

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

**"SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE
DESACELERAÇÃO DE ÁTOMOS PELA TÉCNICA
DE AJUSTAMENTO ZEEMAN"**

REGINALDO DE JESUS NAPOLITANO

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física e Química de São Carlos,
para a obtenção do título de Mestre
em Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei
Salvador Bagnato

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFSC
FÍSICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais *OK*
São Carlos - 1990
USP/IFSC/SBI



8-2-000860

418

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

Reginaldo de Jesus Napolitano

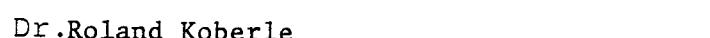
APRESENTADA

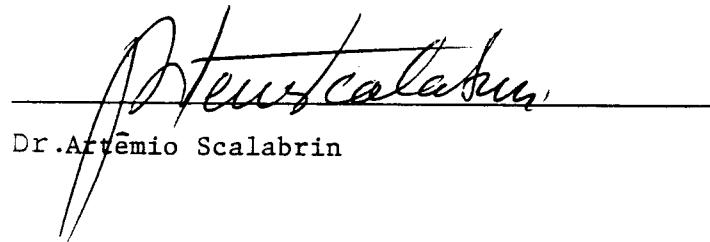
AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSI

DADE DE SÃO PAULO, EM 16 DE fevereiro DE 19 90.

COMISSÃO JULGADORA:


Dr. Vanderlei S. Bagnato Orientador


Dr. Roland Koberle


Dr. Artemio Scalabrin

Para Claudia

e nossos queridos

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Vanderlei Salvador Bagnato, pela sua orientação.

Ao Valdir, pela ajuda nos problemas com o VAX.

A Isabel, por sua dedicação.

Ao CNPq, FAPESP e FINEP, pelo apoio financeiro.

Aos meus companheiros Marcel, Aparecida, Henrique, Valdir, Adriano, Carla e, em especial, ao Carlos, que sempre me deu conselhos úteis e boas dicas.

A Patricia, por ensinar-me a usar o tipo texto do Turbo Pascal.

A todas as pessoas, enfim, que, ao meu redor, tornaram menos árdua esta jornada.

ÍNDICE

LISTA DAS FIGURAS	i
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
I. INTRODUÇÃO	1
II. FORÇAS RADIATIVAS E DESACELERAÇÃO DE FEIXES ATÔMICOS	4
III. ESTUDOS NUMÉRICOS DO PROCESSO DE DESACELERAÇÃO	34
III.1. TRAJETÓRIAS	34
III.2. SIMULAÇÃO DE UM EXPERIMENTO DE DESACELERAÇÃO: OBSERVAÇÃO DA FLUORESCÊNCIA AO LONGO DO PROCESSO	70
IV. MODELO ANALÍTICO SIMPLIFICADO	103
V. CONCLUSÃO	111
VI. SUGESTÕES	114
APÊNDICE	115
REFERÊNCIAS	153

LISTA DAS FIGURAS

- Figura 1. Perfil do campo magnético teórico
(expressão (109)) 37
- Figura 2. Perfil do campo magnético medido,
fornecido por um solenóide real usado em
experiências de desaceleração de feixe
atômico. 38
- Figura 3. Trajetória para $V_0 = 800$ m/s, para o
campo teórico da figura 1 (expressão (109)). 39
- Figura 4. Trajetória para $V_0 = 800$ m/s comparada
com a curva $f(Z) = \gamma B(Z) - \Delta$ para $\Delta = + 100$
MHz. 40
- Figura 5. Ampliação da região de cruzamento entre
as curvas de $f(Z)$ e $kV(Z)$ da figura 4. 41
- Figura 6. Gráfico de $f(Z) - kV(Z)$ para a trajetória
da figura 4. 42
- Figura 7. Ampliação da região da figura 6 em que
 $f(Z) - kV(Z)$ é aproximadamente constante. 43
- Figura 8. Cruzamento das curvas $f(Z)$ e $kV(Z)$ para a

trajetória da figura 4.....	45
Figura 9. As três curvas correspondentes à inequação (115), calculadas para $\Delta = + 100$ MHz.....	48
Figura 10. Ampliação da figura anterior mostrando a região de cruzamento.....	49
Figura 11. Trajetória para um átomo sujeito a um campo linear.....	51
Figura 12. Trajetória mostrando átomo ressonante num campo com perfil linear com inclinação igual ao dobro daquela do gráfico anterior.....	52
Figura 13. Nesta figura vemos uma inclinação de perfil linear de campo magnético duas vezes maior que a anterior.....	53
Figura 14. Trajetória para $\Delta = - 100$ MHz, mostrando a saída de ressonância.....	55
Figura 15. Ampliação da região de escape da figura anterior.....	56
Figura 16. A violação da condição (115) para $\Delta = -$ 100 MHz.....	57

Figura 17. Ampliação da região da saída de ressonância da figura 16.....	58
Figura 18. Trajetória gerada para uma velocidade inicial de 500 m/s e $\Delta = + 800$ MHz.....	60
Figura 19. Mesma situação da figura 18 com mais outra trajetória, esta com velocidade inicial de 300 m/s.....	61
Figura 20. Duas trajetórias diferentes ($V_0 = 1200$ m/s e $V_0 = 900$ m/s) para $\Delta = - 400$ MHz. O átomo sai de ressonância por volta de $Z = 110$ cm.....	62
Figura 21. Trajetórias usando o campo magnético real da figura 2 para $\Delta = + 100$ MHz.....	64
Figura 22. Trajetórias usando o campo magnético real da figura 2 para $\Delta = - 300$ MHz.....	65
Figura 23. Fluxograma para que obtenhamos a fluorescência de um feixe com N átomos.....	80
Figura 24. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando apenas um átomo é desacelerado.....	81

Figura 25. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 200$ MHz.....	83
Figura 26. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 150$ MHz.....	84
Figura 27. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 100$ MHz.....	85
Figura 28. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 50$ MHz.....	86
Figura 29. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = 0$	87
Figura 30. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 50$ MHz.....	88
Figura 31. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 100$ MHz.....	89
Figura 32. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 150$ MHz.....	90

Figura 33. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = -200$ MHZ.....	91
Figura 34. Comparação dos gráficos de fluorescência para vários valores de Δ	92
Figura 35. Comparação com os resultados experimentais quando $\Delta=0$	94
Figura 36. Distância ao eixo z como função da posição no eixo z.....	96
Figura 37. Gráfico de velocidade final média contra o "detuning" Δ e regressão linear.....	100
Figura 38. Gráfico de largura da distribuição final de velocidades como função de Δ	104
Figura 39. Comparação entre os resultados analítico e numérico para a curva de fluorescência.....	108
Figura 40. Comparação entre os resultados analítico e experimental para a dependência da fluorescência com a posição ao longo do caminho de desaceleração.....	110

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é, adotando uma abordagem centrada na simulação numérica, entender a desaceleração a laser de um feixe atômico por meio da conhecida técnica de ajuste Zeeman. Nossos cálculos numéricos são capazes de reproduzir as características fundamentais dos resultados experimentais já obtidos. Também apresentamos um modelo analítico simples incorporando as idéias básicas contidas nas hipóteses utilizadas nas simulações e mostramos que estas idéias são consistentes com as conclusões numéricas e experimentais. Isto demonstra que os aspectos essenciais do processo desacelerador são bem compreendidos.

ABSTRACT

The main purpose of this work is, adopting a numerical simulation approach, to understand the laser deceleration of an atomic beam by means of the known Zeeman tuning technique. Our numerical calculations are able to reproduce the fundamental features of the experimental results already obtained. We also present a simple analytical model incorporating the basic ideas contained in the hypotheses used in the simulations, and show that these ideas are consistent with the numerical and experimental conclusions. This demonstrates that the essential aspects of the deceleration process are well comprehended.

I. INTRODUÇÃO

Já faz muito tempo que as equações de Maxwell foram estabelecidas e, desde então, tornou-se conhecido o fato de que a radiação eletromagnética carrega, através do espaço, momentum. O passo seguinte, dado por Einstein, foi a introdução do conceito de fóton e da demonstração de que a conservação de momentum é uma característica importante do equilíbrio entre radiação e matéria. A conservação de energia e momentum em cada evento microscópico tornou-se a viga mestra da completamente desenvolvida teoria quântica. Desde estes anos primordiais da nova física, há pesquisadores que entraram para a história demonstrando, no laboratório, os efeitos mecânicos da luz sobre a matéria: basta nos lembarmos de Compton e Geiger, por exemplo⁽¹⁾. Frisch⁽²⁾ reportou, em 1933, a deflexão de um feixe atômico por luz ressonante e foi apenas o primeiro. Recentemente, com o advento da tecnologia de laser, uma revolução ocorreu na física atômica quando técnicas foram desenvolvidas para a manipulação mecânica de átomos através de forças radiativas⁽³⁾.

Este trabalho está associado às pesquisas realizadas em nosso laboratório de física atômica sobre o processo de desaceleração a laser de átomos neutros através da técnica de sintonia Zeeman. Esta técnica consiste, basicamente, em tornar o átomo sempre ressonante com um feixe laser contra-propagante através do deslocamento Zeeman de seus níveis ressonantes

proporcionado pelo uso de um perfil de campo magnético adequado. Os detalhes estão no capítulo II. Neste trabalho, fazemos uma descrição dos resultados experimentais segundo uma abordagem em que a simulação numérica é a ferramenta indispensável. Uma razão para isto se deve ao fato de que o centro do pacote de ondas de um átomo sob a ação de um feixe laser ressonante e de um campo magnético estático evolui segundo uma equação de movimento altamente não linear que exige integração numérica para ser resolvida. A outra razão para utilizarmos a simulação numérica como característica central da metodologia de estudo encontra-se na necessidade de introduzir métodos estocásticos para a reprodução dos efeitos da emissão espontânea sobre o movimento atômico. Em virtude de possuirmos uma equação que descreve apenas o movimento médio, a introdução de flutuações se torna essencial para o estudo da distribuição final de velocidades do feixe atômico. Todo o aparato numérico é desenvolvido no capítulo III e os programas encontram-se no Apêndice.

Os capítulos seguintes estão estruturados da maneira descrita abaixo:

O capítulo II segue as idéias contidas no trabalho de R. J. Cook⁽⁴⁾ a respeito da teoria da força de pressão de radiação ressonante. Neste capítulo, utilizamo-nos da referida teoria a fim de deduzirmos, a partir de primeiros princípios, a força de radiação que atua sobre um átomo de dois níveis⁽⁵⁾ submetido à presença de um laser contra-propagante e de um campo magnético

estático.

O capítulo III, que é o coração deste trabalho, constitui-se de duas seções. A seção III.1 examina as trajetórias no espaço de fase para as coordenadas longitudinais de um pacote de ondas atômico sujeito ao processo desacelerador descrito no capítulo II. A seção III.2 introduz o estudo de um feixe atômico submetido à técnica de desaceleração quando, implementando a metodologia da seção III.1, incluímos a simulação da emissão espontânea, que tem o efeito de causar flutuações no movimento longitudinal de cada átomo e de aquecer transversalmente o feixe atômico. Esta seção III.2 visa a comparação dos resultados experimentais com os obtidos numericamente, levando-nos a concluir que a observação da fluorescência ao longo do caminho de desaceleração é uma maneira de verificarmos a desaceleração de um feixe atômico usando apenas um feixe laser.

No capítulo IV é apresentado um modelo analítico simples no qual as idéias principais, utilizadas no capítulo III para simular os resultados observáveis, são incorporadas. Este modelo possibilita, de maneira simplificada, testarmos nossa compreensão do processo de desaceleração através do confronto dos resultados experimentais e numéricos com as previsões do modelo teórico.

O capítulo V conclui o trabalho sumarizando a metodologia empregada e os resultados obtidos, criando um quadro geral do processo desacelerador descrito no capítulo III.

II. FORÇAS RADIATIVAS E DESACELERAÇÃO DE FEIXES ATÔMICOS

Um feixe de átomos consiste de pacotes de ondas atômicas independentes propagando-se aproximadamente na mesma direção. Dada esta independência, é possível analisar apenas o comportamento de um átomo e, a partir daí, descrever o comportamento do conjunto todo. Desacelerar um feixe consiste na redução das velocidades médias de átomos do feixe. Assim, devemos considerar a força que age sobre um átomo a fim de desacelerá-lo e, com isto, entender vários aspectos do processo. No presente caso, tal força é obtida através da pressão de radiação, cuja teoria foi desenvolvida por R. J. Cook⁽⁴⁾ e cuja idéia básica é a seguinte: durante a absorção de cada fóton há transferência de momentum e, como a emissão espontânea recoloca o átomo em condição de nova absorção, cada ciclo absorção-emissão corresponde a uma força efetiva sobre o átomo que depende essencialmente do momentum do fóton ($\hbar k$), do tempo de cada ciclo e da probabilidade de absorção. Nesta parte do trabalho, deduziremos a força radiante sobre o átomo numa abordagem quântica a partir de primeiros princípios.

Na aproximação de dipolo elétrico, o operador hamiltoniano para um átomo de massa M em um campo elétrico $\hat{\vec{E}}_q(\hat{\vec{x}})$ é

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{H}_o + \hat{H}_F - \hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{E}}_q(\hat{\vec{x}}), \quad (1)$$

onde $\hat{p}^2/2M$ é o operador energia cinética associado com o momentum de centro-de-massa \hat{p} , \hat{H}_0 é o operador hamiltoniano para o movimento interno do átomo não perturbado, \hat{H}_F é o operador hamiltoniano para o campo eletromagnético livre, $\hat{\mu}$ é o operador de momento de dipolo elétrico do átomo e $\hat{E}_q(\vec{x})$ é o operador campo elétrico calculado na posição do centro-de-massa \vec{x} do pacote que representa o átomo.

O último termo do membro direito de (1), $-\hat{\mu} \cdot \hat{E}_q(\vec{x})$, é, na aproximação de dipolo elétrico, a parte que representa a interação entre o átomo e a radiação. Uma quantidade considerável de controvérsias foram levantadas com relação a essa escolha do operador de interação⁽¹⁾. A descrição quântica exata usa o vetor potencial, segundo a prescrição de acoplamento mínimo. Na aproximação de dipolo elétrico, o termo $-\hat{\mu} \cdot \hat{E}_q(\vec{x})$ pode ser derivado através de uma transformação canônica que representa uma mudança do gauge clássico. Mesmo que a escolha do gauge não tenha consequências observáveis, é difícil assegurar a validade do resultado em cálculos aproximados. O esclarecimento dessas controvérsias é apresentado de maneira pedagógica por Savolainen e Stenholm⁽²⁾.

Vamos escrever o campo elétrico $\hat{E}_q(\vec{x})$ como constituído de duas partes

$$\hat{E}_q(\vec{x}) = \hat{E}_{cl}(\vec{x}, t) + \hat{E}(\vec{x}), \quad (2)$$

onde $\hat{E}_{cl}(\vec{x},t)$ é o campo elétrico clássico aplicado e $\hat{E}(\vec{x})$ é o campo elétrico quantizado, ambos calculados na posição do centro-de-massa \vec{x} . A expressão (2), já utilizada por alguns autores⁽¹⁾, se justifica pelo fato de que aqui estamos usando um modelo em que um campo clássico é aplicado a fim de mover o átomo, enquanto que a parte quântica tem a função de causar a relaxação radiativa do átomo. Um tal modelo é razoável porque uma onda monocromática intensa é um estado da radiação envolvendo grandes números quânticos e, como consequência, o princípio de correspondência assegura que o campo aplicado pode ser tratado classicamente.

O campo quantizado $\hat{E}(\vec{x})$ pode ser escrito como

$$\hat{E}(\vec{x}) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} (\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}), \quad (3)$$

onde $\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+$, $\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}$, $\omega_{\vec{k}}$ e $\hat{e}_{\vec{k}, \lambda}$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação, a frequência e o vetor de polarização do modo do campo de vetor de onda \vec{k} e índice de polarização λ ($=1,2$) e V representa o volume de quantização. Os operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação usuais

$$[\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (4)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^-, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^-] = [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^-] = 0. \quad (5)$$

O operador hamiltoniano para o campo livre, \hat{H}_F , é dado por

$$\hat{H}_F = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}. \quad (6)$$

Tendo definido os aspectos fundamentais da radiação, vamos agora abordar as características dos operadores que envolvem os graus de liberdade atômicos.

Consideremos o caso em que temos um átomo interagindo com um campo elétrico monocromático de frequência próxima à diferença das frequências associadas a dois níveis atômicos. Em determinadas ocasiões, podemos aproximar o átomo como um sistema quântico de dois níveis⁽⁵⁾ e este é o modelo atômico que será aqui adotado.

Para o átomo de dois níveis com estados internos $|1\rangle$ e $|2\rangle$ de energias $E_1=0$ e $E_2=\hbar\omega_0$, respectivamente, o hamiltoniano interno e o operador de momento de dipolo elétrico podem ser escritos como

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \hat{S}^+ \hat{S}, \quad (7)$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mu} \cdot \hat{S} + \hat{\mu}^* \cdot \hat{S}^+, \quad (8)$$

onde $\hat{\mu} = \langle 1 | \hat{\mu} | 2 \rangle$ e supusemos $|1\rangle$ e $|2\rangle$ como estados de paridades definidas e opostas e onde \hat{S} e \hat{S}^+ são, respectivamente, os

operadores atómicos de excitação e desexcitação

$$\hat{S}^+ = |2\rangle\langle 1|, \hat{S}^- = |1\rangle\langle 2|. \quad (9)$$

Para o que segue é necessário definir o operador

$$\hat{S}_z = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1| = \hat{S}^+\hat{S}^- - \hat{S}^-\hat{S}^+, \quad (10)$$

cujo valor esperado representa a diferença de população entre os estados $|2\rangle$ e $|1\rangle$.

Pode-se facilmente verificar que os operadores internos \hat{S} , \hat{S}^+ e \hat{S}_z satisfazem as seguintes relações de comutação e produto:

$$[\hat{S}^+, \hat{S}] = \hat{S}_z, \quad (11a)$$

$$[\hat{S}, \hat{S}^+\hat{S}] = \hat{S}, \quad (11b)$$

$$[\hat{S}^+, \hat{S}^+\hat{S}] = - \hat{S}^+, \quad (11c)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}^+\hat{S}] = 0, \quad (11d)$$

$$\hat{S}^{\hat{S}^+} = \frac{1}{2} (\hat{I} - \hat{S}_z), \quad (12a)$$

$$\hat{S}^+\hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{I} + \hat{S}_z), \quad (12b)$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}^{+2} = 0, \quad (12c)$$

$$\hat{S}\hat{S}_3 = -\hat{S}_3\hat{S} = \hat{S}, \quad (12d)$$

$$\hat{S}^+\hat{S}_3 = -\hat{S}_3\hat{S}^+ = -\hat{S}^+, \quad (12e)$$

onde $\hat{I} = \hat{S}^+\hat{S} + \hat{S}\hat{S}^+$ é o operador identidade.

Vamos agora tratar o termo de interação $-\vec{\mu} \cdot \hat{\vec{E}}_q(\vec{x})$. Um campo elétrico clássico monocromático geral pode ser escrito como

$$\hat{E}_{cl}(\vec{x},t) = \frac{1}{2} [\hat{E}(\vec{x})e^{i\omega t} + \hat{E}^*(\vec{x})e^{-i\omega t}]. \quad (13)$$

Na representação de Heisenberg, a dependência temporal dominante dos operadores \hat{S} e \hat{S}^+ , que se deve ao hamiltoniano interno (7), está contida nos fatores exponenciais $e^{-i\omega_0 t}$ e $e^{i\omega_0 t}$, respectivamente. Próximo da ressonância ($\omega \approx \omega_0$), a substituição de (8) e (13) no termo de interação $-\vec{\mu} \cdot \hat{\vec{E}}_{cl}(\vec{x},t)$ produz dois termos que variam lentamente no tempo (diferença das frequências) e dois termos que variam muito rapidamente (soma das frequências) para ter alguma influência significante no movimento atômico. Um argumento análogo aplica-se ao termo $-\vec{\mu} \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{x})$. Desprezando os termos não essenciais (aproximação de onda rotatória)⁽⁵⁾, o hamiltoniano total (1) é escrito, da combinação das expressões (2), (3), (6), (7), (8) e (13), como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hbar\omega_0 \hat{S}^+\hat{S} + \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda} - \frac{1}{2} \hbar\tilde{\Omega}^*(\vec{x}) \hat{S}^+ e^{-i\omega t} +$$

$$\hat{\Omega}(\vec{x}) \hat{S} e^{i\omega t} + i\hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} (\epsilon_{\vec{k}, \lambda}^* \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{S} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^* \hat{S}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}), \quad (14)$$

onde

$$\hbar \hat{\Omega}(\vec{x}) = \vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad (15)$$

e onde

$$\epsilon_{\vec{k}, \lambda}^* = \left(\frac{2\pi\omega_{\vec{k}}}{\hbar V} \right)^{1/2} \vec{\mu} \cdot \vec{e}_{\vec{k}, \lambda}^* \quad (16)$$

Introduzimos agora o operador de Wigner a fim de podermos descrever o movimento translacional do átomo.

A função de Wigner $f(\vec{x}, \vec{p})$ que descreve o estado quântico de uma partícula puntiforme é tradicionalmente definida pela equação

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3 s \Psi(\vec{x} + (1/2)\vec{s}) \Psi^*(\vec{x} - (1/2)\vec{s}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}, \quad (17)$$

onde $\Psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \Psi \rangle$ é a função de onda do estado $|\Psi\rangle$ na representação de posição. Uma transformação para a representação de momentum

$$\Psi(\vec{x}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3 p \Phi(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar} \quad (18)$$

fornecce a fórmula

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3q \Phi(\vec{p}) + (1/2)\vec{q})\Phi^*(\vec{p} - (1/2)\vec{q}) e^{i\vec{x} \cdot \vec{q}/\hbar} \quad (19)$$

para a função de Wigner em termos da função de onda do estado $|\Psi\rangle$ na representação de momentum $\Phi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \Psi \rangle$.

A função de Wigner possui muitas das propriedades da função distribuição do espaço de fase da mecânica estatística clássica. Por exemplo, a integral de (17) sobre o espaço de momentum,

$$\int d^3p f(\vec{x}, \vec{p}) = \Psi(\vec{x})\Psi^*(\vec{x}) = P(\vec{x}), \quad (20)$$

é a densidade de probabilidade $P(\vec{x})$ para posição, a integral de (19) sobre o espaço de configuração,

$$\int d^3x f(\vec{x}, \vec{p}) = \Phi(\vec{p})\Phi^*(\vec{p}) = W(\vec{p}), \quad (21)$$

é a densidade de probabilidade $W(\vec{p})$ para momentum e a integral de $f(\vec{x}, \vec{p})$ sobre todo o espaço de fase é a unidade. A função de Wigner não pode, entretanto, ser estritamente interpretada como a densidade de probabilidade conjunta para posição e momentum da partícula porque não é sempre positiva definida.

Definimos agora o operador de Wigner na representação de posição:

$$\hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3 s | \vec{x} - (1/2)\vec{s} \rangle \langle \vec{x} + (1/2)\vec{s} | e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}. \quad (22)$$

O valor esperado do operador de Wigner é claramente a função de Wigner:

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = \langle \Psi | \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) | \Psi \rangle. \quad (23)$$

Em termos da base de momentum $|\vec{p}\rangle$,

$$\hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3 q | \vec{p} - (1/2)\vec{q} \rangle \langle \vec{p} + (1/2)\vec{q} | e^{i\vec{x} \cdot \vec{q}/\hbar}. \quad (24)$$

Notemos que $\hat{f}(\vec{x}, \vec{p})$ é um operador hermitiano.

Invertendo (22) obtemos

$$| \vec{x}_1 \rangle \langle \vec{x}_2 | = \int d^3 p \hat{f}((\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2, \vec{p}) e^{i(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{p}/\hbar} \quad (25)$$

e um operador arbitrário \hat{A} pode ser expandido na representação de posição como

$$\hat{A} = \iint d^3 x_1 d^3 x_2 | \vec{x}_1 \rangle \langle \vec{x}_1 | \hat{A} | \vec{x}_2 \rangle \langle \vec{x}_2 |. \quad (26)$$

Usando (25) em (26) encontramos que um operador arbitrário pode ser expandido em termos do operador de Wigner como

$$\hat{A} = \iint d^3 x d^3 p A(\vec{x}, \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (27)$$

onde

$$A(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3s \langle \vec{x} + (1/2)\vec{s} | \hat{A} | \vec{x} - (1/2)\vec{s} \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}, \quad (28)$$

ou, na representação de momentum,

$$A(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3q \langle \vec{p} + (1/2)\vec{q} | \hat{A} | \vec{p} - (1/2)\vec{q} \rangle e^{i\vec{x} \cdot \vec{q}/\hbar}. \quad (29)$$

Quando \hat{A} é hermitiano, $A(\vec{x}, \vec{p})$ é real. O valor esperado da expressão (27),

$$\langle \hat{A} \rangle = \iint d^3x d^3p A(\vec{x}, \vec{p}) f(\vec{x}, \vec{p}), \quad (30)$$

expressa o valor esperado da observável \hat{A} na forma de uma média estatística, como se \hat{A} fosse propriamente representado por uma observável clássica $A(\vec{x}, \vec{p})$ e $f(\vec{x}, \vec{p})$ fosse uma função distribuição válida no espaço de fase.

Se $\hat{A} = F(\hat{\vec{x}})$, onde F é uma função qualquer, então $\langle \vec{x}_1 | \hat{A} | \vec{x}_2 \rangle = F(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ e (28) dá $A(\vec{x}, \vec{p}) = F(\vec{x})$. Similarmente, se $\hat{A} = G(\hat{\vec{p}})$, onde G é uma função qualquer, temos $\langle \vec{p}_1 | \hat{A} | \vec{p}_2 \rangle = G(\vec{p}_1) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ e (29) dá $A(\vec{x}, \vec{p}) = G(\vec{p})$. Segue que um hamiltoniano da forma $\hat{H} = \hat{p}^2/2M + V(\hat{\vec{x}})$ é expresso em termos do operador de Wigner como

$$\hat{H} = \iiint d^3x d^3p \left[-\frac{p^2}{2M} + V(\vec{x}) \right] \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}). \quad (31)$$

Para calcularmos a equação de Heisenberg para o operador de Wigner,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(\vec{x}, \vec{p})}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \hat{H}] \\ &= (\hbar)^{-1} \iiint d^3x' d^3p' \left[-\frac{p'^2}{2M} + V(\vec{x}') \right] [\hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \hat{f}(\vec{x}', \vec{p}')], \end{aligned} \quad (32)$$

precisamos do comutador $[\hat{f}(\vec{x}_1, \vec{p}_1), \hat{f}(\vec{x}_2, \vec{p}_2)]$ para operadores de Wigner em dois pontos distintos do espaço de fase. Os elementos do produto $\hat{f}(\vec{x}_1, \vec{p}_1) \hat{f}(\vec{x}_2, \vec{p}_2)$ na representação de posição são facilmente calculados usando a definição (22). Após substituirmos estes elementos de matriz na expressão (28) e usando o resultado em (27), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{x}_1, \vec{p}_1) \hat{f}(\vec{x}_2, \vec{p}_2) &= \\ &= (\pi\hbar)^{-6} \iiint d^3x d^3p \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) \exp(-2i[\vec{\lambda} \cdot (\vec{\xi} - \vec{x}) - \vec{\eta} \cdot (\vec{\pi} - \vec{p})]/\hbar), \end{aligned} \quad (33)$$

onde

$$\vec{\xi} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2, \vec{\pi} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2, \vec{\eta} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{\lambda} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2. \quad (34)$$

O comutador de $\hat{f}(\vec{x}_1, \vec{p}_1)$ e $\hat{f}(\vec{x}_2, \vec{p}_2)$ segue, então, diretamente de (33), como:

$$[\hat{f}(\vec{x}_1, \vec{p}_1), \hat{f}(\vec{x}_2, \vec{p}_2)] =$$

$$= -2i(\pi\hbar)^{-d} \int \int d^3x d^3p \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) \sin(2[\vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) - \vec{\eta} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')] / \hbar). \quad (35)$$

Usando esta relação de comutação, calculamos que a equação de Heisenberg para o operador de Wigner, expressão (32), fica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3p' J(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}'), \quad (36)$$

onde $J(\vec{x}, \vec{p})$ tem a forma:

$$J(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{i\hbar(2\pi\hbar)^3} \int d^3s [V(\vec{x} + \vec{s}) - V(\vec{x} - \vec{s})] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}. \quad (37)$$

O valor esperado de (36) mostra que a função de Wigner e o operador de Wigner satisfazem a mesma equação integrodiferencial.

O limite clássico das expressões (36) e (37) é obtido escrevendo $V(\vec{x} \pm \vec{s})$ em (37) como uma série de Taylor na variável \vec{s} , calculando a integral sobre \vec{s} e tomando o limite do resultado para $\hbar \rightarrow 0$. A expressão (37) torna-se

$$J(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{\nabla} \cdot V(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_p \delta(\vec{p}), \quad (38)$$

onde $\vec{\nabla}_p$ é o gradiente com respeito a \vec{p} e (36) fica reduzida a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{\nabla} \cdot V(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_p \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}). \quad (39)$$

Listemos agora uma série de relações envolvendo o operador

de Wigner que são úteis nos cálculos subsequentes. Primeiro, o comutador do operador de Wigner com o operador energia cinética é

$$[\hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \hat{p}^2/2M] = -i\hbar \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p})/M. \quad (40)$$

Agora, se $F(\vec{x})$ é uma função complexa da posição e se

$$R(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{i\hbar(2\pi\hbar)^3} \int d^3s F(\vec{x} + \vec{s}/2) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}, \quad (41)$$

então

$$\begin{aligned} \iint d^3x' d^3p' F(\vec{x}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}', \vec{p}') &= \\ &= i\hbar \int d^3p' R(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}'), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \iint d^3x' d^3p' F^*(\vec{x}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}', \vec{p}') &= \\ &= -i\hbar \int d^3p' R^*(\vec{x}, \vec{p}' - \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}'), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \iint d^3x' d^3p' F(\vec{x}') \hat{f}(\vec{x}', \vec{p}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) &= \\ &= i\hbar \int d^3p' R(\vec{x}, \vec{p}' - \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}'), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \iint d^3x' d^3p' F^*(\vec{x}') \hat{f}(\vec{x}', \vec{p}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) &= \\ &= -i\hbar \int d^3p' R^*(\vec{x}, \vec{p}' - \vec{p}) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}'), \end{aligned} \quad (45)$$

Estas relações podem ser provadas pela aplicação direta da expressão (35) e mudanças simples de variáveis de integração.

Retornemos agora ao problema de expressar os termos de interação em (14) em termos do operador de Wigner pelo uso das relações

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = \iint d^3x d^3p \hat{\Pi}(\vec{x}) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) \quad (46)$$

e

$$e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \iint d^3x d^3p e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (47)$$

onde fizemos uso de (27) e (28). Então, o hamiltoniano (14) fica

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{\hat{p}^2}{2M} + \hbar\omega_0 \hat{S}^+ \hat{S} + \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \\ & - \frac{1}{2} \hbar \iint d^3x d^3p [\hat{\Pi}^*(\vec{x}) \hat{S}^+ \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) e^{-i\omega t} + \hat{\Pi}(\vec{x}) \hat{S} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) e^{i\omega t}] + \\ & + i\hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} \iint d^3x d^3p [g_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{S} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) - g_{\vec{k}, \lambda}^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{S}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p})]. \end{aligned} \quad (48)$$

Vamos trabalhar com o operador de Wigner e os operadores

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) = \hat{S} \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) e^{i\omega t}, \quad (49)$$

$$\hat{\Pi}_3(\vec{x}, \vec{p}) = \hat{S}_3 \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (50)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}, \lambda} = \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\omega t}, \quad (51)$$

que variam lentamente para modos de campo próximos da ressonância.

