ser obtido a partir da equação (3.30), e é dado por

$$V_{\vec{K}} = \left[\frac{\hbar K}{2A(\rho_d + \rho_3) \omega_{\vec{K}}} \right]^{1/2} eE_{\perp} \quad (5.26)$$

com ρ_3 e ρ_4 sendo as densidades do ^3He e do ^4He respectivamente. A relação de dispersão é dada pela equação (5.2), ou seja

$$(\rho_4 + \rho_3) \omega_K^2 = (\rho_4 - \rho_3) gK + \sigma K^3 \quad (5.27)$$

Substituindo as equações (5.26) e (5.27) na expressão da energia do estado fundamental, equação (4.18), e reescrevendo-a em termos de grandezas adimensionais, obteremos a seguinte expressão

$$E_O^* = \frac{\lambda'}{2} - 2\alpha' \int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{x(1+x^2)}} \frac{\exp\left[-\frac{(1-a)^2}{\lambda'} x^2\right]}{\sqrt{\rho_{4-3}} \sqrt{x(1+x^2)} + \frac{a^2}{\gamma} x^2} \quad (5.28)$$

onde α' é conhecido como constante de acoplamento e é definida por

$$\alpha' = \frac{e^2 E_1^2 \sqrt{\rho_{4-3}}}{\hbar^2 K_C^2 \frac{8\pi\sigma}{2m}} \quad (5.29)$$

$$\text{com } \rho_{4-3} = \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_4 + \rho_3} \text{ e } \gamma = \frac{2m\sqrt{gK_C}}{\hbar K_C^2}.$$

K_C é a constante de capilaridade. Para elétrons na interface usaremos o valor experimental $K_C \approx 63 \text{ cm}^{-1}$ obtido por Wanner e Leiderer¹³. E_O^* está dado em unidades de $\hbar^2 K_C^2 / 2m$ e λ' em unidades de $\hbar K_C^2 / 2m$. A constante de acoplamento pode ser reescrita na forma

$$\alpha' = 1.43 E_1^2 \quad (5.30)$$

onde o campo elétrico está em unidades de V/cm.

A massa efetiva é obtida através da equação (4.19) na qual substituímos as equações (5.26) e (5.27) como tendo a seguinte forma

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{4\alpha'}{\gamma^2} \int_0^1 dx \frac{x^4}{\sqrt{x(1+x^2)}} \frac{\exp\left[-\frac{(1-a)^2}{\lambda'} x^2\right]}{\left[\sqrt{\rho_{4-3}} \sqrt{x(1+x^2)} + \frac{a^2}{\gamma} x^2\right]^3} \quad (5.31)$$

A energia do estado fundamental será, finalmente, calculada minimizando a equação (5.18) com relação aos parâmetros variacionais a e λ' , para um dado campo elétrico externo. Então devemos resolver as seguintes equações

$$\frac{\partial E_0^*}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_0^*}{\partial \lambda'} = 0 \quad (5.32)$$

Estas equações foram resolvidas numericamente pelo método modificado de Newton⁴⁵ para sistemas de equações não lineares.

Na figura 11 estão os resultados para a energia em função do campo elétrico. A energia apresenta dois ramos distintos: o primeiro correspondendo ao regime de acoplamento fraco e o segundo ao regime de acoplamento forte. A interseção dos dois ramos ocorre para o campo crítico de 0,65V/cm. Nesta região a energia de ligação é extremamente baixa, da ordem de 10^{-10} meV, não sendo portanto acessível fisicamente.

Farias³⁴ e Hipólito et.al.³⁵ utilizaram o método da integral de trajetória, introduzido por Feynman para calcular a energia de ligação. Seus cálculos são válidos somente no regime de acoplamento forte, e estão em excelente concordância com os nossos.

A massa efetiva é obtida através da equação (5.31), onde os parâmetros a e λ' são os mesmos que minimizaram a energia do estado fundamental. A transição do regime de acoplamento fraco para o de acoplamento forte é melhor visualizado no gráfico da massa efetiva mostrado pela figura 12.

(B) Filmes de Hélio

O potencial que descreve a interação elétron-riplon para filmes de hélio está dado pela equação (3.30) e reescreveremos aqui

Figura 11 - Energia do estado fundamental de um elétron ligado à interface da mistura ^3He - ^4He em função do campo elétrico externo. O valor do campo elétrico externo crítico é de $E_{1c} = 0,65 \text{ V/cm}$ onde ocorre a transição. A energia de ligação correspondente é extremamente baixa não sendo acessível experimentalmente.

Figura 12- Massa efetiva de um elétron ligado à interface da mistura ^3He - ^4He , em unidades da massa atômica do ^4He , em função do campo elétrico externo. O campo crítico é $E_c = 0,65\text{V/cm}$.

$$V_K = \left(\frac{\hbar K \tanh(Kd)}{2A\rho\omega_K} \right)^{1/2} \left(eE_{\perp} + \frac{\Omega_1}{d^2} \right) \quad (5.33)$$

onde a relação de dispersão é

$$\omega_K^2 = (g' + \sigma K^2 / \rho) K \tanh(Kd) \quad (5.34)$$

Devido à presença do substrato, a constante de capilaridade é redefinida na forma

$$K_c = (\rho g' / \sigma)^{1/2} \quad (5.35)$$

onde

$$g' = g + \frac{3\eta}{\rho d^4} \quad (5.36)$$

Substituindo as equações (5.33) e (5.34) na expressão da energia do estado fundamental, equação (4.18) e em termos de grandes adimensionais, obtemos finalmente a seguinte expressão

$$E_o^* = \frac{\lambda'}{2} - 2\alpha \int_0^1 dx \frac{x^2 \tanh(xd)}{\sqrt{x(1+x^2)} \tanh(xd)} \frac{\exp\left[-\frac{(1-a)^2}{\lambda'} x^2\right]}{\sqrt{x(1+x^2)} \tanh(xd) + \frac{a^2}{\gamma} x^2} \quad (5.37)$$

onde E_o^* está expresso em unidades de $\hbar^2 K_c^2 / 2m$, λ' em unidades de $\hbar K_c^2 / 2m$ e d em unidades de K_c^{-1} .

A constante de acoplamento é definida aqui como sendo

$$\alpha = \frac{(eE)^2}{8\pi\sigma \frac{\hbar^2 K_c}{2m}} \quad (5.38)$$

$$\text{onde: } E = \frac{e}{4d^2} \left(\frac{\epsilon_s - 1}{\epsilon_s + 1} \right) + E_{\perp} \quad \text{e} \quad \gamma' = \frac{2m\sqrt{g'K_c}}{\hbar K_c^2}$$

ϵ é a constante dielétrica do substrato, para neon-sólido $\epsilon_N \approx 1,24$ e para a safira $\epsilon_S \approx 19$.

No limite de filmes finos ($d < 2000 \text{ \AA}$), $g' \approx \frac{3\eta}{\rho d^4}$. Então a constante de acoplamento eq.(5.38) fica neste limite sendo dada por

$$\alpha_N = 19,7 \left[0,13 + \frac{E_{\perp}}{3} \times d^2 \times 10^{-8} \right]^2$$

$$K_{CN} = \frac{1,455 \times 10^9}{d^2} \quad (5.39)$$

$$\gamma_N = 7,13 \times 10^{-5} \times d$$

para o substrato neon sólido, e

$$\alpha_S = 0,694 \left[0,98 + \frac{E_{\perp}}{3} \times 10^{-8} \times d^2 \right]^2$$

$$K_{CS} = \frac{7,746 \times 10^9}{d^2} \quad (5.40)$$

$$\gamma_S = 3,1 \times 10^{-5} \times d$$

para o substrato safira.

