UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

OK

"TEORIAS DE CALIBRE NA REDE
COM SIMETRIA $Z(N)$ "

Fernando Dantas Nobre

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, para a obtenção do título de Mestre em Física Básica.

Orientador:

Prof. Dr. Roland Köberle

São Carlos

1981

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

FERNANDO DANTAS NOBRE

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNI
VERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22 DE Junho DE 19 81.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Roland Küberle - Orientador

Dr. Luis Nunes de Oliveira

Dr. Francisco Castilho Alcaraz

A meus pais

À Cristina, Mônica e
Maria Angélica (que
já se foi)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Roland Köberle pelo apoio e orientação deste trabalho.

Ao Prof. Francisco Alcaraz pelas inúmeras sugestões e discussões que muito contribuíram para este trabalho.

Ao colega Antônio Caliri pela grande ajuda nos trabalhos de computação.

Aos colegas Drugowich, Cressoni e Hindembergue pelo interesse e estímulo constante.

À Marta pelo excelente trabalho de datilografia.

A todo o Departamento de Física do Instituto de Física e Química de São Carlos pelo carinho que sempre recebi.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II	- CONSIDERAÇÕES GERAIS	5
CAPÍTULO III	- A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA E TRANSFORMAÇÕES DE DUALIDADE	11
3.1	- A matriz de transferência para o modelo de calibre em cubos para quatro dimensões	11
3.2	- Dualidade entre o sistema de calibre em cubos e um sistema de spins a quatro dimensões	17
3.3	- Autodualidade do sistema de calibre em cubos para seis dimensões	22
CAPÍTULO IV	- FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO INVARIANTES POR TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE	28
4.1	- Funções de correlação invariantes por transformações de calibre para o $Z(2)$	29
4.1.1	- Região de altas temperaturas	30
4.1.2	- Região de baixas temperaturas	31
4.1.3	- Caso particular para três dimensões	35
4.2	- Funções de correlação invariantes por transformações de calibre para $Z(N)$	41
4.2.1	- Região de altas temperaturas	42
4.2.2	- Região de baixas temperaturas	45
4.2.3	- Caso particular para três dimensões	48
4.2.4	- Potências da função de correlação $W(\Omega)$	51
CAPÍTULO V	- O MODELO DE CUBOS PARA VARIÁVEIS CONTÍNUAS $U(1)$..	54
5.1	- O modelo de cubos com campos de calibre	56
5.2	- O modelo de cubos com campos de calibre e campos de matéria	61

CAPÍTULO VI - O MODELO DE CUBOS EM TRÊS DIMENSÕES (SOLU-
ÇÕES EXATAS) 66

6.1 - Variáveis contínuas $U(1)$ 67

6.2 - Variáveis discretas $Z(N)$ 69

CAPÍTULO VII - CONCLUSÃO 75

APÊNDICE A 77

APÊNDICE B 83

APÊNDICE C 84

APÊNDICE D 87

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 90

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1	- O elo que liga os pontos r e $r+\mu$	5
FIGURA 2	- Uma face nas direções μ, ν	6
FIGURA 3	- Um cubo nas direções μ, ν, λ	6
FIGURA 4	- Uma plaqueta orientada	7
FIGURA 5	- As plaquetas orientadas que emanam de um elo em três dimensões	9
FIGURA 6	- Plano formado pelas direções $\hat{j}$ e $\hat{6}$, mostrando as transformações de calibre sucessivas nos elos $(r, \hat{j})$	24
FIGURA 7	- Linha de spins virados mostrando as duas frustra- ções das extremidades, para uma rede em três dimensões	36
FIGURA 8	- A superfície Ω sendo a superfície externa de um paralelepípedo	40
FIGURA 9	- Um pequeno volume V na forma de paralelepípe- do com suas variáveis S e S^+ associadas em cada face	42
FIGURA 10	- A função $G_2(H)$ cujo máximo nos dá a energia livre de Helmholtz por sítio da rede, para $N=2$, na aproximação de campo médio	81
FIGURA 11	- A função $G_6(H)$ cujo máximo nos dá a energia livre de Helmholtz por sítio da rede, para $N=6$, na aproximação de campo médio	82

RESUMO

Discutimos um modelo de calibre com simetria $Z(N)$ na rede, sendo as variáveis dinâmicas definidas em faces de cubos. Mostramos a dualidade com um sistema de spins $Z(N)$ em quatro dimensões e a autodualidade em seis dimensões para este modelo, utilizando o formalismo da matriz de transferência. Analisamos as funções de correlação invariantes por transformações de calibre, constatando os decaimentos exponenciais com o volume (para altas temperaturas e $d \geq 3$) e com a área (para baixas temperaturas e $d > 3$). Para três dimensões, o modelo não apresenta transição de fase, sendo exatamente solúvel. Estudamos também a versão $U(1)$ do modelo e mostramos sua equivalência com uma teoria de campos clássica livre na região de baixas temperaturas.

ABSTRACT

We discuss a model with a $Z(N)$ gauge symmetry on a lattice, the dynamical variables being defined on faces of cubes. The duality with a $Z(N)$ spin system in four dimensions and the selfduality in six dimensions is shown for this model, using the transfer matrix formalism. The gauge invariant correlation functions have been analysed and we verify their exponential decay with volume (at high temperatures and $d \geq 3$) and with the area (at low temperatures and $d > 3$). For three dimensions, the model exhibits no phase transition, being exactly soluble. We also study a $U(1)$ version of our model and show its equivalence with a free classical field theory in the low temperature region.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Um dos maiores problemas que a Física encontra no momento é o da construção de uma única teoria de campos que governe as interações fraca, eletromagnética e forte. As teorias de calibre não Abelianas, como propostas por Yang-Mills⁽¹⁾, têm se mostrado de uma grande importância no estudo destas interações. A teoria de Weinberg-Salam⁽²⁾ por exemplo, que unifica as interações fracas e eletromagnéticas, possui uma simetria de calibre não Abelianas, devido à existência de correntes carregadas para as interações fracas. As interações fortes não foram até agora, incluídas em um esquema de unificação junto com as interações fracas e eletromagnéticas.

Para as interações fortes, a teoria no momento mais aceitável, é a Cromodinâmica Quântica (QCD)⁽³⁾. As partículas fundamentais nesta teoria são os quarks; eles possuem números quânticos não observáveis, de cor e de sabor. Os hadrons, que são as partículas que participam das interações fortes, por sua vez se subdividem em bárions e mésons. A hipótese da QCD é de que os bárions são estados ligados de três quarks com cores diferentes, enquanto que os mésons são estados ligados de um par quark-antiquark. A QCD é uma teoria renormalizável, com simetria de calibre local $SU(3)$ para a cor e uma simetria global $SU(N)$ para o sabor.

Resultados experimentais nos levam a crer que uma teoria para descrever as interações fortes deve obedecer à duas condições:

i) liberdade assintótica: é a propriedade de que os quarks se comportam como livres para pequenas distâncias, ou melhor, a constante de acoplamento diminui com a distância;

ii) confinamento de quarks: é a propriedade de que os quarks não podem ser isolados.

A primeira condição é satisfeita pela QCD uma vez que teorias de calibre não Abelianas em quatro dimensões (espaço contínuo) são assintoticamente livres⁽⁴⁾⁽⁵⁾. No tratamento da segunda condição, precisamos analisar o comportamento da teoria para grandes distâncias; nos deparamos então, com as divergências infravermelhas, de maneira que o confinamento de quarks ainda é um problema aberto para a QCD no contínuo.

As teorias de calibre na rede propostas por Wegner⁽⁶⁾ em 1971, foram utilizadas pela primeira vez na tentativa de satisfazer as duas condições mencionadas acima, por Wilson⁽⁷⁾ em 1974.

No estudo das teorias de campos renormalizáveis é necessário a introdução de um corte Λ para momentos grandes, quando tratamos com as divergências ultravioleta; a rede introduz um comprimento fundamental, cujo inverso funciona como um corte ultravioleta. Há várias maneiras de se introduzir uma rede; numa delas, permanecemos no espaço de Minkowski e somente as dimensões espaciais são discretizadas. É então possível quantizar a teoria de uma maneira canônica e utilizar o formalismo Hamiltoniano⁽⁸⁾.

Uma outra possibilidade, que será utilizada neste trabalho, consiste em discretizar todas as dimensões, temporal e espaciais. Inicialmente, passamos do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano com tempo imaginário. Neste espaço, introduzimos uma rede hipercúbica com espaçamento a (perdemos a invariância contínua por transformações de Lorentz, ou melhor, invariância Euclidiana); a escolha deste tipo específico de rede não é fundamental e qualquer outra rede pode ser utilizada. A quantização da teoria é feita utilizando-se o método das integrais funcionais de Feynman.

A grande vantagem de se trabalhar na métrica Euclidiana

é que a teoria de campos na rede se identifica com a mecânica estatística, como podemos ver nas correspondências abaixo⁽⁹⁾; o fato de utilizarmos um tempo imaginário não nos leva a grandes restrições, uma vez que os resultados para tempo real podem ser obtidos por continuação analítica. Temos então as seguintes correspondências:

<u>Teoria de Campos</u>	<u>Mecânica Estatística</u>
Ação	Energia de uma configuração
Integral funcional no vácuo	Função de partição
Propagador	Função de correlação de dois pontos
Massa	Inverso do comprimento fundamental da rede a ($m=1/\xi a$) ξ = comprimento de correlação
Constante de acoplamento	Temperatura

Portanto, uma vez formulada a teoria de campos na rede, passamos a ter um problema de mecânica estatística. O primeiro passo a tratar no problema de mecânica estatística é determinar o diagrama de fases do sistema; o comportamento da teoria na região crítica deve ser conhecido, como por exemplo, a ordem da transição entre duas fases. Somente se a transição for contínua (2a. ordem ou ordem superior), é que podemos obter uma teoria de campos contínua, relativística e com massa finita, a partir da teoria na rede. Este procedimento é feito utilizando a técnica do grupo de renormalização⁽¹⁰⁾ no ponto crítico, onde o comprimento de correlação diverge.

Um dos grandes méritos das teorias de calibre na rede é exibir o confinamento de quarks para acoplamentos fortes, de uma maneira bastante simples⁽⁷⁻⁹⁾. Precisa-se então mostrar a existência da liberdade assintótica para acoplamentos fracos e que a teo

ria não apresenta transição de fase (para acoplamentos diferentes de zero), coexistindo em uma mesma fase, liberdade assintótica e confinamento.

No estudo das teorias de calibre não Abelianas $SU(N)$, o centro do grupo, $Z(N)$, desempenha papel fundamental; há desigualdades que implicam no confinamento da teoria de calibre $SU(N)$, caso a teoria $Z(N)$ correspondente seja confinante⁽¹¹⁾⁽¹²⁾. Em particular, a importância do grupo $Z(3)$ na simetria de calibre $SU(3)$ para a cor na QCD, foi ressaltada por 't Hooft⁽¹³⁾ e Polyakov⁽¹⁴⁾. Portanto, o estudo das teorias de calibre com simetria Abelianas $Z(N)$, é um passo muito importante no conhecimento de teorias mais complicadas com simetria de calibre não Abelianas $SU(N)$.

A teoria com simetria de calibre na rede, mais comum é a teoria de plaquetas⁽⁹⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾. Neste trabalho, procuramos desenvolver uma teoria de calibre com simetria $Z(N)$ na rede, definida em objetos de dimensão maior do que a plaqueta: os cubos. No capítulo II, definimos as transformações de calibre e construímos uma ação invariante. No Capítulo III, estudamos a matriz de transferência e transformações de dualidade; a dualidade com um sistema de spins $Z(N)$ em quatro dimensões, nos permite usar para o nosso modelo, resultados obtidos por uma aproximação de campo médio para este sistema de spins. No Capítulo IV, estudamos as funções de correlação invariantes por transformações de calibre, inicialmente para $Z(2)$ e depois generalizamos para variáveis $Z(N)$. O Capítulo V consiste na formulação do nosso modelo para variáveis contínuas $U(1)$; na região de baixas temperaturas, esta teoria se identifica com uma teoria de campos clássica livre. No Capítulo VI, analisamos este modelo em três dimensões; a solução exata é apresentada tanto para variáveis contínuas $U(1)$, como para variáveis discretas $Z(N)$. Finalmente no Capítulo VII, apresentamos de uma forma sucinta, os resultados obtidos neste trabalho e extrapolamos estes resultados para teorias de calibre na rede, formuladas em objetos com um simplex qualquer.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Consideremos uma rede em d dimensões; inicialmente, introduziremos as notações que vamos utilizar no decorrer deste trabalho, para representar os entes geométricos desta rede.

O ponto ou sítio, pode ser designado pelo conjunto de números inteiros,

$$r = (x_1, x_2, \dots, x_d) \text{ .}$$

O elo ou ligação, sendo um objeto unidimensional, pode ser especificado por um dos pontos a que ele se liga e a direção ao longo da qual ele se estende (veja figura 1). Podemos então denotá-lo de duas maneiras,

$$(r, \mu) \quad \text{ou} \quad (r + \mu; -\mu)$$

FIG. 1 - O elo que liga os pontos r e $r + \mu$

A face ou plaqueta, quadrado elementar da rede, sendo um objeto bidimensional, pode ser especificado por um de seus quatro vértices e suas duas direções. Estas direções podem receber os sinais positivo ou negativo, dependendo do sentido que elas assumem ao longo da face, partindo do vértice escolhido (veja figura 2) . Podemos então denotar uma face de quatro formas:

$$[r;\mu,v], [r+\mu;-\mu,v], [r+\mu+v;-\mu,-v] \text{ e } [r+v;\mu,-v]$$

FIG. 2 - Uma face nas direções μ, v

O volume elementar da rede, que chamaremos de cubo, será especificado então por um de seus oito vértices e suas três direções. Aqui também, estas direções podem receber os sinais positivo ou negativo, dependendo do sentido que elas assumem ao longo do cubo, partindo do vértice escolhido. Algumas das maneiras de representar o cubo da figura 3 são

$$\{r;\mu,v,\lambda\}, \{r+\mu;-\mu,v,\lambda\}, \{r+v+\lambda;\mu,-v,-\lambda\}, \{r+\mu+v+\lambda;-\mu,-v,-\lambda\}$$

FIG. 3 - Um cubo nas direções μ, v, λ

Vamos relembrar como é construído o modelo com simetria de calibre $Z(N)$ mais comum ⁽⁹⁾, ⁽¹⁵⁾, ⁽¹⁶⁾, que é a teoria de

calibre em plaquetas. Coloca-se variáveis de spin $Z(N)$ nos elos,

$$S(r, \mu) = e^{i \frac{2\pi}{N} n(r, \mu)}$$

onde $n(r, \mu) = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Definimos uma transformação de calibre $G(r)$, que aplicada no ponto r gira de $\frac{2\pi}{N}$ ($-\frac{2\pi}{N}$) as variáveis de spin em elos paralelos (antiparalelos) aos vetores de base. O termo mais simples com esta simetria é a plaqueta orientada; dá-se uma orientação para a plaqueta (veja figura 4) de maneira que nas variáveis de spin em elos antiparalelos aos vetores de base toma-se o complexo conjugado:

$$A_p[r; \mu, \nu] = S(r, \mu) S(r + \mu; \nu) S^+(r + \mu + \nu; -\mu) S^+(r + \nu; -\nu) \quad (\text{II.1a})$$

FIG. 4 - Uma plaqueta orientada

A ação com invariância local $Z(N)$ mais utilizada é

$$A = - \sum_p \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_{\alpha}}{2} [(A_p)^{\alpha} + \text{c.c.}] \quad (\text{II.1b})$$

onde $\bar{N}$ é a parte inteira de $N/2$; $J_1, J_2, \dots, J_{\bar{N}}$, são constantes de acoplamento sempre reais enquanto que $\sum_p$ denota uma soma sobre todas as plaquetas da rede.

Podemos no entanto, formular modelos com simetria de

calibre em objetos com dimensões maiores do que a plaqueta⁽⁶⁾. Para cubos por exemplo, colocaremos variáveis de spin $Z(N)$ nas faces,

$$S[r;\mu,\nu] = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} n[r;\mu,\nu]\right) \quad \text{onde } n[r;\mu,\nu] = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Convencionaremos que $S[r;\mu,\nu] = S^+[r;\nu,\mu]$ o que implica em $n[r;\mu,\nu] = -n[r;\nu,\mu]$. Há uma interpretação geométrica para isto; sendo $S[r;\mu,\nu] = \exp(i\phi[r;\mu,\nu])$, onde $\phi[r;\mu,\nu]$ é um ângulo medido em um sentido como por exemplo, no sentido de μ para ν , quando fazemos $\mu \leftrightarrow \nu$ trocamos os eixos de forma que $\phi[r;\mu,\nu] = -\phi[r;\nu,\mu]$.

Definiremos uma transformação de calibre local $G(r,\nu)$ como a operação:

- convencionaremos que o elo (r,ν) onde é aplicada a transformação de calibre seja orientado paralelamente a um dos vetores de base; automaticamente, todas as plaquetas que emanam deste elo são orientadas;
- pela regra do parafuso, podemos associar a cada uma destas plaquetas um vetor normal como mostra a figura 5 para três dimensões;
- nossa transformação de calibre $G(r,\nu)$ produz uma rotação de $\frac{2\pi}{N}$ ($-\frac{2\pi}{N}$) nas variáveis localizadas em faces cujos vetores normais são paralelos (ou antiparalelos) aos vetores de base.

Uma outra maneira de visualizarmos a operação $G(r,\nu)$ é a seguinte: se orientarmos o elo (r,ν) paralelamente a um dos vetores de base, para um observador neste elo com a frente voltada no sentido da seta, teremos uma rotação de $\frac{2\pi}{N}$ ($-\frac{2\pi}{N}$) para variáveis de spin em faces acima ou à esquerda (abaixo ou à direita) do elo (r,ν) .

FIG. 5 - As quatro plaquetas orientadas que emanam do elo (r, v) em 3 dimensões; cada plaqueta está associada a um vetor normal.

O termo mais simples com esta simetria, é o "cubo orientado": se orientarmos os vetores normais saindo do cubo, nas variáveis de spin em faces com vetores normais antiparalelos aos vetores de base, toma-se o complexo conjugado. Para o cubo da figura 3 teremos:

$$A_C\{r; \mu, \nu, \lambda\} = S[r + \lambda; \mu, \nu] S[r + \mu; \nu, \lambda] S[r + \nu; \lambda, \mu] S^+[r; \mu, \nu] \times \\ \times S^+[r; \nu, \lambda] S^+[r; \lambda, \mu] \quad (\text{II.2a})$$

Uma maneira equivalente de representar este cubo seria por exemplo,

$$A_C\{r + \mu + \nu + \lambda; -\mu, -\nu, -\lambda\} = S[r + \mu + \nu + \lambda; -\mu, -\nu] S[r + \mu + \nu + \lambda; -\nu, -\lambda] \times \\ \times S[r + \mu + \nu + \lambda; -\lambda, -\mu] S^+[r + \mu + \nu; -\mu, -\nu] S^+[r + \nu + \lambda, -\nu, -\lambda] \times \\ \times S^+[r + \mu + \lambda; -\lambda, -\mu] \quad (\text{II.2b})$$

Utilizaremos neste trabalho, a ação com invariância local $Z(N)$ dada por

$$A = - \sum_C \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} [(A_C)^\alpha + c.c.] \quad (II.3)$$

onde $\sum_C$ denota uma soma sobre todos os cubos da rede.

Este modelo, com variáveis de spin nas faces, transformações de calibre aplicadas nos elos e cubos invariantes é o modelo que estudaremos no decorrer deste trabalho.

CAPÍTULO III

A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA E TRANSFORMAÇÕES DE DUALIDADE

3.1 - A matriz de transferência para o modelo de calibre em cubos para quatro dimensões

Consideremos uma rede em $3+1$ dimensões (3 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal); adotaremos condições de contorno periódicas,

$$S[r + M_\mu \mu; \nu, \lambda] = S[r; \nu, \lambda]$$

onde μ, ν, λ podem assumir qualquer das quatro direções, enquanto que M_μ é o número de pontos na direção μ .

