UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

ESTUDO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DO
MODELO DE POTTS NA REDE DE BETHE

Alexandre Souto Martinez

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física e Química
de São Carlos para obtenção
do Título de Mestre em
Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Goulart Rosa Junior

SÃO CARLOS

NOVEMBRO 1988

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - SB
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
Alexandre Souto Martínez APRESENTADA
AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSI
DADE DE SÃO PAULO, EM 21 DE novembro DE 1988.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Sylvio G. Rosa Junior Orientador

Dr. Roberto Nicolau Onody

Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira

Ros meus pais.

Agradeço

aos meus pais pelo apoio nos momentos oportunos,

ao Sylvio pela capacidade de trabalho e realização e pela forma consciente e consistente com que me orientou nos últimos quatro anos,

ao Fernando Aguiar e Francisco Bosco pelas discussões e pelo clima agradável de trabalho,

às garotas da biblioteca e também à Irene, Cecilia, Vera e Wladeres pela simpatia e boa vontade,

ao Eduardo Zanardi pela datilografia,

à FAPESP pelo suporte financeiro,

aos amigos, colegas e professores além dos funcionários do IFQSC, que de maneira direta e indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho consideramos o modelo de Potts na árvore de Cayley submetida a um campo magnético. Esse campo pode ser representado pela interação dos spins da árvore com um spin adicional, denominado spin fantasma. Essa nova rede passa a ser chamada de árvore de Cayley fechada e assimétrica. Sendo uma rede hierárquica, ela apresenta soluções exatas que são obtidas quando as técnicas do grupo de renormalização no espaço real são aplicadas. Subtraindo os efeitos de superfície e considerando somente o interior da árvore (rede de Bethe), esses resultados reproduzem os resultados da aproximação de campo médio de Bethe-Peierls.

Com a finalidade de estudar a função de correlação do modelo de Potts na rede de Bethe, consideramos primeiramente uma cadeia de Potts interagindo com um spin fantasma. Através das regras de composição em série e paralelo e do método da quebra e colapso para as transmissividades térmicas (função de correlação) obtemos uma fórmula de recorrência para a função de correlação entre quaisquer dois spins na cadeia. Mostramos então que pela invariância translacional da rede de Bethe qualquer par de spins pode ser mapeado no sistema anterior.

A seguir consideramos o modelo de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Decimando os spins interiores da unidade geradora da rede, obtemos um mapa polinomial quadrático para a transformação do grupo de renormalização (mapa de Bethe-Peierls). O diagrama de fase desse sistema é então obtido do conjunto de Mandelbrot através de uma transformação de Möbius. O mapa de Bethe-Peierls apresenta dois pontos fixos, que são relacionados com as fases ferro e

paramagnética e o regime caótico é identificado com a fase vidro de spin. Esse sistema revela ser o exemplo mais simples de vidro de spin de McKay-Berker-Kirkpatrick.

Na rede de Bethe e a campo nulo esse sistema apresenta transições de fase de segunda ordem. Analisando o comportamento crítico da função de correlação e de suas derivadas, vemos que se identificarmos a função de correlação entre o spin fantasma e qualquer spin da rede com a magnetização (por spin) e a função de correlação entre dois spins primeiros vizinhos com a energia interna do sistema, cinco expoentes críticos ($\delta, \beta, \gamma', \alpha, \alpha'$) são calculados e satisfazem as relações de escala.

Para ilustrar o procedimento recursivo apresentado para calcular a função de correlação entre dois spins separados por m ligações na rede de Bethe, consideramos os spins de Potts de um estado. Obtemos então de forma explícita as correlações para $m=1, 2$ e 3 .

ABSTRACT

In this work we consider the Potts model on the Cayley tree subjected to a magnetic field. This field can be represented by the interaction of the tree spins with an additional one, denominated ghost spin. This new lattice is then called closed-asymmetric Cayley tree. Being a hierarchical lattice it comes to have exact solutions which are obtained when the real-space renormalization group techniques are applied. Subtracting the surface effects and considering only the tree interior (Bethe lattice), these results reproduce the results of Bethe-Peierls mean-field approximation.

With the objective of studying the pair-correlation function of the Potts model on the Bethe lattice, we at first consider a Potts chain interacting with a ghost spin. Throughout the series-parallel composition rules and the break-collapse method for the thermal transmissivities (pair-correlation function) we obtain a recursive relation for the correlation function between any two spins on the chain. We then show, due to the translational invariance of the Bethe lattice, that any pair of spins can be mapped into the latter system.

Next we consider the one-state Potts model on the closed asymmetric tree. Decimating the inner spins of the generating unit of the lattice, we obtain a quadratic polynomial map for the renormalization group transformation (Bethe-Peierls map). The phase diagram of this system is obtained from the Mandelbrot set throughout a Möbius transformation. The Bethe-Peierls map has two stable fixed points which are related to the ferro and paramagnetic phases and the caotic regime is identified with the spin-glass phase. This system turns out to be the simplest

example of a McKay-Berker-Kirkpatrick spin glass.

On the Bethe lattice with vanishing field this system presents second-order phase transitions. Analyzing the critical behavior of the pair-correlation function and of its derivatives, we see that if we identify the correlation function between the ghost spin and any spin on the lattice with the magnetization (per spin), and the correlation function between two nearest-neighbor spins with the internal energy of the system, five critical exponents ($\delta, \beta, \gamma', \alpha, \alpha'$) are calculated and they satisfy the scaling relations.

In order to illustrate the recursive procedure presented to calculate the pair-correlation function between spins m bonds apart on the Bethe lattice, we consider the one-state Potts spins. We obtain explicitly the correlation for $m=1, 2$ and 3 .

INDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAPITULO I - NOÇÕES BÁSICAS.....	10
1.1 - REGRAS DE COMPOSIÇÃO DE TRANSMISSIVIDADES TÉRMICAS PARA O MODELO DE POTTS.....	11
1.2 - MAPAS UNIDIMENSIONAIS.....	16
CAPITULO II - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NA ÁRVORE DE CAYLEY FECHADA E ASSIMÉTRICA.....	21
2.1 - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NA CADEIA DE POTTS COM CAMPO.....	22
2.2 - Mapeamento da Árvore de Cayley Fechada e Assimétrica na Cadeia Aberta com Campo.....	27
CAPITULO III - MODELO DE POTTS DE UM ESTADO NA ÁRVORE DE CAYLEY FECHADA E ASSIMÉTRICA.....	31
3.1 - TRANSFORMAÇÃO DE MOBIUS E CONJUNTO DE MANDELBROT.....	32
3.2 - DIAGRAMA DE FASE.....	36
3.3 - EXPONENTES CRÍTICOS DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO.....	39
3.4 - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NA REDE DE BETHE.....	47
CONCLUSÃO.....	50
REFERÊNCIAS.....	53

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estamos interessados em estudar algumas características do modelo de Potts escalar de q estados na árvore de Cayley fechada e assimétrica.

O modelo de Potts [1] foi proposto como uma generalização para o modelo de Ising [2]. Esse modelo consiste em considerar um sistema de spins (λ) que podem assumir q estados distintos. Esses spins podem ser representados como vetores unitários no plano, onde cada estado é identificado com q direções igualmente espaçadas, especificadas pelos ângulos $\theta_n = 2\pi n/q$ onde $n=0,1,\dots,q-1$. A forma mais geral de interação entre dois spins λ_i e λ_j deve ser uma função de período 2π do ângulo relativo entre as direções θ_{n_i} e θ_{n_j} , ou seja, $P(\theta_{n_i} - \theta_{n_j})$. Dentre as várias possibilidades, a escolha $P = -qJ \cos(\theta_{n_i} - \theta_{n_j})$ (produto escalar dos vetores representando λ_i e λ_j) classifica o modelo de Potts como sendo vetorial. Por outro lado, a escolha $P = -qJ \delta(n_i, n_j)$, onde δ é a função delta de Kronecker, classifica o modelo como sendo escalar.

Como visto, se dois spins de Potts estiverem no mesmo estado, a interação entre eles é $-qJ$, onde $J > 0$ define o modelo como ferromagnético e $J < 0$ como antiferromagnético. Se os spins estiverem em estados diferentes, a interação é nula na versão escalar do modelo.

Apesar da simplicidade da interação, o modelo de Potts escalar é muito utilizado, pois em uma dada rede, o diagrama de fase do sistema pode vir a ser bastante rico, provocando interesse do ponto de vista teórico. No caso particular $q=2$ esse modelo reproduz o modelo de Ising e no caso $q=1$ esse modelo passa a ser uma formulação para o problema de percolação [3]. Do ponto

de vista de realização experimental, várias situações têm sido explicadas pelo modelo [4].

Com relação a rede a ser utilizada é conveniente fazer algumas observações sobre as peculiaridades de sua estrutura topológica, o que propicia a ocorrência de fenômenos interessantes.

A árvore de Cayley é construída a partir de um ponto inicial C, de onde saem $r+1$ ligações ($r \geq 2$). De cada extremidade dessas ligações (sítios) saem novas r ligações, formando assim as sucessivas camadas da rede (Fig. 1); r é denominado parâmetro de ramificação.

Fig. 1 - Árvore de Cayley com parâmetro de ramificação $r=2$ e quatro camadas.

Definimos sítios interiores da rede, os sítios que têm número de coordenação $r+1$ e sítios superficiais, os sítios com coordenação 1. Dessa maneira, o número de sítios interiores (N_i) e superficiais (N_e) são dados por:

$$N_i = \frac{r^{N-1}(r+1) - 2}{r - 1} \quad \text{e} \quad N_e = r^{N-1}(r+1), \quad (1)$$

onde N é o número de camadas da árvore. Vemos que, ao contrário das redes regulares, a relação N_e/N_i não vai a zero quando N

tende ao infinito, indicando que a superfície tem um papel de tanta importância quanto a estrutura em si.

