

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

"HAMILTONIANO DE TEMPO-CONTÍNUO PA  
RA O MODELO DE BAXTER"

*Valter Luiz Líbero*



Dissertação apresentada ao Ins  
tituto de Física e Química de  
São Carlos para obtenção do Tí  
tulo de Mestre em Física Bási  
ca.

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Drugowich de Felício

São Carlos  
1983



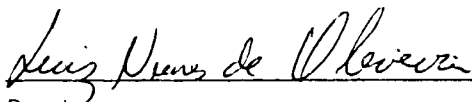
MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE \_\_\_\_\_  
Válter Luis Líbero

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22 DE julho DE 1983.

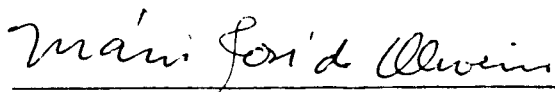
COMISSÃO JULGADORA:



Dr. José Roberto Drugowich de Felícia Orientador



Dr. Luiz Nunes de Oliveira



Dr. Mário José de Oliveira

Este trabalho teve o apoio financeiro da FAPESP e da  
CAPES.

DEDICO,

*À minha família, pelo  
amor e dedicação.*

*Aos amigos Geraldo,  
Nadaletto e Sabino.*

AGRADEÇO,

Ao Prof. Drugowich pela importante e agradável orientação, pelos valiosos incentivos durante toda a minha formação e por sua participação decisiva no meu mestrado.

Ao Prof. Luiz Nunes pelo apoio e importantes discussões que muito contribuíram para a minha formação.

Aos Profs. Roland Köberle e Silvestre Ragusa, responsáveis pela minha iniciação científica.

Aos Profs. Rogério, Almir e Sylvio pela especial atenção à mim dedicada.

À Marisa e Abraham pela forte amizade que sempre nos uniu.

Aos amigos Ana Silvia, Drugo e Luis Nunes pela maravilhosa convivência que me proporcionaram.

À Maria Lucia pela companhia e palavras de estímulo.

À Marta pelo excelente trabalho de datilografia e à Cecília pela solicitude demonstrada.

## ÍNDICE

LISTA DE ILUSTRAÇÕES E TABELAS .....	I
RESUMO .....	II
ABSTRACT .....	III
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - CONEXÃO ENTRE MODELOS DE VÉRTICES E HAMILTONIANOS DE SPIN .....	9
II.1 - Apresentação do modelo .....	9
II.2 - Matriz de transferência do modelo de oito-vértices .....	13
II.3 - Hamiltoniano associado à ma- triz de transferência .....	17
II.4 - Relação entre a matriz de transferência do 8-V e o hamiltoniano de Heisenberg .....	20
CAPÍTULO III - HAMILTONIANO DE TEMPO CONTÍNUO PARA O MODELO DE BAXTER .....	25
III.1 - Representação de Ising para o modelo de Baxter .....	25
III.2 - Modelo de Ashkin-Teller e sua representação de Ising .....	35
III.3 - Equivalência entre o modelo de Ashkin-Teller e o modelo de Baxter .....	37
III.4 - Hamiltoniano de tempo-contí- nuo .....	43
III.5 - Correspondência entre opera- dores do modelo de Ashkin- -Teller e do modelo de Bax- ter .....	53
APÊNDICE I - Determinação do hamiltoniano asso- ciado ao modelo de Baxter .....	55
APÊNDICE II - Verificação da igualdade entre os hamiltonianos $H$ e $\mathbb{H}$ .....	61
APÊNDICE III - Transformação de dualidade.....	64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	67

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - Uma possível configuração de vértices para uma rede quadrada.....	9
FIGURA 2 - Os dezesseis vértices possíveis para uma rede com número de coordenação quatro .....	10
FIGURA 3 - Notação usada para duas camadas sucessivas da matriz de transferência do modelo de oito vértices,.....	13
FIGURA 4 - Vértice elementar .....	15
FIGURA 5 - Ação dos operadores $T(V=\zeta)$ e $T^{-1}(V=\zeta)$ .....	22
FIGURA 6 - Modelo de Baxter e sua representação em termos de spins de Ising .....	25
FIGURA 7 - Um vértice e os spins das quatro faces que o envolve .....	26
FIGURA 8 - Sistema de spins equivalente ao modelo de Baxter .....	27
FIGURA 9 - Super-rede para o modelo de Baxter .....	27
FIGURA 10 - Camadas na super-rede para a matriz de transferência do modelo de Baxter .....	28
FIGURA 11 - Representação de Ising para o modelo de Ashkin-Teller .....	37
FIGURA 12 - Super-rede para o modelo de Ashkin-Teller .....	38
FIGURA 13 - Super-rede para o modelo de Ashkin-Teller rodada de $45^{\circ}$ graus .....	40
FIGURA 14 - Vértices e respectivos pesos do modelo de Baxter .....	41
FIGURA 15 - Limite de tempo contínuo e transformações de dualidade para o modelo de Ashkin-Teller .....	50

## LISTA DE TABELAS

TABELA I - Estados e correspondentes energias no modelo de Ashkin-Teller .....	35
--	----

## RESUMO

Nós obtemos o hamiltoniano associado ao modelo de oito vértices simétrico, tomando o limite de tempo contínuo em um modelo equivalente (modelo de Ashkin-Teller). O resultado é um hamiltoniano de Heisenberg com coeficientes  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  idênticos àqueles encontrados por Sutherland, na região crítica.

A mudança nos operadores é acompanhada explicitamente e a relação entre o operador "crossover" do modelo de Ashkin-Teller e o operador energia do modelo de Baxter é obtida de forma transparente.



## ABSTRACT

We obtain the associated Hamiltonian for the symmetric eight-vertex model by taking the time-continuous limit in an equivalent Ashkin-Teller model. The result is a Heisenberg Hamiltonian with coefficients  $J_x$ ,  $J_y$  and  $J_z$  identical to those found by Sutherland for choices of the parameters  $a, b, c$  and  $d$  that bring the model close to the transition.

The change in the operators is accomplished explicitly, the relation between the crossover operator for the Ashkin-Teller model and the energy operator for the eight-vertex model being obtained in a transparent form.

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A primeira descrição quantitativa de fenômenos críticos apareceu com Van der Waals<sup>(1)</sup> em 1873, quando ele apresentou uma equação de estado, aproximada, para um fluido. Abaixo de uma certa temperatura, chamada crítica, essa equação apresenta uma instabilidade, caracterizando uma transição de fase.

Quanto a sistemas magnéticos, foi só em 1907, depois dos trabalhos pioneiros de Curie, Hopkinson e outros, que Pierre Weiss<sup>(2)</sup> propôs uma teoria fenomenológica para descrever a transição ferromagnética, na qual os momentos magnéticos dos átomos interagem via "campo molecular" que é proporcional à magnetização média. Uma versão mais moderna dessa teoria, considera que cada spin interage com todos os outros do sistema com igual intensidade.

As teorias de Van der Waals e P. Weiss, embora tratando de problemas diferentes, possuem características comuns como por exemplo, são equivalentes a uma teoria com interação de alcance infinito<sup>(3)</sup>, não dependem da dimensão do sistema e mais importante, não levam em conta flutuações do parâmetro de ordem. Em vista disso, elas não descrevem corretamente os sistemas físicos, falhando principalmente na região crítica onde as flutuações são essenciais<sup>(4)</sup>.

Com o advento da mecânica quântica, foi possível se chegar a um modelo mais realista para a interação entre os átomos<sup>(5)</sup>, e já em 1925 o jovem Ernest Ising<sup>(6)</sup> publicava a solução, para o caso unidimensional, daquele que viria a ser o mais conhecido e citado modelo da mecânica estatística nos cinquenta anos seguintes. Para completa frustração do seu orientador Wilhelm Lens, a in

teração

$$- J \sum_j S_j S_{j+1} - H \sum_j S_j \quad , \quad (1)$$

onde  $S_j$  representa o momento magnético do átomo, que pode tomar apenas os valores  $\pm 1$ , não conduziu a um valor médio de  $S$  ( $\langle S \rangle$ ) diferente de zero para campo magnético  $H$  igual a zero. Os argumentos do próprio Ising para explicar a inexistência de transição ferro - magnética mesmo em dimensões mais altas, levaram a um esquecimento temporário do modelo, que só foi retomado dez anos depois<sup>(7)</sup> para descrever ligas binárias. Como modelo de ferromagnetismo, o modelo de Ising só foi ressuscitado quando Peierls<sup>(8)</sup> mostrou que já em duas dimensões poderia ocorrer uma transição de fase<sup>(\*)</sup>. Essa previsão foi comprovada por Onsager<sup>(10)</sup> que tendo obtido a energia livre exata para o modelo de Ising bidimensional foi capaz de extrair todas as informações relevantes a respeito da transição de fase desse modelo. Em vista da importância desses resultados, muitos autores consideram o trabalho de Onsager o marco de uma nova etapa no estudo de fenômenos críticos.

O próximo grande resultado em teoria de transição de fase foi conseguido em 1967 por Elliott Lieb<sup>(11)</sup> que resolveu exatamente o modelo de seis vértices, que havia sido proposto já em 1941 por Slater<sup>(12)</sup> para descrever a transição ferroelétrica do fosfato di-hidrogenado de potássio (KHP) e seu isômero KDP. O tratamento do modelo bidimensional de vértices desenvolvido por Lieb está relacionado de forma surpreendente com a solução de Yang-Yang<sup>(13)</sup> para o modelo (quântico) unidimensional de Heisenberg. Essa coincidência foi explicada por McCoy e Wu<sup>(14)</sup> ao mostrarem

---

(\*) Somente em 1964 é que essa prova foi tornada rigorosa por R. Griffiths<sup>(9)</sup>.

que, com uma escolha conveniente de parâmetros, a matriz de transferência do modelo de seis vértices comuta com aquele hamiltoniano..

Essa conexão entre modelos bidimensionais clássicos e unidimensionais quânticos começou então a ser investigada em outras situações. O primeiro a obter sucesso foi Sutherland<sup>(15)</sup> que provou a comutação da matriz de transferência do recém-proposto modelo de oito vértices simétrico<sup>(16)</sup> com o hamiltoniano de Heisenberg completamente anisotrópico. A seguir, Suzuki<sup>(17)</sup> obteve uma relação análoga entre o modelo de Ising e um hamiltoniano XY e finalmente Krinsky<sup>(18)</sup> encontrou o operador (XY com campo) que comuta com a matriz de transferência do modelo de fermions livres. Vale a pena notar que todos os modelos acima mencionados são solúveis exatamente e em alguns casos como consequência direta da conexão estabelecida.

Existem, contudo, modelos bidimensionais muito interessantes, tais como Potts<sup>(19)</sup> escalar e vetorial, Ashkin-Teller<sup>(20)</sup> e cúbico<sup>(21)</sup> que não possuem solução exata. Entretanto, eles são muito atraentes porque, além do interesse intrínseco, se mostram adequados para a descrição de certas situações experimentais. Por exemplo, a transição ordem-desordem de hélio adsorvido em grafite esfoliado (grafoil) pode ser descrita pelo modelo de Potts com três estados<sup>(22)</sup>.

Desafortunadamente não se conhece para nenhum desses modelos o operador unidimensional associado, que os tornaria tratáveis pelas técnicas do grupo de renormalização no espaço real<sup>(23,24,25)</sup>. Para contornar essa dificuldade, procura-se encontrar um hamiltoniano que comute pelo menos aproximadamente com a matriz de transferência do modelo em questão.

Uma das maneiras de realizar essa idéia foi introduzida por Fradkin e Susskind<sup>(26)</sup> no contexto de um modelo solúvel (Ising) e que recebeu o nome de limite de tempo-contínuo.

Para mostrar esse procedimento, vamos tomar a matriz de transferência do modelo Ising bidimensional, já na forma de operador:

$$\hat{T} = (2 \sinh 2K^V)^{N/2} e^{j \sum K^H \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z} e^{j \sum K^{V*} \sigma_j^x} , \quad (2)$$

onde  $N$  é o número de sítios da rede,  $K^H$  e  $K^V$  são os acoplamentos horizontais e verticais respectivamente, já divididos por  $K_B T$ , e finalmente  $K^{V*}$  é definido por

$$K^{V*} = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tgh} K^V . \quad (3)$$

O cálculo dessa matriz segue em linhas gerais aquele apresentado na seção III.1 para o Ising dobrado, ou pode ser encontrado em diversas referências, como por exemplo no artigo de P.W. Kasteleyn<sup>(27)</sup>.

Como os operadores nas exponenciais (2) não comutam, em geral não poderemos escrever  $\hat{T}$  como uma única exponencial. Contudo, definiremos um operador  $\hat{H}$  que em algum limite especial possa ser escrito como

$$\hat{T} = e^{-\tau \hat{H}} , \quad (4)$$

onde  $\tau$  é o espaçamento da rede na direção vertical, também chamada direção temporal.

Usando a identidade<sup>(28)</sup>

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2} [A,B] + \dots} \quad (5)$$

onde (...) significa uma soma infinita de múltiplos comutadores dos operadores  $A$  e  $B$ , teremos a seguinte expressão para  $\hat{H}$

$$\hat{H} = -\frac{1}{\tau} \sum_j \left( K^H \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + K^{V*} \sigma_j^x + \frac{1}{2} K^H K^{V*} \left[ \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z, \sigma_j^x \right] + \dots \right) \quad (6)$$

Até aqui esse  $\hat{H}$  é tão complicado quanto  $\hat{T}$ . No entanto, se considerarmos o limite  $\tau \rightarrow 0$  (tempo-contínuo) ganharemos uma enorme simplificação. Isso porque para que tenhamos um  $\hat{H}$  bem definido, nessa situação, é necessário que

$$K^{V*} = \delta \tau \quad (7a)$$

e

$$K^H = \Lambda \tau \quad , \quad (7b)$$

onde  $\delta$  e  $\Lambda$  são independentes de  $\tau$  (em primeira ordem). De (3) e (7a) temos também que

$$K^{V*} = e^{-2K^V} \quad . \quad (8)$$

Isso significa que no limite de tempo contínuo temos uma versão altamente anisotrópica ( $K^H \rightarrow 0$  e  $K^V \rightarrow \infty$ ) do modelo original. Sendo  $\tau$  um parâmetro livre, que precisa apenas ir a zero, vamos defini-lo como

$$\tau = e^{-2K^V} \quad , \quad (9)$$

e dessa forma (7) se reescrevem como

$$K^{V*} = \tau \rightarrow \delta = 1 \quad (10a)$$

e

$$K^H = \Lambda e^{-2K^V} \quad . \quad (10b)$$

Nessas condições, os múltiplos comutadores em  $\hat{H}$  vão todos a zero e portanto teremos o seguinte hamiltoniano associado à matriz de transferência

$$\hat{H} = - \sum_j (\Lambda \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \sigma_j^x) \quad . \quad (11)$$

Esse hamiltoniano na verdade só determinará a dinâmica do modelo Ising numa vizinhança do ponto crítico e  $\Lambda$  é exatamente uma medida do afastamento de  $T_c$ . A razão para isso é que o limite de tempo contínuo é uma transformação do grupo de renormalização e por isso mesmo só preserva as propriedades do sistema nas proximidades do ponto fixo. De fato, ao fazermos  $\tau \rightarrow 0$  mudamos a escala vertical e para manter a mesma física (mesmas funções de correlação) a grandes distâncias reescalamos os acoplamentos:  $K^V \rightarrow \infty$  e  $K^H \rightarrow 0$ . Em outras palavras, isso significa o seguinte<sup>(26)</sup>: Se  $K^H = K^V$ , a função de correlação

$$\tau(n) = \langle \sigma_n^z \sigma_0^z \rangle \quad (12)$$

teria simetria circular, no limite de  $n$  grande. No caso  $K^V \rightarrow \infty$  e  $K^H \rightarrow 0$ ,  $\tau(n)$  passará a correlacionar mais fortemente os spins na direção vertical. Como queremos preservar a mesma física, deveremos compensar essa anisotropia distorcendo a rede e a relação (9) é a que garante isso, ao menos para grandes comprimentos de correlação, ou seja, nas vizinhanças do ponto crítico.

É possível também entender o significado do parâmetro  $\Lambda$ , usando a condição de criticalidade do modelo Ising anisotrópico

$$\sinh 2K^V \sinh 2K^H = 1 \quad . \quad (13)$$

Quando  $K^V \rightarrow \infty$  e  $K^H \rightarrow 0$  ,

$$\sinh 2K^V \rightarrow \frac{1}{2} e^{2K^V} \quad (14a)$$

e

$$\sinh 2K^H \rightarrow 2K^H \quad . \quad (14b)$$

Portanto, de (13),

$$K^H = e^{-2K^V} \quad (15)$$

ou seja, comparando com (10b),  $\Lambda$  crítico vale

$$\Lambda_c = 1 \quad . \quad (16)$$

Essa teoria foi imediatamente levada a modelos mais complicados, tais como Potts e Ashkin-Teller<sup>(29,30)</sup>, embora para esse último caso haja uma controvérsia sobre qual seja a maneira mais conveniente de se fazer o limite<sup>(31,32)</sup>. Na realidade foi exatamente tentando esclarecer essa situação que vislumbramos a possibilidade de se fazer o limite de tempo-contínuo para o próprio modelo de oito vértices simétrico, com a possibilidade ímpar de poder compará-lo com o resultado exato obtido por Sutherland<sup>(15)</sup>. Levando adiante essa idéia, encontramos para o modelo de Baxter<sup>(33)</sup> (oito vértices simétrico) o hamiltoniano associado:

$$H = - \sum_i (S_i^x S_{i+1}^x + \Delta S_i^y S_{i+1}^y + \Gamma S_i^z S_{i+1}^z) \quad , \quad (17)$$

onde  $S$  é o operador de spins - 1/2 e os coeficientes  $\Gamma$  e  $\Delta$  dependem dos pesos  $a, b, c$  e  $d$  dos vértices na forma

$$\Gamma = \frac{a-c}{b+d} \quad (18a)$$

e

$$\Delta = \frac{b-d}{b+d} \quad . \quad (18b)$$

Esse hamiltoniano tem a forma daquele encontrado por Sutherland e os coeficientes são iguais aos dele no limite de forte anisotropia

$$a \approx c \quad e \quad b, d \approx 0 \quad . \quad (19)$$

Como o  $\Delta$ , aproximado, na região crítica coincide com o resultado exato, concluímos que os índices críticos, que são de-



pendem de  $\Delta^{(34)}$ , serão idênticos aos exatos. Em outras palavras, o limite de tempo contínuo não tira o sistema de sua classe de universalidade. O resultado é extremamente gratificante tendo em vista a complexidade da situação analisada (presença de operador marginal, expoentes críticos que dependem dos detalhes da interação).