Com a ajuda de (40)-(45), (11), (12), (4) e (5), obtemos, após vários passos, as equações de Heisenberg para os operadores \hat{f} , $\hat{\Pi}$, $\hat{\Pi}_3$, e $\hat{b}_{\vec{k},\lambda}^+$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3 p' [C(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}') + C^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}')] + \\ - \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{b}_{\vec{k}, \lambda}^+ [\hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) - (1/2)\hbar\vec{k}] - \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) + (1/2)\hbar\vec{k}] + \\ + \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^{**} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} [\hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}) - (1/2)\hbar\vec{k}] - \hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}) + (1/2)\hbar\vec{k}] \hat{b}_{\vec{k}, \lambda}^+, \quad (52)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) = i\Delta \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) + \\ + \frac{1}{2} \int d^3 p' [C^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{f}(\vec{x}, \vec{p}') - B^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{\Pi}_3(\vec{x}, \vec{p}')] + \\ - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^{**} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} [\hat{f}(\vec{x}, \vec{p} - (1/2)\hbar\vec{k}) - \hat{f}(\vec{x}, \vec{p} + (1/2)\hbar\vec{k}) + \\ - \hat{\Pi}_3(\vec{x}, \vec{p} - (1/2)\hbar\vec{k}) - \hat{\Pi}_3(\vec{x}, \vec{p} + (1/2)\hbar\vec{k})] \hat{b}_{\vec{k}, \lambda}^+, \quad (53)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \hat{\Pi}_3(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3 p' [B(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}') + B^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}')] + \\ - \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{b}_{\vec{k}, \lambda}^+ [\hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) - (1/2)\hbar\vec{k}] + \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}) + (1/2)\hbar\vec{k}] + \\ + \epsilon_{\vec{k}, \lambda}^{**} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} [\hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}) - (1/2)\hbar\vec{k}] + \hat{\Pi}^+(\vec{x}, \vec{p}) + (1/2)\hbar\vec{k}] \hat{b}_{\vec{k}, \lambda}^+, \quad (54)$$

$$\dot{\hat{b}}_{k,\lambda} = i(\omega - \omega_k) \hat{b}_{k,\lambda} + g_{k,\lambda} \int \int d^3x d^3p e^{-ik \cdot \vec{x}} \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (55)$$

onde fizemos as definições:

$$G(\vec{x}, \vec{p}) = T(\vec{x}, -\vec{p}) - T(\vec{x}, \vec{p}), \quad (56)$$

$$B(\vec{x}, \vec{p}) = T(\vec{x}, -\vec{p}) + T(\vec{x}, \vec{p}), \quad (57)$$

$$T(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2i(2\pi\hbar)^3} \int d^3s \tilde{\Omega}(\vec{x} + (1/2)\vec{s}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}, \quad (58)$$

$$\Delta = \omega - \omega_0. \quad (59)$$

Os operadores de campo são eliminados das equações (52)-(54) da seguinte forma. A solução de (53), para ordem zero na interação, é

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}, t_2) = \hat{\Pi}(\vec{x} - \vec{p}(t_2 - t_1)/M, \vec{p}, t_1) e^{i\Delta(t_2 - t_1)}, \quad (60)$$

que é uma boa solução de (53) durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ que seja grande comparado ao período ótico $2\pi/\omega$, mas muito menor do que o período de Rabi $2\pi/\Omega$ ou do tempo de vida do estado excitado. Para um intervalo de tempo $t_2 - t_1 = 2\pi/\omega_0$ igual ao período ótico, o deslocamento $\Delta x = p(t_2 - t_1)/M = (v/c)\lambda$ é muito pequeno comparado à distância ao longo da qual $\hat{\Pi}$ muda de maneira apreciável. Portanto, podemos trocar o argumento $\vec{x} - \vec{p}(t_2 - t_1)/M$ em (60) por \vec{x} e o resultado permanece bom por muitos períodos

óticos. Usando a última forma de (60), (55) é facilmente integrada, fornecendo:

$$\hat{b}_{k,\lambda}(t) = \hat{b}_{k,\lambda}(0)e^{i(\omega - \omega_k)t} + \\ s_{k,\lambda} \int \int d^3x d^3p \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} dt'. \quad (61)$$

Agora, (61) e sua conjugada hermitiana serão substituídas nas expressões (52)-(54) e os valores esperados das equações resultantes serão tomados com o campo no estado de vácuo. As contribuições para as equações finais do primeiro termo em (61) anulam-se e, portanto, este termo pode ser descartado. Para t muito maior do que o período ótico, temos, para a integral no tempo em (61):

$$\int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} dt' \approx \pi \delta(\omega_k - \omega_0) - iP \frac{1}{\omega_k - \omega_0}, \quad (62)$$

onde P denota o valor principal⁽⁷⁾. Sabe-se que o primeiro termo em (62) produz relaxação radiativa, enquanto que o segundo termo fornece um deslocamento divergente de frequência.^{(5),(8)} Um tratamento adequado do segundo termo requer teoria de renormalização e, após renormalização, o efeito deste termo é muito pequeno e de pouco interesse no presente contexto. Portanto, descartamos esse termo também e supomos que o deslocamento de Lamb já foi incorporado na frequência ω_0 . A equação (61) torna-se, efetivamente,

$$\hat{b}_{k,\lambda} = \pi g_{k,\lambda} \delta(\omega_k - \omega_0) \int \int d^3x d^3p e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{\Pi}(\vec{x}, \vec{p}). \quad (63)$$

Substituindo (63) em (52)-(54), usando (42)-(45), (12), (49) e (50) repetidamente, tomando os valores esperados dos resultados e, finalmente, passando ao limite de volume de quantização infinito ($V \rightarrow \infty$) da maneira usual, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) f(\vec{x}, \vec{p}) &= - \frac{1}{2} A[f(\vec{x}, \vec{p}) + \Pi_g(\vec{x}, \vec{p})] + \\ &+ \int d^3p' [C(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \Pi(\vec{x}, \vec{p}') + C^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \Pi^*(\vec{x}, \vec{p}')] + \\ &+ \int d^3k Z(\vec{k}) [f(\vec{x}, \vec{p} + \hbar\vec{k}) + \Pi_g(\vec{x}, \vec{p} + \hbar\vec{k})], \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \Pi(\vec{x}, \vec{p}) &= (i\Delta - A/2) \Pi(\vec{x}, \vec{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3p' [C^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') f(\vec{x}, \vec{p}') - B^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \Pi_g(\vec{x}, \vec{p}')], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \Pi_g(\vec{x}, \vec{p}) &= - \frac{1}{2} A[f(\vec{x}, \vec{p}) + \Pi_g(\vec{x}, \vec{p})] + \\ &+ \int d^3p' [B(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \Pi(\vec{x}, \vec{p}') + B^*(\vec{x}, \vec{p} - \vec{p}') \Pi^*(\vec{x}, \vec{p}')] + \\ &- \int d^3k Z(\vec{k}) [f(\vec{x}, \vec{p} + \hbar\vec{k}) + \Pi_g(\vec{x}, \vec{p} + \hbar\vec{k})], \end{aligned} \quad (66)$$

onde

$$A = (2\pi)^{-2} V \sum_{\lambda} \int d^3 k |\vec{e}_{k,\lambda}|^2 \delta(\omega_k - \omega_0) = \frac{4 |\vec{\mu}|^2 \omega_0^3}{3 \hbar c^3} \quad (67)$$

é o conhecido coeficiente A de Einstein que está relacionado com a emissão espontânea e

$$\begin{aligned} Z(\vec{k}) &= (4\pi\hbar)^{-1} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_0) \sum_{\lambda} |\vec{\mu} \cdot \vec{e}_{k,\lambda}|^2 = \\ &= (4\pi\hbar)^{-1} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_0) |\vec{\mu}|^2 (1 - \cos^2 \theta'), \end{aligned} \quad (68)$$

onde θ' é o ângulo entre \vec{k} e $\vec{\mu}^{(0)}$. Notemos que

$$\int d^3 k Z(\vec{k}) = \frac{1}{2} A. \quad (69)$$

Sejam as transformações:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{x}, \vec{p}) &= \sigma(\vec{x}, \vec{p}) e^{-i\theta(\vec{x})}, \\ \Pi^+(\vec{x}, \vec{p}) &= \sigma^+(\vec{x}, \vec{p}) e^{i\theta(\vec{x})}, \end{aligned} \quad (70)$$

onde $\theta(\vec{x})$ é a fase de $\vec{E}(\vec{x})$ e

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, \vec{p}) &= \sigma(\vec{x}, \vec{p}) + \sigma^+(\vec{x}, \vec{p}), \\ V(\vec{x}, \vec{p}) &= i[\sigma(\vec{x}, \vec{p}) - \sigma^+(\vec{x}, \vec{p})], \\ W(\vec{x}, \vec{p}) &= \Pi_3(\vec{x}, \vec{p}). \end{aligned} \quad (71)$$

Com estas transformações, (64)-(66) ficam

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) f(\vec{x}, \vec{p}) = - \frac{1}{2} A [f(\vec{x}, \vec{p}) + w(\vec{x}, \vec{p})] +$$

$$+ \int d^3 p' [a_r(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} U(\vec{x}, \vec{p}')] + a_i(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}, \vec{p}')] +$$

$$+ \int d^3 k Z(\vec{k}) [f(\vec{x}, \vec{p}) + \hbar \vec{k} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, \vec{p}) + w(\vec{x}, \vec{p}) + \hbar \vec{k} \cdot \vec{\nabla} w(\vec{x}, \vec{p})], \quad (72)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) U(\vec{x}, \vec{p}) = \left[\Delta + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \theta \right] V(\vec{x}, \vec{p}) - \frac{1}{2} A U(\vec{x}, \vec{p}) +$$

$$+ \int d^3 p' [a_r(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, \vec{p}')] - b_r(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} W(\vec{x}, \vec{p}'), \quad (73)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) V(\vec{x}, \vec{p}) = - \left[\Delta + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \theta \right] U(\vec{x}, \vec{p}) - \frac{1}{2} A V(\vec{x}, \vec{p}) +$$

$$+ \int d^3 p' [a_i(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, \vec{p}')] - b_i(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} W(\vec{x}, \vec{p}'), \quad (74)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} \right) W(\vec{x}, \vec{p}) = - \frac{1}{2} A [f(\vec{x}, \vec{p}) + w(\vec{x}, \vec{p})] +$$

$$+ \int d^3 p' [b_r(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} U(\vec{x}, \vec{p}')] + b_i(\vec{x}, \vec{p}) - \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}, \vec{p}')] +$$

$$- \int d^3 k Z(\vec{k}) [f(\vec{x}, \vec{p}) + \hbar \vec{k} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, \vec{p}) + w(\vec{x}, \vec{p}) + \hbar \vec{k} \cdot \vec{\nabla} w(\vec{x}, \vec{p})], \quad (75)$$

onde

$$a_r(\vec{x}, \vec{p}) = \text{Re}[\tau(\vec{x}, -\vec{p}) - \tau(\vec{x}, \vec{p})],$$

$$a_i(\vec{x}, \vec{p}) = \text{Im}[\tau(\vec{x}, -\vec{p}) - \tau(\vec{x}, \vec{p})], \quad (76)$$

$$b_r(\vec{x}, \vec{p}) = \text{Re}[\tau(\vec{x}, -\vec{p}) + \tau(\vec{x}, \vec{p})],$$

$$b_i(\vec{x}, \vec{p}) = \text{Im}[\tau(\vec{x}, -\vec{p}) + \tau(\vec{x}, \vec{p})]$$

e

$$\tau(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{e^{-i\theta(\vec{x})}}{2i(2\pi\hbar)^3} \int d^3s \tilde{\Omega}(\vec{x} + (1/2)\vec{s}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{s}/\hbar}. \quad (77)$$

As equações (72)-(75) são as equações gerais que descrevem o desenvolvimento temporal da função de Wigner f e o vetor de Bloch distribuído (U,V,W) incluindo os efeitos da emissão espontânea.

Calculemos, agora, o limite quase-clássico das equações (72)-(75) que não envolvem A ou Z(k). Em (77), expandimos $\tilde{\Omega}(\vec{x} + (1/2)\vec{s})$ como uma série de Taylor em \vec{s} e descartamos termos que se anulam quando $\hbar \rightarrow 0$. Obtemos:

$$\tau(\vec{x}, \vec{p}) = -\frac{1}{2} i\Omega \delta(\vec{p}) + \frac{1}{4} \hbar (\vec{\nabla}\Omega + i\Omega \vec{\nabla}\theta) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \delta(\vec{p}). \quad (78)$$

Então, usando o fato que $\vec{\nabla}_{\vec{p}} \delta(\vec{p})$ é uma função ímpar de \vec{p} , (76) torna-se

$$\begin{aligned}
 a_r(\vec{x}, \vec{p}) &= -\frac{1}{2} \hbar \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}_p \delta(\vec{p}), \\
 a_i(\vec{x}, \vec{p}) &= -\frac{1}{2} \hbar \vec{\Omega} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla}_p \delta(\vec{p}), \\
 b_r(\vec{x}, \vec{p}) &= 0, \\
 b_i(\vec{x}, \vec{p}) &= -\Omega \delta(\vec{p}).
 \end{aligned} \tag{79}$$

Os termos contendo A não são afetados pelo limite quase-clássico. Um típico termo envolvendo $Z(\vec{k})$ é da forma

$$\int d^3k Z(\vec{k}) f(\vec{x}, \vec{p} + \hbar \vec{k}). \tag{80}$$

Lembrando que, na aproximação quase-clássica, $f(\vec{x}, \vec{p})$ deve ser suave ao longo de uma distância $\hbar k = \hbar \omega_0/c$ no espaço de momentum, expandimos $f(\vec{x}, \vec{p} + \hbar \vec{k})$ em potências de $\hbar k^i$. Mantendo termos até segunda ordem na expansão, usando (69) e notando que

$$\int d^3k Z(\vec{k}) k^i = 0 \tag{81}$$

porque $Z(\vec{k})$ é uma função par de k^i , vemos que (80) se torna

$$\frac{1}{2} A f(\vec{x}, \vec{p}) + \sum_{i,j} Q^{ij} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, \vec{p})}{\partial p^i \partial p^j}, \tag{82}$$

onde

$$Q^{ij} = \frac{1}{2} \hbar^2 \int d^3k Z(\vec{k}) k^i k^j. \tag{83}$$

Sem perder generalidade, seja \vec{u} dirigido ao longo do eixo x^3 .
Então, usando $Z(\vec{k})$ de (68) e

$$\begin{aligned} k^1 &= k \sin\theta' \cos\phi', \\ k^2 &= k \sin\theta' \sin\phi', \\ k^3 &= k \cos\theta', \end{aligned} \quad (84)$$

onde θ', ϕ' são ângulos polares no espaço k e $k = \omega_k / c$, (83) produz

$$Q^{ij} = \frac{1}{10} \left(\frac{\hbar \omega_0}{c} \right)^2 A d^{ij}, \quad (85)$$

onde d^{ij} é a matriz diagonal

$$d^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Os outros termos envolvendo $Z(\vec{k})$ em (72)-(75) são calculados da mesma maneira como (80). O conjunto completo de equações quase-clássicas fica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla}}{M} \right) f = - \frac{1}{2} \hbar (\vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}_p u + \Omega \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla}_p v) + \sum_{i,j} Q^{ij} \frac{\partial^2 (f+w)}{\partial p^i \partial p^j}, \quad (87)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla}}{M} \right) u = \left(\Delta + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \theta}{M} \right) v - \frac{1}{2} A u - \frac{1}{2} \hbar \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}_p f, \quad (88)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla}}{M} \right) v = - \left(\Delta + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \theta}{M} \right) u - \frac{1}{2} A v + \Omega w - \frac{1}{2} \hbar \Omega \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla}_p f, \quad (89)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\nabla}}{M} \right) w = - \Omega v - A(f + w) - \sum_{i,j} Q^{ij} \frac{\partial^2 (f+w)}{\partial p^i \partial p^j}. \quad (90)$$

Sejam f , U , V e W localizadas no espaço de fase próximas ao ponto (\vec{x}, \vec{p}) . Então, em uma integral sobre o espaço de fase de um produto de uma função suave de (\vec{x}, \vec{p}) e uma das funções f , U , V ou W , a função suave pode ser calculada em (\vec{x}, \vec{p}) e tomada fora da integral. Além disso, integrais sobre o espaço de fase de termos tais como $\vec{p} \cdot \nabla f / M$, $-(1/2) \hbar \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}_p f$ e $Q^{ij} \partial^2 (f+W) / \partial p^i \partial p^j$ são nulas, como pode ser facilmente demonstrado fazendo integração por partes e usando o fato de que f , U , V e W se anulam em $|\vec{x}| = \infty$ e $|\vec{p}| = \infty$. Usando essas observações e

$$u = \iiint d^3x d^3p U(\vec{x}, \vec{p}), \quad (91a)$$

$$v = \iiint d^3x d^3p V(\vec{x}, \vec{p}), \quad (91b)$$

$$w = \iiint d^3x d^3p W(\vec{x}, \vec{p}), \quad (91c)$$

obtemos que as integrais de (88)-(90) sobre o espaço de fase são as equações óticas de Bloch⁽⁵⁾

$$\dot{u} = (\Delta + \dot{\theta})v - \frac{1}{2}Au, \quad (92a)$$

$$\dot{v} = -(\Delta + \dot{\theta})u + \Omega w - \frac{1}{2}Av, \quad (92b)$$

$$\dot{w} = -\Omega v - A(w + 1), \quad (92c)$$

onde $\dot{\theta} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \theta(\vec{x}) / M$ e $\Omega = \Omega(\vec{x})$. O vetor de Bloch (u, v, w) é

dirigido pela amplitude Ω do campo e pela derivada da fase $\dot{\theta}$ na posição do átomo em movimento. Multipliquemos, agora, (87) por \vec{x} e integremos sobre o espaço de fase. Uma integração por partes dá

$$\iint d^3x d^3p \vec{x} \left(\frac{\vec{p}}{M} \cdot \vec{\nabla} f \right) = - \frac{\vec{p}}{M} \quad (93)$$

e os termos à direita em (87) todos se anulam na integração. O resultado é

$$\vec{X} = \frac{\vec{p}}{M}. \quad (94)$$

Finalmente, multipliquemos (87) por \vec{p} e integremos sobre o espaço de fase para obtermos a força de radiação

$$\vec{F} = \vec{P} = M\vec{X} = \frac{1}{2} \hbar (u \vec{\nabla} \Omega + v \vec{\nabla} \theta). \quad (95)$$

As equações (92) e (95) são as equações de Ehrenfest-Bloch que descrevem o movimento do centróide do pacote de ondas atômico⁽¹⁰⁾.

Consideremos, agora, o caso em que a amplitude do campo elétrico $E(t) = E(\vec{X}(t))$ e a derivada da fase $\dot{\theta}(t) = \vec{\nabla} \theta(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}(t)$ variam de uma pequena fração durante um tempo de vida natural $\tau_N = 1/A$, isto é, o caso em que o átomo se move suficientemente lentamente de modo que, a cada instante, u , v e w assumam seus valores de estado estacionário obtidos de (92) fazendo $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$. Isto produz

$$u = \frac{-4\Omega(\Delta + \dot{\theta})}{[4(\Delta + \dot{\theta})^2 + A^2 + 2\Omega^2]},$$

$$v = \frac{-2A\Omega}{[4(\Delta + \dot{\theta})^2 + A^2 + 2\Omega^2]} \quad (96)$$

e, consequentemente, a força de radiação (95) torna-se

$$\vec{F} = - \left(\frac{\hbar A \Omega^2 \vec{\nabla} \theta + \hbar (\Delta + \dot{\theta}) \vec{\nabla} \Omega^2}{4(\Delta + \dot{\theta})^2 + A^2 + 2\Omega^2} \right). \quad (97)$$

Agora, ilustraremos o significado da expressão (97) considerando alguns problemas simples.

Para uma onda plana, $\vec{E}_{cl}(\vec{x},t) = \vec{\epsilon} E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$, temos $\Omega = \mu E_0 / \hbar = \text{const}$, $\theta(\vec{x}) = -\vec{k} \cdot \vec{x}$ e $\dot{\theta} = -\vec{k} \cdot \vec{X}$. A força de radiação (97) fica

$$\vec{F} = \frac{A \Omega^2 \hbar \vec{k}}{[4(\Delta - \vec{k} \cdot \vec{X})^2 + A^2 + 2\Omega^2]}. \quad (98)$$

Esta é a força de radiação associada com a emissão espontânea ou com o espalhamento de radiação pelo átomo. A força é uma função lorentziana de ω centrada em $\omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{X}$ (frequência atômica mais efeito Doppler) com largura total à metade do máximo $(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}$. Em um campo forte ($\Omega \rightarrow \infty$) a força satura com o valor $\vec{F} = (1/2) A \hbar \vec{k}$.

Neste trabalho, estamos interessados no movimento atômico em um feixe laser gaussiano. Consideremos um feixe gaussiano colimado propagando-se na direção z

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \exp[-(x^2 + y^2)/W_0^2] \cos(kz - \omega t), \quad (99)$$

onde W_0 é uma constante. Aqui temos $\Omega(x, y) = (\mu E_0 / \hbar) \exp[-(x^2 + y^2)/W_0^2]$ e $\theta(z) = -kz$. A força de radiação (97) consiste de uma pressão de radiação longitudinal

$$F_z = \frac{A\Omega^2 \hbar k}{[4(\Delta - k\dot{Z})^2 + A^2 + 2\Omega^2]} \quad (100)$$

e de uma força dipolar transversal⁽¹⁰⁾

$$\vec{F}_T = \frac{-\hbar(\Delta - k\dot{Z}) \vec{\nabla} \Omega^2}{[4(\Delta - k\dot{Z})^2 + A^2 + 2\Omega^2]} \quad (101)$$

Esta última força apenas age focalizando ou defocalizando o feixe atômico. Como aqui tratamos do movimento longitudinal, o leitor interessado na força (101) é endereçado às referências (10) e (11).

Consideremos um feixe atômico contra-propagante a um feixe laser gaussiano. A força ao longo da direção de propagação (eixo z) é dada pela expressão (100) com k substituído por -k. De (94), (95) e (100) (com $k \rightarrow -k$), temos, para resolver, a equação diferencial:

$$M \frac{d\dot{Z}}{dt} = \frac{-A\Omega^2 \hbar k}{[4(\Delta + k\dot{Z})^2 + A^2 + 2\Omega^2]} \quad (102)$$

O momentum de cada fóton absorvido pelo átomo é $-\hbar k \hat{z}$. Em outras palavras, a cada absorção, o átomo perde $\hbar k/M$ de sua velocidade longitudinal. Desta forma, se quisermos usar este mecanismo para trazer um átomo com velocidade longitudinal inicial v_0 ao repouso, será necessária a absorção de $v_0/(\hbar k/M)$ fótons. Este número pode ser muito grande, já que $\hbar k/M$ é apenas uma pequena fração de v_0 . A expressão (102), que descreve a força desaceleradora devida à absorção de fótons, deixa clara a influência do efeito Doppler sobre a eficiência do processo, ou seja, a pressão radiativa é apreciável apenas enquanto

$$|\Delta + k\dot{z}| \leq \frac{1}{2} (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}. \quad (103)$$

Se, em dado instante, (103) for satisfeita, esta situação não necessariamente permanecerá por longo tempo, pois $k\dot{z}$ tornar-se-á cada vez menor, levando à violação de (103). O número médio de fótons absorvidos pelo átomo antes que (103) deixe de valer é da ordem de $(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}/(2\hbar k/M)$. Tomemos, como exemplo, um caso concreto. Para um átomo de sódio, uma transição conveniente fornece $\hbar k/M \approx 3 \text{ cm/s}^{(12)}$ e neste caso temos $A \approx 6,28 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, de modo que, com um laser ressonante de potência suficiente para fornecer $\Omega \approx 1.257 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, ocorrem apenas cerca de 300 absorções das 30000 necessárias para parar um átomo com velocidade inicial da ordem de 900 m/s. Esta baixa eficiência pode ser contornada se compensarmos em cada ponto a variação de $k\dot{z}$. Isto pode ser feito se introduzirmos um campo magnético longitudinal a fim de obtermos, mediante efeito Zeeman, uma compensação para o

deslocamento Doppler. Em outras palavras, em presença de um campo magnético, a frequência ω_0 muda para $\omega_0 + \gamma B(Z)$ e assim (102) torna-se

$$M \frac{dv}{dt} = \frac{-A\Omega^2 \hbar k}{[4(\Delta - \gamma B(Z) + kv)^2 + A^2 + 2\Omega^2]}, \quad (104)$$

onde fizemos $Z = v$. Escolhendo $B(Z)$ adequadamente, cancelaremos o efeito Doppler. O melhor campo magnético para isso é o que fornece maior desaceleração, isto é, aquele que torna o denominador de (104) menor,

$$\gamma B(Z) = \Delta + kv. \quad (105)$$

Neste caso, (104) resulta em $Mdv/dt = -Ma_M$ e $v = (v_0^2 - 2a_M Z)^{1/2}$ com

$$a_M = \frac{A\Omega^2 \hbar k}{M(A^2 + 2\Omega^2)}, \quad (106)$$

isto é, o movimento do átomo é uniformemente desacelerado, com aceleração $-a_M$. Assim, (105) fica

$$\gamma B(Z) = \Delta + k(v_0^2 - 2a_M Z)^{1/2} \quad (107)$$

e o átomo tem velocidade longitudinal nula em $Z_0 = v_0^2 / (2a_M)$. Esta técnica foi inicialmente proposta em 1982 por Phillips e Metcalf⁽¹³⁾ e posteriormente demonstrada por vários grupos de pesquisa⁽³⁾ e é hoje denominada "Zeeman Tuning Technique".

No laboratório, porém, existem algumas dificuldades para produzirmos um campo magnético precisamente parabólico como especificado acima. Sendo assim, o movimento do átomo não será perfeitamente desacelerado e, para acompanharmos os átomos ao longo do processo, é necessário integrar (104) numericamente. O próximo capítulo trata o problema da integração de (104), que é uma equação diferencial altamente não linear.

III. ESTUDOS NUMERICOS DO PROCESSO DE DESACELERAÇÃO

Neste capítulo discutiremos o processo desacelerador usando técnicas computacionais e a expressão (104). Começaremos com o estudo das trajetórias médias e só depois utilizaremos métodos estocásticos para a introdução das flutuações devidas à emissão espontânea.

III.1. TRAJETÓRIAS

Normalmente entendemos por trajetória de um ponto material, descrito pelo seu vetor posição \vec{r} , como sendo a função $\vec{r} = \vec{r}(t)$, isto é, o conjunto de todas as posições ocupadas pelo ponto durante o decorrer de um especificado intervalo de tempo. Mas aqui estamos interessados na velocidade do centro do pacote de ondas atômico como função da posição. Como discutido na seção anterior, estamos interessados na velocidade longitudinal (componente z da velocidade) como função da coordenada longitudinal Z, quando um átomo na presença de um campo inhomogêneo $B(Z)$ tem contra-propagante ao seu movimento um feixe de luz ressonante. Assim, usando (104), escrevemos

$$MV \frac{dV}{dZ} = \frac{-A\Omega^2 \hbar k}{[4(\Delta - \gamma B(Z) + kV)^2 + A^2 + 2\Omega^2]} . \quad (108)$$

Como discutido no capítulo II, (108) só pode ser integrada

numericamente e este é o nosso propósito aqui. Mas antes de partirmos para os detalhes computacionais, salientamos que, a partir deste ponto, entenderemos trajetória como sendo a curva $V=V(Z)$, solução da equação (108) para uma dada função $B(Z)$.

No capítulo anterior, vimos que um campo magnético da forma (107) proporciona uma desaceleração máxima num átomo inicialmente com velocidade v_0 permitindo que ele atinja o repouso. Assim, consideremos o perfil de campo magnético dado por

$$B(Z) = b_0 + \alpha \left[1 - \beta(Z - Z_0) \right]^{1/2}, \quad (109)$$

onde $b_0 = 277.2$ gauss, $\alpha = 972.0$ gauss, $\beta = 0.01 \text{ cm}^{-1}$ e $Z_0 = 20.0$ cm. $B(Z)$ é dado em gauss para Z dado em cm. A figura 1 a seguir mostra este perfil. Na figura 2 apresentamos o perfil axial de um campo magnético real, construído em nosso laboratório, medido ao longo do eixo de um solenóide construído para reproduzir, aproximadamente, o perfil (109). O campo real concorda muito bem com um perfil parabólico dentro de um intervalo entre 20 e 120 cm. Detalhes de desenho e construção deste campo já foram apresentados na literatura⁽¹⁴⁾.

Usando (109), facilmente escrevemos um programa que integra (108) através do método Runge-Kutta de quarta ordem⁽¹⁵⁾ (ver, no Apêndice, o programa TRAJ). A figura 3 mostra a solução de (108) com o campo (109) para um "detuning" de 100 MHz. Os valores das grandezas envolvidas utilizados no programa são para o átomo de

sódio, que neste caso foi aproximado por um sistema de dois níveis (transição $3S_{1/2}$ ($F=2$) $\rightarrow 3P_{3/2}$ ($F=3$))⁽¹²⁾. A trajetória é obtida para um átomo que, em $Z=0$, possui a velocidade longitudinal de 800 m/s e está sujeito ao perfil de campo magnético teórico da expressão (109).

Neste ponto convém fazermos algumas observações. A aceleração máxima ocorre quando $\Delta - \gamma B(Z) + kV = 0$, como constatamos olhando para a equação (108). Estamos fazendo um gráfico de $V = V(Z)$. Seria conveniente vermos se $kV(Z)$ cruza ou não a curva $f(Z) \equiv \gamma B(Z) - \Delta$. Assim, teríamos uma visão mais completa do processo de desaceleração. Para tanto, basta mudarmos o programa anterior para que possamos ver, simultaneamente, as curvas $kV(Z)$ e $f(Z)$ (ver no Apêndice o programa TRAJETORIA). A figura 4 mostra a trajetória para $V_0 = 800$ m/s juntamente com a curva $f(Z)$ para $\Delta = 100$ MHz. Analisando este gráfico, vemos que, por volta de $Z = 55$ cm, $kV(Z)$ começa a acompanhar $f(Z)$ por baixo, isto é, antes que $\Delta - \gamma B(Z) + kV = 0$. Também notamos que, entre $Z = 115$ cm e $Z = 120$ cm, $kV(Z)$ cruza $f(Z)$ e começa a não mais seguir $f(Z)$. Isto é visto claramente na figura 5, que amplia a região do cruzamento. É interessante vermos um gráfico de $f(Z) - kV(Z)$, como mostra a figura 6. Nesta figura, observamos uma região em que $f(Z) - kV(Z)$ é praticamente constante. A região começa com Z ao redor de 60 cm. Uma ampliação deste gráfico entre $Z = 60$ cm e $Z = 118$ cm é vista na figura 7. Vemos, então, que é a partir de $f(Z) - kV(Z) \approx 15$ MHz que a trajetória kV começa a acompanhar $f(Z)$ e que, antes disso, $f(Z) - kV(Z)$ era decrescente,

CAMPO TEÓRICO

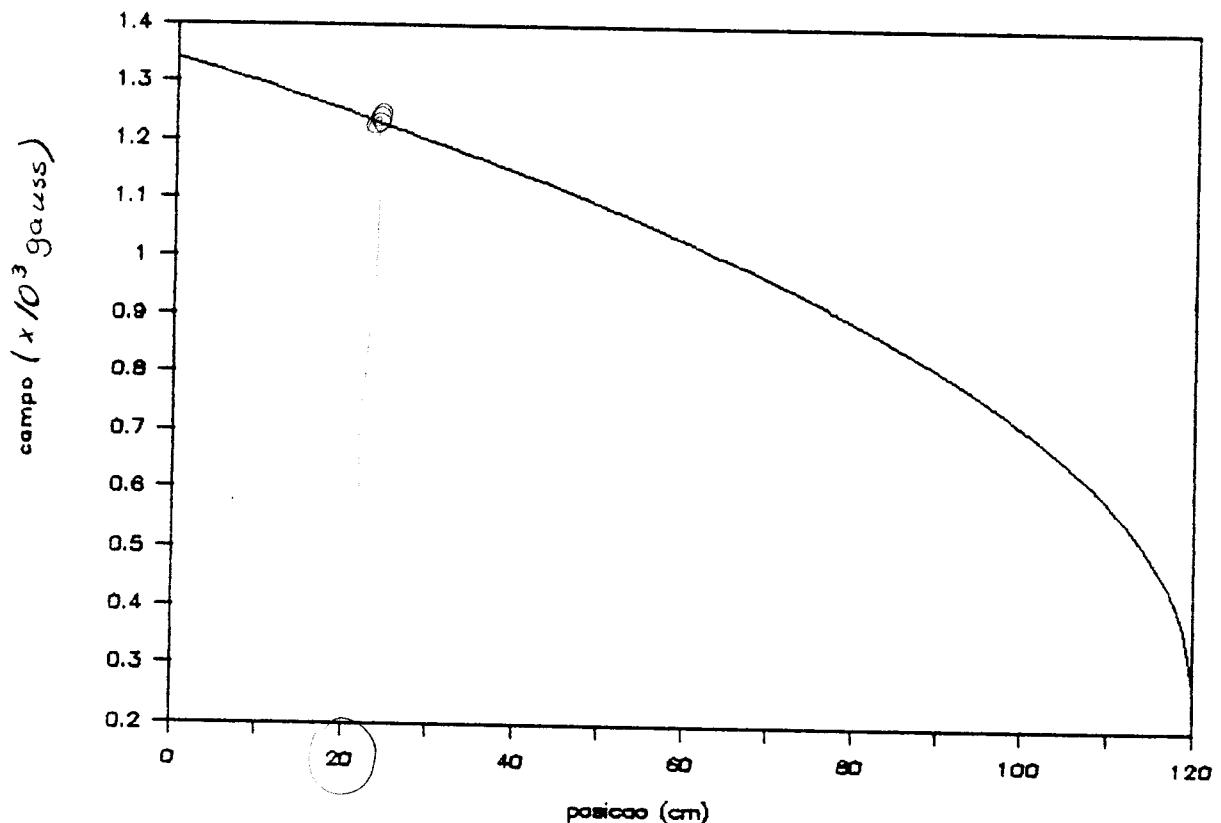


Figura 1. Perfil do campo magnético teórico (expressão (109)).

CAMPO REAL

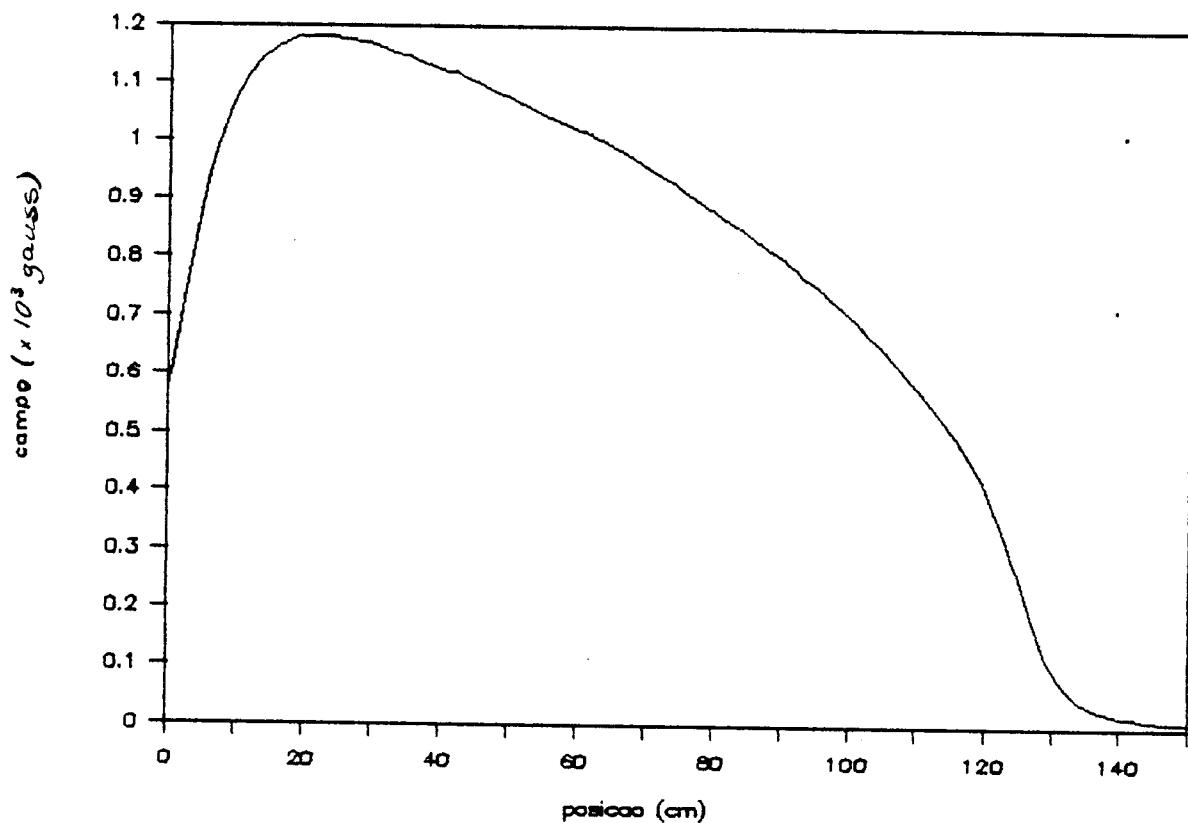


Figura 2. Perfil do campo magnético medido, fornecido por um solenóide real usado em experiências de desaceleração de feixe atómico.

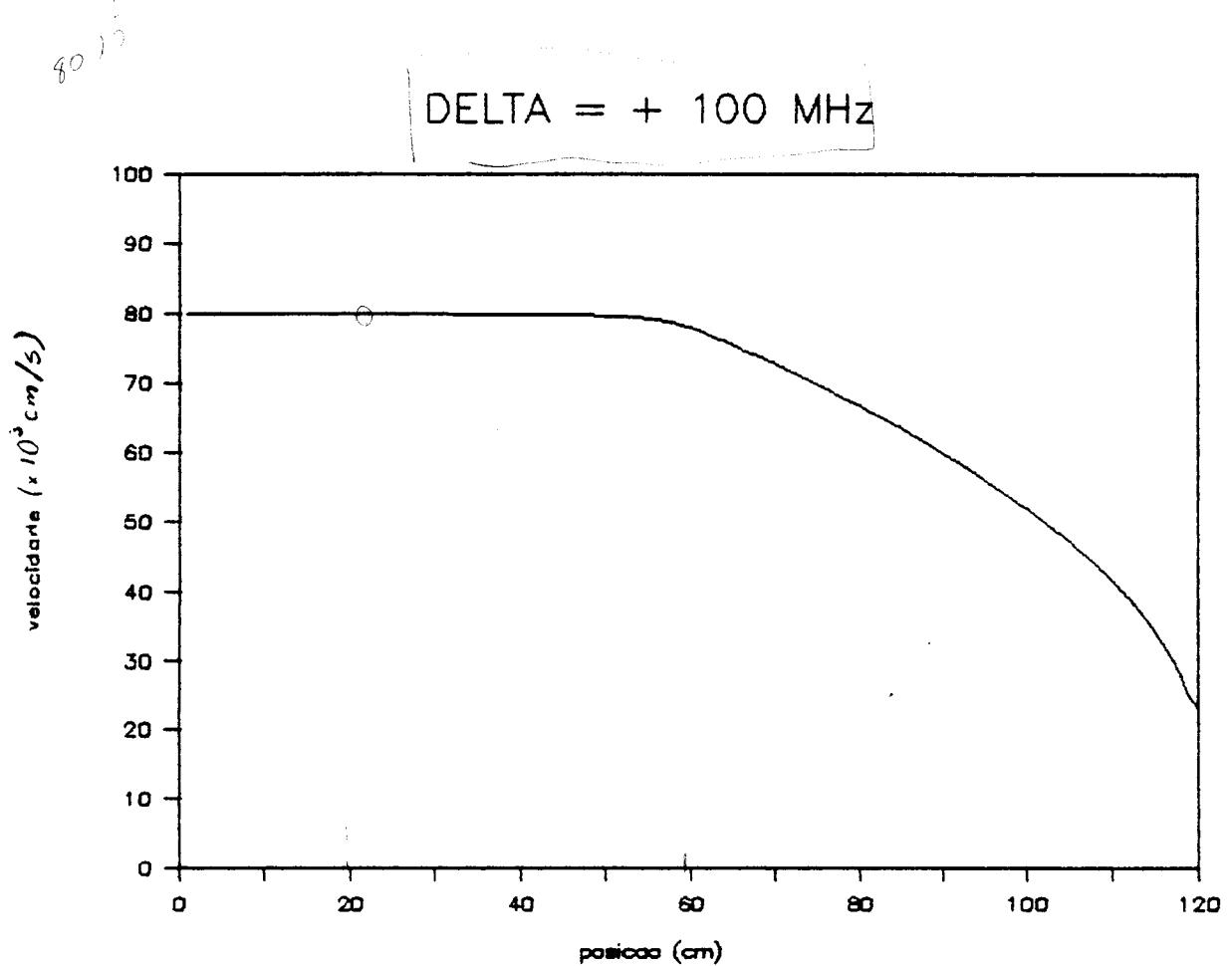


Figura 3. Trajetória para $V_0 = 800 \text{ m/s}$, para o campo teórico da figura 1 (expressão (109)). Aqui, o "detuning" é de $+100 \text{ MHz}$.