Nas expressões (5.39) e (5.40) o campo elétrico está em unidades de V/cm e a espessura do filme d em $\text{\AA}$.

A massa efetiva é obtida pela equação (4.19) na qual substituímos as equações (5.33) e (5.34) e tem a seguinte forma

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{4\alpha}{\gamma^2} \int_0^1 dx \frac{x^4 \tanh(xd)}{\sqrt{x(1+x^2)} \tanh(xd)} \frac{\exp \left[- \frac{(1-a)}{\lambda} x^2 \right]}{\left[\sqrt{x(1+x^2)} \tanh(xd) + \frac{a^2}{\gamma} x^2 \right]^3} \quad (5.41)$$

No limite de longos comprimentos de onda e filmes finos, podemos aproximar a relação de dispersão eq.(5.34) e o potencial de interação eq.(5.33) por

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{g'd} K \quad (5.42)$$

$$v_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar K}{2A_0} \sqrt{\frac{d}{g'}} \right)^{1/2} \left(eE_{\perp} + \frac{\Omega_1}{d^2} \right)$$

Nesta aproximação podemos obter analiticamente os casos limites de acoplamentos forte e fraco. No caso de acoplamento fraco temos que a constante de acoplamento é pequena ($\alpha < 1$) e $a = 1$. É evidente da eq. (5.37) que neste limite o mínimo da energia, com relação ao parâmetro λ' , se dá para $\lambda' = 0$. Então a energia do estado fundamental e a massa efetiva serão respectivamente,

$$E_O^* \approx -2\gamma\alpha$$

$$\frac{m^*}{m} \approx 1$$

No caso de acoplamento forte correspondendo à constante de acoplamento grande ($\alpha \gg 4$) e $a \rightarrow 0$, teremos:

$$E_O^* \approx -\alpha + \sqrt{\alpha} + \dots \quad (5.44)$$

$$\frac{m^*}{m} \approx 1 + \frac{2\alpha}{\gamma^2} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma^2} + \dots$$

Em geral a equação (5.37), para um dado campo elétrico e uma dada espessura, deverá ser minimizada nos parâmetros variacionais a e λ' através das equações

$$\frac{\partial E_O^*}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_O^*}{\partial \lambda'} = 0 \quad (5.45)$$

Analogamente ao que acontece na mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$, a energia do estado fundamental apresenta dois ramos distintos. A interseção dos dois ramos ocorre em uma constante de acoplamento a qual

Chamamos de constante de acoplamento crítica.

Para $\alpha = \alpha_c$ existe uma descontinuidade na derivada da energia caracterizando um comportamento do tipo transição de fase de primeira ordem. Quando $\alpha < \alpha_c$, o polaron estará em um estado quase-livre. Esta conclusão pode ser obtida analisando-se a função de onda eletrônica dada pela equação (4.11), pois como vimos, no acoplamento fraco $\lambda' = 0$. Para $\alpha > \alpha_c$ o polaron estará em um estado tipicamente localizado. Então, temos dois parâmetros, os quais permite-nos passar de um regime para outro. Estes parâmetros externos são: a espessura do filme e o campo elétrico o qual pressiona o elétron contra a superfície. A rápida mudança no estado do polaron é melhor observada no comportamento da massa efetiva. Nas figuras 13-15 e 14-16 estão os resultados da energia e da massa em função do campo elétrico, para várias espessuras do filme. Observamos que para filmes finos de hélio, a contribuição do substrato é muito importante e domina totalmente o campo elétrico externo. Das espessuras plotadas na figura 13 o filme de $15\text{\AA}$ é o único que apresenta o valor de energia em um intervalo, acessível fisicamente de modo que a transição referida acima poderá ser detetada experimentalmente.

A transição de fase que estamos nos referindo aqui como uma localização é tomada no mesmo espírito que no trabalho de Toyozawa⁴⁶, isto é, em termos da rapidez e magnitude da mudança da massa efetiva do sistema.

Um resultado experimental recente obtido por Andrei³³, tem confirmado esta previsão da localização do elétron num estado polarônico para filmes da ordem de $1000\text{\AA}$ adsorvidos em substrato de safira num intervalo de temperatura de $0,4\text{K}$ a $1,0\text{K}$. Nesta experiência são medidas a mobilidade e massa efetiva dos elétrons sobre o filme de hélio. Para uma dada espessura crítica a mobilidade tem um salto de 4,5 ordens de grandeza e a massa efetiva aumenta a

proximadamente quatro ordens de grandeza. Caracterizando, assim, uma transição no estado do polaron superficial, como predita pela teoria de um elétron. Evidentemente, neste experimento existe a presença de outros elétrons, na verdade uma densidade de $6 \times 10^7 \text{ cm}^{-2}$ é utilizada e o efeito de muitos corpos deve ser levado em conta.

Na figura 17 estão os resultados experimentais obtidos por Andrei³³ para filmes de hélio adsorvidos em safira.

No capítulo seguinte estudaremos o problema de um dimple de muitos elétrons tanto na interface de misturas separadas de ^3He - ^4He como na superfície de hélio. Obteremos as condições para a formação de tal dimple, a energia de formação, a massa efetiva, o raio e a densidade de carga no dimple.

Figura 13 - Energia do estado fundamental em função do campo elétrico externo para um elétron na superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido. Plotamos os resultados para 3 espessuras de filmes 15, 50 e 100 Å. As setas indicam o campo crítico no qual ocorre a transição de um estado quase livre para um estado ligado. Apenas para filmes finos (~ 15 Å) a energia de ligação é acessível experimentalmente.

Figura 14 - Massa efetiva de um elétron na superfície de filmes de hélio líquido adsorvidos em neon sólido, em unidades da massa do elétron livre, em função do campo elétrico externo . Plotamos os resultados para três espessuras 15, 50 e 100 Å. As linhas tracejadas correspondem aos campos críticos onde ocorre a transição do estado quase livre para o estado localizado.

Figura 15 - Energia do estado fundamental em função do campo elétrico externo para um elétron na su perfície de filmes de hélio adsorvidos em sa fira. Plotamos os resultados para três es - pessuras de filme 500, 1000 e 2000 Å. As setas indicam o campo crítico no qual ocorre a transição de um estado quase livre para um estado ligado.

Figura 16 - Massa efetiva de um elétron na superfície de filmes de hélio adsorvidos em safira, em unidades da massa do elétron livre em função do campo elétrico externo. Plotamos os resultados para três espessuras de filme 500 , 1000 e 2000 Å. As linhas tracejadas correspondem aos campos críticos onde ocorre a transição.

Figura 17 - Medida da mobilidade de elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em safira obtida por Andrei³³. Observamos claramente a mudança abrupta na mobilidade para $T=0,4\text{K}$ em torno da espessura $1000 \text{ \AA}$. Acima desta espessura os elétrons estavam quase livres, abaixo de $1000 \text{ \AA}$ os elétrons passam para um regime onde estão localizados. O campo elétrico E neste caso é de $\sim 80 \text{ V/cm}$. Os pontos (●) são obtidos aumentando-se a espessura e os (▲) diminuindo-se a espessura. A densidade dos elétrons é de $6 \times 10^7 \text{ cm}^{-2}$.