A dimensionalidade de uma rede [5] é definida por:

$$d = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(C_N)}{\ln N}, \quad (2)$$

onde

$$C_N = 1 + \sum_{i=1}^N m_i, \quad (3)$$

com m_1 sendo o número de primeiros vizinhos de um determinado sítio, m_2 o de segundos vizinhos e assim por diante. Para a árvore de Cayley temos que $C_N = N_1 + N_2$, portanto a dimensionalidade da rede é infinita.

Quando consideramos qualquer modelo de spin na árvore de Cayley, o sistema se comporta como se fosse unidimensional, pois dois sítios estão conectados por um único caminho. No entanto se um campo magnético for aplicado, o sistema apresenta transições de fase não usuais [6,7]. Esse comportamento é devido ao efeito de superfície. Para o modelo de Potts de dois estados, a transição do ferro para o paramagnetismo é caracterizada como sendo de ordem contínua [8,9].

Quando os efeitos de superfície são subtraídos [10], a árvore de Cayley passa a ser denominada rede de Bethe. Nessa rede, as grandezas termodinâmicas reproduzem os resultados da aproximação de campo médio de Bethe-Peierls [11-14] para as redes de Bravais [15]. O modelo de Potts apresenta então transições de fase (ferro-para) de primeira ($q > 2$) ou segunda ($q \leq 2$) ordem [4]. Verifica-se a presença da fase antiferromagnética somente para $q < 3$ ($r = 2$).

Tanto as propriedades globais (interior + superfície) quanto as locais (interior) do modelo de Potts submetido a um campo na árvore de Cayley podem ser estudadas considerando interações dos spins da árvore com um spin adicional, denominado spin fantasma (Fig. 2). A equivalência entre esses dois sistemas é justificada pela proporcionalidade ($1/q$) entre as funções de partição e pela igualdade entre as funções de correlação [16].

Fig. 2 - Dois ramos da árvore de Cayley com $r=2$. O campo magnético é simulado pela interação entre os spins da árvore com o spin fantasma. A unidade geradora da rede é dada pela segunda geração.

Essa última rede é denominada árvore de Cayley fechada e assimétrica e tem a vantagem de ser uma rede hierárquica [17,18], portanto ela pode ser gerada recursivamente substituindo ligações de acordo com uma dada prescrição (unidade geradora). Essa natureza hierárquica faz com que as técnicas do grupo de renormalização no espaço real [19,20] nos forneça soluções exatas.

Uma das grandes realizações da teoria do grupo de renormalização é a redução do problema de transição de fase e fenômenos críticos ao estudo de mapas no espaço dos parâmetros.

Esses mapas são introduzidos através da hamiltoniana efetiva, que é obtida da hamiltoniana original quando graus de liberdade são eliminados parcialmente no cálculo da função de partição (transformação do grupo de renormalização). Esse procedimento nos permite relacionar diagramas de fase e fenômenos críticos à propriedades do mapa: um ponto fixo estável representa uma fase termodinâmica, um ponto fixo hiperbólico representa uma transição de fase e os expoentes críticos estão relacionados com o mapa linearizado em torno dos pontos marginais por relações simples [19,21].

Com exceção de alguns poucos casos é muito difícil obter a solução exata de um modelo de spin em uma rede regular, onde cada ligação representa a constante de acoplamento J entre os spins primeiros vizinhos [5]. No entanto podemos recorrer a aproximações.

A teoria de campo médio de Bragg-Williams [22] é uma aproximação de ordem zero. Nessa aproximação supomos que cada spin do sistema está sujeito a um campo efetivo devido a todos os outros spins. Por essa razão, podemos considerar cada spin interagindo com a mesma constante de acoplamento J/N com todos os outros $N-1$ spins. Considerando cada acoplamento sendo uma aresta e cada spin um vértice de um grafo [23], este pode ser visto como uma hiperpirâmide regular no espaço de $N-1$ dimensões. No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) estamos considerando um espaço de dimensão infinita. Observamos também que nesse limite a razão J/N deve tender a um valor constante.

Dessa maneira, o comportamento termodinâmico de um sistema de dimensionalidade finita d apresenta um limite superior ($d \rightarrow \infty$) na dimensionalidade da rede.

A aproximação de Bethe-Peierls [22] é considerada de primeira ordem. Nessa aproximação consideramos que cada spin do

sistema interage com constante de acoplamento J com os seus primeiros vizinhos que estão sujeitos a um campo efetivo devido aos outros spins. No esquema de grafos, esse grafo possui a mesma estrutura da árvore de Cayley (Fig. 1). Mas para que essa estrutura reproduza os resultados da aproximação de Bethe-Peierls os efeitos de superfície devem ser subtraídos, ou seja, devemos considerar a rede de Bethe.

Uma maneira alternativa para representar a aproximação de Bethe-Peierls é considerar um spin fantasma interagindo com os spins da superfície da árvore. A rede de Bethe é obtida quando consideramos os campos efetivos sendo os ciclos estáveis do mapa da transformação do grupo de renormalização. O campo superficial (inicial) pode ser considerado nulo no final dos cálculos.

Dessa maneira vemos que a rede de Bethe possui o mesmo número de coordenação que a rede original. Vemos também que no limite $r \rightarrow \infty$ com $rJ \rightarrow \text{cte}$, esse sistema reproduz os resultados da aproximação de Bragg-Williams. Por outro lado, sabemos que a rede de Bethe apresenta uma fase de sistema unidimensional, extrapolando essa fase para todo o espaço de parâmetros, podemos obter os dois casos limites (na dimensionalidade) do sistema original.

Além dessas informações que podem ser obtidas de um modelo de spin na rede de Bethe, podemos ainda saber a correlação entre dois spins m -ésimos vizinhos na rede original (dentro da aproximação de Bethe-Peierls). Essa correlação é dada na rede de Bethe pela correlação entre dois spins separados por m ligações.

Com esse objetivo, Falk [24] obteve a função de correlação para dois spins de Ising na árvore de Cayley (sem campo). A seguir, Jellitto [25,26] considerou duas árvores conectadas pelos sítios superficiais e obteve a função de correlação para pares de spins localizados em sítios especiais

dessa nova estrutura, que pela introdução de "loops" apresenta transição de fase. Utilizando as técnicas do grupo de renormalização, Christiano e Goulart Rosa [27] generalizaram esse último resultado para o modelo de Potts. Considerando a árvore de Cayley fechada e assimétrica, Martinez e Goulart Rosa [28] obtiveram uma fórmula de recorrência para calcular a função de correlação entre qualquer par de spins de Potts nessa rede.

Por apresentar invariança por transformação de escala, alguns sistemas hierárquicos têm a vantagem de possuir soluções exatas. Vários estudos sobre as diversas características desses sistemas vêm sendo realizados, entre eles, os que apresentam a fase vidro de spin [29].

Com esse objetivo McKay et al. [30] introduziram frustração em um sistema hierárquico, resultando em uma rota para o caos no mapa da transformação do grupo de renormalização. Devido a grande quantidade de repulsores na região caótica do espaço de parâmetros, eles identificaram essa região como sendo a fase vidro de spin. A justificativa para essa equivalência foi dada por Derrida et al. [21], mostrando que os repulsores de um mapa implicam em singularidades na energia livre do sistema. Considerando esses resultados, Christiano [16] introduziu frustrações através de campos aleatórios na árvore de Cayley fechada e assimétrica e obteve a fase vidro de spin para os modelos de Potts e Ashkin-Teller.

Recentemente, De Aguiar et al. [31] obtiveram a fase vidro de spin nessa rede introduzindo frustração através de interações antiferromagnéticas entre os spins de Potts de um estado. Esse resultado revelou ser o exemplo mais simples de vidro de spin em redes hierárquicas, uma vez que é obtido de um mapa polinomial quadrático.

Este trabalho está dividido como segue:

No capítulo I, apresentamos alguns conceitos que serão extensivamente utilizados. Na seção 1.1 fazemos uso das idéias do grupo de renormalização para obter as regras de composição em série e paralelo assim como a regra da quebra e colapso [32,33] para as transmissividades térmicas (função de correlação) do modelo de Potts. Na seção 1.2 apresentamos uma breve introdução ao estudo de sistemas dinâmicos. Consideramos um mapa unidimensional onde mostramos como obter os ciclos e determinar a estabilidade. Exemplificamos este procedimento através do mapa logístico. Por último introduzimos os conjuntos de Fatou e Julia.

No capítulo II utilizamos as regras de composição para as transmissividades térmicas para obter uma fórmula de recorrência para calcular a função de correlação entre qualquer par de spins na árvore de Cayley fechada e assimétrica com parâmetro de ramificação $r=2$. Na seção 2.1, através da regra da quebra e colapso, obtemos uma fórmula de recorrência para determinar a transmissividade equivalente entre dois spins de Potts separados por m ligações em uma cadeia infinita com campo. Na seção 2.2 mostramos que a árvore de Cayley fechada e assimétrica pode ser mapeada no sistema descrito na seção anterior.

No capítulo III, consideramos o modelo de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Na seção 3.1 apresentamos a transformação de Möbius e uma breve descrição do conjunto de Mandelbrot. Na seção 3.2 obtemos o mapa da transformação do grupo de renormalização (mapa de Bethe-Peierls) para o modelo de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Por ser um mapa polinomial quadrático, obtemos o diagrama de fase do conjunto de Mandelbrot através de uma transformação de Möbius. Na seção 3.3 calculamos os expoentes críticos da função de correlação e de suas derivadas nas

transições de fase ferro-para e para-vidro de spin a campo nulo. Utilizando o método sugerido por Christiano [16], mostramos que essas funções podem ser interpretadas como funções de estado do sistema e que se essas identificações forem efetuadas, os expoentes críticos satisfazem as igualdades nas relações de escala. Na seção 3.4 ilustramos o procedimento apresentado no capítulo II para calcular a função de correlação entre dois spins de Potts de um estado separados por m ligações na rede de Bethe. Obtemos então de forma explícita as correlações para $m=1, 2$ e 3 .