DELTA = + 100 MHz

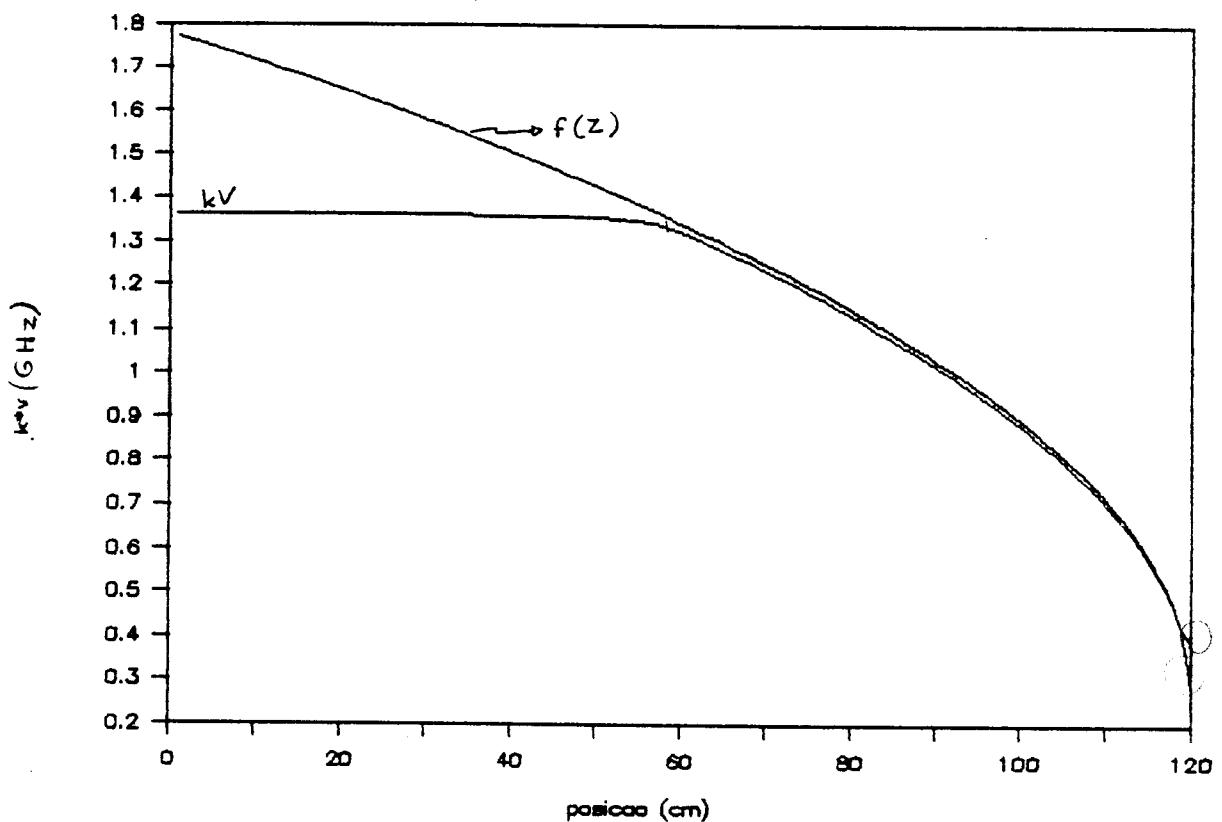


Figura 4. Trajetória para $V_0 = 800$ m/s comparada com a curva $f(Z) = \gamma B(Z) - \Delta$ para $\Delta = + 100$ MHz.

$\Delta = + 100 \text{ MHz}$

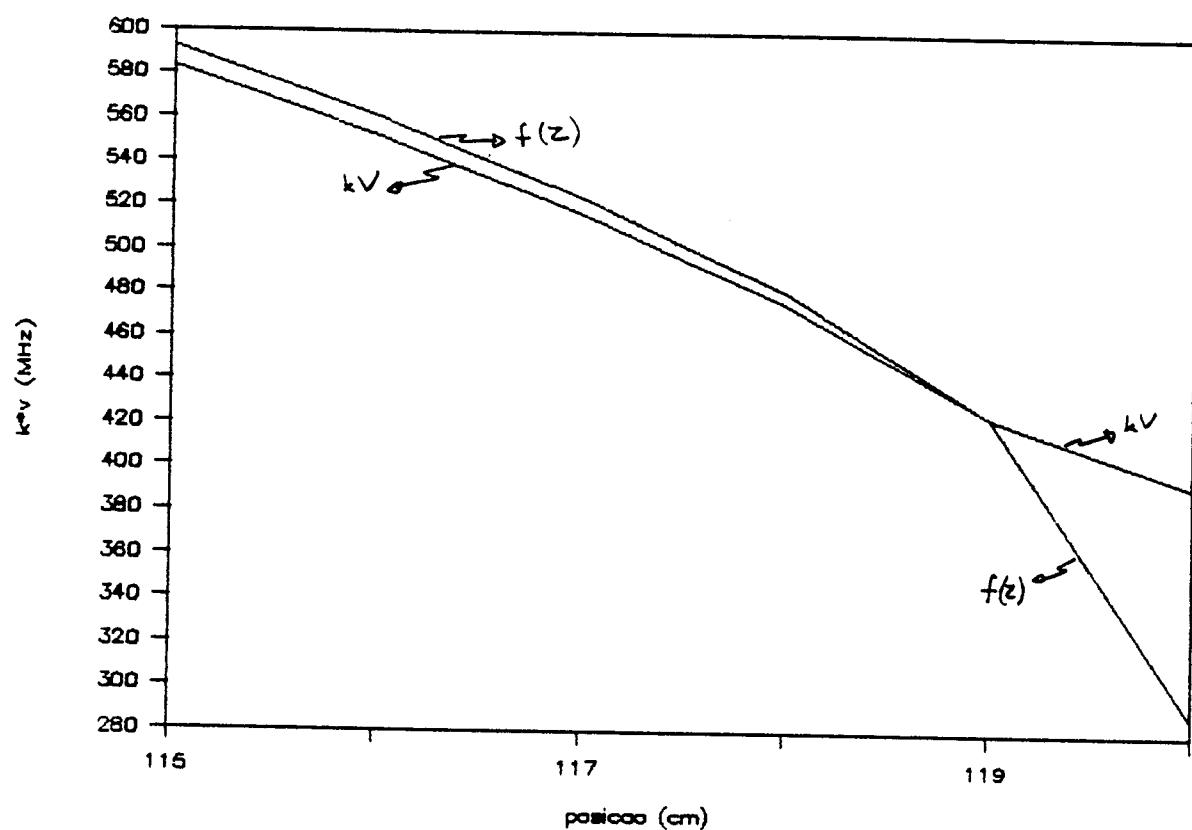


Figura 5. Ampliação da região de cruzamento entre as curvas de $f(z)$ e $kV(z)$ da figura 4.

$\Delta = + 100 \text{ MHz}$

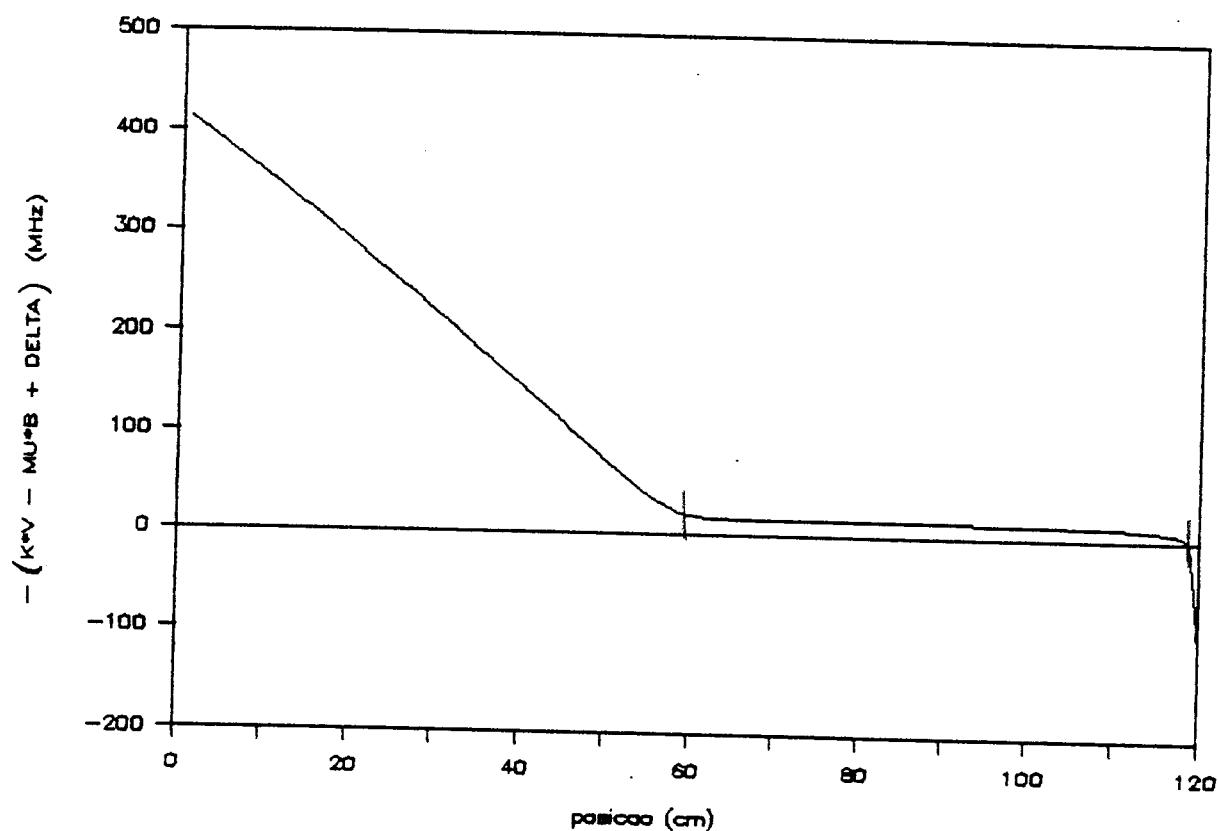


Figura 6. Gráfico de $f(Z) - kV(Z)$ para a trajetória da figura 4.

$\text{DELTA} = + 100 \text{ MHz}$

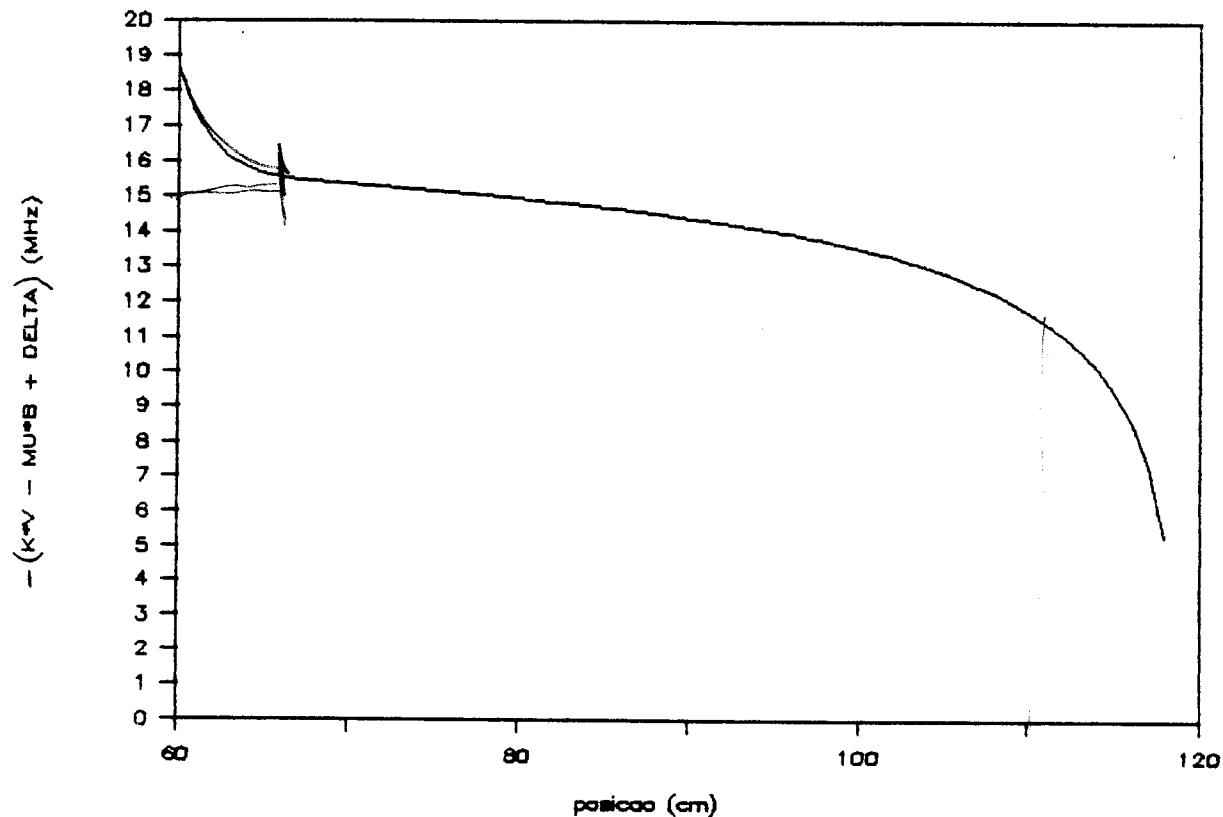


Figura 7. Ampliação da região da figura 6 em que $f(Z) = kV(Z)$ é aproximadamente constante.

já que $kV(Z)$ estava se aproximando cada vez mais de $f(Z)$. Isto já era esperado, pois nesta situação é que temos $(\Delta - \gamma B(Z) + kV)^2$ tornando-se da ordem dos demais termos do denominador da expressão da força. Por volta de $Z = 110$ cm há uma queda brusca da diferença entre $f(Z)$ e $kV(Z)$, o que mostra o cruzamento das curvas. A figura 8 mostra em detalhes a troca de sinal de $f(Z) - kV(Z)$ no momento do cruzamento. Ainda nesta figura vemos uma lenta variação de $f(Z) - kV(Z)$ quando esta diferença é positiva e uma variação muito brusca quando negativa. Como podemos explicar este comportamento? Por que o átomo sai de ressonância? Para responder a estas questões, analisemos a equação (108). Vemos que a aceleração só assume valores não desprezíveis se

$$-\frac{1}{2}(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} \leq \Delta - \gamma B(Z) + kV(Z) \leq \frac{1}{2}(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}. \quad (110)$$

Quando o átomo está ressonante com o laser, sofre uma desaceleração apreciável durante o trajeto, ou seja, (110) é válida. Como vemos na figura 7, na região de ressonância, $\Delta - \gamma B(Z) + kV(Z)$ é aproximadamente constante, significando que o efeito Doppler é compensado constantemente pela variação Zeeman como esperado. Como esta última expressão é constante, temos que

$$\gamma \frac{dB}{dZ} = k \frac{dV}{dZ}. \quad (111)$$

Na verdade, (110) não implica em (111), isto é, se tivéssemos um campo diferente, $f(Z) - kV(Z)$ poderia ser uma função $g(Z)$ satisfazendo (110) com $g'(Z)$ possuindo valores não desprezíveis.

DELTA = + 100 MHz

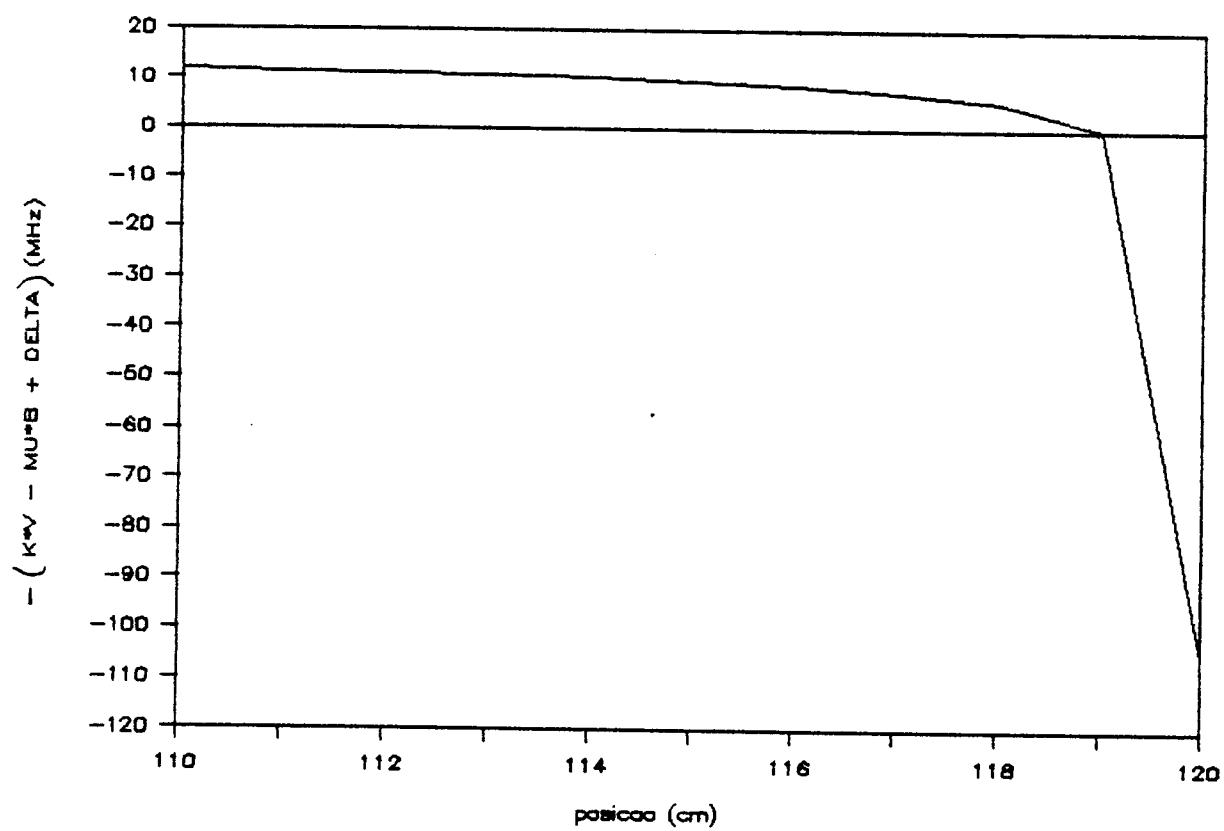


Figura 8. Cruzamento das curvas $f(Z)$ e $kV(Z)$ para a trajetória da figura 4.

Como $B(Z)$ foi calculado para compensar o efeito Doppler, mesmo que aproximadamente, na ressonância, (111) é válida com boa aproximação. De (108), tiramos:

$$M \left| \frac{dV}{dt} \right| \leq \frac{A\Omega^2 \hbar k}{A^2 + 2\Omega^2} \equiv Ma_M. \quad (112)$$

Multiplicando ambos os membros de (111) por $V = dZ/dt$ e usando (112), obtemos

$$\gamma \left| \frac{dB}{dZ} \right| |V| \leq ka_M. \quad (113)$$

Notando que (110) pode ser expressa como $\Delta - \gamma B(Z) + kV(Z) = (1/2)\varepsilon(Z)(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}$, onde $\varepsilon(Z)$ é uma função de Z quase constante que assume valores no intervalo $[-1,1]$, temos

$$kV(Z) = \gamma B(Z) - \Delta + \frac{\varepsilon(Z)}{2}(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}. \quad (114)$$

Notemos que enquanto $\varepsilon < 0$, a curva $kV(Z)$ fica abaixo de $f(Z)$, enquanto $\varepsilon > 0$, a curva $kV(Z)$ fica acima de $f(Z)$ e enquanto $\varepsilon = 0$, os pontos das curvas $kV(Z)$ e $f(Z)$ coincidem. Logo, na ressonância, vale a relação

$$\gamma \left| \frac{dB}{dZ} \right| \leq \frac{k^2 a_M}{\left| \gamma B(Z) - \Delta + \frac{\varepsilon}{2}(A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} \right|}, \quad \forall \varepsilon \in [-1,1]. \quad (115)$$

Sempre que (115) for violada, o átomo não poderá acompanhar o

processo permanecendo em ressonância. Para entendermos melhor este ponto da saída de ressonância evidenciada nas figuras 4 e 5, vejamos o gráfico da figura 9 onde mostramos as curvas correspondentes à inequação (115), calculadas para $\Delta = + 100$ MHz. Para construirmos este gráfico, escrevemos um programa (ver o programa GRADIENTE no Apêndice) que calcula as curvas $k^2 a_M / |f(Z)| - (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} / 2|$, $k^2 a_M / |f(Z)| + (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} / 2|$ e $\gamma |dB/dZ|$. Como, para haver ressonância, (115) deve ser válida para qualquer função $\varepsilon(Z)$ limitada por -1 e 1, graficando $k^2 a_M / |f(Z)| + (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} / 2|$ e $k^2 a_M / |f(Z)| - (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} / 2|$ obteremos, para cada valor de Δ , as curvas que delimitam qualquer possível $\varepsilon(Z)$. Com isto, detectaremos qualquer violação de (115), mesmo desconhecendo $\varepsilon(Z)$, bastando que $\gamma |dB/dZ|$ cruze a região delimitada por aquelas curvas. Vemos no gráfico que há um cruzamento entre as curvas do gradiente do campo (109) e das funções $k^2 a_M / |f(Z)| \pm (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2} / 2|$, isto é, a partir de um determinado ponto, há violação da condição de ressonância (115). Discutiremos melhor a obtenção deste ponto de saída de ressonância no capítulo IV. A figura 10 mostra uma ampliação da região de cruzamento das curvas da figura anterior. Vemos neste gráfico que por volta de $Z = 118,5$ cm, não pode haver ressonância, uma vez que a desigualdade (115) não é mais satisfeita. Esta observação confere com os resultados para a trajetória das figuras 4 e 5, onde vemos o átomo deixando de participar do processo a partir de $Z = 119$ cm, aproximadamente. Fisicamente, isto significa que o átomo, ao deparar-se com uma região onde o gradiente de campo magnético é demasiadamente

DELTA = + 100 MHz

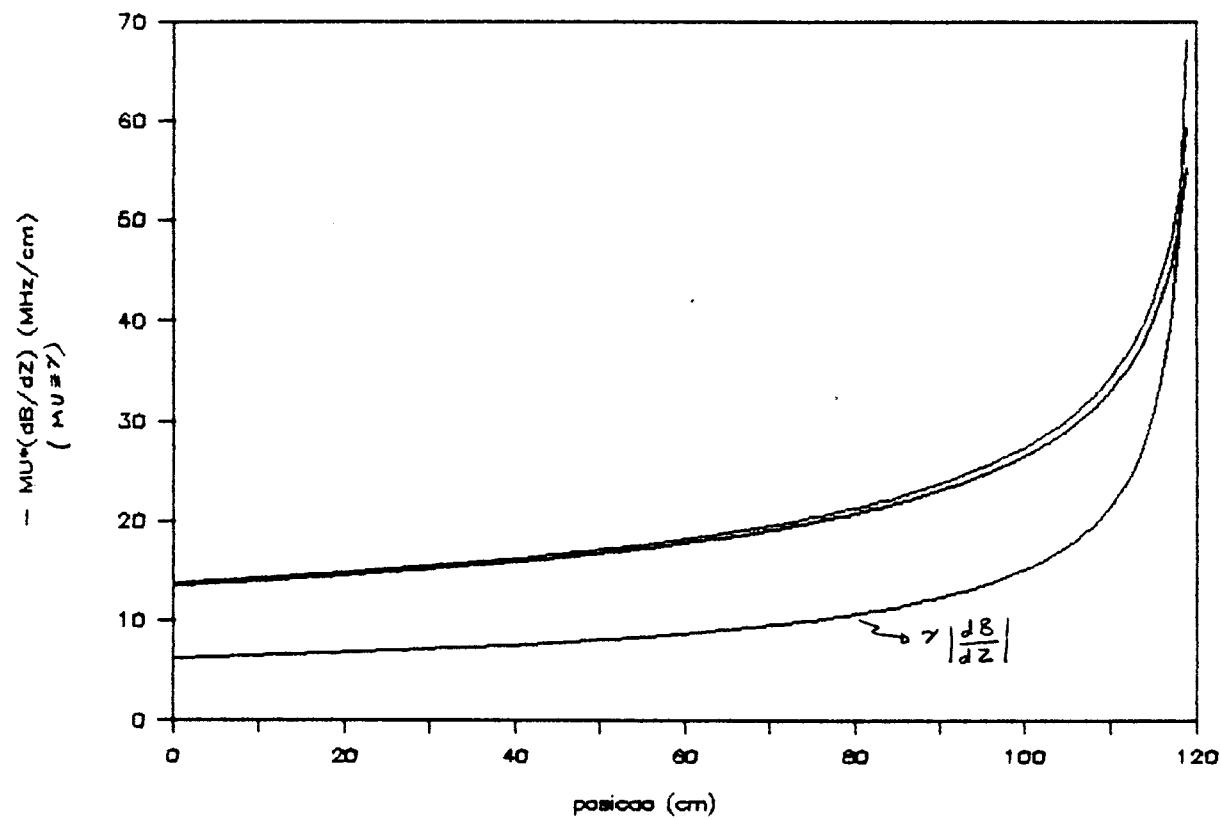


Figura 9. As três curvas correspondentes à inequação (115), calculadas para $\Delta = + 100$ MHz.

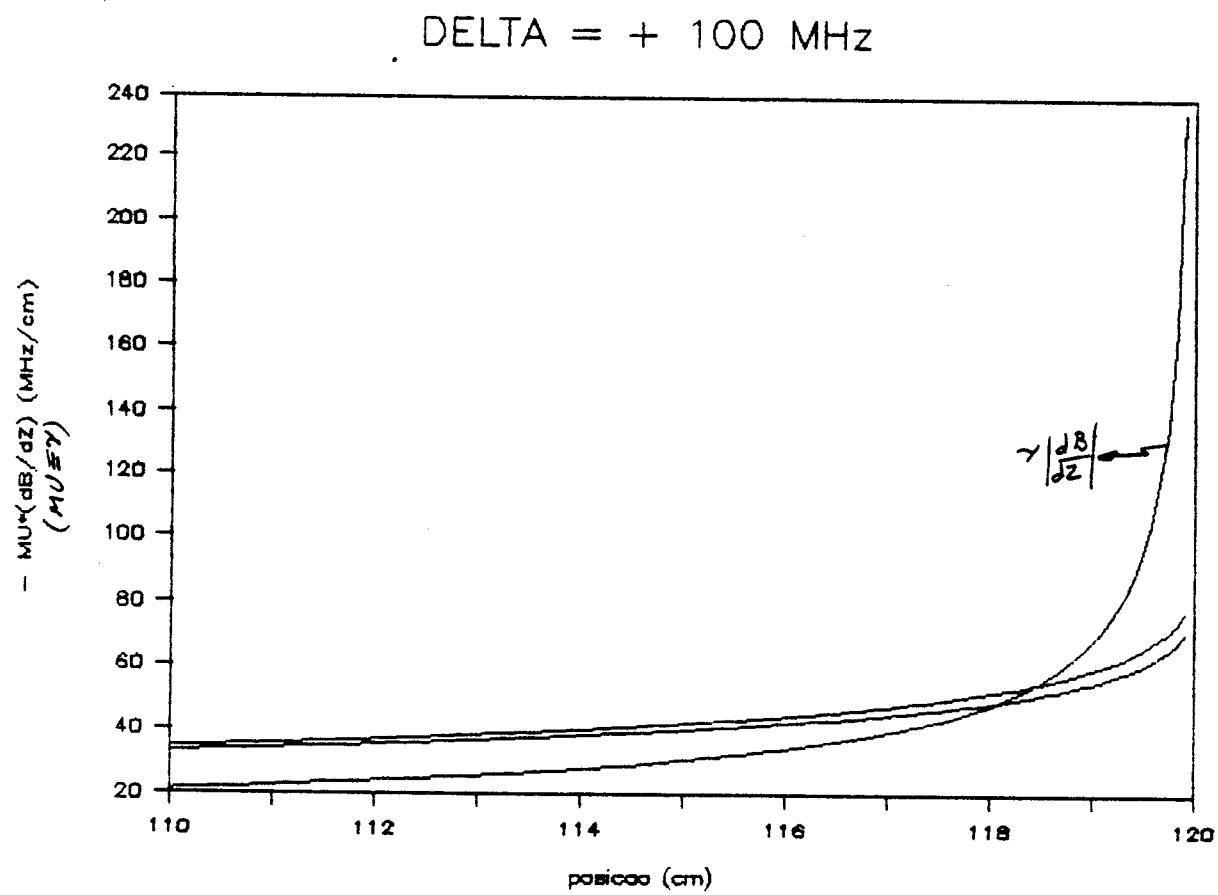


Figura 10. Ampliação da figura anterior mostrando a região de cruzamento.

intenso, não é capaz de absorver a quantidade de fótons por unidade de tempo demandada e, assim, não há compensação para o efeito Doppler, que acaba levando o átomo a sair de ressonância.

A condição (115) sugere que não é apenas com campos parabólicos com a forma (109) que podemos desacelerar átomos ressonantes com um laser contra-propagante, basta que o gradiente do perfil de campo magnético seja tal que, para um dado valor de Δ , (115) seja válida. Sempre que tivermos um campo magnético com um perfil que possua um gradiente que viole (115), mesmo que em algumas posições apenas, teremos átomos que, inicialmente ressonantes, acompanharão o campo até saírem de ressonância naquelas posições. As figuras 11, 12 e 13 mostram trajetórias de átomos sujeitos a um campo de perfil linear. Vemos, na figura 11, que tal campo não parabólico é capaz de levar átomos ao repouso. Conforme dobrarmos o coeficiente angular do perfil do campo, vemos que $kV(Z)$ se aproxima da curva $f(Z)$ até cruzá-la (ver figuras 12 e 13), o que indica a saída de ressonância. Estas figuras deixam claro o efeito do gradiente do perfil de campo na desaceleração de átomos e, além disso, prevêem a possibilidade da utilização de outros perfis. O campo parabólico tem a finalidade de prover uma aceleração quase constante ao átomo ressonante. Este fato será explorado melhor no final desta seção, quando analisarmos a estabilidade das soluções ressonantes da equação (108).

Chegamos, então, a uma explicação e a um critério para analisar o fato de que o átomo sai de ressonância. Sempre que a

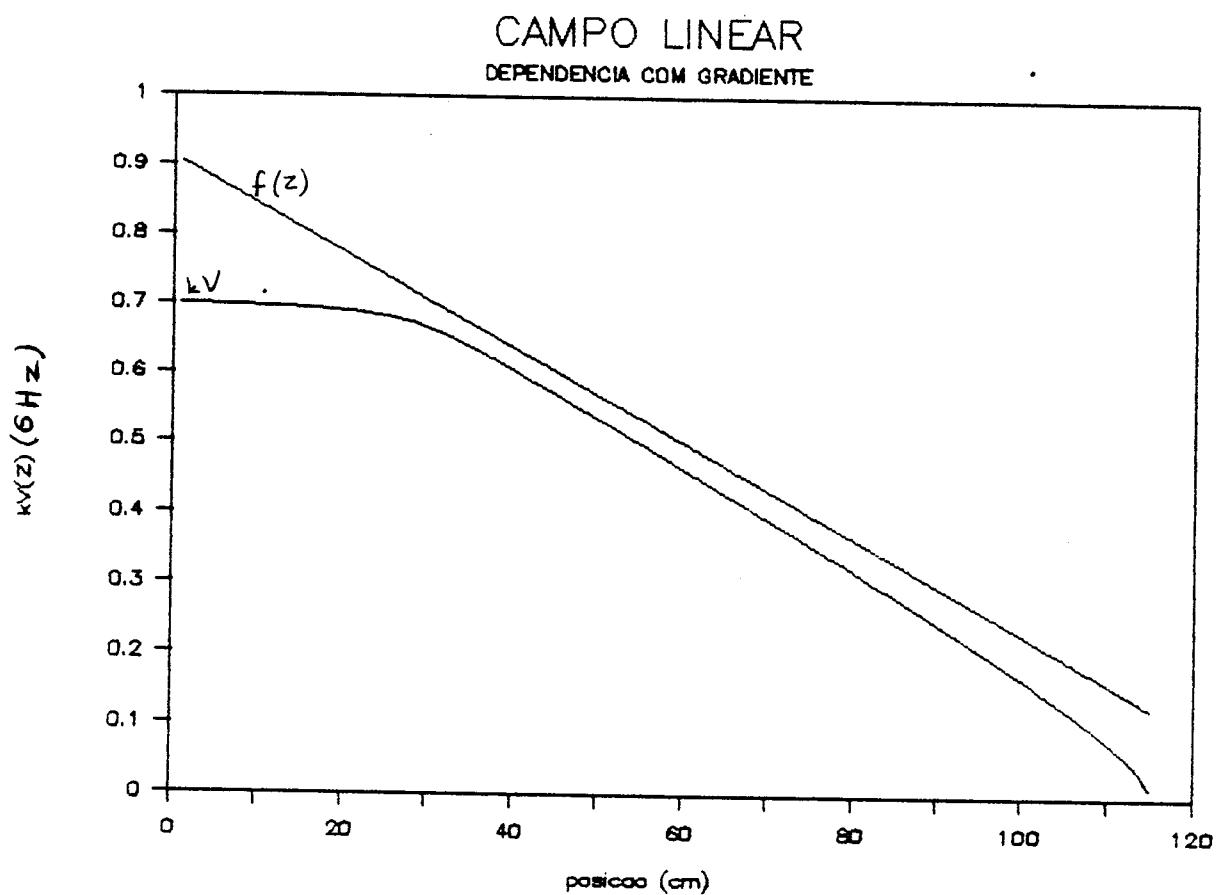


Figura 11. Trajetória para um átomo sujeito a um campo linear. Mesmo este perfil não parabólico é capaz de levar um átomo ao repouso, bastando que o coeficiente angular do perfil seja adequado, dado o valor de Δ , que neste caso é +100 MHz.

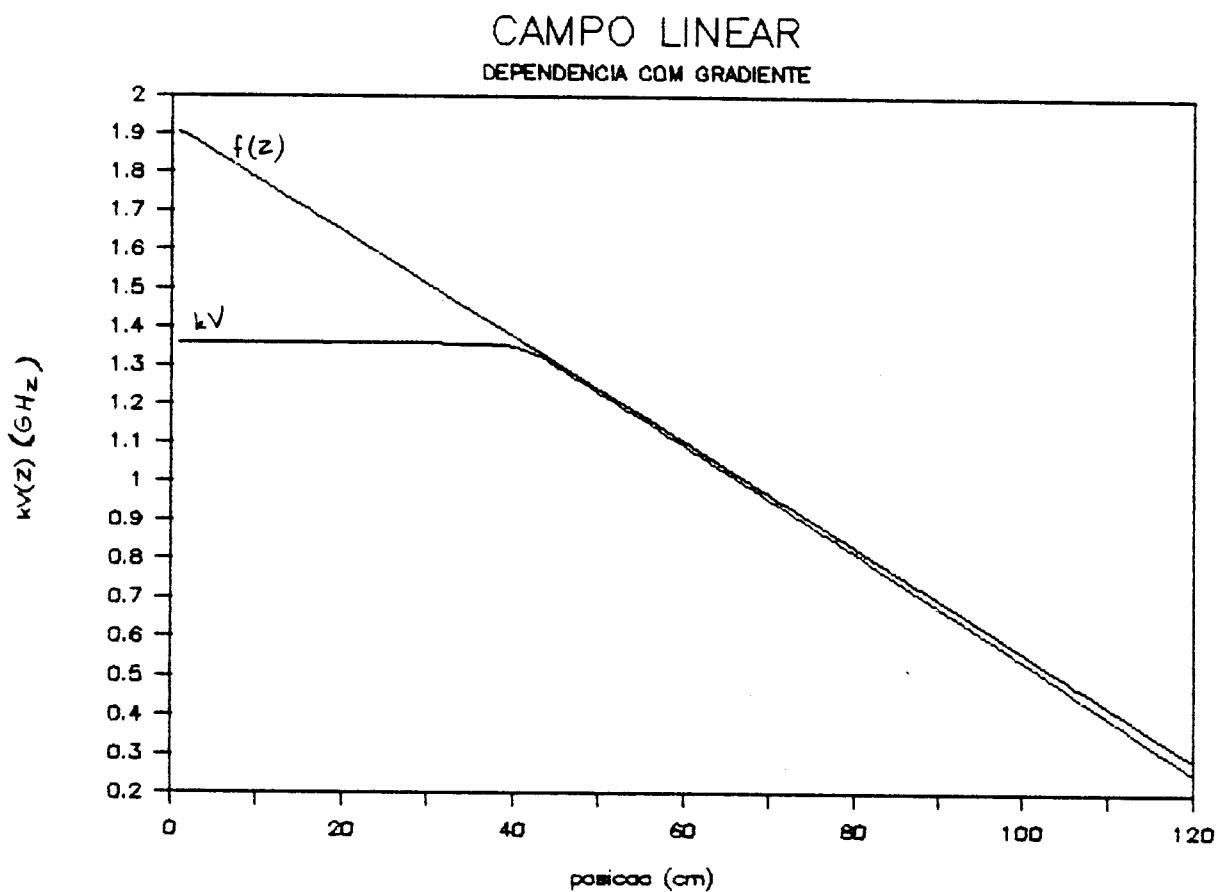


Figura 12. Trajetória mostrando átomo ressonante num campo com perfil linear com inclinação igual ao dobro daquela do gráfico anterior. Notemos a proximidade entre as curvas $kV(Z)$ e $f(Z)$; o átomo, neste campo, já não atinge mais o repouso.

