3

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

CARGA ESPACIAL MONOPOLAR LIVRE
A VOLTAGEM CONSTANTE

LUIZ ERNESTO CARRANO DE ALMEIDA

(Trabalho apresentado ao Instituto de Física
e Química de São Carlos, USP, para a
obtenção do título de Mestre em Física).

Orientador:

Dr. G. F. LEAL FERREIRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

SÃO CARLOS - 1974

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

OK

CARGA ESPACIAL MONOPOLAR LIVRE A VOLTAGEM CONSTANTE

- INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP -
Departamento de Física e Ciência dos Materiais

LUIZ ERNESTO CARRANO DE ALMEIDA

(Trabalho apresentado ao Instituto de Física
e Química de São Carlos, USP, para a
obtenção do título de Mestre em Física).

Orientador:

Dr. G. F. LEAL FERREIRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

SÃO CARLOS - 1974

LUIZ ERNESTO CARRANO DE ALMEIDA

CARGA ESPACIAL MONOPOLAR LIVRE A
VOLTAGEM CONSTANTE

(Solução geral para o caso em que
a dissipação de cargas se dá por
um único eletródio)

(Trabalho apresentado ao Ins-
tituto de Física e Química de
São Carlos, USP, para a obten-
ção do título de Mestre em Fí-
sica).

Orientador:
Dr.G.F.Leal Ferreira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
I F Q S C

1974

À memória de meu pai

À minha mãe

Aos tios Adriano e Lília, meus segundos pais

À Maria Alice, Caroline e
Luiz Gustavo

I N D I C E

Agradecimentos.....-	I
Patrocinadores.....	II
Resumo.....	III
Abstract.....	IV
Introdução.....	V
CAPÍTULO - 1 : EQUAÇÕES BÁSICAS - O MÉTODO DAS CARACTERÍS - TICAS-.....	1
1.1 Equações Básicas.....	1
1.2 O método das características.....	2
1.3 Aplicação do método das características na solução do problema de uma distribui- ção de cargas que não toca os eletródios.	4
CAPÍTULO - 2 : USO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS QUANDO A CAR- GA TOCA OS ELETRÓDIOS. (PARA MATERIAL COM CON- DUTIVIDADE NULA).....	7
CAPÍTULO - 3 : USO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS QUANDO UMA DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME TOCA UM DOS ELETRÓ- DIOS, PARA MEIOS DE CONDUTIVIDADE NÃO NULA....	16
CAPÍTULO - 4 : APLICAÇÕES DOS RESULTADOS PARA VÁRIAS DISTRI- BUIÇÕES- INVERSÃO DE CORRENTE.....	25
4.1 Aplicações.....	25
a) Distribuição tipo caixa.....	25
b) Distribuição linear.....	27
c) Distribuição quadrática.....	31
d) Distribuição exponencial.....	34
Sobre o problema da inversão de corrente.....	36
Contribuições Originais.....-	41

Sugestões.....	42
Apêndice A.....	43
Apêndice B.....	46
Figuras.....	47
Bibliografia.....	68

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é o resultado de um esforço conjunto de pessoas que, dentro de suas atividades, puderam influir de maneira direta ou indireta, proporcionando condições favoráveis para que o mesmo pudesse ser realizado.

Desejo agradecer de modo especial ao Dr. Guilherme F. L. Ferreira, meu professor e orientador nesta dissertação.

Além de sua orientação no aspecto profissional, das discussões e dos conhecimentos que pude obter, nele encontrei um amigo.

Pela sua dedicação, pelo seu espírito tenaz e paciente, pela sua sinceridade e pela sua auto-consistência entre palavra e ação, o meu agradecimento.

Agradeço:

Ao Dr. Sergio Mascarenhas de Oliveira pelo apoio que dele recebi

Ao Dr. Bernhard Gross por suas valiosas sugestões e pelo seu incentivo

Aos Drs. Sylvio Goulart Rosa Jr. e César Cusatis pelo estímulo que sempre me deram e pela amizade

Ao Bel. Luiz Nunes de Oliveira pela amizade, pelas constantes discussões e pelas sugestões

Ao Dr. Oscar Hipólito pela revisão do manuscrito e sugestões

À todos os meus professores, responsáveis por minha formação

Ao Sr. Paulo Roberto S. Beatrice responsável pelas fi

guras

À Srta. Loreni B. Pereira pela solicitude e presteza com que datilografou este trabalho

Aos meus colegas, demais professores, técnicos e funcionários, pelo incentivo e pela criação de um ambiente de trabalho acolhedor

À todos aqueles que embora ausentes, sempre deixaram a sua palavra de apoio e de incentivo, a minha gratidão.

III

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da FAPESP,
BNDE, CNPq, CAPES.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o movimento de cargas espaciais livres em sólidos dielétricos isolantes ou condutores, submetidos a uma d.d.p. conhecida, admitindo uma distribuição qualquer de cargas que toca inicialmente um dos eletrodos.

Usando o método das características, reduzimos o problema à solução de uma equação diferencial de 1ª ordem.

Como aplicações, resolvemos os casos de uma densidade linear, quadrática e exponencial, em sólidos com condutividade nula sob a condição de curto-circuito. Observamos que as distribuições tendem rapidamente para distribuições uniformes e, em certos casos, pode ocorrer inversão de corrente, dependendo do tipo de distribuição inicial.

ABSTRACT

Free space charge motion is studied in solid dielectrics, insulators or conductors, under a given voltage.

We assume an arbitrary charge distribution which is initially in contact with one of the electrodes.

Using the "Method of Characteristics" we can reduce the problem to the resolution of a first order differential equation.

Results are applied for linear, quadratic and exponential charge distributions in solids with zero conductivity under short-circuit conditions.

We saw that the charge profiles fall rapidly to uniform distributions and for cases dependent on initial distributions, current inversions are observed.

INTRODUÇÃO

Há pouco tempo, as soluções exatas para o movimento de carga espacial livre foram obtidas para distribuições tipo "box" (1,2,3). O caso de distribuições não uniformes foi estudado por J. Van Tunhout⁽²⁾ que o resolveu numericamente.

Recentemente G.F.L.Ferreira e L.Nunes de Oliveira⁽⁴⁾ encontraram soluções exatas para distribuições não uniformes, sob a condição de circuito aberto, enquanto que G.F.Leal Ferrêira e B.Gross⁽⁵⁾ tornaram conhecida a solução do problema para uma distribuição qualquer de cargas que não toque as placas, sob qualquer condição de d.d.p. A análise é feita até que uma das frentes alcance um dos eletródios e, o fato de se ter carga total constante facilita o conhecimento da corrente total $J(t)$ que, além do seu interesse como grandeza física, é importante para uma aplicação direta do método das características⁽⁶⁾, o qual utilizaremos.

Essencialmente, o método das características consiste em seguir a evolução espacial e temporal de linhas de corrente, definidas a partir da relação entre a velocidade das cargas e o campo elétrico.

Neste trabalho, propomo-nos estudar a solução das equações de carga espacial livre, para uma distribuição qualquer que toca um dos eletródios. É admitida simetria plana e uma d.d.p. conhecida, entre as placas. Não se considera a difusão^(7,8).

Ao contrário do que ocorre em (6), aqui existe escoamento de cargas, o que dificulta, sobremaneira, a obtenção de $J(t)$.

Contudo, conseguimos reduzir o problema à uma equação diferencial de 1ª ordem, tão mais complicada quanto o seja a distribuição inicial, mas sempre solúvel por métodos numéricos.

Usando a condição de curto circuito ($V=0$) e supondo um dielétrico de condutividade nula ($\sigma=0$) resolvemos, como aplicações, os seguintes casos:

- a) distribuição inicial tipo "box", $\rho(x_0, 0) = \rho_0$ (obtivemos os mesmos resultados de (3)) ;
- b) distribuição inicial linear, $\rho(x_0, 0) = \rho_0 + ax_0$;
- c) distribuição inicial quadrática, $\rho(x_0, 0) = \rho_0 + ax_0 + bx_0^2$;
- d) distribuição inicial exponencial, $\rho(x_0, 0) = \rho_0 e^{-x_0/a}$ (nesse caso fizemos a análise da sua expansão em 1a. e 2a. ordem) .