Para a melhor apresentação desses resultados, e de outros concernentes aos modelos de vértices, organizamos esse trabalho da seguinte forma:

Capítulo II - definimos os modelos de vértices e mostramos com detalhe alguns dos seus resultados mais importantes. Em particular, obtivemos o hamiltoniano que comuta com a matriz de transferência do modelo de Baxter, cujos cálculos são apresentados no apêndice I. Há também uma apêndice II onde mostramos que os acoplamentos obtidos por Baxter para o hamiltoniano xyz são iguais àqueles obtidos por Sutherland.

Capítulo III - introduzimos a representação de Ising para o modelo de Baxter e determinamos o seu hamiltoniano de tempo contínuo na situação particular de não haver interação envolvendo quatro spins ( $\lambda=0$ ). Em seguida, com a representação de Ising do modelo de Ashkin-Teller, mostramos a sua equivalência com o modelo de Baxter. (Alguns detalhes sobre as transformações de dualidade envolvidas são apresentadas no apêndice III). Isso nos permitiu calcular o hamiltoniano de tempo-contínuo desses modelos e compará-lo, na região crítica, com aquele encontrado por Sutherland, quando  $\lambda \neq 0$ .

Finalmente, mostramos que a relação entre os operadores crossover do modelo de Ashkin-Teller e energia do modelo de Baxter, pode ser facilmente visualizada no contexto do presente trabalho.

## CAPÍTULO II

## CONEXÃO ENTRE MODELOS DE VÉRTICES E HAMILTONIANOS DE SPIN

## II.1) Apresentação do Modelo

Em teoria de fenômenos críticos, alguns modelos bidimensionais recebem considerável atenção, por apresentarem solução exata (ex., modelo Ising). Esses modelos permitem testar e até propor hipóteses fundamentais a respeito do comportamento crítico (leis de escala, universalidade). Essa é uma das razões do interesse por modelos mais abrangentes e sofisticados, ainda que bidimensionais, dos quais destacamos os modelos de vértices, responsáveis em grande parte pelo avanço da mecânica estatística na última década. Nesses modelos, ainda de duas componentes, é a ligação da rede que pode escolher entre dois estados, ao contrário do modelo Ising que tem esse papel desempenhado pelo sítio da rede. Usualmente esses estados são indicados por setas, e uma possível configuração do sistema encontra-se na figura (1).

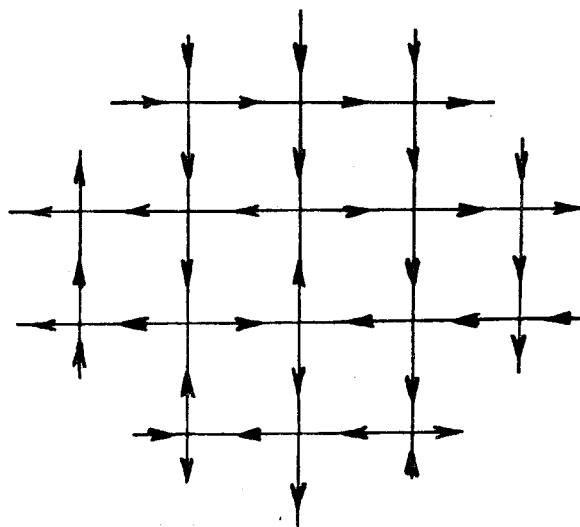


FIG. (1) - Uma possível configuração de vértices para uma rede quadrada

Cada sítio possui quatro ligações, logo temos  $16 (=2^4)$  tipos distintos de vértices e a cada um atribuiremos uma energia  $\epsilon_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 16$ , segundo a convenção estabelecida na figura (2).

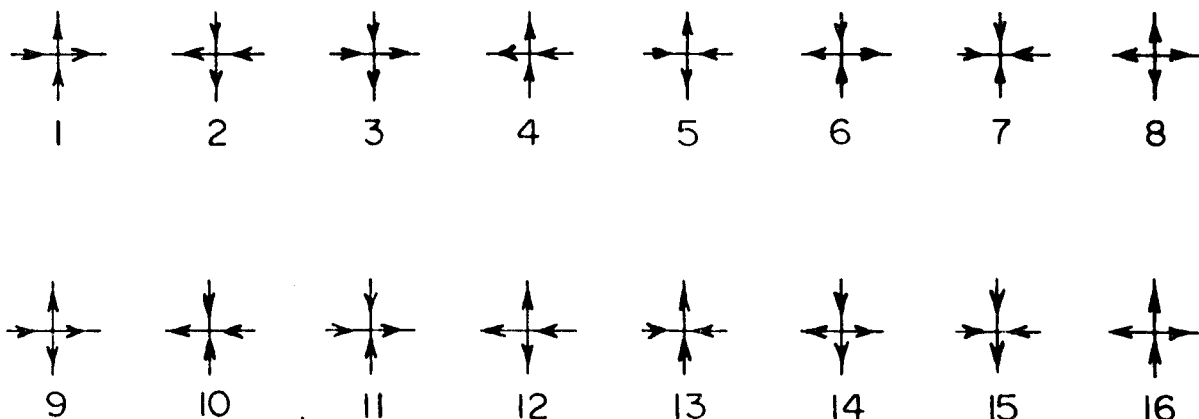


FIG. (2) - Esses são todos os vértices possíveis para uma rede com número de coordenação 4. Os índices estão colocados de acordo com a literatura e numa ordem conveniente: os seis primeiros com número de flechas entrando igual ao número de flechas saindo do vértice (conservação módulo zero). O sétimo e oitavo, com o número de flechas entrando sendo conservado módulo 4 e os restantes sem nenhuma conservação.

Com o sistema em contato com um reservatório térmico, a cada vértice estará associado um fator de Boltzmann  $\omega_r = \exp(-\beta\epsilon_r)$  e a função de partição pode ser escrita como

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{jk} \omega_r(j,k) \quad (20)$$

onde  $\sum_{\mathcal{C}}$  significa soma sobre todas as configurações possíveis.

Embora a solução geral desse modelo não seja conhecida, muita informação já se possui a respeito dos mesmos. A primeira informação foi obtida em 1967 quando se resolveu o caso particular

$$\omega_r = 1 \text{ para } r \leq 6 \text{ e } \omega_r = 0 \text{ para } r \geq 6, \quad (21)$$

que ficou conhecido como modelo do gelo.<sup>(\*)</sup>

O caso

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 \text{ e } \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 < 1, \quad (22)$$

utilizado por Slater e Takahashi em 1941 para descrever as propriededades ferroelétricas do composto fosfato dihidrogenado de potássio ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ), foi resolvido exatamente.

A situação inversa, isto é,

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 < 1 \text{ e } \omega_5 = \omega_6 = 1, \quad (23)$$

também é solúvel e descreve as propriedades antiferroelétricas do composto fosfato dihidrogenado de amônia. Esse é o chamado modelo ADP ou modelo F, e foi utilizado por Rys<sup>(36)</sup>.

Esses modelos, ditos simétricos por obedecerem a relação

$$\omega_{2p-1} = \omega_{2p}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (24)$$

(\*) A estrutura cristalina do gelo apresenta átomos de oxigênio ligados por pontes de hidrogênio, num arranjo tetraédrico. Linus Pauling<sup>(35)</sup> representou esse sistema pela rede da fig.(1) (onde em cada sítio existe um oxigênio e tantos hidrogênios quantas forem as setas chegando), para explicar a entropia residual do gelo.

Observando que os átomos de hidrogênio não formam nenhum arranjo estrutural sobre a rede e exigindo a neutralidade de carga em cada vértice, ele atribuiu o mesmo peso ( $\neq 0$ ) para os seis primeiros e zero para os outros vértices da fig. (2).

foram todos resolvidos por Lieb em 1967, que se beneficiou curiosamente da solução de Yang e Yang<sup>(13)</sup> para o modelo de Heisenberg anisotrópico  $H_{xxz}$  (\*)(\*\*).

Essa relação entre dois modelos tão diferentes, um clássico e outro quântico, um em duas dimensões e o outro em uma, só foi esclarecida no ano seguinte quando McCoy e Wu<sup>(14)</sup> verificaram que a matriz de transferência do modelo de seis vértices comuta com o hamiltoniano de Heisenberg com uma escolha conveniente dos parâmetros ( $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ ), isto é,

$$\left[ T_{6V}, H_{xxz} \right] = 0 \quad . \quad (25)$$

Sutherland<sup>(15)</sup> em 1970 mostrou que esse resultado podia ser estendido ao caso em que os vértices (7) e (8) são também permitidos. A matriz de transferência desse novo modelo, simétrico de oito vértices, comuta com o hamiltoniano de Heisenberg  $H_{xyz}$  completamente anisotrópico. Mas ao contrário do que ocorreu no caso anterior (Yang resolveu o  $H_{xxz}$ ), os auto-valores de  $H_{xyz}$  só puderam ser encontrados depois que Baxter<sup>(33)</sup> resolveu o modelo de oito vértices, pelo método da matriz de transferência comutante<sup>(\*\*\*)</sup>. Baxter na verdade foi mais longe, mostrando que o hamiltoniano de Heisenberg que comuta com a matriz de transferência é proporcional à derivada logarítmica da mesma.

(\*) Yang e Yang<sup>(13)</sup> resolveram o problema de Heisenberg anisotrópico, isto é, encontraram os auto-vetores e os auto-valores do hamiltoniano  $xxz$ , usando um método que ficou conhecido como "ansatz" de Bethe<sup>(37)</sup>.

(\*\*) A solução geral do modelo de seis vértices, isto é, com os seis primeiros  $\omega_r$  distintos, foi dada no mesmo ano por Sutherland, Yang e Yang<sup>(38)</sup>.

(\*\*\*) Sabe-se hoje que a dificuldade para se encontrar os auto-vetores de  $H_{xyz}$ , que não conserva spin total, reside na escolha do vácuo (auto-estado a partir do qual são constituídos todos os vetores por simples aplicação do operador criação das "pseudo partículas").

Nas próximas seções mostraremos explicitamente esses resultados, começando pela obtenção da matriz de transferência.

### 11.2) Matriz de transferência do modelo de oito vértices (8-V)

A construção da matriz de transferência para o modelo de 8-V é semelhante àquela do modelo de Ising bidimensional, escolhendo como camada o conjunto das  $N$  flechas verticais paralelas. O estado da  $k$ -ésima camada será especificado por

$$\mu^k = (\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_N^k) \quad , \quad (26)$$

onde  $\mu_j^k$  vale (+1) ou (-1), conforme a seta vertical  $(j,k)$  esteja para cima ou para baixo, respectivamente. Usaremos também, conforme se vê na figura (3),

$$\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k) \quad (28)$$

para indicar o estado das flechas horizontais que ligam as camadas  $(k)$  e  $(k+1)$ , onde  $\lambda_1^k = (+1)$  ou  $(-1)$  segundo a flecha esteja para a direita ou para a esquerda.

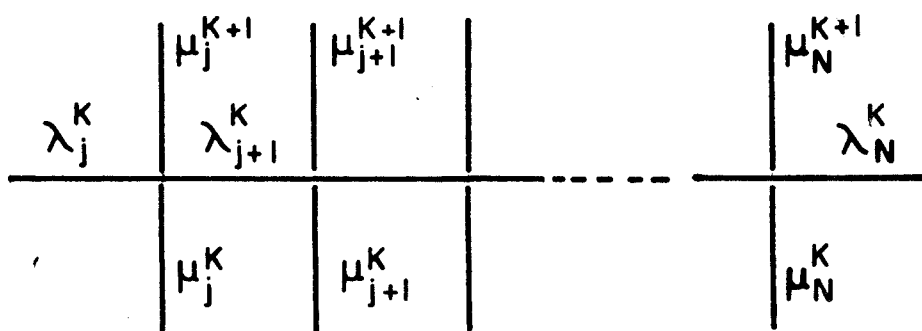


FIG. (3) - Notação usada para duas camadas sucessivas,  $k$  e  $k+1$ , e a linha que as une.

A função de partição desse modelo é definida por:

$$z = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} e^{-\beta \sum_{j,k} \varepsilon_{r(j,k)}} = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \prod_{j,k} \omega_{r(j,k)} \quad (28)$$

onde  $r(j,k)$  é a configuração de vértices do sítio  $(j,k)$  e  $\sum_{\mu} \sum_{\lambda}$  simboliza soma sobre todas as configurações permitidas. Sempre que possível, omitiremos o índice  $(k)$  das camadas e indicaremos por  $\mu'$  a camada vizinha de  $\mu$ .

Para explicitar a dependência de  $\omega_r$  com as variáveis do sítio  $(j,k)$ , definiremos

$$\omega_{r(j,k)} = T_{\mu_j \mu'_j}^{\lambda_j \lambda_{j+1}} \quad (29)$$

Então, por exemplo,

$$T_{\mu_j \mu'_j}^{1,1} = \begin{cases} \omega_1, & \text{se } \mu_j = \mu'_j = 1, \\ \omega_3, & \text{se } \mu_j = \mu'_j = -1, \\ 0, & \text{se } \mu_j \neq \mu'_j. \end{cases} \quad (30)$$

Na verdade  $T_{\mu_j \mu'_j}^{1,1}$  é o elemento de matriz  $\mu_j \mu'_j$  do operador  $T^{1,1}$ ,

$$T^{1,1} = \omega_1 \sigma^+ \sigma^- + \omega_3 \sigma^- \sigma^+ = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

bastando para isso usar a base ortogonal de  $C^2$

$$|\mu_j\rangle = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (32)$$

para representar  $\mu_j = (1)$  e  $(-1)$  respectivamente, e lembrar que nes  
sa base

$$\langle \mu_j | \sigma^+ \sigma^- | \mu'_j \rangle = \delta(\mu_j, 1) \delta(\mu'_j, 1) \quad , \quad (33a)$$

$$\langle \mu_j | \sigma^+ \sigma^- | \mu'_j \rangle = \delta(\mu_j, -1) \delta(\mu'_j, -1) \quad (33b)$$

e portanto,

$$T_{\mu_j \mu'_j}^{1,1} = \langle \mu_j | T^{1,1} | \mu'_j \rangle \quad . \quad (34)$$

Um procedimento análogo define os operadores  $T^{1,-1}$ ,  
 $T^{-1,1}$  e  $T^{-1,-1}$ , com os quais podemos montar o chamado vértice ele -  
 mentar (figura 4)

$$A = \begin{pmatrix} T^{1,1} & T^{1,-1} \\ T^{-1,1} & T^{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \sigma^+ \sigma^- + \omega_3 \sigma^- \sigma^+ & \omega_c \sigma^+ + \omega_c \sigma^- \\ \omega_c \sigma^+ + \omega_d \sigma^- & \omega_4 \sigma^+ \sigma^- + \omega_2 \sigma^- \sigma^+ \end{pmatrix} \quad (35)$$

Daqui por diante usaremos que  $\omega_5 = \omega_6 = \omega_c$  e  $\omega_7 = \omega_8 = \omega_d$ .  
 Isto não constitui uma particularização, uma vez que as condições  
 periódicas de contorno exigem que o número de vértices do tipo 5  
 tem que ser igual ao número de vértices do tipo 6, o mesmo ocorrendo  
 do para o par 7,8.

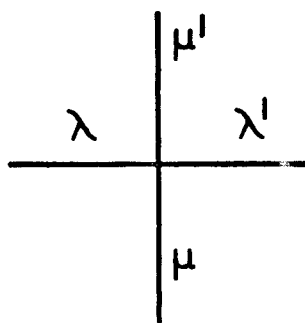


FIG. (4) - No vértice acima,  $\mu\mu'$  designa um dos  
 quatro blocos de A e  $\mu\mu'$  um elemento  
 de matriz desse bloco.



Dessa forma, a função de partição será escrita como

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \prod_{j,k}^N \langle \mu_j | T_j^{\lambda_j \lambda_{j+1}} | \mu_j' \rangle = \\
 &= \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \prod_k^N \langle \mu^k | T_1^{\lambda_1 \lambda_2} \otimes T_2^{\lambda_2 \lambda_3} \otimes \dots \otimes T_N^{\lambda_N \lambda_1} | \mu^{k+1} \rangle \\
 &= \sum_{\mu} \prod_k \langle \mu^k | \prod_j \prod_{\lambda} T_j^{\lambda_j \lambda_{j+1}} | \mu^{k+1} \rangle = t_r T \quad . \quad (36)
 \end{aligned}$$

Nessas expressões estamos usando condições de contorno toroidais e indicando por  $|\mu^k\rangle$  um vetor do espaço  $\mathbb{H}_N = \prod_{n=1}^N \mathbb{h}_n$ , onde

$$h_n = \mathbb{C}^2 \quad . \quad (37)$$

Além disso,

$$T_j^{\lambda_j \lambda_{j+1}} = 1 \otimes \dots \otimes T_j^{\lambda_j \lambda_{j+1}} \otimes \dots 1 \quad (38)$$

↑  
j-ésima posição

e

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{\lambda} \prod_j^N T_j^{\lambda_j \lambda_{j+1}} = \sum_{\lambda} T_1^{\lambda_1 \lambda_2} T_2^{\lambda_2 \lambda_3} \dots T_N^{\lambda_N \lambda_1} = \\
 &= t_r \prod_j^N A_j \quad , \quad (39)
 \end{aligned}$$

com

$$A_j = \begin{pmatrix} T_j^{1,1} & T_j^{1,-1} \\ T_j^{-1,1} & T_j^{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \sigma_j^+ \bar{\sigma}_j^- + \omega_3 \bar{\sigma}_j^- \sigma_j^+ & \omega_d \sigma_j^+ + \omega_c \bar{\sigma}_j^- \\ \omega_c \sigma_j^+ + \omega_d \bar{\sigma}_j^- & \omega_4 \bar{\sigma}_j^- \sigma_j^+ + \omega_2 \sigma_j^- \sigma_j^+ \end{pmatrix} \quad . \quad (40)$$

O traço em (39) deve ser entendido no sentido usual de soma dos elementos da diagonal, observando apenas que no caso esses elementos são na verdade matrizes (2 x 2).