A ação (II.3) pode ser escrita como

$$A = - \sum_r \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\sum_{\substack{\mu, \nu, \lambda \\ \mu < \nu < \lambda}} \{ (S[r+\lambda; \mu, \nu] S[r+\mu; \nu, \lambda] S[r+\nu; \lambda, \mu] \times \right. \\ \left. \times S^+[r; \mu, \nu] S^+[r; \nu, \lambda] S^+[r; \lambda, \mu])^\alpha + \text{c.c} - 2 \} \right] \quad (\text{III.1})$$

Vamos definir um calibre temporal da seguinte maneira : todas as variáveis de spin em faces que possuem elos na direção temporal, serão fixados iguais à unidade. Se denominarmos as direções espaciais como $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ e a direção temporal como $\hat{4}$, podemos ver que isto é sempre possível: por meio de transformações de calibre em cada elo $(r, \hat{i})$, fixamos

$$S[r'; \hat{4}, \hat{i}] = S[r'; \hat{i}, \hat{4}] = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad (\text{III.2})$$

Em (III.1), podemos desmembrar a soma sobre todos os cubos da rede em duas partes: uma soma sobre todos os cubos espaciais, ou melhor, cubos com elos somente nas direções espaciais e

uma outra sobre todos os cubos espaço-temporais, ou seja, cubos com elos em duas direções espaciais e uma temporal; fazendo isso, e usando (III.2) temos:

$$\begin{aligned}
 A = - \sum_{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_{\alpha}}{2} [& \{ (s[\vec{r}+\hat{3};\hat{1},\hat{2}] s[\vec{r}+\hat{1};\hat{2},\hat{3}] s[\vec{r}+\hat{2};\hat{3},\hat{1}] \times \\
 & \times s^{+}[\vec{r};\hat{1},\hat{2}] s^{+}[\vec{r};\hat{2},\hat{3}] s^{+}[\vec{r};\hat{3},\hat{1}])^{\alpha} + \text{c.c.} - 2 \} + \\
 & + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \{ (s[\vec{r}+\hat{4};\hat{i},\hat{j}] s^{+}[\vec{r};\hat{i},\hat{j}])^{\alpha} + \text{c.c.} - 2 \}] \quad (\text{III.3})
 \end{aligned}$$

Em um tempo particular $t = t_0$, o estado do nosso sistema é descrito por um vetor no espaço de Hilbert gerado por

$$\begin{aligned}
 |n\rangle = \prod_{\vec{r}} & |n[\vec{r}+\hat{3};\hat{1},\hat{2}]\rangle \otimes |n[\vec{r}+\hat{1};\hat{2},\hat{3}]\rangle \otimes \\
 & \otimes |n[\vec{r}+\hat{2};\hat{3},\hat{1}]\rangle \otimes |n[\vec{r};\hat{1},\hat{2}]\rangle \otimes \\
 & \otimes |n[\vec{r};\hat{2},\hat{3}]\rangle \otimes |n[\vec{r};\hat{3},\hat{1}]\rangle
 \end{aligned}$$

onde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$; todos os produtos são produtos diretos e $|n[\underline{P}]\rangle$ descreve o estado de um spin na plaqueta $[\underline{P}]$, em $t = t_0$ (usaremos frequentemente a notação $[\underline{P}]$ para descrever uma face qualquer $[\underline{r};\mu,\nu]$). Escolheremos $|n[\underline{P}]\rangle$ como autoestados do operador unitário $\hat{S}[\underline{P}]$,

$$\hat{S}[\underline{P}] |n[\underline{P}]\rangle = \ell^{\frac{i2\pi}{N} n[\underline{P}]} |n[\underline{P}]\rangle \quad (n[\underline{P}] = 0, 1, 2 \dots N-1) \quad (\text{III.4})$$

Calcularemos agora, a matriz de transferência T que é o operador cujos elementos de matriz são $\ell^{-\beta A}$:

$$\begin{aligned}
 \langle n|T|n'\rangle = \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} & \left[\exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (s[\vec{r}+\hat{3};\hat{1},\hat{2}] s[\vec{r}+\hat{1};\hat{2},\hat{3}] s[\vec{r}+\hat{2};\hat{3},\hat{1}] \times \right. \\
 & \times s^{+}[\vec{r};\hat{1},\hat{2}] s^{+}[\vec{r};\hat{2},\hat{3}] s^{+}[\vec{r};\hat{3},\hat{1}])^{\alpha} + \text{c.c.} - 2 \} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (S[\vec{r}+\hat{4};\hat{i},\hat{j}] S^{\dagger}[\vec{r};\hat{i},\hat{j}])^{\alpha} + \text{c.c} - 2 \} \quad (\text{III.5})$$

onde $K_{\alpha} = \beta J_{\alpha}$ e $|n\rangle$ e $|n'\rangle$ são vetores de estado de dois conjuntos de cubos vizinhos na direção temporal, ou melhor, conjuntos de cubos separados por um espaçamento na direção temporal. Nossa matriz de transferência pode ser escrita como o produto de dois operadores, $T = T_1 T_2$; T_1 é diagonal uma vez que contém somente interações em um mesmo conjunto de cubos e seus elementos de matriz são

$$\begin{aligned} \langle n | T_1 | n \rangle &= \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (S[\vec{r}+\hat{3};\hat{1},\hat{2}] S[\vec{r}+\hat{1};\hat{2},\hat{3}] \times \\ &\quad \times S[\vec{r}+\hat{2};\hat{3},\hat{1}] S^{\dagger}[\vec{r};\hat{1},\hat{2}] S^{\dagger}[\vec{r};\hat{2},\hat{3}] \times \\ &\quad \times S^{\dagger}[\vec{r};\hat{3},\hat{1}])^{\alpha} + \text{c.c} - 2 \} \quad . \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

Baseados em (III.4), trocaremos os autovalores em (III.6) por operadores que atuam no espaço produto

$$\hat{S}[\vec{P}] = I \otimes I \otimes \dots \otimes \hat{S}[\vec{P}] \otimes I \otimes \dots \otimes I$$

de forma que podemos escrever

$$\begin{aligned} T_1 &= \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (\hat{S}[\vec{r}+\hat{3};\hat{1},\hat{2}] \hat{S}[\vec{r}+\hat{1};\hat{2},\hat{3}] \times \\ &\quad \times \hat{S}[\vec{r}+\hat{2};\hat{3},\hat{1}] \hat{S}^{\dagger}[\vec{r};\hat{1},\hat{2}] \hat{S}^{\dagger}[\vec{r};\hat{2},\hat{3}] \times \\ &\quad \times \hat{S}^{\dagger}[\vec{r};\hat{3},\hat{1}])^{\alpha} + \text{h.c} - 2 \} \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

onde aqui o "+" significa a conjugação hermitiana dos operadores.

A segunda parte da matriz de transferência não é diagonal; ela contém interações entre conjuntos de cubos vizinhos na direção temporal. Seus elementos de matriz são:

$$\begin{aligned} \langle n | T_2 | n' \rangle = & \sum_{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \exp \frac{K}{2} \{ (S[\vec{r} + \hat{4}; \hat{i}, \hat{j}] \times \\ & \times S^+[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}])^\alpha + \text{c.c.} - 2 \} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Para expressar T_2 em termos de operadores, vamos introduzir o operador de rotação $\hat{R}[\underline{P}]$, que atuando na face $[\underline{P}]$, gira o spin nesta face por um ângulo $2\pi/N$:

$$\hat{R}[\underline{P}] |n[\underline{P}]\rangle = |n[\underline{P}] + 1\rangle \pmod{N} \quad . \quad (\text{III.9})$$

Convencionaremos aqui também que $\hat{R}[\underline{r}; \mu, \nu] = \hat{R}^+[\underline{r}; \nu, \mu]$; nossos operadores básicos satisfazem a

$$\begin{aligned} \hat{R}^N[\underline{P}] &= 1 ; \quad \hat{R}^\alpha[\underline{P}] \hat{R}^\beta[\underline{P}] = \hat{R}^\beta[\underline{P}] \hat{R}^\alpha[\underline{P}] = \hat{R}^{\alpha+\beta}[\underline{P}] \\ \hat{S}^N[\underline{P}] &= 1 ; \quad \hat{S}^\alpha[\underline{P}] \hat{S}^\beta[\underline{P}] = \hat{S}^\beta[\underline{P}] \hat{S}^\alpha[\underline{P}] = \hat{S}^{\alpha+\beta}[\underline{P}] \end{aligned} \quad (\text{III.10a})$$

As expressões (III.4) e (III.9) nos levam a

$$\begin{aligned} \hat{S}[\underline{P}] \hat{R}[\underline{P}] |n[\underline{P}]\rangle &= \hat{S}[\underline{P}] |n[\underline{P}] + 1\rangle = \ell^{\frac{i2\pi}{N}(n[\underline{P}]+1)} |n[\underline{P}] + 1\rangle = \\ &= \ell^{\frac{i2\pi}{N}(n[\underline{P}] + 1)} \hat{R}[\underline{P}] |n[\underline{P}]\rangle = \ell^{\frac{i2\pi}{N}} \hat{R}[\underline{P}] \hat{S}[\underline{P}] |n[\underline{P}]\rangle \end{aligned}$$

ou melhor, nossos operadores $\hat{S}[\underline{P}]$ e $\hat{R}[\underline{P}']$ satisfazem a

$$\begin{aligned} \hat{S}[\underline{P}] \hat{R}[\underline{P}'] &= \hat{R}[\underline{P}'] \hat{S}[\underline{P}] \quad \text{se } \underline{P} \neq \underline{P}' \\ \hat{S}[\underline{P}] \hat{R}[\underline{P}] &= \ell^{\frac{i2\pi}{N}} \hat{R}[\underline{P}] \hat{S}[\underline{P}] \end{aligned} \quad (\text{III.10b})$$

como também a

$$\begin{aligned} \hat{S}[\underline{P}] \hat{R}^+[\underline{P}'] &= \hat{R}^+[\underline{P}'] \hat{S}[\underline{P}] \quad \text{se } \underline{P} \neq \underline{P}' \\ \hat{S}[\underline{P}] \hat{R}^+[\underline{P}] &= \ell^{-\frac{i2\pi}{N}} \hat{R}^+[\underline{P}] \hat{S}[\underline{P}] \end{aligned} \quad (\text{III.10c})$$

Ambos $\hat{S}[P]$ e $\hat{R}[P]$ possuem traço nulo:

$$\text{Tr } \hat{S}[P] = \sum_{n[P]=0}^{N-1} \langle n[P] | \hat{S}[P] | n[P] \rangle = \sum_{n[P]=0}^{N-1} \ell \frac{i2\pi}{N} n[P] = 0$$

$$\text{Tr } \hat{R}[P] = \sum_{n[P]=0}^{N-1} \langle n[P] | \hat{R}[P] | n[P] \rangle = \sum_{n[P]=0}^{N-1} \langle n[P] | n[P] + 1 \rangle = 0$$

(III.10d)

A expressão (III.8) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle n | T_2 | n' \rangle = & \frac{\pi}{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \exp K_{\alpha} \left\{ \cos \frac{2\pi}{N} \alpha (n[\vec{r} + \hat{4}; \hat{i}, \hat{j}] - \right. \\ & \left. - n[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}]) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Utilizando o fato de que

$$\langle n[P'] | \hat{R}^{\beta}[P] | n[P] \rangle = \delta_{n[P'], n[P] + \beta} \pmod{N}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle n | T_2 | n' \rangle = & \frac{\pi}{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \sum_{\beta=0}^{N-1} \langle n[\vec{r} + \hat{4}; \hat{i}, \hat{j}] | \hat{R}^{\beta}[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] | n[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \rangle \\ & \exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha \beta - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

A segunda parte da matriz de transferência será então

$$T_2 = \frac{\pi}{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \sum_{\beta=0}^{N-1} \hat{R}^{\beta}[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha \beta - 1) \quad (\text{III.13})$$

Usando a identidade⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta=0}^{N-1} \hat{R}^{\eta} \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} K_{\alpha} \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta - 1 \right) \right\} = \\
& = \exp \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_{\alpha}(K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}})}{2} (\hat{R}^{\alpha} + \text{h.c.}) \right\} \quad (\text{III.14})
\end{aligned}$$

podemos escrever T_2 como exponencial de um operador:

$$T_2 = \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \exp \left\{ \frac{f_{\alpha}(K_1, \dots, K_{\bar{N}})}{2} (\hat{R}^{\alpha} [\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] + \text{h.c.}) \right\} \quad (\text{III.15})$$

As expressões (III.7) e (III.15) nos levam a

$$\begin{aligned}
T = & \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (\hat{S}[\vec{r}+\hat{3}; \hat{1}, \hat{2}] \hat{S}[\vec{r}+\hat{1}; \hat{2}, \hat{3}] \hat{S}[\vec{r}+\hat{2}; \hat{3}, \hat{1}] \hat{S}^+[\vec{r}; \hat{1}, \hat{2}] \times \\
& \times \hat{S}^+[\vec{r}; \hat{2}, \hat{3}] \hat{S}^+[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}])^{\alpha} + \text{h.c.} - 2 \} \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^{\pi} \exp \frac{f_{\alpha}}{2} \times \\
& \times (\hat{R}^{\alpha} [\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] + \text{h.c.}) \quad (\text{III.16})
\end{aligned}$$

Daqui para frente, omitiremos a notação de chapéu para os operadores; fica subentendido, no entanto, que sempre que trabalharmos com a matriz de transferência, estamos lidando com operadores.

Veja que em (III.16) temos operadores em uma rede tridimensional; o operador T conecta conjuntos vizinhos de cubos na direção temporal. O método da matriz de transferência, frequentemente usado na solução de problemas de mecânica estatística, reduz um problema em d dimensões para um em $(d-1)$ dimensões; entretanto, o problema que era anteriormente tratado em termos de variáveis de spin clássicas, passará agora a ser tratado por meio de operadores quânticos.

Veremos agora, a relação entre o operador matriz de

transferência e a função de partição. Podemos escrever,

$$\langle n|T|n'\rangle = \ell^{-\beta A(n,n')} \quad (\text{III.17})$$

onde $A(n,n')$ é a ação referente tanto a interações em um mesmo conjunto de cubos, como a interações entre dois conjuntos de cubos vizinhos na direção temporal. A função de partição do nosso sistema fica portanto,

$$Z = \sum_{\{n\}} \ell^{-\beta [A(n_1,n_2)+A(n_2,n_3)+\dots+A(n_{M_4},n_1)]}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{n\}} \langle n_1|T|n_2\rangle \langle n_2|T|n_3\rangle \dots \langle n_{M_4}|T|n_1\rangle = \\ &= \sum_{n_1} \langle n_1|T^{M_4}|n_1\rangle = \text{Tr}(T^{M_4}) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

que nos dá a função de partição a partir da matriz de transferência, para o nosso modelo em quatro dimensões.

3.2 - Dualidade entre o sistema de calibre em cubos e um sistema de spins a quatro dimensões

Consideremos objetos s simplex em uma rede d dimensional; uma transformação dual é, por definição, uma operação que leva estes objetos em outros objetos $(d-s)$ simplex, ainda em uma rede d dimensional, ou melhor,

$$\tilde{s} = d-s$$

onde $\tilde{s}$ é o simplex do objeto dual.

Efetuiremos uma transformação de dualidade diretamente no operador matriz de transferência (III.16); sendo nosso sistema agora tridimensional, definiremos os pontos da rede dual como

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad .$$

O calibre temporal (III.2) não elimina completamente nosa liberdade de calibre; podemos ainda aplicar transformações de calibre que afetam somente as variáveis de spin em faces espaciais (veja a seção 3.3). Como nosso interesse é calcular médias de grandezas invariantes por transformações de calibre, nos restringiremos ao subespaço das configurações invariantes, ou melhor,

$$G(\vec{r}, \hat{i}) |n\rangle = |n\rangle \quad (i = 1, 2, 3)$$

Portanto, uma transformação de calibre no elo $(\vec{r}, \hat{3})$ nos leva a

$$G(\vec{r}, \hat{3}) = R[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] R^+[\vec{r}; \hat{3}, -\hat{1}] R[\vec{r}; \hat{3}, \hat{2}] R^+[\vec{r}; \hat{3}, -\hat{2}] = 1 \quad .$$

Escolheremos as variáveis $R[\vec{r}; \hat{3}, \hat{2}]$ como independentes de maneira que teremos

$$R^+[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] = \prod_{n \geq 0} R[\vec{r} - n\hat{1}; \hat{3}, \hat{2}] R^+[\vec{r} - n\hat{1}; \hat{3}, -\hat{2}] \quad . \quad (\text{III.19a})$$

Um procedimento análogo para uma transformação de calibre no elo $(\vec{r}, \hat{2})$ nos permite escrever

$$R^+[\vec{r}; \hat{2}, \hat{1}] = \prod_{n \geq 0} R[\vec{r} - n\hat{1}; \hat{2}, \hat{3}] R^+[\vec{r} - n\hat{1}; \hat{2}, -\hat{3}] \quad . \quad (\text{III.19b})$$

Vemos então que todos os termos da matriz de transferência (III.16) comutam com $S[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}]$ e $S[\vec{r}; \hat{2}, \hat{1}]$. Podemos assim fixar completamente as configurações representativas de calibre, escolhendo o calibre axial:

$$S[\vec{r}; \hat{j}, \hat{1}] = 1 \quad (j = 2, 3) \quad .$$

Desta maneira, os únicos operadores independentes são

$$S[\vec{r}; \hat{3}, \hat{2}] \text{ e } R[\vec{r}; \hat{3}, \hat{2}] .$$

Em três dimensões, o dual do cubo é o ponto; podemos então definir o operador dual

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r}) &= S[\vec{r} + \hat{3}; \hat{1}, \hat{2}] S[\vec{r} + \hat{1}; \hat{2}, \hat{3}] S[\vec{r} + \hat{2}; \hat{3}, \hat{1}] S^+[\vec{r}; \hat{1}, \hat{2}] S^+[\vec{r}; \hat{2}, \hat{3}] \\ S^+[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] &= S[\vec{r} + \hat{1}; \hat{2}, \hat{3}] S^+[\vec{r}; \hat{2}, \hat{3}] \end{aligned} \quad (\text{III.20a})$$

que é um operador que descreve estados de cubos. Definiremos ainda um operador não local, chamado de operador de desordem como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n \geq 0} \pi R^+[\vec{r} - n\hat{1}; \hat{3}, \hat{2}] . \quad (\text{III.20b})$$

Este operador "gira" de $2\pi/N$ todos os operadores $S[\vec{r}'; \hat{3}, \hat{2}]$ para

$$\vec{r}' = \vec{r}, \vec{r} - \hat{1}, \vec{r} - 2\hat{1} \dots \vec{r} - M_1 \hat{1} .$$

Estes operadores duais satisfazem à mesma álgebra que os operadores da rede original:

$$\begin{aligned} \sigma^N(\vec{r}) &= \rho^N(\vec{r}) = 1 \\ \rho(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) &= e^{i2\pi/N} \sigma(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \\ \rho(\vec{r}') \sigma(\vec{r}) &= \sigma(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \quad \text{para } \vec{r}' \neq \vec{r} \\ \text{Tr } \rho(\vec{r}) &= \text{Tr } \sigma(\vec{r}) = 0 \end{aligned}$$

A definição (III.20b) e as expressões (III.19) nos permitem escrever

$$\begin{aligned} \rho^+(\vec{r}) \rho(\vec{r} - \hat{1}) &= R^+[\vec{r} - \hat{1}; \hat{3}, \hat{2}] \\ \rho^+(\vec{r}) \rho(\vec{r} - \hat{2}) &= R^+[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] \\ \rho^+(\vec{r}) \rho(\vec{r} - \hat{3}) &= R[\vec{r}; \hat{2}, \hat{1}] \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Usando (III.21) e (III.20a) em (III.16), podemos escrever a matriz de transferência em termos dos operadores duais:

$$T_D = \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ [\sigma(\vec{r})]^{\alpha} + \text{h.c.} - 2 \} \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \prod_k \exp \frac{f_{\alpha}}{2} \{ [\rho^+(\vec{r}) \times \rho(\vec{r} + \vec{k})]^{\alpha} + \text{h.c.} \} \quad (\text{III.22})$$

A menos de fatores multiplicativos constantes, esta é a matriz de transferência para um sistema de spins $Z(N)$ colocados nos pontos $\vec{r}$; $\rho(\vec{r})$ representa os operadores de spin, enquanto que $\sigma(\vec{r})$ representam os operadores de rotação. Lembrando de (III.18), e da propriedade cíclica do traço, podemos escrever para as funções de partição referentes a (III.16) e (III.22):

$$Z_{\text{calibre em cubos}}(\{K_{\alpha}\}, \{f_{\alpha}\}) = C Z_{\text{spins}}(\{f_{\alpha}\}, \{K_{\alpha}\})$$

onde C é uma constante irrelevante.