CAPÍTULO VI

DEPRESSÕES COM MUITOS ELÉTRONS NA SUPERFÍCIE DE HÉLIO LÍQUIDO

Quando um campo elétrico intenso é aplicado ao sistema e létron-superfície de hélio líquido aparecerá uma deformação na superfície devido à pressão do elétron. Esta deformação da superfí - cie em torno do elétron forma uma depressão que tende a localizá - lo no plano.

Gor'kov e Chernicova⁴³, depois Ikezi^{44,50}, previram teori - camente a possibilidade da superfície carregada de um fluído adqui - rir uma estrutura macroscópica periódica, quando um campo elétrico intenso ($\sim 10^4$ V/cm) fôsse aplicado ao sistema. Através de considera - ções de energia, a estrutura periódica favorecida teria uma sime - tria hexagonal.

Esta previsão foi recentemente confirmada pelos experi - mentos de Wanner e Leiderer¹³ e Giannetta e Ikezi¹⁴, que observa - ram o fenômeno por meio de reflexão de luz. Nestes experimentos , constatou-se a simetria hexagonal e também observou-se que o parâ - metro de rede é da ordem do inverso da constante de capilaridade (K_c).

Como vimos no capítulo anterior, é esperado que o campo e létrico externo reduza a frequência dos riplons e em particular pa - ra o vetor de onda K_c , um campo elétrico crítico E_c pode anular a frequência dos riplons e a superfície tornar-se instável, deforman do-se espontaneamente. O que é surpreendente é que nem todas as car - gas deixam a superfície durante a instabilidade e as cargas que ne - la permanecem não estão distribuídas homogeneamente mas sim em um novo estado coletivo com formato periódico de grupos carregados com aproximadamente 10^6 elétrons cada um, dando origem ao chamado cris - tal de "dimples".

A formação deste cristal foi observada pela primeira vez

na interface de mistura ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$.

(A) Mistura ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$

Nesta secção investigaremos algumas propriedades de uma única depressão com muitos elétrons, localizada na interface da mistura ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Determinaremos o campo crítico, a partir do qual ocorrerá a formação da depressão, a massa efetiva e o raio médio da depressão em função do campo elétrico externo.

Wanner e Leiderer¹³ observaram experimentalmente a formação de uma única depressão, a qual continha um grande número de elétrons ($N \sim 10^6$ elétrons). Neste caso o campo crítico, ou seja, o campo elétrico externo mínimo para o qual haverá a formação de tal depressão, foi de 1120 V/cm. Shikin e Leiderer⁴⁷ têm investigado as propriedades de uma única depressão com muitos elétrons e para isso eles admitem que os elétrons estão localizados em um buraco o qual tem a forma de um disco, como mostra a figura 18.

Figura 18

Consideraremos uma depressão constituída por $N \sim 10^6$ elétrons, como a observada experimentalmente, então $Q=Ne$ e $M=Nm$ onde e e m são a carga elementar e a massa do elétron, respectivamente.

A constante de acoplamento definida na equação (5.30)²⁹ é aqui redefinida da seguinte forma

$$\alpha^* = \frac{Q^2 E_{\perp}^2 \sqrt{\rho_{4-3}}}{8\pi\sigma \frac{\hbar^2 K^2}{2M} c} = N^3 \alpha \quad (6.1)$$

onde $K_c = (\rho_4 - \rho_3)g/\sigma \approx 63\text{cm}^{-1}$ e α é a constante de acoplamento no caso de um elétron.

Como a constante de acoplamento α^* é proporcional ao cubo do número de elétrons, o "polaron" estará na região de acoplamento forte, mesmo para um campo elétrico externo muito baixo. Já estudamos o regime de acoplamento forte e sabemos que neste limite o parâmetro variacional a tende a zero. Então, para obtermos a energia de formação de uma depressão com muitos elétrons precisaremos considerar, também, a energia de interação coulombiana entre os elétrons que se encontram no interior da depressão. Esta energia é facilmente obtida como sendo

$$V_c = \int \psi^*(\vec{r}) \frac{Q^2}{2r} \psi(\vec{r}) d^2r \quad (6.2)$$

onde a função de onda $\psi(\vec{r})$ é dada por

$$|\psi\rangle = \left(\frac{M\lambda}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M\lambda r^2}{2\hbar}\right) \exp(-i\sqrt{\frac{M\lambda}{2\hbar}} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}) S_2 |0\rangle \quad (6.3)$$

e S_2 é a transformação canônica definida pela equação (4.9).

Efetuada a integração na equação (6.2) obtemos

$$V_c = \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{M\lambda\pi}{\hbar}} \quad (6.4)$$

ou, em unidades de $\hbar^2 K_c^2 / 2M$

$$V_c^* = \frac{MQ^2}{\hbar^2 K_c} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \quad (6.5)$$

A expressão para a energia de formação da depressão com muitos elétrons é então facilmente obtida da equação (5.28), onde faremos as seguintes modificações: $\alpha \rightarrow \alpha^*$; $a=0$ e adicionamos o termo

devido à interação dos elétrons no interior da depressão, V_c . Como estamos interessados na localização da depressão, os efeitos cinéticos poderão ser desprezados, o que significa eliminar o termo $(\lambda'/2)$ existente na expressão da energia, equação (5.28).

Então, em unidades de $\hbar^2 K_c^2 / 2M$, a energia será

$$E_O^* = V_c^* - \frac{2\alpha^*}{\sqrt{\rho_{4-3}}} \int_0^\infty dx \frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/\lambda'} \quad (6.6)$$

Podemos reescrever a energia E_O^* em termos da função exponencial integral $E_i(x)$ da seguinte forma

$$E_O^* = V_c^* + \frac{\alpha^*}{\sqrt{\rho_{4-3}}} \exp(1/\lambda') E_i(-1/\lambda') \quad (6.7)$$

A energia de formação da depressão, com muitos elétrons, será finalmente obtida minimizando-se a equação (6.6) com relação ao parâmetro variacional λ' , isto é,

$$\frac{\partial E_O^*}{\partial \lambda'} = 0 \quad (6.8)$$

O valor de λ' que minimiza a equação (6.8) é

$$\left(\frac{1}{\lambda'}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2\pi^3} \sigma K_c}{E_\perp^2} \approx \frac{696542,3}{E_\perp^2} \quad (6.9)$$

com $E_\perp$ em V/cm.

Substituindo-se este valor de λ' na expressão da energia, equação (6.7) obtemos

$$E_O^* \approx - \frac{2\alpha^*}{\sqrt{\rho_{4-3}}} \left[\ln \left(\frac{E_\perp^2}{\pi^{3/2} \sigma K_c} \right) - 1 \right] \quad (6.10)$$

ou

$$E_0 \approx -8,6E_1^2(\ln E_1^2 - 14,1) \text{ eV} \quad (6.11)$$

Desta expressão, observamos que a formação de uma depressão com muitos elétrons na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$ será energeticamente favorável ($E_0 < 0$) se $\ln E_1 > 7,05$. O campo crítico ou seja, o menor valor do campo elétrico externo que localiza a depressão na interface será 1153 V/cm. Este resultado está em excelente acordo com os resultados experimentais de Wanner e Leiderer¹³ e Leiderer et.al⁵¹ que encontraram o valor do campo crítico para formação de uma depressão com muitos elétrons, para $T=0,567\text{K}$, ser 1120 V/cm. A massa efetiva da depressão é, analogamente à energia, obtida da equação (5.31) através das seguintes modificações: $a=0$, $\alpha \rightarrow \alpha^*$ e $\gamma \rightarrow \gamma^*$, onde $\gamma^* = N\gamma$ e γ é definido na equação (5.29), como sendo

$$\frac{M^*}{M} = 1 + \frac{4\alpha^*}{\rho_{4-3} \gamma^{*2}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(1+x^2)^2} e^{-x^2/\lambda'} \quad (6.12)$$

onde λ' é dado pela equação (6.9).