### II.3) Hamiltoniano associado à matriz de transferência

Nesta seção mostraremos que existe um operador  $H$  da forma (\*)

$$H = \sum_j H_{j,j+1} = \sum_j \sum_{\alpha, \beta} J^{\alpha, \beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta, \quad (41)$$

que comuta com a matriz de transferência do oito vértices. Na equação (41),  $\alpha, \beta = x, y, z, 0$ , com  $\sigma^0 = 1$ . Começaremos considerando a matriz

$$C = \sum_j \left[ \prod_k^N A_k, H_{j,j+1} \right] = \sum_j C_j. \quad (42)$$

Desde que  $H_{j,j+1}$  comuta com os elementos de matriz de  $A_j$ , para  $j' \neq j$  e  $j+1$ , nós temos que,

para  $j \neq N$ ,

$$C_j = A_1 A_2 \dots A_{j-1} \left[ A_j A_{j+1}, H_{j,j+1} \right] A_{j+2} \dots A_N, \quad (43a)$$

e

para  $j = N$ ,

$$C_N = A_1 A_2 \dots A_N H_{N1} - H_{N1} A_1 \dots A_N. \quad (43b)$$

Supondo que existam matrizes  $B_j$ , que contenham operadores agindo apenas no sítio  $j$ , tais que

$$\left[ A_j A_{j+1}, H_{j,j+1} \right] = B_j A_{j+1} - A_j B_{j+1}, \quad (44)$$

então obteremos,

---

(\*) A interação entre os vértices existe apenas entre primeiros vizinhos

$$\begin{aligned}
C = \sum_j^N C_j = & (B_1 A_2) A_3 \dots A_N - (A_1 B_2) A_3 \dots A_N + \\
& + A_1 (B_2 A_3) \dots A_N - A_1 (A_2 B_3) A_4 \dots A_N + \\
& + \dots - A_1 \dots A_{N-2} (A_{N-1} B_N) + \\
& + A_2 \dots A_{N-1} (B_N A_1) - A_2 \dots A_{N-1} (A_N B_1) \quad . \quad (45)
\end{aligned}$$

Excluindo o primeiro e os três últimos termos, os demais se cancelam dois a dois. Portanto,

$$\begin{aligned}
C = & (B_1 A_2) A_3 \dots A_N - A_1 \dots A_{N-2} (A_{N-1} B_N) + \\
& + A_2 \dots A_{N-1} (B_N A_1) - A_2 \dots A_{N-1} (A_N B_1) \quad . \quad (46)
\end{aligned}$$

Usando a propriedade cíclica do traço, que é possível porque os elementos de matriz de  $A_j$  ou  $B_j$  comutam para pontos diferentes, imediatamente vemos que

$$t_r C = 0 \quad (47)$$

e portanto,

$$[T, H] = 0 \quad . \quad (48)$$

Então, a condição (44) é suficiente para a existência de  $H$ , embora possa não ser necessária.

Para a determinação de  $H$ , é importante notar que os elementos da diagonal de  $\prod_j A_j$ , isto é, os operadores que comparecem na matriz  $T$ , são somas de produtos (\*) de  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ , e que eles por provocarem um número par de trocas, preservam o produto  $\prod_j^N \sigma_j^z$ . Em consequência disso,  $T$  conserva paridade, ou seja,

$$\left[ T, \prod_j^N \sigma_j^z \right] = 0 \quad , \quad (49)$$

---

(\*) Nesses produtos,  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  não precisam ocorrer em igual número, logo,  $T$  não conserva o spin total.

sugerindo que o  $H_{j,j+1}$  deva ser da forma

$$H_{j,j+1} = J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + J_s (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) + H(\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) \quad (50)$$

Usando a equação matricial (44) para calcular esses acoplamentos, encontramos que

$$J_x : J_y : J_z = 2(ab + cd) : 2(ab - cd) : a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (51)$$

e ainda

$$J_s = H = 0 \quad , \quad (52)$$

para o modelo de 8-vértices simétrico:

$$\omega_1 = \omega_2 = a, \quad \omega_3 = \omega_4 = b, \quad \omega_5 = \omega_6 = c, \quad \omega_7 = \omega_8 = d \quad . \quad (53)$$

Os detalhes do cálculo são apresentados no apêndice I.

Esse resultado mostra que há uma família inteira de matrizes  $T$  comutando com o mesmo  $H_{xyz}$ , todas elas caracterizadas pelos parâmetros

$$\Delta = \frac{ab - cd}{ab + cd} = \frac{a'b' - c'd'}{a'b' + c'd'} = \dots \quad (54a)$$

e

$$\Gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2 - d'^2}{2(a'b' + c'd')} = \dots \quad (54b)$$

Baxter mostrou que os membros dessa família também comutam entre si e usou esse resultado para calcular a função de partição do 8-v<sup>(33)</sup>.

#### 11.4) Relação entre a matriz de transferência do 8-V e o hamiltoniano de Heisenberg

Mostraremos agora que o hamiltoniano associado ao modelo de 8-V simétrico, está relacionado com o operador

$$\mathbb{L} = T^{-1}(\zeta) \left. \frac{d}{dV} T(V) \right|_{V=\zeta}, \quad (55)$$

onde  $T$  é a matriz de transferência.

Seguindo Baxter<sup>(33)</sup>, vamos parametrizar os pesos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  em termos de funções elípticas de Jacobi<sup>(39)</sup>, da seguinte maneira,

$$\frac{1}{2}(c + d) = \frac{\text{cn}(V, \ell)}{\text{cn}(\zeta, \ell)}, \quad (56a)$$

$$\frac{1}{2}(c - d) = \frac{\text{dn}(V, \ell)}{\text{dn}(\zeta, \ell)}, \quad (56b)$$

$$\frac{1}{2}(a - b) = 1, \quad (56c)$$

$$\frac{1}{2}(a + b) = \frac{\text{sn}(V, \ell)}{\text{sn}(\zeta, \ell)}, \quad (56d)$$

onde  $V$ ,  $\zeta$  e  $\ell$  são funções de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

Dessa forma, um elemento de matriz do vértice elementar, equação (35), se escreve

$$A(\mu, \mu' | \lambda, \lambda') = \sum_j^4 p_j \sigma_{\lambda\alpha'}^j \sigma_{\alpha\lambda'}^j, \quad (57)$$

onde

$$p_1 = \frac{1}{2}(b + d) \quad , \quad (58a)$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(b - d) \quad , \quad (58b)$$

$$p_3 = \frac{1}{2}(a - c) \quad , \quad (58c)$$

$$p_4 = \frac{1}{4}(a + c) \quad . \quad (58d)$$

Em  $A(\alpha, \alpha' | \lambda, \lambda')$  os índices  $(\alpha, \alpha')$  indicam um elemento de matriz dentro de cada matriz  $T_j^{\lambda, \lambda'}$  de  $A_j$ .

Quando  $V = \zeta$ ,  $b$  e  $d$  são nulos e  $a = c$ , logo,

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0 \quad e \quad P_4 = 2 \quad (59)$$

e portanto,

$$A(\mu, \mu' | \lambda, \lambda') = 2\delta_{\lambda\alpha'} \delta_{\alpha\lambda'} \quad . \quad (60)$$

De (39), um elemento de matriz de  $T$  entre as camadas  $\mu$  e  $\mu'$  se escreve

$$\begin{aligned} T_{\mu\mu'} &= \langle \mu | T | \mu' \rangle = \sum_{\lambda} \prod_j^N \langle \mu_j | T_j^{\lambda\lambda'} | \mu'_j \rangle = \\ &= \sum_{\lambda} \prod_j^N A(\mu, \mu' | \lambda, \lambda') \quad . \end{aligned} \quad (61)$$

Usando a equação (60), podemos escrever

$$T_{\mu\mu'}(V=\zeta) = 2^N \delta_{\mu_1\mu'_2} \delta_{\mu_2\mu'_3} \cdots \delta_{\mu_N\mu'_1} \quad , \quad (62)$$

cujo inverso é (ver figura 5)

$$T_{\mu\mu'}^{-1}(\zeta) = 2^{-N} \delta_{\mu_2\mu'_1} \delta_{\mu_3\mu'_2} \cdots \delta_{\mu_1\mu'_N} \quad . \quad (63)$$

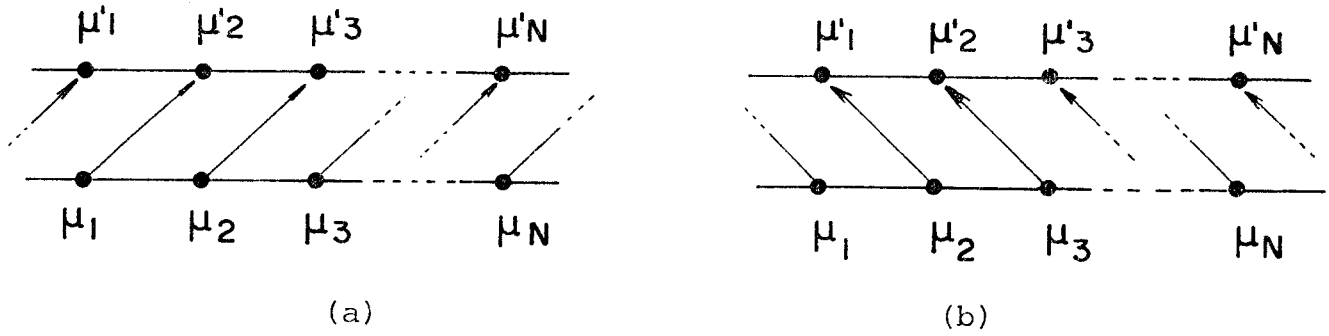


FIG. (5) - a) O operador  $T(V=\zeta)$  desloca todos os spins de um sítio à direita.

b) Ação do operador inverso  $T^{-1}(V=\zeta)$ .

Calculemos agora a derivada de  $T(V)$  em relação a  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} T_{\mu\mu'}(V) &= \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_N} \frac{d}{dV} \prod_j^N A(\mu_j, \mu'_j | \lambda_j, \lambda_{j+1}) = \\ &= \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_N} \prod_j^N A(\mu_1, \mu'_1 | \lambda_1, \lambda_2) A(\mu_2, \mu'_2 | \lambda_2, \lambda_3) \dots \\ &\dots A(\mu_{j-1}, \mu'_{j-1} | \lambda_{j-1}, \lambda_j) \left[ \frac{d}{dV} A(\mu_j, \mu'_j | \lambda_j, \lambda_{j+1}) \right] A(\mu_{j+1}, \mu'_{j+1} | \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}) \\ &\dots A(\mu_N, \mu'_N | \lambda_N, \lambda_1). \end{aligned} \quad (64)$$

No ponto  $V = \zeta$ , teremos, usando (60),

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dV} T_{\mu\mu'}(V) \right|_{V=\zeta} &= \sum_j^{N-1} 2^{N-1} \delta_{\mu_1 \mu'_2} \delta_{\mu_2 \mu'_3} \dots \\ &\dots \delta_{\mu_{j-2} \mu'_{j-1}} A'(\mu_j, \mu'_j | \mu_{j-1}, \mu'_{j+1}) \times \delta_{\mu_{j+1} \mu'_{j+2}} \dots \delta_{\mu_N \mu'_1}, \end{aligned} \quad (65)$$

onde  $A'$  significa derivada de  $A$  em relação a  $V$ .

De (63) e (65) achamos, então, que os elementos de ma-

triz de  $\mathbb{L}$  são

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_{\mu, \mu'} &= \sum_{\nu} T_{\mu|\nu}^{-1}(\zeta) \cdot \left[ \frac{d}{dV} T_{\nu|\mu'}(V) \right]_{V=\zeta} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \delta_{\mu_2 \nu_1} \delta_{\mu_3 \nu_2} \cdots \delta_{\mu_j \nu_{j-1}} \delta_{\mu_{j+1} \nu_j} \cdots \delta_{\nu_1 \mu'_2} \delta_{\nu_2 \mu'_3} \cdots \\
 &\cdots \delta_{\nu_{j-2} \mu'_{j-1}} A'(\nu_j, \mu'_j | \nu_{j-1}, \mu'_{j+1}) \delta_{\nu_{j+1} \mu'_{j+2}} \cdots \delta_{\nu_N \mu'_1} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \delta_{\mu_2 \mu'_3} \delta_{\mu_3 \mu'_3} \cdots \delta_{\mu_{j-1} \mu'_{j-1}} A'(\mu_{j+1}, \mu'_j | \mu_j, \mu'_{j+1}) \times \\
 &\quad \times \delta_{\mu_{j+2}, \mu'_{j+2}} \cdots \delta_{\mu_1, \mu'_1} \quad . \quad (66)
 \end{aligned}$$

Substituindo (57),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_{\mu, \mu'} &= \frac{1}{2} \sum_j \delta_{\mu_2 \mu'_1} \cdots \delta_{\mu_{j-1} \mu'_{j-1}} \sum_k^4 p'_k \sigma_{\mu_j, \mu'_j}^k \sigma_{\mu_{j+1}, \mu'_{j+1}}^k \cdots \\
 \cdots \delta_{\mu_N \mu'_N} &= \frac{1}{2} \sum_j^N \sum_k^4 p'_k \langle \mu | \sigma_j^k \sigma_{j+1}^k | \mu' \rangle \quad , \quad (67)
 \end{aligned}$$

onde  $p'_k$  é a derivada de  $p_k$  com relação a  $V$  no ponto  $V = \zeta$ , e

$$\sigma_j^k = 1 \otimes \cdots \otimes \sigma_j^k \otimes \cdots \otimes 1 \quad (68)$$

$\uparrow$   
 $\lfloor$  j-ésima posição.

Portanto,

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} \sum_j^N \sum_k^4 p'_k \sigma_j^k \sigma_{j+1}^k \quad . \quad (69)$$

Usando (56), (58) e algumas propriedades das funções e líticas<sup>(39)</sup>, obtemos os  $p'_k$ :



$$p_1' = \frac{\operatorname{cn} 2\zeta}{\operatorname{sn} 2\zeta} , \quad (70a)$$

$$p_2' = \frac{\operatorname{dn} 2\zeta}{\operatorname{sn} 2\zeta} , \quad (70b)$$

$$p_3' = \frac{1}{\operatorname{sn} 2\zeta} , \quad (70c)$$

$$p_4' = \frac{\operatorname{cn} 2\zeta + \operatorname{dn} 2\zeta - 1}{\operatorname{sn} 2\zeta} . \quad (70d)$$

No apêndice II mostramos que esses coeficientes são iguais àqueles encontrados por Sutherland, equações (51) e (52).

## CAPÍTULO III

## HAMILTONIANO DE TEMPO-CONTÍNUO PARA O MODELO DE BAXTER

III.1) Representação de Ising para o modelo de Baxter

Na tentativa de entender os interessantes resultados obtidos por Baxter<sup>(33)</sup> para o modelo de 8-V simétrico, Wu<sup>(40)</sup> e Kadanoff-Wegner<sup>(40)</sup> acabaram estabelecendo, independentemente, uma conexão entre aquele modelo e um sistema de spins que, além da interação usual de dois vizinhos, possui também um acoplamento de quatro spins. A idéia central desses trabalhos é substituir o sentido da ligação pelo produto de variáveis de spins ( $\pm 1$ ) situadas na rede dual, com a convenção: setas para cima (à direita) separam spins de mesmo sinal, e setas para baixo (à esquerda) separam spins de sinais contrários, conforme ilustrado na figura 6.

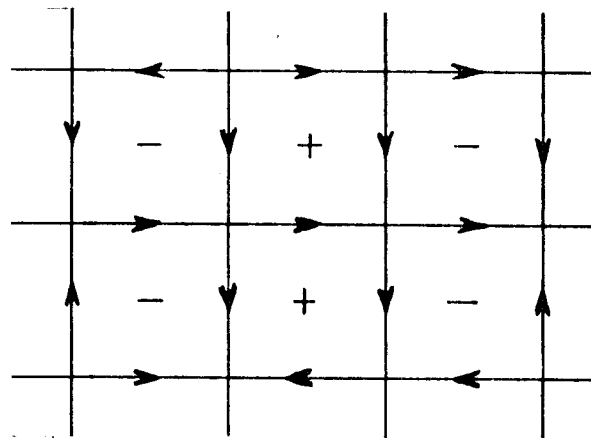


FIG. 6 - Modelo de Baxter e sua representação em termos de spins de Ising colocados na rede dual.