Portanto, a transformação de dualidade $S, R \rightarrow \rho, \sigma$ em quatro dimensões, leva nosso modelo de calibre com simetria $Z(N)$, com acoplamentos $\{K_{\alpha}\}$, em um sistema de spins $Z(N)$, com constantes de acoplamento $\{f_{\alpha}\}$. Uma nova transformação dual nos levaria é claro, de volta ao modelo original. Esta é uma operação que nos permite um mapeamento entre dois modelos diferentes, por uma simples mudança nas constantes de acoplamento $\{K_{\alpha}\} \leftrightarrow \{f_{\alpha}\}$, sendo então denominada de transformação de dualidade no sentido geral.

As transformações de dualidade são operações que descrevem um mapeamento entre modelos em Mecânica Estatística. Às vezes, um modelo nunca estudado ou difícil de ser tratado, pode ser analisado facilmente se o seu dual é um modelo bem conhecido. Podemos ter no entanto, modelos que por meio de uma transformação de dualidade são levados a eles próprios: são chamados de autodu-

ais. Uma transformação de dualidade que corresponde simplesmente a uma mudança na temperatura, é denominada de transformação de dualidade no sentido Kramers-Wannier⁽¹⁷⁾.

O resultado obtido nesta seção nos permite conhecer algumas características do nosso modelo em quatro dimensões. Alca - raz⁽¹⁶⁾, utilizando aproximação de campo médio para um número qual - quer de dimensões, estudou os diagramas de fases para sistemas de spins com simetria $Z(N)$. Repetimos estes cálculos (ver Apêndice A) e constatamos os mesmos resultados; eles se aplicam para o nosso modelo em quatro dimensões, desde que façamos a troca $\{K_\alpha\} \leftrightarrow \{f_\alpha\}$. Acreditamos que esta aproximação seja boa uma vez que para $N=2$ ela nos fornece resultados que concordam muito bem com os obtidos utilizando técnica de simulação de Monte Carlo⁽²⁵⁾. Sistemas de spins $Z(2)$ apresentam sempre uma única transição, con - tínua (2a. ordem ou ordem superior), em torno de $K_{1c}d = 1/2$, ou em quatro dimensões, $K_{1c} = 0,125$. Para $N=3$, obtivemos uma única tran - sição, de 1a. ordem, em torno de $K_{1c} = 0,231$. Para $N > 3$, analisa - mos inicialmente o modelo Potts escalar⁽¹⁸⁾, que é o modelo onde $J_1 = J_2 = \dots = \left[\frac{3 + (-1)^N}{2} \right] \frac{J_N}{N}$; obtivemos uma única transição, de 1a. ordem, para $N \geq 4$. À medida que diminuimos as razões

$$\frac{J_2}{J_1}, \dots, \left[\frac{3 + (-1)^N}{2} \right] \frac{J_N}{J_1},$$

alterações ocorrem no nosso modelo. Para $N=4$ por exemplo, em tor - no de

$$\frac{2J_2}{J_1} = 0,35,$$

a transição que anteriormente era de 1a. ordem, passa a ser conti - nua; para $N=5$, em torno de

$$\frac{J_2}{J_1} = 0,55,$$

além da transição já existente de 1a. ordem, surge uma nova tran -

sição, sendo esta agora, contínua. Para $N > 5$, uma nova transição, contínua, surge também quando nos deslocamos neste sentido. Para o modelo Potts vetorial, que é o modelo onde $J_1 \neq 0, J_2 = \dots = J_{\frac{N}{2}} = 0$, obtivemos para $N = 4$, uma única transição, contínua, em torno de $K_{lc} = 0,25$; para $N \geq 5$, além da transição contínua em torno de $K_{lc} = 0,25$, constatamos também uma outra transição, sendo esta de 1a. ordem, para uma temperatura bem mais baixa.

3.3 - Autodualidade do sistema de calibre em cubos para seis dimensões

Tomemos agora, uma rede em $(5+1)$ dimensões; continuaremos com as condições de contorno periódicas,

$$S[r + M_\mu; \nu, \lambda] = S[r; \nu, \lambda]$$

e com a mesma ação que em (III.1), só que agora, $r = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, enquanto que μ, ν, λ são versores que podem assumir qualquer uma das seis direções.

Aqui também, podemos utilizar um calibre temporal, de maneira que

$$S[r'; \hat{6}, \hat{i}] = S[r'; \hat{i}, \hat{6}] = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (\text{III.23})$$

onde $\hat{6}$ foi a direção que escolhemos como sendo a direção temporal.

Em (III.1), dividimos a soma sobre todos os cubos da rede, em uma soma sobre os cubos espaciais e outra soma sobre os cubos temporais, teremos:

$$A = - \sum_r \sum_{\alpha=1}^{\frac{N}{2}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\sum_{\substack{ijk \\ i < j < k}} \{ (S[r+\hat{k}; \hat{i}, \hat{j}] S[r+\hat{i}; \hat{j}, \hat{k}] S[r+\hat{j}; \hat{k}, \hat{i}])^\alpha + \text{c.c} - 2 \} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j'k' \\ j' < k'}} (S[r+\hat{6}; \hat{j}', \hat{k}'] S[r; \hat{j}', \hat{k}'])^\alpha + \text{c.c} - 2 \right] \quad (\text{III.24})$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{j}', \hat{k}'$ são versores em qualquer das direções espaciais $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$.

Os mesmos cálculos que nos levaram de (III.3) a (III.16) podem nos dar o operador matriz de transferência,

$$\begin{aligned}
 T = & \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \prod_{\substack{ijk \\ i < j < k}}^{\pi} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (S[\vec{r} + \hat{k}; i, j] S[\vec{r} + \hat{i}; j, k] \times \\
 & \times S[\vec{r} + \hat{j}; k, i] S^+[\vec{r}; i, j] S^+[\vec{r}; j, k] S^+[\vec{r}; k, i])^{\alpha} + \\
 & + \text{h.c} - 2 \} \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \prod_{\substack{j'k' \\ j' < k'}}^{\pi} \exp \frac{f_{\alpha}}{2} (R^{\alpha}[\vec{r}; j', k'] + \text{h.c})
 \end{aligned}
 \tag{III.25}$$

onde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

O calibre temporal (III.23) não elimina completamente nossa liberdade de calibre; podemos ainda aplicar transformações de calibre espaciais, ou melhor, transformações que só afetam variáveis de spin em faces espaciais. Podemos ver isto simplesmente, se por exemplo aplicarmos transformações de calibre em toda uma linha de elos em uma direção espacial qualquer $\hat{j}$, como mostra a figura 6. Nas faces $[\vec{r}; \hat{j}, \hat{6}]$ cada variável de spin sofre uma rotação de $2\pi/N$ e em seguida uma outra rotação de $-2\pi/N$, o que mantém $S[\vec{r}; \hat{j}, \hat{6}] = 1$. No entanto, todas as variáveis nas outras faces que emanam dos elos $(\vec{r}, \hat{j})$, que são faces constituídas somente por elos espaciais, serão transformadas. Temos então, transformações de calibre espaciais. Podemos expressar estas transformações em termos dos operadores de rotação:

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}, \hat{j}) = & R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{k}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{k}] R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{\ell}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{\ell}] \times \\
 & \times R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{m}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{m}] R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{i}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{i}]
 \end{aligned}
 \tag{III.26}$$

onde i, j, k, ℓ, m são permutações cíclicas de $1, 2, 3, 4, 5$.

Se nos restringirmos ao subespaço das configurações invariantes por transformações de calibre, ou seja, o subespaço onde:

$$G(\vec{r}, \hat{j}) |n\rangle = |n\rangle$$

teremos a identidade

$$G(\vec{r}, \hat{j}) = 1 \quad . \quad (III.27)$$

FIG. 6 - Plano formado pelas direções $\hat{j}$ e $\hat{g}$; ao aplicarmos transformações de calibre sucessivas nos elos (r, j) , não alteramos o calibre temporal $S[r; \hat{j}, \hat{g}] = 1$.

Usando (III.27) em (III.26) podemos escrever

$$\begin{aligned} R^+[\vec{r}; \hat{j}, \hat{k}] &= R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{k}] R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{\ell}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{\ell}] \times \\ &\times R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{m}] R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{m}] R[\vec{r}; \hat{j}, \hat{i}] \times \\ &\times R^+[\vec{r}; \hat{j}, -\hat{i}] \quad . \end{aligned} \quad (III.28)$$

Transformações de calibre sucessivas nos elos $(r-\hat{k}, \hat{j})$, $(r-2\hat{k}, \hat{j})$... nos levam a

$$\begin{aligned}
R^+[\vec{r}; \hat{j}, \hat{k}] &= \prod_{n \geq 0} R[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, \hat{\ell}] R^+[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, -\hat{\ell}] \times \\
&\times R[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, \hat{m}] R^+[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, -\hat{m}] \times \\
&\times R[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, \hat{i}] R^+[\vec{r} - n\hat{k}; \hat{j}, -\hat{i}] \quad (\text{III.29})
\end{aligned}$$

Introduziremos agora uma rede dual deslocada da rede original de tal forma que

$$\vec{r} = \vec{r} + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Na matriz de transferência (III.25) temos operadores em uma rede a cinco dimensões; podemos associar o produto de operadores formando o cubo (3 simplex) da rede original a uma variável de face (5-3 simplex) da rede dual:

$$\begin{aligned}
\sigma[\vec{r}; \hat{\ell}, \hat{m}] &= S[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m} + \hat{k}; \hat{i}, \hat{j}] S[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m} + \hat{i}; \hat{j}, \hat{k}] \times \\
&\times S[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m} + \hat{j}; \hat{k}, \hat{i}] S^+[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m}; \hat{i}, \hat{j}] S^+[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m}; \hat{j}, \hat{k}] \times \\
&\times S^+[\vec{r} + \hat{\ell} + \hat{m}; \hat{k}, \hat{i}] \quad (\text{III.30})
\end{aligned}$$

onde i, j, k, ℓ, m são permutações cíclicas de $1, 2, 3, 4, 5$.

Definiremos o operador de desordem não local na rede dual como

$$\rho[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] = \prod_{n \geq 0} R[\vec{r} - n\hat{k} + \hat{i} + \hat{j}; \hat{\ell}, \hat{m}] \quad (\text{III.31})$$

sendo aqui também, i, j, k, ℓ, m permutações cíclicas de $1, 2, 3, 4, 5$.

Nossos operadores duais satisfazem à mesma álgebra que os operadores da rede original:

$$\begin{aligned}
\sigma^N[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] &= \rho^N[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] = 1 \\
\rho[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \sigma[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] &= \ell^{i2\pi/N} \sigma[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \rho[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \quad (\text{III.32}) \\
\rho[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \sigma[\vec{r}'; \hat{i}', \hat{j}'] &= \sigma[\vec{r}'; \hat{i}', \hat{j}'] \rho[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \text{ se } \vec{r} \neq \vec{r}' \text{ ou} \\
&\quad i' \neq i, \text{ ou } j' \neq j
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\sigma[\vec{r};\hat{i},\hat{j}] &= \sigma^+[\vec{r};\hat{j},\hat{i}] \\ \rho[\vec{r};\hat{i},\hat{j}] &= \rho^+[\vec{r};\hat{j},\hat{i}]\end{aligned}\tag{III.33}$$

uma vez que um número ímpar de permutações seria necessário para obtermos os operadores $\sigma[\vec{r};\hat{j},\hat{i}]$ e $\rho[\vec{r};\hat{j},\hat{i}]$ a partir das expressões (III.30) e (III.31) respectivamente.

A expressão (III.29) pode ser escrita para uma face $[\vec{r};\hat{\ell},\hat{m}]$ como

$$\begin{aligned}R^+[\vec{r};\hat{\ell},\hat{m}] &= \prod_{n \geq 0} R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},\hat{i}] R^+[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},-\hat{i}] \times \\ &\times R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},\hat{j}] R^+[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},-\hat{j}] R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},\hat{k}] \times \\ &\times R^+[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},-\hat{k}]\end{aligned}\tag{III.34}$$

Usando (III.31) e (III.33) podemos escrever

$$\begin{aligned}\rho^+[\vec{r};-\hat{j},-\hat{k}] &= \prod_{n \geq 0} R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},\hat{i}] \\ \rho^+[\vec{r};-\hat{k},-\hat{i}] &= \prod_{n \geq 0} R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},\hat{j}] \\ \rho^+[\vec{r};-\hat{i},-\hat{j}] &= \prod_{n \geq 0} R[\vec{r}-n\hat{m};\hat{\ell},+\hat{k}]\end{aligned}$$

de maneira que (III.34) fica

$$\begin{aligned}R^+[\vec{r};\hat{\ell},\hat{m}] &= \rho[\vec{r}-\hat{i};-\hat{j},-\hat{k}] \rho[\vec{r}-\hat{j};-\hat{k},-\hat{i}] \rho[\vec{r}-\hat{k};-\hat{i},-\hat{j}] \times \\ &\times \rho^+[\vec{r};-\hat{j},-\hat{k}] \rho^+[\vec{r};-\hat{k},-\hat{i}] \rho^+[\vec{r};-\hat{i},-\hat{j}]\end{aligned}\tag{III.35}$$

A expressão (III.35) é exatamente a ação de cubo $A_c\{\vec{r};-\hat{i},-\hat{j},-\hat{k}\}$ que temos em (II.2b), escrita em termos dos operadores duais. A matriz de transferência (III.25) pode então ser escrita em termos dos operadores duais:

$$\begin{aligned}
T_D = & \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \prod_{\substack{\ell m \\ \ell < m}}^{\pi} \exp \frac{K_{\alpha}}{2} \{ (\sigma[\vec{r}; \hat{\ell}, \hat{m}])^{\alpha} + \text{h.c.} - 2 \} \times \\
& \prod_{\vec{r}} \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \prod_{\substack{ijk \\ i < j < k}}^{\pi} \exp \frac{f_{\alpha}}{2} \{ (\rho[\vec{r} + \hat{k}; \hat{i}, \hat{j}]) \times \\
& \times \rho[\vec{r} + \hat{i}; \hat{j}, \hat{k}] \rho[\vec{r} + \hat{j}; \hat{k}, \hat{i}] \rho^+[\vec{r}; \hat{i}, \hat{j}] \rho^+[\vec{r}; \hat{j}, \hat{k}] \times \\
& \times \rho^+[\vec{r}; \hat{k}, \hat{i}] + \text{h.c.} \} \quad (\text{III.36})
\end{aligned}$$

que a menos de fatores multiplicativos constantes, possui a mesma forma que a matriz de transferência definida em termos dos operadores na rede original.

Uma expressão análoga a (III.18) vale aqui também para seis dimensões; desta maneira, usando a propriedade cíclica do traço, temos

$$Z(\{K_{\alpha}\}, \{f_{\alpha}\}) = C' Z(\{f_{\alpha}\}, \{K_{\alpha}\})$$

onde C' é uma constante irrelevante.

Esta transformação de dualidade em seis dimensões leva nosso modelo de calibre com simetria $Z(N)$ com acoplamentos $\{K_{\alpha}\}$, no mesmo modelo com constantes de acoplamento $\{f_{\alpha}\}$. A transformação dual promove então, uma simples mudança nas constantes de acoplamento $\{K_{\alpha}\} \leftrightarrow \{f_{\alpha}\}$. Portanto, nosso modelo em seis dimensões é autodual num sentido geral.

A propriedade de autodualidade nos permite tirar informações importantes sobre a região crítica de um sistema qualquer. Existe um conjunto de pontos no espaço ($\bar{N}$ dimensional) dos parâmetros $K_1, \dots, K_{\bar{N}}$, denominados pontos fixos, que são invariantes pela transformação de dualidade; eles formam uma superfície chamada de superfície autodual. Para modelos que apresentam uma única transição de fase, a superfície autodual coincide com a própria superfície crítica.

CAPÍTULO IV

FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO INVARIANTES POR TRANSFORMAÇÕES
DE CALIBRE

A primeira formulação de uma teoria de calibre na rede foi devido a F. Wegner⁽⁶⁾ em 1971, utilizando variáveis de Ising ou $Z(2)$ ($\sigma = \pm 1$), chamada usualmente de Ising-calibre. Inspirado no modelo planar bidimensional, seu objetivo era obter modelos que não apresentassem magnetização espontânea, mas que no entanto, mostrassem transições de fase. Wegner suspeitava que teorias com uma invariância de calibre local na rede não apresentavam parâmetros de ordem local diferentes de zero. Este é um teorema que foi provado mais tarde por Elitzur⁽¹⁹⁾. Tínhamos então o seguinte problema: como rotular as fases de uma teoria com simetria de calibre local?

Wegner inventou uma função de correlação não local, invariante por transformações de calibre para variáveis de Ising, como sendo o produto das variáveis de spin nos elos em torno de um contorno fechado C :

$$W(C) = \prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) \quad (\text{IV.1})$$

É fácil notar que uma transformação de calibre qualquer aplicada em um dos pontos da rede, inverte um número par de spins (0 ou 2) em C , o que deixa $W(C)$ invariante.

Esta função de correlação apesar de ter sido inventada por Wegner, é mais conhecida atualmente como alça de Wilson (Wilson loop). Wegner ainda mostrou o comportamento desta função de correlação como sendo

$$\langle W(C) \rangle \simeq \ell^{-A(C)} \quad (\text{IV.2a})$$

para altas temperaturas, onde $A(C)$ é a área mínima delimitada por C , enquanto que

$$\langle W(C) \rangle \approx e^{-P(C)} \quad (\text{IV.2b})$$

para baixas temperaturas, onde $P(C)$ é o perímetro da curva C .

Podemos também formular funções de correlação não locais, invariantes por transformações de calibre para o nosso modelo. Por razões de simplicidade, trabalharemos inicialmente com variáveis $Z(2)$; depois então, analisaremos o caso mais geral para variáveis $Z(N)$.

4.1 - Funções de correlação invariantes por transformações de calibre para o $Z(2)$

Tomemos um volume V formado por um número inteiro de cubos; chamaremos de Ω a superfície fechada que engloba este volume. Colocaremos variáveis de spin de Ising, $S[P] = \pm 1$, em cada uma das faces da rede, de maneira que podemos definir uma função de correlação invariante por transformações de calibre,

$$W(\Omega) = \prod_{P \in \Omega} S[P] \quad (\text{IV.3})$$

como sendo o produto de todas as variáveis de spin em faces ao longo da superfície fechada Ω . A invariância de $W(\Omega)$ é evidente: ao aplicarmos uma transformação de calibre em qualquer elo da rede, um número par de spins (0 ou 2) ao longo da superfície Ω inverterão de sinal, não alterando assim nossa função de correlação.