CAPITULO I

NOÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos que serão extensivamente utilizados neste trabalho. Na primeira seção apresentamos as regras de composição em série e paralelo para as transmissividades térmicas do modelo de Potts, assim como o método da quebra e colapso que é utilizado para arranjos de spins mais complexos. Na segunda seção apresentamos os conceitos de pontos fixos, ciclos e estabilidade para mapas unidimensionais. Com a finalidade de estabelecer a ordem com que os ciclos estáveis aparecem quando variamos os parâmetros, apresentamos o teorema de Šarkovskii. Esse teorema apresenta uma região onde ciclos são de periodicidade infinita, essa região é denominada região caótica e é caracterizada pelo expoente de Liapunov. Exemplificamos esses conceitos estudando o mapa logístico.

1.1 - REGRAS DE COMPOSIÇÃO DE TRANSMISSIVIDADES TÉRMICAS PARA O MODELO DE POTTS

Para o modelo de Potts escalar, a energia de interação entre dois spins λ_i e λ_j de q estados, é dada pela hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_{ij} = -qJ\delta_{\lambda_i, \lambda_j}, \quad (1.1)$$

onde J é a constante de acoplamento definindo o modelo como ferromagnético (antiferromagnético) se $J > 0$ ($J < 0$) e $\delta_{\lambda_i, \lambda_j}$ é a função delta de Kronecker.

A função de partição para o par de spins é dada por:

$$Z_{ij} = \sum_{(\lambda_i, \lambda_j)} e^{-\beta \mathcal{H}_{ij}} = q(e^{q\beta J} + q - 1), \quad (1.2)$$

onde $\beta = 1/KT$, sendo K a constante de Boltzmann e T a temperatura.

Neste momento é conveniente introduzir a representação de Stephen-Mittag para os spins de Potts [37], ou seja

$$\lambda_j = \exp(2\pi i K_j / q) \quad \text{onde } K_j = 0, 1, \dots, q-1, \quad (1.3)$$

dessa maneira podemos escrever:

$$q\delta_{\lambda_i, \lambda_j} = \sum_{r=0}^{q-1} \lambda_i^r \lambda_j^{-r}. \quad (1.4)$$

Definimos a transmissividade térmica como sendo a função de correlação:

$$t = \langle \lambda_i \lambda_j \rangle = \frac{1}{Z_{ij}(\lambda_i, \lambda_j)} \sum \lambda_i \lambda_j e^{-\beta H_{ij}} = \frac{1 - e^{-q\beta J}}{1 + (q-1)e^{-q\beta J}}, \quad (1.5)$$

e sua dual, o peso de Boltzmann:

$$y = e^{-q\beta J}, \quad (1.6)$$

que são relacionados por:

$$t = \frac{1 - y}{1 + (q-1)y} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1 - t}{1 + (q-1)t}. \quad (1.7)$$

Se considerarmos dois spins λ_i e λ_j conectados em paralelo pelos acoplamentos J e H ; podemos definir um acoplamento equivalente como $T_p = J + H$ (Fig. 3.a), pois:

$$H_p = -q(J+H)\delta_{\lambda_i, \lambda_j} = -qT_p\delta_{\lambda_i, \lambda_j}. \quad (1.8)$$

Neste momento é conveniente introduzir a notação v e h (w e x) para as transmissividades (duais) dos acoplamentos T e H .

Da Eq. 1.8 obtemos imediatamente a regra de associação em paralelo para as transmissividades duais:

$$w_p = xy. \quad (1.9)$$

A regra de associação em paralelo para a transmissividade térmica é obtida da Eq. 1.9 através da Eq. 1.7, resultando em:

$$v_p = t_p(t, h) = \frac{N(t, h)}{D(t, h)} = \frac{t + h + (q-2)th}{1 + (q-1)th}, \quad (1.10)$$

O termo do meio foi introduzido com o propósito de estabelecer a notação a ser utilizada posteriormente.

Fig. 3 - Composição de transmissividades para o modelo de Potts escalar de q estados.

a) Composição em paralelo.

b) Composição em série.

Se por outro lado três spins λ_i , λ_m e λ_j estiverem conectados em série pelos acoplamentos J e H , define-se um acoplamento equivalente T_s (Fig. 3.b), do seguinte modo:

$$H_s = -qJ\delta_{\lambda_i, \lambda_m} - qH\delta_{\lambda_m, \lambda_j} = -qT_s\delta_{\lambda_i, \lambda_j} + c_p \quad (1.11)$$

Congelando os spins externos λ_i e λ_j e somando sobre λ_m , temos que:

$$e^{qT_s\delta_{\lambda_i, \lambda_j}} = C_p \sum_{(\lambda_m)} e^{qJ\delta_{\lambda_i, \lambda_m} + qH\delta_{\lambda_m, \lambda_j}} \quad (1.12)$$

C_p e T_s podem ser obtidos considerando os dois casos:

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, obtemos:

$$C_p = \frac{1}{e^{qJ} + e^{qH} + q-2} = \frac{xy}{x + y + (q-2)xy} \quad (1.13)$$

Se $\lambda_i = \lambda_j$, obtemos das Eqs. 1.12 e 1.13 a regra de associação em série para as transmissividades duais:

$$w_a = \frac{x + y + (q-2)xy}{1 + (q-1)xy}, \quad (1.14)$$

Pela Eq. 1.6 obtemos a regra de associação em série para as transmissividades térmicas:

$$v_a = th. \quad (1.15)$$

Dessa maneira obtivemos as regras de associação em série e paralelo para as transmissividades térmicas e suas duais. Para associações de spins mais complexas, devemos utilizar o método da quebra e colapso [32], que é um procedimento para calcular a transmissividade equivalente entre os spins externos em arranjos mais complexos, por exemplo, do tipo ponte de Wheatstone (Fig. 4). Essa regra consiste em calcular primeiramente a transmissividade t_a e t_c , entre os spins externos dos arranjos obtido através da quebra ($h=0$) e colapso ($h=1$) da ligação H entre λ_r e o spin interno.

$$t_a = \frac{N_a}{D_a} = \frac{N(t^2, h'^2)}{D(t^2, h'^2)}, \quad (1.16.a)$$

e

$$t_c = \frac{N_c}{D_c} = \frac{N^2(t, h')}{D^2(t, h')}, \quad (1.16.b)$$

onde a função do numerador (denominador) N (D) é dada pela Eq. 1.10.

Fig. 4 - Arranjo de spins tipo ponte de Wheatstone.

De acordo com o método da quebra e colapso, a transmissividade equivalente entre os spins externos do arranjo de Wheatstone é:

$$t_w(t, h', h) = \frac{(1 - h)N_q + hN_c}{(1 - h)D_q + hD_c} . \quad (1.17)$$

Esse resultado é justificado de maneira simples, congela-se os spins λ_1 e λ_2 , e soma-se sobre todos os estados dos spins λ_m e λ_r . Comparando esse resultado com a função de partição do par de spins, obtemos a transmissividade dual equivalente, que pode então ser transformada para a transmissividade térmica através da Eq. 1.7.

1.2 - MAPAS UNIDIMENSIONAIS

Considere o mapa do tipo:

$$x_{i+1} = f(x_i, a) , \quad (1.18)$$

onde a é um parâmetro. Podemos então escrever:

$$x_{i+n} = f(f(\dots f(x_i)\dots)) = f^{(n)}(x_i) \quad (1.19)$$

onde $f^{(n)}$ é denominada de n -ésima iterada de f .

Situações interessantes ocorrem quando f é uma função não linear. No limite $i \rightarrow \infty$ temos que:

$$x_{i+n} = x_i = x_j^* \text{ tal que } x_j^* \in \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\} , \quad (1.20)$$

o conjunto de pontos x_j^* é denominado ciclo de período n (ciclo n), no caso particular do ciclo 1, x^* é denominado ponto fixo. Se $n \rightarrow \infty$, temos um ciclo de periodicidade infinita.

A determinação analítica do ciclo n é dada pela equação:

$$x_j^* = f^{(n)}(x_j^*) . \quad (1.21)$$

Para iniciar o processo, fornecemos uma condição inicial x_0 , iterando f , o sistema pode convergir para um ciclo n que depende do parâmetro a e em geral da própria condição inicial x_0 .

Para determinar a estabilidade de um ciclo para um dado valor de a , devemos obter um critério. Considere primeiramente o ponto fixo x^* , fazendo

$$x_i = x^* + \epsilon_i \text{ e } x_{i+1} = x^* + \epsilon_{i+1} , \quad (1.22)$$

onde ϵ_1 é um valor pequeno comparado com x^* . Linearizando f em torno de x^* , obtemos que:

$$\frac{\epsilon_{1+1}}{\epsilon_1} = \frac{df(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=x^*} = \lambda(x^*) . \quad (1.23)$$

Vemos então que se:

- $|\lambda(x^*)| < 1$ x^* é estável (atrator)
- $|\lambda(x^*)| = 1$ x^* é marginal (indiferente)
- $|\lambda(x^*)| > 1$ x^* é instável (repulsor)
- $|\lambda(x^*)| = 0$ x^* é super-estável

Para que um ciclo n seja estável, todos os seus elementos (x_j^*) devem ser estáveis. Utilizando a regra da cadeia vemos que:

$$\lambda^{(n)}(x_j^*) = \frac{df^{(n)}(x_1, a)}{dx_1} \Big|_{x_1=x^*} = \prod_{j=1}^n \lambda(x_j^*) . \quad (1.24)$$

Tomando o módulo de $\lambda^{(n)}(x_j^*)$ a estabilidade do ciclo é determinada pelo critério obtido para pontos fixos.

Observamos que quando um ciclo n surge de um ciclo m , esse último ciclo torna-se instável, assim como os ciclos precedentes. A ordem com que os ciclos aparecem em um mapa que leva uma variável real em outra variável real quando variamos o valor do parâmetro a é dado pelo teorema de Šarkovskii [38].