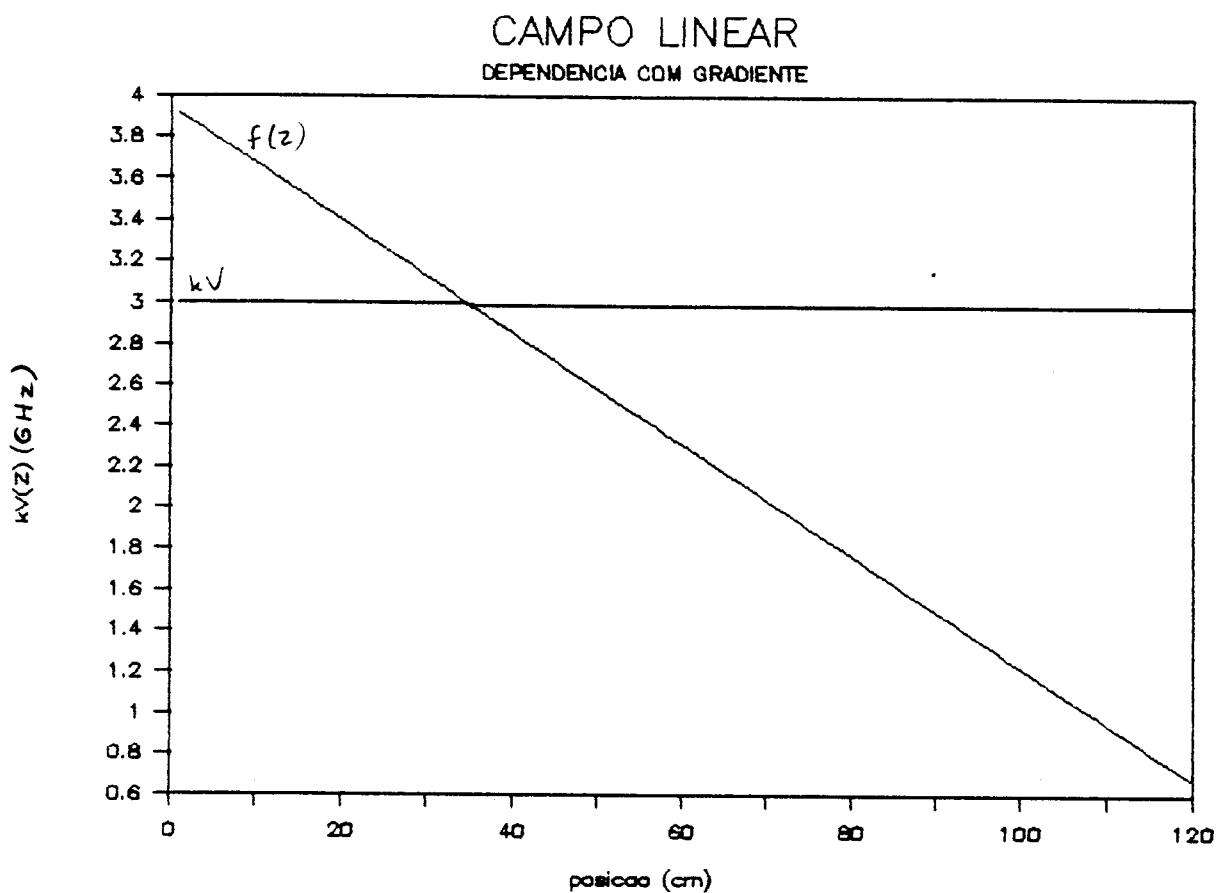


Figura 13. Nesta figura vemos uma inclinação de perfil linear de campo magnético duas vezes maior que a anterior. Neste caso, a trajetória $kV(Z)$ não é afetada ao cruzar a curva $f(Z)$, indicando que o gradiente do campo viola (115).

desigualdade (115) for violada, cessa o acompanhamento de $f(Z)$ pela trajetória $kV(Z)$. Em outras palavras, a expressão (115) depende do "detuning" Δ . Logo, variando Δ teremos diferentes posições para que o átomo não permaneça mais em ressonância. Da expressão (115) vemos que se Δ for maior do que zero, há um aumento na coordenada do ponto de cruzamento entre a curva $\gamma|dB/dZ|$ e as curvas $k^2 a_M / |f(Z) \pm (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}|$ (ver capítulo IV). Isto se deve ao fato de que os denominadores destas curvas tornam-se menores à medida que Δ fica mais e mais positivo, elevando o ponto de cruzamento. Como a situação inverte-se para $\Delta < 0$, isto é, as curvas $k^2 a_M / |f(Z) \pm (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}|$ abaixam-se relativamente ao gráfico de $\gamma|dB/dZ|$, temos, neste caso, menores valores de Z para os quais há saída de ressonância de um átomo no processo. As figuras 14, 15, 16 e 17 seguintes mostram os gráficos análogos aos das figuras 4, 5, 9 e 10 para $\Delta = -100\text{MHz}$ e $V_0 = 800\text{ m/s}$. Na figura 14 o átomo escapa de ressonância em uma posição inferior à posição de saída da figura 4. Vemos, na figura 15, uma ampliação da região de escape da figura 14, mostrando que por volta de $Z = 116,5\text{ cm}$ o átomo sai de ressonância. Na figura 5 vemos que, para $\Delta = +100\text{ MHz}$, o escape ocorre por volta de $Z = 119\text{ cm}$. A figura 16 mostra as curvas $\gamma|dB/dZ|$ e $k^2 a_M / |f(Z) \pm (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}|/2$ e seu cruzamento. A figura 17 ilustra, com uma ampliação, a saída de ressonância que ocorre por volta de $Z = 116\text{ cm}$, mostrando boa concordância com os resultados das figuras 14 e 15 que mostram trajetórias. É interessante observar que, embora as figuras 16 e 17 indiquem uma posição por volta de $Z = 115,5\text{ cm}$ para o escape de ressonância, as figuras 14 e 15 mostram uma

DELTA = - 100 MHz

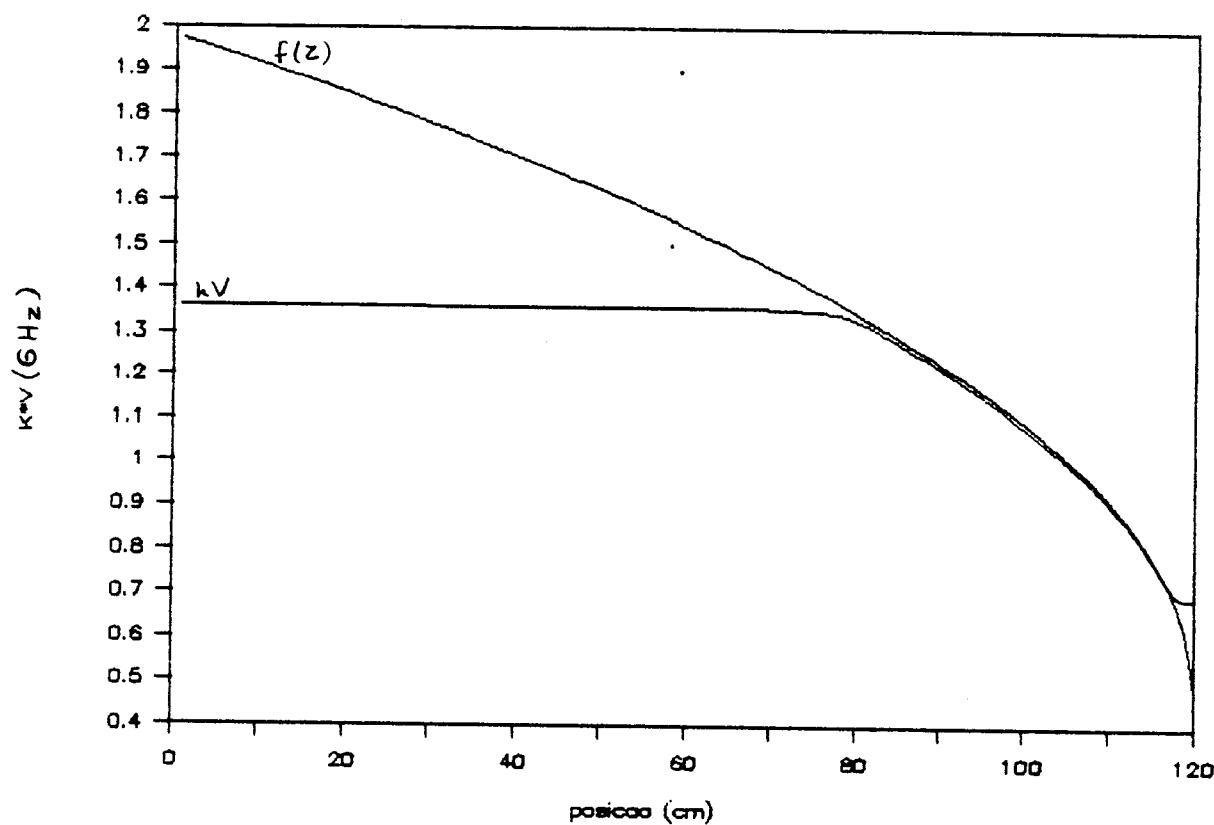


Figura 14. Trajetória para $\Delta = - 100$ MHz, mostrando a saída de ressonância.

DELTA = - 100 MHz

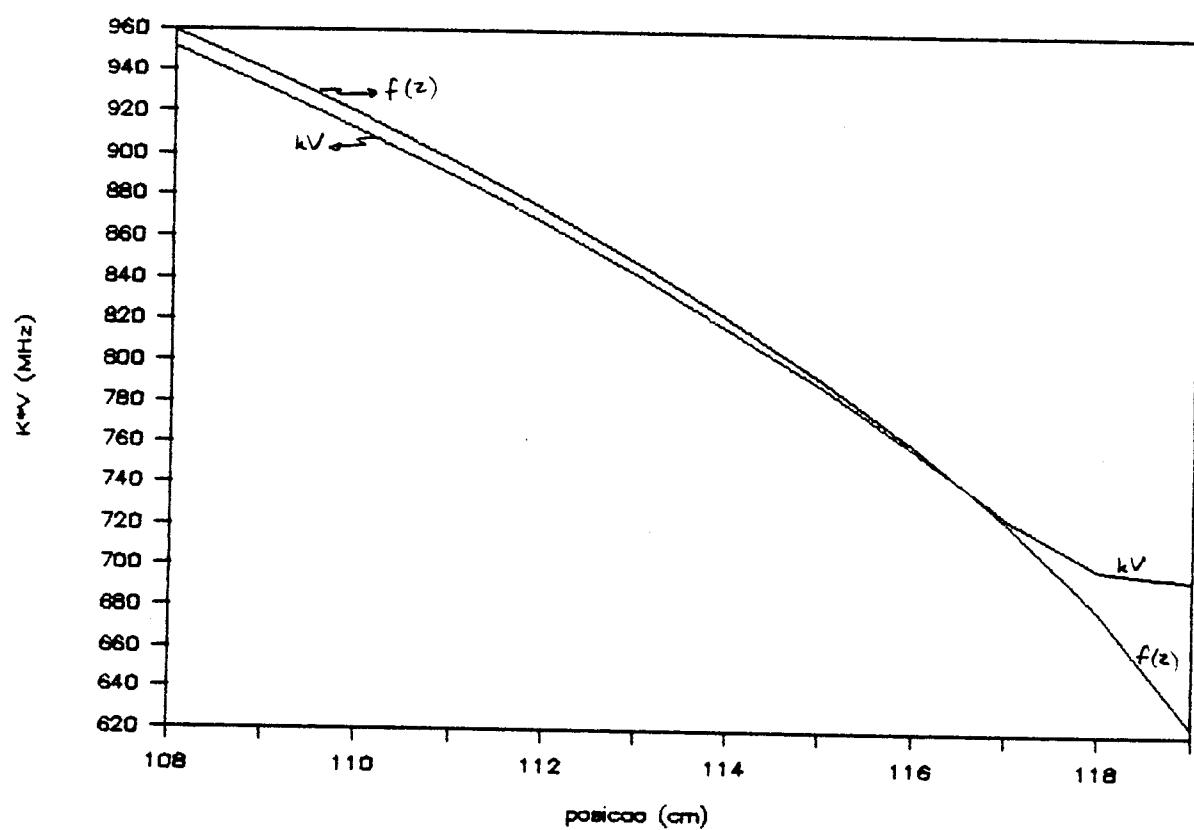


Figura 15. Ampliação da região de escape da figura anterior.

DELTA = - 100 MHz

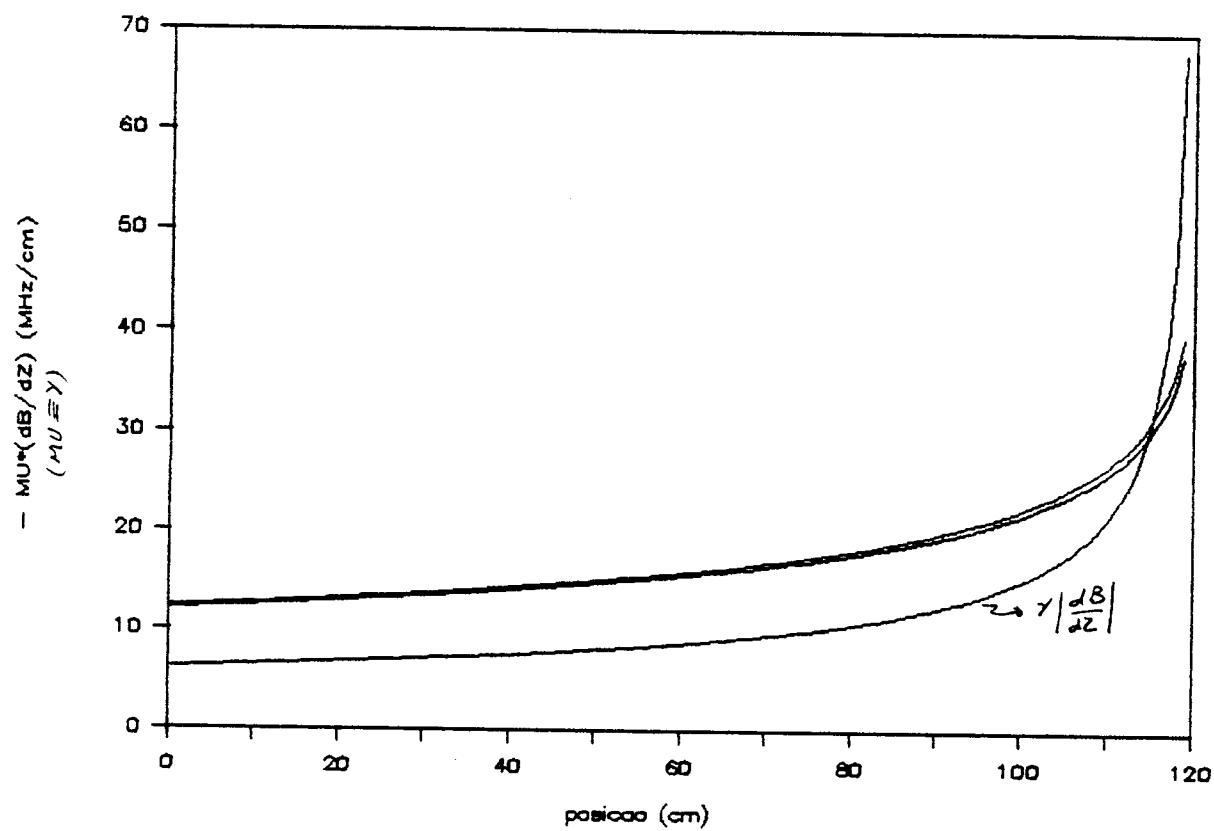


Figura 16. A violação da condição (115) para $\Delta = - 100$ MHz.

DELTA = - 100 MHz

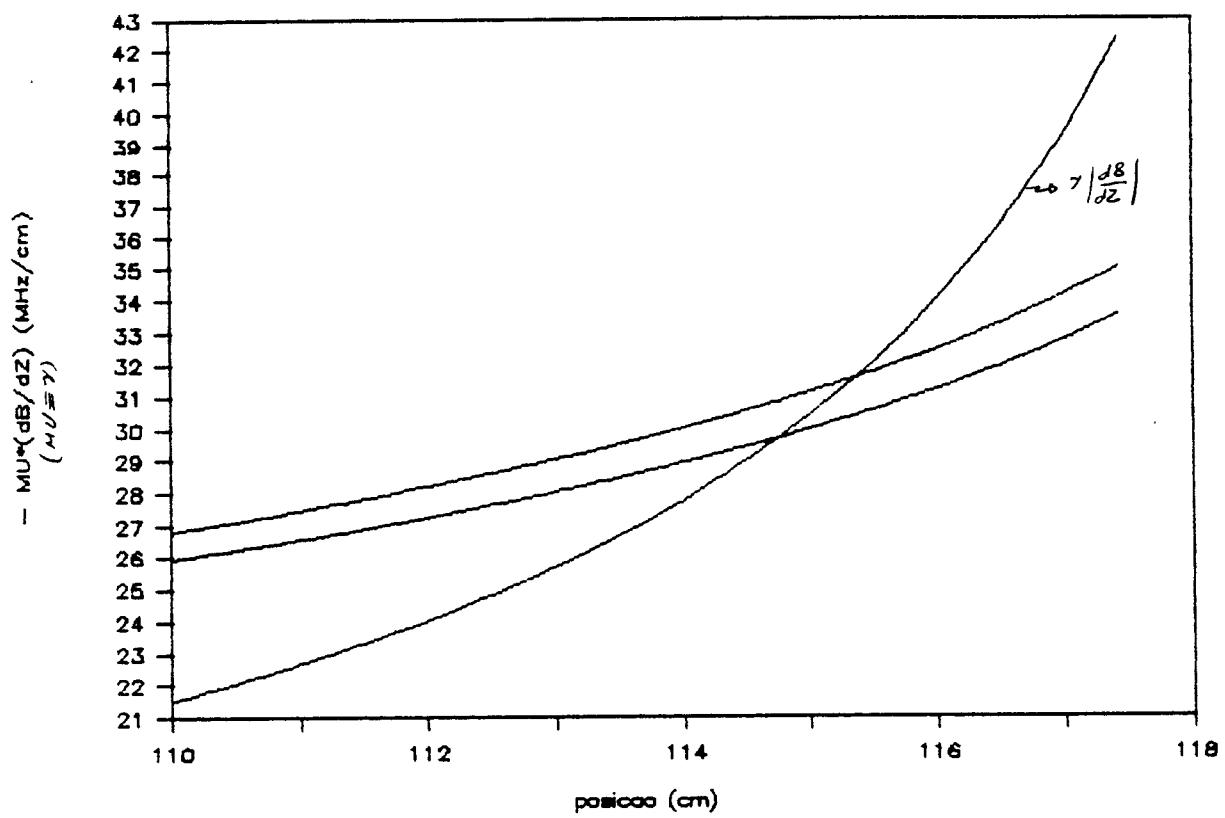


Figura 17. Ampliação da região da saída de ressonância da figura 16.

posição de coordenada Z maior para a saída. A explicação para este fato é a seguinte: só há ressonância enquanto a diferença $[f(Z) - kV(Z)]$ se mantém constante, o que deixa de ocorrer exatamente quando a trajetória $kV(Z)$ começa a se aproximar da curva $f(Z)$ e é nesta ocasião que o átomo sai de ressonância, não propriamente no cruzamento entre $kV(Z)$ e $f(Z)$. Isto pode ser visto na aproximação das curvas $kV(Z)$ e $f(Z)$ por volta de $Z = 115$ cm. A ressonância, propriamente dita, ocorre quando $f(Z) - kV(Z)$ se mantém constante ao longo do eixo Z.

Interessante também é o fato de que existem valores de Δ para os quais o átomo é capaz de parar antes de sair de ressonância. Isto é explicado por (115), onde vemos que se Δ for suficientemente positivo, a desigualdade sempre é satisfeita, dando condições ao átomo de mesmo parar antes de sair de ressonância. A figura 18 ilustra este fato de forma clara, pois, mudando o programa anterior (ver CAMINHO no Apêndice), vemos que o átomo, além de parar, acaba retornando acelerado até sair de ressonância (pois o campo não é apropriado), quando segue em direção à origem com velocidade constante. A figura 19 mostra a mesma situação para duas velocidades iniciais diferentes. Notemos que os átomos entram em ressonância abaixo da curva $f(Z)$ e acabam executando o mesmo movimento quando suas trajetórias coincidem. Diremos mais a respeito desses detalhes adiante. A figura 20 ilustra a saída de ressonância para $\Delta = -400$ MHz. Estão graficadas duas trajetórias diferentes, uma com $V_0 = 1200$ m/s e outra com $V_0 = 900$ m/s. Neste gráfico vemos claramente que (115)

DELTA = + 800 MHz

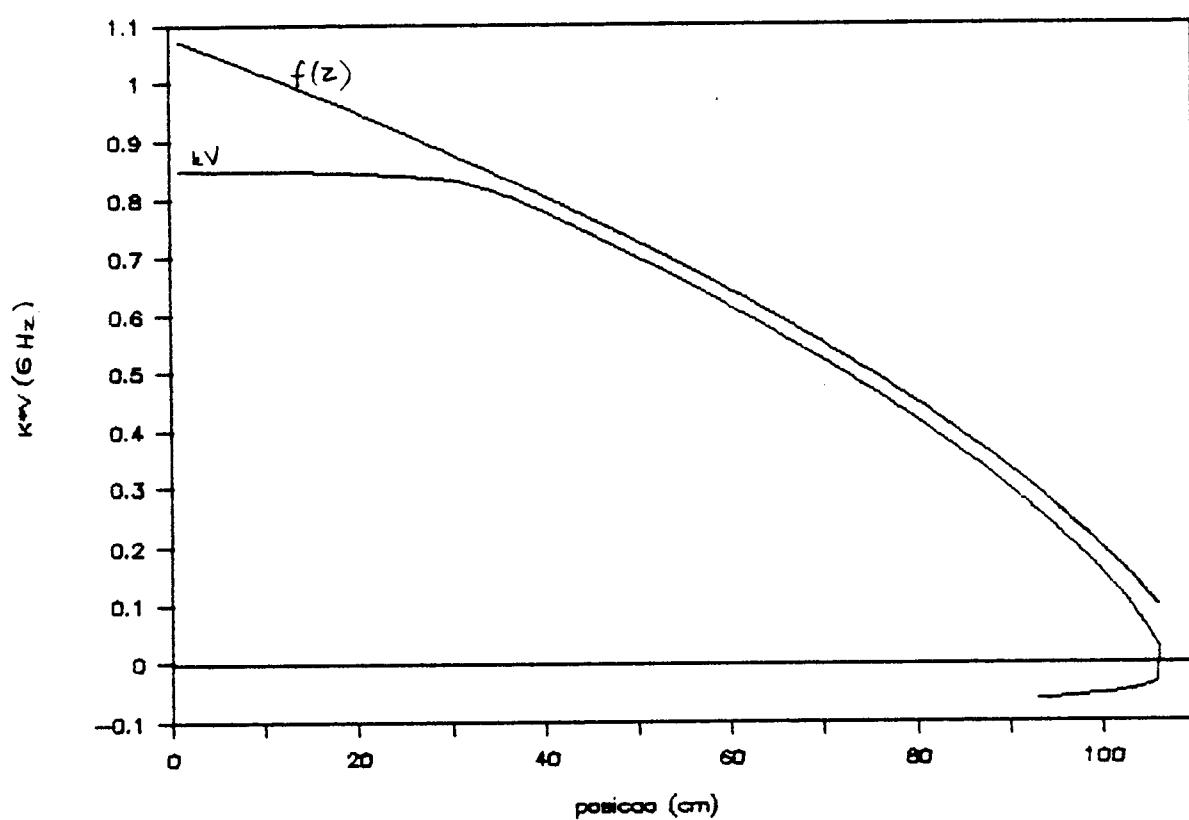


Figura 18. Trajetória gerada para uma velocidade inicial de 500 m/s e $\Delta = + 800$ MHz.

DELTA = + 800 MHz

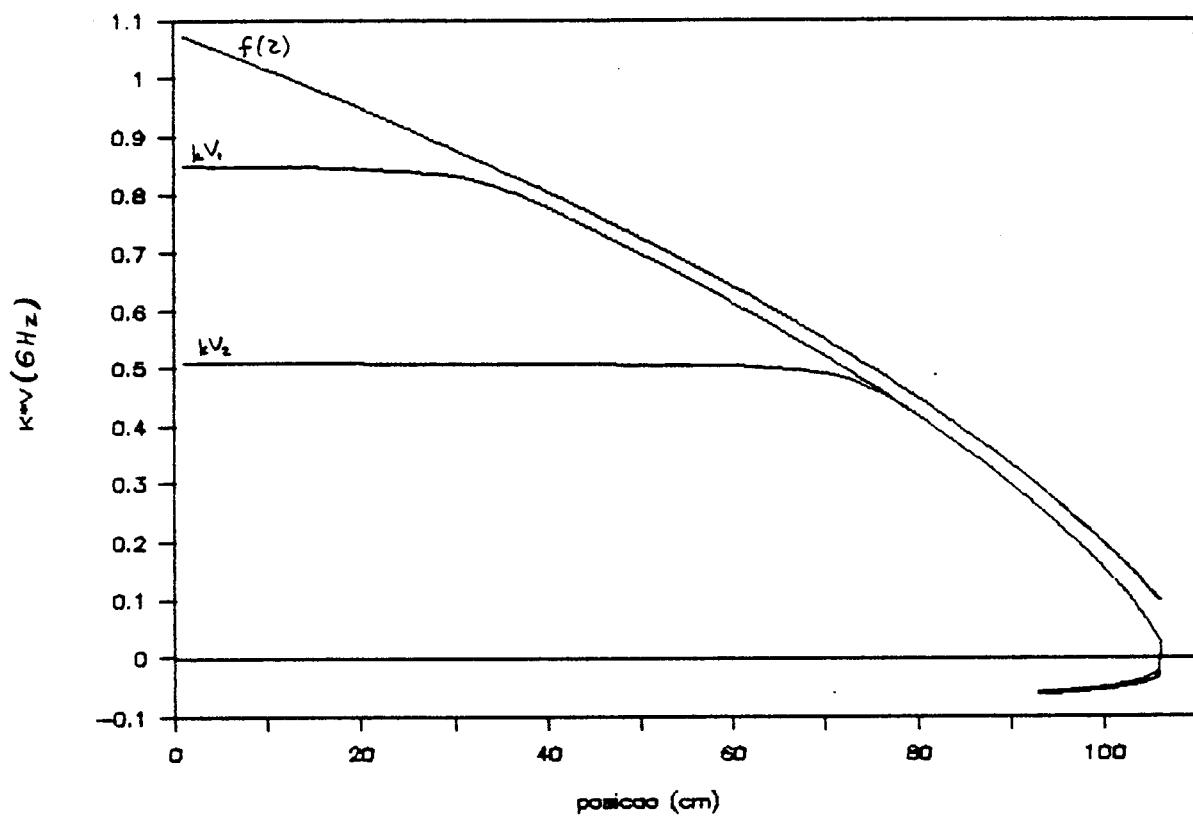


Figura 19. Mesma situação da figura 18 com mais outra trajetória, esta com velocidade inicial de 300 m/s.

DELTA = - 400 MHz

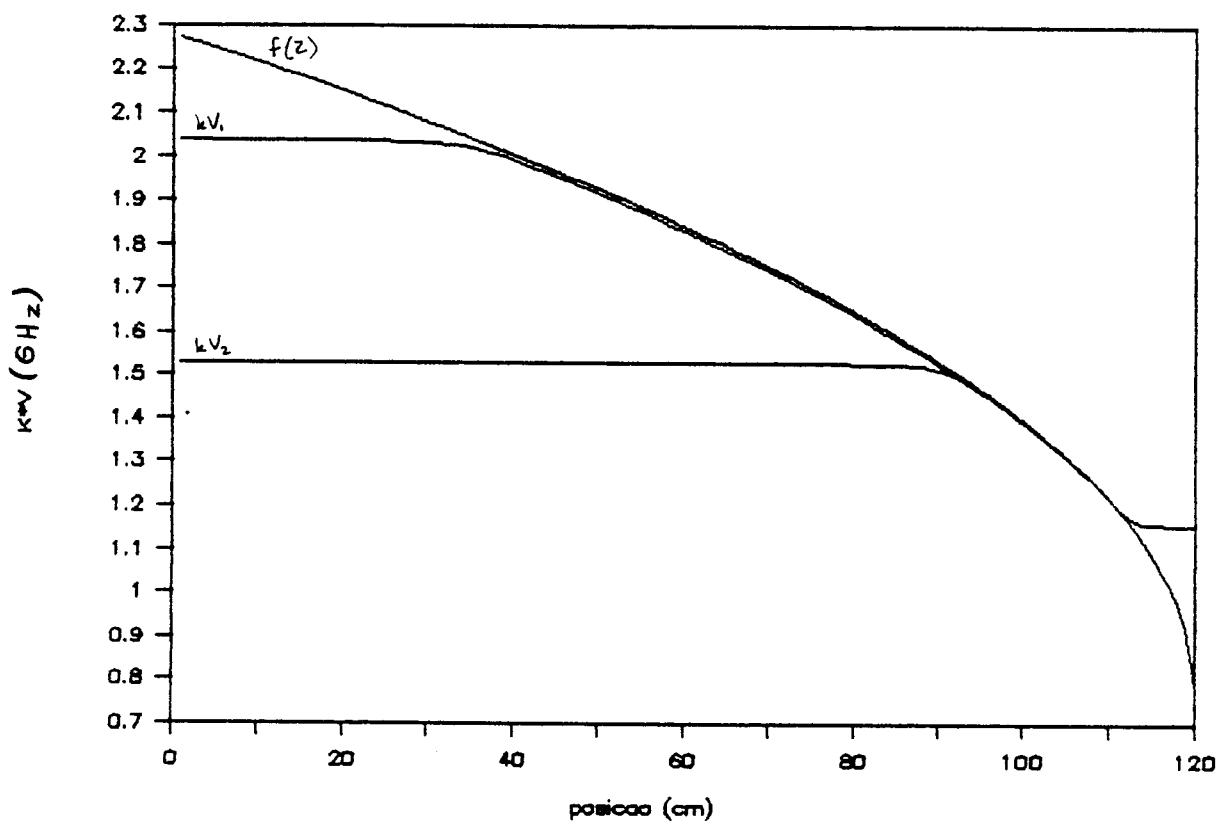


Figura 20. Duas trajetórias diferentes ($V_o = 1200$ m/s e $V_o = 900$ m/s) para $\Delta = - 400$ MHz. O átomo sai de ressonância por volta de $Z = 110$ cm.

é violada muito antes que o átomo pare, para $\Delta = -400$ MHz, que é um valor razoavelmente negativo. Notemos ainda, na figura 20, que ambas as trajetórias, ao cruzarem a curva $f(Z)$, seguem o mesmo caminho, isto é, ambas se superpõem e ambas saem de ressonância no mesmo ponto, pois os átomos entraram no processo antes e terão, naquele ponto, a mesma velocidade.

Com poucas implementações computacionais (ver o programa TRAJREAL no Apêndice), calculamos as trajetórias para o caso em que o campo magnético é o da figura 2, que corresponde ao campo real que temos no laboratório. As figuras 21 e 22 mostram trajetórias para $\Delta = +100$ MHz e $\Delta = -300$ MHz, respectivamente. Mesmo nestes gráficos vemos que a curva $kV(Z)$, durante a ressonância, se mantém abaixo da curva $f(Z)$. Por que não se mantém acima? Por que, ao cruzar $f(Z)$, a curva $kV(Z)$ não mais descreve um átomo ressonante? Consideremos a equação (104). Suponhamos que, durante a ressonância, o campo magnético seja aproximadamente da forma de (109). Na ressonância, a trajetória $kV(Z)$ é muito próxima à curva $f(Z)$. Podemos, então, dizer que o átomo possui uma aceleração praticamente constante enquanto ressonante. Consideremos uma mudança de referencial. Introduzamos o sistema de coordenadas móvel, uniformemente acelerado, com aceleração equivalente àquela implícita na expressão para o campo (109). Sejam Z a posição do centro do pacote de ondas atômico relativa ao sistema em repouso original, Z_0 , a posição da origem do sistema de referência acelerado e Z' a posição atómica neste sistema móvel. Assim

DELTA = + 100 MHz

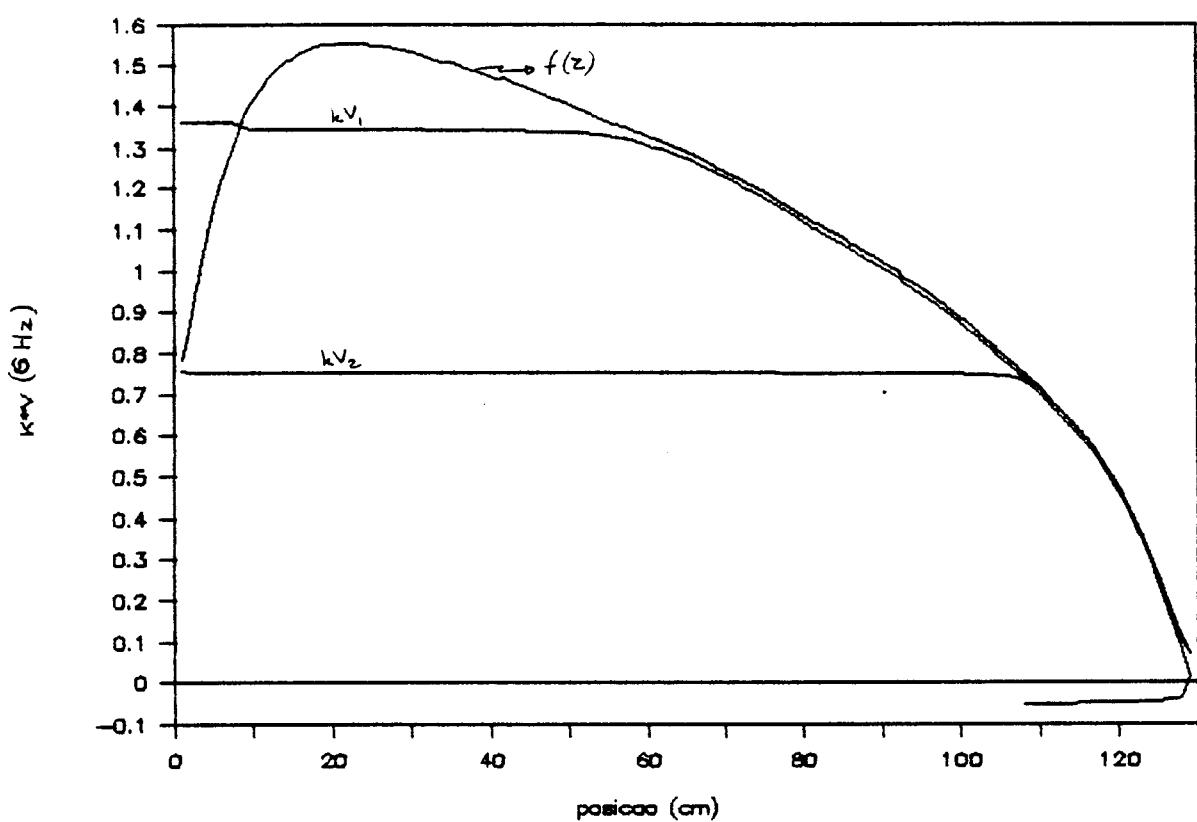


Figura 21. Trajetórias usando o campo magnético real da figura 2 para $\Delta = + 100$ MHz.