Para variáveis $Z(2)$, a ação (II.3) fica simplesmente

$$A = -J \sum_C A_C \quad (\text{IV.4})$$

onde

$$A_C\{r;\mu,\nu,\lambda\} = S[r+\lambda;\mu,\nu] S[r+\mu;\nu,\lambda] S[r+\nu,\lambda,\mu] S[r;\mu,\nu] S[r;\nu,\lambda] S[r;\lambda,\mu] \quad (IV.5)$$

O valor esperado da função de correlação (IV.3) será então

$$\langle W(C) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \pi_C \exp(KSSSSSS) \prod_{P \in \Omega} S[P]}{\sum_{\{S\}} \pi_C \exp(KSSSSSS)} \quad (IV.6)$$

onde $K = \beta J$, e $SSSSSS$ denotará a ação de cubo (IV.5). A seguir, calcularemos $\langle W(\Omega) \rangle$ para as regiões de altas e baixas temperaturas e analisaremos em particular, o caso em três dimensões.

4.1.1 - Região de altas temperaturas

Utilizaremos a identidade

$$\exp(KSSSSSS) = \cosh K + SSSSSS \sinh K = (1 + SSSSSS \tanh K) \cosh K \quad (IV.7)$$

de maneira que podemos escrever a expressão (IV.6) como

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \pi_C (1 + SSSSSS \tanh K) \prod_{P \in \Omega} S[P]}{\sum_{\{S\}} \pi_C (1 + SSSSSS \tanh K)} \quad (IV.8)$$

Sendo K pequeno, podemos expandir a equação acima em potências de $\tanh K$; usando o fato de que

$$\sum_{S=\pm 1} S = 0 \quad ; \quad \sum_{S=\pm 1} S^2 = \sum_{S=\pm 1} 1 = 2 \quad (IV.9)$$

devemos tomar então, potências suficientes de $\tanh K$ de forma que nenhum fator S pertencente a $\prod_{p \in \Omega} S[p]$ seja deixado isolado. É fácil notar que a primeira contribuição não nula para o numerador acontecerá quando tivermos um produto $\tanh K$ para cada cubo no interior da superfície Ω . Se $N_{C\Omega}$ é o número de cubos dentro de Ω , então

$$\langle W(\Omega) \rangle = (\tanh K)^{N_{C\Omega}} + \dots \quad (\text{IV.10})$$

que ainda pode ser escrita como

$$\langle W(\Omega) \rangle = \exp\{N_{C\Omega} \ln(\tanh K)\} + \dots \quad (\text{IV.11})$$

Se medirmos o volume no interior de Ω em unidades de cubos, teremos $V = N_{C\Omega}$, de maneira que

$$\langle W(\Omega) \rangle = \exp[-V w(K)] + \dots \quad (K \ll 1) \quad (\text{IV.12})$$

onde chamamos $w(K) = -\ln(\tanh K)$; temos então um decaimento exponencial com o volume para a primeira contribuição de $\langle W(\Omega) \rangle$ na região de altas temperaturas. Na obtenção de (IV.12) não fizemos nenhuma restrição quanto ao número de dimensões; este resultado é portanto, válido para qualquer número de dimensões.

4.1.2 - Região de baixas temperaturas

Os cálculos que faremos nesta seção só serão válidos para um número de dimensões maior do que três; o caso $d=3$ será o assunto da próxima seção.

Em analogia ao conceito de frustração para plaquetas⁽⁹⁾, introduziremos aqui o conceito de frustração para cubos; denominaremos que um cubo é frustrado quando no produto (IV.5) tivermos

$$A_C\{r; u, v, \lambda\} = -1 \quad ,$$

enquanto que o cubo é não frustrado quando

$$A_C\{r;\mu,\nu,\lambda\}=1 \quad .$$

Antes de iniciarmos nossos cálculos, analisemos o quadro seguinte:

	Uma dimensão (d = 1)	Duas dimensões (d = 2)	Três dimensões (d = 3)
Um ponto objeto 0 simplex (s = 0)	está ligado a 2(1-0) = 2 elos	está ligado a 2(2-0) = 4 elos	está ligado a 2(3-0) = 6 elos
Um elo objeto 1 simplex (s=1)		está ligado a 2(2-1) = 2 faces	está ligado a 2(3-1) = 4 faces
Uma face objeto 2 simplex (s = 2)			está ligado a 2(3-2) = 2 cubos

Podemos então generalizar que em d dimensões, um objeto s simplex está ligado a 2(d-s) objetos (s+1) simplex.

É importante notar que uma configuração de spins $\{S[P]\}$ pode ser transformada em uma outra configuração $\{S'[P]\}$, se aplicarmos transformações de calibre em vários elos da rede. Como a física do nosso modelo não é alterada por estas transformações, frequentemente denominamos as configurações $\{S[P]\}$ e $\{S'[P]\}$ de "cópias equivalentes por transformações de calibre". Uma configuração invariante por transformações de calibre consiste então, de uma configuração representativa de spins $\{S[P]\}$ e todas as suas cópias equivalentes. Às vezes, quando computamos valores esperados invariantes por transformações de calibre, como por exemplo, a expres-

são (IV.6), é conveniente rotular uma configuração invariante por uma de suas configurações representativas de spins. Quando isto é feito, um fator de contagem comum que aparece em ambos numerador e denominador, é cancelado.

Nos cálculos a seguir, utilizaremos a linguagem de "spins virados" e "configurações representativas de spins", ao invés dos conceitos invariantes por transformações de calibre de "frustração" e "configurações invariantes". A comparação entre estas duas linguagens é feita no Apêndice C, onde mostramos que ambas nos conduzem ao mesmo resultado no cálculo do valor esperado (IV.6) para baixas temperaturas.

É conveniente escolher a configuração representativa de spins em $T=0$, como sendo todos os spins alinhados em uma determinada direção, que escolheremos arbitrariamente "direção para cima". Faremos uma expansão no "número de spins virados". Utilizaremos a nomenclatura:

- N_P - número total de plaquetas da rede;
- $N_{C\Omega}$ - número de cubos no interior da superfície fechada Ω ;
- $N_{P\Omega}$ - número de plaquetas ao longo da superfície Ω ;
- N_C - número total de cubos da rede.

A primeira contribuição para (IV.6) será quando todos os spins estiverem para cima; teremos então $\prod_{p \in \Omega} S[p] = 1$, de maneira que o numerador e o denominador coincidirão: cada cubo contribuirá com um fator ℓ^K e o produto sobre todos os cubos nos leva a $\ell^{N_C K}$; como só existe uma configuração onde todos os spins estão para cima, então ambos numerador e denominador não darão $\ell^{N_C K}$ para esta primeira contribuição.

A segunda contribuição será quando tivermos um spin virado; como cada face está ligada a $2(d-2)$ cubos, teremos então $2(d-2)$ cubos frustrados. O produto sobre todos os cubos da rede nos dará $\exp K[N_C - 2(d-2)]$, para os cubos não frustrados e

$\exp K [-2(d-2)]$, para os cubos frustrados. O spin virado pode ocupar qualquer das faces da rede e quando esta face estiver ao longo de Ω , teremos $\prod_{P \in \Omega} S[P] = -1$; caso contrário, $\prod_{P \in \Omega} S[P] = 1$. Portanto para o numerador, a soma sobre todas as configurações de spin nos dará $(N_P - N_{P\Omega})$, quando o spin virado se encontrar em qualquer das faces fora da superfície Ω , e $-N_{P\Omega}$, quando o spin virado se encontrar em uma das faces ao longo da superfície Ω . Esta contribuição nos dará então para o numerador,

$$\begin{aligned} & [(N_P - N_{P\Omega}) - N_{P\Omega}] \exp\{ [N_C - 2(d-2)] - 2(d-2) \} K = \\ & = (N_P - 2N_{P\Omega}) \exp K [N_C - 4(d-2)] \quad . \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Argumentos análogos para esta contribuição, nos levam a um termo no denominador do tipo

$$N_P \exp K [N_C - 4(d-2)] \quad (IV.14)$$

A expressão (IV.6) para estas duas contribuições, ficará então

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{1 + (N_P - 2N_{P\Omega}) \exp[-4(d-2)K] + \dots}{1 + N_P \exp[-4(d-2)K] + \dots} \quad . \quad (IV.15)$$

Utilizaremos aqui a aproximação de que os spins viram independentemente; assim, a contribuição devido a n spins virados nos dará

$$\frac{1}{n!} (N_P - 2 N_{P\Omega})^n \exp [-4n(d-2)K] \quad (IV.16)$$

para o numerador, enquanto que

$$\frac{1}{n!} N_P^n \exp [-4n(d-2)K] \quad (IV.17)$$

para o denominador. Com esta aproximação, ficamos com

$$\begin{aligned}
 \langle W(\Omega) \rangle &\approx \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (N_P - 2N_{P\Omega})^n \exp[-4n(d-2)K]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N_P^n \exp[-4n(d-2)K]} = \\
 &= \frac{\exp\{(N_P - 2N_{P\Omega}) \exp[-4(d-2)K]\}}{\exp\{N_P \exp[-4(d-2)K]\}} \quad (\text{IV.18})
 \end{aligned}$$

A dependência em N_P se cancela e teremos

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx \exp\{-2N_{P\Omega} \exp[-4(d-2)K]\} = \exp[-A h(K)] \quad (\text{IV.19})$$

onde medimos a área da superfície em unidades de faces, de tal forma que $A = N_{P\Omega}$. Temos então um decaimento exponencial com a área para o primeiro termo da série de $\langle W(\Omega) \rangle$, na região de baixas temperaturas.

Para $d > 3$, as expressões (IV.12) e (IV.19) nos mostram comportamentos diferentes para as regiões de altas e baixas temperaturas. Estes comportamentos representam duas fases distintas de maneira que, devemos ter transições de fase (pelo menos uma) no nosso modelo.

4.1.3 - Caso particular para três dimensões

De uma maneira muito simples, podemos ver que o resultado (IV.19) não funciona para três dimensões. Consideremos uma rede tridimensional, com a configuração de spins em $T = 0$ como sendo todos os spins para cima.

Quando invertemos um spin, como cada face está ligada a dois cubos, temos dois cubos frustrados. Podemos ver pela figura 7, que se viramos toda uma linha de spins, temos também duas frustrações, isto é, somente os cubos das extremidades da linha são

frustrados.

Ao sair da temperatura zero, para baixas temperaturas, podemos desordenar o sistema virando uma linha muito grande de spins, utilizando para isso, a mesma energia que gastaríamos para inverter um único spin. Concluimos portanto, que este sistema existe em uma única fase desordenada caracterizada por

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx e^{-V} \quad (\text{IV.20})$$

para qualquer temperatura diferente de zero. Este fato não ocorre em dimensões maiores, tendo em vista que cada face está ligada a $2(d-2)$ cubos e ao virarmos uma linha de spins, teremos muitas frustrações.

FIG. 7 - Linha de spins virados mostrando as duas frustrações das extremidades, para uma rede em três dimensões; todas as faces não especificadas possuem spins para cima (+).

Mostraremos agora que em três dimensões, temos a lei do decaimento com o volume (IV.20), também na região de baixas temperaturas. Consideraremos configurações de spins virados onde uma das extremidades da linha se estende a infinito. Faremos uma ex-

pansão em termos de frustrações isoladas. Denominaremos de P_Ω o número de plaquetas contidas pela superfície Ω , ou melhor, o número de plaquetas ao longo da superfície Ω mais as plaquetas no interior de Ω . Em (IV.6) podemos trocar a soma sobre todas as configurações de spins, por uma soma sobre cada cópia equivalente, escolhida dentro de um conjunto de configurações invariantes por transformações de calibre; um fator de contagem comum aparecerá no numerador e denominador e cancelará.

A primeira contribuição para (IV.6) será quando tivermos nenhuma frustração; o numerador e o denominador coincidirão : $\ell^{N_C K}$.

A segunda contribuição será quando tivermos uma frustração isolada; se a frustração estiver fora da superfície fechada Ω , a linha de spins virados afetará um número par de spins em Ω , o que nos dará uma contribuição positiva para o numerador; se a frustração se encontra dentro da superfície fechada Ω , a linha de spins virados afetará um número ímpar de spins em Ω , o que nos dará uma contribuição negativa para o numerador. Para o denominador, teremos então um termo do tipo

$$[(N_P - P_\Omega) - P_\Omega] \exp[(N_C - 1) - 1]K = (N_P - 2P_\Omega) \exp(N_C - 2)K \quad (\text{IV.21})$$

enquanto que para o denominador

$$N_P \exp(N_C - 2)K \quad (\text{IV.22})$$

Estas duas contribuições nos darão então

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{1 + (N_P - 2P_\Omega) \ell^{-2K} + \dots}{1 + N_P \ell^{-2K} + \dots} \quad (\text{IV.23})$$

Utilizaremos aqui uma aproximação análoga à da seção anterior, ou seja, consideraremos frustrações independentes; assim, a contribuição devido a n frustrações isoladas nos dará

$$\frac{1}{n!} (N_P - 2P_\Omega)^n \ell^{-2nK} \quad (\text{IV.24})$$

para o numerador enquanto que

$$\frac{1}{n!} N_P^n \ell^{-2nK} \quad (\text{IV.25})$$

para o denominador. Com esta aproximação, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle W(\Omega) \rangle &\approx \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (N_P - 2P_\Omega)^n \ell^{-2nK}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N_P^n \ell^{-2nK}} = \\ &= \frac{\exp[(N_P - 2P_\Omega) \ell^{-2K}]}{\exp[N_P \ell^{-2K}]} \quad (\text{IV.26}) \end{aligned}$$

A dependência em N_P se cancela e então

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx \exp(-2P_\Omega \ell^{-2K}) \quad (\text{IV.27})$$

Para condições de contorno periódicas, uma contagem direta nos dá que $P_\Omega = 2V$; ficamos então com

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx (-4V \ell^{-2K}) \quad (\text{IV.28})$$

o que nos dá um decaimento exponencial com o volume na região de baixas temperaturas. Como o resultado (IV.12) é válido para qualquer dimensão, concluímos que em três dimensões nosso modelo não apresenta transição de fase; ele existe em uma única fase desordenada para qualquer temperatura diferente de zero.

Este resultado nos sugere que busquemos por uma equivalência:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Teoria Ising-calibre} \\ \text{tridimensional em cubos} \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Modelo de spins de Ising} \\ \text{unidimensional} \end{array} \right)$$

uma vez que o modelo de Ising unidimensional é desordenado para toda temperatura diferente de zero⁽²⁰⁾.

Em três dimensões, as expressões (IV.4) e (IV.5) nos dão que

$$A = -J \sum_{\vec{r}} s[\vec{r} + \hat{3}; \hat{1}, \hat{2}] s[\vec{r} + \hat{1}; \hat{2}, \hat{3}] s[\vec{r} + \hat{2}; \hat{3}, \hat{1}] s[\vec{r}; \hat{1}, \hat{2}] s[\vec{r}; \hat{2}, \hat{3}] \times \\ \times s[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] \quad . \quad (IV.29)$$

Se considerarmos $\hat{3}$ como sendo a direção temporal, podemos adotar o seguinte calibre temporal:

$$s[\vec{r}; \hat{1}, \hat{3}] = s[\vec{r}; \hat{3}, \hat{1}] = 1 \quad (i = 1, 2) \quad . \quad (IV.30)$$

Usando (IV.30) em (IV.29) teremos

$$A = -J \sum_{\vec{r}} s[\vec{r} + \hat{3}; \hat{1}, \hat{2}] s[\vec{r}; \hat{1}, \hat{2}] \quad (IV.31)$$

Na expressão (IV.31) não temos acoplamento entre spins nas direções $\hat{1}$ e $\hat{2}$, enquanto que o acoplamento na direção $\hat{3}$ é o mesmo que para o modelo de Ising unidimensional, o que nos dá a equivalência desejada.

A correspondência entre o caráter desordenado no modelo de Ising unidimensional e o decaimento exponencial com o volume para o nosso modelo em três dimensões, pode ser mostrada de uma forma muito simples. Consideremos a função de correlação $W(\Omega)$ no calibre temporal (IV.30); tomemos Ω como sendo a superfície externa de um paralelepípedo, com uma extensão na direção temporal R , e extensões nas direções espaciais, x e y , como mostra a figura 8. Se $\vec{0} = (0, 0, 0)$ é o ponto mostrado na figura, então

$$W(\Omega) = s[0, 0, 0; \hat{1}, \hat{2}] s[1, 0, 0; \hat{1}, \hat{2}] s[0, 1, 0; \hat{1}, \hat{2}] \dots s[x-1, y-1, 0; \hat{1}, \hat{2}] \times \\ \times s[0, 0, R; \hat{1}, \hat{2}] s[1, 0, R; \hat{1}, \hat{2}] s[0, 1, R; \hat{1}, \hat{2}] \dots s[x-1, y-1, R; \hat{1}, \hat{2}] \quad (IV.32)$$

FIG. 8 - A superfície Ω sendo a superfície externa de um paralelepípedo de dimensões x, y e R

Ao tomarmos o valor esperado na expressão (IV.32) teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle W(\Omega) \rangle = & \langle S[0,0,0;\hat{1},\hat{2}] S[0,0,R;\hat{1},\hat{2}] \rangle \langle S[1,0,0;\hat{1},\hat{2}] \times \\
 & \times S[1,0,R;\hat{1},\hat{2}] \rangle \langle S[0,1,0;\hat{1},\hat{2}] S[0,1,R;\hat{1},\hat{2}] \rangle \dots \\
 & \dots \langle S[x-1,y-1,0;\hat{1},\hat{2}] S[x-1,y-1,R;\hat{1},\hat{2}] \rangle
 \end{aligned}
 \tag{IV.33}$$

No modelo de Ising unidimensional, para qualquer temperatura diferente de zero, temos ⁽²⁰⁾

$$\langle S[\vec{r};\hat{1},\hat{2}] S[\vec{r} + R\hat{3};\hat{1},\hat{2}] \rangle \approx \ell^{-R/\xi} \quad (R \gg 1) \tag{IV.34}$$

onde ξ é o comprimento de correlação do modelo. Em (IV.33) temos o produto de xy funções de correlação spin-spin do modelo de Ising unidimensional, de maneira que

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx (\ell^{-R/\xi})^{xy} = \exp[-(Rxy)/\xi]$$

Mas $V = R_{xy}$ é o volume contido pela superfície fechada Ω , e então

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx e^{-V/\xi} \quad (\text{IV.35})$$

para qualquer temperatura diferente de zero. Obtivemos em (IV.35), o decaimento exponencial com o volume para a função de correlação do nosso modelo, como uma consequência direta do caráter desordenado do modelo de Ising unidimensional.

4.2 - Funções de correlação invariantes por transformações de calibre para $Z(N)$

Nesta seção, faremos uma generalização para variáveis $Z(N)$, do que fizemos na seção 4.1 para variáveis $Z(2)$. Tomaremos um volume V formado por um número inteiro de cubos, sendo Ω a superfície fechada que engloba este volume; colocaremos variáveis de spin $Z(N)$ nas faces, de maneira que podemos definir uma função de correlação invariante por transformações de calibre,

$$W(\Omega) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} S[P] \quad (\text{IV.36})$$

onde por $\prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}}$, entende-se o produto orientado de variáveis de

spin em faces ao longo da superfície Ω , no sentido de que:

- os vetores normais em cada face ao longo de Ω devem estar saindo do volume V ;
- as faces com vetores normais paralelos (antiparalelos) aos vetores de base devem estar associadas a variáveis de spin $S(S^+)$. Na figura 9, mostramos um pequeno volume V com suas variáveis S e S^+ .

É fácil ver que $W(\Omega)$ é invariante frente a transformação de calibre definida no capítulo II; a função de correlação (IV.36) é uma generalização do cubo orientado (II.2) para volumes maiores.

FIG. 9 - Um pequeno volume V na forma de paralelepípedo; as variáveis S e S^+ são associadas em cada face de acordo com o sentido do vetor normal nestas faces.