TEOREMA - Para $A = \{2^nl \mid n \geq 0, l \geq 3 \text{ e } l \text{ ímpar}\}$, $B = \{2^m \mid m \geq 0\}$ e $N = A \cup B$.

Seja $T/R \leftarrow R$ um mapeamento contínuo que tem um ciclo n .

Então T tem um ciclo m para cada $m \in N$ tal que $n \leftarrow m$.

Esse teorema pode ser representado pela sequência:

```

      .3 <--      5 <--      7 <-- ... <--
<--  2.3 <--  2.5 <--  2.7 <-- ... <--
<-- 22.3 <-- 22.5 <-- 22.7 <-- ... <--
<-- ....                               ... <--
<--      8 <--      4 <--      2 <-- 1.

```

Por exemplo, a existência de um ciclo 8 implica na existência dos ciclos 4, 2 e 1, que são estáveis quando o ciclo 8 for estável.

Este teorema apresenta a possibilidade de haver ciclos de periodicidade infinita. A região do espaço de parâmetros que contém esses ciclos é conhecida como região caótica. O caminho com que chegamos até essa região é conhecido como rota para o caos.

Considere agora duas condições iniciais x_0 e x'_0 separadas por ϵ_0 . Após n iterações, a separação entre x_n e x'_n é dada por:

$$\epsilon_n = \epsilon_0 e^{n\bar{\lambda}} \quad (1.25)$$

onde

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\lambda(x_i)| \quad (1.26)$$

No limite $n \rightarrow \infty$, $\bar{\lambda}$ é chamado de expoente de Liapunov [19]. Para $\bar{\lambda} < 0$ vemos que a separação ϵ_n diminui exponencialmente, indicando a existência de um ciclo estável. Por outro lado, para $\bar{\lambda} > 0$, ϵ_n diverge exponencialmente. O envelope da função $\bar{\lambda}(a)$, se positivo, determina a região caótica.

Para ilustrar esses conceitos tomamos como exemplo o mapa logístico que é dado por:

$$x_{i+1} = 4ax_i(1-x_i) \quad (1.27)$$

Os pontos fixos desse mapa são:

$$x_g = 0 \quad \text{e} \quad x^* = 1 - 1/4a \quad (1.28)$$

Do critério de estabilidade vemos que para condições iniciais $x_0 \in [0,1]$ e $a \in]0, 1/4[$ x_g é atrator e x^* repulsor, quando $a=1/4$ x_g e x^* tornam-se pontos indiferentes e para $a \in]1/4, 3/4[$ x_g é repulsor e x^* atrator. No ponto $a=3/4$, x^* torna-se indiferente e na região $a \in]3/4, (1+\sqrt{6})/4[$ o ciclo duplo:

$$x_{1,2} = \frac{1+4a \pm [(1+4a)(4a-3)]^{1/2}}{8a}, \quad (1.29)$$

torna-se estável. No ponto $\Lambda_2 = (1+\sqrt{6})/4$ o ciclo duplo torna-se indiferente e começa a surgir um ciclo 4. Esse processo de bifurcação continua até o ponto $\lambda^*=0.8925$ onde temos um ciclo de periodicidade infinita (Fig. 6.a). Dá-se então o início da região caótica, que é caracterizada pelo expoente de Liapunov positivo (Fig. 6.b). Essa rota de Feigenbaum para o caos é caracterizada pelos valores universais $\alpha=2.5029078751$ e $\delta=4.6692016091$ [19]. Convém ressaltar que o infinito também é atrator deste mapa e é atingido quando $x_0 \in [0,1]$.

Como vimos para o mapa logístico, a estabilidade de um ciclo n depende de a e x_0 . As regiões no espaço de parâmetros em que o sistema converge para um atrator é denominado de diagrama de fase em mecânica estatística e de conjunto de Mandelbrot se as variáveis forem complexas, como será visto na seção 3.1. O conjunto de condições iniciais x_0 que convergem para um atrator x^* é chamada de bacia de atração de x^* . No plano complexo esse

conjunto é denominado conjunto de Fatou, que tem como complementar o conjunto de Julia [34,35]. Esse último conjunto é o conjunto de condições iniciais que não convergem para nenhum atrator, portanto ele contém os repulsores do mapa. Um conjunto denso no conjunto de Julia é gerado a partir de um repulsor pelo mapa inverso de f .

(a)

(b)

Fig. 6.a - Ilustração da bifurcação de período 2^n .

b - Expoente de Liapunov. A linha tracejada é o envelope da função.

CAPITULO II

FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO PARA O MODELO DE POTTS NA ÁRVORE DE CAYLEY
FECHADA E ASSIMÉTRICA

Neste capítulo utilizamos as regras de associação para as transmissividades térmicas do modelo de Potts, para obter a função de correlação entre qualquer par de spins na árvore de Cayley com parâmetro de ramificação $r=2$ e com campo magnético atuando somente nos spins da superfície. Esse campo é representado pela interação dos spins superficiais da árvore com um spin fantasma (Fig. 7).

Na primeira seção, obtemos uma fórmula de recorrência para a transmissividade térmica equivalente entre qualquer par de spins em uma cadeia de Potts infinita com campo aplicado. Na segunda seção, mostramos que o cálculo da função de correlação do modelo de Potts na árvore de Cayley fechada e assimétrica, reduz-se ao cálculo da função de correlação na cadeia.

Fig. 7 - Árvore de Cayley fechada e assimétrica com parâmetro de ramificação $r=2$ e três gerações onde o campo magnético é simulado pela interação dos spins superficiais com o spin fantasma.

2.1 - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NA CADEIA DE POTTS COM CAMPO

Considere uma cadeia de Potts aberta com os N spins interagindo com acoplamentos J e acoplados a um spin fantasma com interação H , onde J e H são acoplamentos ferromagnéticos.

Para obter a função de correlação entre os spins nos sítios i e $i+m$, calculamos primeiramente o campo efetivo atuando sobre o spin λ_i (λ_{i+m}) devido a todos os spins à esquerda (direita). Isso é realizado pelo uso sucessivo das regras de associação em série e paralelo que estabelece uma transmissividade equivalente h_i entre os spins fantasma e λ_i dada por:

$$h_i = \frac{h + [1 + (q-2)h]th_{i-1}}{1 + (q-1)hth_{i-1}} \quad \text{com } h_0 = h \quad (2.1)$$

O mesmo raciocínio pode ser empregado para a cadeia infinita. Nesse caso a intensidade dos campos atuando nos spins λ_i e λ_{i+m} é dado pelo ponto fixo real e estável h' do mapa acima (Fig. 8.a)

$$h' = \frac{t[1+(q-2)h] - 1 + \{1-t[1+(q-2)h]\}^2 + 4h^2t(q-1)}{2th(q-1)}$$

com:

(2.2)

$$J > 0 \quad H > 0 \quad q \geq 2.$$

A cadeia finita acoplada ao spin fantasma é uma ponte de Wheatstone generalizada. Para calcular a função de correlação entre os spins λ_i e λ_{i+m} utilizaremos o método da quebra e colapso.

Fig. 8.a - Cadeia finita com m ligações, obtida pela decimação de todos os spins à esquerda (direita) de λ_i (λ_{i+m}), de uma cadeia infinita.

b - Arranjo de spins obtido pelo colapso da ligação H ($h=1$) mais próxima da extremidade direita da figura 8.a.

Vemos que pela quebra da ligação H na figura 8.a, obtemos um arranjo do mesmo tipo que o original. Por outro lado, pelo colapso de qualquer ligação H , um novo tipo de arranjo é obtido (Fig. 8.b). Vamos considerar primeiramente, o arranjo obtido pelo colapso da ligação H mais próxima da extremidade direita. Nesse aglomerado a transmissividade entre os spins λ_i e λ_{i+m-1} é obtida pelo uso sucessivo das regras de composição em série e paralelo. Começamos trocando a menor bolha formada pelas ligações t e h pela ligação renormalizada obtida da transmissividade equivalente $t_1 = t_p(t, h)$. A transmissividade equivalente $t_2 = t_p(t_1, t, h)$ entre

os spins da segunda menor bolha é obtida compondo t_1 em série com t e em paralelo com h . Procedendo dessa maneira, trocamos todas as bolhas, de modo que a transmissividade equivalente entre λ_1 e λ_{1+m-1} é obtida após a composição de t_{m-2} com t e h' ; onde:

$$t'_{m-1} = t_p(t_{m-2}t, h') . \quad (2.3)$$

Reescrevendo a Eq. 2.3 como função de t'_{m-2} , obtemos que:

$$t'_{m-1} = \frac{N'_{m-1}}{D'_{m-1}} = \frac{aD'_{m-2} + bN'_{m-2}}{cD'_{m-2} + dN'_{m-2}} , \quad (2.4)$$

onde

$$a = h'(1 + h'[q - 2 - (q-1)h]) + t[1 + (q-2)h'](h - h')$$

$$b = h'(q-1)(h - h') + t[1 + (q-2)h'](1 + h[q-2 - (q-1)h'])$$

$$c = 1 + h'[q - 2 - (q-1)h] + (q-1)h't(h - h')$$

$$d = (q-1)\{h't(1 + h[q - 2 - (q-1)h']) + h - h'\} .$$

A função de correlação $\langle \lambda_1 \lambda_{1+m} \rangle$ entre os spins externos do arranjo colapsado é finalmente obtido combinando t'_{m-1} em série com a transmissividade equivalente da bolha da direita do sítio colapsado.