Verificamos ainda que, em contraposição ao caso em que as cargas não tocam os eletródios, pode haver inversão de corrente.

CAPÍTULO - 1

EQUAÇÕES BÁSICAS- O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

1.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

Para um dielétrico sem "traps", as equações que regem o movimento de cargas livres são:

$$-\frac{\partial J'_c(x',t')}{\partial x'} = \frac{\partial p'(x',t')}{\partial t'} \dots \text{equação da continuidade}$$

$$\epsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial x'} = \rho'(x',t') \dots \text{equação de Poisson}$$

onde $J'_c(x',t') = \mu \rho'(x',t') E'(x',t')$... densidade de corrente de condução.

Derivando parcialmente em relação ao tempo a equação de Poisson, usando a equação da continuidade e integrando em relação a x obtemos a equação da corrente total,

$$J'(t') = \epsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial t'} + \mu \rho'(x',t') E'(x',t') ,$$

onde μ é mobilidade de portadores,

$E'(x',t')$ o campo elétrico na posição x' , no tempo t' ,

$\rho'(x',t')$ a densidade de carga na posição x' , no tempo t' ,

ϵ a constante dielétrica,

$J'(t')$ a corrente total .

É possível escolhermos unidades reduzidas (apêndice) tais que as nossas equações contenham variáveis sem dimensões:

$$(1.1) \quad J_c(x,t) = \rho(x,t) E(x,t)$$

$$(1.2) \quad - \frac{\partial J_c(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho(x,t)$$

$$(1.4) \quad J(t) = \rho(x,t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}$$

1.2 O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Este método foi utilizado em problema de carga espacial, inicialmente por Many-Rakavy (6), no desenvolvimento da teoria de Space Charge Limited Currents (SCLC) transiente em sólidos isolantes e condutores.

Essencialmente o método consiste em:

- a) Introduzir o conceito de linha de corrente $x(t)$, que expressa a posição das cargas em função do tempo.
Tem-se:

$$(1.5) \quad \frac{dx(t)}{dt} = E(x(t), t)$$

- b) Obter uma equação diferencial para a variação do campo elétrico ao longo de uma linha de corrente. Derivando (1.5) em relação a t vem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dE(x,t)}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t}$$

Comparando com (1.4) vemos que:

$$(1.6) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dE(x,t)}{dt} = J(t)$$

$$(1.6a) \quad \text{cuja solução nos dá } E(x,t) = E(x_0, 0) + \int_0^t J(t') dt'$$

- c) Obter uma equação diferencial para a variação da densidade de carga ao longo de uma linha de corrente. Derivando $\rho(x,t)$ em relação a t vem:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = E \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Derivando (1.4) parcialmente em relação a x tem-se:

$$E \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad E \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho^2, \text{ portanto}$$

$$(1.7) \quad \frac{d\rho(x,t)}{dt} + \rho^2 = 0$$

Vemos, agora, que em princípio temos o problema resolvido se, de alguma forma, conhecermos a corrente total $J(t)$ pois, por integração da (1.6) e após, da (1.5), temos:

$$(1.8) \quad x(t) = x_0 + E(x_0, 0)t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} J(t'') dt''$$

onde x_0 caracteriza uma linha de corrente em sua posição inicial em $t=0$.

Teremos completado a solução se soubermos qual a densidade de carga ao longo da linha de corrente. A integração da (1-7)

nos dá:

$$(1.9) \quad \rho(x, t) = \frac{\rho(x_0, 0)}{1 + \rho(x_0, 0) t}, \quad \text{onde } \rho(x_0, 0) \text{ é a}$$

densidade de carga ao longo de uma linha de corrente em sua posição inicial x_0 .

Concluimos então que o conhecimento da corrente total $J(t)$ é imprescindível para a obtenção da solução. (e, portanto, é nela que devemos nos fixar)

Como ilustração desse fato faremos a seguir uma aplicação do método apresentado.

1.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS QUE NÃO TOCA OS ELETRÓDIOS

Admitindo simetria plana supomos os eletródios sujeitos a uma d.d.p. constante V_0 , o meio de condutividade nula ($\sigma=0$) e nele uma distribuição de cargas $\rho(x, t)$, de um dado sinal, que não toca nenhum dos eletródios inicialmente e função da posição e do tempo. Para $t=0$ temos $\rho(x_0, 0)$ conhecida (fig.1)

condição
de contorno $\int_0^1 E(x, t) dx = V_0$

Fig.1

Para se obter a solução do problema, consideremos os seguintes passos:

a) Substituindo a equação (1.3) na equação (1.4) vem:

$$J(t) = \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial E}{\partial x} . \quad \text{Integrando de 0 a 1 (para}$$

qualquer $t < \tau$, onde τ é o tempo de chegada da carga em um dos eletródios) obtemos :

$$\int_0^1 J(t) dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 E dx + \int_0^1 E \frac{\partial E}{\partial x} dx = \frac{dV_0}{dt} + \frac{[E^2(1,t) - E^2(0,t)]}{2}, e$$

$$(1.10) \quad J(t) = \frac{1}{2} | E^2(1,t) - E^2(0,t) |$$

b) Integrando a equação (1.3) para qualquer $t < \tau$ ficamos com

$$(1.11) \quad E(1,t) - E(0,t) = Q_0 \quad \text{onde } Q_0 \text{ é a carga total.}$$

Explicitando $E(0,t)$ e substituindo na equação (1.10) teremos:

$$(1.12) \quad J(t) = [2E(1,t) - Q_0] Q_0 / 2$$

A equação (1.4), da corrente total, em $x=1$ nos dá:

$$(1.13) \quad J(t) = \frac{dE(1,t)}{dt} \quad \text{uma vez que } \rho(1,t)=0 \text{ para } t < \tau.$$

Substituindo a equação (1.12) na equação (1.13) resulta:

$$\frac{dE(1,t)}{dt} = Q_0 E(1,t) - \frac{Q_0^2}{2}, \text{ que após integra-}$$

ção dará:

$$E(1,t) = \frac{Q_0}{2} + B e^{Q_0 t} \text{ onde } B \text{ é uma cte que po-}$$

de ser determinada a partir da condição de con-
torno.

Este resultado nos leva à um crescimento exponen-
cial para $J(t)$, sendo

$$J(t) = J_0 e^{Q_0 t} \text{ para } t < \tau.$$

Observamos, portanto, que se a corrente começa com um dado sinal, permanecerá sempre com esse sinal, não havendo inver-
são. Com o conhecimento de $J(t)$ podemos obter as linhas de corrente

$$x(t) = x_0 + E(x_0, 0)t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} J(t'') dt'' \text{ e a den-}$$

sidade de carga numa linha de corrente

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(x_0, 0)}{1 + \rho(x_0, 0)t}, \text{ pois conhecemos a dis-}$$

tribuição inicial $\rho(x_0, 0)$.

CAPÍTULO - 2

USO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS QUANDO A CARGA TOCA OS ELETRÓDIOS. (PARA MATERIAL COM CONDUTIVIDADE NULA ($\sigma=0$))

Admitindo simetria plana, supomos os eletródios sujeitos a uma voltagem conhecida, $V(t)$, dependente do tempo. Supomos ainda um meio de condutividade nula ($\sigma=0$), e nele uma distribuição de cargas em excesso, que toca um dos eletródios inicialmente e é função da posição (x) e do tempo (t).

Para $t=0$ temos $\rho(x_0, 0)$ conhecida. (Fig.2)

s_0 = posição da frente em $t=0$

s = posição da frente após um tempo t

Não havendo mais a conservação da carga, pois esta se dissipa no eletródio em $x=0$, torna-se difícil o conhecimento de $J(t)$. Contudo, inicialmente mantemos o mesmo procedimento do problema anterior e integramos $J(t)$ de 0 a 1, resultando:

$$(2.1) \quad J(t) = \frac{1}{2} [E^2(1,t) - E^2(0,t)] + \dot{V}(t)$$

Se conseguirmos conhecer $E(1,t)$ e $E(0,t)$ teremos resolvido o problema, uma vez que conhecemos $V(t)$ e $\hat{V}(t)$.