Dessa maneira, um peso  $\omega_r(j,k)$  na função de partição é reproduzido pelo seguinte fator de Boltzmann dos quatro spins (veja figura 7) envolvendo o vértice  $r(j,k)$

$$A \exp\{L_1 \sigma \sigma'' + L_2 \sigma' \sigma''' + \lambda \sigma \sigma' \sigma'' \sigma'''\} \quad , \quad (71)$$

onde

$$L_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{ac}{bd} \quad , \quad (72a)$$

$$L_2 = \frac{1}{4} \ln \frac{ad}{bc} \quad , \quad (72b)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \ln \frac{ab}{cd} \quad , \quad (72c)$$

e

$$A = (abcd)^{1/4} \quad . \quad (72d)$$

Resolvendo para os pesos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  temos,

$$a = A e^{L_1 + L_2 + \lambda} \quad (73a)$$

$$b = A e^{-L_1 - L_2 + \lambda} \quad (73b)$$

$$c = A e^{L_1 - L_2 - \lambda} \quad (73c)$$

e

$$d = A e^{-L_1 + L_2 - \lambda} \quad (73d)$$

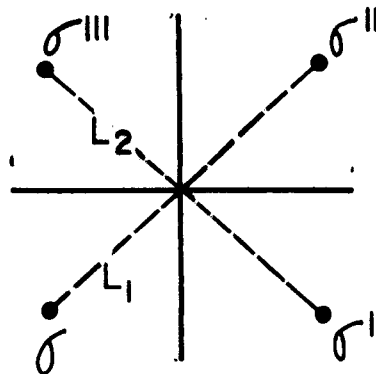


FIG. 7 - Vértice  $r(j,k)$  e os spins das quatro faces que o envolve.

Se  $ab = cd$ , de (72c) temos que  $\lambda = 0$ . Portanto, teremos

dois sistemas de spins idênticos, desacoplados (veja figura 8) e com interação anisotrópica envolvendo apenas primeiros vizinhos (Ising).

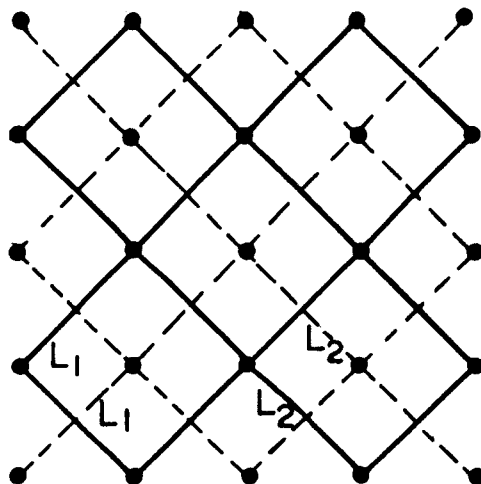


FIG. 8 - Sistema de spins equivalente ao modelo de Baxter. Se  $\lambda = 0$ , temos dois sistemas de Ising independentes, um com ligações cheias e o outro com ligações tracejadas.

Porém, se  $ab \neq cd$  os dois sistemas estarão acoplados pela interação de quatro spins ( $\lambda \neq 0$ ), obrigando-nos a considerar a "super"-rede (linhas tracejadas da figura 9) que possui também interação entre segundos vizinhos.

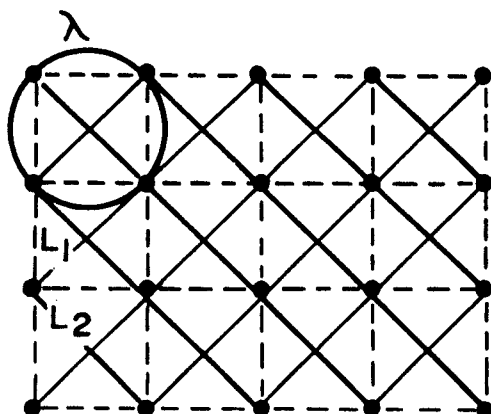


FIG. 9 - "Super"-rede para o modelo de Baxter. Observe que acoplamentos em diagonais paralelas são iguais.

Para se obter o hamiltoniano de tempo-contínuo precisamos, em primeiro lugar, escrever a matriz de transferência  $T$  desse modelo. As direções das interações  $L_1$  e  $L_2$  sugerem escolher como camadas as linhas cheias da figura 10. Dessa forma,  $L_2$  será a interação entre os spins de uma mesma camada, enquanto  $L_1$  será a interação entre spins de camadas vizinhas. Os estados das camadas  $K$  e  $K+1$  serão indicados por

$$\mu^K = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) \quad (74a)$$

e

$$\mu^{K+1} = (S_1, S_2, \dots, S_N) \quad (74b)$$

onde

$$\sigma_j = \sigma_{jk} \quad (75a)$$

e

$$S_j = \sigma_{jK+1} \quad (75b)$$

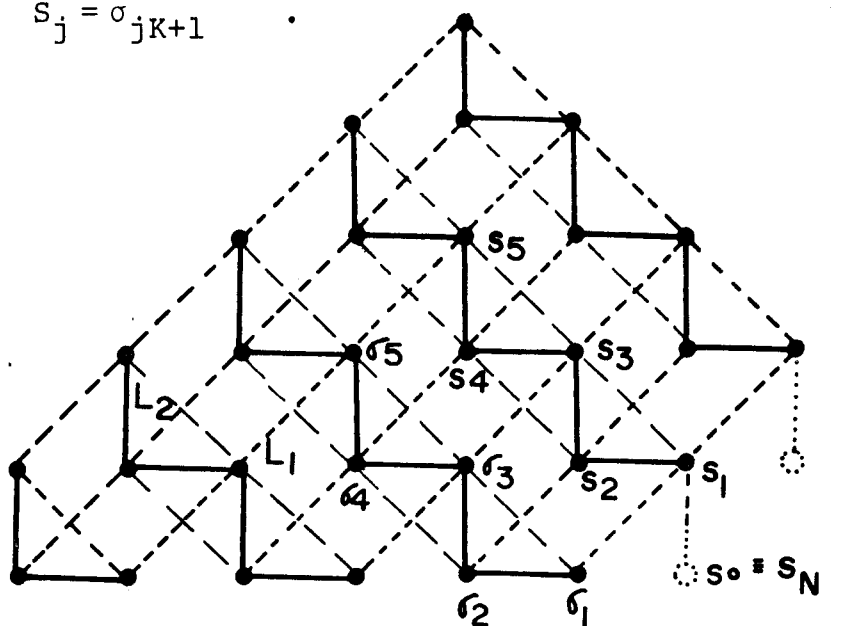


FIG. 10 - Camadas na super-rede para a matriz de transferência do 8-V simétrico..

Estamos usando condições de contorno periódicas na direção de  $L_2$ , de maneira que  $\sigma_j = \sigma_{N+j}$  e  $S_j = S_{N+j}$ , o que permite escrever a função de partição como

$$\begin{aligned}
Z_{8V} &= \sum_{\{\sigma, S\}} \prod_K \exp \left\{ \sum_j (L_1 \sigma_j S_j + L_2 \sigma_j \sigma_{j+2}) \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \sum_j \lambda (\sigma_{2j+1} S_{2j} S_{2j+1} S_{2j+2} + \sigma_{2j-1} \sigma_{2j} \sigma_{2j+1} S_{2j}) \right\} = \\
&= \sum_{\{\sigma, S\}} \prod_K \exp \left( \sum_j L_2 \sigma_j \sigma_{j+2} \right) \\
&\quad \exp \left\{ \sum_j (L_1 + \lambda S_{2j} S_{2j+2}) \sigma_{2j+1} S_{2j+1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_j (L_1 + \lambda \sigma_{2j-1} \sigma_{2j+1}) \sigma_{2j} S_{2j} \right\} \equiv \\
&\equiv \sum_{\{\sigma, S\}} \prod_K T_2(\mu^K, \mu^K) T_1(\mu^K, \mu^{K+1}) \equiv \sum_{\{\sigma, S\}} \prod_K T(\mu^K, \mu^{K+1}) . \quad (76)
\end{aligned}$$

As definições de  $T_2$  e  $T_1$  na equação acima são as usuais, isto é, em  $T_2$  as interações são entre spins de uma mesma camada e em  $T_1$  estão contidas as interações entre spins de camadas vizinhas.

Para escrever a matriz de transferência como um operador, vamos trabalhar com a base de auto-vetores de  $\sigma^Z$ ,

$$|\sigma_{jk}\rangle = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} , \quad (77)$$

definir o vetor  $|\mu^K\rangle$  do espaço produto ( $\mathbb{H}$ ) por

$$|\mu^K\rangle = \prod_j |\sigma_{jk}\rangle \quad (78)$$

e introduzir os vetores

$$\sigma_j^{x,y,z} = 1 \otimes \dots \otimes \sigma^{xyz} \otimes \dots 1 \quad (79a)$$

e

$$\mathbb{1}_j = 1 \otimes \dots \otimes 1 , \quad (79b)$$

que atuam nesse espaço.

Identificando  $\sigma_j$  como auto-valor do vetor  $\sigma_j^Z$ , poderemos escrever  $T_2(\mu^K, \mu^K)$  como elemento de matriz de um operador  $\hat{T}_2$  do espaço  $\mathbb{H}$ :

$$T_2(\mu^K, \mu^K) \equiv \exp \sum_j L_2 \sigma_j \sigma_{j+2} = \langle \mu^K | \hat{T}_2 | \mu^K \rangle, \quad (80)$$

com

$$\hat{T}_2 = \exp \sum_j L_2 \sigma_j^Z \sigma_{j+2}^Z. \quad (81)$$

O passo seguinte seria escrever  $T_1$  também na forma de operador, mas nesse caso encontramos uma séria dificuldade: a interação  $\lambda$  de quatro spins introduz em  $T_1$  um termo que envolve o sinal relativo de spins da camada  $(K+1)$ ,  $S_{2j} S_{2j+2}$ , que não se deixa escrever como elemento de matriz de nenhum operador do espaço  $\mathbb{H}$ . Dessa forma, vemos nossa esperança frustrada em razão da impossibilidade de se extrair de  $\hat{T}$  um operador unidimensional equivalente (hamiltoniano de tempo-contínuo).

Antes de abandonar de vez esta abordagem, julgamos oportuno examinar o caso  $\lambda = 0$  em que o nosso programa pode ser concluído. Nessa situação  $T_1(\mu^K, \mu^{K+1})$  se reduz a

$$\begin{aligned} T_1(\mu^K, \mu^{K+1}) &= \prod_j \exp L_1 \sigma_j S_j = \\ &= \prod_j \left( e^{L_1} \delta_{\sigma_j, S_j} + e^{-L_1} \delta_{-\sigma_j, S_j} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Usando as identidades

$$\langle \sigma_j | 1 | S_j \rangle = \delta_{\sigma_j, S_j} \quad (83a)$$

e

$$\langle \sigma_j | \sigma^X | S_j \rangle = \delta_{-\sigma_j, S_j}, \quad (83b)$$

$T_1(\mu^K, \mu^{K+1})$  pode ser escrita na forma

$$T_1(\mu^K, \mu^{K+1}) = \langle \mu^K | \hat{T}_1 | \mu^{K+1} \rangle \quad (84)$$

com

$$\hat{T}_1 = \prod_j \left( e^{L_1} \mathbf{1}_j + e^{-L_1} \sigma_j^x \right) \quad (85)$$

O operador  $\hat{T}_1$  por sua vez pode ser escrito na forma exponencial<sup>(\*)</sup>

$$\hat{T}_1 = \prod_j C e^{L_1^* \sigma_j^x} \quad (86)$$

com

$$C = (2 \operatorname{sen} 2 L_1)^{1/2} \quad (87a)$$

e

$$L_1^* = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tgh} L_1 \quad (87b)$$

Em razão das regras de comutação obedecidas por  $\sigma_j^\alpha$ ,  $\alpha = x, y$  ou  $z$ ,  $\hat{T}_1$  pode ser reescrito como

$$\hat{T}_1 = (2 \operatorname{senh} 2 L_1)^{N/2} \exp \left\{ \sum_j L_1^* \sigma_j^x \right\} \quad (88)$$

e conseqüentemente, a matriz de transferência no caso  $\lambda = 0$  se reduz à

$$\hat{T} = (2 \operatorname{senh} 2 L_1)^{N/2} \exp \left\{ \sum_j L_2 \sigma_j^z \sigma_{j+2}^z \right\} \exp \left\{ \sum_j L_1^* \sigma_j^x \right\} \quad (89)$$

Encontrar um hamiltoniano que comute com a matriz de transferência para qualquer valor de  $(L_1, L_2)$  é muito difícil. É

---

(\*) Para determinar  $C$  e  $L_1^*$  basta escrever a exp. em (86) em termos de  $\cosh$  e  $\operatorname{senh}$  e comparar com (85). Podemos também igualar os elementos de matriz de (85) e (86) na base em que  $\sigma^x$  for diagonal.



por essa razão que à semelhança do que se faz para o modelo Ising<sup>(26)</sup>, buscaremos um operador unidimensional  $\hat{H}$  através de

$$\hat{T} = e^{-\tau \hat{H}} \quad , \quad (90)$$

que comute com  $\hat{T}$  pelo menos na região crítica ( $\tau \rightarrow 0$ ). Na equação (90)  $\tau$  é o espaçamento da rede na direção do acoplamento  $L_1^*$ , chamada direção temporal, e o hamiltoniano assim encontrado é chamado hamiltoniano de tempo-contínuo  $\hat{H}$ . Usando a identidade de Baker-Hausdorff<sup>(28)</sup>,

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots\right) \quad , \quad (91)$$

encontramos de (89) e (90) que  $\hat{H}$  se escreve

$$\hat{H} = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \sum_j (L_2 \sigma_j^Z \sigma_{j+2}^Z + L_1^* \sigma_j^X) + o(L_1^* L_2) + \text{cte} \right\} \quad , \quad (92)$$

onde  $\text{cte} = \frac{N}{2} \ln(2 \sinh 2 L_1)$  é uma constante aditiva que omitiremos daqui em diante. Para que os dois termos de  $H$  tenham limites finitos, e não triviais, é necessário que

$$L_1^* = \delta \tau \quad (93a)$$

e

$$L_2 = \Lambda \tau \quad . \quad (93b)$$

Da definição de  $L_1^*$ , equação (87b), isso implica

$$L_1^* = e^{-2L_1} \quad . \quad (94)$$

Isso significa que no limite de tempo-contínuo, as constantes de acoplamento se ajustam de maneira que o acoplamento "temporal"  $L_1$  seja grande enquanto o acoplamento "espacial"  $L_2$  seja pequeno. Es-

colhendo o espaçamento  $\tau$  como

$$\tau = e^{-2L_1} \quad , \quad (95)$$

e isso é possível porque  $\tau$  é um parâmetro arbitrário, teremos

$$L_1^* = \tau \rightarrow \delta = 1 \quad (96a)$$

e

$$L_2 = \Lambda e^{-2L_1} \quad . \quad (96b)$$

Portanto, de (92),

$$\hat{H} = - \sum_j (\Lambda \sigma_j^z \sigma_{j+2}^z + \sigma_j^x) \quad . \quad (97)$$

Esse hamiltoniano é aparentemente diferente daquele encontrado por Sutherland no caso  $ab = cd$  ( $\lambda=0$ ). Entretanto, basta uma transformação de dualidade sobre as variáveis  $\sigma$  para que os dois resultados fiquem exatamente iguais. Essa transformação, que é um análogo quântico da transformação de Kramers-Wannier, se faz definindo novos operadores

$$\eta_{j+1/2}^z = \prod_{K \leq j} \sigma_K^x \quad (98a)$$

---

Da solução de Baxter<sup>(33)</sup> para o 8-V simétrico, sabemos que esse modelo sofrerá uma transição de fase quando todos os pesos forem positivos e

$$a = b + c + d \quad .$$

Usando as equações (73) concluímos que o modelo é crítico quando  $\Lambda = 1$ .

e

$$\eta_{j+1/2}^x = \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \quad , \quad (98b)$$

que residem no ponto médio das ligações originais.

Substituindo (97) em H teremos

$$\hat{H} = - \sum_j (\Lambda \eta_j^x \eta_{j+1}^x + \eta_j^z \eta_{j+1}^z) \quad , \quad (99)$$

onde fizemos uma redefinição dos índices:  $j \rightarrow j+1/2$ .

Para comparar esse hamiltoniano com aquele encontrado por Sutherland equação (51), primeiro devemos fazer a rotação

$$\eta_j^z \rightarrow \eta_j^x \quad (100a)$$

e

$$\eta_j^x \rightarrow -\eta_j^z \quad , \quad (100b)$$

que não altera a álgebra desses operadores. Então,

$$\hat{H} = - \sum_j \left( \eta_j^x \eta_{j+1}^x + \Lambda \eta_j^z \eta_{j+1}^z \right) \quad . \quad (101)$$

Agora, examinando o resultado de Sutherland, equação (51), de (54) e (73), temos que no caso  $\lambda \rightarrow 0$

$$\Gamma = \frac{J_z}{J_x} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \sinh 2L_1 \sinh 2L_2 \quad (102a)$$

$$\Delta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{ab - cd}{ab + cd} = 0 \quad (102b)$$

No limite de  $L_1 \rightarrow \infty$  e  $L_2 = 0$ , o  $\Gamma$  do Sutherland resulta

$$\Gamma \approx e^{2L_1} \cdot L_2 = \Lambda \quad , \quad (103)$$

o que mostra que o nosso hamiltoniano  $H$  coincide com o resultado exato (50) na região crítica associada com a transição que ocorre em

$$a = b + c + d \quad . \quad (104)$$

Esse resultado, embora interessante, não corresponde à nossa expectativa que era obter o hamiltoniano de tempo - contínuo para o modelo de Baxter com interação de quatro spins. Porém, isso é impossível nessa formulação de Wegner e Kadanoff uma vez que o acoplamento de quatro spins envolve mais que dois sítios da rede. É nesse ponto que a conexão, ultimamente muito explorada<sup>(41,42)</sup>, entre o modelo de 8-vértices e o de Ashkin-Teller (que só possui interação de primeiros vizinhos) surge como uma alternativa viável. Na próxima seção analisaremos em detalhes essa possibilidade.