Com esse resultado, estamos prontos para obter a função de correlação entre os spins λ_1 e λ_{1+m} da cadeia infinita interagindo com um spin fantasma. Começamos considerando o caso em que os spins estejam separados somente por uma ligação ($m=1$) (Fig. 8.a). Pelas regras de composição em série e paralelo, a função de correlação é dada por:

$$T_1(t, h') = \frac{t + h'^2 + (q-2)th'^2}{1 + (q-1)th'^2} . \quad (2.6)$$

Para $m=2$ (Fig. 4), utilizamos o método da quebra e colapso para a ligação H, observando que para o arranjo quebrado, reobtemos o arranjo anterior com a ligação J renormalizada (t^2); de modo que:

$$T_2(t, h, h') = \frac{(1-h)[t^2 + h'^2 + (q-2)t^2 h'^2] + h[t + h' + (q-2)th']^2}{(1-h)[1 + (q-1)t^2 h'^2] + h[1 + (q-1)th']^2} \quad (2.7)$$

Para prosseguirmos, devemos ter em mente que cada iteração depende do resultado anterior mas com a última ligação renormalizada (t^2). Por essa razão, é conveniente introduzir a notação t_k^n , para representar essa ligação, onde n é um número que depende da separação m entre os spins e da função iterada, como é mostrado no esquema na figura 9. As transmissividades para os arranjos quebrado e colapsado entre dois spins separados por m ligações, são dadas por:

$$T_{m,q}(t_k^n) = T_{m-1}(t_k^{n+1}) \quad (2.8.a)$$

e

$$T_{m,c}(t_k^n) = t'_{m-1} t_p(t_k^n, h') \quad (2.8.b)$$

De acordo com a regra da quebra e colapso dada pela Eq. 1.17, a transmissividade equivalente é:

$$T_m(t, h, h', t_k^n) = \frac{N_m(t_k^n)}{D_m(t_k^n)} = \frac{(1-h)N_{m-1}(t_k^{n+1}) + hN'_{m-1}N(t_k^n, h')}{(1-h)D_{m-1}(t_k^{n+1}) + hD'_{m-1}D(t_k^n, h')} \quad (2.9)$$

onde N e D são dados pela Eq. 1.10, N_{m-1} (D_{m-1}) é o numerador (denominador) da transmissividade equivalente entre os spins

externos separados por $m-1$ ligações (geração anterior) e N'_{m-1} (D'_{m-1}) é o numerador da Eq. 2.4.

Fig. 9 - Esquema de como realizar o cálculo da Eq. 2.9. Cada iteração $T_{m-(n-1)}(t_k^n)$ depende da transmissividade do arranjo quebrado, a qual é dada pela geração anterior com a ligação renormalizada $T_{m-n}(t_k^{n+1})$ e do arranjo colapsado dado essencialmente por t'_{m-n} . Esse processo é repetido sucessivamente até obtermos T_m . Colocando $t_k=t$, obtemos a função de correlação entre dois spins separados por m ligações (Fig. 8.a).

Como caso particular, observamos que, trocando t_k^n por t^n e fazendo $H=0$, reobtemos o resultado esperado para a função de correlação da cadeia sem campo:

$T_m(t) = t^m \qquad \qquad \qquad (2.10)$

2.2 - MAPEAMENTO DA ÁRVORE DE CAYLEY FECHADA E ASSIMÉTRICA NA CADEIA ABERTA COM CAMPO

Vamos agora discutir como podemos obter a função de correlação para os spins de Potts na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Consideramos o caso em que o parâmetro de ramificação é $r=2$, a generalização para outros valores é imediata e não será discutida aqui. Enfatizamos o fato que a presença do spin fantasma é essencial para tornar o sistema não trivial (cadeia), caso contrário, todas as funções de correlação são dadas pela Eq. 2.10.

Observamos a existência de duas possibilidades para a localização dos spins: os spins considerados estão ou não em diferentes ramos com raiz no topo C (Fig. 7). Vamos considerar primeiramente a correlação entre os sítios A e B. Por causa da estrutura da árvore, cada vértice (extremidade das ligações) se comporta como uma junção móvel, de modo que pela rotação dos ramos, podemos considerar somente os spins nas laterais da árvore no cálculo da transmissividade equivalente. Isso é descrito pelas seguintes igualdades:

$$\langle AB \rangle = \langle AB' \rangle = \langle AB'' \rangle = \langle A'B \rangle = \langle A'B' \rangle = \langle A'B'' \rangle \quad (2.11)$$

Para mapear o sistema acima no sistema colocado na cadeia aberta, procedemos como segue: pela composição dos spins internos pertencentes aos subramos com raiz em A (B) trocamos todos os acoplamentos J pelo acoplamento renormalizado H_A (H_B), dado pela transmissividade equivalente entre A' (B'') e o spin fantasma. A seguir compomos todos os spins internos restantes, exceto aqueles diretamente conectados a lateral da árvore (Fig. 10), repondo as

ligações pelos acoplamentos renormalizados. Esses acoplamentos efetivos são calculados pela relação de recorrência para a transmissividade equivalente h_{i+1} , da unidade geradora da árvore fechada e assimétrica:

$$h_{i+1} = \frac{2th_i + (q-2)(th_i)^2}{1 + (q-1)(th_i)^2} \tag{2.12}$$

Fig. 10 - Árvore de Cayley fechada e assimétrica mapeada na cadeia aberta submetida a um campo efetivo não homogêneo.

As camadas são indexadas a partir da superfície da árvore ($i=0$) para o seu interior. No limite termodinâmico ($i \rightarrow \infty$), o campo atuando nos spins ligados aos spins na lateral da árvore é dado pelo ponto fixo real e estável:

$$h' = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1/2, \\ \frac{t(q-2) + [t^2(q-2)^2 - 4(q-1)(1-2t)]^{1/2}}{2t(q-1)} & \text{se } t > 1/2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Como último passo para completar o mapeamento, compõe-se os acoplamentos J e H' em série.

$$h = th' , \quad (2.14)$$

Assim a relação de recorrência para a função de correlação na árvore é dada pela Eq. 2.9:

$$T_m(t, h, h', t_k^n) = \frac{N_m(t_k^n)}{D_m(t_k^n)} = \frac{(1-h)N_{m-1}(t_k^{n+1}) + h(aD'_{m-2} + bN'_{m-2})[t_k^n + h' + (q-2)t_k^n h']}{(1-h)D_{m-1}(t_k^{n+1}) + h(cD'_{m-2} + dN'_{m-2})[1 + (q-1)t_k^n h']} \quad (2.15)$$

onde h' e h são dados respectivamente pelas Eqs. 2.13 e 2.14. Note que se o campo H for nulo ou $t < 1/2$, então $h' = 0$. Nesse caso a árvore de Cayley é mapeada na cadeia de Potts aberta sem campo e a função de correlação é dada novamente pela Eq. 2.10, onde m é o número de ligações conectando os dois sítios.

O caso em que o par de sítios pertencem ao mesmo ramo com raiz em C (por exemplo A e D (Fig. 7)), pode ser reduzido ao primeiro caso anterior como segue: vamos denotar por C' o ancestral comum mais jovem de A e D. Primeiramente, troque todos

os arranjos elementares por h' , incluindo aqueles que não contêm os sítios A e D, que pode ser considerados como um campo efetivo atuando no novo topo C' da árvore. Esse procedimento nos leva a um novo arranjo que é equivalente àquele considerado no primeiro caso.

CAPITULO III

MODELO DE POTTS DE UM ESTADO NA ARVORE DE CAYLEY FECHADA E ASSIMETRICA

Na primeira seção deste capítulo apresentamos a transformação de Möbius e uma breve descrição do conjunto de Mandelbrot. Na segunda seção obtemos o mapa da transformação do grupo de renormalização (mapa de Bethe-Peierls) para o modelo de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Por ser um mapa polinomial quadrático obtemos o diagrama de fase do sistema utilizando as propriedades do conjunto de Mandelbrot através da transformação de Möbius. Na terceira seção calculamos os expoentes críticos da função de correlação e de suas derivadas nas transições das fases ferro-para e para-vidro de spin a campo nulo. Utilizando o método sugerido por Christiano [16], verificamos que estas funções podem ser interpretadas como funções de estado do sistema, e que se essas identificações forem efetuadas, os expoentes críticos satisfazem as igualdades nas relações de escala. Na quarta seção ilustramos o procedimento apresentado no capítulo II para calcular a função de correlação entre dois spins de Potts de um estado separados por m ligações na rede de Bethe. Obtemos então de forma explícita as correlações para $m=1, 2$ e 3 .

3.1 - TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS E CONJUNTO DE MANDELBROT

Um mapa racional é um mapa da forma $R(z)=P(z)/Q(z)$ onde $P(z)$ e $Q(z)$ são dois mapas polinomiais sem divisores em comum. O grau de R é dado pelo maior grau entre os polinômios P e Q .

Considerando as variáveis h_i e z_i que pertencem a esfera de Riemann (união do plano complexo com o conjunto infinito). Se $R(h_i)$ e $S(z_i)$ forem dois mapas racionais e $M(h_i)$ for uma transformação de Möbius tal que o diagrama

comuta, então R e S são analiticamente conjugados ($S=M^{-1}RM$). Observe que se R e S forem conjugados por M , então as funções iteradas R^n e S^n também são conjugadas por M . Dessa maneira R e S são funcionalmente o mesmo sistema dinâmico, ou seja, qualquer pergunta feita sobre as propriedades topológicas ou conformes do sistema gerado por R , pode ser obtida através de uma transformação de Möbius da resposta da mesma pergunta feita a S .

Considere como exemplo o mapa polinomial quadrático na forma:

$$h_{i+1} = R(h_i) = ah_i^2 + 2bh_i + d. \quad (3.1)$$

Podemos conjugar R ao mapa de Mandelbrot:

$$z_{i+1} = S(z_i) = z_i^2 + C, \quad (3.2)$$

através da transformação:

$$z_1 = M(h_1) = ah_1 + b \quad (3.3.a)$$

$$C = ad + b - b^2. \quad (3.3.b)$$

Dessa maneira podemos conjugar qualquer mapa polinomial quadrático ao mapa de Mandelbrot.