Em unidades da massa atômica do hélio, a massa efetiva é reescrita na seguinte forma:

$$\frac{M^*}{M_{\text{He}}} \approx 1 + \frac{\pi h^2 K_c^3}{2M^2 g} \alpha^* = 5,22 \times 10^{11} E_1^2 \quad (6.13)$$

com E_1 em V/cm. A dependência da massa efetiva com o quadrado do campo externo está de acordo com as previsões dos cálculos de Shikin e Leiderer⁴⁸ que calcularam, através de considerações hidrodinâmicas, a massa efetiva e a mobilidade.

Um fator geométrico importante que podemos também obter é o raio médio da depressão, o qual é dado pela expressão

$$\langle r \rangle = \int d^2r \psi^*(\vec{r}) r \psi(\vec{r}) \quad (6.14)$$

onde $\psi(\vec{r})$ é a função de onda dada pela equação (6.3).

Calculando-se a integral, obtemos

$$\langle r \rangle = \frac{1}{K_c \sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{2\pi^3} \sigma}{E_1^2} = \frac{11056,2}{E_1^2} \text{ cm} \quad (6.15)$$

Uma vez que o raio da depressão é inversamente proporcional ao quadrado do campo elétrico externo, aumentando-se o campo a depressão terá um raio menor mais por outro lado será mais profunda. Este sistema será estável se a profundidade da depressão não ultrapassar o seu raio.

Os resultados para a energia de formação, o raio e a massa de uma depressão com muitos elétrons na interface da mistura ^3He - ^4He estão mostrados nas figuras 19, 20 e 21 respectivamente. Nas mesmas figuras, são também apresentados os resultados de Shikin e Leiderer para efeito de comparação.

Na figura 22 mostramos os resultados de Wanner e Leiderer. Na figura 22a observamos a deformação da interface da mistura para uma temperatura de 0,567K e um campo elétrico externo de 1120 V/cm, observada de um ângulo de 6° . A barra corresponde a 1 mm. Na figura 22b o campo elétrico externo foi aumentado para $E = 1160$ V/cm e podemos observar a deformação espontânea da interface em várias depressões menores dentro das quais existem aproximadamente 10^6 elétrons.

Figura 19 - Energia de formação de uma depressão com muitos elétrons, ($N=10^6$), na interface da mistura ^3He - ^4He em função do campo elétrico externo. Nossos resultados são representados pelo símbolo ($\bullet$). O símbolo ($\blacktriangle$) representa os resultados teóricos obtidos por Shikin e Leiderer'. O campo crítico a partir do qual ocorrerá a formação da depressão obtido é de 1150 V/cm e está em excelente concordância com os resultados experimentais de Wanner e Leiderer.

Figura 20 - Raio médio de uma depressão contendo muitos elétrons ($N=10^6$) e localizada na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$ em função do campo elétrico externo. Nossos resultados estão representados pelo símbolo (●) e os resultados teóricos de Shkin e Leiderer ' por (▲).

Figura 21 - Massa efetiva de uma depressão contendo muitos elétrons ($N=10^6$) localizada na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$ em unidades da massa atômica do ^4He em função do campo elétrico externo. Nossos resultados estão representados pelo símbolo ($\bullet$) e os resultados teóricos de Shikin e Leiderer ' por ($\blacktriangle$).

Figura 22 - Deformação da interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$.

Resultados obtidos por Wanner e Leiderer¹³ para elétrons na interface da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$ para a temperatura 0,567K. A barra nas figuras a e b representa 1 mm.

Parte (a)- O campo elétrico externo (E) é de 1120 V/cm e a fotografia foi tirada formando um ângulo de 6° com a superfície. Para este campo existe apenas uma depressão onde todos os elétrons estão nela contidos.

Parte (b)- O campo elétrico externo (E) foi aumentado para 1160 V/cm e a superfície deforma-se num arranjo onde existe muitas depressões menores formando um cristal com simetria hexagonal.

(a)

(b)

(B) ^4He líquido e filmes de ^4He líquido

Nesta secção, investigaremos algumas propriedades de uma única depressão contendo muitos elétrons, localizada na superfície de ^4He líquido e em filmes de ^4He líquido adsorvidos em safira e em neon sólido. Para estes sistemas obtemos a energia de localização, o raio, a densidade de carga e a massa efetiva da depressão em função da espessura do filme, do campo elétrico externo e do número N de elétrons contidos na depressão.

Leiderer et.al.⁵¹, e Giannetta e Ikezi¹⁴ observaram experimentalmente, através de meios óticos, a formação de depressões com muitos elétrons na superfície de ^4He líquido. Shikin e Leiderer⁴⁸ também têm estudado algumas propriedades da localização de depressões contendo muitos elétrons na superfície de ^4He líquido. Eles consideram uma distribuição gaussiana para os elétrons em um disco de raio R e minimizam a energia com relação à R .

Estudaremos uma depressão constituída por N elétrons, portanto a carga e a massa total serão respectivamente $Q=Ne$ e $M=Nm$, onde e é a carga elementar e m a massa do elétron.

A constante de acoplamento α será redefinida na seguinte forma

$$\alpha^* = \frac{Q^2 E^2}{8\pi\sigma \frac{\hbar^2 K_c^2}{2M}} \quad (6.16)$$

com

$$E = \frac{Q\delta}{4d^2} + E_\perp, \quad (6.17)$$

$$\delta = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}, \quad e$$

$$K_c = \left[\frac{\rho g}{\sigma} \left(1 + \frac{3\eta}{\rho g d^4} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.18)$$

ρ é a densidade e σ o coeficiente da tensão superficial do ^4He líquido, η é a constante de van der Waals, d é a espessura do filme e g é a aceleração da gravidade. Para o neon sólido $\delta=0,107$, para a safira $\delta=0,9$.

No limite $d \rightarrow \infty$, não haverá mais a contribuição do substrato e a constante de acoplamento α^* dependerá somente do campo elétrico externo E_1 , ou seja, haverá a localização da depressão somente através de um campo elétrico externo. Neste limite a constante de capilaridade será $K_c = \sqrt{\rho g / \sigma}$. Para o ^4He $\rho=0,145 \text{ g/cm}^3$ e $\sigma = 0,36 \text{ dyn/cm}$ resultando, portanto, $K_c = 19,87 \text{ cm}^{-1}$.

Para filmes de hélio, mesmo que o campo elétrico externo perpendicular à superfície seja nulo, haverá a contribuição do substrato. Neste caso a constante de acoplamento α^* será proporcional à quinta potência de N e por esta razão o polaron estará na região de acoplamento forte mesmo para filmes espessos. Utilizaremos aqui, o mesmo procedimento utilizado no caso da mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$. Tomaremos $a=0$ na equação da energia do estado fundamental (5.37) e adicionaremos à energia o termo referente à interação coulombiana entre os elétrons dentro da depressão. Uma vez que estamos interessados na localização da depressão na superfície, desprezaremos o termo $\lambda'/2$ da equação (5.37) referente à energia cinética. Assim sendo, a expressão para a energia de formação de uma depressão contendo muitos elétrons em filmes de ^4He líquido, em unidades de $\hbar^2 K_c^2 / 2M$, será

$$E_o^* = V_c^* - 2\alpha^* \int_0^\infty dx \frac{x e^{-x^2/\lambda'}}{1+x^2} \quad (6.19)$$

onde V_c^* é dado pela equação (6.5) e α^* pela equação (6.16). Efetuando a integração ficamos com

$$E_o^* = V_c^* + \alpha^* \exp(1/\lambda') E_1(-1/\lambda') \quad (6.20)$$

onde $E_1(x)$ é a função exponencial integral.