DELTA = - 300 MHz

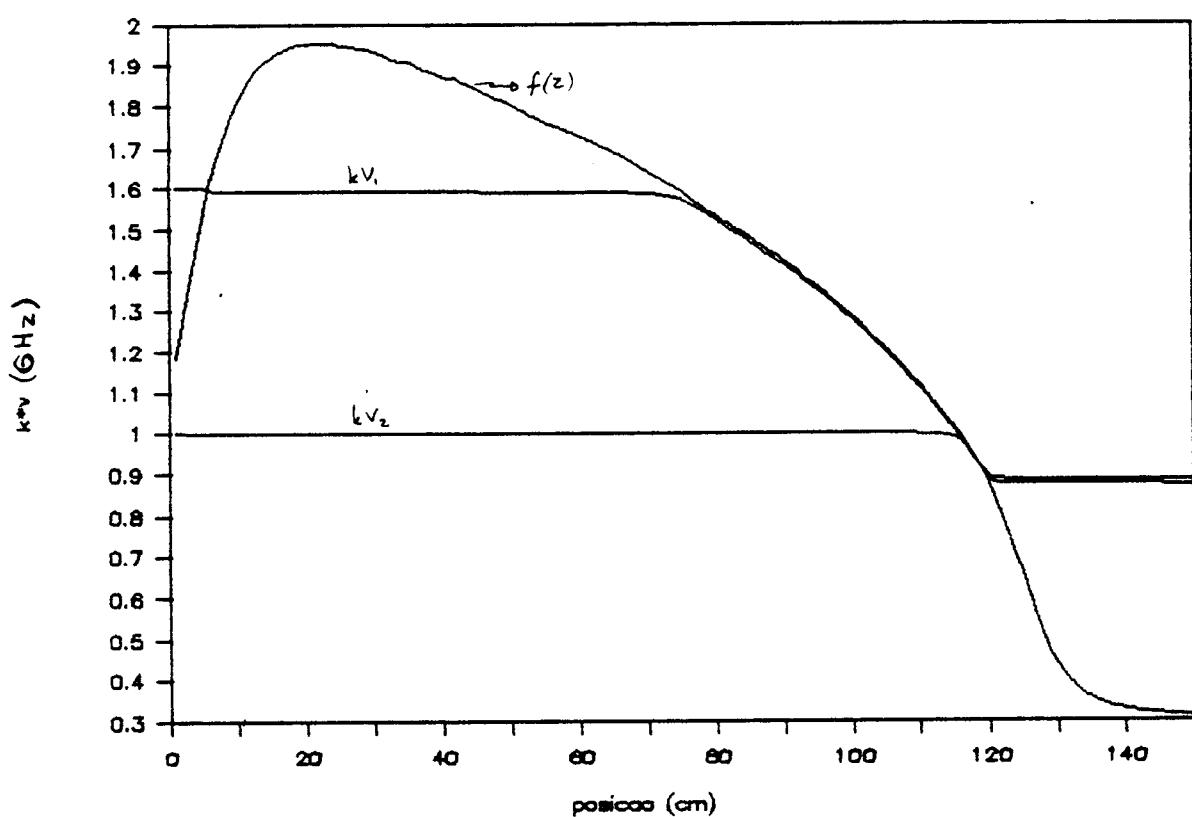


Figura 22. Trajetórias usando o campo magnético real da figura 2 para $\Delta = - 300$ MHz.

$$Z = Z_{o'} + Z'. \quad (116)$$

Desta expressão vemos que $V = dZ/dt$ e definimos $U \equiv dZ'/dt$ como a velocidade do pacote atômico vista no referencial acelerado que possui, em relação ao sistema de referência inicial, a velocidade $dZ_{o'}/dt$. Seja a velocidade do referencial dada por:

$$\frac{dZ_{o'}}{dt} = \frac{\gamma}{k} (B(Z_{o'}) - b_o). \quad (117)$$

Esta última expressão define o movimento do referencial móvel como sendo uniformemente acelerado. Substituindo, em (104), as expressões (116) e (117) com as definições para as velocidades U e V , temos

$$M \frac{dU}{dt} = \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta - \frac{A\Omega^2 \hbar k}{4(\Delta - \gamma b_o + kU + \gamma B(Z_{o'}) - \gamma B(Z_{o'} + Z'))^2 + A^2 + 2\Omega^2} \quad (118)$$

Como na ressonância a trajetória $kV(Z)$ sofre pequenas flutuações em torno de $f(Z)$, podemos aproximar $B(Z_{o'} + Z') \approx B(Z_{o'})$ em (118), o que resulta em

$$M \frac{dU}{dt} = \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta - \frac{A\Omega^2 \hbar k}{4(\Delta - \gamma b_o + kU)^2 + A^2 + 2\Omega^2}. \quad (119)$$

Esta expressão é a equação diferencial que descreve as flutuações do átomo ao longo de sua trajetória ressonante. No regime estacionário, $dU/dt = 0$ e (119) fornece

$$\frac{A\Omega^2 \hbar k}{4(\Delta - \gamma b_0 + kU)^2 + A^2 + 2\Omega^2} = \frac{M\gamma^2 \alpha^2 \beta}{2k^2}. \quad (120)$$

Resolvendo esta expressão para U, temos

$$kU_{\pm} = \gamma b_0 - \Delta \pm \frac{1}{2} \left(\frac{2A\Omega^2 \hbar k^3}{M\gamma^2 \alpha^2 \beta} - A^2 - 2\Omega^2 \right)^{1/2}. \quad (121)$$

Vemos assim que temos duas soluções estacionárias possíveis. Escrevendo $kV = kdZ_0/dt + kU$ e substituindo (121), obtemos, como soluções estacionárias, as trajetórias

$$kV_{\pm} = f(Z) \pm \frac{1}{2} \left(\frac{2A\Omega^2 \hbar k^3}{M\gamma^2 \alpha^2 \beta} - A^2 - 2\Omega^2 \right)^{1/2}, \quad (122)$$

onde vemos que kV_+ segue $f(Z)$ por cima e kV_- a segue por baixo. Qual é estável, kV_+ ou kV_- ? Analisemos pequenos deslocamentos de kV em torno de cada solução estacionária kV_{\pm} . Vejamos isto no sistema móvel. Seja

$$kU = \gamma b_0 - \Delta + \frac{\xi}{2} \left(\frac{2A\Omega^2 \hbar k^3}{M\gamma^2 \alpha^2 \beta} - A^2 - 2\Omega^2 \right)^{1/2}, \quad (123)$$

onde ξ assume qualquer valor real. Para que as expressões (121), (122) e (123) façam sentido, supomos que

$$\frac{\gamma^2 \alpha^2 \beta}{2k^2} \leq a_M, \quad (124)$$

onde a_M está definida em (112). Substituindo (123) em (119), podemos analisar o sinal de dU/dt . Temos

$$M \frac{dU}{dt} = \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta - \frac{A\Omega^2 \hbar k}{\xi^2 \left[\frac{2A\Omega^2 \hbar k^3}{M\gamma^2 \alpha^2 \beta} - A^2 - 2\Omega^2 \right] + A^2 + 2\Omega^2} \quad (125)$$

Quando ξ assume os valores ± 1 , (123) torna-se (121), isto é, a velocidade U assume seus valores estacionários. Assim, consideremos ξ^2 muito próximo de 1 escrevendo $\xi^2 = 1 + \delta$, onde $|\delta| \ll 1$. Fazendo esta substituição em (125) e notando a definição de a_M em (112), temos

$$M \frac{dU}{dt} = \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta - \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta \frac{1}{1 + \delta \left[1 - \frac{\gamma^2 \alpha^2 \beta}{2k^2 a_M} \right]} \quad (126)$$

Para $|\delta| \ll 1$, expandimos o último termo de (126) obtendo

$$M \frac{dU}{dt} = \delta \left(1 - \frac{\gamma^2 \alpha^2 \beta}{2k^2 a_M} \right) \frac{M\gamma^2}{2k^2} \alpha^2 \beta. \quad (127)$$

Em (127) notamos que, como (124) é suposta válida, o sinal de dU/dt é ditado pelo sinal de δ . Se tivermos ξ^2 aproximando-se de 1 através de valores maiores do que 1, δ será positivo e dU/dt será maior do que zero. Similarmente, dU/dt será negativo quando ξ^2 estiver se aproximando de 1 pela esquerda. Em outras palavras, se a trajetória ressonante estiver abaixo de kV_- , então $\xi < -1$ e $\xi^2 > 1$, donde vemos que $dU/dt > 0$; isto significa que U irá aumentar até atingir o valor estacionário U_- . Caso a trajetória estiver pouco acima de kV_+ , teremos também $dU/dt > 0$ e o átomo

continuará aumentando sua velocidade U para valores cada vez maiores do que U_+ . Se, por outro lado, o átomo tiver uma trajetória kV entre kV_- e kV_+ , teremos $dU/dt < 0$ e, mais cedo ou mais tarde, o átomo atingirá a velocidade estacionária U_- , permanecendo com a trajetória kV_- . Logo, é estável a solução kV_- que fica abaixo de $f(Z)$, como os resultados das simulações já previam.

III.2. SIMULAÇÃO DE UM EXPERIMENTO DE DESACELERAÇÃO: OBSERVAÇÃO DA FLUORESCÊNCIA AO LONGO DO PROCESSO

Em nosso laboratório foi realizado um experimento para a verificação da desaceleração a laser de um feixe atômico através da observação da fluorescência ao longo do caminho de desaceleração⁽¹⁶⁾. Esta técnica tem a vantagem de usar apenas um laser para, além da desaceleração, também a observação dos átomos lentos. Nesta seção, faremos uma simulação numérica deste tipo de observação e usaremos a mesma metodologia computacional da seção anterior, levando em conta o caráter aleatório da emissão espontânea. A implementação feita começa a analisar o sistema com a participação de vários átomos e da geração de números aleatórios para simular a emissão espontânea. Salientamos que o estudo feito na seção precedente não contém flutuações geradas pela emissão espontânea, o que influí bastante na distribuição final de velocidades. Os detalhes serão apresentados ao longo da exposição que segue.

Como foi dito no capítulo II, o feixe atômico a ser desacelerado é constituído por átomos cujos pacotes de ondas são independentes. Estudar as propriedades de um feixe proveniente de uma fonte que fornece vários átomos simultaneamente, ou estudar cada um dos átomos que compõem o feixe isoladamente e depois somar as contribuições de cada um ao comportamento global, são

procedimentos que conduzirão às mesmas conclusões. Coerentemente com o capítulo II, aqui adotaremos a abordagem que consiste em analisar o feixe em átomos individuais, estudar o comportamento de cada um deles e, então, juntar cada uma das contribuições.

Para sermos realistas em nosso modelo, analisemos as condições nas quais o experimento foi realizado. O aparato experimental consiste de uma fonte efusiva que produz um feixe de átomos de sódio a uma temperatura da ordem de 1000 K. Após deixar a fonte, o feixe passa através de um "skimmer" e é colimado. Então, entra em um solenóide que tem o campo magnético axial com o perfil mostrado na figura 2. Os átomos no feixe, ao entrarem no solenóide, possuem velocidades que obedecem à seguinte distribuição⁽¹⁷⁾:

$$\frac{dN}{dv} = I_0 v^3 e^{-v^2/\alpha^2}, \quad (128)$$

com

$$\alpha = \left[\frac{2k_B T}{M} \right]^{1/2}, \quad (129)$$

onde I_0 é uma constante, k_B é a constante de Boltzman e T é a temperatura (1000 K).

A desaceleração de um feixe atômico por meio de um laser contra-propagante é baseada no fato de que cada fóton absorvido transfere um quantum de momentum $\hbar\vec{k}$ ao átomo, onde \vec{k} é o vetor de

onda do feixe laser. Por outro lado, uma vez que a emissão espontânea ocorre em uma direção aleatória, não efetua transferência líquida de momentum ao átomo após um grande número de emissões. O que a emissão espontânea introduz são flutuações no movimento atômico. A força (104), como vimos no capítulo II, não flutua, é apenas uma força média suave. Vamos, então, introduzir as flutuações da seguinte forma: como $\hbar k/M \approx 3 \text{ cm/s}$ para o sódio, ao integrarmos (104) pondo $dV/dt = VdV/dZ$, como fizemos na seção anterior via método Runge-Kutta (ver seção III.1), devemos, a cada 3 cm/s de variação para a velocidade do átomo, parar a integração, gerar aleatoriamente uma direção (θ, ϕ) do espaço, permitir que a emissão transmita $\hbar k$ nesta direção e recomeçar a integração na mesma posição Z em que havíamos parado, mas com a velocidade $V(Z)$ trocada por $V(Z)-3\cos\theta$, ou seja, a cada emissão, o átomo muda seu movimento longitudinal segundo a componente de momentum nesta direção que o fóton transmite ao ser emitido. A emissão espontânea tem um efeito muito grande na distribuição final de velocidades que devemos analisar. Com isto, poderemos contar o número de fôtons emitidos ao longo de cada centímetro pelos átomos do feixe. Levantaremos, assim, as curvas de fluorescência ao longo do caminho de desaceleração. Estas curvas serão consequências da desaceleração atômica. Assim, comparando-as com as obtidas experimentalmente, demonstraremos que estas últimas verificam a desaceleração e este é o principal objetivo desta seção.

Consideremos a fluorescência de um único átomo. Devemos

gerar sua velocidade inicial de tal forma que, se repetirmos a geração muitas vezes, tenhamos uma distribuição de velocidades dada por (128). Desta maneira estaremos aptos a realizar a contagem de fôtons para um átomo de cada vez. Somando as contribuições de todos os átomos, teremos a fluorescência do feixe. Ressaltamos, aqui, o fato de ser necessário o procedimento de analisar átomo por átomo, pois estamos usando uma equação de movimento (expressão (104)) que diz respeito a um átomo apenas e não se acopla com as equações correspondentes aos outros átomos, pois o feixe é composto por pacotes independentes. Com relação à geração da velocidade inicial para o átomo em questão, poderíamos simplesmente escolhê-la, mas, como temos em vista a introdução, no processo desacelerador, do feixe atômico, devemos tomar ao acaso a velocidade inicial segundo a distribuição (128), que podemos tratar como uma densidade de probabilidades.

Normalmente, os computadores possuem funções geradoras de números pseudo-aleatórios com valores entre 0 e 1. Uma sequência razoavelmente grande destes números distribui-se quase que uniformemente dentro do intervalo [0,1]. A uniformidade é tanto maior quanto maior a quantidade de números gerados. Sabemos, da seção III.1, que cada átomo ressonante não pode ter sua velocidade inicial maior do que um valor v_m dado por:

$$kv_m = \gamma B_m - \Delta + \frac{\varepsilon_m}{2} (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}, \quad (130)$$

onde B_m e ε_m são os valores de $B(Z)$ e $\varepsilon(Z)$, respectivamente,

calculados no ponto que maximiza (114). Para o algoritmo que estamos construindo, devemos encontrar um valor que seja limitante superior da sequência aleatória de velocidades que pretendemos gerar. Sabemos que $\varepsilon(Z)$ assume o valor máximo $\varepsilon = +1$ e seja B_s o valor máximo de $B(Z)$. Assim, o limitante superior para as velocidades geradas, definiremos como:

$$kV_s = \gamma B_s - \Delta + \frac{1}{2} (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}. \quad (131)$$

Átomos com velocidades superiores não contribuirão ao processo. Basta, então, gerar um número pseudo-aleatório entre 0 e 1 e multiplicá-lo por V_s para termos uma velocidade inicial que permite ao átomo tornar-se ressonante. Até este estágio, porém, ainda não introduzimos a densidade (128), isto é, se gerarmos, aleatoriamente, velocidades entre 0 e V_s , como descrevemos acima, e lançarmos os resultados em um histograma, teremos o mesmo número de átomos com cada velocidade inicial, se o número de átomos for suficientemente grande.

Suponhamos, agora, a título de exemplo, que queiramos gerar velocidades que assumam apenas dois valores, v_1 e v_2 , com probabilidades respectivas p_1 e p_2 . Sabemos que $p_1 + p_2 = 1$, já que apenas dois valores são possíveis. Como p_1 e p_2 são positivas (pois são probabilidades), o intervalo $[0,1]$ pode ser escrito como $[0, p_1] \cup [p_1, 1]$, isto é, a união entre $[0, p_1]$ e $[p_1, 1]$, cujos comprimentos são, respectivamente, $p_1 - 0 = p_1$ e $1 - p_1 = p_2$. Ora, se gerarmos um número aleatoriamente entre 0 e 1 e

ocorrer em $[0, p_1]$, atribuiremos, a este evento, a ocorrência da velocidade v_1 e, se o número ocorrer em $[p_1, 1]$, atribuiremos, a este evento, a velocidade v_2 . Assim, se gerarmos, desta forma, uma sequência de N velocidades (com N suficientemente grande), dada a uniformidade da distribuição de números aleatórios entre 0 e 1, teremos cerca de Np_1 valores v_1 e cerca de Np_2 valores v_2 . Geramos, assim, uma sequência de velocidades segundo a distribuição definida pelas probabilidades p_1 e p_2 .

Retornando ao problema de gerarmos uma velocidade inicial entre 0 e v_s , segundo a distribuição (128), devemos, à luz das idéias envolvidas no exemplo acima, discretizar os valores das velocidades possíveis entre 0 e v_s . Façamos a seguinte discretização: dividamos o intervalo $[0, v_s]$ em 100 partes iguais. Sejam, pois, $v_1 \equiv (v_s/100)$, $v_2 \equiv 2(v_s/100)$, ..., $v_i \equiv i(v_s/100)$, ..., $v_{100} \equiv v_s$. Devemos atribuir, a cada valor v_i ($i=1, \dots, 100$), a probabilidade p_i , que deverá ser proporcional a $(dN/dV)_i (v_s/100)$, onde $(dN/dV)_i$ é o valor de dN/dV , dado em (128), calculado para v_i . Assim, independentemente da constante I_0 que aparece em (128), p_i pode ser escrita como:

$$p_i = \frac{\left[\frac{dN}{dV} \right]_i}{\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{dN}{dV} \right]_k}, \quad (i=1, \dots, 100). \quad (132)$$

Feito isso, para gerarmos a velocidade inicial segundo (132), basta gerarmos um número aleatório entre 0 e 1, encontrarmos a

que intervalo $[p_i, p_{i+1})$ (onde $i=0, \dots, 99$ e $p_0 \equiv 0$) este número pertence e atribuirmos, a este evento, a ocorrência da velocidade v_i .

Para uma dada velocidade inicial, acompanhemos o átomo ao longo do caminho de desaceleração. Sabemos que o campo magnético do laboratório possui um comprimento de cerca de 150 cm. Ao integrarmos (104), devemos, em princípio, fazer Z variar de 0 a 150 cm, mas, como vimos na seção III.1, para valores de Δ suficientemente positivos, os átomos ressonantes param ao atingirem uma certa posição $Z_c < 150$ cm e retornam a partir daí. Sendo assim, em $Z = Z_c$, a curva dV/dZ possui uma singularidade, pois a força (104), que chamaremos F , escreve-se $F = MV(dV/dZ)$ e, portanto, $dV/dZ = F/(MV)$ é divergente no ponto em que $V = 0$. Logo, a variável de integração Z não é adequada, pois próximo ao ponto de retorno, não podemos escolher um incremento para Z arbitrariamente, já que existe um limitante superior para o conjunto dos valores que Z assume quando o átomo retorna. A solução para este problema é usar, como variável de integração, o tempo t , que assume todos os valores reais, isto é, assume valores cujo conjunto é ilimitado e, portanto, sempre podemos usar incrementos de t positivos.

O que devemos definir, agora, é a partição que usaremos a fim de efetuarmos a integração de (104). Podemos, em princípio, escolher um valor de tempo, t_F , suficientemente grande e subdividir o intervalo $[0, t_F]$ (onde supomos que o movimento do

átomo começa no tempo $t = 0$) em pequenos segmentos de comprimentos Δt , todos iguais. O inconveniente deste procedimento é que, uma vez que a velocidade inicial será gerada quase que aleatoriamente (pois segue a distribuição (132)), poderia ocorrer que o valor t_f escolhido fosse insuficiente para que o átomo atingisse o ponto em que sai de ressonância ou retorna, no caso de uma velocidade inicial muito baixa, ou poderia ocorrer que o valor t_f fosse demasiado grande, de modo que o átomo, ao sair de ressonância, ultrapassasse a distância de 150 cm da origem, onde não temos interesse. Uma solução simples para este problema seria integrar até que o átomo chegasse ao final do solenóide, na posição 150 cm, ou que, ao retornar, atingisse novamente a origem e, então, não precisaríamos fixar o valor t_f . Este procedimento funciona apenas para os casos em que Δ é negativo o bastante para que o átomo saia de ressonância. Nos casos em que Δ é suficientemente positivo, os átomos retornam com velocidades finais extremamente baixas e, se esperássemos que o átomo atingisse novamente a origem, perderíamos muito tempo. Poderíamos, sim, quando Δ é muito positivo, integrar até que o átomo atingisse o repouso, mas, como estamos interessados na contagem dos fôtons em cada centímetro do caminho de desaceleração, estariamos desperdiçando os fôtons emitidos durante o retorno do átomo. Assim, quando há retorno, deveríamos integrar até que a velocidade atingisse um valor constante, que corresponde à saída de ressonância do átomo. Como, da expressão (104), vemos que, rigorosamente, sempre há aceleração, embora possa ser desprezível, fica difícil definir quando a velocidade

varia suficientemente pouco. Por estas razões todas, utilizaremos, não uma partição regular, com Δt sempre o mesmo para cada instante, mas uma partição irregular que garanta ao átomo nunca percorrer uma distância diferente de 150 cm. Em outras palavras, faremos a integração de forma que o átomo percorra 150 cm, independentemente de seu deslocamento, isto é, se o átomo deslocar-se até a posição 90 cm, por exemplo, antes de parar, retornando a partir daí, então continuaremos a integração até que o átomo tenha retornado 60 cm a partir do ponto de retorno, completando, assim, a distância (e não o deslocamento) de 150 cm.

Seja N o número de incrementos envolvidos na partição que levará o átomo a percorrer a distância de 150 cm. Para cada passo da integração, definamos o i -ésimo incremento Δt_i como:

$$\Delta t_i = \frac{150}{N|V_i|}, \quad (i=1, \dots, N), \quad (133)$$

onde V_i é a i -ésima velocidade obtida na integração. Como, em cada passo, o átomo percorre a distância $|V_i|\Delta t_i$, (133) garante que a distância total percorrida pelo átomo seja 150 cm:

$$\sum_{i=1}^N |V_i| \Delta t_i = 150. \quad (134)$$

A dificuldade em (133) ocorre quando $V_i = 0$, mas isto é facilmente resolvido com um comando condicional que utiliza o

valor de Δt_{i-1} no lugar de Δt_i caso ocorra $v_i = 0$.

Resta-nos, agora, dimensionar N para que tenhamos variações na velocidade sempre menores do que 3 cm/s, já que, a cada variação destas, corresponde a emissão de um fóton. O que queremos, portanto, é que $|dv| \leq 3$ cm/s. Como $|dv| = |a|dt$, onde a é a aceleração dada em (104), para dt como em (133), temos $|dv| = 150|a|/(N|v|)$ e, como $|dv| \leq 3$, $N \geq 150|a|/(3|v|)$. Há circunstâncias em que $|v| \rightarrow 0$ e, portanto, não poderemos encontrar N finito que garanta $|dv| \leq 3$ cm/s em qualquer situação. Assim, devemos escolher N tão grande quanto nos permitir as limitações do computador utilizado e do tempo de que dispomos. Escolhendo $N = 600000$, teremos $|v| \geq 150|a|/1800000$ para que $|dv| \leq 3$ cm/s. Na ressonância, temos $|a| \approx a_M$, que é da ordem de 10^8 cm/s² (ver seção III.1). Com este valor, $|v| \geq 100$ m/s. Assim, sempre que a velocidade se tornar da ordem de 100 m/s ou menor, não estaremos contando exatamente o número de fótons, pois $|dv| > 3$ cm/s.

Para vários átomos, basta que repitamos o procedimento acima várias vezes e teremos uma distribuição inicial regida pela densidade (128). O algoritmo que descrevemos acima tem o fluxograma da figura 23. O campo magnético real entra como um arquivo de valores medidos a cada centímetro, sendo, depois, interpolados linearmente. A figura 24 mostra a fluorescência de um só átomo para um "detuning" de 100 MHz. Neste gráfico, o primeiro aspecto que notamos é o crescimento com Z . Como temos

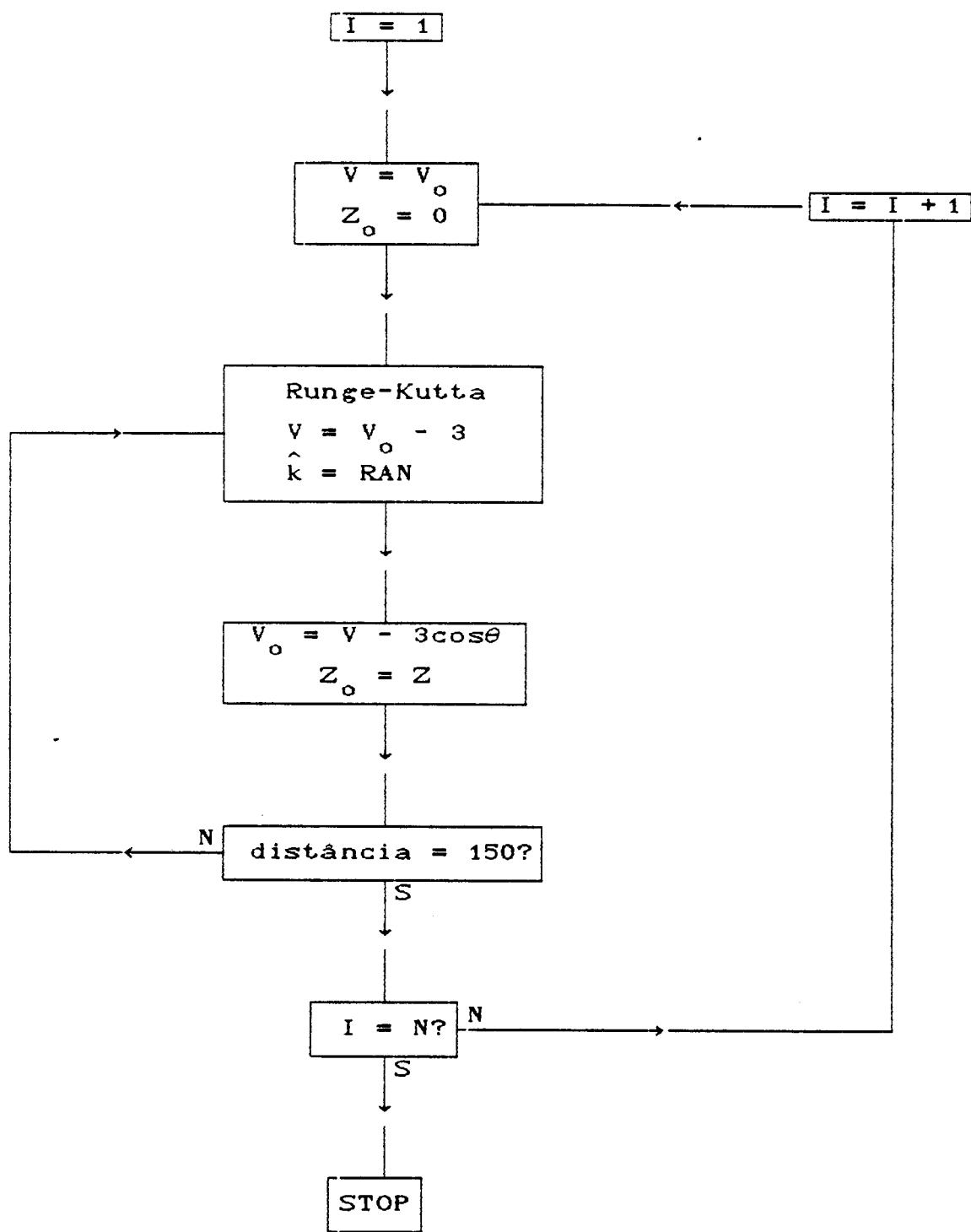


Figura 23. Fluxograma para que obtenhamos a fluorescência de um feixe com N átomos. Para o caso de um único átomo, o mesmo esquema é usado, só que com $N = 1$.

FLUORESCENCIA DE UM ATOMO

DELTA = + 100 MHz

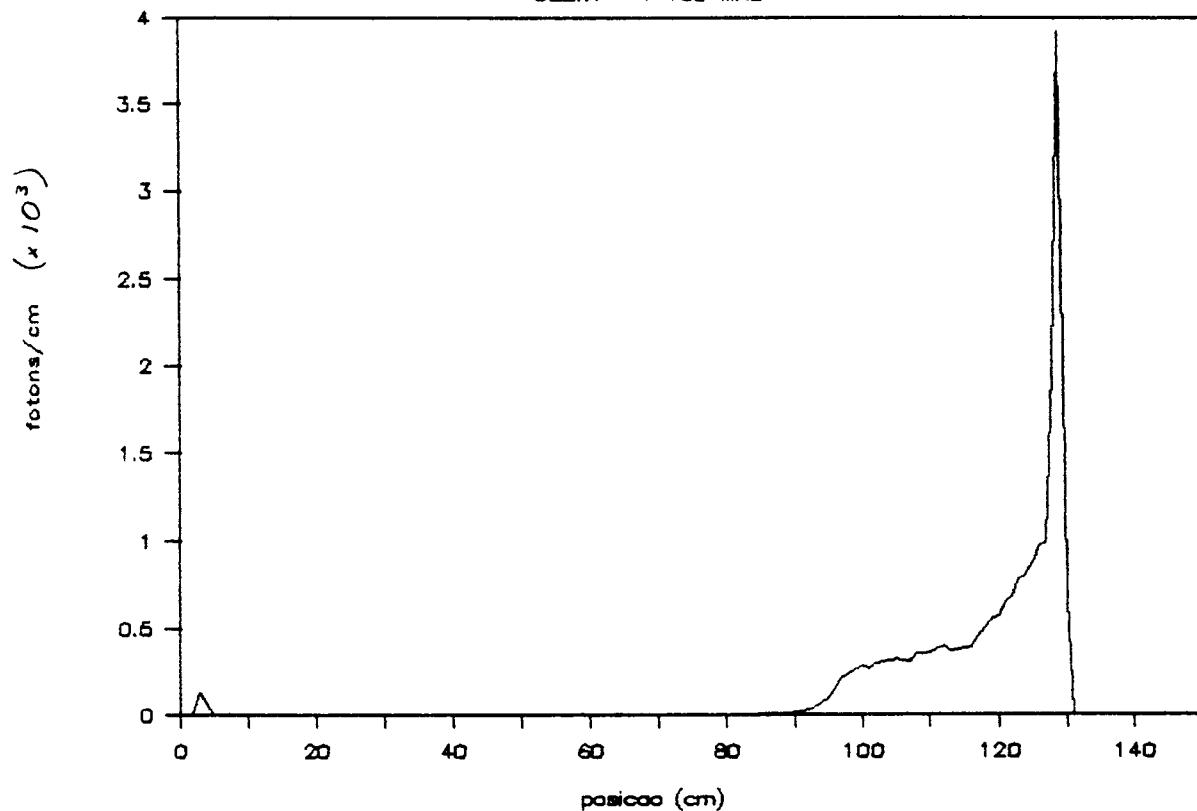


Figura 24. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando apenas um átomo é desacelerado. Neste caso, a velocidade inicial gerada foi de 564.7 m/s e a velocidade final, após o processo, foi de - 5.37 m/s.

apenas um átomo, este crescimento é devido à desaceleração maior sofrida ao longo das regiões onde, para acompanhar o campo, o átomo deve mudar sua velocidade a uma taxa elevada, proporcional ao gradiente dB/dZ . Este é o único fator que implica no aumento da fluorescência ao longo da posição Z , quando um único átomo está no processo. Outro detalhe que notamos é a queda abrupta da fluorescência, que indica a cessação do acompanhamento do campo pelo átomo ou sua parada, ou seja, a saída de ressonância. Também vemos, para posições próximas à origem, que não há um crescimento na fluorescência até determinado ponto, pois o átomo só entra em ressonância a partir daí. O pequeno pico de fluorescência que vemos entre 0 e 10 cm é devido, não ao acompanhamento adiabático do campo pelo átomo, mas ao fato de que nesta região o campo magnético sofre um aumento até seu valor máximo, como mostra a figura 2, que torna, em uma determinada posição desta região, o denominador da força (104) mínimo, proporcionando, ao redor desta posição, um espalhamento de fôtons de curta duração, pois o átomo escapa de ressonância quando o campo se torna demasiadamente intenso. Esta figura, portanto, reflete as conclusões obtidas na seção III.1.

As figuras 25-33 mostram os perfis de fluorescência para vários valores do "detuning" Δ , obtidos para 50 átomos. A figura 34 apresenta uma comparação entre alguns destes gráficos. Em todas estas figuras, notamos o crescimento da fluorescência ao longo de Z e sua queda a partir de determinado ponto. Como já enfatizamos, estes gráficos foram obtidos através da soma das

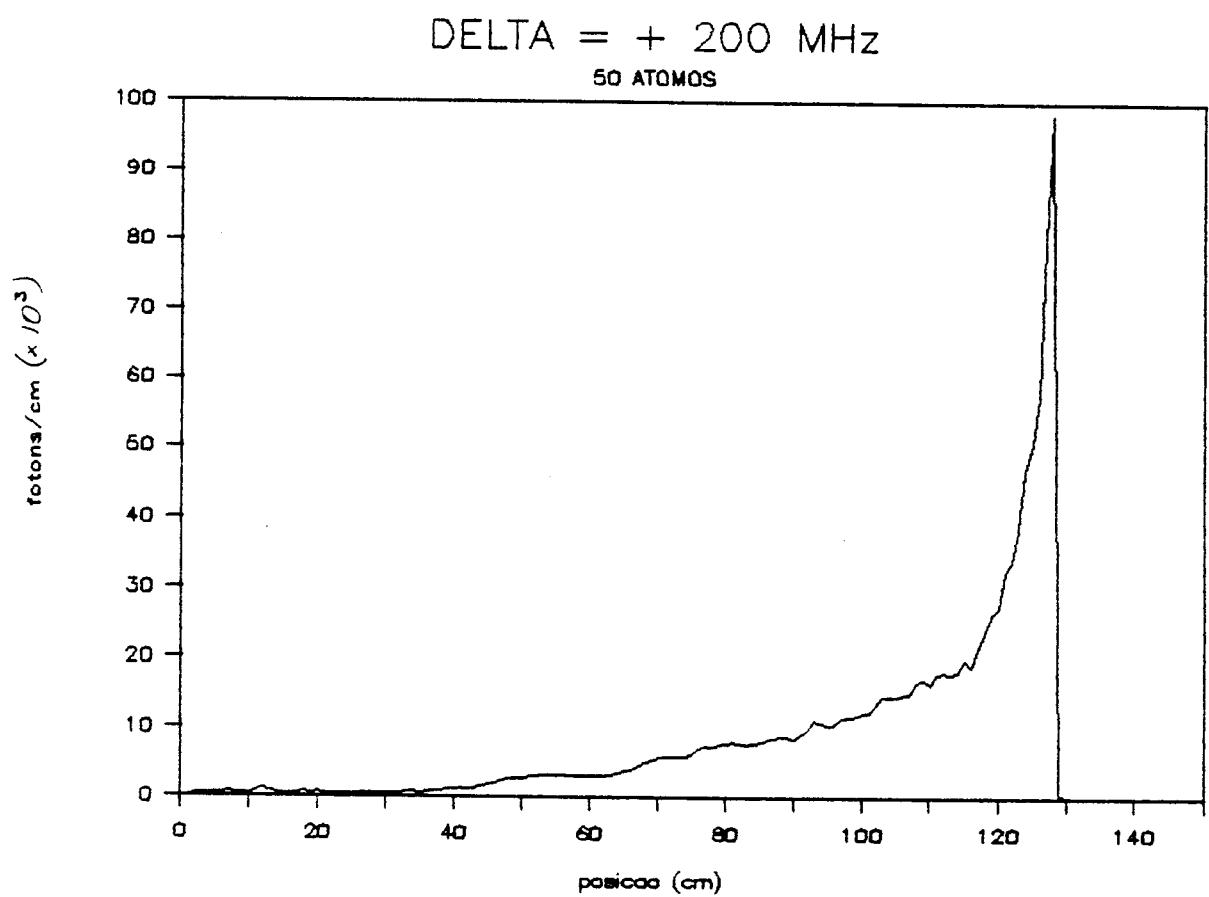


Figura 25. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 200$ MHz.

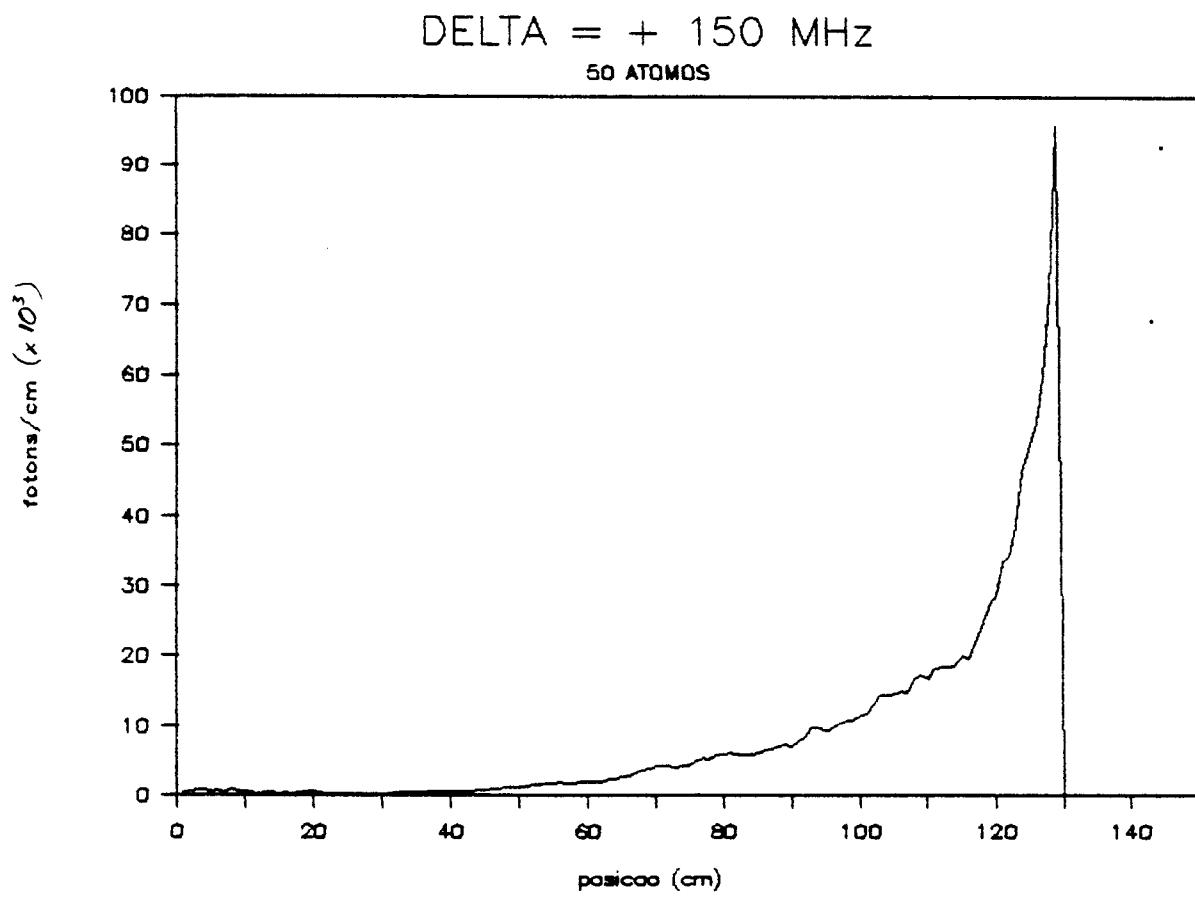


Figura 26. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 150$ MHz.