Observe que o infinito é um atrator do mapa 3.2. Definimos o conjunto de Mandelbrot (CM) como sendo o conjunto de valores C complexo, para os quais as iteradas da função S com a condição inicial $z_0=0$ não divergem, ou seja, $CM = \{C \text{ complexos} / S^n(0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ (Fig. 11).

Esse conjunto é simétrico em relação ao eixo real e é formado por um cardióide principal conectado a círculos. Observamos que quando qualquer região da fronteira for ampliada, réplicas do conjunto original aparecem, indicando a sua dimensão fractal.

Para valores de C pertencentes a CM, o conjunto de Julia associado a cada $C \in CM$ é conexo, ele divide o plano complexo das condições iniciais z_0 em duas ou mais regiões. Por outro lado, para valores de $C \notin CM$, os conjuntos de Julia são desconexos (Fig. 11).

Para valores de C pertencentes a diferentes regiões de CM o sistema converge para diferentes atratores. Para C pertencente ao cardióide, o mapa 3.2 converge para o ponto fixo,

$$z^* = \frac{1 - (1 - 4C)^{1/2}}{2}. \quad (3.4)$$

Para C pertencente ao círculo maior de CM, o mapa converge para um ciclo de período 2. CM tem 3 círculos de período 3 (dois deles são os maiores exceto o círculo de período 2). Exis-

Fig. 11 - Conjunto de Mandelbrot e conjuntos de Julia.

tindo ainda 6 regiões de período 4, 15 de período 5, 27 de período 6 e assim por diante. Uma descrição mais detalhada sobre as características do conjunto de Mandelbrot pode ser encontrada na referência [35]. Para nossos objetivos é suficiente analisar somente o eixo real do plano complexo.

Para os valores de C real fora do intervalo $[-2, 1/4]$ o mapa 3.2 diverge. Para valores de $C \in]-3/4, 1/4[$ o mapa converge para o ponto fixo z^* (Eq. 3.4). Para $C \in]-5/4, -3/4[$ o mapa converge para um ciclo duplo. Diminuindo C obtemos ciclos de período 4, 8 e assim por diante até o ponto $C = -1.401\dots$ onde dá-se o início da região caótica que é limitada em $C = -2$.

Por último enfatizamos o fato do mapa logístico ser conjugado ao mapa de Mandelbrot. Por essa razão para C real o mapa de Mandelbrot apresenta a rota de Feigenbaum para o caos (Fig. 12).

Fig. 12 - Relação entre o conjunto de Mandelbrot e a rota para o caos de Feigenbaum.

3.2 - DIAGRAMA DE FASE

Nesta seção obtemos o diagrama de fase para spins de Potts de um estado interagindo com constante de acoplamento J em dois ramos da árvore de Cayley fechada e assimétrica com parâmetro de ramificação $r=2$. O spin fantasma interage com os spins interiores da árvore com constante de acoplamento H e com os spins superficiais com H_0 .

Aplicando as regras de composição em série e paralelo para as transmissividades térmicas (Eq. 1.7),

$$h_1 = 1 - e^{-\beta H_1}, \quad h = 1 - e^{-\beta H} \quad \text{e} \quad t = 1 - e^{-\beta J}, \quad (3.5)$$

da unidade geradora da rede (Fig. 2) obtemos o mapa de Bethe-Peierls para esse sistema

$$h_{1,2} = -t^2(1-h)h_{1,2} + 2(1-h)th_1 + h. \quad (3.6)$$

Os pontos fixos desse mapa são dados por:

$$h_{1,2}^* = \frac{2t(1-h)-1 \pm [1-4t(1-t)(1-h)]^{1/2}}{2t^2(1-h)} \quad (3.7)$$

e o ciclo duplo por:

$$h_{1,2}^{**} = \frac{1 + 2t(1-h) \pm [4t(t-1)(1-h) - 3]^{1/2}}{2t^2(1-h)}. \quad (3.8)$$

Para determinar a estabilidade dos ciclos, conjugamos o mapa 3.6 ao mapa de Mandelbrot através da transformação de Möbius (Eq. 3.3) onde:

$$a = -t^2(1-h) \quad b = (1-h)t \quad e \quad d = h. \quad (3.9)$$

Como t e h são valores reais, devemos considerar somente os valores reais do parâmetro C . O diagrama de fase desse sistema é obtido escrevendo h em função de C na Eq. 3.3.b. Indexando os parâmetros C e h obtemos as linhas de transição de fase:

$$h_n = 1 - \frac{C_n}{t(1-t)}, \quad (3.10)$$

onde identificamos os valores C_n com os valores que separam as diversas regiões do conjunto de Mandelbrot.

Da Eq. 3.5 vemos que o diagrama de fase $h \times t$ é definido para valores de h e t menores que a unidade. Quando $C \in [C_{cr}, -2, C_1 = 1/4]$, o infinito é o único atrator do mapa 3.6, de modo que nas regiões $h < h_1$ e $h < h_{cr}$, o sistema não é definido termodinamicamente. O ponto fixo h_1 representa a fase ferromagnética. Esse ponto é estável na região $h > h_1$, ($C_1 = -3/4$) e $h > h_1$ excluindo o segmento de reta $h=0$ e $t \in [-1/2, 1/2]$, que representa a fase paramagnética onde h_1 é estável. Na região $h_1 < h < h_{cr}$ o sistema apresenta a rota para o caos de Feigenbaum. Para $C < C_{cr}$ o sistema apresenta uma região caótica. Seguindo a definição de McKay et al. [30] a região caótica é definida como sendo a fase vidro de spin, pois nessa região existem muitos ciclos instáveis, que acarreta em singularidades na energia livre, como foi mostrado por Derrida et al. [2]. Temos então uma fase de desordem a baixa temperatura (Fig. 13).

Fig. 13 - Diagrama de fase do modelo de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica.

3.3 - EXPOENTES CRITICOS DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Para calcular os expoentes críticos da função de correlação e de suas derivadas devemos levar em consideração o terceiro ramo da árvore de Cayley (o qual foi desprezado nos cálculos na seção anterior). Para isso devemos aplicar as regras de composição em série e paralelo no arranjo de spins considerado na Fig. 14. Dessa maneira temos que a função de correlação entre os spins λ_c e λ_F é dada por

$$m = \langle \lambda_c \lambda_F \rangle = th_N + h_{N+1} - th_N h_{N+1} . \quad (3.11)$$

Fig. 14 - Representação da árvore de Cayley fechada e assimétrica decimada onde h_N representa o terceiro ramo.

No limite $N \rightarrow \infty$, os valores de h_N e h_{N+1} se reduzem a valores de um ciclo estável de período n que é determinado pela escolha dos parâmetros h e t . Como todas as combinações de h_i e h_{i+1} são igualmente prováveis, devemos fazer uma média aritmética sobre esses valores:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (th^*_{i+1} + h^*_{i+1} - th^*_i h^*_{i+1}) \text{ onde } n+1=1 . \quad (3.12)$$

Consideraremos primeiramente as regiões ferro e paramagnética do diagrama de fase (Fig. 13), onde os atratores são pontos fixos ($n=1$). Desse modo a Eq. 3.12 é reescrita como:

$$m = h^*[1 + t(1-h^*)] \quad (3.13)$$

Considerando a estabilidade dos pontos fixos temos que:

$$m = \begin{cases} 0 & |t| < 1/2 \text{ e } h=0 \\ (1+t)h_+^* - th_+^{*-2} & h > h_1' \text{ e } h > h_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

Consideramos a transição entre as fases ferro e paramagnética que ocorre em $t_c=1/2$. Essa transição é de segunda ordem, visto que $h_2(t_c, h=0)=0$, fazendo com que $h^*(t, h=0)$ seja uma função contínua.

Consideramos primeiramente a isoterma $t=t_c$. A Eq. 3.14 é reescrita como:

$$m = \begin{cases} \infty & h < 0 \\ \frac{(\sqrt{h}-h)(3-h-2\sqrt{h})}{(1-h)^2} & h > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Considerando o campo externo H pequeno ($h \rightarrow 0$) e expandindo a Eq. 3.15 em torno de $H=0$, obtemos que:

$$H \approx \frac{J}{9 \ln 2} m^2 \quad (3.16)$$

de onde obtemos o expoente crítico $\delta=2$.

Consideramos agora a grandeza:

$$X = \frac{\partial m}{\partial H} \bigg|_T = \frac{\partial m}{\partial h^*} \frac{\partial h^*}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial H} \bigg|_T \quad (3.17)$$

Observamos que para calcular X na fase paramagnética temos que:

$$\frac{\partial h^*}{\partial h} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{h^*(0+\Delta H) - h^*(0)}{\Delta H} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{h^*(\Delta H)}{\Delta H} \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

Para $h=0$, as Eqs. 3.14 e 3.17 podem ser reescritas como:

$$m = \begin{cases} 0 & |t| < 1/2 \\ \frac{(2t-1)[(t-1)^2+t]}{t^3} & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

e

$$X = \begin{cases} \infty & |t| < 1/2 \\ \frac{(t-1)^2[t(1+t) - 2(2t-1)]}{KT(2t-1)t^3} & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

onde h^* é dado pela Eq. 3.7.

Escrevendo essas equações em função de ϵ , onde:

$$\epsilon = \frac{T-T_c}{T_c} \quad \text{com} \quad T_c = \frac{J}{K \ln 2} \quad (3.21)$$

e expandindo em torno de $\epsilon=0$ ($t=t_c$) obtemos que:

$$m \approx 6 \ln 2 (-\epsilon)^{-1} \quad \text{e} \quad X \approx \frac{3}{2J} (-\epsilon)^{-1} \quad (3.22)$$

obtemos os expoentes críticos $\beta=1$ (para m) e $\beta'=1$ (para X).