A energia de formação da depressão com muitos elétrons será finalmente obtida através da minimização da equação (6.20) com relação ao parâmetro variacional λ' , isto é

$$\frac{\partial E_O^*}{\partial \lambda'} = 0 \quad (6.21)$$

O valor de λ' que minimiza a energia é dado por

$$\left(\frac{1}{\lambda'}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2\pi^3} K_C \sigma}{E^2} \quad (6.22)$$

onde K_C está definido em (6.18) e E em (6.17). Substituindo este valor de λ' de volta na equação (6.20) obteremos

$$E_O^* = -2\alpha^* \left[\ln \left(\frac{E^2}{\pi^{3/2} K_C \sigma} \right) - 1 \right] \quad (6.23)$$

ou ainda

$$E_O = -3,18 \times 10^{-14} x (NE)^2 \ln \left(\frac{E^2}{5,45 K_C} \right) \text{ MeV} \quad (6.24)$$

Como podemos observar, a localização de uma depressão com muitos elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido será energeticamente favorável se $E^2 > 5,45 K_C$. No caso limite em que $d \rightarrow \infty$ o campo crítico, isto é, o menor valor para o campo elétrico externo no qual ocorrerá a localização da depressão será então $E_C \approx 3121$ V/cm. Este resultado está em ótima concordância com os resultados de Shikin e Leiderer⁴⁸ e de Mel'nikov e Meshkov⁴⁹ que calcularam o campo crítico para a formação da depressão através de considerações hidrodinâmicas.

A massa efetiva da depressão é obtida da equação (5.41) através das seguintes modificações: $\alpha \rightarrow \alpha^*$, $a=0$ e $\gamma' \rightarrow \gamma^*$ onde $\gamma^* = N\gamma'$ e γ é definido na equação (5.38). Então

$$\frac{M^*}{M} = 1 + \frac{4\alpha^*}{\gamma^* 2} \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^{-x^2/\lambda'}}{(1+x^2)^2 \tanh(xd)} \quad (6.25)$$

Um fator geométrico importante é o raio da depressão, o qual obtemos de forma análoga à mistura $^3\text{He}-^4\text{He}$. O raio é dado por

$$\langle r \rangle = \frac{\sqrt{2\pi^3} \sigma}{E^2} \text{ cm} \quad (6.26)$$

Um parâmetro relevante a ser calculado é a densidade de elétrons na depressão, pois como vimos no capítulo anterior, a densidade é responsável pela forma estável da superfície. Existe uma densidade crítica acima da qual a superfície torna-se instável deformando-se espontaneamente. Calculamos a densidade da seguinte forma

$$\bar{n} = \frac{N}{\langle A \rangle} \quad (6.27)$$

onde $\langle A \rangle$ é a área média da depressão, a qual é simplesmente calculada através da expressão

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \pi r^2 \psi(\vec{r}) d^2 r \quad (6.28)$$

com $\psi(\vec{r})$ definida na equação (6.3).

A área média será, então

$$\langle A \rangle = \frac{\pi^{3/2}}{K_C^2 \lambda'} \quad (6.29)$$

Utilizando-se o valor de λ' , equação (6.22), a densidade será

$$\bar{n} = \frac{NK_C E^2}{\sqrt{2} \pi^3 \sigma} = 0,063 \times N \times K_C \times E^2 \text{ elétrons/cm}^2 \quad (6.30)$$

Na figura 23 estão os resultados obtidos por Leiderer et.

al⁵¹ para ⁴He líquido.

O aparato experimental utilizado para estas observações é constituído de um capacitor de placas paralelas horizontais com espaçamento de 1,5cm e uma parede cilíndrica de diâmetro 8cm. A placa inferior do capacitor é revestida de ouro e a superior é de vidro coberta com um condutor transparente, a qual permite a observação da superfície de ⁴He. Na figura 23a o campo externo é tal que somente duas depressões aparecem. Com o aumento do campo externo surgirão mais depressões, como ilustram as figuras 23b e 23c .

Na figura 24 abaixo apresentamos um perfil da depressão na superfície de ⁴He líquido para uma temperatura de 2,5K e um campo externo de 2900 V/cm⁵¹.

Figura 24

Já estudamos no capítulo V, a existência de uma densidade crítica acima da qual a superfície torna-se instável. No caso de filmes de hélio esta densidade crítica é dada por

$$n_c = \left(\frac{K_c \sigma^2}{2\pi^2 e^2 \epsilon_s} \right)^{1/2} \quad (6.31)$$

onde K_c é dado pela equação (6.18) e ϵ_s é a constante dielétrica do substrato. Para filmes suficientemente finos ($\sim 100\text{\AA}$) esta densidade é da ordem de 10^{11} elétrons/cm². Assim sendo, uma depressão com muitos elétrons será estável se a densidade média for menor que a densidade crítica, ou seja,

$$\bar{n} < n_c \quad (6.32)$$

Por outro lado, para um dado campo elétrico externo e um dado número N de elétrons existirá uma espessura crítica para o filme de hélio líquido, na qual a energia passará a ser positiva e a depressão não será mais formada. A espessura do filme e a densidade de carga na depressão limitarão a região na qual a depressão será estável. Nas figuras 25, 26, 27 e 28 estão os resultados para a densidade média de carga, a energia de formação, o raio e a massa efetiva de uma depressão com muitos elétrons, em função da espessura do filme, do número de elétrons e do campo elétrico externo para filmes de ^4He líquido adsorvidos em neon sólido e em safira.

Nas figuras 29 e 30 estão a densidade de carga e a energia de formação de uma depressão na superfície de ^4He líquido no limite em que a espessura é infinita, em função do campo elétrico externo e do número de elétrons. Neste caso, observamos que uma depressão contendo $N \sim 10^6$ elétrons é, energeticamente, a mais estável para campos próximos ao campo crítico de formação da depressão. Se o campo elétrico externo é aumentado até o valor onde a densidade média $\bar{n}$ atinge o valor crítico n_c , esta depressão não será mais estável, mas uma depressão com um número menor de elétrons será estável. Novamente aumentando-se o campo elétrico externo até um valor onde a densidade média $\bar{n}$ da nova depressão atinge o valor crítico n_c , então esta depressão não será mais estável e existirá outra com menos elétrons que será estável e assim sucessivamente.

O resultado de que a depressão com $N \sim 10^6$ elétrons, para campos elétricos externos próximos ao campo crítico de formação, é a mais estável está em ótima concordância com os resultados experimentais^{13,14}.

Os resultados obtidos para filmes de hélio em neon sólido e em safira tem mostrado que a formação de depressões nestes sistemas deverão ocorrer para filmes muito espessos, da ordem de $10^6 \text{ \AA}$. Como na experiência de Andrei³³ são utilizados filmes finos da or-

dem de $1000 \text{ \AA}$, não deverá existir depressões com muitos elétrons neste sistema, justificando que as medidas da mobilidade são de depressões de poucos elétrons ou talvez até um elétron.