### III.2) Modelo de Ashkin-Teller<sup>(20)</sup> e sua representação de Ising

Esse modelo, que é uma generalização do modelo de Ising, caracteriza-se por ter em cada sítio da rede um átomo que pode estar num dos quatro estados A,B,C, ou D. A interação é de primeiros vizinhos e as energias são associadas aos pares segundo a tabela I, onde já estamos considerando o caso de rede quadrada, porém anisotrópica.

TABELA I

Possíveis estados dos pares de átomos, com suas respectivas energias, para o modelo de Ashkin-Teller anisotrópico.

PARES	ENERGIAS
AA, BB, CC e DD	$\epsilon_0^\alpha$
AB, CD	$\epsilon_1^\alpha$
AC, BD	$\epsilon_2^\alpha$
AD, BC	$\epsilon_4^\alpha$

Com  $\alpha = H$  ou  $V$  estamos distinguindo as energias dos pares que estão na horizontal ou vertical respectivamente.

Como mostrou Fan <sup>(43)</sup>, esse modelo admite uma representação de Ising com os estados A,B,C e D representados pelas quatro configurações de dois spins independentes e colocados no mesmo sítio. A convenção normalmente adotada é a que segue

$$A = (+,+), B = (+,-), C = (-,+), \text{ e } D = (-,-) . \quad (105)$$

Para reproduzir as energias  $\epsilon_j^\alpha$ , são necessários acoplamentos apenas entre pares vizinhos,  $(\sigma, \tau)$  e  $(\sigma', \tau')$ , envolvendo interação de dois spins  $(\sigma\sigma'$  e  $\tau\tau')$  e de quatro spins  $(\sigma\sigma' \tau\tau')$ , conforme mostrado na figura (11). A função de partição nessa linguagem magnética é, portanto,

$$Z_{AT} = \sum_{\{\sigma, \tau\}} \prod_{\langle \rangle} \exp \left[ K_0^\alpha + K_1^\alpha \tau\tau' + K_2^\alpha \sigma\sigma' + K_4^\alpha \sigma\sigma' \tau\tau' \right] . \quad (106)$$

De (105) e da tabela I, achamos que

$$e^{4K_0^\alpha} = \omega_0^\alpha \omega_1^\alpha \omega_2^\alpha \omega_4^\alpha \quad , \quad (107a)$$

$$e^{4K_1^\alpha} = \frac{\omega_0^\alpha \omega_2^\alpha}{\omega_1^\alpha \omega_4^\alpha} \quad , \quad (107b)$$

$$e^{4K_2^\alpha} = \frac{\omega_0^\alpha \omega_1^\alpha}{\omega_2^\alpha \omega_4^\alpha} \quad , \quad (107c)$$

e

$$e^{4K_4^\alpha} = \frac{\omega_0^\alpha \omega_4^\alpha}{\omega_1^\alpha \omega_2^\alpha} \quad , \quad (107d)$$

$$\text{onde } \omega_j^\alpha = e^{-\beta \epsilon_j^\alpha} \text{ e } \beta = 1/K_B T . \quad (108)$$

Essas equações podem ser invertidas para dar

$$\omega_0^\alpha = e^{K_0^\alpha + K_1^\alpha + K_2^\alpha + K_4^\alpha} \quad , \quad (109a)$$

$$\omega_1^\alpha = e^{K_0^\alpha - K_1^\alpha + K_2^\alpha - K_4^\alpha} \quad , \quad (109b)$$

$$\omega_2^\alpha = e^{K_0^\alpha + K_1^\alpha - K_2^\alpha - K_4^\alpha} \quad , \quad (109c)$$

e

$$\omega_4^\alpha = e^{K_0^\alpha - K_1^\alpha - K_2^\alpha + K_4^\alpha} \quad . \quad (109d)$$

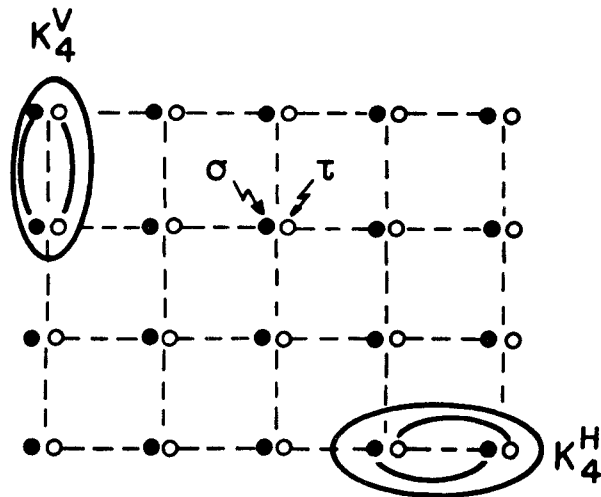


FIG. 11 - Representação de Ising do modelo de A.T.

### III.3) Equivalência entre o modelo de Ashkin-Teller (AT) e o Modelo de Baxter

No modelo de AT as interações de quatro spins ocorrem em direções bem definidas, como desejávamos. Contudo, esse modelo tem dois spins em cada sítio (modelo com duas camadas), enquanto o 8-V só tem um (ver figura 9). Para se estabelecer, na rede, a conexão entre os dois modelos é preciso fazer, conforme propôs Wegner<sup>(44)</sup>, uma transformação de dualidade nos spins de uma das camadas ( $\tau$  por exemplo). Essa transformação, que substitui a rede de spins  $\tau$  por uma nova rede (dual) de spins  $\mu$  (figura 12), significa

substituir na função de partição

$$\sum_{\{\tau\}} \exp \sum_{\langle \rangle} K \tau \tau' \quad (110)$$

por

$$2^{1-N_D} \sum_{\{\mu\}} \exp \sum_{\langle \rangle_D} (e^K + \mu \mu' e^{-K}) \quad , \quad (111)$$

onde  $\sum_{\langle \rangle_D}$  é uma soma sobre primeiros vizinhos na rede dual e  $N_D$  é o número de sítios dessa rede. Maiores detalhes sobre essa transformação são encontrados no Apêndice III e na referência (45).

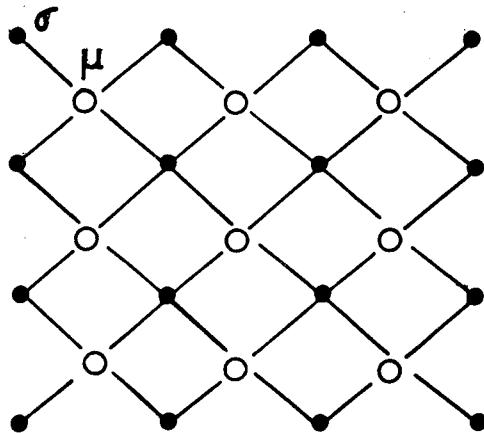


FIG. 12 - Super-rede do AT. Os spins  $\mu$  residem na rede dual da sub-rede que residiam os spins  $\tau$

Aplicando essa transformação à função de partição do modelo de AT,

$$Z_{AT} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle \rangle} e^{K_0^\alpha + K_2^\alpha \sigma \sigma'} \sum_{\{\tau\}} \prod_{\langle \rangle} e^{(K_1^\alpha + K_4^\alpha \sigma \sigma') \tau \tau'} \quad (112)$$

ficaremos com

$$Z_{AT} = 2^{1-N_D} \sum_{\{\sigma, \mu\} \langle \rangle} \prod e^{K_0^\alpha + K_2^\alpha \sigma \sigma'} \left\{ e^{K_1^\alpha + K_4^\alpha \sigma \sigma'} + \mu \mu' e^{-K_1^\alpha - K_4^\alpha \sigma \sigma'} \right\} \equiv 2^{1-N_D} \sum_{\{\sigma, \mu\} \langle \rangle} \prod W^\alpha(\sigma \sigma', \mu \mu') , \quad (113)$$

onde o produtório  $\prod$  deve envolver todos os pares de vizinhos próximos da figura 10.

Devemos notar que nessa expressão os spins residem na super-rede (figura 12) mas os acoplamentos ainda se referem aos spins da rede original. Acoplamentos  $\{K^*\}$  entre os spins da super-rede vão aparecer quando escrevermos  $W^\alpha(\sigma \sigma', \mu \mu')$  na forma usual:

$$W^\alpha(\sigma \sigma', \mu \mu') = e^{K_0^{\alpha*} + K_1^{\alpha*} \mu \mu' + K_2^{\alpha*} \sigma \sigma' + K_4^{\alpha*} \mu \mu' \sigma \sigma'} \quad (114)$$

Igualando (113) e (114) para diversas configurações de  $\sigma$  e  $\mu$ , obtemos as relações entre  $\{K^*\}$  e  $\{\omega\}$ :

$$W^\alpha(+,+) = \omega_0^\alpha + \omega_1^\alpha = e^{K_0^{\alpha*} + K_1^{\alpha*} + K_2^{\alpha*} + K_4^{\alpha*}} , \quad (115a)$$

$$W^\alpha(-,-) = \omega_2^\alpha - \omega_4^\alpha = e^{K_0^{\alpha*} - K_1^{\alpha*} - K_2^{\alpha*} + K_4^{\alpha*}} , \quad (115b)$$

$$W^\alpha(+,-) = \omega_0^\alpha - \omega_1^\alpha = e^{K_0^{\alpha*} - K_1^{\alpha*} + K_2^{\alpha*} - K_4^{\alpha*}} , \quad (115c)$$

$$W^\alpha(-,+) = \omega_2^\alpha + \omega_4^\alpha = e^{K_0^{\alpha*} + K_1^{\alpha*} - K_2^{\alpha*} - K_4^{\alpha*}} . \quad (115d)$$

Agora o modelo de 8-V entra em cena. Rodando de  $45^\circ$  a super-rede (figura 12), ficaremos com uma rede semelhante à super-rede (figura 9) do 8-V simétrico:



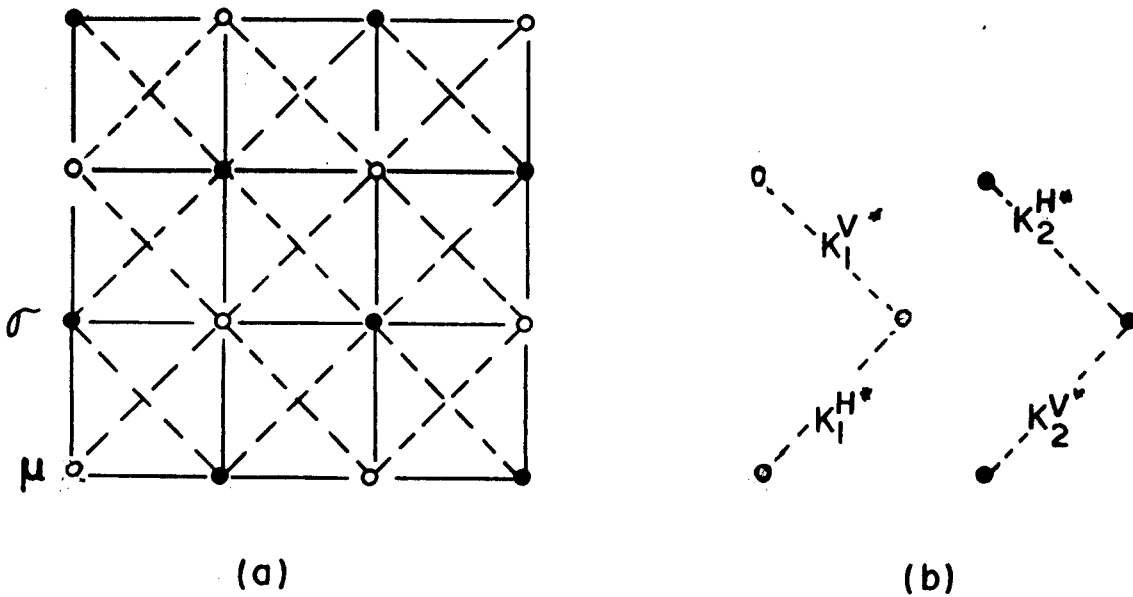


FIG. 13 - Super-rede do modelo de AT anisotrópico rodada de  $45^\circ$  (a). As linhas tracejadas representam as interações entre os spins, cujas direções e valor indicamos em (b).

Procedendo no sentido inverso de Wu e Kadanoff-Wegner, desenharemos vértices na rede dual da figura 13 e o fator de Boltzmann  $W^{\alpha}(\sigma\sigma', \mu\mu')$ , então, representará os pesos dos vértices. Portanto, de (113) temos que

$$Z_{AT} = 2^{1-N_D} \cdot 2 \cdot Z_{8-V} \quad , \quad (116)$$

onde o fator 2 adicional é porque para cada configuração do 8-V temos duas configurações de spins.

Mas ao contrário do que ocorre no 8-V normal, os acoplamentos do AT em diagonais paralelas alternam de valor. Isso faz com que um mesmo vértice tenha pesos diferentes conforme a classe de spins ( $\sigma$  ou  $\mu$ ) que ocupa a diagonal principal. Dizemos, então, que o AT anisotrópico é, em geral, equivalente a um 8-V alternado. Rotulando com  $H(V)$  os vértices com os spins  $\sigma(\mu)$  na diagonal principal, temos os seguintes pesos para os vértices.

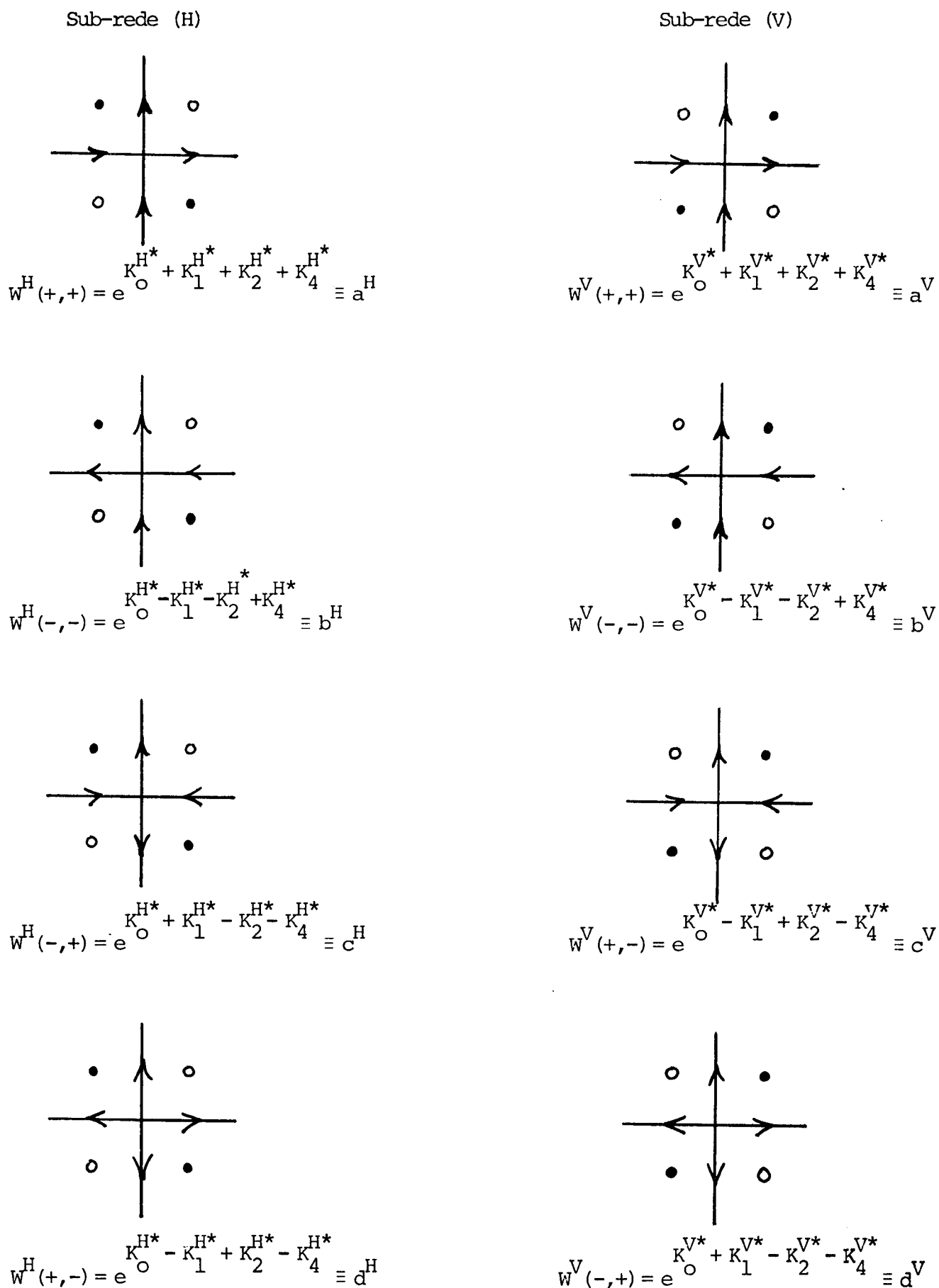


FIG. 14 - Vértices e respectivos pesos para o modelo de Baxter. Os pontos negros representam os spins  $\sigma$ , enquanto os brancos (o) representam os spins  $\mu$ .