A nossa linha de conduta, aqui, será a de orientar o método de solução no sentido de obter as grandezas pertinentes, num dado tempo (essencialmente $E(1,t)$ e $E(0,t)$), em função de dados conhecidos referentes à condição inicial.

Para tal chamando χ o ponto de distribuição em $t=0$ que após um tempo t estará em $x=0$, ou seja, para $x=0$ $x_0=\chi$, vamos provar que

$$(2.2) \quad \rho(0,t) E(0,t) = -\rho(\chi,0) \frac{d\chi}{dt}$$

Aplicando a equação (1.4), da corrente total, em $x=0$, vem

$$(2.3) \quad J(t) = \rho(0,t) E(0,t) + \frac{dE(0,t)}{dt}$$

Por outro lado, a equação (1.6a) nos dá,

$$E(x,t) = E(x_0,0) + \int_0^t J(t') dt' \quad \text{e para } x=0,$$

$x_0=\chi$, então:

$E(0,t) = E(\chi,0) + \int_0^t J(t') dt'$. Derivando em relação a t fica:

$$(2.4) \quad \frac{dE(0,t)}{dt} = \frac{\partial E(\chi,0)}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} + J(t)$$

Substituindo a equação (2.4) na equação (2.3) tiramos imediatamente que

$$\rho(o,t)E(o,t) = -\rho(\chi,o) \frac{d\chi}{dt} \quad \text{como queríamos.}$$

Já conhecemos a expressão da densidade de carga ao longo de uma linha de corrente (eq. (1.9))

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(x_o,o)}{1+\rho(x_o,o)t}$$

Como para $x=0$, $x_o=\chi$, obtemos:

$$(2.5) \quad \rho(o,t) = \frac{\rho(\chi,o)}{1+\rho(\chi,o)t}$$

Substituindo (2.5) na equação (2.2) vem:

$$E(o,t) \cdot \frac{\rho(\chi,o)}{1+\rho(\chi,o)t} = -\rho(\chi,o) \frac{d\chi}{dt} \quad \text{portanto,}$$

$$(2.6) \quad E(o,t) = - \left[1+\rho(\chi,o)t \right] \frac{d\chi}{dt}$$

Vemos agora, que o nosso problema fica reduzido à resolução da equação diferencial, eq. (2.6), se pudermos expressar $E(o,t)$ em função de χ .

Nesse ponto concentramos nossa atenção.

Tendo em vista a equação (1.6a), podemos escrever:

$$E(l,t) = E(s_o,o) + \int_0^t J(t) dt$$

$$E(o,t) = E(\chi,o) + \int_0^t J(t) dt$$

Subtraindo membro a membro, obtemos:

$$(2.7) \quad E(0,t) = E(\chi,0) - E(s_0,0) + E(1,t)$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.6), vem

$$(2.8) \quad E(\chi,0) - E(s_0,0) + E(1,t) = - \left| 1 + \rho(\chi,0)t \right| \frac{d\chi}{dt}$$

Devemos encontrar, então, $E(1,t)$. Da condição de contorno, $\int_0^1 E dx = V(t)$, integrando por partes obtemos:

$$(2.9) \quad E(1,t) = V(t) + \int_0^s x \rho(x,t) dx, \quad \text{uma vez}$$

que só existe carga até s .

A equação (1.8), para a frente de carga, nos dá:

$$(2.10) \quad s(t) = s_0 + E(s_0,0)t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} J(t'') dt''$$

Subtraindo a equação (2.10) da equação (1.8) vem:

$$(2.11) \quad x = s + x_0 - s_0 + t \left| E(x_0,0) - E(s_0,0) \right|$$

Como vimos, para $x=0$, $x_0 = \chi$, portanto:

$$(2.12) \quad s = s_0 - \chi + t \left| E(s_0,0) - E(\chi,0) \right|, \quad \text{ou}$$

$$(2.12a) \quad -[\chi + E(\chi, 0)t] = s - s_0 - E(s_0, 0)t$$

Derivando a equação (2.11) em relação a x_0 e mantendo t constante, obtemos:

$$dx = dx_0 (1 + \rho(x_0, 0)t). \text{ Usando a eq. (1.9) vem:}$$

$$(2.13) \quad dx = dx_0 \cdot \rho(x_0, 0) / \rho(x, t)$$

Substituindo a equação (2.11) e (2.13) na equação (2.9) resulta:

$$(2.14) \quad E(1, t) = V(t) + \int_{\chi}^{s_0} \rho(x_0, 0) dx_0 |s - s_0 - tE(s_0, 0)| + \\ + \int_{\chi}^s x_0 \rho(x_0, 0) dx_0 + \int_{\chi}^s t \cdot E(x_0, 0) \rho(x_0, 0) dx_0 ,$$

onde os limites de integração foram mudados segundo as equações (2.11) e (2.12) e lembrando a definição da variável χ .

A partir das equações (2.12a) e (1.3), a equação (2.14) pode ser reescrita como:

$$(2.14a) \quad E(1, t) = V(t) - |\chi + E(\chi, 0)t| |E(s_0, 0) - E(\chi, 0)| + \\ + \int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0, 0) dx_0 + t \int_{\chi}^{s_0} E(x_0, 0) \rho(x_0, 0) dx_0$$

Usando a equação (1.3) na última integral obtemos:

$$(2.14b) \quad E(1,t) = V(t) - |\chi + E(\chi,0)t| |E(s_0,0) - E(\chi,0)| + \\ + \int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0,0) dx_0 + \frac{t}{2} |E^2(s_0,0) - E^2(\chi,0)|$$

Integrando por partes a integral restante teremos:

$$\int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0,0) dx_0 = \int_{\chi}^{s_0} x_0 dE(x_0,0) = \\ = x_0 E(x_0,0) \Big|_{\chi}^{s_0} - \int_{\chi}^{s_0} E(x_0,0) dx_0$$

Se chamamos $\int_0^{\chi} E(x_0,0) dx_0 = V(\chi)$ vem:

$$(2.15) \quad \int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0,0) dx_0 = s_0 E(s_0,0) - \chi E(\chi,0) + \\ + V(\chi) - V(s_0)$$

Substituindo a equação (2.15) na equação (2.14b) e efetuando os cálculos, chegamos finalmente a:

$$(2.16) \quad E(1,t) = V(t) - (\chi - s_0)E(s_0) + V(\chi) - V(s_0) + \\ + \frac{t}{2} [E(\chi) - E(s_0)]^2$$

onde fizemos $E(\chi,0)=E(\chi)$ e $E(s_0,0)=E(s_0)$ para simplificar a notação.

Substituindo $E(1,t)$ na equação (2.8), podemos conseguir a equação diferencial procurada:

$$(2.17) \quad \left\{ V(t) + [E(\chi) - E(s_0)] - (\chi - s_0)E(s_0) + \right. \\ \left. + [V(\chi) - V(s_0)] + \frac{t}{2} [E(\chi) - E(s_0)]^2 \right\} \frac{(-1)}{|1 + \rho(\chi,0)t|} = \frac{d\chi}{dt}$$

Agora vemos claramente, que o nosso problema fica reduzido apenas à resolução de uma equação diferencial (eq.2.17)).

Vale a pena ressaltar que a condição de contorno utilizada não altera em nada, o método. Se usarmos $\int_0^d E'dx' = V_0$

aparece o primeiro termo entre chaves, igual a 1, com o uso das unidades reduzidas. Se usamos $\int_0^d E'dx = 0$ esse termo é nulo. Se usamos

$\int_0^d E'dx = V(t)$ esse termo é $V(t)$.

As equações obtidas são completamente gerais e aplicam-se a qualquer distribuição de carga para $t=0$.

Assim, podemos dizer que, conhecida $\rho(x_0,0)$, sabemos $\rho(x,t)$, a posição das cargas ao longo das linhas de corrente $x(t)$ em qualquer t , que estavam em x_0 para $t=0$, consequentemente $s(t)$, a ex

pressão do campo e a expressão da corrente.