Nas figuras 31a e 31b mostramos uma sequência de fotografias obtidas por Giannetta e Ikezi¹⁴ onde ilustramos a formação do cristal de depressões na superfície de ^4He líquido. Na figura 31a o campo externo está sendo aumentado e observamos a formação do cristal. Na figura 31b o campo externo está diminuindo e é observado um efeito do tipo histerese, pois para campos abaixo do campo crítico ainda existe um vestígio do cristal.

Finalmente na figura 32 apresentamos os resultados da espessura crítica, ou seja a espessura onde a energia cai abruptamente a zero, em função do número de elétrons, para um campo elétrico externo nulo para filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira. Como a safira apresenta uma constante dielétrica maior que o neon sólido a espessura crítica para safira será maior.

Figura 23 - Formação de depressões com muitos elétrons na superfície de ^4He líquido.

Observação de Leiderer et.al⁵¹ da formação de depressões com muitos elétrons na superfície de ^4He líquido para uma temperatura de 2,5K e um campo elétrico externo maior que o campo crítico no qual a superfície torna-se instável.

Parte (a) Apenas duas depressões é detectada

Parte (b) Aumentando-se o campo elétrico externo novas depressões serão formadas dando origem ao futuro cristal a ser formado

Parte (c) Aumentando-se ainda mais o campo elétrico externo um número maior de depressões será formada e já podemos verificar a estrutura hexagonal.

Figura 25a- Densidade média de carga no interior de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em neon sólido.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam as regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na intersecção entre a densidade média e a densidade crítica e terminam na espessura em que a energia torna-se nula.

Figura 25b - Densidade média de carga no interior de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em safira.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam as regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na intersecção entre a densidade média e a densidade crítica e terminam na espessura em que a energia torna-se nula.

Figura 26a - Energia de formação de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em neon sólido.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam as regiões onde a depressão é instável pois a densidade de carga correspondente à esta espessura é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. A espessura crítica é aquela na qual a energia cai abruptamente a zero.

Portanto, para haver a formação de depressões com muitos elétrons em filmes de hélio líquido os mesmos devem ser muito espessos.

Figura 26b- Energia de formação de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em safira.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam as regiões onde a depressão é instável pois a densidade de carga correspondente à esta espessura é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. A espessura crítica é aquela na qual a energia cai abruptamente a zero.

Portanto, para haver a formação de depressões com muitos elétrons em filmes de hélio líquido os mesmos devem ser muito espessos.

Figura 27a- Raio médio de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He adsorvidos em neon sólido.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na espessura em que a densidade média ultrapassa o valor de n_c e terminam quando a energia tende a zero.

Figura 27b - Raio médio de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He adsorvidos em safira.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na espessura em que a densidade média ultrapassa o valor de n_c e terminam quando a energia tende a zero.

Figura 28a - Massa efetiva de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em neon sólido.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na espessura em que a densidade média ultrapassa o valor de n_c e terminam quando a energia tende a zero. A massa efetiva M^* está em unidades de M , onde $M = Nm$ com m sendo a massa de um elétron.

Figura 28b- Massa efetiva de uma depressão contendo 10^6 elétrons na superfície de filmes de ^4He líquido adsorvidos em safira.

Apresentamos os resultados para o campo elétrico externo nulo, 500, 1000 e 2000 V/cm.

As linhas tracejadas (---) indicam regiões onde a depressão é instável pois a densidade média de carga é maior que a densidade crítica n_c . As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável. Elas começam na espessura em que a densidade média ultrapassa o valor de n_c e terminam quando a energia tende a zero. A massa efetiva M^* está em unidades de M , onde $M=Nm$ com m sendo a massa de um elétron.

Figura 29 - Densidade de carga em uma depressão com muitos elétrons na superfície de ${}^4\text{He}$ líquido no limite de espessura infinita ($d \rightarrow \infty$). O campo crítico, ou seja, o menor valor do campo elétrico para que ocorra a formação da depressão é de 3121 V/cm. A linha (-·-·-) representa a densidade crítica, acima da qual a superfície torna-se instável. Depressões com $N \sim 10^7$ elétrons são instáveis pois a densidade de carga é sempre superior à densidade crítica. A depressão mais estável para campos próximos ao campo crítico contém $N \sim 5 \times 10^6$ elétrons. As linhas cheias são regiões onde a depressão é estável e as linhas tracejadas (---) regiões onde a depressão é instável.

Figura 30 - Energia de formação de uma depressão com muitos elétrons na superfície de ${}^4\text{He}$ líquido no limite de espessura infinita ($d \rightarrow \infty$). As linhas cheias são as regiões onde a depressão é estável e as linhas tracejadas (--) são regiões onde a depressão é instável. Para um dado número N de elétrons, o campo elétrico onde a região de instabilidade inicia, é obtido no gráfico da densidade de carga quando esta ultrapassa o valor da densidade crítica.

Figura 31 - Formação de estruturas macroscópicas na superfície de ^4He líquido.

Mostramos uma sequência de fotografias obtidas por Giannetta e Ikezi¹⁴ nas quais observamos a formação do cristal de depressões na superfície de ^4He líquido.

Parte (a) Aumentando-se o campo elétrico externo podemos observar a formação do cristal de depressões com simetria hexagonal. Inicialmente para um campo elétrico inferior ao campo crítico no qual ocorre a instabilidade eletrohidrodinâmica, não existe nenhuma estrutura macroscópica observável. Já para $E=E_2$ surge algumas depressões nas quais existem muitos elétrons. Aumentando-se mais o campo elétrico o cristal torna-se nítido.

Parte (b) Diminuindo-se o campo elétrico externo observa-se que o cristal começa a perder sua forma, mas agora para um campo elétrico menor que o campo crítico ainda existe vestígios do cristal de depressões o que implica na existência de histerese.

Figura 32 - Neste gráfico apresentamos a espessura crítica na qual a energia de formação da depressão cai abruptamente a zero em função do número N de elétrons na depressão. Os pontos ($\blacktriangle$) referem-se ao substrato safira e os pontos ($\bullet$) ao substrato neon sólido. Estes resultados são para o campo elétrico externo nulo. O substrato safira apresenta uma espessura crítica maior pois sua constante dielétrica é 19 e a contribuição para o potencial imagem é bem maior que a do neon sólido que tem uma constante dielétrica 1,24.

CAPÍTULO VII**CONCLUSÕES**

Neste trabalho utilizamos um método, baseado no formalismo de transformações canônicas, para investigar as propriedades do estado fundamental de elétrons ligados à superfície de ^4He líquido, em filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira e também para elétrons localizados na interface da mistura ^3He - ^4He . Utilizando este método calculamos a energia do estado fundamental e a massa efetiva de um elétron interagindo com os modos superficiais (riplons) de filmes de hélio líquido adsorvidos em neon sólido e em safira e também na interface da mistura ^3He - ^4He , para isso utilizamos o potencial de interação elétron-riplon obtido por Shikin e Monarka. Observamos um comportamento tipo transição de fase de primeira ordem onde o elétron passa de um estado quase livre para um estado localizado, quando o campo elétrico externo excede um valor crítico. Este resultado foi recentemente verificado experimentalmente através de medidas da mobilidade de elétrons localizados na superfície de filmes de hélio líquido adsorvidos em safira.