Esse modelo, que já é simétrico, também deixará de ser alternado se

$$K_0^{H*} = K_0^{V*} \quad , \quad (117a)$$

$$K_1^{H*} = K_2^{V*} \quad , \quad (117b)$$

$$K_2^{H*} = K_1^{V*} \quad , \quad (117c)$$

e

$$K_4^{H*} = K_4^{V*} \quad . \quad (117d)$$

Nessas condições, de (115) e da figura 14, temos

$$W^\alpha(+,+) = a^H = a^V \equiv a \quad , \quad (118a)$$

$$W^\alpha(-,-) = b^H = b^V \equiv b \quad , \quad (118b)$$

$$W^H(-,+) = W^V(+,-) = c^H = c^V \equiv c \quad , \quad (118c)$$

e

$$W^H(+,-) = W^V(-,+) = d^H = d^V = d \quad . \quad (118d)$$

Usando essas relações novamente nas equações (115) temos

$$\omega_0^H + \omega_1^H = \omega_0^V + \omega_1^V = a \quad ,$$

$$\omega_2^H - \omega_4^H = \omega_2^V - \omega_4^V = b \quad , \quad (119b)$$

$$\omega_2^H + \omega_4^H = \omega_0^V - \omega_1^V = c \quad , \quad (119c)$$

e

$$\omega_0^H - \omega_1^H = \omega_2^V + \omega_4^V = d \quad . \quad (119d)$$

Resolvendo para os  $\omega_j^\alpha$  e substituindo-os em (107), obtemos a desejada relação entre os acoplamentos do AT e os pesos do 8-V simétrico:

$$e^{4K_0^H} = \frac{1}{16} (a^2 - d^2) (c^2 - b^2) , \quad e^{4K_0^V} = \frac{1}{16} (a^2 - c^2) (d^2 - b^2) , \quad (120a)$$

$$e^{4K_1^H} = \frac{(a+d)(b+c)}{(a-d)(c-b)} , \quad e^{4K_1^V} = \frac{(a+c)(b+d)}{(a-c)(d-b)} , \quad (120b)$$

$$e^{4K_2^H} = \frac{(a+d)(a-d)}{(b+c)(c-b)} , \quad e^{4K_2^V} = \frac{(a+c)(a-c)}{(b+d)(d-b)} , \quad (120c)$$

$$e^{4K_4^H} = \frac{(a+d)(c-b)}{(a-d)(b+c)} \quad e \quad e^{4K_4^V} = \frac{(a+c)(d-b)}{(a-c)(b+d)} . \quad (120d)$$

#### III.4) Hamiltoniano de Tempo-Contínuo

Uma vez mostrada a equivalência do 8-V simétrico com o modelo de AT anisotrópico, podemos prosseguir em nosso programa montando a matriz de transferência desse modelo para em seguida encontrar o hamiltoniano de tempo-contínuo associado.

Usando a representação de Ising para o AT, o cálculo da matriz de transferência se assemelha muito com aquele do modelo de Ising. Usaremos como camada as linhas horizontais, cujo estado indicaremos por  $\mu^K$ ,

$$\mu^K = (\sigma_{1k}, \tau_{1k} ; \sigma_{2k}, \tau_{2k} ; \dots ; \sigma_{Nk}, \tau_{Nk}) . \quad (121)$$

Então, de (106),

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma, \tau\}} \prod_K \exp \left\{ \sum_j (K_0^H + K_1^H \tau_{j,k} \tau_{j+1,k} + K_2^H \sigma_{jk} \sigma_{j+1,k} \right. \\
&\quad \left. + K_4^H \tau_{jk} \tau_{j+1,k} \sigma_{jk} \sigma_{j+1,k}) \exp \left\{ \sum_j (K_0^V + K_1^V \tau_{jk} \tau_{j,k+1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_2^V \sigma_{jk} \sigma_{j,k+1} + K_4^V \sigma_{jk} \sigma_{j,k+1} \tau_{jk} \tau_{j,k+1}) \right\} \right\} \\
&\equiv \sum_{\{\sigma, \tau\}} \prod_K T_2(\mu^K, \mu^K) T_1(\mu^K, \mu^{K+1}) \equiv \sum_{\{\sigma, \tau\}} \prod_K T(\mu^K, \mu^{K+1})
\end{aligned} \tag{122}$$

onde, a exemplo da seção III.A),  $T_2$  contém interações entre spins de uma mesma camada enquanto  $T_1$  contém interações entre spins de camadas vizinhas.

Para escrever a matriz de transferência  $T$  na forma de operadores, vamos trabalhar com a base de auto-vetores de  $\sigma^Z$  e  $\tau^Z$ :

$$|\sigma_{jk}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\tau_{jk}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{123}$$

e definir o vetor  $|\mu^K\rangle$  do espaço produto  $H$  por

$$|\mu^K\rangle = \prod_j |\sigma_{jk}\rangle |\tau_{jk}\rangle \tag{124}$$

Tomando  $\sigma_{jk}$  e  $\tau_{jk}$  como auto-valores respectivamente de

$$\sigma_j^Z = 1^\alpha \otimes \dots \otimes \sigma^Z \otimes \dots \otimes 1^\alpha \tag{125a}$$

e

$$\tau_j^Z = 1^\tau \otimes \dots \otimes \tau^Z \otimes \dots \otimes 1^\tau, \tag{125b}$$

$\swarrow$ 
  
 $\searrow$

que atuam cada um num sub-espaco de  $H$ ; podemos escrever

$$T_2(\mu^k, \mu^k) = \langle \mu^k | \hat{T}_2 | \mu^k \rangle, \quad (126)$$

onde

$$\hat{T}_2 = \exp \sum_j \left( K_0^H + K_1^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z + K_2^H \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + K_4^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \right). \quad (127)$$

Quanto a  $T_1$ , ele é um operador não diagonal, ..nessa base, o que acarreta certas dificuldades. Tipicamente um elemento de  $T_1$  é da forma  $\exp K \sigma \sigma'$ , com  $\sigma = \sigma_{j,k}$  e  $\sigma' = \sigma_{j,k+1}$ , e pode ser escrito como

$$e^{K \sigma \sigma'} = \langle \sigma | (e^K 1^\sigma + e^{-K} \sigma^X) | \sigma' \rangle, \quad (128)$$

em vista das identidades

$$\langle \sigma | 1^\sigma | \sigma' \rangle = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (129a)$$

e

$$\langle \sigma | \sigma^X | \sigma' \rangle = \delta_{-\sigma, \sigma'}. \quad (129b)$$

Levando (128) em  $T_1(\mu^k, \mu^{k+1})$ , primeiro para os spins  $\tau$  e depois para os  $\sigma$ , teremos

$$\begin{aligned} T_1(\mu^k, \mu^{k+1}) &= \prod_j e^{K_0^V + K_2^V \sigma \sigma'} \langle \tau_{jk} | \left[ e^{K_1^V + K_4^V \sigma \sigma'} 1^\tau + \right. \\ &\quad \left. + e^{-K_1^V - K_4^V \sigma \sigma'} \tau^X \right] | \tau_{j,k+1} \rangle = \\ &= \prod_j \langle \tau_{jk} | \{ e^{K_0^V + K_1^V + (K_2^V + K_4^V) \sigma \sigma'} 1^\tau + e^{K_0^V - K_1^V + (K_2^V - K_4^V) \sigma \sigma'} \tau^X \} | \tau_{j,k+1} \rangle \\ &= \prod_j \langle \tau_{jk} | \langle \sigma_{jk} | \{ e^{K_0^V + K_1^V + K_2^V + K_4^V} 1^\tau 1^\sigma + e^{K_0^V + K_1^V - K_2^V - K_4^V} 1^\tau \sigma^X + \end{aligned}$$

$$+ e^{K_0^V - K_1^V + K_2^V - K_4^V} \tau_j^x \tau_j^\tau + e^{K_0^V - K_1^V - K_2^V + K_4^V} \tau_j^x \sigma_j^x \} | \sigma_{jk+1} \rangle | \tau_{jk+1} \rangle \quad (130)$$

Usando (107) e (124), obtemos

$$\begin{aligned} T_1(\mu^K, \mu^{K+1}) = \langle \mu^K | \{ \Pi_j^V \left[ \omega_0^V \Pi_j^\tau \Pi_j^\sigma + \omega_2^V \Pi_j^\tau \sigma_j^x + \right. \\ \left. + \omega_1^V \tau_j^x \Pi_j^\sigma + \omega_4^V \tau_j^x \sigma_j^x \right] \} | \mu^{K+1} \rangle \quad , \quad (131) \end{aligned}$$

onde  $\tau_j^x$ ,  $\sigma_j^x$  e  $\Pi_j^\tau(\sigma)$  seguem as mesmas definições (125).

Portanto, o operador  $\hat{T}_1$  se escreve

$$\hat{T}_1 = \prod_j (\omega_0^V + \omega_2^V \tau_j^x + \omega_1^V \sigma_j^x + \omega_4^V \tau_j^x \sigma_j^x) \quad ,$$

onde por conveniência omitimos os operadores identidades.

É possível introduzir acoplamentos  $\{K^*\}$  de maneira que  $\hat{T}_1$  seja escrito como uma única exponencial:

$$\hat{T}_1 = C \prod_j \exp(K_0^* + K_1^* \tau_j^x + K_2^* \sigma_j^x + K_4^* \tau_j^x \sigma_j^x) \quad . \quad (133)$$

Usando a base em que  $\sigma_j^x$  e  $\tau_j^x$  são diagonais, obtemos facilmente as relações entre  $\{K^*\}$  e  $\{\omega\}$ :

$$C e^{K_0^* + K_1^* + K_2^* + K_4^*} = \omega_0^V + \omega_1^V + \omega_2^V + \omega_4^V = a + d \quad , \quad (134a)$$

$$C e^{K_0^* + K_1^* - K_2^* - K_4^*} = \omega_0^V + \omega_1^V - \omega_2^V - \omega_4^V = a - d \quad , \quad (134b)$$

$$C e^{K_0^* - K_1^* + K_2^* - K_4^*} = \omega_0^V - \omega_1^V + \omega_2^V - \omega_4^V = c + b \quad , \quad (134c)$$

e

$$C e^{K_0^* - K_1^* - K_2^* + K_4^*} = \omega_0^V - \omega_1^V - \omega_2^V + \omega_4^V = c - b \quad . \quad (134d)$$

A segunda igualdade nessas equações é obtida usando as relações (119). Resolvendo para os  $\{K^*\}$  em função dos pesos  $a, b, c$  e  $d$  e comparando-os com as relações (120) obtemos

$$K_0^* = \frac{1}{16} (a^2 - d^2)(c^2 - b^2) = K_0^H \quad (\text{escolhendo } C = 1/2), \quad (135a)$$

$$K_1^* = \frac{1}{4} \ln \frac{(a+d)(a-d)}{(b+c)(c-b)} = K_2^H, \quad (135b)$$

$$K_2^* = \frac{1}{4} \ln \frac{(a+d)(b+c)}{(a-d)(c-b)} = K_1^H, \quad (135c)$$

e

$$K_4^* = \frac{1}{4} \ln \frac{(a+d)(c-b)}{(b+c)(a-d)} = K_4^H. \quad (135d)$$

Com isso temos a seguinte expressão para a matriz de transferência

$$\begin{aligned} \hat{T} = & \frac{1}{2} \prod_j \exp(K_0^H + K_1^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z + K_2^H \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \\ & + K_4^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z) \exp(K_0^H + K_2^H \tau_j^X + K_1^H \sigma_j^X + \\ & + K_4^H \tau_j^X \sigma_j^X) . \end{aligned} \quad (136)$$

Uma vez obtida a matriz de transferência na forma de operador, procedemos como na seção III.1 para obter o hamiltoniano de tempo contínuo:

$$\begin{aligned} H = & -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \sum_j (K_1^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z + K_2^H \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + K_4^H \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \\ & + K_2^H \tau_j^X + K_1^H \sigma_j^X + K_4^H \tau_j^X \sigma_j^X + o(K^2)) . \end{aligned} \quad (137)$$

Para que esse limite exista, devemos impor que



$$K_1^H = \tau \quad (138a)$$

$$K_2^H = \Gamma \tau \quad (138b)$$

e

$$K_4^H = -\Delta \tau \quad , \quad (138c)$$

onde já fizemos a escolha para o espaçamento temporal  $\tau$ .

As equações acima, da mesma forma que no caso  $ab = cd$  ( $\lambda = 0$ ), exigem que os acoplamentos horizontais (espaciais) sejam pequenos. Isso implica que os  $\{K^*\}$ , dados por (135), também devam ser pequenos. Então, de (134) os pesos  $a$  e  $c$  são de mesma ordem, enquanto  $b$  e  $d$  são ambos pequenos:

$$a \approx c \quad (139a)$$

e

$$b \approx d \approx 0 \quad . \quad (139b)$$

Dessa maneira os acoplamentos verticais (temporais), dados pelas equações (117), ficam arbitrariamente grandes. Sob as condições (138), nosso hamiltoniano de tempo-contínuo se escreve

$$H = - \sum_j \left( \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z + \Gamma \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z - \Delta \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \Gamma \tau_j^X + \right. \\ \left. + \sigma_j^X - \Delta \tau_j^X \sigma_j^X \right) \quad , \quad (140)$$

que aparentemente nada tem a ver com o hamiltoniano xyz de Heisenberg. No entanto, devemos lembrar ao leitor que estamos trabalhando com dois conjuntos de operadores independentes residindo no mesmo ponto, situação completamente não usual em se tratando de modelo de oito vértices. Um ponto a nosso favor é que podemos facilmente eliminar esse inconveniente, fazendo uma transformação de dualidade (ã semelhança do que foi feito na seção III.3) numa classe de spins ( $\tau$  por exemplo). Introduzindo, então, spins  $\mu$  nos pontos médios das ligações, definidos por

$$\mu_{j+1/2}^Z = \prod_{k \leq j} \tau_k^x \quad (141a)$$

e

$$\mu_{j+1/2}^x = \tau_j^Z \tau_{j+1}^Z, \quad (141b)$$

teremos

$$H = - \sum_j \left\{ \mu_{j+1/2}^x + \Gamma \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z - \Delta \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \mu_{j+1/2}^x + \right. \\ \left. + \Gamma \mu_{j-1/2}^Z \mu_{j+1/2}^Z + \sigma_j^x - \Delta \sigma_j^x \mu_{j-1/2}^Z \mu_{j+1/2}^Z \right\}. \quad (142)$$

Uma vez separados os spins, vamos fazer mais uma transformação de dualidade, só que agora em todos eles, com o mesmo objetivo daquela da seção III.1, equação (98), ou seja, de colocar operadores de spin em posições correspondentes às ligações dos vértices (veja figura 15). Chamando os spins  $\sigma$  e  $\mu$  indistintamente de  $\eta$ , definiremos spins  $S$  tais que

$$S_{j+1/4}^x = \eta_j^Z \eta_{j+1/2}^Z \quad (143a)$$

e

$$S_{j+1/4}^Z = \prod_{k=0,1/2,1,\dots}^j \eta_k^x \quad (143b)$$

Antes porém de utilizar os spins  $S$ , vamos usar que  $\eta_j^2 = \mathbb{1}$  (spin de Ising) para reescrever  $H$  convenientemente:

$$H = - \sum_j \left\{ \Gamma \eta_j^Z \eta_{j+1/2}^Z \eta_{j+1/2}^Z \eta_{j+1}^Z + \eta_{j+1/2}^x + \right. \\ \left. - \Delta \eta_j^Z \eta_{j+1/2}^Z \eta_{j+1/2}^Z \eta_{j+1}^Z \eta_{j+1/2}^x + \eta_j^x + \right. \\ \left. + \Gamma \eta_{j-1/2}^Z \eta_j^Z \eta_j^Z \eta_{j+1/2}^Z - \Delta \eta_j^x \eta_{j-1/2}^Z \eta_j^Z \eta_j^Z \eta_{j+1/2}^Z \right\}. \quad (144)$$

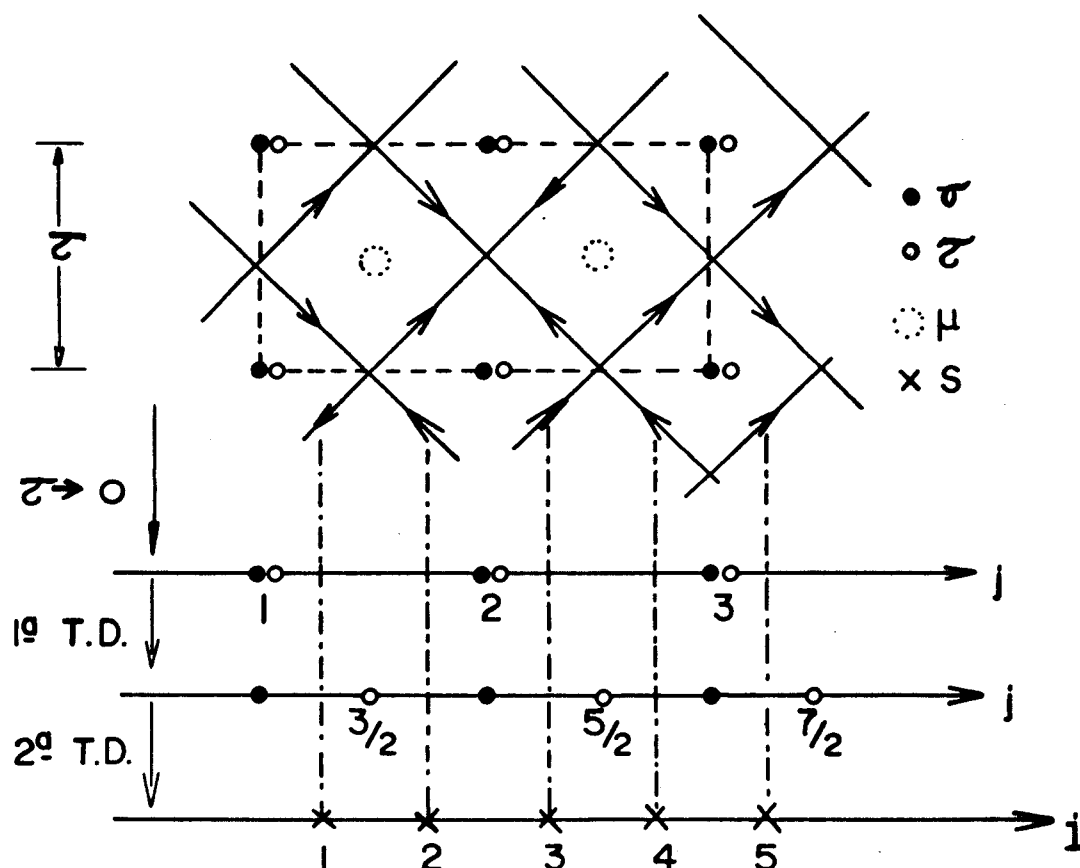


FIG. 15 - Limite de tempo-contínuo ( $\tau \rightarrow 0$ ) e transformações de dualidade (T.D.) para o modelo de AT. A 1ª T.D. se para os spins ( $\bullet$ ) dos spins ( $\circ$ ), enquanto a 2ª T.D. coloca spins  $S$  nas posições correspondentes às ligações dos vértices. Observar a mudança de escala introduzida depois da 2ª T.D.