Para a obtenção dessas quantidades, seguimos, em geral o processo descrito abaixo:

a) A integração numérica da equação diferencial (2.17) nos dá os pontos χ_i que em um tempo t estarão em $x=0$. A condição inicial para essa equação é dada por $\chi=0$ para $t=0$ pois, certamente que o ponto $\chi=0$ é um ponto de distribuição.

b) Substituindo os pontos χ , obtidos no item a), na expressão da frente de carga,

$$(2.12) \quad s = s_0 - \chi + |E(s_0) - E(\chi)| t$$

teremos $s(t)$ pois $E(\chi)$ pode ser conhecido a partir de $\rho(\chi, 0)$ e do valor inicial da diferença de potencial.

c) Conhecido $s(t)$, podemos obter a expressão de todas as linhas de corrente numa dada posição inicial x_0 , já que a equação (2.11) é

$$(2.11) \quad x = x_0 + (s - s_0) + t |E(x_0) - E(s_0)|$$

d) Tendo em vista que ficamos conhecendo $x(t)$, podemos, para cada t fixado, fazer variar os x_0 , obtendo os respectivos valores de x .

Como já conhecemos $\rho(x, t)$ da equação (1.9)

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(x_0,0)}{1+\rho(x_0,0)t}, \quad \text{obtemos o perfil da}$$

carga para cada t fixado.

$$e) \quad \text{Finalmente, sendo } J(t) = \frac{1}{2} |E^2(1,t) - E^2(0,t)| + \dot{V}(t)$$

(equação 2.1), como $E(0,t) = E(\chi) - E(s_0) + E(1,t)$ (equação 2.7) e

$$E(1,t) = V(t) - (\chi - s_0)E(s_0) + V(\chi) - V(s_0) + \frac{t}{2} |E(\chi) - E(s_0)|^2 \quad (\text{equação 2.16}),$$

tiramos a expressão da corrente total e, como uso da eq (2.17) obtemos a sua variação com o tempo.

Aqui, observamos certos casos em que é possível existir inversão de corrente em contra-posição ao caso em que a distribuição inicial não toca os eletródios.

Um exemplo deste fato é mostrado no capítulo 4.

CAPÍTULO - 3

USO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS QUANDO UMA DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME TOCA UM DOS ELETRÓDIOS, PARA MEIOS DE CONDUTIVIDADE NÃO NULA ($\sigma \neq 0$)

Admitindo simetria plana, supomos que os eletródios estão sujeitos a uma voltagem qualquer $V(t)$, conhecida.

É suposto que o meio possui condutividade ($\sigma \neq 0$), existindo nele uma distribuição de cargas de um determinado sinal, que toca inicialmente um dos eletródios e que é função da posição (x) e do tempo (t). Para $t=0$ temos $\rho(x_0, 0)$ conhecida. Fig. 3

Condição de contorno

$$\int_0^l E(x, t) dx = V(t)$$

Região I- $\rho(t=0) = \rho(x_0, 0)$

Região II- $\rho(t=0) = 0$

Fig. 3

s_0 = posição da frente em $t=0$

s = posição da frente após um tempo t

$\rho(x_0, 0)$ = distribuição qualquer de cargas em $t=0$

σ = condutividade do material.

Neste caso a corrente de condução (adimensional) é escrita como:

$$(3.1) \quad J_c = \rho E + \sigma E .$$

Aqui, as equações do método das características são apenas um pouco alteradas.

1. A posição das cargas é, como antes, dada por $x(t)$ e temos

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = E(x,t) , \text{ cuja solução é}$$

$$(3.2a) \quad x = x_0 + \int_0^t E(x,t) dt$$

2. A equação diferencial para a variação da densidade de carga ao longo de uma linha de corrente é obtida da seguinte forma: Se a corrente de condução J_c for dada pela equação (3.1) a corrente total será:

$$(3.3) \quad J(t) = \rho E + \sigma E + \frac{\partial E}{\partial t}$$

e a equação da continuidade fica:

$$(3.4) \quad - \frac{\partial}{\partial x} (\rho E + \sigma E) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{que nos dará } \frac{\partial \rho}{\partial x} E + \rho^2 + \sigma \rho = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ ou}$$

$$(3.4a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} E + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho^2 - \sigma \rho$$

Porém

$$(3.5) \quad \frac{d\rho(x,t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} E + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3-4a) obtemos:

$$(3.6) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 + \sigma\rho = 0 \quad \text{cuja solução é:}$$

$$(3.7) \quad \rho(x,t) = \frac{\rho(x_0,0)}{1 + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho(x_0,0)} \cdot e^{-\sigma t}$$

3. A equação diferencial para a variação do campo ao longo de uma linha de corrente é dada por:

$$(3.8) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t}$$

Comparando essa equação com a equação (3.3) obtemos:

$$(3.9) \quad \frac{dE}{dt} = J - \sigma E, \quad \text{cuja solução é:}$$

$$(3.10) \quad E(x,t) = e^{-\sigma t} \left[E(x_0,0) + \int_0^t J(t') e^{\sigma t'} dt' \right]$$

Tendo visto a mudança nas equações do método das características para o caso atual, podemos agora, encaminhar o problema, tal como o fizemos no capítulo 2.

Assim, integrando a equação (3.3) de 0 a 1 e usando a condição de contorno dada, vem:

$$J(t) = \int_0^1 \rho E dx + \int_0^1 \frac{\partial E}{\partial t} dx + \int_0^1 \sigma E dx, \quad \text{portanto}$$

$$(3.11) \quad J(t) = \frac{1}{2} [E^2(1,t) - E^2(0,t)] + \dot{V}(t) + \sigma V$$

Por outro lado, a equação (3.3) para $x=0$ permiti-nos escrever

$$(3.12) \quad J(t) = \rho(0,t)E(0,t) + \sigma E(0,t) + \frac{dE(0,t)}{dt} \quad e,$$

$$(3.12a) \quad J(t) - \frac{dE(0,t)}{dt} = \rho(0,t)E(0,t) + \sigma E(0,t)$$

Da equação (3.10) tiramos que

$$(3.13) \quad E(0,t) = e^{-\sigma t} \left[E(\chi,0) + \int_0^t J(t') e^{\sigma t'} dt' \right],$$

onde χ é o ponto de distribuição em $t=0$ que após um tempo t estará em $x=0$.

Derivando a equação (3.13) em relação a t obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dE(0,t)}{dt} = e^{-\sigma t} & \left[\frac{\partial E(\chi,0)}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} + J(t) e^{\sigma t} \right] - \sigma e^{-\sigma t} \left[E(\chi,0) + \right. \\ & \left. + \int_0^t J(t') e^{\sigma t'} dt' \right] \end{aligned}$$

$$(3.14) \quad \frac{dE(0,t)}{dt} = e^{-\sigma t} \rho(\chi,0) \frac{d\chi}{dt} + J(t) - \sigma E(0,t)$$

$$(3.14a) \quad J(t) - \frac{dE(0,t)}{dt} = -e^{-\sigma t} \rho(\chi,0) \frac{d\chi}{dt} + \sigma E(0,t)$$

Substituindo a equação (3.14a) na equação (3.12a) ficamos com

$$(3.15) \quad \rho(\chi,0) \frac{d\chi}{dt} = -\rho(0,t)E(0,t) e^{\sigma t}$$

que é a equação correspondente à equação (2.2) do capítulo 2.