Utilizando (II.3) podemos escrever o valor esperado da função de correlação (IV.36) como

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \prod_C \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \left(\prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} S[P] \right) \exp\left\{ \frac{K_\alpha}{2} [(A_C)^\alpha + \text{c.c.}] \right\}}{\sum_{\{S\}} \prod_C \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp\left\{ \frac{K_\alpha}{2} [(A_C)^\alpha + \text{c.c.}] \right\}} \quad (\text{IV.37})$$

onde $K_\alpha = \beta J_\alpha$. Nas seções a seguir, calcularemos $\langle W(\Omega) \rangle$ nas regiões de altas e baixas temperaturas, analisaremos o caso em três dimensões e estudaremos também, potências de função de correlação (IV.37).

4.2.1 - Região de altas temperaturas

Utilizaremos aqui, uma generalização da identidade (IV.7)

ou melhor,

$$\prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp\left\{\frac{K_{\alpha}}{2} [(SSSS^+S^+S^+)^{\alpha} + c.c.]\right\} = \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_{\alpha}}{2} [(SSSS^+S^+S^+)^{\alpha} + c.c.] \tag{IV.38}$$

onde $g_{\alpha} = g_{\alpha}(K_1, K_2 \dots K_{\frac{\bar{N}}{N}})$ são funções finitas para $K_{\alpha} \ll 1$, enquanto que divergem para $K_{\alpha} \gg 1$. No apêndice B apresentamos estas funções para $N = 2, 3, 4$.

A expressão (IV.37) ficará então

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \prod_C \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_{\alpha}}{2} [(SSSS^+S^+S^+)^{\alpha} + (S^+S^+S^+SSS)^{\alpha}] \left(\prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} s[P] \right) \tag{IV.39}$$

Mas

$$s[P_1] s[P_2] s[P_3] s^+[P_4] s^+[P_5] s^+[P_6] = \ell^{i2\pi\eta/N} \tag{IV.40}$$

onde chamamos

$$\eta = n[P_1] + n[P_2] + n[P_3] - n[P_4] - n[P_5] - n[P_6] \tag{IV.41}$$

e $[P_1], \dots, [P_6]$ representam as seis faces de um cubo. Podemos então escrever (IV.39) como,

$$\begin{aligned} \langle W(\Omega) \rangle = & \frac{1}{Z} \sum_{n[P]=0}^{N-1} \prod_C \prod_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_{\alpha}}{2} (\ell^{i2\pi\alpha\eta/N} + \ell^{-i2\pi\alpha\eta/N}) \times \\ & \times \left(\prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} \ell^{\pm \frac{i2\pi}{N} n[P]} \right) \end{aligned} \tag{IV.42}$$

onde no produto orientado o sinal positivo (negativo) no argumento da exponencial, deve ser utilizado para faces da superfície Ω , com vetores

normais paralelos (antiparalelos) aos vetores de base.

A identidade

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{i2\pi n \ell / N} = \delta_{n,0} \pmod{N} \quad (\text{IV.43})$$

onde $\delta_{n,0} \pmod{N}$ é igual a 1 para $n=0, N, 2N, \dots$, se anulando em todos os outros casos, nos leva à conclusão de que somente quando todas as fases se cancelarem ou resultarem em múltiplos inteiros de 2π , é que teremos contribuições não nulas.

A primeira contribuição não nula será quando tivermos no interior da superfície fechada Ω , um número $N_{C\Omega}$ de cubos com

$$\alpha \pm 1 = 0, N, 2N \dots \quad (\text{IV.44})$$

Como $\alpha = 0, 1, \dots, \bar{N}$, a única possibilidade para que tenhamos (IV.44) é $\alpha = 1$; para $\alpha \neq 1$, todas as contribuições serão nulas. Então

$$\langle W(\Omega) \rangle = \left[N \frac{g_1}{2} (K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}}) \right]^{N_{C\Omega}} + \dots \quad (\text{IV.45})$$

que ainda pode ser escrita como

$$\langle W(\Omega) \rangle = \exp \left[-V G_1 (K_1 \dots K_{\bar{N}}) \right] + \dots; \quad (K_\alpha \ll 1) \quad (\text{IV.46})$$

onde

$$G_1 (K_1 \dots K_{\bar{N}}) = - \ln \left[\frac{N}{2} g_1 (K_1 \dots K_{\bar{N}}) \right] \quad (\text{IV.47})$$

Obtivemos em (IV.46), uma generalização para um N qualquer da expressão (IV.12), ou seja, um decaimento exponencial com o volume para a primeira contribuição de $\langle W(\Omega) \rangle$ na região das altas temperaturas; este resultado é válido para um número qualquer de dimensões.

4.2.2 - Região de baixas temperaturas

Da mesma maneira que na seção 4.1.2, os cálculos a seguir só serão válidos para dimensões $d > 3$. Denominaremos que um cubo é frustrado quando no produto (II.2) tivermos

$$A_C\{r; \mu, \nu, \lambda\} \neq 1 \quad ,$$

enquanto que o cubo é não frustrado quando

$$A_C\{r; \mu, \nu, \lambda\} = 1 \quad .$$

Aqui também, faremos uma expansão no "número de spins virados"; escolheremos a configuração representativa de spins em $T = 0$, como sendo todos os spins alinhados em uma determinada direção. A primeira contribuição para (IV.37) será quando todos os spins estão alinhados, $S[P] = 1$, o que nos dará termos idênticos para o numerador e denominador:

$$\prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \ell^{N_C K_\alpha} \quad . \quad (IV.48)$$

A segunda contribuição será obtida quando um spin girar de $2\pi/N$; quando este spin ocupar uma das faces ao longo da superfície Ω , teremos

$$\prod_{\substack{P \in \Omega \\ \text{orient}}} S[P] = \ell^{\pm i 2\pi/N} \quad (IV.49)$$

onde o sinal positivo (negativo) deve se aplicar quando esta face possuir um vetor normal paralelo (antiparalelo) a um vetor de base. É fácil notar que ao longo de qualquer superfície fechada Ω , o número de faces com vetores normais paralelos aos vetores de base é igual ao número de faces com vetores normais antiparalelos aos vetores de base. Para o numerador, o fator multiplicativo da exponencial será

$$\left[(N_P - N_{P\Omega}) + \ell^{i2\pi/N} \frac{N_{P\Omega}}{2} + \ell^{-i2\pi/N} \frac{N_{P\Omega}}{2} \right] = (N_P - N_{P\Omega}) + N_{P\Omega} \cos \frac{2\pi}{N}$$

(IV.50)

Já vimos que cada face está ligada a $2(d-2)$ cubos; assim, ao girarmos um spin, criamos $2(d-2)$ cubos frustrados de maneira que , ao efetuarmos o produto sobre todos os cubos da rede teremos na exponencial,

$$\exp \frac{K_\alpha}{2} \{ 2[N_C - 2(d-2)] + 2(d-2)\ell^{i2\pi\alpha/N} + 2(d-2)\ell^{-i2\pi\alpha/N} \} \quad (IV.51)$$

Os resultados (IV.48), (IV.50) e (IV.51) nos permitem escrever (IV.37) como

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{\bar{N} \frac{N}{\pi} \ell^{N K_\alpha} + \left[(N_P - N_{P\Omega}) + N_{P\Omega} \cos \frac{2\pi}{N} \right] \bar{N} \frac{N}{\pi} \exp K_\alpha \{ [N_C - 2(d-2)] + 2(d-2) \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \} + \dots}{\bar{N} \frac{N}{\pi} \ell^{N K_\alpha} + N_P \frac{N}{\pi} \exp K_\alpha \{ [N_C - 2(d-2)] + 2(d-2) \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \} + \dots}$$

ou ainda,

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{1 + \left[(N_P - N_{P\Omega}) + N_{P\Omega} \cos \frac{2\pi}{N} \right] \bar{N} \frac{N}{\pi} \exp K_\alpha \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right] + \dots}{1 + N_P \frac{N}{\pi} \exp K_\alpha \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right] + \dots}$$

(IV.52)

Utilizaremos então, a aproximação de que os spins giram independentemente e todos de um mesmo ângulo $2\pi/N$; assim, a contribuição devido a n spins girados será

$$\frac{1}{n!} \left[(N_P - N_{P\Omega}) + N_{P\Omega} \cos \frac{2\pi}{N} \right]^n \bar{N} \frac{N}{\pi} \exp n K_\alpha \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right]$$

(IV.53)

para o numerador, enquanto que

$$\frac{1}{n!} N_P^n \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp n K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right] \quad (\text{IV.54})$$

para o denominador. Podemos então escrever

$$\langle W(\Omega) \rangle \simeq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(N_P - N_{P\Omega}) + N_{P\Omega} \cos \frac{2\pi}{N} \right]^n \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp n K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N_P^n \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp n K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right]} \quad (\text{IV.55})$$

Ambos numerador e denominador se transformam em exponenciais, de maneira que a dependência em N_P se cancela; ficamos com

$$\langle W(\Omega) \rangle \simeq \exp \left\{ N_{P\Omega} \left(\cos \frac{2\pi}{N} - 1 \right) \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right] \right\} \quad (\text{IV.56})$$

Mas $N_{P\Omega} = A$, e então

$$\langle W(\Omega) \rangle \simeq \exp \left[-A h_1(K_1 \dots K_{\bar{N}}) \right] \quad (\text{IV.57})$$

onde

$$h_1(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N} \right) \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1 \right) \right] \quad (\text{IV.58})$$

É importante notar que a função $h_1(K_1 \dots K_{\bar{N}})$ é finita para $K_{\alpha} \gg 1$. Temos em (IV.57), um decaimento exponencial com a área para o primeiro termo da série de $\langle W(\Omega) \rangle$, na região de baixas temperaturas, para um N qualquer.

Para $d > 3$, as expressões (IV.46) e (IV.57) nos mostram claramente que o nosso modelo deve apresentar no mínimo duas fases.

4.2.3 - Caso particular para três dimensões

O resultado (IV.57) não se aplica para três dimensões e podemos ver isto de maneira análoga ao que vimos na seção 4.1.3 . Ao girarmos um spin por um ângulo $2\pi/N$, temos dois cubos frustrados; o mesmo acontece quando giramos uma linha de spins, todos por um mesmo ângulo $2\pi/N$: como faces opostas de um cubo possuem S e S^+ , temos um cancelamento de fases para todos os cubos que não os das extremidades da linha. Portanto, para qualquer temperatura diferente de zero nosso sistema é desordenado, ou melhor, devemos ter sempre um decaimento exponencial com o volume para nossa função de correlação.

Mostraremos a seguir, a lei do decaimento com o volume para três dimensões na região de baixas temperaturas. Consideraremos linhas de spins girados, todos por um mesmo ângulo $2\pi/N$, onde uma das extremidades da linha se estende a infinito; convencionaremos que estas linhas se estendem a infinito no sentido de um dos vetores de base. Faremos uma expansão em termos de frustrações isoladas.

A primeira contribuição para (IV.37) será quando tivermos nenhuma frustração, o que nos dará mais uma vez o termo (IV.48) para ambos numerador e denominador.

A segunda contribuição será quando tivermos uma frustração isolada; temos duas situações a considerar:

- i) se a frustração estiver fora da superfície fechada Ω , a linha de spins virados afetará Ω em um número par de faces opostas e como em duas faces opostas temos sempre S e S^+ , continuamos com

$$\prod_{\text{orient}} S[P] = 1 \quad ; \quad (IV.59)$$

$$P \in \Omega$$

ii) se a frustração estiver dentro da superfície fechada Ω , a linha afetará um número ímpar de faces em Ω , sendo este número ímpar constituído de um número par de faces opostas, onde as fases se cancelarão, mais uma face isolada de maneira que uma fase não se cancelará. Pela convenção que tomamos para o sentido das linhas, esta face isolada possuirá sempre um vetor normal paralelo a um dos vetores de base. Portanto, neste caso,

$$\sum_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} \pi S[\vec{P}] = \ell^{i2\pi/N} \quad (\text{IV.60})$$

Teremos então para o numerador, um termo do tipo

$$\left[(N_P - P_\Omega) + \ell^{i2\pi/N} P_\Omega \right] \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ \frac{K_\alpha}{2} \left[2(N_C - 1) + \ell^{i2\pi\alpha/N} + \ell^{-i2\pi\alpha/N} \right] \right\} \quad (\text{IV.61})$$

enquanto que para o denominador,

$$N_P \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ \frac{K_\alpha}{2} \left[2(N_C - 1) + \ell^{i2\pi\alpha/N} + \ell^{-i2\pi\alpha/N} \right] \right\} \quad (\text{IV.62})$$

Depois de cancelarmos os fatores comuns no numerador e denominador, teremos

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{1 + \left[(N_P - P_\Omega) + \ell^{i2\pi/N} P_\Omega \right] \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp K_\alpha \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right) + \dots}{1 + N_P \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp K_\alpha \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right) + \dots} \quad (\text{IV.63})$$

Mais uma vez, consideraremos frustrações independentes e todas formadas por extremidades de linhas onde os spins são sempre girados de um mesmo ângulo $2\pi/N$. Nesta aproximação, ambos nu-

merador e denominador exponenciarão de maneira que a dependência em N_p cancelará; ficaremos com

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx \exp \left\{ P_{\Omega} (\ell^{i2\pi/N} - 1) \frac{\bar{N}}{\pi} \exp K_{\alpha} \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right) \right\} \quad (\text{IV.64})$$

Para condições de contorno periódicas, temos $P_{\Omega} = 2V$ e então

$$\langle W(\Omega) \rangle \approx \exp \left[-V t_1(K_1, K_2, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) \right] \quad (\text{IV.65})$$

onde

$$t_1(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) = 2(1 - \ell^{i2\pi/N}) \frac{\bar{N}}{\pi} \exp K_{\alpha} \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right) \quad (\text{IV.66})$$

Podemos observar que $t_1(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}})$ é finita para $K_{\alpha} \gg 1$; os resultados (IV.46) e (IV.65) nos mostram que o nosso modelo em três dimensões, para um N qualquer, pode não apresentar transição de fase; é possível que tenhamos uma única fase desordenada para toda temperatura diferente de zero. Este é um resultado esperado uma vez que aqui também temos a equivalência,

$$\left(\begin{array}{l} \text{Teoria de calibre com simetria} \\ Z(N) \text{ tridimensional em cubos} \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Modelo de spins } Z(N) \\ \text{unidimensional} \end{array} \right)$$

e sabemos que sistemas de spins com acoplamentos entre vizinhos mais próximos e simetria global discreta, só apresentam quebra espontânea de simetria, para temperaturas diferentes de zero, em mais de uma dimensão⁽²⁰⁾.

Para mostrarmos esta equivalência, basta adotarmos o calibre temporal (IV.30) na ação (II.3) em três dimensões; resultamos com

$$A = - \sum_{\vec{r}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_{\alpha}}{2} \{ (S[\vec{r} + \hat{3}; \hat{1}, \hat{2}] S^+[\vec{r}; \hat{1}, \hat{2}])^{\alpha} + c.c \} ,$$

(IV.67)

que é a ação do modelo de spins $Z(N)$ unidimensional com acoplamentos somente na direção $\hat{3}$.

Aqui também, o decaimento exponencial com o volume para qualquer temperatura diferente de zero, está intimamente ligado ao caráter desordenado do modelo de spins $Z(N)$ unidimensional. Um comportamento análogo a (IV.34) é válido também para este modelo⁽²¹⁾, de maneira que os mesmos procedimentos que nos levaram a (IV.35), podem ser generalizados para variáveis $Z(N)$.

4.2.4 - Potências da função de correlação $W(\Omega)$

Até agora, trabalhamos somente com a primeira potência da função de correlação (IV.36) para variáveis de spin $Z(N)$. Nesta seção, vamos analisar o comportamento das potências

$$W^m(\Omega) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} S^m[P] .$$

(IV.68)

O fato de que $S^N[P] = 1$, implica em $W^N(\Omega) = 1$; também $S[P] S^+[P] = 1$, nos dá que

$$W(\Omega) W^+(\Omega) = 1 .$$

(IV.69)

Se multiplicarmos a igualdade (IV.69) por $W^{N-1}(\Omega)$, obteremos

$$W^+(\Omega) = W^{N-1}(\Omega) .$$

(IV.70)

Da mesma maneira, multiplicando (IV.69) por $W^{N-2}(\Omega)$, teremos

$$[W^+(\Omega)]^2 = W^{N-2}(\Omega)$$

(IV.71)

e então podemos generalizar

$$[W^+(\Omega)]^m = W^{N-m}(\Omega) \quad . \quad (IV.72)$$

Portanto, vamos nos restringir às potências $W^m(\Omega)$ com $m = 1, 2, \dots, \bar{N}$; as potências para $m > \bar{N}$ serão dadas pelo complexo conjugado das potências já conhecidas para $m \leq \bar{N}$, por meio da relação (IV.72).

Temos então que

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \prod_C \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \left(\prod_{P \in \Omega}^{\text{orient}} S^m[P] \right) \exp \left\{ \frac{K_\alpha}{2} [(A_C)^\alpha + \text{c.c.}] \right\}}{\sum_{\{S\}} \prod_C \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ \frac{K_\alpha}{2} [(A_C)^\alpha + \text{c.c.}] \right\}} \quad (IV.73)$$

Os cálculos com (IV.73) são idênticos aos cálculos que fizemos nas seções anteriores utilizando (IV.37), desde que troquemos o expoente 1 do produto orientado por um expoente m qualquer.

Na região de altas temperaturas, obteremos expressões análogas a (IV.46) e (IV.47),

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \exp \left[-V G_m(K_1 \dots K_{\bar{N}}) \right] + \dots \quad (IV.74)$$

onde

$$G_m(K_1 \dots K_{\bar{N}}) = -\ln \left[\frac{1}{2} g_m(K_1 \dots K_{\bar{N}}) \right] \quad , \quad (IV.75)$$

que nos dá o decaimento exponencial com o volume para qualquer potência da função de correlação, na região de altas temperaturas; o resultado (IV.74) é válido para um número qualquer de dimensões. As funções $g_m(K_1 \dots K_{\bar{N}})$ são apresentadas no apêndice B, para $N = 2, 3$ e 4 .

Na região de baixas temperaturas, para $d > 3$, em analogia a (IV.57) e (IV.58), teremos

$$\langle W^m(\Omega) \rangle \approx \exp \left[-A h_m(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) \right] \quad (\text{IV.76})$$

onde

$$h_m(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) = (1 - \cos \frac{2\pi}{N} m) \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp K_{\alpha} \left[2(d-2) \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right) \right] \quad (\text{IV.77})$$

que nos dá o decaimento exponencial com a área para qualquer potência da função de correlação, na região de baixas temperaturas. Os resultados (IV.74) e (IV.76) nos mostram mais uma vez, que o nosso modelo deve apresentar no mínimo duas fases distintas para dimensões maiores do que três.

Para três dimensões, na região de baixas temperaturas, analogamente a (IV.65) e (IV.66),

$$\langle W^m(\Omega) \rangle \approx \exp \left[-V t_m(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) \right] \quad (\text{IV.78})$$

com

$$t_m(K_1, \dots, K_{\frac{\bar{N}}{N}}) = 2(1 - e^{i2\pi m/N}) \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp K_{\alpha} \left(\cos \frac{2\pi\alpha}{N} - 1 \right). \quad (\text{IV.79})$$

Os resultados (IV.74) e (IV.78) nos evidenciam a existência de uma única fase para o nosso modelo em três dimensões.