Como uma segunda aplicação do método, estendemos o formalismo para uma depressão contendo muitos elétrons localizados na superfície de ^4He líquido, filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira e na interface da mistura ^3He - ^4He . Para elétrons localizados na superfície de ^4He líquido encontramos a densidade média de carga, a energia de formação e o raio médio da depressão em função do campo elétrico externo e do número de elétrons na depressão. O campo crítico, ou seja, o menor valor do campo elétrico externo necessário para formar a depressão é independente do número de elétrons nela contida e tem o valor de 3121 V/cm. No caso de misturas ^3He - ^4He obtivemos a energia de formação de uma depressão contendo 10^6 elétrons, a massa efetiva e o seu raio médio. O campo crítico, neste caso, é de 1153 V/cm e também independe do número de elétrons. Estes resultados, tanto para ^4He líquido quanto para mistura ^3He - ^4He estão em excelente acordo com os resultados experimentais até

agora existentes.

Para elétrons localizados na superfície de filmes de hélio adsorvidos em neon sólido e em safira obtivemos a energia de formação, a massa efetiva, o raio médio e a densidade média de carga em uma depressão contendo N elétrons em função do campo elétrico externo, da espessura do filme e do número de elétrons. Como resultado obtivemos o intervalo de espessura do filme no qual uma depressão com N elétrons é estável. A região de espessura onde a depressão é estável é da ordem de $10^6 \text{ \AA}$, isto porque para espessuras menores o potencial imagem domina completamente o campo elétrico externo e a densidade média de carga na depressão, torna-se maior que a densidade crítica e consequentemente a depressão fica instável.

Os resultados obtidos para uma depressão localizada na superfície de filmes de hélio mostram que nas condições experimentais da medida da mobilidade de elétrons em filmes de hélio adsorvidos em safira obtidos por Andrei³³ não deverão existir depressões com muitos elétrons pois os filmes utilizados são da ordem de $10^3 \text{ \AA}$ de espessura. Nesta experiência a densidade de elétron na superfície de hélio é de $6 \times 10^7 \text{ elétrons/cm}^2$. Evidentemente é muito importante levar-se em conta a interação coulombiana entre os elétrons. Devido a esta interação a energia do sistema de elétrons torna-se mais negativa de modos a permitir a observação experimental. Uma vez que a contribuição à massa efetiva do elétron devido à energia de correlação é desprezível, os efeitos de transporte dos elétrons são determinados pelo acoplamento elétron-riplon e a presença de muitos elétrons é importante para que a energia do sistema esteja acima do intervalo de temperatura 0,4-1,0K.

Finalmente, sugerimos alguns problemas nesta área:

cálculo da energia do estado fundamental de um gás de polarons interagentes;

utilizar filmes finos onde a densidade de elétrons é da ordem de 10^{11} elétrons/cm² e portanto o gás de elétrons passa a ser quântico;

introduzir o efeito da temperatura no espectro de energia, na massa efetiva, na mobilidade, etc.

APÊNDICE

QUANTIZAÇÃO DAS ONDAS DE CAPILARIDADE-GRAVIDADE

Riplons são as ondas de capilaridade-gravidade, quantizadas, na superfície de um líquido.

Consideraremos aqui um fluido ideal incompressível semi-infinito limitado pelo plano $z=0$. A técnica hidrodinâmica empregada é devida à Pitaevskii .

Para um fluido ideal, a velocidade é o gradiente do potencial ϕ . A condição de incompressibilidade implica que o potencial ϕ satisfaz a equação de Laplace. A energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int (\nabla \phi)^2 d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int \phi \nabla^2 \phi d\tau + \frac{1}{2} \rho \int d\vec{s} \cdot \phi \nabla \phi \\ &= \frac{1}{2} \rho \int d\vec{s} \cdot \phi \nabla \phi \end{aligned} \quad (A.1)$$

onde utilizamos o teorema da divergência.

Usaremos a função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ solução da equação

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (A.2)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

No caso em que $\vec{r}$ está no plano, a função delta da equação (A.2) contribuirá com um meio do valor total da expressão, ou seja

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{r}' \phi(\vec{r}') \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (A.3)$$

Adicionando o termo nulo e usando o teorema de Green teremos

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{r}' \left[\phi(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 \phi(\vec{r}') \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{S}' \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' \phi(\vec{r}, \vec{r}') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int ds' \cdot \left[\frac{\dot{u}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (A.4)
\end{aligned}$$

O ponto significa diferenciação em relação ao tempo, para obtermos (A.4) temos usado

$$\left[\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n}' \right]_{\vec{r}, \vec{r}'} \text{ sobre } \vec{S}' = 0$$

$$\dot{u}(\vec{r}') = \left[\nabla' \phi(\vec{r}') \cdot \hat{n}' \right]_{\vec{r}'} \text{ sobre } \vec{S}'$$

$\hat{n}$ é a normal unitária e $u(\vec{r})$ o deslocamento da superfície. Consideramos aqui somente movimentos oscilatórios associados com o lado superior da superfície.

Usando (A.4) em (A.1), a energia cinética será

$$T = \frac{\rho}{4\pi} \iint dS dS' \frac{\dot{u}(\vec{r}) \dot{u}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (A.5)$$

A energia potencial V devida à deformação da superfície tem contribuições das forças gravitacional e da tensão superficial.

$$\begin{aligned}
V &= \int dS \int_{-\infty}^{u(\vec{r})} dz \rho g z + \sigma \int dS (1 + (\nabla u)^2)^{1/2} \\
V &\approx V_g + \int dS \left[\rho g u^2 / 2 + \sigma / 2 (\nabla u)^2 \right] \quad (A.6)
\end{aligned}$$

onde V_g é o valor de equilíbrio, σ é o coeficiente da tensão superficial, g é a aceleração da gravidade, em (A.6) temos usado $|\nabla u| \ll 1$.

O próximo passo é expandir o deslocamento e sua derivada

temporal em coordenadas dos modos normais dos riplons.

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= A^{-1/2} \sum_{\vec{K}} Q_{\vec{K}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \\ \dot{u}(\vec{r}) &= A^{-1/2} \sum_{\vec{K}} \dot{Q}_{\vec{K}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A Lagrangeana do sistema é dada por

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\vec{K}} \left(T_{\vec{K}} - V_{\vec{K}} \right) \\ \sum_{\vec{K}} T_{\vec{K}} &= \frac{d}{4\pi A} \sum_{\vec{K}, \vec{K}'} \dot{Q}_{\vec{K}} \dot{Q}_{\vec{K}'} \iint ds ds' \frac{e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} + \vec{K}' \cdot \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Através da representação integral da função de Bessel obtemos

$$\begin{aligned} T_{\vec{K}} &= \frac{\rho}{4\pi A} \dot{Q}_{\vec{K}} \sum_{\vec{K}'} \dot{Q}_{\vec{K}'} \frac{2\pi}{K} \int ds e^{i(\vec{K} + \vec{K}') \cdot \vec{r}} \\ &= \frac{\rho}{2K} \dot{Q}_{\vec{K}} \dot{Q}_{-\vec{K}} \end{aligned}$$

Analogamente calculamos $V_{\vec{K}}$ e obtemos

$$L_{\vec{K}} = \frac{\rho}{2K} \dot{Q}_{\vec{K}} \dot{Q}_{-\vec{K}} - \frac{1}{2} (\rho g + \sigma K^2) Q_{\vec{K}} Q_{-\vec{K}}$$