Agora é fácil substituir (143) e obter

$$H = - \sum_i \left( \Gamma S_i^x S_{i+1}^x + \Delta S_i^y S_{i+1}^y + S_i^z S_{i+1}^z \right) \quad (145)$$

com uma redefinição conveniente do parâmetro de rede, conforme figura (15).

Após uma rotação  $s^x \rightarrow -s^z$  e  $s^z \rightarrow s^x$  obtemos um hamiltono -

niano que tem exatamente a mesma forma daquele encontrado por Sutherland, equação (50). Resta analisar os coeficientes  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Das relações (120) podemos escrever

$$\exp(-2K_1^H - 2K_2^H) = \frac{(c - b)}{(a + d)}, \quad (146a)$$

$$\exp(-2K_1^H - 2K_4^H) = \frac{(a - d)}{(a + d)}, \quad (146b)$$

$$\exp(-2K_2^H - 2K_4^H) = \frac{(b + c)}{(a + d)}, \quad (146c)$$

que após uma expansão, até primeira ordem, das exponenciais fornecem

$$K_1^H = \frac{(b + d)}{2(a + d)}, \quad (147a)$$

$$K_2^H = \frac{(a - c)}{2(a + d)}, \quad (147b)$$

e

$$K_4^H = \frac{(d - b)}{2(a + d)}. \quad (147c)$$

Nessa aproximação, os coeficientes são dados por

$$\Gamma = \frac{K_2^H}{K_1^H} = \frac{(a - c)}{(b + d)} \quad (148a)$$

e

$$\Delta = \frac{-K_4^H}{K_1^H} = \frac{(b - d)}{(b + d)}, \quad (148b)$$

que também são iguais aos acoplamentos de Sutherland, equações (51), no limite  $a \approx c$  e  $b, d \approx 0$ , conforme mostramos abaixo

$$\frac{J_z}{J_x} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d)}{2[(a + c)(b + d) + (a - c)(b - d)]} \approx \frac{a - c}{b + d} = \Gamma \quad (149a)$$

e

$$\frac{J_y}{J_x} = \frac{ab - cd}{ab + cd} = \frac{(a+c)(b-d) + (a-c)(b+d)}{(a+c)(b+d) + (a-c)(b-d)} \approx \frac{b-d}{b+d} = \Delta \quad (149b)$$

Note que essa aproximação não muda a condição de criticidade do 8-V que, tanto no exato quanto no aproximado, é  $a = b + c + d$ , isto é,  $\Gamma = 1$  (46).

Para comparar com os resultados da seção III.1, onde obtivemos o hamiltoniano de tempo contínuo para o caso de  $\lambda = 0$  (Ising dobrado), vamos retornar à linguagem magnética e reescrever os coeficientes como

$$\Gamma = \frac{a-c}{b+d} = e^{2L_1} \frac{\sinh(L_2 + \lambda)}{\cosh(L_2 - \lambda)} \quad (150a)$$

e

$$\Delta = \frac{b-d}{b+d} = \tanh(\lambda - L_2) \quad , \quad (150b)$$

onde fizemos uso das equações (73).

Para garantir que estamos trabalhando na região crítica, precisamos impor que

$$\Gamma = \frac{a-c}{b+d} \approx 1 \quad , \quad \text{isto é} \quad a \approx b + c + d \quad , \quad (151)$$

e além disso que  $b$  e  $d$  sejam pequenos, caso contrário não valeriam os nossos resultados. Isso feito temos que

$$L_1 \rightarrow \infty \quad , \quad (152a)$$

$$L_2 \rightarrow 0 \quad , \quad (152b)$$

e

$$\lambda \rightarrow -L_2 \quad . \quad (152c)$$

Substituindo em (150) ficamos com

$$\Delta \approx \tanh(2\lambda) \quad , \quad (153a)$$

que no caso  $\lambda = 0$  (Ising dobrado) se anula. Nesse caso também temos que

$$\lambda = \frac{\sinh(L_2)}{e^{-2L_1} \cosh(L_2)} = \frac{L_2}{e^{-2L_1}} \quad (153b)$$

e portanto esse hamiltoniano, para o caso  $\lambda = 0$ , é idêntico àquele obtido na seção III.1, equação (99).

### III.5) Correspondência entre operadores do AT e do 8-V

Um sub-produto do cálculo desenvolvido nas seções anteriores é a obtenção da conhecida correspondência entre o operador "crossover" do AT e o operador energia do 8-V. No contexto do presente trabalho, essa conexão é estabelecida de maneira transparente. Para isso, começamos reescrevendo o hamiltoniano de Heisenberg na forma

$$H = -\sum_i \left[ \left( \frac{1-\Gamma}{2} \right) \left( S_i^x S_{i+1}^x - S_i^z S_{i+1}^z \right) + \left( \frac{1+\Gamma}{2} \right) \left( S_i^x S_{i+1}^x + S_i^z S_{i+1}^z \right) + \Delta S_i^y S_{i+1}^y \right] \quad (154)$$

que exhibe o operador<sup>(47)</sup>

$$S_i^x S_{i+1}^x - S_i^z S_{i+1}^z \quad (155)$$

identificado como o operador energia do modelo de 8-V por estar associado ao coeficiente  $(1-\Gamma)$ , que é zero na transição e portanto proporcional a  $(T-T_c)/T_c$ .

Da mesma forma, a parte diagonal da matriz de transferência do modelo de Ashkin-Teller, eq. (127), pode ser reescrita como

$$\hat{T}_2 = \exp \sum_j \left\{ K_0^H + \frac{1}{2} (K_1^H + K_2^H) (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + \frac{1}{2} (K_2^H - K_1^H) (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + K_4^H \tau_j^z \tau_{j+1}^z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right\} \quad (156)$$

O operador<sup>(48,49)</sup>

$$\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \tau_j^z \tau_{j+1}^z, \quad (157)$$

associado ao coeficiente  $K_2^H - K_1^H$  e chamado operador "crossover", é o que quebra simetria entre as sub-redes (uma com spins  $\tau$  e a outra com spins  $\sigma$ ).

A seguir acompanhamos o efeito das duas transformações de dualidade, equações (141) e (143), sobre o operador (157). Pela primeira,

$$\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \tau_j^z \tau_{j+1}^z \rightarrow \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \eta_{j+1/2}^x$$

e pela segunda transformação

$$\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \eta_{j+1/2}^x \rightarrow S_i^x S_{i+1}^x - S_i^z S_{i+1}^z,$$

que é exatamente o operador energia do 8-V.

Então, a presença do operador energia do 8-V,  $\Gamma \neq 1$  (ver eq. 154), ou seja,  $K_1^H \neq K_2^H$ , implica no aparecimento do operador "crossover" do modelo de Ashkin-Teller e portanto pode-se dizer que o operador energia do 8-V é o quebrador de simetria do modelo de Ashkin-Teller.

Essa correspondência, que é fundamental para a obtenção dos expoentes críticos do modelo de Ashkin-Teller<sup>(42)</sup>, foi inferida independentemente por Kadanoff<sup>(48)</sup>, Knops<sup>(50)</sup> e den Nijs<sup>(47)</sup> a partir do mapeamento dos dois modelos no chamado modelo gaussiano generalizado<sup>(51)</sup>. Na verdade a relação só é obtida no caso Ising ( $\lambda$  e  $K_4$  iguais a zero) e o argumento para que ela continue valendo fora desse ponto, está baseado na existência de um operador marginal em cada um dos modelos.

## APÊNDICE I

## DETERMINAÇÃO DO HAMILTONIANO ASSOCIADO AO MODELO DE BAXTER

Vamos utilizar a equação matricial (44) para calcular os acoplamentos do hamiltoniano  $H_{xyz}$  em termos dos pesos  $\omega_r$ . Inicialmente vamos trabalhar com um modelo de 3 vértices geral e no final particularizar para o simétrico.

Vamos procurar por matrizes  $B_j$  iguais às matrizes  $A_j$ , exceto pelos pesos  $\omega_r$  que serão trocados por pesos  $\beta_r$ :

$$B_j = \begin{pmatrix} \beta_1 \sigma_j^+ \sigma_j^- + \beta_3 \sigma_j^- \sigma_j^+ & \beta_d \sigma_j^+ + \beta_c \sigma_j^- \\ \beta_c \sigma_j^+ + \beta_d \sigma_j^- & \beta_4 \sigma_j^+ \sigma_j^- + \beta_2 \sigma_j^- \sigma_j^+ \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Os elementos (1,1) das matrizes envolvidas em (44) são, do lado direito,

$$\begin{aligned} (B_j A_{j+1} - A_j B_{j+1})_{1,1} &= (\beta_1 \omega_3 - \omega_1 \beta_3) \sigma_j^+ \sigma_j^- + \\ &+ (\beta_3 \omega_1 - \omega_1 \beta_3) \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- + \\ &+ (\beta_d \omega_c - \beta_c \omega_d) \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + (\beta_c \omega_d - \beta_d \omega_c) \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- \quad , \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

e do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} (A_j A_{j+1})_{1,1} &= (\omega_1 - \omega_3)^2 \sigma_j^+ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- + (\omega_1 - \omega_3) \omega_3 \sigma_j^+ \sigma_j^- + \\ &+ (\omega_1 - \omega_3) \omega_3 \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- + \omega_c \omega_d \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \\ &+ \omega_d^2 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \omega_c^2 \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \omega_c \omega_d \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- + \omega_3^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$



Para calcular o comutador dessa expressão com  $H$ , é melhor escrevê-lo em termos de  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ :

$$\begin{aligned}
 -H_{j,j+1} = & 4J_z \sigma_j^+ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- - 2(J_z - H) \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- + \\
 & + 2(H - J_z) \sigma_j^+ \sigma_j^- + (J_x + J_y - 2i J_s) \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \\
 & + (J_x + J_y + 2i J_s) \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + (J_x - J_y) \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \\
 & + (J_x - J_y) \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- - 2H \quad . \quad (I.4)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 -[A_j A_{j+1}, H_{j,j+1}]_{1,1} = & \left[ (\omega_d^2 - \omega_c^2) J_x + (\omega_d^2 - \omega_c^2) J_y - \right. \\
 & \left. - 2i(\omega_d^2 - \omega_c^2) J_s \right] \sigma_j^+ \sigma_j^- + \\
 & + \left[ (\omega_c^2 - \omega_d^2) J_x + (\omega_c^2 - \omega_d^2) J_y + 2i(\omega_c^2 + \omega_d^2) J_s \right] \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- + \\
 & + \left[ (\omega_1^2 - \omega_3^2) J_x - (\omega_1^2 - \omega_3^2) J_y - 4\omega_c \omega_d H \right] \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \\
 & + \left[ -(\omega_1^2 - \omega_3^2) J_x - (\omega_1^2 - \omega_3^2) J_y + 4\omega_c \omega_d H \right] \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- \quad . \quad (I.5)
 \end{aligned}$$

Igualando esse resultado àquele da equação (I.2), operador por operador, obtemos apenas duas equações linearmente independentes:

$$(\omega_d^2 - \omega_c^2) J_x + (\omega_d^2 - \omega_c^2) J_y - 2i(\omega_d^2 + \omega_c^2) J_s = \omega_1 \beta_3 - \beta_1 \omega_3 \quad , \quad (I)$$

$$(\omega_1^2 - \omega_3^2) J_x - (\omega_1^2 - \omega_3^2) J_y - 2\omega_c \omega_d H = \beta_c \omega_d - \beta_d \omega_c \quad . \quad (II)$$

Observando a estrutura das matrizes  $A_j$  ou  $B_j$ , vê-se que as equações correspondentes aos elementos de matriz (2,2) da

equação matricial (44), podem ser obtidas das anteriores pela substituição

$$\begin{aligned} \omega_1 \leftrightarrow \omega_4, \quad \omega_2 \leftrightarrow \omega_3, \quad \omega_c \leftrightarrow \omega_d, \\ \beta_1 \leftrightarrow \beta_4, \quad \beta_2 \leftrightarrow \beta_3, \quad \beta_c \leftrightarrow \beta_d. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Com esse procedimento obtemos,

$$(\omega_c^2 - \omega_d^2)J_x + (\omega_c^2 - \omega_d^2)J_y - 2i(\omega_c^2 + \omega_d^2)J_s = \beta_2\omega_4 - \beta_4\omega_2, \quad (\text{III})$$

$$(\omega_4^2 - \omega_2^2)J_x - (\omega_4^2 - \omega_2^2)J_y - 2\omega_d\omega_c H = \beta_c\omega_d - \beta_d\omega_c. \quad (\text{IV})$$

As equações correspondentes aos elementos de matriz (1,2), de (44), são obtidas de maneira completamente análoga e os resultados são os seguintes

$$\begin{aligned} (\omega_2 + \omega_4)(\omega_d - \omega_c)J_x + (\omega_2 + \omega_4)(\omega_d + \omega_c)J_y - 2\omega_d(\omega_1 + \omega_3)J_z - \\ - 2i\omega_d(\omega_2 + \omega_4)J_s - 2\omega_d(\omega_1 - \omega_3)H = -\beta_1\omega_d + \beta_d\omega_1 + \beta_3\omega_d - \beta_d\omega_3 \end{aligned} \quad (\text{V})$$

$$\begin{aligned} (\omega_2 + \omega_4)(\omega_d - \omega_c)J_x - (\omega_2 + \omega_4)(\omega_d + \omega_c)J_y + 2\omega_c(\omega_1 + \omega_3)J_z - \\ - 2i\omega_c(\omega_2 + \omega_4)J_s + 2\omega_c(\omega_1 - \omega_3)H = -\beta_1\omega_c + \beta_c\omega_1 + \beta_3\omega_c - \beta_c\omega_3 \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_3)(\omega_d - \omega_c)J_x + (\omega_1 + \omega_3)(\omega_d + \omega_c)J_y - 2\omega_d(\omega_2 + \omega_4)J_z + \\ + 2i\omega_d(\omega_1 + \omega_3)J_s + 2\omega_d(\omega_2 - \omega_4)H = -\beta_d\omega_4 + \beta_4\omega_d + \beta_d\omega_2 - \beta_2\omega_d \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_3)(\omega_d - \omega_c)J_x - (\omega_1 + \omega_3)(\omega_d + \omega_c)J_y + 2\omega_c(\omega_2 + \omega_4)J_z + \\ + 2i\omega_c(\omega_1 + \omega_3)J_s + 2\omega_c(\omega_4 - \omega_2)H = -\beta_c\omega_4 + \beta_4\omega_c + \beta_c\omega_2 - \beta_2\omega_c \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

$$\begin{aligned}
& (\omega_c \omega_4 - \omega_d \omega_2) J_x - (\omega_c \omega_4 + \omega_d \omega_2) J_y + 2\omega_d \omega_3 J_z + \\
& + 2i\omega_d \omega_2 J_s - 2\omega_d \omega_3 H = -\beta_3 \omega_d + \beta_d \omega_3
\end{aligned} \tag{IX}$$

$$\begin{aligned}
& (\omega_c \omega_2 - \omega_d \omega_4) J_x + (\omega_c \omega_2 + \omega_d \omega_4) J_y - 2\omega_c \omega_3 J_z + \\
& + 2i\omega_c \omega_2 J_s + 2\omega_c \omega_3 H = -\beta_3 \omega_c + \beta_c \omega_3
\end{aligned} \tag{X}$$

$$\begin{aligned}
& (\omega_c \omega_1 - \omega_d \omega_3) J_x - (\omega_c \omega_1 + \omega_d \omega_3) J_y + 2\omega_d \omega_2 J_z - \\
& - 2i\omega_d \omega_3 J_s - 2\omega_d \omega_2 H = -\beta_d \omega_2 + \beta_2 \omega_d
\end{aligned} \tag{XI}$$

$$\begin{aligned}
& (\omega_c \omega_3 - \omega_d \omega_1) J_x + (\omega_c \omega_3 + \omega_d \omega_1) J_y - 2\omega_c \omega_2 J_z - \\
& - 2i\omega_c \omega_3 J_s + 2\omega_c \omega_2 H = -\beta_c \omega_2 + \beta_2 \omega_c
\end{aligned} \tag{XII}$$

As substituições (I.6) nesse caso não nos dão novas equações porque os elementos de matriz (1,2) e (2,1) de  $A_j$  ou  $B_j$  são hermitianos conjugados.