CAPÍTULO V

O MODELO DE CUBOS PARA VARIÁVEIS CONTÍNUAS $U(1)$

$U(1)$ é o grupo das matrizes unitárias 1×1 ; nossas variáveis discretas $Z(N)$ se transformam em variáveis contínuas $U(1)$ no limite $N \rightarrow \infty$. Consideremos por exemplo, uma variável de spin $Z(N)$ colocada em um sítio r :

$$S(r) = \exp \left(\frac{i2\pi}{N} n(r) \right) ; \quad n(r) = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad . \quad (V.1)$$

Quando $N \rightarrow \infty$, teremos

$$S(r) \rightarrow \exp(i\theta(r)) \quad (V.2)$$

onde $\theta(r)$ é uma variável angular contínua no sítio r ; podemos então definir um vetor no plano complexo,

$$\vec{S}(r) = (\cos\theta(r), \sin\theta(r)) \quad (V.3)$$

de maneira que para um sistema de spins colocados nos sítios de uma rede, com acoplamentos entre vizinhos mais próximos, teremos

$$A = -J \sum_{r,\mu} \vec{S}(r) \cdot \vec{S}(r+\mu) = -J \sum_{r,\mu} \cos[\theta(r) - \theta(r+\mu)] \quad (V.4)$$

Se definirmos um operador diferença na direção μ ,

$$\Delta_\mu \theta(r) = \theta(r+\mu) - \theta(r) \quad (V.5)$$

poderemos então escrever (V.4) como

$$A = -J \sum_{r,\mu} \cos[\Delta_\mu \theta(r)] \quad (V.6)$$

A ação (V.6) possui uma simetria contínua global, ou seja, podemos girar todo o sistema por um ângulo α sem alterá-la uma vez que ela foi construída a partir de produtos escalares.

Podemos construir modelos com simetria contínua local; para plaquetas por exemplo,^{(7), (9)} as variáveis de spin contínuas nos elos,

$$S(r, \mu) = \ell^{i\theta_\mu(r)} ; \quad \theta_\mu(r) = -\theta_{-\mu}(r + \mu) \quad (V.7)$$

nos permitem associar à plaqueta orientada da figura 4, um rotacional discreto

$$\theta_{\mu\nu}(r) = \Delta_\mu \theta_\nu(r) - \Delta_\nu \theta_\mu(r) \quad (V.8)$$

que é invariante ante a transformação de calibre

$$\theta_\mu(r) \rightarrow \theta_\mu(r) - \chi(r) \quad (V.9)$$

aplicada no sítio r . Para transformações de calibre simultâneas nos sítios r e $r + \mu$, temos

$$\begin{aligned} \theta_\mu(r) &\rightarrow \theta_\mu(r) + \Delta_\mu \chi(r) \\ \theta_{\mu\nu}(r) &\rightarrow \theta_{\mu\nu}(r) \end{aligned} \quad (V.10)$$

As equações (V.8) e (V.10) podem ser reconhecidas como a forma discreta da invariância de calibre local da eletrodinâmica,

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ; \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (V.11)$$

Inspiradas em (V.6), podemos construir uma ação com simetria de calibre local, sendo também uma função periódica das variáveis angulares $\theta_{\mu\nu}(r)$,

$$A = J \sum_{r, \mu\nu} [1 - \cos \theta_{\mu\nu}(r)] \quad (V.12)$$

que para baixas temperaturas, em quatro dimensões, pode ser identificada como⁽⁹⁾

$$A \approx \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (V.13)$$

A expressão (V.13) é exatamente a ação Euclidiana da eletrodinâmica para os campos de fótons. Temos então uma identificação evidente entre o modelo de calibre em plaquetas com a eletrodinâmica na rede.

5.1 - O modelo de cubos com campos de calibre

Queremos construir uma teoria com uma simetria contínua local para os cubos; colocaremos então, spins planares em cada face da rede,

$$S[r; \mu, \nu] = e^{i\theta_{\mu\nu}(r)} \quad (V.14)$$

onde $\theta_{\mu\nu}(r)$ é uma variável angular contínua, associada à face $[r; \mu, \nu]$. O fato de que $S[r; \mu, \nu] = S^+[r; \nu, \mu]$ nos dá

$$\theta_{\mu\nu}(r) = -\theta_{\nu\mu}(r) \quad (V.15)$$

Com base em (II.2a), podemos definir uma variável angular para o cubo da figura 3,

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) = \theta_{\mu\nu}(r+\lambda) - \theta_{\mu\nu}(r) + \theta_{\nu\lambda}(r+\mu) - \theta_{\nu\lambda}(r) + \theta_{\lambda\mu}(r+\nu) - \theta_{\lambda\mu}(r) \quad (V.16)$$

que ainda pode ser escrita em termos dos operadores diferença (V.5), na forma

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) = \Delta_{\lambda} \theta_{\mu\nu}(r) + \Delta_{\mu} \theta_{\nu\lambda}(r) + \Delta_{\nu} \theta_{\lambda\mu}(r) \quad . \quad (V.17)$$

Com inspiração na transformação de calibre que definimos no Capítulo II, introduziremos uma transformação $G(r,\mu)$ que atuando no elo (r,μ) , leva todas as variáveis angulares em faces que emanam deste elo em

$$\theta_{\mu\rho}(r) \rightarrow \theta_{\mu\rho}(r) \pm \chi_{\mu}(r) \quad . \quad (V.18)$$

Convencionaremos que o elo onde é aplicada a transformação de calibre seja orientado paralelamente a um dos vetores de base; da mesma maneira que no Capítulo II, podemos associar a cada face um vetor normal. O sinal positivo (negativo) em (V.18), deve ser usado quando o vetor normal à face $[r;\mu,\rho]$ for paralelo (antiparalelo) a um dos vetores de base.

É fácil notar que $\alpha_{\mu\nu\lambda}(r)$ é invariante ante as transformações (V.18); tomemos por exemplo, uma transformação de calibre aplicada no elo (r,ν) do cubo da figura 3:

$$\theta_{\nu\lambda}(r) \rightarrow \theta_{\nu\lambda}(r) + \chi_{\nu}(r)$$

$$\theta_{\mu\nu}(r) \rightarrow \theta_{\mu\nu}(r) - \chi_{\nu}(r)$$

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \rightarrow \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \quad .$$

Se aplicarmos transformações de calibre simultâneas nos quatro elos da face $[r;\mu,\nu]$ teremos

$$\theta_{\mu\nu}(r) \rightarrow \theta_{\mu\nu}(r) + \chi_{\nu}(r+\mu) - \chi_{\mu}(r+\nu) - \chi_{\nu}(r) + \chi_{\mu}(r)$$

ou ainda,

$$\theta_{\mu\nu}(r) \rightarrow \theta_{\mu\nu}(r) + [\Delta_{\mu}\chi_{\nu}(r) - \Delta_{\nu}\chi_{\mu}(r)] \quad (V.19a)$$

enquanto que

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \rightarrow \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \quad . \quad (V.19b)$$

As equações (V.17) e (V.19) podem ser identificadas como a forma discreta da invariância de calibre local da teoria de campos clássica de Kalb-Ramond⁽²²⁾ onde

$$\begin{aligned} \phi_{\mu\nu} &\rightarrow \phi_{\mu\nu} + (\partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu); \quad L = \frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} \\ F_{\mu\nu\lambda} &= \partial_\mu \phi_{\nu\lambda} + \partial_\lambda \phi_{\mu\nu} + \partial_\nu \phi_{\lambda\mu} \quad ; \quad F_{\mu\nu\lambda} \rightarrow F_{\mu\nu\lambda} \quad . \end{aligned} \quad (V.20)$$

Na eletrodinâmica clássica procuramos estudar interações entre partículas pontuais (objetos de dimensão zero); cada uma destas partículas descreve uma linha no espaço-tempo. A teoria clássica de Kalb-Ramond consiste numa generalização da eletrodinâmica, procurando estudar interações entre objetos unidimensionais, que são as cordas (strings); cada uma destas cordas descreve uma folha no espaço-tempo. As equações (V.20) são obtidas para a interação entre duas cordas fechadas; o caso para a interação entre duas cordas abertas será obtido na próxima seção.

Em analogia a (V.12), usaremos as variáveis $\alpha_{\mu\nu\lambda}(r)$ para construir uma ação com simetria de calibre local,

$$A = J \sum_{r, \mu\nu\lambda} [1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r)] \quad . \quad (V.21)$$

A função de partição será dada por

$$Z = \int \left[\prod_{r, \mu\nu} d\theta_{\mu\nu}(r) \right] \exp \left(K \sum_{r, \mu\nu\lambda} [1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r)] \right) \quad (V.22)$$

onde $K = \beta J$. Portanto, na região de baixas temperaturas, $K \rightarrow \infty$, de maneira que as únicas contribuições não nulas em (V.22) serão aquelas onde

$$1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \approx 0 \quad \text{ou seja,} \quad \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \approx 0 \quad (V.23)$$

Podemos então fazer a expansão

$$1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 + \dots \right] \approx \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 \quad . \quad (\text{V.24})$$

A condição (V.23) nos permite em quatro dimensões, fazer a mudança

$$\sum_{r, \mu\nu\lambda} \rightarrow \int \frac{d^4 x}{a^4}$$

onde a é o espaçamento da rede; a expressão (V.21) resulta em

$$A \approx J \int \frac{d^4 x}{a^4} \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 \quad . \quad (\text{V.25})$$

Podemos expressar (V.17) por

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = a^2 \left(\frac{\Delta_\lambda}{a} \frac{\theta_{\mu\nu}}{a} + \frac{\Delta_\mu}{a} \frac{\theta_{\nu\lambda}}{a} + \frac{\Delta_\nu}{a} \frac{\theta_{\lambda\mu}}{a} \right) \quad (\text{V.26})$$

e como no limite de baixas temperaturas as variáveis $\theta_{\mu\nu}$ variam muito pouco, podemos trocar $(\Delta_\mu/a) \rightarrow \partial_\mu$, de maneira que é possível fazer as identificações

$$\theta_{\mu\nu} = a \phi_{\mu\nu} ; \quad \alpha_{\mu\nu\lambda} = a^2 F_{\mu\nu\lambda} \quad . \quad (\text{V.27})$$

Escolhendo $J = 1/6$, podemos escrever (V.25) como

$$A \approx \frac{1}{12} \int d^4 x F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{12} \int d\tau \int d^3 x F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} \quad (\text{V.28})$$

que é a ação euclidiana do nosso modelo no limite de baixas temperaturas. Se fizermos a troca $\tau \rightarrow it$, na expressão (V.28) teremos

$$A = -i A_m \quad (\text{V.29})$$

onde

$$A_m \approx - \frac{1}{12} \int dt \int d^3 x F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} \quad (\text{V.30})$$

é a ação no espaço de Minkowski. Então,

$$L = - \frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} \quad (V.31)$$

que possui a mesma estrutura que a densidade de lagrangeana da teoria clássica de Kalb-Ramond, para a interação entre duas cordas fechadas. A densidade de lagrangeana (V.31) difere por um sinal negativo daquela obtida por Kalb-Ramond; este sinal no entanto, é irrelevante para a equação de movimento.

A seguir, calcularemos a equação de movimento para os campos $\phi_{\mu\nu}$; imporemos a condição de que a ação (V.30) seja estacionária frente a uma variação destes campos, ou seja

$$\delta A_m = \int d^4 x \delta L = 0 \quad \text{quando} \quad \phi_{\mu\nu} \rightarrow \phi_{\mu\nu} + \delta\phi_{\mu\nu}$$

Sendo $L = L(\partial_\lambda \phi_{\mu\nu}, \partial_\nu \phi_{\lambda\mu}, \partial_\mu \phi_{\nu\lambda})$ então

$$\int d^4 x \ 3 \frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \phi_{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda \phi_{\mu\nu}) = 0$$

que se integrada por partes nos conduz a

$$\int d^4 x \ \partial_\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \phi_{\mu\nu})} \right] \delta\phi_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

Como as variações $\delta\phi_{\mu\nu}$ são arbitrárias, a equação de movimento será dada por

$$\partial_\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \phi_{\mu\nu})} \right] = 0$$

o que nos leva a

$$\square \phi_{\mu\nu} + \partial_\lambda \partial_\mu \phi_{\nu\lambda} + \partial_\lambda \partial_\nu \phi_{\lambda\mu} = 0 \quad . \quad (V.32)$$

A equação (V.32) possui a forma de uma equação de onda ;

os campos $\phi_{\mu\nu}$ se propagam no espaço-tempo.

5.2 - O modelo de cubos com campos de calibre e campos de matéria

Inicialmente, formularemos uma ação invariante por transformações de calibre para o nosso modelo, com campos de matéria (campos de Higgs) com simetria $Z(N)$. Colocaremos campos de matéria $Z(N)$ nos elos,

$$\phi(r, \mu) = \ell^{\frac{i2\pi}{N} n(r, \mu)}, \quad n(r, \mu) = 0, 1, \dots, N-1 \quad . \quad (V.33)$$

Nossa transformação de calibre quando aplicada no elo (r, μ) gira o campo de matéria (V.33) por um ângulo $-2\pi/N$,

$$G(r, \mu) : \phi(r, \mu) \rightarrow \phi(r, \mu) \ell^{-i2\pi/N} \quad (V.34)$$

de tal maneira que podemos associar à plaqueta orientada da figura 4 um termo invariante por transformações de calibre

$$A_p[r; \mu, \nu] = \phi(r, \mu) \phi(r + \mu, \nu) S[r; \mu, \nu] \phi^+(r + \nu, \mu) \phi^+(r, \nu) \quad . \quad (V.35)$$

Acrescentando o termo (V.35) à ação (II.3) teremos

$$A = - \sum_c \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} [(A_c)^\alpha + c.c] - \sum_p \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J'_\alpha}{2} [(A_p)^\alpha + c.c] \quad (V.36)$$

que é a ação invariante para o nosso modelo com campos de calibre nas faces e campos de Higgs nos elos.

Para uma teoria com simetria contínua local, tomamos o limite $N \rightarrow \infty$ em (V.33) o que nos dá

$$\phi(r, \mu) = \ell^{i\lambda_\mu(r)} \quad (V.37)$$

onde $\lambda_\mu(r)$ é uma variável angular contínua associada ao elo (r, μ) .

Baseados em (V.35) podemos definir uma variável angular

contínua para a plaqueta da figura 4,

$$\beta_{\mu\nu}(r) = \theta_{\mu\nu}(r) + \lambda_{\mu}(r) + \lambda_{\nu}(r+\mu) - \lambda_{\mu}(r+\nu) - \lambda_{\nu}(r) \quad (V.38)$$

que ainda pode ser escrita como

$$\beta_{\mu\nu}(r) = \theta_{\mu\nu}(r) + [\Delta_{\mu}\lambda_{\nu}(r) - \Delta_{\nu}\lambda_{\mu}(r)] \quad (V.39)$$

A transformação de calibre no elo (r,μ) é a operação que faz

$$\lambda_{\mu}(r) \rightarrow \lambda_{\mu}(r) - \chi_{\mu}(r) \quad (V.40)$$

É fácil notar que $\beta_{\mu\nu}(r)$ é invariante frente a transformação associada (V.18) e (V.40); tomemos por exemplo, uma transformação de calibre no elo (r,ν) da face da figura 2:

$$\theta_{\mu\nu}(r) \rightarrow \theta_{\mu\nu}(r) - \chi_{\nu}(r)$$

$$\lambda_{\nu}(r) \rightarrow \lambda_{\nu}(r) - \chi_{\nu}(r)$$

$$\beta_{\mu\nu}(r) \rightarrow \beta_{\mu\nu}(r)$$

Da mesma maneira que na seção anterior, podemos construir uma ação com simetria de calibre local,

$$A = J \sum_{r,\mu\nu\lambda} [1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r)] + J' \sum_{r,\mu\nu} [1 - \cos \beta_{\mu\nu}(r)] \quad (V.41)$$

Na região de baixas temperaturas, as únicas contribuições importantes para a função de partição serão aquelas em que

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \approx 0 \quad ; \quad \beta_{\mu\nu}(r) \approx 0 \quad (V.42)$$

o que nos permite utilizar as expansões

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha_{\mu\nu\lambda} &= 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 + \dots \right] \approx \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 \\ 1 - \cos \beta_{\mu\nu} &= 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \beta_{\mu\nu}^2 + \dots \right] \approx \frac{1}{2} \beta_{\mu\nu}^2 \end{aligned} \quad (V.43)$$

Podemos também fazer as mudanças,

$$\int_{r, \mu\nu\lambda} \rightarrow \int \frac{d^4x}{a^4} \quad ; \quad \int_{r, \mu\nu} \rightarrow \int \frac{d^4x}{a^4}$$

para um sistema em quatro dimensões; a expressão (V.41) ficará então

$$A \approx J \int \frac{d^4x}{a^4} \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu\lambda}^2 + J' \int \frac{d^4x}{a^4} \frac{1}{2} \beta_{\mu\nu}^2 \quad . \quad (V.44)$$

Em (V.39) temos

$$\beta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + a^2 \left[\frac{\Delta_\mu}{a} \frac{\lambda_\nu}{a} - \frac{\Delta_\nu}{a} \frac{\lambda_\mu}{a} \right] \quad . \quad (V.45)$$

Como no limite de baixas temperaturas as variáveis λ_μ variam muito pouco, podemos trocar $(\Delta_\mu/a) \rightarrow \partial_\mu$, de maneira que as identificações

$$\lambda_\mu = a B_\mu \quad ; \quad \beta_{\mu\nu} = a \psi_{\mu\nu} \quad (V.46)$$

são possíveis, onde

$$\psi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} + a(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \quad . \quad (V.47)$$

O campo $\psi_{\mu\nu}$ da equação (V.47) é o campo combinado da teoria clássica de Kalb-Ramond para a interação entre duas cordas abertas, desde que façamos a identificação $m \approx 1/a$, como sendo a massa do campo massivo B_μ . O campo $\psi_{\mu\nu}$ é invariante frente a transformação conjunta

$$\begin{aligned} \phi_{\mu\nu} &\rightarrow \phi_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu - \frac{1}{a} \chi_\mu \end{aligned} \quad .$$

As equações (V.27) e (V.46) com as escolhas $J = 1/6$ e $J' = -1/2$, nos permitem escrever (V.44) como

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{12} \int d^4 x F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4} \frac{1}{a^2} \int d^4 x \psi_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = \\
&= \int d\tau \int d^3 x \left(\frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4} \frac{1}{a^2} \psi_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \right) . \quad (V.48)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira que anteriormente, se fizermos a troca $\tau \rightarrow it$ em (V.48), teremos

$$A = -i A_m \quad ; \quad A_m \approx - \int dt \int d^3 x \left(\frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4} \frac{1}{a^2} \psi_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \right) \quad (V.49)$$

para a ação no espaço de Minkowski. Assim,

$$L = - \frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4} \frac{1}{a^2} \psi_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \quad (V.50)$$

que difere por um sinal negativo, irrelevante para as equações de movimento, da densidade de lagrangeana de Kalb-Ramond para a interação entre duas cordas abertas. A escolha das constantes de acoplamento ($J = 1/6$; $J' = -1/2$), nos leva a concluir que o nosso modelo acoplado a campos de matéria, se identifica com a teoria clássica de Kalb-Ramond para acoplamentos do tipo ferromagnético entre os campos de calibre, enquanto que acoplamentos antiferromagnéticos entre os campos de calibre e os campos de matéria.

Podemos também calcular a equação de movimento para os campos $\psi_{\mu\nu}$; a condição de que a ação (V.49) seja estacionária frente a uma variação destes campos, nos dá

$$\delta A_m = \int d^4 x \delta L = 0 \quad \text{quando} \quad \psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi_{\mu\nu} + \delta \psi_{\mu\nu} .$$

Como $L = L(\psi_{\mu\nu}, \partial_\lambda \psi_{\mu\nu}, \partial_\nu \psi_{\lambda\mu}, \partial_\mu \psi_{\nu\lambda})$ então,

$$\int d^4 x \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu\nu}} \delta \psi_{\mu\nu} + 3 \frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \psi_{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda \psi_{\mu\nu}) \right] = 0 \quad (V.51)$$

Uma integração por partes na segunda parcela de (V.51) nos leva a

$$\int d^4 x \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu\nu}} - 3\partial_\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \psi_{\mu\nu})} \right] \right) \delta \psi_{\mu\nu} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu\nu}} - 3\partial_\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \psi_{\mu\nu})} \right] = 0 \quad . \quad (V.52)$$

As equações (V.47), (V.50) e (V.52) nos dão a equação de movimento para os campos $\psi_{\mu\nu}$,

$$\square \psi_{\mu\nu} + \partial_\lambda \partial_\mu \psi_{\nu\lambda} + \partial_\lambda \partial_\nu \psi_{\lambda\mu} + \frac{1}{a^2} \psi_{\mu\nu} = 0 \quad (V.53)$$

que da mesma maneira que (V.32), possui também a forma de uma equação de onda.