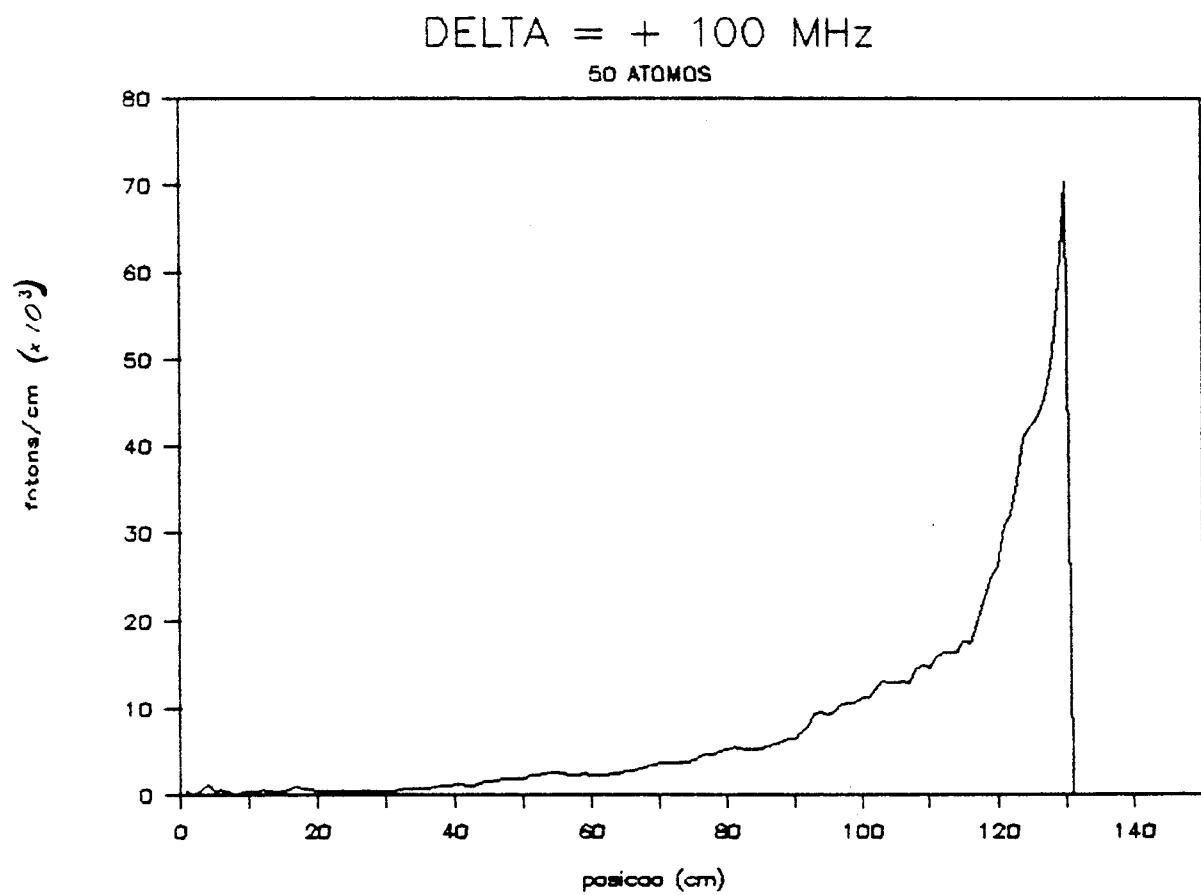


Figura 27. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 100 \text{ MHz}$.

DELTA = + 50 MHz
50 ATOMOS

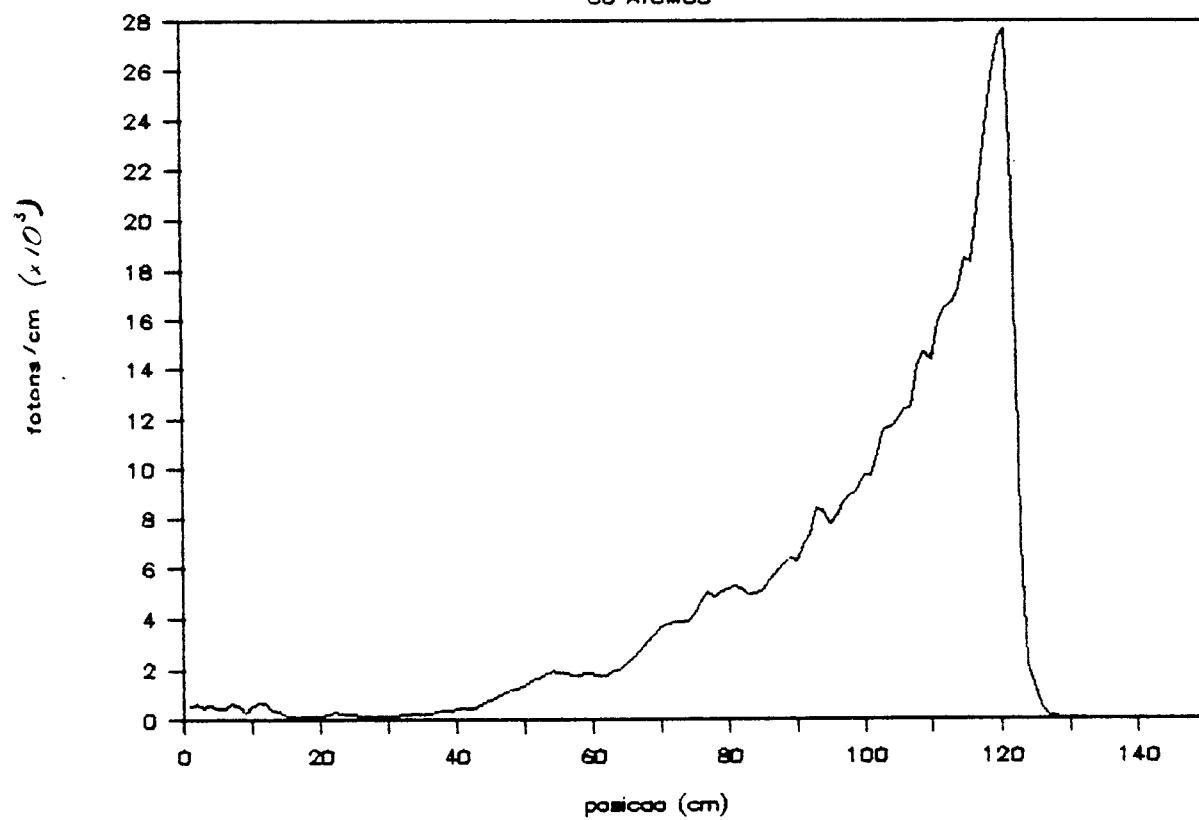


Figura 28. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = + 50$ MHz.

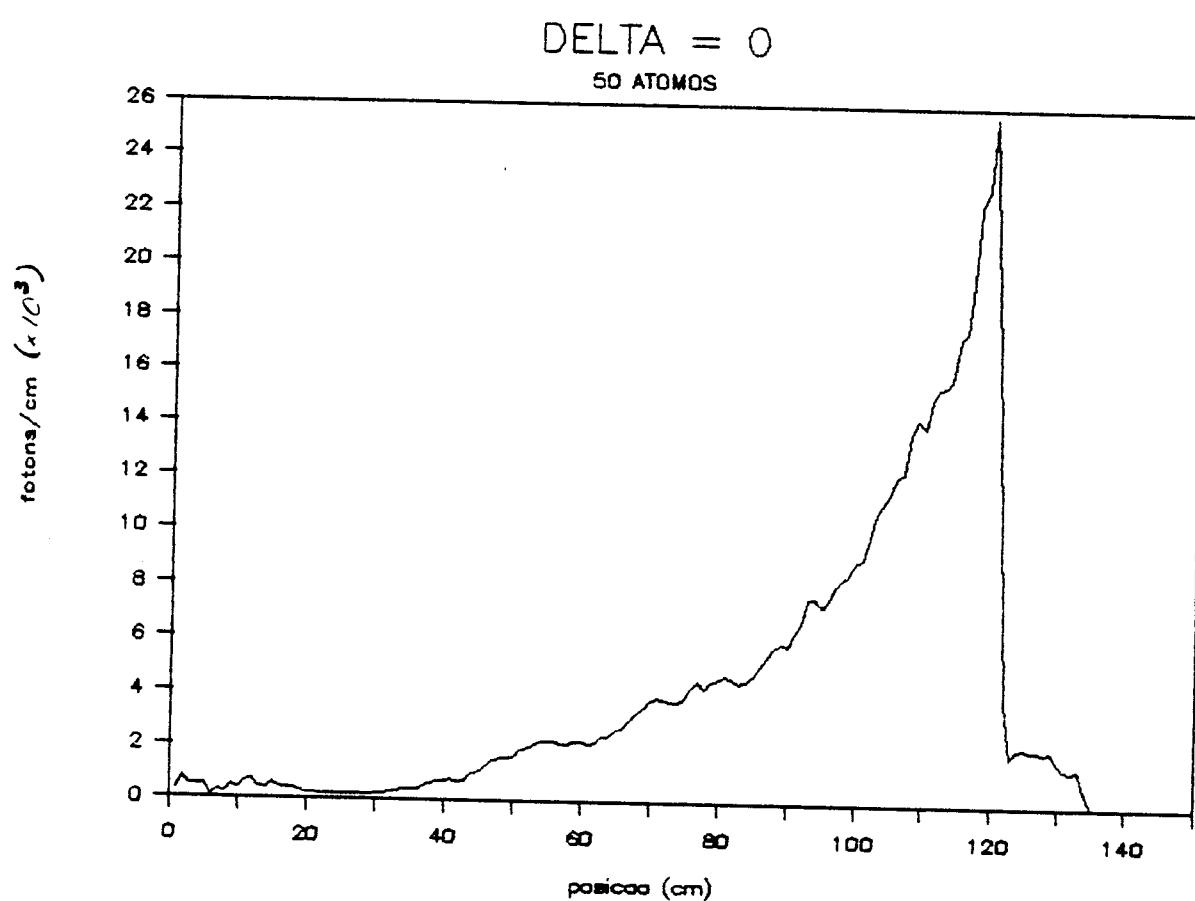


Figura 29. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = 0$.

DELTA = - 50 MHz

50 ATOMOS

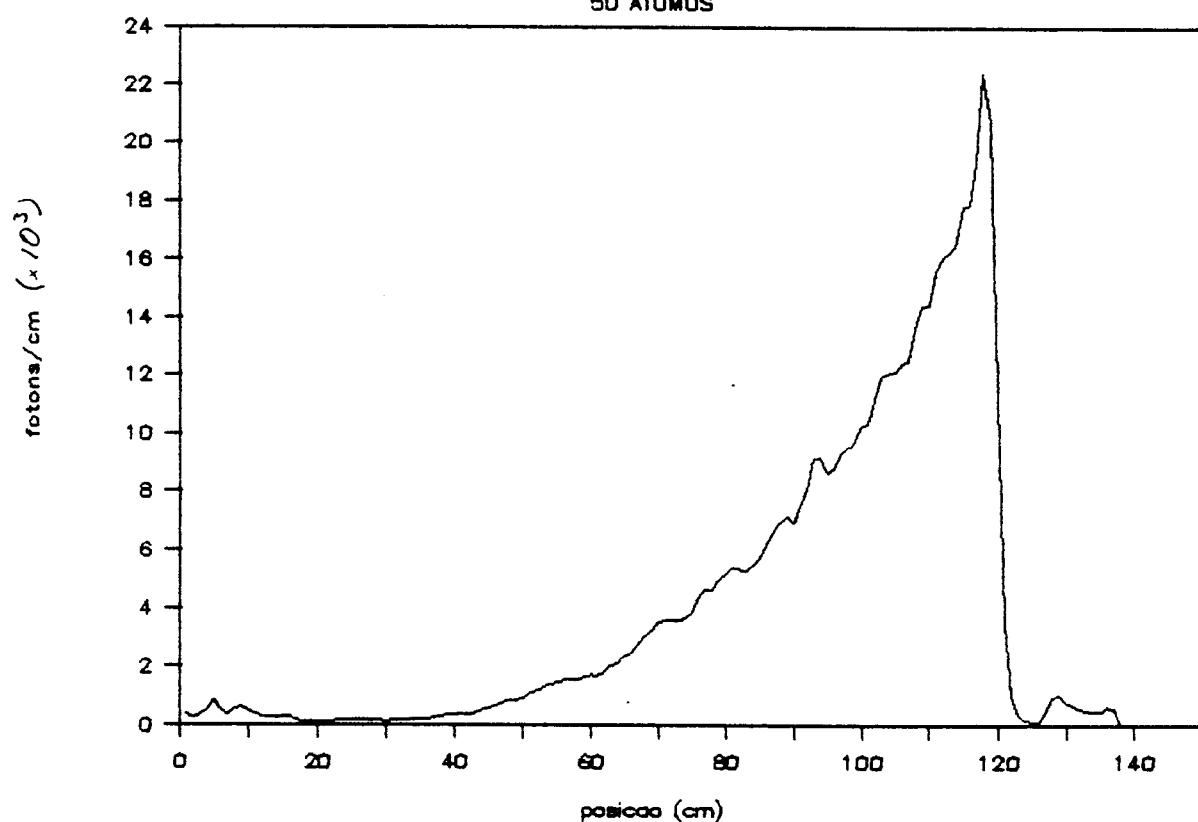


Figura 30. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 50$ MHz.

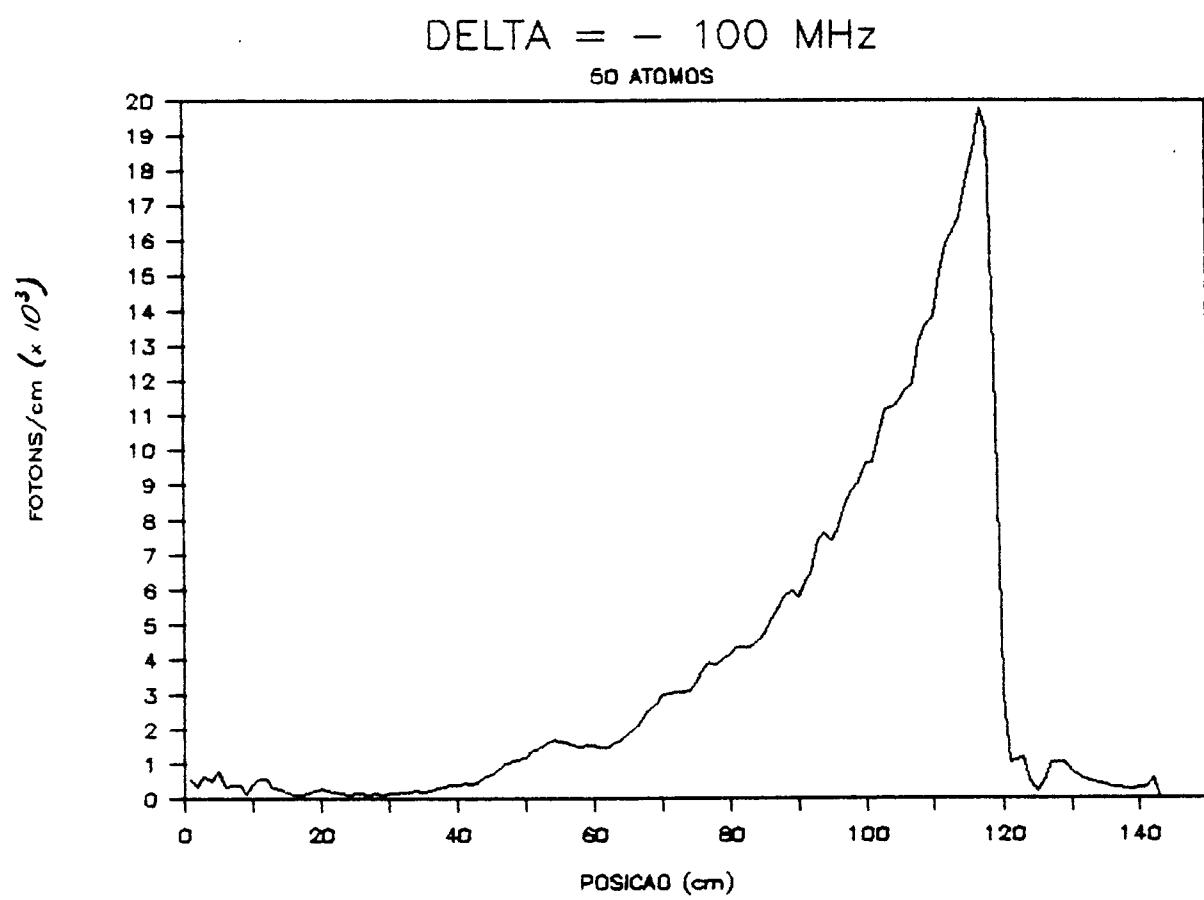


Figura 31. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 100$ MHz.

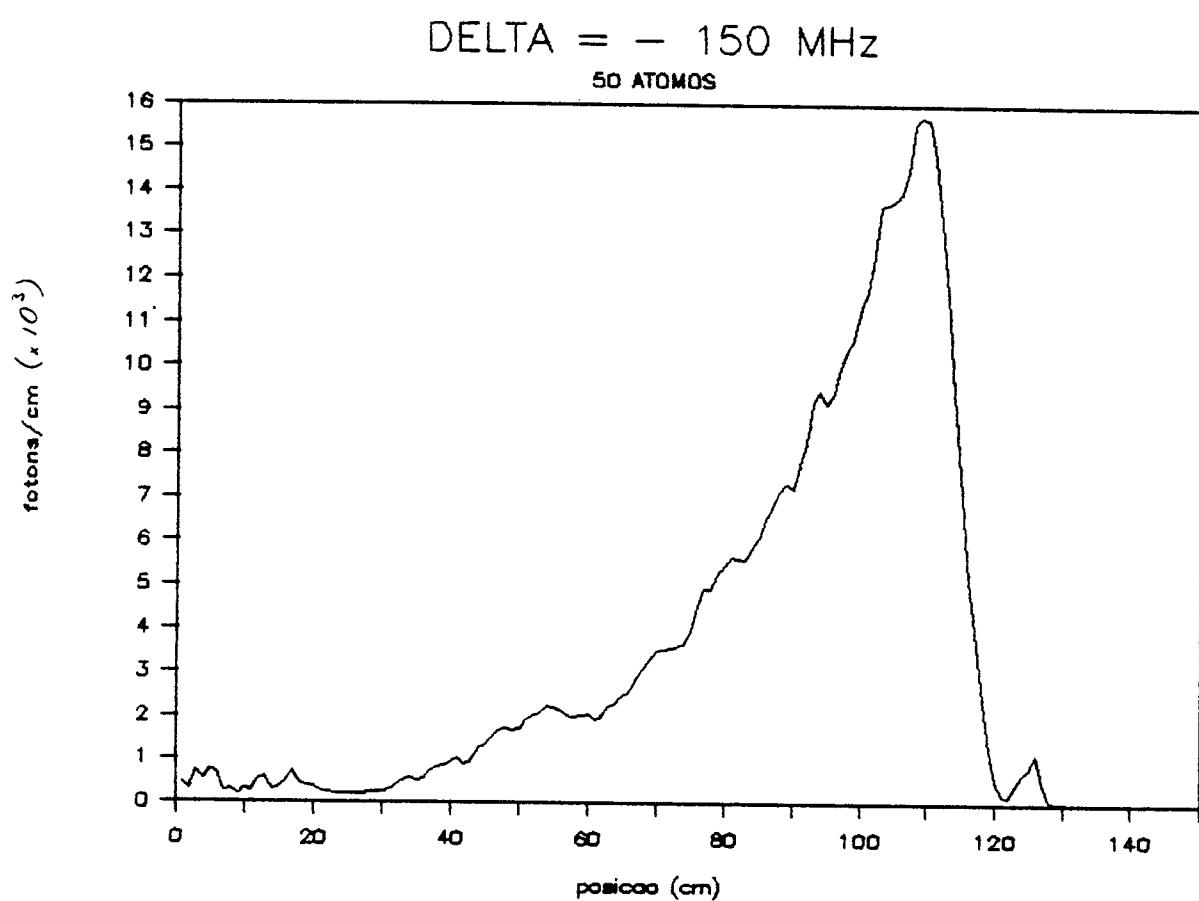


Figura 32. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 150$ MHz.

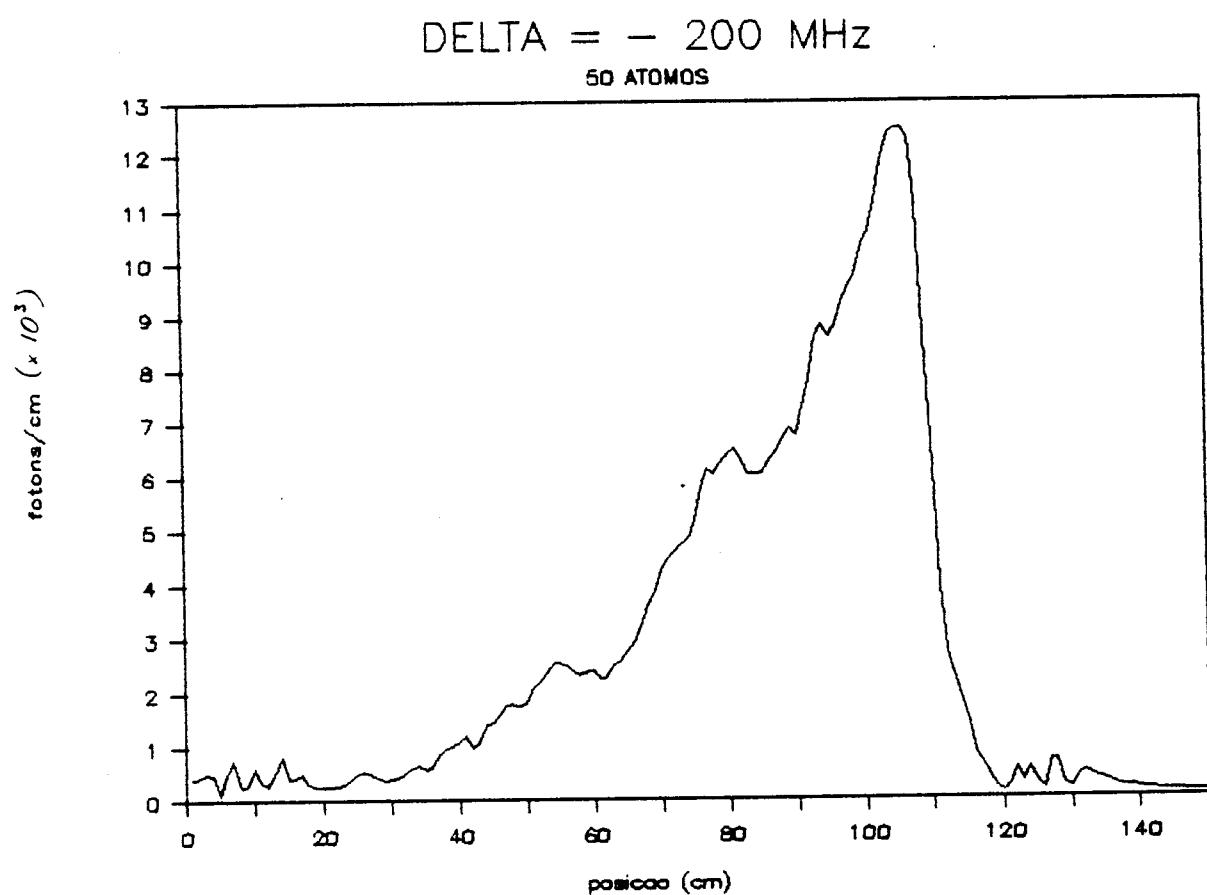


Figura 33. Gráfico de fluorescência para o perfil de campo magnético da figura 2 quando $\Delta = - 200$ MHz.

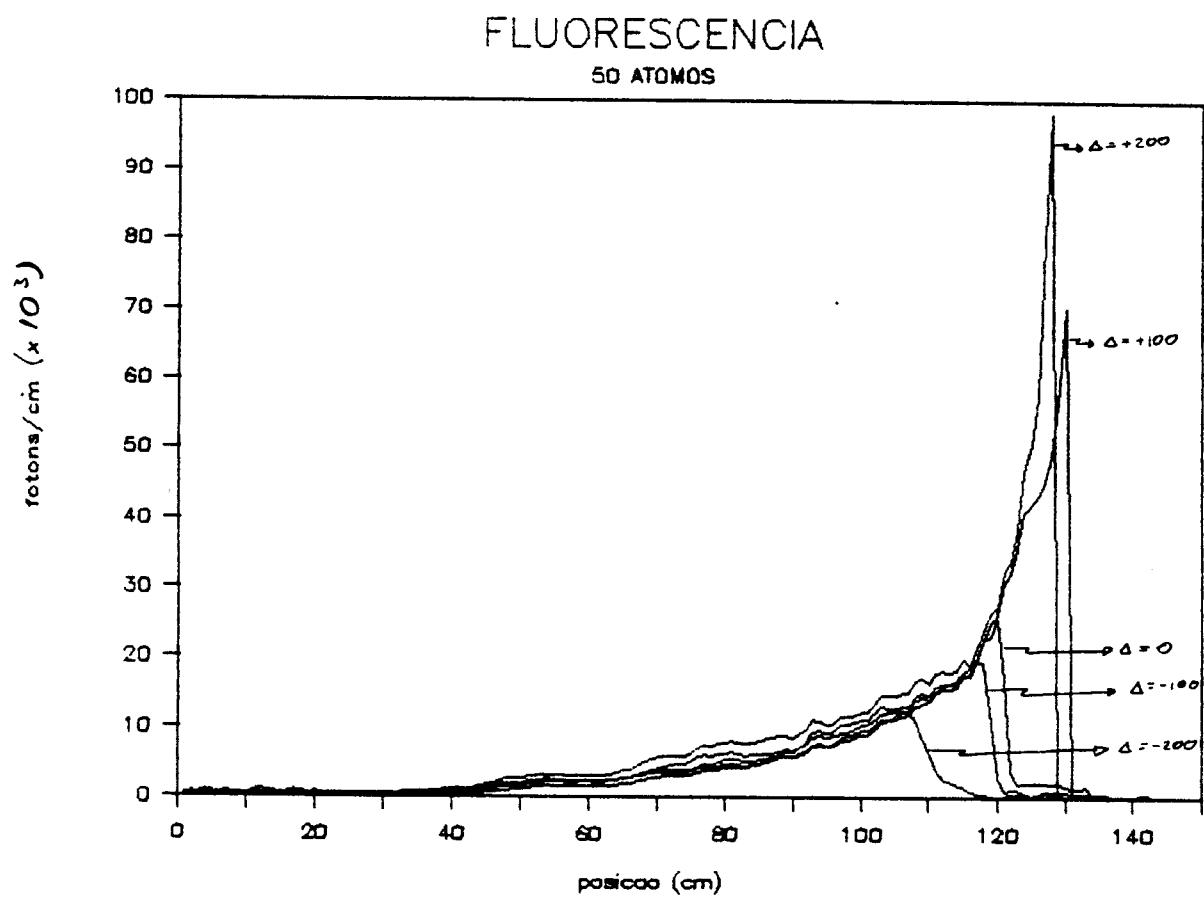


Figura 34. Comparação dos gráficos de fluorescência para vários valores de Δ .

contribuições de cada átomo. Assim, tudo se passa como se, em cada posição Z, tivéssemos os 50 átomos, ou seja, o fluxo de átomos se mantém constante ao longo do caminho de desaceleração. Sendo assim, o aumento com a posição, que vemos na fluorescência, se deve, não apenas ao fato de que cada átomo ressonante acompanha o campo e, como este possui um gradiente que cresce, em módulo, com Z, a taxa de emissão por unidade de comprimento cresce, indicando o aumento dos fótons absorvidos e emitidos, mas também ao aumento da densidade de átomos que passam a emitir fótons quando entram em ressonância. Em outras palavras, como os 50 átomos inicialmente possuem velocidades diferentes, entram em ressonância em pontos diferentes. Somente para Z suficientemente grande teremos todos os 50 átomos ressonantes, contribuindo para a fluorescência. Estes são os dois fatores principais para o aumento da fluorescência cuja observação, por si só, já demonstra a desaceleração do feixe atômico. Para compararmos com o experimento, a figura 35 mostra os pontos experimentais juntamente com um gráfico obtido com o programa FLUORESC do Apêndice. Vemos, neste gráfico, uma discordância quantitativa e uma concordância qualitativa. Estamos simulando um feixe atômico usando um número muito pequeno de átomos (cinquenta) e só isto já nos coloca em desvantagem com a observação experimental. Mais ainda, não estamos levando em conta a perda de átomos que normalmente ocorre, no laboratório, devida à dispersão do feixe atômico oriunda do aquecimento transversal, pois a emissão espontânea atua aquecendo transversalmente o feixe. Há ainda a resolução dos detectores que "vêem" um ângulo sólido que não

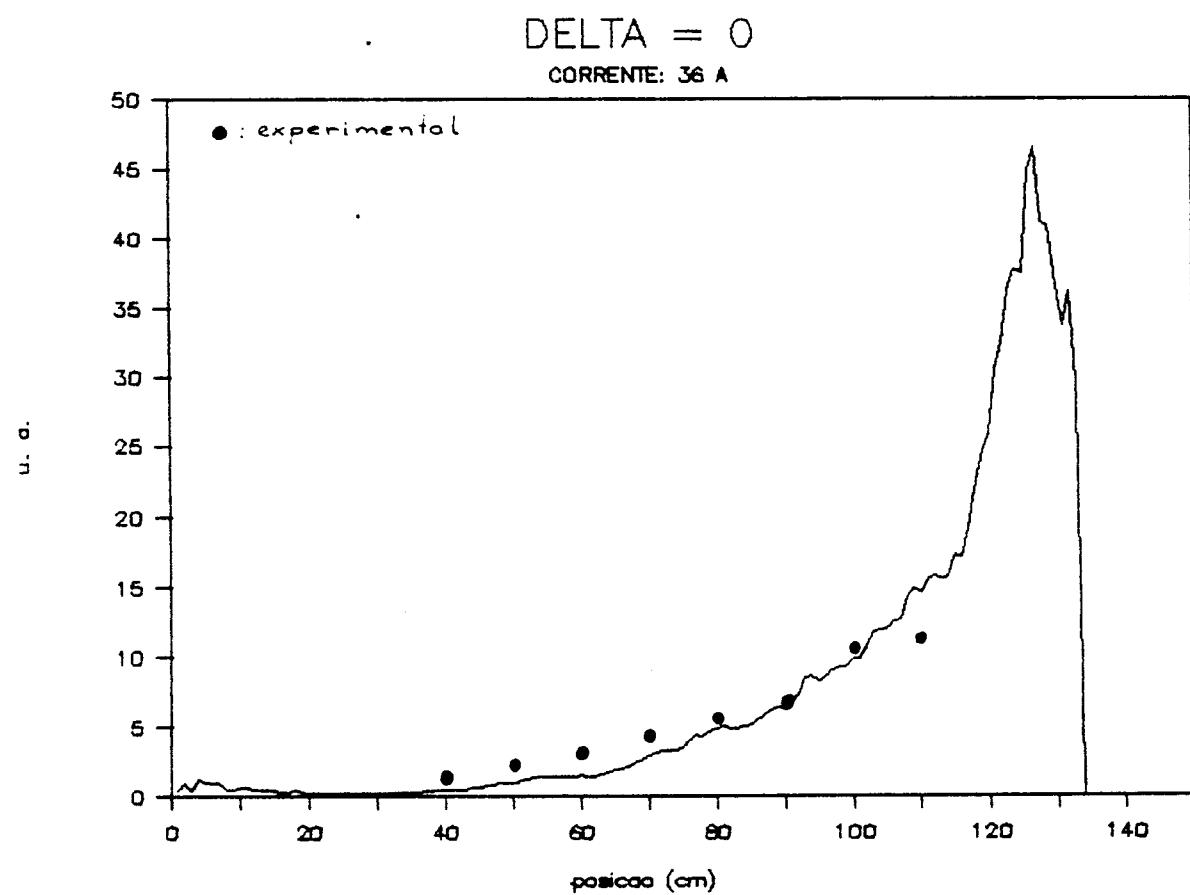


Figura 35. Comparação com os resultados experimentais quando $\Delta=0$. A precisão experimental apresenta uma tolerância de cerca de 10% nos valores de frequência e de mais ou menos 2 cm nas medidas de posição.

estamos levando em conta. Para vermos como o aquecimento transversal acontece, simulamos a desaceleração de um só átomo e, arquivando suas velocidades e posições transversais para cada centímetro do eixo longitudinal z , pudemos construir o gráfico da figura 36, que mostra a distância ao eixo longitudinal z em que o átomo se encontra para cada posição longitudinal. Notamos que, inicialmente, o átomo não possui componente transversal para seu vetor posição e, ao longo do percurso, acaba se distanciando do eixo z muito rapidamente até parar. A partir deste ponto de parada, o átomo retorna mantendo-se à mesma distância do eixo z , pois, após atingir o repouso, escapa da ressonância e deixa de emitir fótons. Esta figura mostra como a emissão espontânea atua promovendo um efeito dispersivo que acaba causando a perda de átomos no processo.

Olhando melhor o gráfico da figura 34, vemos que os pontos em que os átomos saem de ressonância, ou em que param, ocorrem em posições diferentes para diferentes "detunings". Como dito na seção III.1, a condição (115) é violada para posições cada vez menores à medida que Δ vai se tornando mais e mais negativo (ver capítulo IV). Por outro lado, aumentando Δ , a posição para a saída de ressonância torna-se cada vez maior e, a partir de um determinado valor de Δ , a condição (115) deixa de ser violada e os átomos começam a seguir adiabaticamente o campo magnético até atingirem o repouso. O ponto Z_R em que os átomos ressonantes atingem o repouso é dado, aproximadamente, por $\gamma B(Z_R) \approx \Delta$ (ponto $v = 0$ e $\varepsilon \approx 0$ em (114)). Como $B(z)$ é uma função que decresce com

DIST. AO EIXO Z VS. POSICAO NO EIXO Z

UM SO ATOMO / DELTA = + 100 MHz

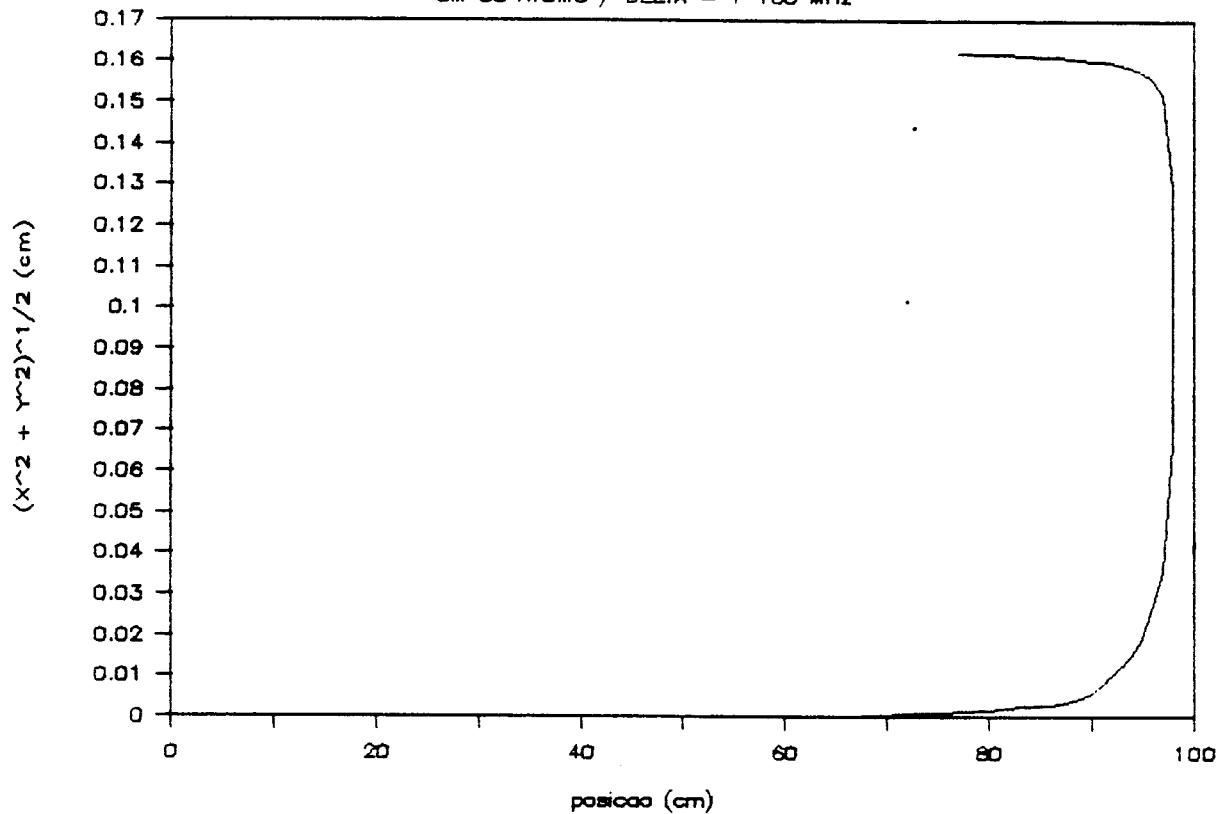


Figura 36. Distância ao eixo z como função da posição no eixo z. Após determinado ponto o átomo retorna e, deixando de ser ressonante, mantém sua velocidade final constante, o que implica em uma distância ao eixo longitudinal também constante. Este gráfico ilustra o efeito dispersivo originário da aleatoriedade da emissão espontânea.