Passamos agora a considerar a função de correlação entre o spin central e um spin primeiro vizinho (Fig. 14). Das regras de composição em série e paralelo obtemos uma transmissividade equivalente em função de h_N e h_{N+1} . No limite $N \rightarrow \infty$, esses valores se reduzem a valores de um ciclo n , que fazendo a média obtemos:

$$U = -\langle \lambda_c \lambda_1 \rangle = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [t + h_i * h_{i+1} (1-t)] \quad \text{onde } n+1=1 \quad (3.23)$$

Nas fases ferro e paramagnética, temos que $n=1$, portanto:

$$U = -t - (1-t)h^2 \quad (3.24)$$

onde definimos:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} \bigg|_H \quad (3.25)$$

Realizando a derivada para os pontos fixos (Eq. 3.7), obtemos para $h=0$, que:

$$C = \begin{cases} \frac{J}{KT^2} (1-t) & |t| < 1/2 \\ \frac{J(1-t)}{KT^2} \left[1 + \frac{(2t-1)(2t^2-7t+4)}{t^2} \right] & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Escrevendo essa equação em função de ϵ e expandindo em torno de $\epsilon=0$ obtemos:

$$C = \begin{cases} \frac{K \ln^2 2}{2J} [1 + (\ln 2 - 2)\epsilon] & \epsilon > 0 \\ \frac{K \ln^2 2}{2J} [1 + (3 \ln 2 + 2)(-\epsilon)] & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Vemos então que ambos os ramos da função $C(\epsilon)$ saem do ponto $(K \ln^2 2)/(2J)$ como uma função linear em ϵ , então os expoentes críticos $\alpha = \alpha' = -1$.

Neste momento é conveniente interromper os cálculos dos expoentes críticos da função de correlação, para fazer alguns comentários sobre a interpretação física dessas grandezas.

Sabemos que em uma transição de fase de segunda ordem, os potenciais termodinâmicos são invariantes por uma transformação de escala na região crítica. Devido a essa hipótese de escala as desigualdades entre os expoentes críticos tornam-se igualdades [39]. Nessa seção calculamos cinco expoentes críticos de maneira independente. Assim, se a correlação m for relacionada com a magnetização por spin, e U com a energia interna do sistema, interpretamos X como sendo a susceptibilidade magnética, e C o calor específico. Vemos então que os expoentes críticos β , δ , γ' , α e α' satisfazem as igualdades previstas pela hipótese de escala para essas funções termodinâmicas.

Essa é uma boa evidência de que as funções de correlação calculadas estão relacionadas com as funções de estado do sistema. Essa relação pode ser interpretada como sendo mais um exemplo do método sugerido por Christiano [16] para calcular a energia interna e a magnetização na rede de Bethe.

A magnetização por spin m é proporcional ao valor médio de um spin sujeito a um campo efetivo devido aos outros spins do sistema. Na rede de Bethe que apresenta invariança translacional, o campo efetivo é representado pela interação entre o spin fantasma e o spin central. Dessa maneira temos que $\langle \lambda_c \rangle = \langle \lambda_c \lambda_r \rangle$ uma vez que a transmissividade equivalente não depende em qual estado λ_r foi fixado.

A energia interna do sistema é dada $\langle \mathcal{H} \rangle$. Substituindo a Eq. 1.4 em 1.1, temos que a hamiltoniana em uma rede é dada por:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{r=0}^{q-1} \lambda_i \lambda_{j+r} \quad (3.28)$$

fazendo a média, vemos que $\langle \lambda_i \lambda_{j+r} \rangle$ não depende de r (Eq. 1.5), assim

$$\langle \mathcal{H} \rangle = -Jq \sum_{\langle ij \rangle} \langle \lambda_i \lambda_{j+r} \rangle. \quad (3.29)$$

Na rede de Bethe todos os sítios são equivalentes, ou seja, todas as interações de primeiros vizinhos λ_i e λ_j são iguais e equivalentes a $\langle \lambda_c \lambda_1 \rangle$, desse modo:

$$\langle \mathcal{H} \rangle = -JqN_1 \langle \lambda_c \lambda_1 \rangle, \quad (3.30)$$

onde N_1 é o número de ligações na rede.

Por essas razões justificamos as relações entre m e a magnetização por spin e U com a energia interna do sistema.

Passamos agora a considerar a transição entre a fase paramagnética e a de ciclo duplo que ocorre em $t = -1/2$. Repetindo os cálculos do calor específico na fase paramagnética, vemos que

$\alpha = -1$. Devemos agora obter os expoentes críticos da função quando t tende pela esquerda a t_c .

A entrada da fase de período dois é caracterizada por $h_{1,2}^*$ (Eq. 3.8) que torna-se estável. Essa transição também é de segunda ordem, visto que, $h_{1,2}^*(t = -1/2, h = 0) = 0$.

Considerando o arranjo de spins da Fig. 14; tomando o limite $N \rightarrow \infty$, fazendo uma média aritmética sobre as possíveis combinações e substituindo os valores de h_1^* e h_2^* (Eq. 3.8), obtemos que a campo nulo ($h = 0$):

$$m = \frac{(2t+1)[t(1+t)-2]}{2t^3} \quad (3.31)$$

$$U = -t - \frac{(1-t)(1+2t)}{t^4} \quad (3.32)$$

Utilizando as Eqs. 3.17 e 3.25, obtemos que:

$$X = \frac{3t^2 - 3t - 4}{2KTt^3} \quad (3.33)$$

$$C = \frac{J(1-t)}{KT^2} \left[1 + \frac{4t^2 - 3t - 4}{t^3} \right] \quad (3.34)$$

Escrevendo as Eqs. 3.31, 3.33 e 3.34 em função de ϵ (Eq. 3.21), onde agora:

$$T_c = \frac{J}{K \ln(2/3)} \quad (3.35)$$

e expandindo em torno de $\epsilon = 0$ ($t = -1/2$), obtemos os expoentes

críticos $\beta=1$, $\alpha'=-1$ e $\gamma'=1$. Satisfazendo assim a igualdade de Rushbrooke entre os expoentes críticos para a transição das fases paramagnética e ciclo duplo.

Finalmente observamos que para $t=-1/2$, a transição $h_{\pm} \rightarrow h_{\pm}$ é de primeira ordem, visto que $h_{\pm}(t=-1/2, h \rightarrow 0) = -8$ e $h_{\pm}(t=-1/2, h=0) = 0$. A transição $h_{\pm}(t=-1/2, h=0)$ e $h_{\pm, \pm}(t=-1/2, h \rightarrow 0)$ apesar de ser de segunda ordem apresenta um acoplamento antiferromagnético para o campo (interação com spin fantasma). Como δ é definido para transições de segunda ordem para $H > 0$, não é possível calculá-lo nessa transição.

3.4 - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NA REDE DE BETHE

Vamos ilustrar o procedimento apresentado no capítulo II para calcular a função de correlação entre dois spins de Potts de um estado na árvore de Cayley fechada e assimétrica com parâmetros de ramificação $r=2$ a campo nulo. Os pontos fixos do mapa de Bethe-Peierls são dados pela Eq. 3.7 com $h=0$. Assim:

$$h^* = 0 \quad h^* = \frac{2t - 1}{t^2} \quad (3.36)$$

De acordo com os argumentos da seção 2.2, qualquer par de spins na árvore de Cayley fechada e assimétrica pode ser mapeado em uma cadeia onde o campo que atua nos spins das extremidades é h^* e nos spins internos th^* (Fig. 8.a). Como vimos é conveniente denominar a última ligação da cadeia como sendo t_k . No final do procedimento faremos $t_k = t$.

Colapsando a ligação entre o spin fantasma e o spin λ_{m-1} , a correlação entre os spins λ_c e λ_{m-1} é dada pela Eq. 2.4. No caso $q=1$, temos que:

$$t'_{m-1} = h^* [1 + t(t-1)] + t(1 - th^*) t'_{m-2} \quad (3.37)$$

onde observamos que $t'_0 = 0$ e t'_i é composição em paralelo entre t e h^* , de modo que:

$$t'_i = t + h^*(1-t) \quad (3.38)$$

Compondo em paralelo t_k e h^* e esta em série com t'_{m-1} , obtemos a função de correlação para os spins das extremidades do arranjo "colapsado":

$$T_{mc} = [t_k + h^*(1-t_k)]t'_{m-1} \quad (3.39)$$

Pela quebra da ligação entre o spin fantasma e o spin λ_{m-1} , obtemos um arranjo de spins do mesmo tipo que o original, mas com uma geração a menos e com a última ligação renormalizada (t_k^2), assim a função de correlação para os spins das extremidades do arranjo "quebrado" é dada por:

$$T_{mq}(t_k) = T_{m-1}(t_k^2) \quad (3.40)$$

Pela regra da quebra é colapso (Eq. 1.17), temos que a função de correlação entre dois spins separados por m ligações na rede de Bethe é dada por:

$$T_m = (1-th^*)T_{mc} + th^*T_{mb} \quad (3.41)$$

Como vimos no capítulo II é conveniente considerar t_k^m na Eq. 3.41, como será ilustrado no cálculo a seguir:

$$T_m(t_k^m) = (1-th^*)T_{m-1}(t_k^{m+1}) + th^*[t_k^m + h^*(1-t_k^m)]t'_{m-1} \quad (3.42)$$

onde t'_{m-1} é dado pela Eq. 3.37.