CAPÍTULO VI

O MODELO DE CUBOS EM TRÊS DIMENSÕES (SOLUÇÕES EXATAS)

O modelo de spins unidimensional com acoplamento entre vizinhos mais próximos, é exatamente solúvel tanto para variáveis contínuas $U(1)$ ⁽²³⁾, como para variáveis discretas $Z(N)$ ⁽²¹⁾. Da mesma maneira, o modelo de calibre em plaquetas é exatamente solúvel em duas dimensões e ainda, suas soluções são idênticas às do modelo de spins unidimensional: para variáveis $U(1)$, a solução é escrita em termos das funções de Bessel de argumento imaginário ^{(9), (23)}; para variáveis $Z(N)$, a solução é escrita em termos dos pesos estatísticos (ver apêndice D),

$$x_{\eta} = \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ k_{\alpha} \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta - 1 \right) \right\} . \quad (\text{VI.1})$$

Podemos então extrapolar o resultado de que teorias formuladas em objetos d-dimensionais, são exatamente solúveis em d-dimensões e que estas soluções devem ser idênticas às soluções mencionadas acima. Portanto, o nosso modelo deve ser exatamente solúvel em três dimensões; estas soluções são apresentadas a seguir, inicialmente para variáveis $U(1)$ e depois para variáveis $Z(N)$.

6.1 - Variáveis contínuas $U(1)$

Baseados na função de correlação invariante por transformações de calibre para variáveis $Z(N)$ que definimos em (IV.36), introduziremos aqui a função de correlação

$$y(\Omega) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ P \in \Omega}} s[P] \quad (\text{VI.2})$$

para variáveis $U(1)$ sendo $S[P]$ dado por (V.14).

Usaremos frequentemente também a notação

$$y(\Omega) = \exp(i \oint_{\Omega} \theta_{\mu\nu}) \quad (\text{VI.3})$$

onde $\oint_{\Omega}$ denota um somatório orientado, no mesmo sentido que o produto orientado em (VI.2), sobre todas as variáveis angulares ao longo da superfície fechada Ω .

Com a ação (V.21) a menos de uma constante aditiva, poderemos escrever

$$\langle y(\Omega) \rangle = \frac{\int \left[\prod_{r,\mu\nu} \pi d\theta_{\mu\nu}(r) \right] \exp \left\{ K \sum_{r,\mu\nu\lambda} \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) + i \oint_{\Omega} \theta_{\mu\nu} \right\}}{\int \left[\prod_{r,\mu\nu} \pi d\theta_{\mu\nu}(r) \right] \exp \left\{ K \sum_{r,\mu\nu\lambda} \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \right\}} \quad (\text{VI.4})$$

Adotaremos um calibre temporal; se λ representa a direção temporal, então

$$\theta_{\rho\lambda}(r') = \theta_{\lambda\rho}(r') = 0 \quad (\text{VI.5})$$

de tal maneira que

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) = \theta_{\mu\nu}(r + \lambda) - \theta_{\mu\nu}(r) \quad (\text{VI.6a})$$

Para o cubo imediatamente acima do cubo da expressão (VI.6a) teremos

$$\alpha_{\mu\nu\lambda}(r + \lambda) = \theta_{\mu\nu}(r + 2\lambda) - \theta_{\mu\nu}(r + \lambda) \quad (\text{VI.6b})$$

É fácil notar então pelas expressões (VI.6), que se tomarmos uma soma sobre todos os cubos no interior da superfície fechada Ω , as variáveis angulares $\theta_{\mu\nu}$ dentro de Ω se cancelam mutuamente, sobrando apenas aquelas variáveis em faces ao longo da superfície Ω . Temos então que

$$\sum_{c_{\Omega}} \alpha_{\mu\nu\lambda} = \sum_{\Omega} \theta_{\mu\nu} \quad (\text{VI.7})$$

onde $\sum_{c_{\Omega}}$ denota uma soma sobre todos os cubos no interior da superfície fechada Ω . Em três dimensões, no calibre temporal, a cada variável $\theta_{\mu\nu}(r)$ podemos fazer corresponder uma variável $\alpha_{\mu\nu\lambda}(r)$ imediatamente acima da face $[r; \mu, \nu]$; desta maneira, podemos trocar nossa variável de integração $\theta_{\mu\nu}(r)$ por $\alpha_{\mu\nu\lambda}(r)$. Para os cubos fora da superfície Ω , aparecerão fatores idênticos no numerador e denominador que cancelarão. A expressão (VI.4) se reduz a

$$\langle y(\Omega) \rangle = \frac{\pi \int_{c_{\Omega}} d\alpha_{\mu\nu\lambda} \exp(K \cos \alpha_{\mu\nu\lambda} + i \alpha_{\mu\nu\lambda})}{\pi \int_{c_{\Omega}} d\alpha_{\mu\nu\lambda} \exp(K \cos \alpha_{\mu\nu\lambda})} \quad (\text{VI.8})$$

Conhecemos as funções de Bessel de argumento imaginário de ordem n ,

$$I_n(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(Z \cos \theta + i n \theta) d\theta \quad (\text{VI.9})$$

de maneira que a expressão (VI.8) pode ser escrita como

$$\langle y(\Omega) \rangle = \frac{\left[\int_0^{2\pi} d\alpha_{\mu\nu\lambda} \exp(K \cos \alpha_{\mu\nu\lambda} + i \alpha_{\mu\nu\lambda}) \right]^V}{\left[\int_0^{2\pi} d\alpha_{\mu\nu\lambda} \exp(K \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}) \right]^V} = \left[\frac{I_1(K)}{I_0(K)} \right]^V \quad (\text{VI.10})$$

onde V é o volume contido pela superfície fechada Ω . Temos então o decaimento exponencial com o volume para qualquer temperatura,

$$\langle y(\Omega) \rangle = \exp[-V v(K)] \quad (\text{VI.11})$$

onde

$$v(K) = -\ln \left[\frac{I_1(K)}{I_0(K)} \right] \quad (\text{VI.12})$$

Aqui também, para variáveis $U(1)$, em três dimensões, nosso modelo se apresenta em uma única fase desordenada, caracterizada pelo decaimento exponencial com o volume (VI.11), para qual - quer temperatura diferente de zero.

A função de partição em três dimensões, ou melhor, o denominador da expressão (VI.4), pode também ser calculada exatamente,

$$Z = \int \left[\prod_{r, \mu\nu} d\theta_{\mu\nu}(r) \right] \exp \left\{ K \sum_{r, \mu\nu\lambda} \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \right\} \quad (\text{VI.13})$$

Podemos dispensar o somatório $\sum_{\mu\nu\lambda}$ de maneira que os mesmos argumentos que nos levaram de (VI.4) a (VI.8) nos conduzem a

$$Z = \prod_r \int_0^{2\pi} d\alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \exp \left[K \cos \alpha_{\mu\nu\lambda}(r) \right] \quad (\text{VI.14})$$

Usando (VI.9), teremos

$$Z = [2\pi I_0(K)]^M \quad (\text{VI.15})$$

onde M é o número de sítios da rede.

6.2 - Variáveis discretas $Z(N)$

Denotaremos também a função de correlação (IV.36) por

$$W(\Omega) = \exp \left\{ \frac{i2\pi}{N} \sum_{P \in \Omega} \eta[P] \right\} \quad (\text{VI.16})$$

onde $\sum_{P \in \Omega}$ denota um somatório orientado, no mesmo sentido que o produto orientado em (IV.36), sobre todas as plaquetas ao longo da superfície Ω .

Se λ representa a direção temporal, um calibre temporal

$$S[r'; \rho, \lambda] = S[r'; \lambda, \rho] = 1 \quad (\text{VI.17})$$

nos permite escrever (II.2a) como

$$\begin{aligned} A_C \{r; \mu, \nu, \lambda\} &= S[r + \lambda; \mu, \nu] S^+ [r; \mu, \nu] = \\ &= \exp \frac{i2\pi}{N} (n[r + \lambda; \mu, \nu] - n[r; \mu, \nu]) \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

Se chamarmos

$$\eta_{\mu\nu\lambda}(r) = n[r + \lambda; \mu, \nu] - n[r; \mu, \nu] \quad (\text{VI.19})$$

teremos da mesma maneira que anteriormente,

$$\sum_{c_\Omega} \eta_{\mu\nu\lambda} = \sum_{P \in \Omega} n[P] \quad (\text{VI.20})$$

A expressão (IV.73) pode então ser escrita como

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \frac{\sum_{\eta_{\mu\nu\lambda}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp \left\{ K_\alpha \sum_c \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu\lambda} + i \sum_{c_\Omega} \frac{2\pi}{N} m \eta_{\mu\nu\lambda} \right\}}{\sum_{\eta_{\mu\nu\lambda}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp \left\{ K_\alpha \sum_c \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu\lambda} \right\}} \quad (\text{VI.21})$$

Para os cubos fora da superfície Ω , o numerador e o denominador apresentarão fatores comuns que cancelarão; ficaremos com

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \frac{\prod_{c_\Omega} \sum_{\eta_{\mu\nu\lambda}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp \left\{ K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu\lambda} + i \frac{2\pi}{N} m \eta_{\mu\nu\lambda} \right\}}{\prod_{c_\Omega} \sum_{\eta_{\mu\nu\lambda}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp \left\{ K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu\lambda} \right\}} \quad (\text{VI.22})$$

Definiremos as funções

$$H_m^N(K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}}) = \sum_{\eta=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \pi \exp \left(K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta + i \frac{2\pi}{N} m \eta \right) \quad (\text{VI.23})$$

que ainda podem ser escritas em termos dos pesos estatísticos

(VI.1),

$$H_m^N(K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}}) = \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \ell^{K_\alpha} \sum_{\eta=0}^{N-1} x_\eta \ell^{\frac{i2\pi}{N} m \eta} \quad (\text{VI.24})$$

Teremos então para (VI.22),

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \left[\frac{H_m^N(K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}})}{H_o^N(K_1, K_2, \dots, K_{\bar{N}})} \right]^V \quad (\text{VI.25})$$

o que nos dá, em concordância com os resultados da seção 4.2.4 , o decaimento exponencial com o volume para qualquer temperatura diferente de zero,

$$\langle W^m(\Omega) \rangle = \exp[-V v_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}})] \quad (\text{VI.26})$$

onde

$$v_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = -\ell n \left[\frac{H_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}})}{H_o^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}})} \right] \quad (\text{VI.27})$$

A equação (VI.27) lembra a estrutura de um comprimento de correlação ⁽²⁴⁾,

$$\xi^{-1} = \ell n(\lambda_o / \lambda_1)$$

calculado a partir da razão entre o maior autovalor e o segundo maior autovalor da matriz de transferência; poderíamos imaginar as funções H_o^N e H_m^N desempenhando o papel destes autovalores.

A função de partição, ou seja, o denominador da expressão (IV.73) pode ser calculada exatamente; os mesmos argumentos que nos levaram a (VI.21) nos conduzem a

$$Z = \sum_{\eta_{\mu\nu\lambda}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \ell^{K_\alpha} \exp \left[K_\alpha \sum_{r, \mu\nu\lambda} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu\lambda}(r) \right] \quad (\text{VI.28})$$

Em três dimensões, o somatório $\sum_{\mu\nu\lambda}$ pode ser dispensado e usando (VI.23) podemos escrever

$$Z = \left[H_O^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) \right]^M \quad (\text{VI.29})$$

onde M é o número de sítios da rede.

Podemos ver que o resultado (VI.26) concorda com as expansões feitas na seção 4.2.4, para altas e baixas temperaturas.

Para altas temperaturas, a identidade (IV.38) que ainda pode ser expressa como

$$\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp(K_{\alpha} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta) = \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} g_{\alpha} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta \quad (\text{VI.30})$$

nos permite escrever

$$\begin{aligned} H_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) &= \sum_{\eta=0}^{N-1} \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \ell^{\frac{i2\pi}{N} m \eta} g_{\alpha} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta = \\ &= \sum_{\eta=0}^{N-1} \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_{\alpha}}{2} \left[\ell^{\frac{i2\pi}{N} (m+\alpha) \eta} + \ell^{\frac{i2\pi}{N} (m-\alpha) \eta} \right] = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} g_{\alpha} \frac{N}{2} \left[\delta_{m+\alpha, 0 \pmod{N}} + \delta_{m-\alpha, 0 \pmod{N}} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.31})$$

onde utilizamos a identidade (IV.43).

Para $m=0$, em (VI.31), teremos

$$H_O^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = N g_O(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) \quad (\text{VI.32})$$

Para $m=1, 2, \dots, \bar{N}$, como $\alpha=0, 1, 2, \dots, \bar{N}$, podemos escrever (VI.31),

$$H_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} g_{\alpha} \frac{N}{2} (\delta_{m+\alpha, N} + \delta_{m-\alpha, 0}) \quad (\text{VI.33})$$

de maneira que o primeiro delta só será diferente de zero para N

par, quando tivermos $\alpha = m = \bar{N}$; neste caso,

$$H_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = N g_m(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) \quad . \quad (\text{VI.34})$$

Para todos os outros casos, teremos $\delta_{m+\alpha, N} = 0$ e então

$$H_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = \frac{N}{2} g_m(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) \quad . \quad (\text{VI.35})$$

As expressões (VI.32), (VI.34) e (VI.35) nos mostram que o resultado exato (VI.26) no limite de altas temperaturas se identifica com o primeiro termo da expansão (IV.74).

Para baixas temperaturas, as expressões (VI.23) e (VI.27), nos permitem escrever

$$v_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) = -\ln \left[\frac{1 + \ell^{i2\pi m/N} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\pi} \exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1) + \dots}{1 + \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\pi} \exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1) + \dots} \right] \quad (\text{VI.36})$$

O termo $(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1)$ é sempre menor ou igual a zero; para baixas temperaturas portanto, $\exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1)$ é pequeno. Podemos usar o fato de que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ e a aproximação,

$$\ln(1+x) \approx x$$

que nos levam a

$$v_m^N(K_1, \dots, K_{\bar{N}}) \approx (1 - \ell^{i2\pi m/N}) \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\pi} \exp K_{\alpha} (\cos \frac{2\pi}{N} \alpha - 1) \quad (\text{VI.37})$$

A expressão (VI.37) a menos de um fator multiplicativo irrelevante, se identifica com (IV.79) no primeiro termo da série para baixas temperaturas.

Note-se que na expressão (VI.36) consideramos apenas os

termos para $\eta = 0$ e $\eta = 1$ da função (VI.23); estes termos possuem respectivamente, a mesma estrutura que a primeira contribuição (nenhuma frustração) e segunda contribuição (uma frustração isolada resultante de uma linha de spins girados, todos por um mesmo ângulo $2\pi/N$), que utilizamos para construir a contribuição devido a n frustrações independentes na série da seção 4.2.3.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO

Neste trabalho, formulamos um modelo de calibre com simetria $Z(N)$ em cubos (objetos 3 simplex ($s=3$)). Para isso, colocamos variáveis de spin $Z(N)$ nas faces (objetos ($s-1$) simplex), enquanto que as transformações de calibre foram aplicadas nos elos (objetos ($s-2$) simplex).

Usando o formalismo da matriz de transferência, estudamos as transformações de dualidade do modelo. Mostramos então a autodualidade em seis dimensões ($d=2s$). Mostramos também que este modelo é dual a um sistema de spins $Z(N)$ em quatro dimensões ($d=s+1$). Esta dualidade nos permite conhecer algumas características do modelo por meio de uma aproximação de campo médio, aplicada ao sistema de spins; acreditamos que os resultados desta aproximação sejam bons, uma vez que a aproximação de campo médio para o modelo de Ising em quatro dimensões, nos fornece resultados que concordam muito bem com os obtidos utilizando técnica de simulação de Monte Carlo⁽²⁵⁾. Costuma-se dizer que a dimensão crítica do modelo de Ising é $d_c=4$, no sentido de que a aproximação de campo médio se torna exata para $d \geq 4$.

Definimos uma superfície fechada Ω , contendo uma área externa A e um volume V , formado por um número inteiro de cubos; as funções de correlação invariantes por transformações de calibre, apresentaram os comportamentos:

$$\begin{aligned} \langle W^m(\Omega) \rangle &\approx \ell^{-V} && \text{para altas temperaturas, enquanto que} \\ \langle W^m(\Omega) \rangle &\approx \ell^{-A} && \text{para baixas temperaturas } (d > 3) \end{aligned}$$

Estes resultados nos evidenciam a existência de transição de fase (pelo menos uma) para dimensões maiores do que três. Para três dimensões ($d=s$), as funções de correlação apresentaram um decaimento exponencial com o volume para qualquer temperatura diferente de zero, ou melhor, não temos transição de fase. Também em três dimensões, o modelo é exatamente solúvel, sendo estas soluções do mesmo tipo que as soluções para a teoria de calibre em plaquetas em duas dimensões, ou para sistemas de spins unidimensionais.

Podemos então generalizar nossos resultados para uma teoria com simetria de calibre, formulada em objetos s simplex. Colocamos as variáveis de spin em objetos $(s-1)$ simplex, enquanto que as transformações de calibre são aplicadas em objetos $(s-2)$ simplex. É importante notar que os sistemas de spins não apresentam simetria de calibre, uma vez que as transformações de calibre precisariam ser aplicadas em objetos (1) simplex. As transformações de dualidade são ditadas pela relação

$$\tilde{s} = d - s$$

onde $\tilde{s}$ denota o simplex do objeto dual.

Podemos definir uma hipersuperfície fechada Ω , contendo uma hiperárea externa A_h e um hipervolume V_h , formado por um número inteiro de objetos s simplex; as funções de correlação invariantes por transformações de calibre, devem apresentar os comportamentos:

$$\begin{aligned} \langle W^m(\Omega) \rangle &\approx \ell^{-V_h} && \text{para altas temperaturas;} \\ \langle W^m(\Omega) \rangle &\approx \ell^{-A_h} && \text{para baixas temperaturas } (d > s), \end{aligned}$$

uma vez que para $d=s$ este sistema não apresenta transição de fase. Para $d=s$ este sistema é exatamente solúvel, sendo as soluções do mesmo tipo que as do Capítulo VI.

APÊNDICE A

APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO PARA UM SISTEMA DE SPINS COM
SIMETRIA $Z(N)$

A aproximação de campo médio consiste em trocar as interações sentidas por uma certa variável, por um campo efetivo (médio) a ser determinado. Esta aproximação despreza flutuações, melhorando à medida que aumentamos o número de vizinhos mais próximos, o que em geral acontece quando aumentamos a dimensão do sistema.

Consideremos a ação mais geral de caráter ferromagnético, para um sistema de spins com simetria $Z(N)$,

$$A = - \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_{\alpha}}{2} [(S_i S_j^+)^\alpha + \text{c.c.}] \quad (\text{A.1})$$

onde $\sum_{\langle ij \rangle}$ denota uma soma somente entre vizinhos mais próximos.

A função de partição será então

$$Z = \ell^{\text{MF}} = \prod_{i=1}^M \sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ \frac{K_{\alpha}}{2} [(S_i S_j^+)^\alpha + \text{c.c.}] \right\} \quad (\text{A.2})$$

onde M denota o número de sítios da rede, enquanto que $F = -\beta f_N$, onde f_N é a energia livre de Helmholtz por sítios da rede.