Lembrando a definição da variável χ , a partir da equação (3.7) escrevemos $\rho(0,t)$ como:

$$(3.16) \quad \rho(0,t) = \frac{\rho(\chi,0)}{1 + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho(\chi,0)} \cdot e^{-\sigma t}$$

Substituindo a equação (3.16) na equação (3.15), segue-se

$$(3.17) \quad \frac{d\chi}{dt} = - \left[1 + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho(\chi,0) \right]^{-1} \cdot E(0,t)$$

Da equação (3-10) podemos obter $E(0,t)$ e $E(1,t)$ como sendo:

$$(3.18) \quad E(1,t) = e^{-\sigma t} \left[E(s_0) + \int_0^t J(t') e^{\sigma t'} dt' \right]$$

$$(3.19) \quad E(0,t) = e^{-\sigma t} \left[E(\chi) + \int_0^t J(t') e^{\sigma t'} dt' \right], \text{ (onde } E(s_0,0)=E(s_0) \text{ e } E(\chi,0)=E(\chi)).$$

Subtraindo a equação (3.19) da equação (3.18) vem:

$$(3.20) \quad E(1,t) - E(0,t) = e^{-\sigma t} [E(s_0) - E(\chi)]$$

Já vimos no capítulo 2 que:

$$(3.21) \quad E(1,t) = V(t) + \int_0^s \chi \rho(x,t) d\chi$$

Substituindo a equação (3.10) na equação (3.2) e integrando obtemos:

$$(3.22) \quad x = x_0 - E(x_0, 0) \frac{(e^{-\sigma t} - 1)}{\sigma} + \\ + \int_0^t dt' e^{-\sigma t'} \int_0^{t'} J(t'') e^{\sigma t''} dt'' .$$

A frente de carga será dada, então, por:

$$(3.23) \quad s = s_0 - E(s_0) \frac{(e^{-\sigma t} - 1)}{\sigma} + \\ + \int_0^t dt' e^{-\sigma t'} \int_0^{t'} J(t'') e^{\sigma t''} dt''$$

Subtraindo a equação (3.23) da equação (3.22) ficamos com:

$$(3.24) \quad x - s = x_0 - s_0 + [E(x_0, 0) - E(s_0)] \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma}$$

Para $x=0$, $x_0 = \chi$, a equação (3.24) fica dada pela expressão:

$$(3.25) \quad (s - s_0) = - \left[\chi + (E(\chi) - E(s_0)) \right] \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma}$$

Substituindo a equação (3.24) na equação (3.21) obtemos:

$$(3.26) \quad E(1, t) = V(t) + \int_0^s [x_0 + (s - s_0) + (E(x_0, 0) - E(s_0)) \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma}] \rho(x, t) dx$$

Derivando a equação (3.24) em relação a x_0 e mantendo t constante, obtemos:

$$dx = dx_0 \left[1 + \rho(x_0, 0) \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \right]$$

Comparando essa equação com a equação (3.7) ficamos com:

$$(3.27) \quad dx = dx_0 \frac{\rho(x_0, 0)}{\rho(x, t)} e^{-\sigma t}$$

Substituindo a equação (3.27) em (3.26) vem:

$$(3.28) \quad E(1, t) = V(t) + \int_{\chi}^{s_0} \left\{ x_0 + (s - s_0) + [E(x_0, 0) - E(s_0)] \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \right\} \cdot e^{-\sigma t} \rho(x_0, 0) dx_0$$

Substituindo $(s - s_0)$ dado na equação (3.25), na equação (3.28), resulta:

$$E(1, t) = V(t) + e^{-\sigma t} \left\{ \int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0, 0) dx_0 - \left[\chi + E(\chi) \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \right] \int_{\chi}^{s_0} \rho(x_0, 0) dx_0 + \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \int_{\chi}^{s_0} E(x_0, 0) \rho(x_0, 0) dx_0 \right\}$$

$$E(1, t) = V(t) + \left\{ \int_{\chi}^{s_0} x_0 \rho(x_0, 0) dx_0 - \left[\chi + E(\chi) \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \right] (E(s_0) - E(\chi)) + \frac{1 - e^{-\sigma t}}{2\sigma} [E^2(s_0) - E^2(\chi)] \right\} e^{-\sigma t}$$

$$\text{pois } \rho(x_0, 0) = \frac{\partial E(x_0, 0)}{\partial x_0}.$$

Integrando por partes a integral que aparece nessa última equação

e definindo $V(\chi) = \int_0^\chi E(x) dx$, teremos:

$$E(1,t) = V(t) + e^{-\sigma t} \cdot \{ s_0 E(s_0) - \chi E(\chi) - V(s_0) + V(\chi) - [\chi + E(\chi) \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma}] [E(s_0) - E(\chi)] + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{2\sigma} [E^2(s_0) - E^2(\chi)] \}$$

e, finalmente, a expressão para $E(1,t)$ será:

$$(3.29) \quad E(1,t) = V(t) + e^{-\sigma t} \cdot \{ -(\chi - s_0) E(s_0) + V(\chi) - V(s_0) + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{2\sigma} [E(\chi) - E(s_0)]^2 \}$$

Vemos que esta expressão se reduz à equação (2.16) para o caso em que $\sigma=0$.

Da equação (3.20) tiramos a expressão de $E(0,t)$ em função de $E(1,t)$:

$$(3.30) \quad E(0,t) = E(1,t) + e^{-\sigma t} [E(\chi) - E(s_0)]$$

Substituindo a equação (3.30) e a (3.29) na equação (3.17), obtemos a expressão final para equação diferencial que procuramos:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{-1}{[1 + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho(\chi, 0)]} \{ V(t) + e^{-\sigma t} [E(\chi) - E(s_0) - (\chi - s_0) E(s_0) + V(\chi) - V(s_0) + \frac{(1-e^{-\sigma t})}{\sigma} (E(\chi) - E(s_0))^2] \} \quad (3-31)$$

Essa equação também se reduz à expressão correspondente (equação

2.15) quando $\sigma=0$.

Daqui para frente procedemos de maneira análoga ao capítulo precedente.

CAPÍTULO - 4

APLICAÇÕES DOS RESULTADOS PARA VÁRIAS DISTRIBUIÇÕES- INVERSAÇÃO DE CORRENTE

4.1 APLICAÇÕES

Neste capítulo faremos algumas aplicações, considerando os seguintes casos:

a) Distribuição tipo caixa

Para distribuição tipo caixa temos $\rho(x_0, 0) = \rho_0 =$
 $= \text{cte.}$

condição de contorno:

$$\int_0^1 E dx = 0$$

Usando a equação de Poisson, $\frac{\partial E}{\partial x} = \rho$, nas regiões I e II obtemos:

$$(4.1) \quad E_I(x, 0) = \rho_0 x + A(0) \quad E_{II}(x, 0) = E(1, 0)$$

Da condição de contorno, $\int_0^1 E dx = 0$, integrando por partes vem:

$$(4.2) \quad E(1, t) = \int_0^1 x \rho dx$$

Como os campos são contínuos em s_0 obtemos finalmente:

$$(4.3) \quad E(\chi, 0) = \rho_0 \chi + \rho_0 \frac{s_0^2}{2} - \rho_0 s_0$$

tiramos imediatamente que

$$(4.3a) \quad E(s_0, 0) = \rho_0 \frac{s_0^2}{2}$$

Como $V(\chi) = \int_0^\chi E(\chi) d\chi$ obtemos

$$(4.4) \quad V(\chi) = \rho_0 \frac{\chi^2}{2} + \rho_0 \frac{s_0^2}{2} \chi - \rho_0 s_0 \chi$$

$$(4.4a) \quad V(s_0) = \frac{\rho_0 s_0^3}{2} - \frac{\rho_0 s_0^2}{2}$$

Substituindo as expressões de $E(\chi)$, $E(s_0)$, $V(\chi)$, $V(s_0)$, na equação diferencial (geral) obtida no capítulo 2 obtemos (com $\rho_0=1$) :

$$(4.5) \quad (\chi - s_0) + (1+t) \frac{(\chi - s_0)^2}{2} = -(1+t) \frac{d\chi}{dt}$$

cujas solução é dada por:

$$(4.6) \quad (\chi - s_0) = \frac{2s_0}{(1+t) [2 - s_0 \ln(1+t)]}$$

Substituindo $E(\chi)$, $E(s_0)$ na expressão da "frente de carga", (equação 2.10), obtemos

$$(4.7) \quad s(t) = -(1+t)(\chi - s_0)$$

Comparando as equações (4.6) e (4.7) e derivando s em relação ao tempo obtemos a expressão da velocidade da "frente":

$$(4.8) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{2s_0^2}{(1+t) |2 - s_0 \ln(1+t)|^2}$$

que é a mesma expressão obtida na ref. (2).

b) Distribuição Linear

Para distribuição linear temos como condição inicial $\rho(x_0, 0) = \rho_0 + ax$.