De acordo com o esquema da Fig. 9 devemos obter a correlação $T_1(t_k^m)$; essa correlação já foi calculada e é dada substituindo t por t_k^m e multiplicando a Eq. 3.24 por -1

$$T_1(t_k^m) = t_k^m + (1-t_k^m)h^* \quad (3.43)$$

A correlação entre dois spins separados por duas ligações é dada por:

$$T_2(t_k^{m-1}) = (1-th^*)T_1(t_k^m) + th^*[t_k^{m-1} + h^*(1-t_k^{m-1})][t + h^*(1-t)] \quad (3.44)$$

para $m=2$ e $t_k=t$, obtemos:

$$T_2 = (1-th^*)[t^2 + (1-t^2)h^*] + th^*[t + (1-t)h^*]^2 \quad (3.46)$$

A correlação entre dois spins separados por três ligações é dada por:

$$T_3(t_k^{m-2}) = (1-th^*)T_2(t_k^{m-1}) + th^*[t_k^{m-2} + h^*(1-t_k^{m-2})]t_2' \quad (3.47)$$

Para $m=3$ e fazendo $t_k=t$, obtemos:

$$\begin{aligned} T_3 = & (1-th^*)\{(1-th^*)[t^3 + h^*(1-t^3)] + th^*[t^2 + h^*(1-t^2)] \times \\ & \times [t + h^*(1-t)]\} + th^*[t + h^*(1-t)]\{h^*[1 + t(1-t)] + \\ & + t(1-th^*)[t + h^*(1-t)]\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Substituindo os valores de h^* que são dados pela Eq. 3.36, obtemos de forma explícita a correlação entre dois spins de Potts de um estado separados por 1, 2 e 3 ligações na rede de Bethe.

CONCLUSÃO

Neste trabalho consideramos o modelo de Potts escalar de q estados na árvore de Cayley fechada e assimétrica. Todos os resultados foram obtidos a partir do estudo do comportamento das funções de correlação do sistema, através das regras de composição em série e paralelo e do método de quebra e colapso para as transmissividades térmicas.

Gostaríamos de enfatizar a razão do uso da árvore de Cayley fechada e assimétrica. A motivação é que as regras de composição de transmissividades de um dado modelo de spin podem ser aplicadas sucessivamente sem recorrer a aproximações. Desse processo obtemos um mapa onde estudamos os ciclos estáveis. Considerando esses ciclos, perdemos todas as informações sobre a superfície da árvore, passando assim a considerar a rede de Bethe, que apresenta uma interpretação física muito clara no contexto da aproximação de Bethe-Peierls. Dessa maneira, as dificuldades (algébricas) de subtrair os efeitos de superfície da árvore de Cayley, para obter a rede de Bethe, foram totalmente eliminadas.

Como resultado obtivemos um método recursivo para calcular a função de correlação entre qualquer par de spins de Potts na rede de Bethe. Não obstante, observamos que esse método pode ser utilizado em qualquer modelo de spin, uma vez que a transmissividade térmica e suas regras de composição em série e paralelo sejam conhecidas.

Sob o ponto de vista da aproximação de Bethe-Peierls, esse método nos fornece a correlação entre spins m -ésimos vizinhos. Essas correlações têm um papel importante nas correções de ordem superiores para a aproximação de campo médio.

Como vimos, a aproximação de Bragg-Williams é considerada de ordem zero pois não leva em consideração a estrutura da rede. A aproximação de Bethe-Peierls é considerada de primeira ordem por levar em consideração a correlação entre os spins primeiros vizinhos. Uma aproximação de segunda ordem deve levar em consideração a correlação entre segundos vizinhos. Essa correlação não pode ser obtida do sistema original (uma vez que por hipótese, não sabemos sua solução) mas podemos obtê-la da aproximação de Bethe-Peierls (assim como, as correlações entre terceiros, quartos vizinhos). Com a consideração da correlação entre segundos vizinhos, a aproximação de campo médio exige uma modificação na estrutura da árvore de Cayley. Essa modificação consiste em considerar um triângulo associado a cada spin da rede (Fig. 15). O estudo das propriedades dessa estrutura pode ser considerado como uma perspectiva de trabalhos futuros.

Fig. 15 - Estrutura que representa uma aproximação de campo médio de segunda ordem. Os acoplamentos entre os primeiros vizinhos é o mesmo que na rede considerada. Os acoplamentos entre segundos vizinhos são obtidos através do estudo dessa correlação na aproximação de Bethe-Peierls.

Com relação ao modelo de Potts de um estado na rede de Bethe, mostramos a existência de uma fase de vidro de spin. Esse sistema por ser proveniente de um mapa quadrático, torna-se o exemplo mais simples de vidro de spin em redes hierárquicas. Verificamos ainda que se a correlação entre o spin fantasma e qualquer spin da rede for relacionada com a magnetização (por

spin), e a correlação entre spins primeiros vizinhos for relacionada com a energia interna do sistema, os expoentes críticos dessas grandezas e de suas derivadas, satisfazem as igualdades nas relações de escala.

Diante de mais esta evidência, as relações estabelecidas por Christiano para obter a magnetização e a energia interna na rede de Bethe parecem ser válidas. No entanto, essas relações são justificadas de maneira heurística, por essa razão uma dedução mais formal seria muito bem recebida.

Ainda com relação a esse sistema, observamos que a fase vidro de spin é caracterizada por bifurcações de período 2^n , fazendo com que o sistema mude de comportamento por transições de segunda ordem. No entanto, sabemos que essa rota de Feigenbaum é caracterizada por dois parâmetros de escala (α, δ). Como perspectiva de futuros trabalhos seria interessante utilizar essa invariância por transformação de escala para determinar os expoentes críticos nas transições que ocorrem na fase vidro de spin.

O modelo de Potts de um estado pode ser interpretado como um formulação para a linguagem de percolação. Observamos que a campo nulo e para acoplamento ferromagnético, as fases ferromagnéticas e paramagnéticas representam as probabilidades de ocupação de sítios ou ligações para as quais o sistema percola ou não. A transmissividade térmica crítica está então relacionada com a probabilidade crítica de percolação. A interpretação dada ao campo magnético seria a de quebrar a isotropia de ocupação, dessa maneira teríamos diferentes probabilidades para cada direção a ser ocupada por um sítio ou ligação. No entanto, para acoplamentos antiferromagnéticos, as probabilidades de ocupação seriam maiores do que a unidade; redefinindo essas probabilidades poderíamos obter uma interpretação, na linguagem de percolação, para a fase vidro de spin.

REFERENCIAS

- 1) POTTS, R.B. - Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 106 (1952)
- 2) ISING, E. - Z. Phys. 21, 613 (1925)
- * 3) STAUFFER, D. - Introduction to percolation theory (Taylor&Francis, London and Philadelphia, 1985)
- 4) WU, F.Y. - Rev. Mod. Phys. 54, 235 (1982)
- * 5) BAXTER, R.J. - Exactly solved models in statistical mechanics (Academic Press Inc. London LTD, 1982)
- 6) EGGARTER, T.P. - Phys. Rev. B9, 2989 (1974)
- 7) BAUMGARTEL, H.G. and MULLER-HARTMANN, E. - Z. Phys. B46, 227 (1982)
- 8) MULLER-HARTMANN, E. and ZITTARTZ, J. - Phys. Rev. Lett. 33, 893 (1984)
- 9) WANG, Y.K. and WU, F.Y. - J. Phys. A9, 593 (1976)
- 10) MORRIS, H. - Lectures notes in physics 214 (Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1984)
- 11) BETHE, H.A. - Proc. Roy. Soc. A216, 45 (1935)
- 12) BETHE, H.A. - Proc. Roy. Soc. 150, 552 (1935)
- 13) PEIERLS, R. - Proc. Camb. Phil. Soc. 32, 447 (1936)
- 14) PEIERLS, R. - Proc. Roy. Soc. 154, 207 (1936)
- 15) KURATA, M. ; KIRKUCHI, R. and WATARI, T. - J. Chem. Phys. 21, 434 (1953)
- * 16) CHRISTIANO, P.L. - Tese de doutoramento defendida no Instituto de Física e Química de São Carlos 1985
- 17) GRIFFITHS, R.B. and KAUFMANN, M. - Phys. Rev. B26, 5022 (1980)
- 18) KAUFMANN, M. and GRIFFITHS, R.B. - Phys. Rev. B30, 244 (1984)
- * 19) HU, B. - Phys. Reps. 91, 233 (1982)
- * 20) WILSON, K.G. - Scientific american Vol. 241 No.2, 140 (1978)
- * 21) DERRIDA, B. ; ECKMANN, J.P. and ERZAN, A. - J. Phys. A16, 893 (1983)
- * 22) HUANG, K. - Statistical mechanics (John Willey & Sons, Inc. New York-London 1963)
- * 23) CALLIOLI, C.A. ; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. - Álgebra linear e aplicações (Atual Editora LTDA 1978)
- 24) FALK, H. - Phys. Rev. B12, 5184 (1975)

- 25) JELITTO, R.J. - *Physica* 99A, 268 (1979)
- 26) KRIZAN, J. and BARTH, P. - *Physica* 119A, 230 (1983)
- 27) CHRISTIANO, P.L. and GOULART ROSA Jr., S. - *Phys. Lett.* 101A, 275 (1984)
- 28) MARTINEZ, A.S. and GOULART ROSA Jr., S. - *Phys. Rev. A* 38, 4304 (1988)
- * 29) BINDER, *Fundamental problems in statistical mechanics* (E.G.D. Cohen, North Holland-Amsterdam, 1980)
- 30) MCKAY, S.R. ; BERKER, A.M. and KIRKPATRIK, S. - *Phys. Rev. Lett.* 48, 267 (1982)
- 31) DE AGUIAR, F.S. ; BOSCO, F.A. ; MARTINEZ, A.S. and GOULART ROSA Jr., S. - (submetido)
- 32) TSALLIS, C. and LEVY, S.V.F.-*Phys. Rev. Lett.* 47, 950 (1981)
- 33) ESSAM, J.W. and TSALLIS, C. - *J. Phys.* A19, 409 (1986)
- 34) BLANCHARD, P. - *Bull. Am. Math. Soc.* 11, 85 (1984)
- ✧ 35) PEITGEN, H.-O. and RICHTER, P.H. - *The beauty of fractals*, (Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986)
- 36) FEIGENBAUM, M.J. - *J. Stat. Phys.* 11, 25 (1978)
- 37) MITTAG, L. and STEPHEN J. - *J. Phys.* A7, L109 (1974)
- 38) STEFAN, P. - *Commun. Math. Phys.* 54, 237 (1977)
- ✧ 39) STANLEY, H.E. - *Introduction to phase transition and critical phenomena*, (Oxford University Press, 1971)