No cálculo dos valores médios, utilizaremos a medida

$$D(S_i) = \frac{\prod_{i=1}^M \exp \frac{H}{2} (S_i + S_i^+)}{\prod_{i=1}^M \sum_{\{S_i\}} \exp \frac{H}{2} (S_i + S_i^+)} \quad (\text{A.3})$$

onde H representa o campo médio com o qual cada variável S_i interage; esta medida é normalizada,

$$\sum_{\{S_i\}} D(S_i) = 1 \quad .$$

A propriedade de convexidade da função exponencial nos fornece a desigualdade de Peierls,

$$\langle \exp B \rangle \geq \exp \langle B \rangle$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned} & \langle \exp \{ \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{K_{\alpha}}{2} [(S_i S_j^+)^{\alpha} + \text{c.c.}] - \frac{H}{2} \sum_{i=1}^M (S_i + S_i^+) \} \rangle \geq \\ & \exp \left[\sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{K_{\alpha}}{2} \langle (S_i S_j^+)^{\alpha} + \text{c.c.} \rangle - \frac{H}{2} \sum_{i=1}^M \langle S_i + S_i^+ \rangle \right] \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle S_i + S_i^+ \rangle &= 2 \frac{\sum_{n_i=0}^{N-1} (\cos \frac{2\pi}{N} n_i) \exp(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i)}{\sum_{n_i=0}^{N-1} \exp(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i)} \\ & \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

e se definirmos

$$F_N(H) = \ln \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \exp(H \cos \frac{2\pi}{N} n) \right\} \quad , \quad (\text{A.6})$$

obteremos que

$$\langle S_i + S_i^+ \rangle = 2 F'_N(H) \quad . \quad (\text{A.7})$$

Da mesma maneira,

$$\langle (S_i S_j^+)^{\alpha} + c.c. \rangle = 2 \frac{\sum_{n_i=0}^{N-1} \sum_{n_j=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha (n_i - n_j) \exp \left[H \left(\cos \frac{2\pi}{N} n_i + \cos \frac{2\pi}{N} n_j \right) \right]}{\sum_{n_i=0}^{N-1} \sum_{n_j=0}^{N-1} \exp \left[H \left(\cos \frac{2\pi}{N} n_i + \cos \frac{2\pi}{N} n_j \right) \right]}$$

e como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sin \frac{2\pi}{N} n \right) \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n \right) = 0 \quad ,$$

teremos que

$$\langle (S_i S_j^+)^{\alpha} + c.c. \rangle = 2 \left[\frac{\sum_{n_i=0}^{N-1} \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha n_i \right) \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right)}{\sum_{n_i=0}^{N-1} \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right)} \right]^2 . \quad (A.8)$$

Definindo

$$U_{\alpha, N}(H) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha n \right) \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n \right)}{\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n \right)} . \quad (A.9)$$

podemos escrever (A.8) como

$$\langle (S_i S_j^+)^{\alpha} + c.c. \rangle = 2 U_{\alpha, N}^2(H) . \quad (A.10)$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} & \langle \exp \left\{ \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{K_{\alpha}}{2} [(S_i S_j^+)^{\alpha} + c.c.] - \frac{H}{2} \sum_{i=1}^M (S_i + S_i^+) \right\} \rangle = \\ & = \frac{Z}{\pi \sum_{i=1}^M \{S_i\}} \exp \frac{H}{2} (S_i + S_i^+) \left[\sum_{n_i=0}^{N-1} \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right) \right]^M \end{aligned} \quad (A.11)$$

Utilizando os resultados (A.7), (A.10) e (A.11) na desigualdade (A.4), teremos

$$Z^{MF} \geq \exp \left[\sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} K_{\alpha} [U_{\alpha, N}(H)]^2 - H \sum_{i=1}^M F'_N(H) \right] \times \\ \times \left[\sum_{n_i=0}^{N-1} \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right) \right]^M \quad (A.12)$$

Aplicando-se o logaritmo na expressão (A.12) e lembrando que uma rede com M sítios possui Md ligações de vizinhos mais próximos, ficaremos com

$$F \geq G_N(H) = F_N(H) - H F'_N(H) + d \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} K_{\alpha} [U_{\alpha, N}(H)]^2 \quad (A.13)$$

O campo efetivo H será determinado então, para cada temperatura, de maneira a maximizar a função $G_N(H)$, ou melhor, minimizar a energia livre de Helmholtz, uma vez que

$$-\beta f_N \approx \max \{ G_N(H) \} \quad (A.14)$$

Os máximos da função $G_N(H)$ serão determinados como soluções da equação $G'_N(H) = 0$, que nos leva a

$$-H_{\text{eff}} F''_N(H_{\text{eff}}) + 2d \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} K_{\alpha} U_{\alpha, N}(H_{\text{eff}}) U'_{\alpha, N}(H_{\text{eff}}) = 0 \quad (A.15)$$

Para altas temperaturas ($K_{\alpha} \rightarrow 0$), a equação (A.15) será satisfeita somente para $H_{\text{eff}} = 0$; à medida que a temperatura diminui, o campo efetivo torna-se não nulo. Temos então duas situações importantes a considerar; se o campo efetivo torna-se não nulo de uma maneira contínua, como vemos na figura 10, temos então uma transição contínua (2a. ordem ou ordem superior). Quando o campo efetivo torna-se não nulo de uma forma descontínua, como na figu-

ra 11, temos descontinuidade nas derivadas primeiras da energia livre, resultando na existência de um calor latente; temos então uma transição de 1a. ordem.

FIG. 10 - A função $G_2(H)$ cujo máximo nos fornece a energia livre por sítio da rede ($-\beta f_N$). Para $d=4$, as curvas correspondem respectivamente a:

1) $K_1 = 0,10$	3) $K_1 = 0,135$
2) $K_1 = 0,125$	4) $K_1 = 0,145$

Uma transição contínua (2a. ordem ou ordem superior) ocorre na curva 2.

FIG. 11 - A função $G_6(H)$ para o modelo $Z(6)$ Potts escalar ($J_1 = J_2 = 2J_3$). Para $d = 4$, as curvas correspondem respectivamente a

- 1) $K_1 = K_2 = 2K_3 = 0,15$
- 2) $K_1 = K_2 = 2K_3 = 0,165$
- 3) $K_1 = K_2 = 2K_3 = 0,17596$
- 4) $K_1 = K_2 = 2K_3 = 0,19$

Uma transição de 1a. ordem ocorre para a curva 3.

APÊNDICE B

Neste apêndice, apresentamos algumas das funções $g_\alpha(K_1, \dots, K_{\bar{N}})$ que introduzimos na seção 4.2.1; a identidade (IV.38) pode ainda ser escrita como

$$\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta = \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} g_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta \quad (\text{B.1})$$

As funções $g_\alpha(K_1, \dots, K_{\bar{N}})$ serão as soluções de um sistema de $(\bar{N}+1)$ equações lineares $(\eta = 0, 1, \dots, \bar{N})$ dadas por (B.1); as equações para $\eta > \bar{N}$ são repetições das equações anteriores. Temos então, os seguintes resultados para $N = 2, 3$ e 4 :

a) $N = 2$

$$g_0(K_1) = \cosh K_1 \quad ; \quad g_1(K_1) = \sinh K_1$$

b) $N = 3$

$$g_0(K_1) = \frac{\ell^{K_1} + \ell^{-K_1/2}}{2} \quad ; \quad g_1(K_1) = \frac{2}{3}(\ell^{K_1} - \ell^{-K_1/2}) \quad ;$$

c) $N = 4$

$$\begin{aligned} g_0(K_1, K_2) &= \ell^{K_2} (\ell^{-2K_2} + \sinh K_1) \quad ; \\ g_1(K_1, K_2) &= \ell^{K_2} \sinh K_1 \quad ; \\ g_2(K_1, K_2) &= \ell^{K_2} (\ell^{K_1} - \ell^{-2K_2} - 2\sinh K_1) . \end{aligned}$$

APÊNDICE C

Neste apêndice, mostraremos que a expansão feita para baixas temperaturas na seção 4.1.2, no número de spins virados, é equivalente a uma expansão no número de frustrações.

Consideremos inicialmente, a teoria de calibre em plaquetas com simetria $Z(2)$, para dimensões maiores do que dois. Pode-se ver facilmente que o cubo da figura 3 está vinculado à condição

$$A_p[r+\lambda;\mu,\nu]A_p[r+\mu;\nu,\lambda]A_p[r+\nu;\lambda,\mu]A_p[r;\mu,\nu]A_p[r;\nu,\lambda]A_p[r;\lambda,\mu]=1 \quad (C.1)$$

onde $A_p[r;\mu,\nu]$ é dado por (II.1a) ^(*).

O vínculo (C.1) nos garante que um cubo só pode possuir números pares de plaquetas frustradas. Um pouco de imaginação nos leva a acreditar que o número mínimo de frustrações, diferente de zero, para uma rede, acontece quando frustramos todas as plaquetas que emanam de um mesmo elo. Temos então $2(d-1)$ frustrações.

Antes de prosseguirmos, analisemos o seguinte quadro:

(*) O vínculo (C.1) quando escrito em termos das variáveis $U(1)$ em (V.7) e (V.8), nos conduz à continuidade do fluxo magnético (lei de Gauss) ⁽⁹⁾,

$$\sum_{\text{faces de um cubo}} \theta_{\mu\nu} = 0$$

uma vez que $\theta_{\mu\nu}$ pode ser interpretado como o rotacional discreto do potencial vetor da eletrodinâmica.

	fronteira constituída por ...
1 elo objeto 1 simplex (s=1)	(2x1) sítios objetos 0 simplex
1 face objeto 2 simplex (s=2)	(2x2) elos objetos 1 simplex
1 cubo objeto 3 simplex (s=3)	(2x3) faces objetos 2 simplex
⋮	⋮
1 objeto s simplex	2s objetos (s-1) simplex

Consideremos agora, a teoria de calibre em cubos com simetria $Z(2)$, para dimensões maiores do que três. Um objeto 4 simplex é um objeto cuja fronteira é constituída por oito cubos. Este 4 simplex pode ser especificado por um dos seus vértices e suas quatro direções; uma das maneiras de representá-lo é $(r;\mu,\nu,\lambda,\rho)$.

Um vínculo análogo a (C.1) existe para este objeto,

$$\begin{aligned} &A_C\{r+\rho;\mu,\nu,\lambda\}A_C\{r+\mu;\nu,\lambda,\rho\}A_C\{r+\lambda;\rho,\mu,\nu\}A_C\{r+\nu;\lambda,\rho,\mu\}A_C\{r;\mu,\nu,\lambda\} \times \\ &\times A_C\{r;\nu,\lambda,\rho\}A_C\{r;\rho,\mu,\nu\}A_C\{r;\lambda,\rho,\mu\} = 1 \end{aligned} \tag{C.2}$$

onde $A_C\{r;\mu,\nu,\lambda\}$ é dado por (II.2).

O vínculo (C.2) nos garante que um 4 simplex só pode possuir números pares de cubos frustrados. Aqui também, pode-se ver que o número mínimo possível de frustrações, diferente de zero, para uma rede, acontece quando frustramos todos os cubos que emanam de uma mesma face; temos então $2(d-2)$ frustrações.

Analisemos a expansão feita na seção 4.1.2; utilizaremos agora, uma linguagem invariante por transformações de calibre.

Em (IV.6) tínhamos,

$$\langle W(\Omega) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \prod_C \exp(K SSSSSS) \prod_{P \in \Omega} S[P]}{\sum_{\{S\}} \prod_C \exp(K SSSSSS)} \quad (C.3)$$

A soma $\sum_{\{S\}}$ é sobre todas as configurações de spins; isto significa que estaremos somando contribuições correspondentes à configurações que diferem apenas por uma transformação de calibre. Podemos então trocar

$$\sum_{\{S\}} \rightarrow \sum_{\{\bar{S}\}} N(\bar{S})$$

onde $\sum_{\bar{S}}$ denota uma soma sobre cada configuração representativa de spins, escolhida dentro de uma classe de configurações invariantes por transformações de calibre; $N(\bar{S})$ é o número de cópias equivalentes à configuração $\bar{S}$. Para uma rede finita o número $N(\bar{S})$ é finito, e ainda mais, depende apenas do número de transformações de calibre possíveis de ser aplicadas na rede; $N(\bar{S})$ pode sair do somatório, sendo então cancelado.

A primeira contribuição para (C.3) é quando tivermos nenhuma frustração; dentro da classe de configurações invariantes se encontra a configuração de "todos os spins alinhados", o que nos leva a uma contribuição idêntica à obtida na seção 4.1.2.

A segunda contribuição será quando tivermos $2(d-2)$ frustrações; uma das cópias equivalentes é a configuração de "um spin virado", nos levando portanto a mesma contribuição que obtivemos anteriormente.

Utilizando a aproximação de que as frustrações acontecem independentemente, podemos chegar a uma expressão idêntica a (IV.19).

APÊNDICE D

SOLUÇÃO EXATA PARA A TEORIA DE CALIBRE EM PLAQUETAS EM DUAS DIMENSÕES COM SIMETRIA $Z(N)$

Consideremos uma rede bidimensional; colocaremos variáveis de spin $Z(N)$ nos elos enquanto que as transformações de calibre serão aplicadas nos sítios; a ação será dada por (II.1).

A função de correlação invariante por transformações de calibre, denominada alça de Wilson, é definida pelo produto orientado⁽¹⁶⁾,

$$W(C) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ \ell \in C}} S(\ell) \quad (D.1)$$

onde C é um contorno fechado e o produto orientado significa que devemos usar $S(\ell)$ ($S^+(\ell)$), quando a direção do contorno numa determinada ligação por paralela (antiparalela) a um dos vetores de base.

Utilizando (II.1) podemos escrever,

$$\langle W^m(C) \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} \prod_P \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \left(\prod_{\substack{\text{orient} \\ \ell \in C}} S^m(\ell) \right) \exp\left\{\frac{K_\alpha}{2} [(A_p)^\alpha + \text{c.c.}]\right\}}{\sum_{\{S\}} \prod_P \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp\left\{\frac{K_\alpha}{2} [(A_p)^\alpha + \text{c.c.}]\right\}} \quad (D.2)$$

Denotaremos também a função de correlação (D.1) por

$$W(C) = \exp i \frac{2\pi}{N} \oint_{\ell \in C} n(\ell) \quad (D.3)$$

onde $\oint_{\ell \in C}$ denota um somatório orientado, no mesmo sentido que o produtório orientado em (D.1), sobre todos os elos ao longo do

contorno fechado C.

Se v representa a direção temporal, podemos adotar o ca libre

$$S(r', v) = 1 \quad (D.4)$$

e então

$$A_p[r; \mu, v] = S(r, \mu) S^+(r+v, \mu) = \exp \frac{i2\pi}{N} [n(r, \mu) - n(r+v, \mu)] \quad (D.5)$$

Se chamarmos

$$\eta_{\mu v}(r) = n(r, \mu) - n(r+v, \mu) \quad , \quad (D.6)$$

pode-se ver facilmente que em duas dimensões, numa soma sobre todas as plaquetas no interior do contorno fechado C, os $n(r', \mu)$ se cancelarão mutuamente, sobrando apenas aqueles em elos ao longo do contorno C, ou melhor,

$$\sum_{P_C} \eta_{\mu v}(r) = \sum_{\ell \in C} n(\ell) \quad (D.7)$$

Para as plaquetas fora do contorno C, aparecerão fatores comuns em ambos numerador e denominador que cancelarão; a expressão (D.2) ficará então

$$\langle W^m(C) \rangle = \frac{\prod_{P_C} \sum_{\eta_{\mu v}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp(K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu v} + \frac{i2\pi}{N} m \eta_{\mu v})}{\prod_{P_C} \sum_{\eta_{\mu v}=0}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp(K_\alpha \cos \frac{2\pi}{N} \eta_{\mu v})} \quad (D.8)$$

que é uma expressão análoga a (VI.21) que obtivemos para os cubos em três dimensões. Da mesma maneira, utilizando as funções (VI.22), teremos

$$\langle W^m(C) \rangle = \left[\frac{H_m^N(K_1, \dots, K_N)}{H_O^N(K_1, \dots, K_N)} \right] A \quad (D.9)$$

onde A é a área mínima delimitada pelo contorno C. Então,

$$\langle W^m(C) \rangle = \exp \left[-A v_m^N(K_1, \dots, K_N) \right] \quad (D.10)$$

com

$$v_m^N(K_1, \dots, K_N) = -\ln \left[\frac{H_m^N(K_1, \dots, K_N)}{H_O^N(K_1, \dots, K_N)} \right] . \quad (D.11)$$

A expressão (D.10) nos dá o decaimento exponencial com a área para qualquer temperatura diferente de zero; em analogia à teoria de cubos em três dimensões, a teoria de calibre em plaquetas para duas dimensões, existe em uma única fase desordenada, caracterizada por (D.10).

A função de partição, ou melhor,

$$Z = \sum_{\{S\}} \prod_P \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left\{ \frac{K_\alpha}{2} \left[(A_P)^\alpha + c.c. \right] \right\} \quad (D.12)$$

com os mesmos argumentos que nos levaram a (D.8), pode ser escrita como

$$Z = \sum_{\eta_{\mu\nu}}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{\bar{N}} \exp \left[K_\alpha \sum_{r, \mu\nu} \cos \frac{2\pi}{N} \alpha \eta_{\mu\nu}(r) \right] . \quad (D.13)$$

Em duas dimensões, o somatório $\sum_{\mu\nu}$ é dispensado e a definição (VI.22) nos permite escrever

$$Z = \left[H_O^N(K_1, \dots, K_N) \right]^M \quad (D.14)$$

onde M é o número de sítios da rede. Veja que a expressão (D.14) coincide com (VI.28) para os cubos em três dimensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - YANG, C.N. and MILLS, R.L.; Phys. Rev. 96, 191 (1954)
- 2 - ABERS, E.S. and LEE, B.W.; Phys. Rep. 9C, 1 (1973)
- 3 - MARCIANO, W. and PAGELS, H.; Phys. Rep. 36C, 137 (1978)
- 4 - POLITZER, H.D.; Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973)
- 5 - GROSS, D.J. and WILCZEK, F.; Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973)
- 6 - WEGNER, F.J.; J. Math. Phys. 12, 2259 (1971)
- 7 - WILSON, K.G.; Phys. Rev. D10, 2445 (1974)
- 8 - KOGUT, J. and SUSSKIND, L.; Phys. Rev. D11, 395 (1975)
- 9 - KOGUT, J.B.; Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979)
- 10 - KADANOFF, L.P.; Rev. Mod. Phys. 49, 267 (1977)
- 11 - MACK, G. and PETKOVA, V.B.; Ann. Phys. 123, 442 (1979)
- 12 - FRÖHLICH, J.; Phys. Lett. 83B, 195 (1979)
- 13 - 't HOOFT, G.; Nucl. Phys. B138, 1 (1978); B153, 141 (1979)
- 14 - POLYAKOV, A.M.; Phys. Lett. 72B, 477 (1978)
- 15 - ALCARAZ, F.C. and KÖBERLE, R.; J. Phys. A14, 1169 (1981)
- 16 - ALCARAZ, F.C.; Tese de doutoramento, USP/IFQSC (1980)
- 17 - KRAMERS, H.A. and WANNIER, G.H.; Phys. Rev. 60, 252 (1941)
- 18 - POTTS, R.B.; Proc. Camb. Soc. 48, 106 (1952)
- 19 - ELITZUR, S.; Phys. Rev. D12, 3978 (1975)
- 20 - STANLEY, H.E.; "Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena" (Oxford University, New York) (1971)
- 21 - CRESSONI, J.C.; Tese de mestrado, USP/IFQSC (a ser apresentada)
- 22 - KALB, M. and RAMOND, P.; Phys. Rev. D9, 2273 (1974)
- 23 - BALIAN, R.; DROUFFE, J.M. and ITZYKSON, C.; Phys. Rev. D10, 3376 (1974)
- 24 - CAMP, W.J. and FISHER, M.E.; Phys. Rev. B6, 946 (1972)
- 25 - BLÖTE, H.W.J. and SWENDSEN, R.H.; "Critical Behavior of the four-dimensional Ising model"; Brookhaven National Laboratory Preprint (1980)