Z na região de retorno, Z_R será tanto menor quanto maior for Δ . Assim, a posição em que ocorre a queda da fluorescência cresce até o valor de Δ que permite aos átomos ressonantes atingirem o repouso. A partir daí, começa a decrescer com o aumento adicional de Δ . Outro detalhe que vemos na figura 34 é que as quedas da fluorescência não são sempre abruptas. Todos os átomos com velocidades iniciais abaixo de um máximo valor $V_s(\Delta)$ entram em ressonância. Logo, se Δ é adequadamente positivo, estes átomos retornam. Porém, para os casos em que Δ é muito negativo, os átomos saem de ressonância em um ponto que corresponde a uma velocidade inicial mínima, $V_i(\Delta)$, para que haja ressonância, além de jamais se tornarem ressonantes com velocidades iniciais acima de $V_s(\Delta)$. Portanto, quando os átomos com velocidades abaixo de $V_i(\Delta)$ cruzam, ou mesmo se aproximam, da região em que a curva $kV(Z)$ cruza $f(Z)$, sofrem a mais forte aceleração, por curto período de tempo, pois não entram em ressonância, isto é, não acompanham o campo. Sofrendo forte aceleração, estarão contribuindo para a fluorescência, que cairá gradativamente, pois quanto mais distante da origem, menor o valor de $f(Z)$ e, portanto, menor quantidade de átomos terão velocidades tais que $kV(Z)$ cruze $f(Z)$, já que a distribuição (128) prevê um número pequeno de átomos lentos. Assim, as principais características dos resultados apresentados pelo gráfico da figura 34 estão justificadas e bem compreendidas graças à integração da expressão (104) e da introdução da emissão espontânea. Resta-nos, ainda, algumas palavras referentes às intensidades de pico relativas que vemos entre os gráficos da figura 34. Quanto maior Δ , maior o

pico. Este aspecto envolve particularidades do cálculo numérico que aqui empregamos, além de consequências puramente físicas. Fisicamente, para Δ muito positivo, todos os átomos, com velocidades iniciais abaixo de $V_s(\Delta)$, serão, mais cedo ou mais tarde, ressonantes. Isto significa que todos estes átomos acompanharão o campo até o ponto em que $\gamma B \approx \Delta$ e, então, pararão. Isto permite que todos estes átomos, juntos, emitam a alta taxa, já que $|dB/dZ|$ é maior quanto maior o valor de Z . Assim, para Δ grande, positivo, esperamos um pico pronunciado e estreito pouco antes do ponto de retorno. Quando Δ é muito negativo, há um ponto em que os átomos saem de ressonância muito antes que atinjam velocidades baixas, de modo que uma faixa estreita de velocidades permitirá ressonância a baixa taxa, pois, com Δ suficientemente negativo, o máximo gradiente $|dB/dZ|$ tolerado será pequeno. Assim, esperamos que, para Δ bem negativo, a intensidade do pico de fluorescência seja relativamente baixa. Mas aqui, nestas simulações, para Δ muito positivo, teremos 50 átomos ressonantes, pois tomamos ao acaso velocidades entre zero e $V_s(\Delta)$. No caso de Δ bem negativo, como as velocidades iniciais dos 50 átomos são geradas entre 0 e $V_i(\Delta)$, nem todos os átomos estarão ressonantes no processo, pois, neste caso, existe um valor mínimo de velocidade, $V_i(\Delta)$, abaixo do qual não ocorre ressonância. Assim, quanto menos átomos ressonantes, menor o número de fótons espalhados.

Ao executarmos o programa FLUORESC do Apêndice, além de obtermos os gráficos de fluorescência, obtivemos também as

velocidades finais dos 50 átomos para cada valor de Δ , variando de 50 em 50 MHz, de - 200 MHz a + 200 MHz. Como o número de átomos que desaceleramos é demasiadamente pequeno (cinquenta), não podemos obter histogramas com boa definição de largura e optamos por mostrar os resultados no Apêndice, em forma de listagens. As velocidades finais dos 50 átomos, para cada valor de Δ , quando colocadas em ordem crescente, apresentam um acúmulo de valores muito próximos, em torno de um valor $\bar{V}(\Delta)$ médio, menor do que $V_s(\Delta)$. As maiores velocidades finais mostram-se da ordem de $V_s(\Delta)$ e, portanto, são velocidades de átomos que não entraram no processo. Desprezando estes valores não ressonantes, calculamos $\bar{V}(\Delta)$ e obtivemos os pontos da figura 37. A melhor reta que descreve os pontos desta figura possui um coeficiente angular de - 147.3 (cm/s)/MHz. Analisemos a dependência com Δ de uma trajetória ressonante estável. A expressão (122) da seção III.1 para kV_{\perp} , a trajetória ressonante estável, fornece um coeficiente de Δ igual a $-1/k \approx -59$ (cm/s)/MHz. A razão entre o resultado medido e o esperado é 2.5. Concluímos, assim, que a dependência da velocidade final média \bar{V} com Δ não é linear. Esta não linearidade se evidencia no fato de que a posição em que o átomo sai de ressonância também depende de Δ . Seja Z_s o ponto em que o átomo sai de ressonância. A dependência com Z_s para V provém de $B(Z)$, que não é linear em Z . No capítulo IV veremos que nem mesmo Z_s depende linearmente de Δ para um campo de perfil parabólico.

A meia largura da distribuição final, que é dada pela variância $\Delta V \equiv \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2$, onde $\langle \cdot \rangle$ denota média, também foi

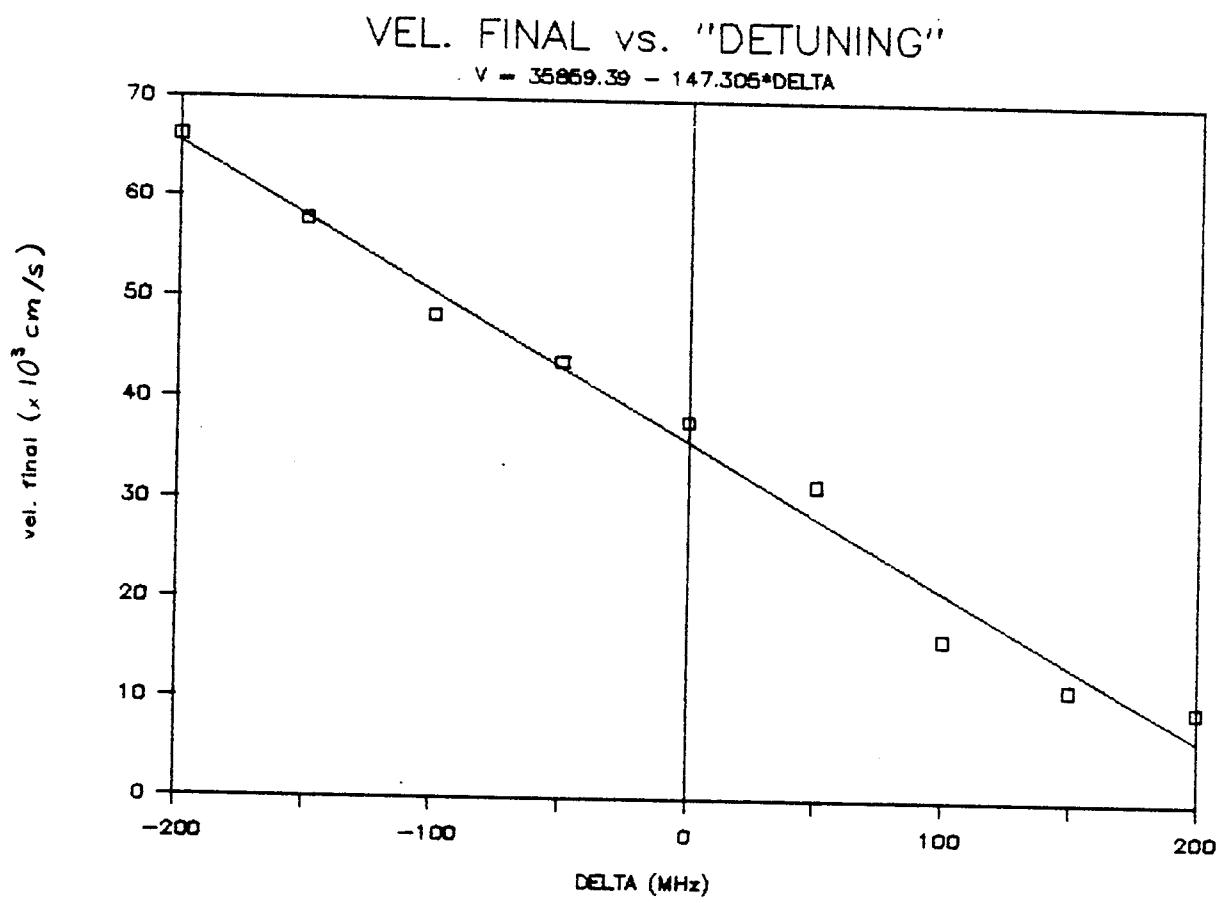


Figura 37. Gráfico de velocidade final média contra o "detuning"
 Δ e regressão linear.

calculada para cada valor de Δ e a figura 38 mostra o gráfico obtido. Tanto para Δ negativo como para Δ positivo, verificamos um aumento da variância. Quando Δ é negativo, esperamos que a largura aumente porque, quanto mais negativo Δ , maior $V_I(\Delta)$ e, portanto, maior número de átomos lentos estarão fora do processo desacelerador, como indica a distribuição (128). Esta "cauda" de distribuição inicial, inalterada pelo processo, soma-se ao perfil da distribuição final dos átomos que são efetivamente desacelerados a uma velocidade ao redor de $\bar{V} \approx V_I(\Delta)$, aumentando sua largura. Para Δ bastante positivo, entretanto, $V_I(\Delta)$ fica em torno de 0, ou mesmo um pouco negativa. Não há, neste caso, nenhuma "cauda" de distribuição que possa explicar o aumento da largura. Como temos um número fixo de 50 átomos, conforme Δ aumenta positivamente, quase todas as 50 velocidades finais se acumulam em torno de $\bar{V} \approx 0$. Quanto maior Δ , maior é o número de átomos velozes que entram em ressonância, pois as 50 velocidades iniciais comprimem-se entre 0 e $V_S(\Delta)$. Como os átomos mais velozes, para atingirem o repouso, precisam absorver mais fótons, devem, no final, possuir uma dispersão maior, aumentando a largura relativamente ao pico que se mantém constante, uma vez que sempre temos 50 átomos.

LARG. DA DISTR. vs. "DETUNING"

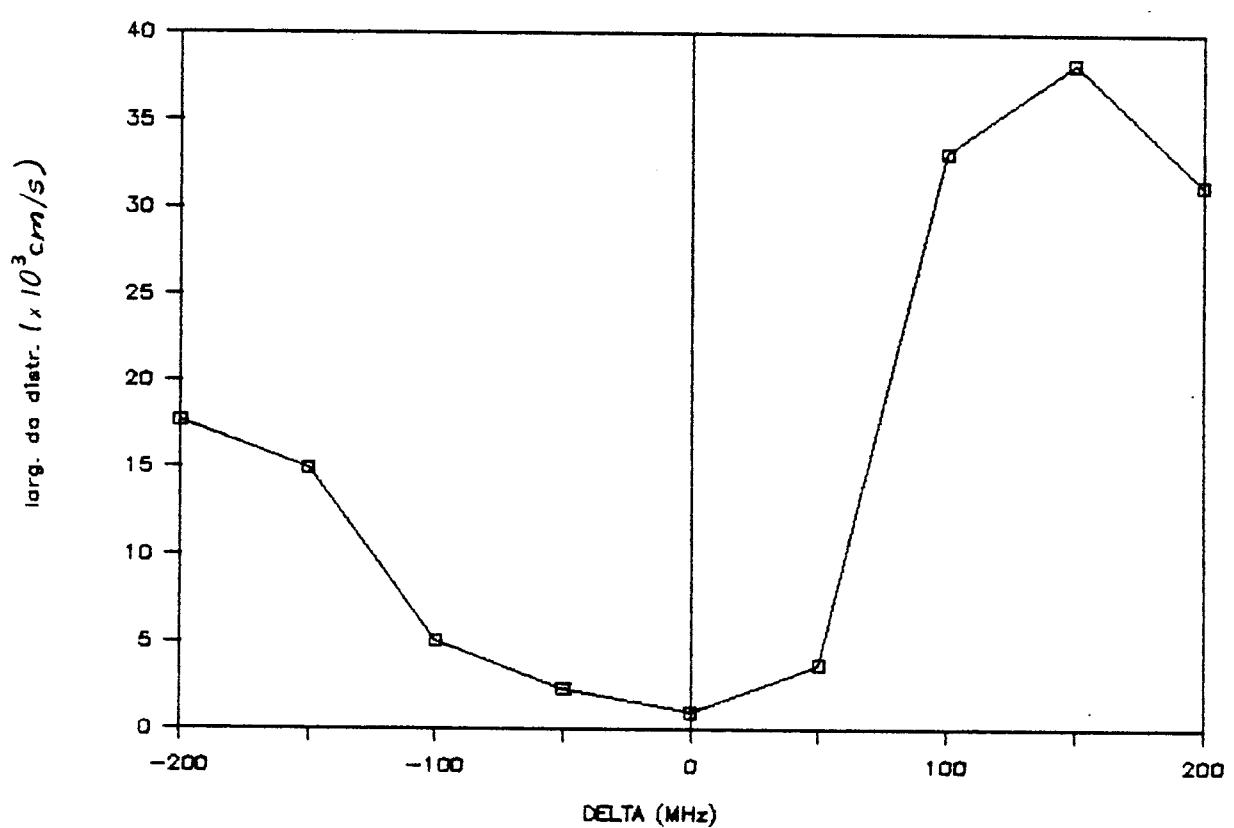


Figura 38. Gráfico de largura da distribuição final de velocidades como função de Δ .

IV. MODELO ANALÍTICO SIMPLIFICADO

Como vimos na seção III.2, em virtude da emissão espontânea, o feixe atômico, ao ser desacelerado pelo laser contra-propagante, fluoresce. A intensidade da luz espalhada pelos átomos do feixe varia ao longo da direção de propagação do mesmo e, como vimos, sua análise demonstra a desaceleração. Vamos utilizar os fatos principais envolvidos no processo para estabelecer um modelo analítico simples.

Sabemos, da seção III.2, que a cada valor do "detuning" Δ corresponde uma velocidade inicial máxima, v_m , para que o átomo entre em ressonância (ver expressão (130)). Todos os átomos que tiverem velocidades iniciais maiores que v_m não entrarão em ressonância e, portanto, não contribuirão para o espalhamento de fôtons. Nem todos os átomos com velocidades iniciais inferiores a v_m contribuirão para espalhar fôtons, dependendo do valor de Δ . Por exemplo, se $\Delta < 0$, sabemos que haverá um ponto Z_s para que os átomos saiam de ressonância e isto ocorrerá antes que v se anule. Logo, existirá, neste caso, uma velocidade inicial mínima para que os átomos espalhem fôtons. Abaixo esta velocidade, não haverá ressonância. Esta velocidade mínima, v_m , pode ser encontrada usando a expressão (113):

$$v_m = \frac{k a_m}{\gamma \left| \frac{dB}{dZ} \right|_m}, \quad (135)$$

onde $|dB/dZ|_M$ é o valor máximo da derivada do campo magnético para que haja ressonância, isto é, de (115), $|dB/dZ|_M$ é o valor de $|dB/dZ|$ calculado no ponto em que

$$\gamma \left| \frac{dB}{dZ} \right| = \frac{k^2 a_M}{|\gamma B(Z) - \Delta + \frac{\epsilon}{2} (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}|}. \quad (136)$$

Também sabemos da seção III.1 que, para Δ suficientemente positivo, os átomos ressonantes chegam a adquirir velocidade negativa e só então saem de ressonância. Estes átomos também contribuem para a fluorescência, pois, ainda que por curto período de tempo, sofrem a ação da força (104).

Como cada fóton tem momentum $\hbar k$, calculando a variação do momentum total do feixe atómico entre as posições Z e $Z + \Delta Z$, podemos calcular a densidade de fótons espalhados. Como esta variação pode ser aproximada, quando ΔZ é pequeno, por $\Delta P \approx (dP/dZ)\Delta Z$, onde $P = P(Z)$ representa o momentum total do feixe atómico, o número de fótons espalhados neste intervalo é dado por $\Delta P/(\hbar k)$. Seja dn/dZ o número de fótons espalhados por unidade de comprimento. Então,

$$\frac{dn}{dZ} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar k} \left| \frac{\Delta P}{\Delta Z} \right| = \frac{1}{\hbar k} \left| \frac{dP}{dZ} \right|. \quad (137)$$

Calculemos $P = P(Z)$. Tomando a distribuição (128), temos:

$$P(Z) = M \int_{V_M}^{\infty} v \frac{dN}{dv} dv + M \int_0^{V_m} v \frac{dN}{dv} dv + \\ + MV(Z) \int_{V(Z)}^{V_M} \frac{dN}{dv} dv + M \int_{V_m}^{V(Z)} v \frac{dN}{dv} dv, \quad (138)$$

onde o primeiro termo leva em conta as contribuições dos átomos que nunca entrarão em ressonância por terem velocidades demasiadamente elevadas, o segundo termo leva em conta as contribuições dos átomos que também não entrarão em ressonância por terem velocidades demasiadamente baixas, o terceiro termo leva em conta as contribuições dos átomos que já estão em ressonância e, portanto, apresentam velocidade $V(Z)$ e o quarto termo leva em conta as contribuições dos átomos que ainda não participam do processo desacelerador no ponto Z , mas que participarão mais adiante. Derivando (138) com relação a Z , obtemos

$$\frac{dP}{dZ} = M \frac{dV(Z)}{dZ} \int_{V(Z)}^{V_M} \frac{dN}{dv} dv. \quad (139)$$

Usando (128), resolvemos a integral em (139) e substituindo o resultado em (137), obtemos:

$$\frac{dn}{dZ} = S_0 \left| \frac{dV(Z)}{dZ} \right| \left| \left[1 + \frac{V(Z)^2}{\alpha^2} \right] e^{-v(Z)^2/\alpha^2} - \left[1 + \frac{V_M^2}{\alpha^2} \right] e^{-v_M^2/\alpha^2} \right|, \quad (140)$$

onde S_0 é uma constante que não é importante para as considerações seguintes. Nesta expressão vemos que é necessário

conhecermos $V = V(Z)$ para átomos ressonantes com velocidade inicial V_M dada por (130). De (114), segue que

$$k \frac{dV}{dZ} = \gamma \frac{dB}{dZ} + \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dZ} (A^2 + 2\Omega^2)^{1/2}. \quad (141)$$

Uma vez que estamos interessados no regime estacionário, $d\varepsilon/dZ = 0$ e (141) fica

$$k \frac{dV}{dZ} = \gamma \frac{dB}{dZ}. \quad (142)$$

Substituindo (142) em (140), obtemos a expressão para o número de fótons por centímetro:

$$\frac{dn}{dZ} = \frac{\gamma S_0}{k} \left| \frac{dB(Z)}{dZ} \right| \left| \left[1 + \frac{V(Z)^2}{\alpha^2} \right] e^{-V(Z)^2/\alpha^2} - \left[1 + \frac{V_M^2}{\alpha^2} \right] e^{-V_M^2/\alpha^2} \right|, \quad (143)$$

onde $V(Z)$ é dada por (114) e $\varepsilon(Z)$ será uma constante entre -1 e +1, pois estamos considerando um regime estacionário. A equação (143) descreve, assim, a fluorescência ao longo da direção de propagação do feixe atômico até a posição em que a desigualdade (115) é violada. A partir daí, n tenderá a zero rapidamente, pois não haverá mais ressonância.

A fim de podermos reproduzir analiticamente os resultados da seção III.2 para a fluorescência, teremos que conhecer o valor máximo V_M , o que implica no conhecimento de ε_M e, portanto, de $\varepsilon(Z)$. Então, para obtermos $\varepsilon = \varepsilon(Z)$, retornariamós ao problema de

resolver uma equação diferencial altamente não linear e nada fariamos analiticamente. Aproximando $\varepsilon(Z) \approx 0$, como justificam os resultados da seção III.1, ainda teremos o inconveniente trabalho de determinarmos o ponto em que (115) é violada, o que nos leva a dificuldades se o campo $B(Z)$ é uma função arbitrária. Caso o campo magnético possua a forma da equação (109), então teremos facilmente o valor de Z_s para a saída de ressonância:

$$Z_s = Z_0 + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \left[\frac{\alpha\beta\gamma(\gamma b_0 - \Delta)}{2k^2 a_M - \alpha^2\beta\gamma^2} \right]^2. \quad (144)$$

Como constatamos nas seções III.1 e III.2, Z_s é uma função de Δ . Substituindo em (144) os valores usados anteriormente, na seção III.1, para a obtenção da trajetória da figura 14, onde $\Delta = -100$ MHz, obtemos $Z_s \approx 115$ cm, o que confere com os resultados numéricos das figuras 15 e 16.

De posse de Z_s , podemos comparar a fluorescência segundo nosso modelo analítico sumarizado na expressão (143) com o resultado numérico obtido com o campo de perfil dado por (109) no lugar daquele real da figura 2. A figura 39 mostra a comparação. Nesta figura, plotamos (143) até $Z = Z_s$ dado por (144) para $\Delta = 0$ e também incluímos, com uma normalização adequada, os resultados para a fluorescência obtidos com o programa FLUORESC do Apêndice, usando o campo magnético de perfil como em (109). Notamos que a posição de saída na curva numericamente obtida é maior do que o valor Z_s da curva analítica. Nosso modelo analítico concorda bem fora da região em que os átomos saem de ressonância. A maneira

COMPARACAO ANALITICO/NUMERICO

DELTA = 0 / 50 ATOMOS

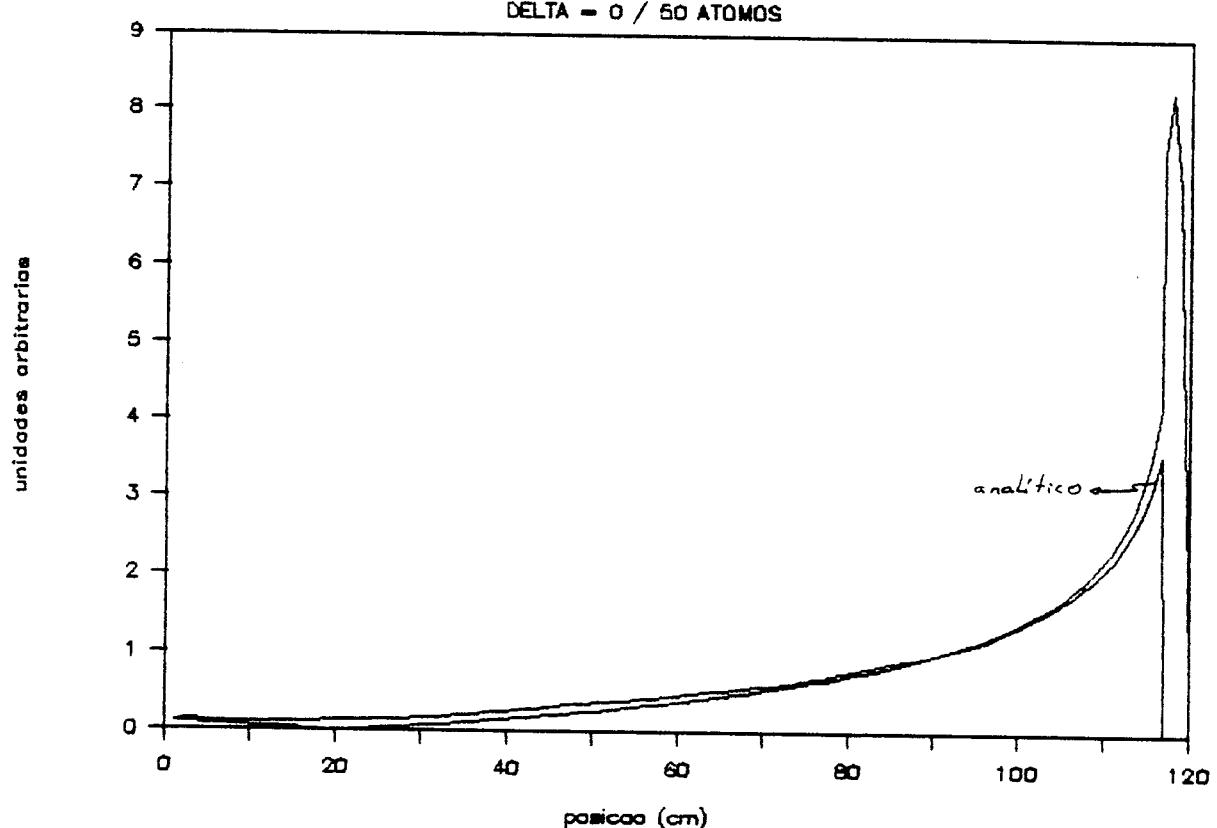


Figura 39. Comparação entre os resultados analítico e numérico para a curva de fluorescência.

que calculamos Z_s garante apenas que há ressonância antes deste valor. O que podemos dizer, na realidade, é que a saída de ressonância ocorre depois de Z_s e não sobre Z_s . Esta é a limitação do modelo aqui desenvolvido. A figura 40 mostra a comparação entre os resultados experimentais já apresentados na figura 35 e a curva obtida segundo a expressão (143) para dn/dZ . Vemos que o resultado analítico interpola bem os pontos medidos até, pelo menos, onde houve acesso experimental.

O modelo analítico simplificado que apresentamos, embora sujeito a algumas limitações, incorpora os fatos físicos principais, pois descreve bem o que é observado no laboratório. Isto justifica o modelo ingênuo que certamente cumpre bem o papel de testar nossa compreensão do processo de desaceleração.

COMPARACAO ANALITICO/EXPERIMENTAL

DELTA = 0

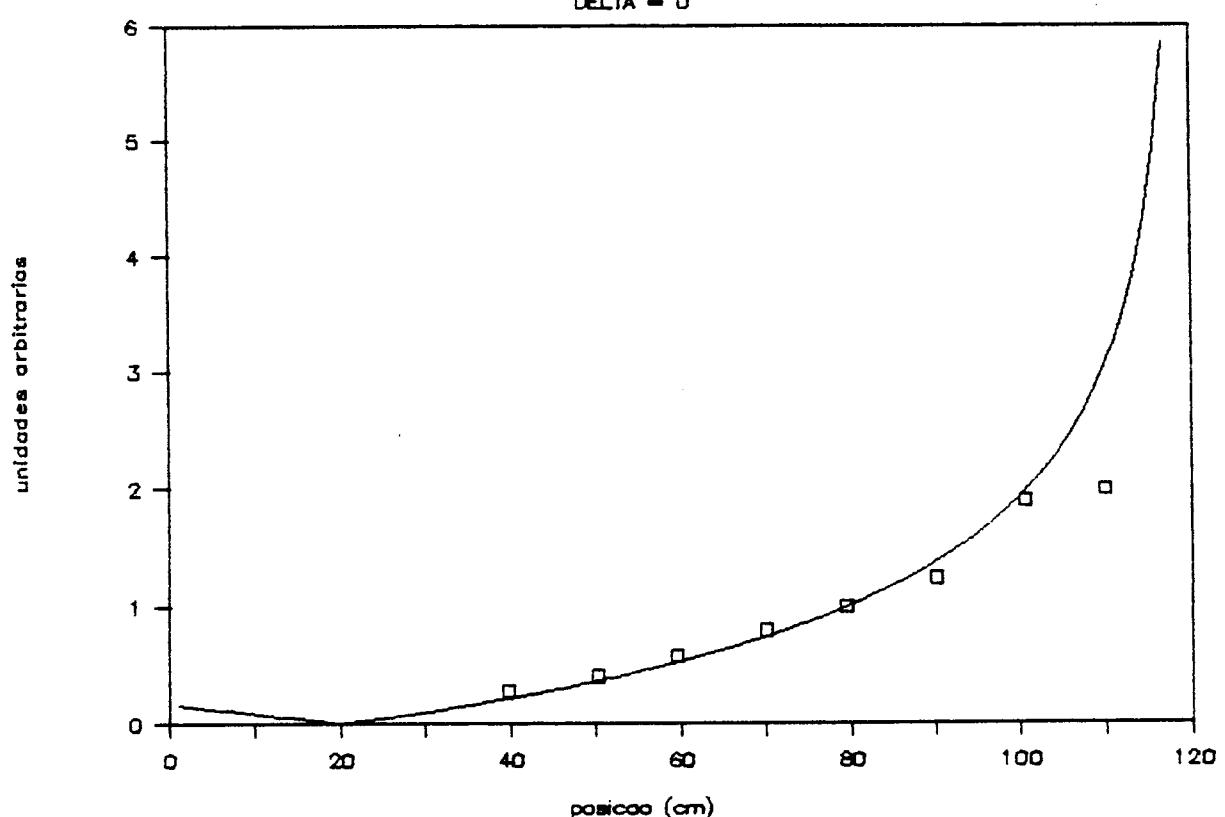


Figura 40. Comparação entre os resultados analítico (linha cheia) e experimental (pequenos quadrados) para a dependência da fluorescência com a posição ao longo do caminho de desaceleração.

V. CONCLUSÃO

Ao longo desta dissertação descrevemos todo um processo que nos permite, com um laser e um campo magnético estático, desacelerar átomos de um feixe atômico e, sem a necessidade de outro feixe laser, observar que, de fato, os átomos são desacelerados. De partida, conhecemos os princípios da teoria quântica, o que nos permite escrever a força média sobre um átomo quando sujeito a um perfil de campo magnético e um laser ressonante contra-propagante. Sabendo da existência da relaxação devida à emissão espontânea, reconstituímos as flutuações do movimento atômico através da geração de números pseudo-aleatórios. Contando os fótons emitidos pelos átomos do feixe por unidade de comprimento, somos capazes de obter resultados numéricos comparáveis com os observados no laboratório, mostrando a eficácia do método experimental que mede a fluorescência ao longo do caminho de desaceleração. Sintetizando as idéias mais fundamentais dos argumentos usados para a descrição segundo a abordagem numérica, construímos um modelo analítico cujas previsões concordam, dentro de certas limitações, com os já obtidos resultados numéricos e experimentais. Esta interdependência entre as atitudes descritas acima torna-se a característica marcante da metodologia empregada: jamais devemos avançar com as atividades numéricas se estas perderem de seu âmbito a possibilidade de comparação com as atividades experimentais; o mesmo podendo dizer-se das atividades

analíticas.

Enfim a técnica de desaceleração de átomos através do ajustamento Zeeman possui os seguintes aspectos gerais: um feixe de átomos ressonantes com o feixe laser contra-propagante encontra-se na presença de um campo magnético estático cujo perfil tem forma parabólica. Esta construção permite que, a partir de determinado ponto, o efeito Doppler experimentado por um átomo ressonante, que está cada vez mais lento, seja compensado pelo efeito Zeeman introduzido pela interação entre o átomo e o campo magnético. Com este ajuste, o átomo passa a ser desacelerado sempre à mesma desaceleração e sem sair de ressonância. Esta desaceleração, devida ao contínuo ciclo de absorção seguida por emissão de fótons pelos átomos do feixe, evidencia-se através da taxa de fótons emitidos em todas as direções (fluorescência). Mas estes aspectos dependem da diferença entre as freqüências do laser e aquela associada à transição entre os níveis atómicos considerados. Dependendo desta diferença, os átomos ressonantes escapam ou não de ressonância e, quando não, param e retornam, acabando, então, por sair de ressonância com uma baixa velocidade negativa. Estas características individuais para cada átomo no processo acabam explicando o comportamento global do feixe atómico, já que um feixe consiste de átomos independentes e o fluxo ao longo do caminho de desaceleração se mantém constante durante o desenrolar do processo. As curvas de fluorescência apresentam picos na região em que o campo magnético possui acentuado gradiente e,

após estes picos, caem abruptamente ou não, dependendo da diferença entre as freqüências do laser e a associada aos níveis atômicos. Quanto maior esta diferença, mais abrupta é a queda da curva de fluorescência e, quanto mais negativa a diferença (freqüência do laser bem menor do que a associada aos níveis atômicos), menos abrupta é a queda. Para "detunings" negativos, os átomos escapam da ressonância antes do repouso e outros átomos mais lentos, porém com velocidades ainda suficientemente altas, ao atingirem a posição em que o campo magnético os tornam ressonantes, por possuírem velocidade incompatível com a taxa local de variação do campo, acabam saindo de ressonância rapidamente, deixando de emitir fótons após ter emitido alguns poucos. Estes poucos fótons é que dão origem à queda menos abrupta na curva de fluorescência para Δ bastante negativo. A incompatibilidade entre a velocidade destes átomos não ressonantes e o gradiente local de campo magnético encontra-se no seguinte aspecto do processo desacelerador: há uma desaceleração máxima atingível por um átomo ressonante que depende de sua velocidade e do gradiente de campo na posição em que se encontra. Se sua velocidade é adequadamente alta e também o é o módulo do gradiente de campo, o átomo precisaria de uma aceleração maior do que a máxima atingível para manter-se ressonante e, então, não segue adiabaticamente o perfil de campo, saindo de ressonância.

VI. SUGESTÕES

Há quatro sugestões interessantes:

(1) Estudar as propriedades gerais da equação diferencial (104) à luz de técnicas modernas de análise matemática.

(2) Melhorar o modelo analítico, talvez incluindo mais condições além da desigualdade (115) a fim de introduzir o pico de fluorescência com precisão nas previsões analíticas.

(3) R. Blatt et al.⁽¹⁸⁾ realizaram uma simulação numérica derivada de uma análise teórica da pressão de radiação ressonante para um método diferente de desaceleração: o método de varredura⁽³⁾. Seria interessante aplicar o método destes autores para a simulação dos experimentos realizados em nosso laboratório.

(4) H. Wallis e W. Ertmer⁽¹⁹⁾ expuseram uma análise regida pela aplicação da equação de Fokker-Planck⁽⁴⁾ para o método de resfriamento atômico por varredura. Seria interessante aplicarmos a teoria destes autores para o método de desaceleração atômica por ajustamento Zeeman, que utilizamos.

APÊNDICE

Neste apêndice apresentamos os programas em FORTRAN utilizados neste trabalho e as listagens de dados obtidas com o último programa, FLUORESC, para o estudo das distribuições de velocidades emergentes.