Condição de contorno:

$$\int_0^l E dx = 0$$

Os campos elétricos nas regiões I e II são facilmente obtidos a partir da equação de Poisson:

$$(4.9) \quad E_I(\chi, 0) = \rho_0 \chi + \frac{a\chi^2}{2} + A(0) \quad \text{e} \quad E_{II}(\chi, 0) = E(1, 0)$$

Da condição de contorno, $\int_0^1 E dx = 0$, vem

$$(4.10) \quad E(1, 0) = \int_0^1 x \rho dx$$

$$(4.10a) \quad E(1, 0) = \int_0^{s_0} x_0 \rho(x_0, 0) dx_0$$

Como os campos são contínuos em s_0 , obtemos finalmente:

$$(4.11) \quad E(\chi, 0) = \rho_0 (\chi - s_0) + \frac{a}{2} (\chi^2 - s_0^2) + s_0^2 \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{as_0}{3} \right)$$

Imediatamente tiramos o valor na "frente":

$$(4.11a) \quad E(s_0, 0) = s_0^2 \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{as_0}{3} \right)$$

Como $V(\chi) = \int_0^\chi E(\chi, 0) d\chi$ obtemos:

$$(4.12) \quad V(\chi) = \rho_o \left(\frac{\chi^2}{2} - s_o \chi \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{\chi^3}{3} - s_o^2 \chi \right) + \\ + s_o^2 \left(\frac{\rho_o \chi}{2} + \frac{as_o \chi}{3} \right) \quad e$$

$$(4.12a) \quad V(s_o) = - \frac{\rho_o s_o^2}{2} - \frac{as_o^3}{3} + \frac{\rho_o s_o^3}{2} + \frac{as_o^4}{3}$$

Substituindo as expressões de $E(\chi)$, $E(s_o)$, $V(\chi)$, $V(s_o)$ na equação diferencial obtida no capítulo 2 obtemos:

$$(4.13) \quad \left\{ \rho_o (\chi - s_o) + \frac{\rho_o}{2} (\chi - s_o)^2 + \frac{a}{2} (\chi^2 - s_o^2) + \right. \\ \left. + a \left(\frac{\chi^3}{6} - \frac{s_o^2 \chi}{2} + \frac{s_o^3}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{t}{2} \left[\rho_o (\chi - s_o) + \frac{a}{2} (\chi^2 - s_o^2) \right]^2 \right\} \frac{(-1)}{[1 + (\rho_o + a\chi)t]} = \frac{d\chi}{dt}$$

Substituindo $E(\chi)$ e $E(s_o)$ na expressão da "frente de carga" (equação 2.10) obtemos:

$$(4.14) \quad s(t) = (s_o - \chi) - t \left[\rho_o (\chi - s_o) + \frac{a}{2} (\chi^2 - s_o^2) \right]$$

Conhecido $s(t)$ e fazendo $\chi = x_o$, podemos

obter a expressão de todas as linhas de corrente numa dada posição inicial x_0 , se substituirmos $E(x_0, 0)$ e $E(s_0)$ na equação (2.9).

Assim obtemos

$$(4.15) \quad x = x_0 + (s - s_0) + t \left[\rho_0 (x_0 - s_0) + \frac{a}{2} (x_0^2 - s_0^2) \right]$$

Substituindo $\rho(x, 0) = \rho_0 + ax_0$ na equação (1.9), obtemos também:

$$(4.16) \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_0 + ax_0}{1 + (\rho_0 + ax_0)t}$$

Da mesma forma, substituindo $E(x)$, $E(s_0)$, $V(x)$, $V(s_0)$ nas expressões de $E(0, t) \dots$ (eq. 2.7) e $E(1, t) \dots$ (eq. 2.16), lembrando que $J(t) = \frac{1}{2} [E^2(1, t) - E^2(0, t)]$, obteremos:

$$(4.17) \quad J(t) = -\frac{P}{2} [2S - P]$$

onde

$$P = \left[\rho_0 (x - s_0) + \frac{a}{2} (x^2 - s_0^2) \right]$$

$$S = \left[\rho_0 (x - s_0) + \frac{\rho_0}{2} (x - s_0)^2 + \frac{a}{2} (x^2 - s_0^2) + a \left(\frac{x^3}{6} - \frac{s_0^2 x}{2} + \frac{s_0^3}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{t}{2} P \right]$$

Atribuindo valores para os parâmetros ρ_0 e a , tais que $\rho_0=1$ e $a=-2$ (caso de uma distribuição linear que se anula no meio das placas), calculamos numericamente a evolução temporal, dos pontos χ da distribuição (fig.1), da "frente de carga" $s(t)$ (fig.2) e da corrente total $J(t)$ (fig.3). Pudemos obter também a variação de $\rho(x,t)$ com x , para cada tempo (fig.4).

c) Distribuição Quadrática

Neste caso a condição inicial é:

$$\rho(\chi,0) = \rho_0 + a\chi + b\chi^2$$

Condição de contorno

$$\int_0^1 E dx = 0$$

Analogamente às aplicações anteriores obtemos:

$$(4.18) \quad E(\chi) = -\rho_0 s_0 + \frac{s_0^2}{2} (\rho_0 - a) + \frac{s_0^3}{3} (a - b) + \frac{b s_0^4}{4} + \rho_0 \chi + \frac{a}{2} \chi^2 + \frac{b}{3} \chi^3$$

$$(4.18a) \quad E(s_0) = \frac{\rho_0 s_0^2}{2} + \frac{a s_0^3}{3} + \frac{b s_0^4}{4}$$

$$(4.19) \quad V(\chi) = \left[-\rho_0 s_0 + \frac{s_0^2}{2} (\rho_0 - a) + \frac{s_0^3}{3} (a-b) + \right. \\ \left. + \frac{bs_0^4}{4} \right] \chi + \frac{\rho_0}{2} \chi^2 + \frac{a}{6} \chi^3 + \frac{b}{12} \chi^4$$

$$(4.19a) \quad V(s_0) = -\frac{\rho_0 s_0^2}{2} + \frac{s_0^3}{2} (\rho_0 - a) + \frac{s_0^4}{3} (a-b) + \frac{bs_0^5}{4} + \\ + \frac{as_0^3}{6} + \frac{bs_0^4}{12}$$

Substituindo $E(\chi)$, $E(s_0)$, $V(\chi)$, $V(s_0)$ nas equações (2.15), (2.10), (2.9), (2.3) e (2.1) encontramos:

$$(4.20) \quad \left\{ P_0 + P_1 \chi + P_2 \chi^2 + P_3 \chi^3 + P_4 \chi^4 + \frac{t}{2} P_5^2 \right\} \frac{(-1)}{|1 + (a + b\chi^2)t|} = \\ = \frac{d\chi}{dt}$$

onde

$$P_0 = -\rho_0 s_0 + (\rho_0 - a) \frac{s_0^2}{2} + (a-b) \frac{s_0^3}{3} + \frac{bs_0^4}{4}$$

$$P_1 = \rho_0 (1-s_0) - \frac{as_0^2}{2} - \frac{bs_0^3}{3}, \quad P_2 = \frac{1}{2}(\rho_0 + a), \quad P_3 = \frac{1}{3}(b + \frac{a}{2})$$

$$P_4 = \frac{b}{12}$$

$$P_5 = \left[\rho_0 (\chi - s_0) + \frac{a}{2} (\chi^2 - s_0^2) + \frac{b}{3} (\chi^3 - s_0^3) \right]$$

$$(4.21) \quad s = (s_0 - \chi) + t \left[\rho_0 (s_0 - \chi) + \frac{a}{2} (s_0^2 - \chi^2) + \frac{b}{3} (s_0^3 - \chi^3) \right]$$

$$(4.22) \quad \begin{aligned} x = & x_0 + (s - s_0) + \left[\rho_0 (x_0 - s_0) + \frac{a}{2} (x_0^2 - s_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{b}{3} (x_0^3 - s_0^3) \right] t \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad J(t) = - \frac{P_5}{2} (2S - P_5)$$

onde

$$S = P_0 + P_1 \chi + P_2 \chi^2 + P_3 \chi^3 + P_4 \chi^4 + \frac{t}{2} P_5^2$$

Atribuindo valores para os parâmetros ρ_0 , a , b , tais que $\rho_0=1$, $a=-1$, $b=-2$ (a distribuição se anula em $x=0,5$), calculamos numericamente a evolução temporal dos pontos χ da distribuição e da frente de carga $s(t)$. Obtivemos ainda a variação de $\rho(x,t)$ com x para cada tempo. Nossos resultados estão mostrados nas figuras 5,6 e 7.