Temos, então, um sistema de 12 equações, (I) - (XII) , e 10 incógnitas, que apenas sob certas condições dos pesos  $\omega_r$  são compatíveis. Pode-se resolver esse sistema de equações, no caso

$$\omega_1 = \omega_2 \quad , \quad \omega_3 = \omega_4 \quad , \quad \omega_c \omega_d = 0 \quad ,$$

isto é, 6-V simétrico, e também para

$$\omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4 = \omega_c^2 + \omega_d^2 \quad ,$$

conhecido como modelo de fermions livres e finalmente no caso do modelo de 8-V simétrico onde

$$\omega_1 = \omega_2 = a \quad , \quad \omega_3 = \omega_4 = b \quad , \quad \omega_c = c \quad , \quad \omega_d = d \quad ,$$

e

$$\beta_1 = \beta_2 = A \quad , \quad \beta_3 = \beta_4 = B \quad , \quad \beta_c = C \quad , \quad \beta_d = D \quad .$$

Neste caso, as equações (I) - (XII) reduzem-se a

$$(d^2 - c^2)J_x + (d^2 - c^2)J_y - 2i(d^2 + c^2)J_s = Ba - Ab \quad (I)$$

$$(a^2 - b^2)J_x - (a^2 - b^2)J_y - 4cdH = Cd - Dc \quad (II)$$

$$(c^2 - d^2)J_x + (c^2 - d^2)J_y - 2i(c^2 + d^2)J_s = Ab - Ba \quad (III)$$

$$(b^2 - a^2)J_x - (b^2 - a^2)J_y - 4dcH = Dc - dC \quad (IV)$$

$$(I) + (III) \rightarrow J_s = 0 \quad ,$$

$$(II) + (IV) \rightarrow H = 0 \quad .$$

Substituindo esses resultados nas outras equações do sistema, obtemos

$$\begin{aligned} (a+b)(d-c)J_x + (a+b)(d+c)J_y - 2d(a+b)J_z = \\ = -Ad + Da + Bd - Db \quad , \quad (III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)(d-c)J_x - (a+b)(d+c)J_y + 2c(a+b)J_z = \\ = -Ac + Ca + Bc - Cb \quad , \quad (IV) \end{aligned}$$

$$(cb - da)J_x - (cb + da)J_y + 2db J_z = -Bd + Db \quad , \quad (VII)$$

$$(ca - db)J_x + (ca + db)J_y - 2cb J_z = -Bc + Cb \quad . \quad (VIII)$$

Vamos combinar essas equações de maneira a eliminar A, B, C e D. A operação

$$b(III) + (b - a)(VII) - d(I)$$

resulta numa equação só nos acoplamentos  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ :

$$(b^2d - 2abc + a^2d - d^3 + dc^2)J_x + (b^2d + 2abc + a^2d - d^3 + dc^2)J_y - 4abdJ_z = 0 \quad . \quad (\text{I.7})$$

Da mesma forma,

$$b(\text{IV}) + (b - a)(\text{VIII}) - c(\text{I})$$

fornece

$$(2abd - b^2c - cd^2 + c^3 - a^2c)J_x - (2abd + b^2c + cd^2 - c^3 + a^2c)J_y + 4abcJ_z = 0 \quad . \quad (\text{I.8})$$

De (A.7) e (A.8) é fácil tirar que:

$$J_x : J_y : J_z = 2(ab + cd) : 2(ab - cd) : a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad .$$

Procuramos também resolver o modelo de 8-V com campo,

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_3 = \omega_4 = b, \quad \omega_c, \quad \omega_d,$$

mas as equações (I) - (XII) mostraram-se incompatíveis, de maneira que para esse modelo, não existem as matrizes  $B_j$ , da forma que procuramos, que satisfaçam a equação (44). Isso não significa, entretanto, que não exista um operador  $H$  que comute com a matriz de transferência, uma vez que a condição (44) é suficiente, mas não necessária.

## APÊNDICE II

## VERIFICAÇÃO DA IGUALDADE ENTRE OS HAMILTONIANOS H e II

Mostraremos nesse apêndice que os acoplamentos  $p_k'$  encontrados por Baxter, equações (70), são iguais aos obtidos por Sutherland, equações (51).

Para isso serão necessárias algumas propriedades das funções elíticas de Jacobi, que podem ser encontradas por exemplo na Tabela do Gradshteyn-Ryzhik<sup>(39)</sup>.

Definindo  $\Gamma$  e  $\Delta$  por

$$J_x : J_y : J_z = 1 : \Delta : \Gamma ,$$

de (51) e (56) teremos

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{-\text{cn}^2(v) \text{dn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) - \text{dn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) + \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) +}{\text{cn}^2(v) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) - \text{dn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) - \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) +} \\ & \frac{+ \text{sn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta)}{+ \text{sn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta)} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

e

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{-\text{cn}^2(v) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) + \text{dn}^2(v) \text{sn}^2(\zeta) \text{cn}^2(\zeta) - \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) +}{\text{cn}^2(v) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) - \text{dn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) - \text{cn}^2(\zeta) \text{sn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta) +} \\ & \frac{+ \text{sn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta)}{+ \text{sn}^2(v) \text{cn}^2(\zeta) \text{dn}^2(\zeta)} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

onde por comodidade não colocamos o módulo  $k$  das funções elíticas.

Utilizando as identidades

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \operatorname{dn}^2(\theta, \ell) = 1 - \ell^2 \operatorname{sn}^2(\theta, \ell) \quad , \\
 & \text{b) } \operatorname{sn}^2(\theta, \ell) = 1 - \operatorname{cn}^2(\theta, \ell)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

no numerador de (II.1) ficamos com

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^4(\zeta) - \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \\
 & + \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^4(\zeta) + \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{cn}^2(\zeta) = \\
 & = -\operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^4(\zeta) - \ell^2 \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^4(\zeta) + \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) = \\
 & \stackrel{(b)}{=} (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) (1 - \ell^2 \operatorname{sn}^4(\zeta)) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Levando as mesmas identidades ao denominador de (II.1) teremos

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{cn}^2(V) \operatorname{sn}^4(\zeta) - \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) - \\
 & - \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^4(\zeta) + \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{sn}^2(V) \operatorname{cn}^2(\zeta) \operatorname{sn}^2(\zeta) = \\
 & \stackrel{(b)}{=} (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{sn}^2(\zeta) + \ell^2 \operatorname{sn}^4(\zeta)) \stackrel{(a)}{=} \\
 & = (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{dn}^2(\zeta)) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Portanto, de (II.4) e (II.5)

$$\Gamma = \frac{1 - \ell^2 \operatorname{sn}^4(\zeta)}{\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{dn}^2(\zeta)} \quad .
 \tag{II.6}$$

Usando a relação

$$\operatorname{cn}(U \pm V, \ell) = \frac{\operatorname{cn}(U) \operatorname{cn}(V) \mp \operatorname{sn}(U) \operatorname{sn}(V) \operatorname{dn}(U) \operatorname{dn}(V)}{1 - \ell^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)} \quad ,
 \tag{II.7}$$

temos,

$$\Gamma = \frac{1}{\operatorname{cn}(2\zeta)} \quad ,
 \tag{II.8}$$

que é exatamente a relação entre os coeficientes  $p_3^1$  e  $p_1^1$  de Baxter, equações (70).

Quanto a  $\Delta$ , seu denominador é igual ao do (B.1), já calculado, e o numerador é

$$(\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) \operatorname{dn}^2(\zeta) + (\operatorname{dn}^2(V) - \operatorname{dn}^2(\zeta)) \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{cn}^2(\zeta) \quad . \quad (\text{II.9})$$

Com as identidades (a) e (b) podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} & (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) \operatorname{dn}^2(\zeta) - \ell^2 (\operatorname{sn}^2(V) - \operatorname{sn}^2(\zeta)) \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{cn}^2(\zeta) \\ \stackrel{(b)}{=} & (\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{cn}^2(V)) (\operatorname{dn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{cn}^2(\zeta)) . \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Portanto, de (II.5) e (II.10) obtemos

$$= \frac{\operatorname{dn}^2(\zeta) - \ell^2 \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{cn}^2(\zeta)}{\operatorname{cn}^2(\zeta) - \operatorname{sn}^2(\zeta) \operatorname{dn}^2(\zeta)} = \frac{\operatorname{dn}(2\zeta)}{\operatorname{cn}(2\zeta)} \quad , \quad (\text{II.11})$$

onde além da relação (B.7) utilizamos também que

$$\operatorname{dn}(U \pm V, \ell) = \frac{\operatorname{dn}(U) \operatorname{dn}(V) \mp \ell^2 \operatorname{sn}(U) \operatorname{cn}(U) \operatorname{cn}(V)}{1 - \ell^2 \operatorname{sn}^2(U) \operatorname{sn}^2(V)} \quad . \quad (\text{II.12})$$

Das equações (70) vemos que

$$\Delta = \frac{p_2'}{p_1'} \quad .$$



## APÊNDICE III

## TRANSFORMAÇÃO DE DUALIDADE

A função de partição do modelo de Ising sem campo magnético é

$$Z = \sum_{\{\tau\} \langle \rangle} \prod^S e^{K\tau\tau'} \quad (\text{III.1})$$

onde  $\prod^S$  significa produto sobre as ligações da rede e  $\sum_{\{\tau\} \langle \rangle}$  é uma soma sobre as configurações dos spins  $\tau$  numa rede com  $N$  pontos e sujeita a certas condições de contorno.

Em termos de um novo acoplamento  $K^*$ , é possível escrever cada fator  $e^{K\tau\tau'}$  como

$$C(e^{K^* + \tau\tau'} e^{-K^*}) \quad , \quad (\text{III.2})$$

onde  $K^*$  e  $C$  são determinados por:

$$\sinh 2K \sinh 2K^* = 1 \quad , \quad (\text{III.3})$$

$$C = \left(\frac{1}{2} \sinh 2K\right)^{1/2} \quad . \quad (\text{III.4})$$

Dessa forma,

$$Z = \left(\frac{1}{2} \sinh 2K\right)^{S/2} \sum_{\{\tau\} \langle \rangle} \prod^S (e^{K^* + \tau\tau'} e^{-K^*}) \quad . \quad (\text{III.5})$$

No desenvolvimento do produto nós obteremos uma soma de produtos do tipo

$$e^{(s-b)K^* - bK^*} \tau_1 \tau'_1 \dots \tau_b \tau'_b, \quad (\text{III.6})$$

onde  $b$  é o número de vezes que  $\tau \tau'$  e  $-K^*$  comparece nesse produto. Para que esse termo contribua para a função de partição, é preciso que  $\tau_1 \tau'_1 \dots \tau_b \tau'_b = 1$ , ou seja, que cada spin compareça um número par de vezes ( $\tau^{2n} = 1$ ). Em caso contrário, como  $\sum \tau_i = 0$ , ele se anulava. Representando a ligação  $\tau \tau'$  por uma barra, isso significa que apenas caminhos fechados contribuem.

Vamos definir uma nova rede, a rede dual, cujos sítios são os centros das células unitárias da rede original. Colocando spins  $\mu$  na rede de maneira que tenham sinais contrários toda vez que entre dois deles existir uma barra e mesmo sinal na ausência de barra, o termo

$$e^{(s-b)K^* - bK^*} \quad (\text{III.7})$$

pode, então, ser representado por

$$e^{\sum_{\langle \rangle} K^* \mu \mu'} \quad (\text{III.8})$$

A cada valor de  $b$  correspondem duas configurações dos spins  $\mu$ : uma com  $\{\mu\}$  e a outra com  $\{-\mu\}$ . Portanto,

$$\prod_{\langle \rangle} (e^{K^*} + \tau \tau' e^{-K^*}) = \frac{1}{2} \sum_{\{\mu\}} \prod_{\langle \rangle_D} e^{K^* \mu \mu'} \quad (\text{III.9})$$

com  $\prod_{\langle \rangle_D}$  produto sobre as ligações da rede dual.

Substituindo (III.9) em (III.5), e usando que  $\sum_{\{\tau\}} 1 = 2^N$ , obtemos

$$Z = 2^{N-1-s/2} (\sinh 2K)^{s/2} \sum_{\{\mu\}} \prod_{\langle \rangle_D} e^{K^* \mu \mu'} \quad (\text{III-10})$$

O que fizemos foi escrever  $Z$  em termos de spins e acoplamentos de uma nova rede. Com  $K^*$  definido por (III.3) essa é a chamada transformação de dualidade, que foi usada por Kramers e Wannier<sup>(45)</sup> para determinar a temperatura crítica do modelo de Ising bidimensional, antes mesmo que Onsager o resolvesse exatamente.

A função de partição dada por (III.5) apresenta-se mista, no sentido que ela contém spins da rede direta ( $\tau$ ) e acoplamentos da rede dual ( $K^*$ ). É possível fazer o contrário, ou seja, escrever  $Z$  em termos de spins da rede dual e acoplamentos da rede direta. Isso pode ser interessante (como o foi na seção III.3) quando se quer relacionar os acoplamentos das duas redes. O procedimento é simples e consiste em fazer a volta da rede dual para a direita, na equação (III.10), pelo mesmo procedimento que nos levou da equação (III.1) à equação (III.5), só que feito na rede dual:

$$\begin{aligned}
 Z &= 2^{N-1-s/2} (\sinh 2K)^{s/2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sinh 2K^*\right)^{s/2} \sum_{\{\mu\}} \prod_{\langle \rangle_D}^s (e^{K + \mu\mu'} e^{-K^*}) \\
 &= 2^{N-1-s} \sum_{\{\tau\}} \prod_{\langle \rangle_D}^s (e^{K + \mu\mu'} e^{-K^*}) \quad . \quad (III.11)
 \end{aligned}$$

Usando a relação topológica  $N + N_D = s + 2$ , válida para redes planares, onde  $N_D$  é o número de sítios da rede dual, obtemos exatamente a transformação usada na seção III.3, equação (113).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Van der Waals, J.D., "The Equation of state for gases and Liquids, in Nobel Lectures in Physics, 1901-1921 (Amsterdam, 1967) pp. 254-265.
2. Weiss, P., J.Phys. Radium, Paris, 6, 667 (1907).
3. Kac, M., Uhlenbeck, G.E. e Hermmer, P.C., J.Math. Phys. 4, 216 (1963).
4. Wilson, K.G., Rev. Mod. Phys. 47, 773 (1975).
5. Anderson, P.W., Theory of Magnetic Exchange Interactions: Exchange in Insulators and Semiconductors. In: Solid Stat Physics: Advances in Research and Applications, 14 (1963).
6. Ising, E., Z.Physik 31, 253 (1925).
7. Bragg, W.L. e Willians, E.J., Proc. Roy. Soc. (London) A145, 699 (1934).
8. Peierls, R., Proc. Cambridge Phil. Soc. 32, 477 (1936) i
9. Griffiths, R.B., Phys. Rev. A136, 437 (1964).
10. Onsager, L., Phys. Rev. 65, 117 (1944).
11. Lieb, E., Phys. Rev. Lett. 18, 1046 (1967).
12. Slater, J.C., J.Chem. Phys. 9, 16 (1941).

13. Yang, C.P., Yang, C.N., Phys. Rev. 147, 321, 327 (1966).
14. McCoy, B., Wu, T.T., Nuovo Cimento 56B, 311 (1968).
15. Sutherland, B., J.Math. Phys. 11, 3183 (1970).
16. Wu, F.Y., Fan, C., Phys. Rev. B2, 723 (1970)
17. Suzuki, M., Proc. Theor. Phys. 46, 1337 (1971).
18. Krinsky, S. Phys. Lett. 39A, 169, (1972).
19. Potts, R.B., Proc. Camb. Soc. 57, 2680 (1952).
20. Ashkin, J. e Teller, E., Phys. Rev. 64, 178 (1943).
21. Nienhuis, B., Riedel, E.K. e Schick, M., Physc. Rev. B27,  
5625 (1982).
22. Alexander, S., Phys. Lett. 54A, 353 (1977).
23. Drell, S., Weinstein, M. e Yankielowicz, Phys. Rev. D16,  
1769 (1978).
24. Jullien, R. e Pfeuty, P., Phys. Rev. B19, 466 (1979).
25. Hu, B., Phys. Lett. 75A, 372 (1980).
26. Fradkin, E. e Susskind, L. Phys. Rev. D17, 2637 (1978).
27. Kasteleyn, P.W., Fundamental Problems in Statistical Mecha-  
nics, 3, 103 (1975).

28. Weiss, G.H. e Maradudin, A.A., J.Math. Phys. 3, 771 (1962).
29. Yoneya, T., Nucl. Phys. B144. 195 (1978).
30. Elitzur, E., Pearson, R.B. e Shigemitsu, J., Phys. Rev. D19, 3698 (1979).
31. Alcaraz, F. e Köberle, R., J.Phys. 14A, 1169 (1981).
32. Kohmoto, M., den Nijs, M.P.M. e Kadanoff, L.P., Phys. Rev. 24, 5229 (1981).
33. Baxter, R.J., Annals of Phys. 70, 193 (1972).
34. Luther, A. e Peschel, I., Phys. Rev. B12, 3908 (1975).
35. Pauling, L., J. Am. Chem. Soc. 57, 2680 (1935).
36. Rys, F., Holv. Phys. Act 36, 537 (1963).
37. Bethe, H., Z.Phys. 71, 205 (1931)
38. Sutherland, B., Yang, C.P. e Yang, C.N., Phys. Rev. Lett. 19, 588 (1967).
39. Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M., "Tables of Integral, series and Productes", pag. 904 (1980).
40. Wu, F.Y., Phys. Rev. B4, 2312 (1971). Ver também Kadanoff, L.P. e Wegner, F., Phys. Rev. B4, 3989 (1971).

41. Kadanoff, L.P., Phys. Rev. Lett. 39, 903 (1977).
42. Drugowich de F., J.R., Köberle, R., Phys. Rev. B25, 511(1982).
43. Fan, C., Phys. Lett. 39A, 136 (1972).
44. Wegner, F., J.Phys. C5, L131, (1972).
45. Karmers, H. e Wannier, G.H., Phys. Rev. 60, 252 (1941).
46. de Nijs, M.P.M., J.Phys. A12, 187 (1979).
47. de Nijs, M.P.M., Phys. Rev. B23, 6111 (1981).
48. Kadanoff, L.P., Annals of Phys. 120, 39 (1979).
49. Kadanoff, L.P., e Brown, A., Annals of Phys. 121, 318(1979).
50. Knops, H.J.F., Annals of Phys. 128, 448 (1980).
51. José, J.V., Kadanoff, L.P., Keikpatriek, S. e Nelson, D.R.,  
Phys. Rev. B16, 1217 (1971).