PROGRAMA TRAJETORIA

```
program TRAJETORIA
double precision DZ,L,Z,V,PI,V0,VETOR(0:12000)
double precision AUXILIAR,K0,K1,K2,K3
integer N,i
parameter(PI=3.14159265359D0)
parameter(N=12000,L=120.0D0,V0=8.0D4)
DZ=L/N
Z=0.0D0
V=V0
VETOR(0)=V
do 10 i=1,N
AUXILIAR=DVDZ(Z,V)
K0=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K0/2.0D0)
K1=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K1/2.0D0)
K2=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ,V+K2)
K3=DZ*AUXILIAR
V=V+(K0+2.0D0*(K1+K2)+K3)/6.0D0
Z=i*DZ
VETOR(i)=V
10 continue
```

```

do 20 i=1,120
write(10,*),VETOR(i*100)
20. continue
stop
end

double precision function B(Z)
double precision Z
B=1.0D0-0.01D0*(Z-20.0D0)
B=DSQRT(B)
B=36.0D0*(7.7D0+27.0D0*B)
return
end

double precision function DVDZ(Z,V)
double precision Z,V,DELTA,A,OMEGA,PI,K,MU
parameter (PI=3.14159265359D0,K=0.017D0,MU=1.4D0)
parameter (DELTA=100.0D0,A=10.0D0,OMEGA=20.0D0)
DVDZ=(DELTA-MU*B(Z)+K*V)**2
DVDZ=V*(4.0D0*Dvdz+A**2+2.0D0*(OMEGA**2))
DVDZ=3.0D6/DVDZ
DVDZ=-2.0D0*PI*A*Dvdz*(OMEGA**2)
return
end

```

PROGRAMA TRAJ

```

program TRAJ
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA
double precision DZ,L,Z,V,V0,AUXILIAR,PI,VETOR(1:12000)
double precision K0,K1,K2,K3,MATRIZ(1:12000)
parameter(PI=3.14159265359D0)
parameter(N=12000,L=120.0D0,V0=8.0D4)
read(5,*),DELTA
DZ=L/N

```

```

Z=0.0D0
V=V0
do 20 i=1,N
AUXILIAR=DVDZ(Z,V)
K0=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K0/2.0D0)
K1=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K1/2.0D0)
K2=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ,V+K2)
K3=DZ*AUXILIAR
V=V+(K0+2.0D0*(K1+K2)+K3)/6.0D0
Z=i*DZ
VETOR(i)=0.017D0*V
MATRIZ(i)=1.4D0*B(Z)-DELTA
20 continue
do 30 i=1,120
write(10,*),MATRIZ(i*100),VETOR(i*100)
30 continue
stop
end

double precision function B(Z)
implicit double precision (a-h,o-z)
B=1.0D0-0.01D0*(Z-20.0D0)
B=DSQRT(B)
B=36.0D0*(7.7D0+27.0D0*B)
10 continue
return
end

double precision function DVDZ(Z,V)
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA
double precision K,MU
parameter      (PI=3.14159265359D0,K=0.017D0,MU=1.4D0)
parameter      (A=10.0D0,OMEGA=20.0D0)

```

```

DVDZ=(DELTA-MU*B(Z)+K*V)**2
DVDZ=V*(4.0D0*Dvdz+A**2+2.0D0*(OMEGA**2))
DVDZ=3.0D6/DVDZ
DVDZ=-2.0D0*PI*A*Dvdz*(OMEGA**2)
return
end

```

PROGRAMA GRADIENT

```

program GRADIENT
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA,AUX,AM
double precision L,A,OMEGA,PI,Z,UMA,DUAS,TRES
integer i
parameter (PI=3.14159265359D0)
parameter (L=120.0D0,A=10.0D0,OMEGA=20.0D0)
write(5,*)'DIGITE O VALOR DE DELTA:'
read(5,*)DELTA
AUX=DSQRT(A**2+2.0D0*(OMEGA**2))
AM=6.0D6*PI*A*(OMEGA**2)/(AUX**2)
do 10 i=0,119
Z=i*L/120
UMA=UP(Z)
DUAS=DOWN(Z)
TRES=GR(Z)
write(50,*)UMA,DUAS,TRES
10 continue
stop
end

double precision function B(Z)
double precision Z
B=1.0D0-0.01D0*(Z-20.0D0)
B=DSQRT(B)
B=36.0D0*(7.7D0+27.0D0*B)
return

```

```

end

double precision function UP(Z)
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA,AUX,AM
double precision Z
UP=1.4D0*B(Z)-DELTA+AUX/2.0D0
UP=DABS(UP)
UP=(0.017D0**2)*AM/UP
return
end

double precision function DOWN(Z)
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA,AUX,AM
double precision Z
DOWN=1.4D0*B(Z)-DELTA-AUX/2.0D0
DOWN=DABS(DOWN)
DOWN=(0.017D0**2)*AM/DOWN
return
end

double precision function GR(Z)
double precision Z
GR=1.0D0-0.01D0*(Z-20.0D0)
GR=DSQRT(GR)
GR=36.0D0*0.189D0/GR
return
end

```

PROGRAMA CAMINHO

```

program CAMINHO
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA
double      precision      DZ,L,Z,V,V0,AUXILIAR,PI,VETOR(1:12000)

```

```
double      precision      K0,K1,K2,K3,ZED(1:12000),MATRIZ(1:12000)
parameter(PI=3.14159265359D0)
parameter(N=12000,L=120.0D0,V0=9.0D4)
read(5,*)
read(5,*)
delta
DZ=L/N
Z=0.0D0
V=V0
do 20 i=1,N
AUXILIAR=DVDZ(Z,V)
K0=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K0/2.0D0)
K1=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K1/2.0D0)
K2=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ,V+K2)
K3=DZ*AUXILIAR
V=V+(K0+2.0D0*(K1+K2)+K3)/6.0D0
if ((V.le.0).and.(DZ.gt.0))      DZ=-DZ
Z=Z+DZ
ZED(i)=Z
VETOR(i)=0.017D0*V
MATRIZ(i)=1.4D0*B(Z)-DELTA
20 continue
do 30 i=1,120
write(10,*)
ZED(i*100),MATRIZ(i*100),VETOR(i*100)
30 continue
stop
end

double precision function B(Z)
implicit double precision (a-h,o-z)
B=1.0D0-0.01D0*(Z-20.0D0)
B=DSQRT(B) b. o.
B=36.0D0*(7.7D0+27.0D0*B)
10 continue
return
end
```

```

double precision function DVDZ(Z,V)
implicit double precision (a-h,o-z)
common DELTA
double precision K,MU
parameter      (PI=3.14159265359D0,K=0.017D0,MU=1.4D0)
parameter      (A=10.0D0,OMEGA=20.0D0)
DVDZ=(DELTA-MU*B(Z)+K*V)**2
DVDZ=V*(4.0D0*Dvdz+A**2+2.0D0*(OMEGA**2))
DVDZ=3.0D6/DVDZ
DVDZ=-2.0D0*PI*A*Dvdz*(OMEGA**2)
return
end

```

PROGRAMA TRAJREAL

```

program TRAJREAL
implicit double precision (a-h,k,l,m,o-z)
common DELTA,MU,K,CAMPO(0:150)
double precision MAGNES(1:15000),ZED(1:15000)
double precision DZ,L,Z,V,PI,V0,VETOR(1:15000)
double precision AUXILIAR,K0,K1,K2,K3
integer N,i
parameter(PI=3.14159265359D0)
parameter(N=15000,L=150.0D0)
do 10 i=0,150
read(23,*)CAMPO(i)
10 continue
write(5,*)"DIGITE O VALOR DE DELTA:"
read(5,*)DELTA
K=0.017D0
MU=1.4D0
DZ=L/N
Z=0.0D0
V0=(1380.0D0*MU-DELTA)/K
V=V0

```

```

do 20 i=1,N
AUXILIAR=DVDZ(Z,V)
K0=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K0/2.0D0)
K1=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ/2.0D0,V+K1/2.0D0)
K2=DZ*AUXILIAR
AUXILIAR=DVDZ(Z+DZ,V+K2)
K3=DZ*AUXILIAR
V=V+(K0+2.0D0*(K1+K2)+K3)/6.0D0
if ((V.le.0).and.(DZ.gt.0)) DZ=-DZ
Z=Z+DZ
ZED(i)=Z
VETOR(i)=K*V
MAGNES(i)=MU*B(Z)-DELTA
20 continue
do 30 i=1,150
write(10,*),ZED(i*100),VETOR(i*100),MAGNES(i*100)
30 continue
stop
end

double precision function B(Z)
implicit double precision (a-h,o-z)
common A,R,C,CAMPO(0:150)
do 10 i=0,149
if ((i.gt.Z).or.((i+1).le.Z)) goto 10
B=CAMPO(i)+(CAMPO(i+1)-CAMPO(i))*(Z-i)
goto 20
10 continue
20 return
end

double precision function DVDZ(Z,V)
implicit double precision (a-h,k,m,o-z)
common DELTA,MU,K,CAMPO(0:150)
double precision Z,V,A,OMEGA,PI

```

```

parameter      (PI=3.14159265359D0)
parameter      (A=10.0D0,OMEGA=20.0D0)
DVDZ=(DELTA-MU*B(Z)+K*V)**2
DVDZ=V*(4.0D0*Dvdz+A**2+2.0D0*(OMEGA**2))
DVDZ=3.0D6/DVDZ
DVDZ=-2.0D0*PI*A*Dvdz*(OMEGA**2)
return
end

```

PROGRAMA FLUORESC

```

program FLUORESC
implicit real (a-h,o-z)
common DELTA,CAMPO(0:150)
parameter (NATOMOS=50,PI=3.14E0)
dimension VF0(NATOMOS),VF(NATOMOS)
real NF(150)
DELTA=0.0
NARG=6084797
N=600000
call LERCAMPO(CAMPO)
call VELINI(NARG,NATOMOS,VF0)
do 10 i=1,150
  NF(i)=0.0
10 continue
do 20 i=1,NATOMOS
  Z=0.0E0
  V=VF0(i)
  DS=0.0E0
  do 30 j=1,N
    IF (V.NE.0.0) DT=0.00025/ABS(V)
    DV=DT*Dvdt(Z,V)
    DS=DS+DV
    call PROPAGUE(Z,V,DT)
    if (-DS.lt.3.0E0) goto 30
    THETA=PI*RAN(NARG)

```

```

V=V-3.0E0*COS(THETA)
NUM=INT(Z)+1
if ((Z.lt.0.0).or.(Z.gt.150.0)) goto 200
NF(NUM)=NF(NUM)+1.0
DS=0.0E0
30 continue
200 VF(i)=V
20 continue
do 40 i=1,NATOMOS
  write(1,*)VF0(i)
  write(2,*)VF(i)
40 continue
do 50 i=1,150
  write(3,*)i,NF(i)
50 continue
stop
end

real function B(Z)
implicit real (a-h,o-z)
common DELTA,CAMPO(0:150)
do 10 i=0,149
  if ((i.gt.Z).or.((i+1).le.Z)) goto 10
  B=CAMPO(i)+(CAMPO(i+1)-CAMPO(i))*(Z-i)
  goto 20
10 continue
20 return
end

real function DVDT(Z,V)
implicit real (a-h,k,m,o-z)
parameter (PI=3.14E0)
parameter (A=10.0E0,OMEGA=20.0E0)
common DELTA
K=0.017E0
MU=1.4E0
DVDT=(DELTA-MU*B(Z)+K*V)**2

```

```

DVDT=4.0E0*DVT+A**2+2.0E0*(OMEGA**2)
DVT=-6.0E6*PI*A*(OMEGA**2)/DVDT
return
end

subroutine LERCAMPO(CAMPO)
implicit real (a-h,o-z)
dimension CAMPO(0:150)
do 10 i=0,150
  read(119,*),CAMPO(i)
10 continue
return
end

subroutine VELINI(NARG,NATOMOS,VF0)
implicit real (a-h,k,m,o-z)
common DELTA
dimension VEL(100),RIND(100),VF0(NATOMOS)
K=0.017E0
MU=1.4E0
T=1000.0E0
MAX=(1500.0E0*MU-DELTA)/K
ALPHA=7225130.89E0*T
CONST=2.0E0/(ALPHA**2)
do 10 i=1,100
  AUX=i*MAX/100
  VEL(i)=AUX
  RIND(i)=CONST*(AUX**3)*EXP(-(AUX**2)/ALPHA)
10 continue
do 20 i=1,99
  RIND(i+1)=RIND(i+1)+RIND(i)
20 continue
do 30 i=1,NATOMOS
  AUX=RAN(NARG)*RIND(100)
  do 40 j=1,99
    if ((AUX.lt.RIND(j)).or.(AUX.ge.RIND(j+1))) goto 40
    VF0(i)=VEL(j)

```

```

      goto 30
40   continue
30   continue
      return
end

subroutine PROPAGUE(Z,V,DT)
implicit real (a-h,o-z)
if (Z.ge.150.0E0) goto 10
R0=V
S0=DVDT(Z,R0)
R1=V+S0*DT/2.0E0
S1=DVDT(Z+R0*DT/2.0E0,R1)
R2=V+S1*DT/2.0E0
S2=DVDT(Z+R1*DT/2.0E0,R2)
R3=V+S2*DT
S3=DVDT(Z+R2*DT,R3)
Z=Z+DT*(R0+2.0E0*(R1+R2)+R3)/6.0E0
V=V+DT*(S0+2.0E0*(S1+S2)+S3)/6.0E0
continue
10 return
end

```

A seguir, temos a listagem I, mostrando as velocidades iniciais seguidas de suas respectivas velocidades finais, em cm/s, para cada valor de Δ .

LISTAGEM I

<u>$\Delta = - 200 \text{ MHz}$</u>	
124470.6	69597.6
100117.6	68685.88
87941.17	69388.43
78470.59	68406.95

132588.2	132605.2
115000	69930.1
41941.18	39195.14
120411.8	68723.17
70352.94	61496.23
81176.47	68983.77
105529.4	72275.88
104176.5	68448.86
117705.9	70687.19
101470.6	71440.73
73058.82	63488.08
113647	71943.51
73058.82	61520.15
82529.41	68384.05
32470.59	26254.62
48705.88	45333.72
102823.5	67503.1
127176.5	71965.98
121764.7	71584.53
132588.2	132566
127176.5	70940.95
102823.5	69162.49
20294.12	6829.818
77117.64	68425.78
133941.2	133972.4
81176.47	70428.87
106882.4	68772.17
121764.7	66077.63
115000	70445.16
102823.5	66640.27
133941.2	133945.4
100117.6	68254.27
121764.7	69667.23
70352.94	60850.14
131235.3	131247.8
89294.11	68681.01
104176.5	67554.34

121764.7	70275.63
90647.05	69032
85235.29	70958.16
110941.2	69794.74
128529.4	127870.5
124470.6	69652.61
64941.18	56186.17
115000	67020.11
89294.11	69827.11

$\Delta = -150 \text{ MHz}$

90000	54498.46
96617.64	57107.25
68823.53	57541.15
78088.23	61120.64
97941.17	61871.88
121764.7	60560.34
95294.12	64614.67
75441.17	60408.75
66176.47	53568.59
76764.7	61810.27
90000	60777.15
96617.64	58778.76
128382.4	128387.9
116470.6	55368.39
97941.17	59496.14
103235.3	60716.71
92647.06	61752.83
121764.7	58663.83
92647.06	64342.88
112500	57027.43
115147.1	59448.59
62205.88	52785.36
83382.35	61445.08
91323.53	56315.02
54264.7	49797.64

79411.77	65190.31
99264.7	60559.63
62205.88	53258.79
33088.23	28517.87
82058.82	60656.97
123088.2	60784.71
86029.41	63661.46
91323.53	57240.98
117794.1	62744.03
125735.3	125187.9
107205.9	57621.57
78088.23	58423.02
35735.29	31747.73
79411.77	62032.69
111176.5	63184.82
87352.94	58860.3
105882.4	64216.22
41029.41	37725.76
117794.1	63196.26
63529.41	52526.42
121764.7	63476.3
87352.94	64172.68
70147.05	53403.48
116470.6	60790.14
120441.2	60966.57

$\Delta = - 100 \text{ MHz}$

85411.76	49529.32
59529.41	49539.96
86705.88	49489.94
128117.6	128128.7
76352.94	48831.95
77647.05	48715.54
110000	47739.72
62117.64	49110.43
108705.9	48927.33
88000	48693.73

77647.05	49012.71
111294.1	49147.71
99647.05	48587.7
72470.59	48308.16
53058.82	47327.05
122941.2	122411.1
42705.88	38593.05
86705.88	48944.89
78941.17	49291.99
124235.3	123882.2
56941.18	48249.64
65999.99	49494.82
90588.23	48627.02
102235.3	49416.97
65999.99	48735.27
116470.6	48747.63
95764.7	48269.6
76352.94	48726.02
99647.05	49288.54
95764.7	48363.08
113882.4	49544
28470.59	-1860.02
67294.12	48618.34
86705.88	49777.74
89294.11	49217.49
110000	48063.25
55647.05	47641.02
120352.9	49103.89
59529.41	49114.13
80235.29	49094.25
53058.82	46922.38
102235.3	48884.59
112588.2	49648.66
90588.23	48993.57
122941.2	122463.8
125529.4	125559.2
40117.64	35991.84

125529.4 125540.7
112588.2 48837.64
81529.41 50342.76

$\Delta = - 50 \text{ MHz}$

104970.6 44028.17
45529.41 40306.67
99911.76 43687.03
106235.3 43242.46
87264.7 44417.2
83470.58 44705.77
102441.2 44677.01
122676.5 122684
121411.8 121033.6
50588.23 43505.71
123941.2 123938
21500 128386.6
69558.82 43735.81
83470.58 44314.41
60705.88 44160.55
64500 44440.85
93588.23 43233.18
72088.23 44316.53
118882.3 117033.4
99911.76 44549.41
99911.76 44071.35
48058.82 41242.21
108764.7 44208.26
83470.58 44013.63
113823.5 43626.8
88529.4 43664.73
74617.64 44499.87
44264.7 38910.9
79676.47 44427.48
89794.11 45016.04
96117.64 43509.38

79676.47	44286
79676.47	44759.98
84735.29	44150.37
53117.64	43845.28
89794.11	44646.68
101176.5	44496.16
108764.7	43691.29
118882.3	117142.9
115088.2	43173.02
120147	119631
111294.1	44080.59
120147	119569.3
83470.58	43223.8
103705.9	42928.81
87264.7	44298.82
60705.88	43499.53
103705.9	43765.46
55647.05	44294.58
93588.23	44955.34

$\Delta = 0$

29647.06	72885.74
85235.29	38111.35
64235.29	38195.61
100058.8	38249.94
77823.52	37580.83
97588.23	38448.06
48176.47	36955.16
112411.8	37665.93
108705.9	37733.86
93882.35	38811.26
69176.47	38344.7
72882.35	37617.05
64235.29	38033.82
63000	38755.35
44470.59	36785.76

100058.8	37198.96
46941.18	37442.7
111176.5	37231.1
121058.8	121030.5
106235.3	38084.21
74117.65	37747.75
117352.9	116821.8
35823.53	28829.02
111176.5	37826.38
106235.3	37699.82
119823.5	119860.5
107470.6	37313.22
105000	37815.62
92647.05	37481.46
101294.1	38376.99
49411.77	38405.62
117352.9	116844.9
30882.35	97715.95
113647	38460.01
118588.2	118256.1
79058.82	38450.15
81529.41	38065.04
80294.12	37488.46
116117.6	114498.1
59294.11	37645.91
81529.41	38983.86
66705.88	37876.8
50647.05	37523.71
80294.12	37408.58
103764.7	37478.34
60529.41	37961.99
117352.9	116823.6
106235.3	38227.44
71647.05	37417.12
63000	37702.73

<u>$\Delta = + 50$</u>	MHz
56676.46	32600.24
53058.82	32460.75
119382.3	119385.6
107323.5	28603.19
101294.1	30677.57
42205.88	31585.69
100088.2	30003.59
102500	33125.55
116970.6	116928.6
119382.3	119368.8
67529.41	30540.73
88029.41	31154.72
91647.05	33351.98
73558.82	31666.05
62705.88	31767.86
74764.7	32953.01
85617.64	32589.97
104911.8	32833.17
103705.9	31209.33
77176.47	32453.77
90441.17	32785.56
116970.6	116977
92852.93	30880.23
79588.23	30142.29
75970.59	32351.31
48235.29	32492.01
92852.93	32370.85
34970.59	21595.88
100088.2	31824.97
59088.23	32729.34
88029.41	31644.48
118176.5	118160.7
102500	31237.27
84411.76	30911.37
67529.41	31709.87

114558.8	113991.2
68735.29	32000.58
112147	30395.63
59088.23	32216.04
62705.88	32524.1
113352.9	112061.5
119382.3	119385.1
51852.93	31957.56
97676.46	29869.48
78382.34	32331.9
104911.8	33252.43
91647.05	32255.62
74764.7	32237.3
51852.93	32051.07
44617.64	32463.72

$\Delta = + 100 \text{ MHz}$

79999.99	9872.841
71764.7	42673.73
51764.7	-4854.23
111764.7	111245.5
40000	17707.97
84705.88	-4924.66
109411.8	22015.17
112941.2	112580.4
108235.3	21940.13
65882.35	22695.62
72941.17	46235.37
111764.7	111253.4
81176.47	-5410.24
110588.2	109431.2
69411.76	-40107.2
115294.1	115299.3
69411.76	-33591.3
72941.17	60312.41
107058.8	-2830.66

96470.58	-3215.86
67058.82	56604.71
70588.23	6613.113
97647.06	48266.49
78823.52	11261.07
71764.7	13734.68
101176.5	-4271.80
69411.76	37682.24
81176.47	8417.235
67058.82	2142.21
101176.5	16062.61
105882.4	7000.892
107058.8	-21096.4
102352.9	14127.61
40000	16969.84
102352.9	37690.96
110588.2	109409
107058.8	8213.298
111764.7	111232.3
114117.6	114137.6
115294.1	115320.1
22352.94	12422.66
107058.8	43509.99
97647.06	47269.63
79999.99	-47062.4
85882.35	35712.84
67058.82	6497.304
71764.7	6738.279
94117.64	-1413.25
51764.7	-26636.9
34117.64	19682.05

$\Delta = + 150 \text{ MHz}$

58500	1923.828
92911.76	8288.696
96352.94	9436.661

79147.05	7195.292
105529.4	48943.61
99794.11	12755.27
58500	-239726.
100941.2	-6931.34
87176.47	-3477.22
55058.82	6183.39
66529.41	-6597.99
66529.41	1781.384
55058.82	48698.04
79147.05	44540.11
76852.94	5647.743
73411.76	-12561.9
112411.8	112402
32117.64	41418.62
51617.64	-4779.57
87176.47	50345.04
63088.23	-4198.74
77999.99	-2710.45
72264.7	20478.45
76852.94	-834.274
60794.11	-5284.26
84882.35	10900.4
87176.47	6864.524
105529.4	559.4396
108970.6	108477.6
60794.11	33305.89
91764.7	-1144.73
92911.76	21527.82
47029.41	-1296.49
107823.5	106814
71117.65	-35721.3
64235.29	-3783.19
108970.6	108535.9
68823.52	34688.62
108970.6	108453.2
103235.3	6590.406

80294.12	31333.57
87176.47	6271.42
66529.41	24827.25
95205.88	9649.464
108970.6	108474.4
89470.58	16817.68
87176.47	10257.64
69970.59	1652.451
110117.6	109834.9
92911.76	47708.66

$\Delta = + 200 \text{ MHz}$

71529.41	1921.948
101705.9	11045.88
52529.41	-21953.7
78235.29	17428.81
83823.52	9456.573
107294.1	106986.9
64823.53	10987.53
97235.29	34497.6
96117.64	13669.48
61470.59	-1946.63
80470.59	-28242.5
95000	37862.47
93882.35	34076.91
77117.65	4451.464
106176.5	105725.1
72647.05	7293.391
109529.4	109541.6
110647.1	110654
101705.9	-5715.37
95000	-261.124
72647.05	11079.54
80470.59	49490.81
70411.77	-1939.88
93882.35	-366389.

110647.1	110657.2
89411.76	-1748.29
108411.8	108401.1
81588.23	-59071.3
74882.35	14956.01
87176.47	2503.534
98352.94	7285.668
93882.35	5055.147
87176.47	4133.619
102823.5	5937.028
108411.8	108438.8
54764.7	8669.463
96117.64	-185317.
105058.8	104127.5
97235.29	17561.16
60352.94	10237.88
103941.2	-11625.5
93882.35	34047.11
49176.47	-2409.80
23470.59	-186997.
63705.88	20719.21
83823.52	7572.24
95000	9592.25
102823.5	-1757.86
82705.88	36429.14
77117.65	8694.668

A listagem II a seguir mostra as velocidades finais acima em ordem crescente e os valores relevantes utilizados no cálculo da velocidade final média.

LISTAGEM II

Os valores entre chaves {} não foram levados em conta para

os cálculos de \bar{V} e ΔV .

$$\Delta = - 200 \text{ MHz}$$

(6.8298180000E+03)

2.6254620000E+04

$$\bar{V} \approx 66136.85 \text{ cm/s}$$

3.9195140000E+04

$$\Delta V \approx 8867.99 \text{ cm/s}$$

4.5333720000E+04

5.6186170000E+04

6.0850140000E+04

6.1496230000E+04

6.1520150000E+04

6.3488080000E+04

6.6077630000E+04

6.6640270000E+04

6.7020110000E+04

6.7503100000E+04

6.7554340000E+04

6.8254270000E+04

6.8384050000E+04

6.8406950000E+04

6.8425780000E+04

6.8448860000E+04

6.8681010000E+04

6.8685880000E+04

6.8723170000E+04

6.8772170000E+04

6.8983770000E+04

6.9032000000E+04

6.9162490000E+04

6.9388430000E+04

6.9597600000E+04

6.9652610000E+04

6.9667230000E+04

6.9794740000E+04

6.9827110000E+04

6.9930100000E+04

7.0275630000E+04
7.0428870000E+04
7.0445160000E+04
7.0687190000E+04
7.0940950000E+04
7.0958160000E+04
7.1440730000E+04
7.1584530000E+04
7.1943510000E+04
7.1965980000E+04
7.2275880000E+04
{1.2787050000E+05}
{1.3124780000E+05}
{1.3256600000E+05}
{1.3260520000E+05}
{1.3394540000E+05}
{1.3397240000E+05}

$\Delta = - 150 \text{ MHz}$

{2.8517870000E+04}
3.1747730000E+04
3.7725760000E+04
4.9797640000E+04
5.2526420000E+04
5.2785360000E+04
5.3258790000E+04
5.3403480000E+04
5.3568590000E+04
5.4498460000E+04
5.5368390000E+04
5.6315020000E+04
5.7027430000E+04
5.7107250000E+04
5.7240980000E+04
5.7541150000E+04
5.7621570000E+04

$$\bar{v} \approx 57807.84 \text{ cm/s}$$
$$\Delta v \approx 7477.82 \text{ cm/s}$$

5.8423020000E+04
5.8663830000E+04
5.8778760000E+04
5.8860300000E+04
5.9448590000E+04
5.9496140000E+04
6.0408750000E+04
6.0559630000E+04
6.0560340000E+04
6.0656970000E+04
6.0716710000E+04
6.0777150000E+04
6.0784710000E+04
6.0790140000E+04
6.0966570000E+04
6.1120640000E+04
6.1445080000E+04
6.1752830000E+04
6.1810270000E+04
6.1871880000E+04
6.2032690000E+04
6.2744030000E+04
6.3184820000E+04
6.3196260000E+04
6.3476300000E+04
6.3661460000E+04
6.4172680000E+04
6.4216220000E+04
6.4342880000E+04
6.4614670000E+04
6.5190310000E+04
(1.2518790000E+05)
(1.2838790000E+05)

$\Delta = -100 \text{ MHz}$
(-1.8600200000E+03)

3.5991840000E+04	$v \approx 48314.08 \text{ cm/s}$
3.8593050000E+04	$\Delta v \approx 2534.63 \text{ cm/s}$
4.6922380000E+04	
4.7327050000E+04	
4.7641020000E+04	
4.7739720000E+04	
4.8063250000E+04	
4.8249640000E+04	
4.8269600000E+04	
4.8308160000E+04	
4.8363080000E+04	
4.8587700000E+04	
4.8618340000E+04	
4.8627020000E+04	
4.8693730000E+04	
4.8715540000E+04	
4.8726020000E+04	
4.8735270000E+04	
4.8747630000E+04	
4.8831950000E+04	
4.8837640000E+04	
4.8884590000E+04	
4.8927330000E+04	
4.8944890000E+04	
4.8993570000E+04	
4.9012710000E+04	
4.9094250000E+04	
4.9103890000E+04	
4.9110430000E+04	
4.9114130000E+04	
4.9147710000E+04	
4.9217490000E+04	
4.9288540000E+04	
4.9291990000E+04	
4.9416970000E+04	
4.9489940000E+04	
4.9494820000E+04	

4.9529320000E+04
4.9539960000E+04
4.9544000000E+04
4.9648660000E+04
4.9777740000E+04
5.0342760000E+04
 $\langle 1.2241110000E+05 \rangle$
 $\langle 1.2246380000E+05 \rangle$
 $\langle 1.2388220000E+05 \rangle$
 $\langle 1.2554070000E+05 \rangle$
 $\langle 1.2555920000E+05 \rangle$
 $\langle 1.2812870000E+05 \rangle$

$\Delta = - 50 \text{ MHz}$

3.8910900000E+04
4.0306670000E+04
4.1242210000E+04
4.2928810000E+04
4.3173020000E+04
4.3223800000E+04
4.3233180000E+04
4.3242460000E+04
4.3499530000E+04
4.3505710000E+04
4.3509380000E+04
4.3626800000E+04
4.3664730000E+04
4.3687030000E+04
4.3691290000E+04
4.3735810000E+04
4.3765460000E+04
4.3845280000E+04
4.4013630000E+04
4.4028170000E+04
4.4071350000E+04
4.4080590000E+04

$\bar{v} \approx 43776.36 \text{ cm/s}$
 $\Delta v \approx 1152.397 \text{ cm/s}$

4.4150370000E+04
4.4160550000E+04
4.4208260000E+04
4.4286000000E+04
4.4294580000E+04
4.4298820000E+04
4.4314410000E+04
4.4316530000E+04
4.4417200000E+04
4.4427480000E+04
4.4440850000E+04
4.4496160000E+04
4.4499870000E+04
4.4549410000E+04
4.4646680000E+04
4.4677010000E+04
4.4705770000E+04
4.4759980000E+04
4.4955340000E+04
4.5016040000E+04
<1.1703340000E+05>
<1.1714290000E+05>
<1.1956930000E+05>
<1.1963100000E+05>
<1.2103360000E+05>
<1.2268400000E+05>
<1.2393800000E+05>
<1.2838660000E+05>

$\Delta = 0$

<2.8829020000E+04>
3.6785760000E+04
3.6955160000E+04
3.7198960000E+04
3.7231100000E+04
3.7313220000E+04

$\bar{v} \approx 37865.07 \text{ cm/s}$

$\Delta v \approx 498.48 \text{ cm/s}$

3.7408580000E+04
3.7417120000E+04
3.7442700000E+04
3.7478340000E+04
3.7481460000E+04
3.7488460000E+04
3.7523710000E+04
3.7580830000E+04
3.7617050000E+04
3.7645910000E+04
3.7665930000E+04
3.7699820000E+04
3.7702730000E+04
3.7733860000E+04
3.7747750000E+04
3.7815620000E+04
3.7826380000E+04
3.7876800000E+04
3.7961990000E+04
3.8033820000E+04
3.8065040000E+04
3.8084210000E+04
3.8111350000E+04
3.8195610000E+04
3.8227440000E+04
3.8249940000E+04
3.8344700000E+04
3.8376990000E+04
3.8405620000E+04
3.8448060000E+04
3.8450150000E+04
3.8460010000E+04
3.8755350000E+04
3.8811260000E+04
3.8983860000E+04
(7.2885740000E+04)
(9.7715950000E+04)

<1.1449810000E+05>
<1.1682180000E+05>
<1.1682360000E+05>
<1.1684490000E+05>
<1.1825610000E+05>
<1.1986050000E+05>
<1.2103050000E+05>

$\Delta = + 50 \text{ MHz}$

2.1595880000E+04
2.8603190000E+04
2.9869480000E+04
3.0003590000E+04
3.0142290000E+04
3.0395630000E+04
3.0540730000E+04
3.0677570000E+04
3.0880230000E+04
3.0911370000E+04
3.1154720000E+04
3.1209330000E+04
3.1237270000E+04
3.1585690000E+04
3.1644480000E+04
3.1666050000E+04
3.1709870000E+04
3.1767860000E+04
3.1824970000E+04
3.1957560000E+04
3.2000580000E+04
3.2051070000E+04
3.2216040000E+04
3.2237300000E+04
3.2255620000E+04
3.2331900000E+04
3.2351310000E+04

$\bar{v} \approx 31566.86 \text{ cm/s}$
 $\Delta v \approx 1858.62 \text{ cm/s}$

3.2370850000E+04
3.2453770000E+04
3.2460750000E+04
3.2463720000E+04
3.2492010000E+04
3.2524100000E+04
3.2589970000E+04
3.2600240000E+04
3.2729340000E+04
3.2785560000E+04
3.2833170000E+04
3.2953010000E+04
3.3125550000E+04
3.3252430000E+04
3.3351980000E+04
<1.1206150000E+05
<1.1399120000E+05
<1.1692860000E+05
<1.1697700000E+05
<1.1816070000E+05
<1.1936880000E+05
<1.1938510000E+05
<1.1938560000E+05

$\Delta = + 100 \text{ MHz}$

<-4.7062400000E+04>
<-4.0107200000E+04>
<-3.3591300000E+04>
<-2.6636900000E+04>
<-2.1096400000E+04>
-5.4102400000E+03
-4.9246600000E+03
-4.8542300000E+03
-4.2718000000E+03
-3.2158600000E+03
-2.8306600000E+03

$$\bar{v} \approx 16359.86 \text{ cm/s}$$

$$\Delta v \approx 16597.17 \text{ cm/s}$$

-1.4132500000E+03
2.1422100000E+03
6.4973040000E+03
6.6131130000E+03
6.7382790000E+03
7.0008920000E+03
8.2132980000E+03
8.4172350000E+03
9.8728410000E+03
1.1261070000E+04
1.2422660000E+04
1.3734680000E+04
1.4127610000E+04
1.6062610000E+04
1.6969840000E+04
1.7707970000E+04
1.9682050000E+04
2.1940130000E+04
2.2015170000E+04
2.2695620000E+04
3.5712840000E+04
3.7682240000E+04
3.7690960000E+04
4.2673730000E+04
4.3509990000E+04
4.6235370000E+04
4.7269630000E+04
4.8266490000E+04
(5.6604710000E+04)
(6.0312410000E+04)
(1.0940900000E+05)
(1.0943120000E+05)
(1.1123230000E+05)
(1.1124550000E+05)
(1.1125340000E+05)
(1.1258040000E+05)
(1.1413760000E+05)

<1.1529930000E+05>

<1.1532010000E+05>

$\Delta = + 150$ MHz

<-2.3972600000E+05>

-3.5721300000E+04

-1.2561900000E+04

-6.9313400000E+03

-6.5979900000E+03

-5.2842600000E+03

-4.7795700000E+03

-4.1987400000E+03

-3.7831900000E+03

-3.4772200000E+03

-2.7104500000E+03

-1.2964900000E+03

-1.1447300000E+03

-8.3427400000E+02

5.5943960000E+02

1.6524510000E+03

1.7813840000E+03

1.9238280000E+03

5.6477430000E+03

6.1833900000E+03

6.2714200000E+03

6.5904060000E+03

6.8645240000E+03

7.1952920000E+03

8.2886960000E+03

9.4366610000E+03

9.6494640000E+03

1.0257640000E+04

1.0900400000E+04

1.2755270000E+04

1.6817680000E+04

2.0478450000E+04

$\bar{V} \simeq 11458.81$ cm/s

$\Delta V \simeq 19129.39$ cm/s

2.1527820000E+04
2.4827250000E+04
3.1333570000E+04
3.3305890000E+04
3.4688620000E+04
4.1418620000E+04
4.4540110000E+04
4.7708660000E+04
4.8698040000E+04
4.8943610000E+04
5.0345040000E+04
(1.0681400000E+05)
(1.0845320000E+05)
(1.0847440000E+05)
(1.0847760000E+05)
(1.0853590000E+05)
(1.0983490000E+05)
(1.1240200000E+05)

$\Delta = + 200 \text{ MHz}$

(-3.6638900000E+05)
(-1.8699700000E+05)
(-1.8531700000E+05)
(-5.9071300000E+04)
-2.8242500000E+04
-2.1953700000E+04
-1.1625500000E+04
-5.7153700000E+03
-2.4098000000E+03
-1.9466300000E+03
-1.9398800000E+03
-1.7578600000E+03
-1.7482900000E+03
-2.6112400000E+02
1.9219480000E+03
2.5035340000E+03

$$\bar{v} \approx 9448.84 \text{ cm/s}$$

$$\Delta v \approx 15661.39 \text{ cm/s}$$

4.1336190000E+03
4.4514640000E+03
5.0551470000E+03
5.9370280000E+03
7.2856680000E+03
7.2933910000E+03
7.5722400000E+03
8.6694630000E+03
8.6946680000E+03
9.4565730000E+03
9.5922500000E+03
1.0237880000E+04
1.0987530000E+04
1.1045880000E+04
1.1079540000E+04
1.3669480000E+04
1.4956010000E+04
1.7428810000E+04
1.7561160000E+04
2.0719210000E+04
3.4047110000E+04
3.4076910000E+04
3.4497600000E+04
3.6429140000E+04
3.7862470000E+04
4.9490810000E+04
(1.0412750000E+05)
(1.0572510000E+05)
(1.0698690000E+05)
(1.0840110000E+05)
(1.0843880000E+05)
(1.0954160000E+05)
(1.1065400000E+05)
(1.1065720000E+05)

REFERENCIAS

- (1) Stig Stenholm, Rev. Modern Phys. 58, 699 (1986)
- (2) R. Frisch, Z. Phys. 86, 42 (1933)
- (3) V. S. Bagnato, J. C. Castro, M. Siu Li, S. C. Zilio, Rev. Bras. Fis. 18, 411 (1988)
- (4) R. J. Cook, Phys. Rev. A 22, 1078 (1980)
- (5) L. Allen, J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two-Level Atoms" (Wiley, New York, 1975)
- (6) J. Savolainen, S. Stenholm, AJP 40, 667 (1972)
- (7) W. Heitler, "The Quantum Theory of Radiation", 3^a. ed. (Oxford University Press, London, 1970), p. 69
- (8) P. W. Milonni, Phys. Rep. C 25 (1976)
- (9) W. H. Louisell, "Quantum Statistical Properties of Radiation" (Wiley, New York, 1973)
- (10) R. J. Cook, Phys. Rev. A 20, 224 (1979)
- (11) J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J. Opt. Soc. Am. B 2, 1707 (1985)
- (12) William D. Phillips, John V. Prodan, Harold J. Metcalf, J. Opt. Soc. Am. B 2, 1751 (1985)
- (13) W. D. Phillips, H. J. Metcalf, Phys. Rev. Lett. 48, 596 (1982)
- (14) M. E. Firmino et al, submetido à Rev. Bras. Instr.
- (15) Shan S. Kuo, "Computer Applications of Numerical Methods" (Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1972)
- (16) V. S. Bagnato, A. Aspect, S. C. Zilio, Optics Communications

72 , 76 (1989)

- (17) N. F. Ramsey, "Molecular Beams" (Oxford Press, 1963)
- (18) R. Blatt, W. Ertmer, P. Zoller, J. L. Hall, Phys. Rev. A 34 , 3022 (1986)
- (19) H. Wallis, W. Ertmer, J. Phys. B 21 , 2999 (1988)