d) Distribuição Exponencial

Neste caso temos $\rho(\chi, 0) = \rho_0 e^{-\chi/a}$

Condição de contorno

$$\int_0^l E dx = 0$$

Da mesma forma que nas aplicações anteriores obtemos:

$$(4.24) \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{-1}{1+e^{-\chi/a_t}} \{ (a-a^2) (e^{-s_0/a} - e^{-\chi/a}) + \\ + (\chi-s_0) a e^{-s_0/a} + \frac{t}{2} |a(e^{-s_0/a} - e^{-\chi/a})|^2 \}$$

$$(4.25) \quad s = (s_0 - \chi) + at(e^{-\chi/a} - e^{-s_0/a})$$

$$(4.26) \quad x = x_0 + (s - s_0) + at(e^{-s_0/a} - e^{-x_0/a})$$

$$(4.27) \quad J = - \frac{P_Q}{2} (2S_T - P_Q)$$

onde

$$P_Q = a(e^{-s_0/a} - e^{-\chi/a})$$

$$S_T = \{ (a-a^2)(e^{-s_0/a} - e^{-\chi/a}) + (\chi-s_0)ae^{-s_0/a} + \frac{t}{2} P_Q^2 \}$$

Atribuindo valores para os parâmetros ρ_0 e a , tais que $\rho_0=1$ e $a=1$ mostramos nas figuras 8,9 e 10, a variação da posição da "frente" com o tempo, a variação de $\rho(x,t)$ com x para tempos fixados, e a variação da corrente total com o tempo.

Com o intuito de verificar em que ordem de aproximação uma distribuição exponencial pode ser substituída por sua expansão, fizemos o desenvolvimento em 1a. e 2a. ordem.

Assim, $\rho = \rho_0 e^{-\chi/a}$ até 1a. ordem em x nos dá:

$$(4.28) \quad \rho = \rho_0 (1 - \frac{\chi}{a})$$

Para $\rho_0=1$, $a=1$, mostramos, comparativamente, os resultados da distribuição exponencial e de sua expansão até 1a. ordem.

Podemos observar que o tempo de chegada da frente para $\rho = \rho_0 e^{-\chi/a}$ é maior que o tempo de chegada no caso de sua expansão (fig.11). Em ambos os casos as distribuições rapidamente aproximam-se de distribuições "tipo caixa" (fig.12) e, a corrente total na distribuição não expandida é maior que no caso de sua expansão (fig.13).

A expansão de $\rho = \rho_0 e^{-\chi/a}$ até 2a. ordem é

$$(4.29) \quad \rho = \rho_0 (1 - \frac{\chi}{a} + \frac{\chi^2}{2a^2})$$

Ainda para $\rho_0=1$ e $a=1$ as figuras 14, 15 e 16 mostram a comparação da exponencial e de sua expansão até 2a. ordem.

- (8. e 8b) Fig.14 - Variação da "frente" com o tempo.
- (9. e 9b) Fig.15 - Variação de $\rho(x,t)$ com x para diversos tempos (fixados).
- (10. e 10b) Fig.16- Variação da corrente total com o tempo.

Agora observamos que o tempo de chegada da "frente" é quase o mesmo (fig.14); após um tempo relativamente pequeno, as distribuições ficam praticamente as mesmas (fig.15). Também a corrente total é praticamente a mesma. (fig.16)

Podemos, portanto, considerar a expansão até 2a. ordem como uma boa aproximação.

Para substituírmos uma distribuição exponencial por uma linear, que forneça praticamente os mesmos resultados, ajustamos as duas curvas usando o método dos mínimos quadrados.⁽⁹⁾

Sendo $\rho = \rho_0 e^{-x/a}$ e $\rho = \delta_0 + Ax$ para $t=0$, fizemos $\rho_0=1$ e $a=1$ e obtivemos valores para os parâmetros δ_0 e A , tais que $\delta_0 = 0,992$, $A = -0.82$. Observamos então que o tempo de chegada da frente é praticamente o mesmo (fig.17), a carga inicial é igual (fig.18), assim como o é, também, a corrente total (fig.19).

4.2 SOBRE O PROBLEMA DA INVERSÃO DE CORRENTE

Em todas as aplicações anteriores, com os valores atribuídos aos parâmetros das diversas distribuições, vimos que a corrente, em cada caso, não mudava de sentido.

Contudo, isto é apenas circunstancial uma vez que podemos verificar ser possível a inversão, conforme raciocínio a seguir:

No caso em que $V=0$ a equação (2.1) fica sendo ,

$$J(t) = \frac{1}{2} [E^2(1,t) - E^2(0,t)] \quad , \text{ portanto}$$

$$J(t) = \frac{1}{2} [E(1,t) - E(0,t)] [E(1,t) + E(0,t)]$$

Da equação de Poisson (eq. 1.3) tiramos que

$$(4.30) \quad E(1,t) - E(0,t) = \int_0^S \rho dx \quad \text{logo,}$$

$$(4.30a) \quad E(0,t) = E(1,t) - \int_0^S \rho dx$$

Substituindo esses resultados na expressão de $J(t)$ vem:

$$(4.31) \quad J(t) = \left[2E(1,t) - \int_0^S \rho dx \right] \frac{1}{2} \int_0^S \rho dx$$

Porém, para $V=0$ a equação (2.9) é:

$$(4.31) \quad E(1,t) = \int_0^S x \rho dx \quad \text{substituído na equação (4.31)}$$

obtemos:

$$(4.32) \quad J(t) = \left[2 \int_0^S x \rho dx - \int_0^S \rho dx \right] \frac{1}{2} \int_0^S \rho dx \quad \text{ou}$$

$$(4.32a) \quad J(t) = \left[\frac{\int_0^S x \rho dx}{\int_0^S \rho dx} - \frac{1}{2} \right] \left[\int_0^S \rho dx \right]^2$$

Sendo $\int_0^S \rho dx = q(t)$, a carga total no instante t , então,

$$\frac{\int_0^S x \rho dx}{\int_0^S \rho dx} = \bar{x} \quad \text{onde } \bar{x} \text{ é a posição média das cargas}$$

no tempo t .

Assim chegamos a:

$$(4.33) \quad J(t) = \left[\bar{x} - \frac{1}{2} \right] q^2$$

Nessa equação vemos que o sinal de $J(t)$ depende da posição média ($\bar{x}$) das cargas.

A equação (2.7) também pode ser escrita por:

$$(4.34) \quad E(l, t) = \bar{x} \cdot q$$

Tendo em vista que $J(t) = \frac{dE(l, t)}{dt}$, então:

$$(4.35) \quad J(t) = q \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} \frac{dq}{dt}$$

Derivando $J(t)$, equação (4.33), em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{dJ}{dt} = q^2 \frac{d\bar{x}}{dt} + 2q \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{dq}{dt}, \quad \text{ou}$$

$$(4.36) \quad \frac{dJ}{dt} = q^2 \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{2J}{q} \frac{dq}{dt}$$

Admitamos que $J(t)$ seja muito pequeno e negativo e que alcance seu valor zero: (basta que se tenha $E(1,t)=E(0,t)$ para que $J(t)=0$).

Nesta situação as equações (4.35) e (4.36) nos darão respectivamente:

$$(4.37) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = - \frac{\bar{x}}{q} \frac{dq}{dt}$$

$$(4.38) \quad \frac{dJ}{dt} = q^2 \frac{d\bar{x}}{dt}$$

Verificamos da (4.37) que, sendo $\frac{dq}{dt}$ negativo e $\bar{x}$ e q positivos, $\frac{d\bar{x}}{dt}$ será positivo.

Conclui-se que $\frac{dJ}{dt}$ será positiva quando $J(t)$ alcançar seu valor zero, podendo, portanto, haver inversão de corrente. O fato que nos induz à linha de raciocínio anterior é o que se segue.