O momentum canônico e a Hamiltoniana são obtidos da maneira usual

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{K}} &= \frac{\rho}{K} \dot{Q}_{-\vec{K}} \\ H &= \sum_{\vec{K}} \left\{ \pi_{\vec{K}} \pi_{-\vec{K}} (K/2\rho) + Q_{\vec{K}} Q_{-\vec{K}} \left[\frac{1}{2} (\rho g + \sigma K^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Quantizamos H impondo a relação de comutação entre os operadores Q e π

$$[Q_{\vec{K}}, \pi_{\vec{K}}] = i\hbar \delta_{\vec{K}\vec{K}},$$

e então transformamos numa forma diagonal em termos de operadores de criação e destruição de riplons $a_{\vec{K}}^+$ e $a_{\vec{K}}$

$$\begin{aligned}\pi_{\vec{K}} &= i \left(\hbar \rho \omega_{\vec{K}} / 2K \right)^{1/2} (a_{\vec{K}}^+ - a_{-\vec{K}}) \\ Q_{\vec{K}} &= \left(\hbar K / 2 \rho \omega_{\vec{K}} \right)^{1/2} (a_{-\vec{K}}^+ + a_{\vec{K}})\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$H = \sum_{\vec{K}} \hbar \omega_{\vec{K}} (a_{\vec{K}}^+ a_{\vec{K}} + 1/2)$$

$$\omega_{\vec{K}}^2 = gK + \frac{\sigma}{\rho} K^3$$

O operador deslocamento terá a seguinte forma

$$u(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} \left(\hbar K / 2 A \rho \omega_{\vec{K}} \right)^{1/2} (a_{-\vec{K}}^+ + a_{\vec{K}})\tag{A.10}$$

REFERÊNCIAS

- (1) N.R.Kestner, J.Jortner, M.H.Cohen e S.A.Rice. Phys.Rev.A56, 140 (1965).
- (2) W.T.Sommer. Tese de doutorado- Stanford University- 1964 (não publicado).
- (3) M.W.Cole e M.H.Cohen. Phys.Rev.Lett.23, 1238 (1969). M.W. Cole. Phys.Rev.B2, 4239 (1970).
- (4) V.B.Shikin. Sov.Phys.JETP 31, 936 (1970); Sov.Phys.JETP 33, 387 (1971). Sov.Phys.JETP 34, 1095(1972).
- (5) M.W.Cole. Phys.Rev.A1, 1838 (1970).
- (6) O.Hipólito, G.A.Farias, J.R.D.de Felício. Solid States Commun. 28, 365 (1978).
- (7) W.T.Sommer. Phys.Rev.Lett,12, 271 (1964).
- (8) W.T.Sommer e D.J.Tanner. Phys.Rev.Lett.,27, 1345 (1971).
- (9) R.Williams, R.S.Crandall e A.H.Willis. Phys.Rev.Lett.,26, 7 (1971).
- (10) R.M.Ostermeier e K.W.Sxhwarz. Phys.Rev.Lett.,29, 25 (1972).
- (11) C.C.Grimes e P.Leiderer. Phys.Rev.Lett.,32, 280 (1974).
- (12) R.S.Crandall e R.Williams. Phys.REv.A 5, 2183 (1972).
- (13) M.Wanner e P.Leiderer. Phys.Rev.Lett.,42, 315 (1979).
- (14) R.W.Giannetta e H.Ikezi. Phys.Rev.Lett., 47, 849 (1981).
- (15) V.V.Shikin e Yu.P.Monarkha. J.Low.Temp.Phys.,16,193 (1974).
- (16) A.M.Gabovich, L.G.Il'chenko e E.A.Pashitskii. Sov.Phys.JETP 54, 1089 (1981).
- (17) H.Ikezi e P.M.Platzman. Phys.Rev.B 23,1145 (1981).
- (18) M.W.Cole. Phys.Rev.B2, 4239 (1970).
- (19) R.S.Crandall. Phys.Rev.A6, 790 (197).
- (20) M.Saitoh. J.Phys.Soc.Japan 42, 201 (1977).
- (21) C.C.Grimes e G.Adams. Phys.Rev.Lett.,36, 145 (1976).
- (22) A.S.Rybalko, Yu.Z.Kovdrya e B.N.Esel'son. JETP Letters 22 , 280 (1976).

- (23) T.R.Brown e C.C.Grimes. Phys.Rev.Lett.,29, 1233 (1972).
- (24) P.M.Platzman e G.Beni. Phys.Rev.Lett.,36, 626 (1976).
- (25) G.D.Gaspari e F.Bridges. J.Low Temp.Phys.,21, 535 (1975).
- (26) Yu.P.Monarka. Soviet J.Low Temp.Phys.,3, 282 (1977).
- (27) W.J.Huybrechts. J.Phys.C 9, L211 (1976); 10, 3761 (1977).
- (28) T.D.Lee, F.Low e D.Pines. Phys.Rev.,90, 297 (1953).
- (29) O.Hipólito. Solid State Commun.,32, 515 (1979); J.Phys.C,12, 4667 (1979).
- (30) S.Tomonaga. Prog.Theor.Phys.,2, 6 (1947).
- (31) C.C.Grimes, T.R.Brown, M.L.Burns e C.L.Zipfel. Phys.Rev.B, 13, 140 (1976).
- (32) K.Kajita. J.Phys.Soc.Japan 12, 3747 (1982); J.Phys.C (a ser publicado).
- (33) E.Y.Andrei. V Intern.Conf.on Elect.Properties of 2D System. Oxford (England), 5-9 september (1983).
- (34) G.A.Farias. Tese de doutorado- IFQSC/USP (1980) (não publicada).
- (35) O.Hipólito, G.A.Farias e N.Studart. Surf.Science 113, 394 (1982).
- (36) R. Feynman. Phys.Rev.97, 660 (1955).
- (37) S.Jackson e P.M.Platzman. Phys.Rev.B 24, 490 (1981) e Phys. Rev.B 25, 4886 (1982).
- (38) M.Saitoh. V Intern.Conference on Elect.Properties of 2D System. Oxford (England), 5-9 september (1983).
- (39) L.D.Landau e E.M.Lifshitz. Fluid Mechanics (Pergamon, Oxford 1959) pp.237.
- (40) P.Leiderer, H.Poisel e M.Wanner. J.Low Temp.Phys.,28, 167 (1977).
- (41) P.Leiderer, M.Wanner e W.Schoepe. Journal de Physique C6,8 (1978) 1328.
- (42) L.D.Landau e E.M.Lifshitz. Electrodynamics of Continuous Média (Pergamon-Oxford-1960) p.35 (probl.5).
- (43) L.P.Gor'kov e D.M.Chernikova. JETP Lett.,18, 68 (1973).
- (44) K.Mima, H.Ikezi e A.Sasegawa. Phys.Rev.B 14, 3953 (1976).

- (45) Veja por exemplo: S.D.Conte. Elementary Numerical Analysis-
an algorithmic Aproach (McGraw Hill, Inc.,1865).
- (46) V.Toyozawa. Prog.Theor.Phys.,26, 29 (1961).
- (47) V.B.Shikin e P.Leiderer. JETP Lett.,32 (1980) 416.
- (48) V.B.Shikin e P.Leiderer. Soviet Phys.JETP 54(1),(1981) 92.
- (49) V.L.Mel'nikov e S.V.Meshkov. Soviet Phys.JETP 54(3),(1982)
505.
- (50) H.Ikezi. Phys.Rev.Lett.,42 (1979) 1688.
- (51) P.Leiderer, W.Ebner e V.B.Shikin. Surf.Science 113 (1982)405.