Se explicitarmos $q \frac{d\bar{x}}{dt}$ na equação (4.35) (supondo-se agora estarmos nas vizinhanças de $J=0$, portanto J é muito pequeno) e substituirmos na equação (4.36). Obteremos:

$$(4.39) \quad \frac{dJ}{dt} = qJ + \frac{2J}{q} \frac{dq}{dt} - q\bar{x} \frac{dq}{dt}$$

Para J muito pequeno, é possível que se tenha uma situação em que prevaleça o último termo, verificando-se então que

$$\frac{dJ}{dt} > 0.$$

Sendo $\frac{dJ}{dt} > 0$ podemos esperar que J troque de sinal ao

assumir o valor zero, o que de fato acontece, pois foi mostrado que para $J=0$ $\frac{dJ}{dt} > 0$.

Numa tentativa de comprovar tal fato, resolve -
mos o caso de uma distribuição linear $\rho = \rho_0 + ax$ atribuindo os seguin
tes valores aos parâmetros ρ_0 e a :

$\rho_0 = 0.1$ - com esse valor nos certificamos que existe $\frac{dq}{dt} \neq 0$ inicial
mente.

$a = 1$.

Para tais valores, calcula-se que $s_0 = 0,8$ (s_0 é a
posição da frente em $t=0$) para que a corrente seja negativa.

Para que $J(t)$ fôsse pequeno inicialmente, escolhe
mos $s_0 = 0.75$.

Com esses valores conseguimos obter a fig. (20)
que nos mostra uma inversão de corrente.

CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

1. Obtivemos de maneira geral a solução para o movimento de carga espacial livre em sólidos dielétricos com ou sem condutividade, para o caso de uma distribuição qualquer de carga, que toque inicialmente um dos eletródios, sob condição de voltagem conhecida. (Em caso de simetria plana)
2. Mostramos também que para certas distribuições é possível haver inversão de corrente.

SUGESTÕES

- Podemos propor como problema futuro, o caso de uma distribuição qualquer que, inicialmente, toque os dois eletródios. Nesse caso seria possível pensar-se em mais uma variável Y , além daquela introduzida no texto (χ), onde Y representaria os pontos da distribuição em $t=0$ que após um tempo t estariam em $x=1$. Desta forma reduziríamos o problema à resolução de um sistema de equações diferenciais.
- Um estudo mais detalhado sobre o problema de inversão de corrente também seria interessante.

APÊNDICE A

Com a finalidade de facilitar os cálculos no desenvolvimento do problema utilizamos unidades reduzidas.

Se representamos as unidades reduzidas por E, x, ρ, J, J_c temos:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho \quad , \quad J = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t} \quad ,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_c}{\partial x} = 0 \quad e \quad \int_0^1 E dx = 1$$

Relacionamos as unidades reduzidas e as não reduzidas fazendo:

$$E = aE' \quad , \quad x = bx' \quad , \quad \rho = c\rho' \quad , \quad t = mt' \quad , \quad J = lJ'$$

Substituindo estas relações nas equações reduzidas, teremos:

$$\frac{a}{b} \frac{\partial E'}{\partial x'} = c\rho' \quad , \quad lJ' = ac\rho'E' + \frac{a}{m} \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad ,$$

$$\frac{c}{m} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{ac}{b} \frac{\partial \rho'E'}{\partial x'} = 0 \quad \int_0^{1/b} E' dx' = \frac{1}{ab}$$

Lembrando que as equações não reduzidas nos dão:

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = \frac{\rho'}{\epsilon} \quad , \quad J' = \mu \rho' E' + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \mu \frac{\partial \rho' E'}{\partial x'} = 0 \quad , \quad \int_0^d E' dx' = V_0,$$

obtemos um sistema de 4 equações a 5 incógnitas:

$$a = b c \epsilon \quad , \quad \frac{a c}{\ell} = \mu \quad , \quad \frac{a}{m \ell} = \epsilon \quad , \quad \frac{1}{a b} = V_0$$

Se arbitramos $b = \frac{1}{d}$ que satisfaz o segundo limite da integral reduzida, ou seja,

$$\int_0^1 E dx = 1 \quad , \quad \text{obteremos:}$$

$$E = \frac{d}{V_0} E' \quad , \quad x = \frac{x'}{d} \quad , \quad t = \frac{\mu V_0}{d^2} t' \quad ,$$

$$\rho = \frac{d^2}{\epsilon V_0} \rho' \quad e \quad J = \frac{d^3}{\epsilon \mu V_0^2} J'$$

Nas aplicações, resolvemos o caso em que $\int E' dx' = 0$ e portanto vemos que não é possível escolhermos variáveis reduzidas em função do parâmetro V_0 usado no caso anterior. Devemos escolher um novo parâmetro que não se anule.

Para tal, escolhemos inicialmente $\rho = \frac{\rho'}{\rho'_0}$ e $x = \frac{x'}{d}$. Fazemos $E = a E'$, $J = \Delta J'$, $t = m t'$.

Substituindo $E = a E'$, $\rho = \rho' / \rho'_0$ na equação de Poisson (reduzida) $\frac{\partial E}{\partial x} = \rho$, obtemos ad $\frac{\partial E'}{\partial x'} = \frac{\rho'}{\rho'_0}$ e como $\frac{\partial E'}{\partial x'} = \frac{\rho'}{\epsilon}$ segue

se que $E = \frac{\epsilon}{d\rho_0} E'$.

Levando na equação de corrente total vem:

$$\ell J' = \frac{\rho'}{\rho'_0} \cdot \frac{\epsilon}{d \rho'_0} E' + \frac{\epsilon}{d\rho'_0 m} \frac{\partial E'}{\partial t'}$$

Comparando com $J' = \mu \rho' E' + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'}$ vemos que

$$J = \frac{\epsilon}{\mu \rho'^2_0 d} J' \quad e \quad t = \frac{\mu \rho'_0}{\epsilon} t'.$$

Podemos portanto, escrever as equações de redução:

$$\rho = \frac{1}{\rho} \rho' \quad , \quad x = \frac{1}{d} x' \quad , \quad E = \frac{\epsilon}{d\rho'_0} E' \quad ,$$

$$J = \frac{\epsilon}{\mu \rho'^2_0 d} J' \quad e \quad t = \frac{\mu \rho'_0}{\epsilon} t'.$$

APÊNDICE B

Nos gráficos a seguir, as grandezas corrente total ($J'(t)$), distribuição de cargas $\rho'(n',t')$, linhas de corrente $x'(t')$, tempo t' e frente de cargas $s'(t')$, podem ser obtidas em suas verdadeiras dimensões, fazendo uso das equações de redução obtidas no Apêndice A. Assim tem-se:

$$\rho' = \rho_0' \times \rho, \quad x' = d \times x, \quad J' = \frac{\mu \rho_0'^2 d}{E} \quad \text{e} \quad t' = \frac{\mu \rho_0' t}{E}$$

Como um exemplo tomemos a figura 3. Para a leitura em que $\rho(x,t) = 0.392$ e $x = 0.68$ terãmos respectivamente:

$$\rho'(x',t') = 0.392 \times \rho_0' \quad \text{e} \quad x' = 0.68 \times d$$

No caso que se resolveu ($v(t) = 0$), o parâmetro arbitrário é ρ_0' (conforme Apêndice A).

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

Fig. II

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

Fig 18

Fig. 19

Fig. 20

B I B L I O G R A F I A

- (1) H.Wintle. J.Appl.Physics, 42, 4724 (1971)
- (2) J.van Tunhout. Electrets, edited by M.M.Perlman The Electrochemical So. Inc., pg.230
- (3) G.F.Leal Ferreira and B.Gross. Revista Brasileira de Física, 2, 205 (1972)
- (4) G.F.Leal Ferreira and L.Nunes de Oliveira. Exact solution with non uniform charge distributions in open circuit. (submetido à publicação)
- (5) G.F.Leal Ferreira and B.Gross. J.Nonmetals, 1, 129 (1973)
- (6) A.Many and G.Rabavy. Phys.Review, 126, 1980 (1962)
- (7) E.I. Adirovich and L.A.Dubrovskii. Sov.Physics-Dokl. 10 , 923 (1966)
- (8) R.Chilling and H.Sehachter. J.Appl.Physics, 38, 841 (1967).
- (9) F.Scheid. Theory and Problem on Numerical Analysis (Schamm's Outline Series)- McGraw-Hill Book Company New York, Cap.21 (1968).