UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

OK

GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO E RE-
SULTADOS EXATOS EM MODELOS
 $Z(N)$ UNIDIMENSIONAIS

J. C. CRESSONI

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - B. 1
FÍSICA

Dissertação apresentada ao Ins-
tituto de Física e Química de
São Carlos, para obtenção do
título de Mestre em Física Bási-
ca.

Orientador:

Prof. Dr. Roland Köberle

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____
JOSÉ CARLOS CRESSONI

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 07 DE dezembro DE 1981.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Roland Köberle - Orientador

Dr. Luiz Nunes de Oliveira

Dr. José Fernando Perez

A meus pais

À Marina, Carolina e
ao Franz Eric

AGRADECIMENTOS

- Aos Professores F.C. Alcaraz e J.R.D. de Felício pelas críticas e sugestões que muito contribuíram para a realização deste trabalho;
- Ao colega Fernando Dantas Nobre pelo estímulo e amizade constantes;
- À Marina, Carolina e ao Franz Eric pela compreensão;
- À Marta Regina pelo excelente trabalho de datilografia;
- A todo o Departamento de Física do Instituto de Física e Química de São Carlos pelo carinho e prestatividade;
- À FAPESP e CNPq pelo auxílio financeiro.

Ao Prof. Roland Köberle meus agra
decimentos pela orientação segura
e eficiente, pelos ensinamentos e
sobretudo pela amizade.

ÍNDICE

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	I
LISTA DE TABELAS	II
RESUMO	III
ABSTRACT	IV
 CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	 1
CAPÍTULO II - SISTEMAS DE SPINS UNIDIMENSIONAIS COM SI- METRIA GLOBAL $Z(N)$	5
II.1 - Descrição dos modelos	5
II.2 - Matriz de transferência e função de partição	8
II.3 - Funções de correlação spin-spin e susceptibilidade magnética a campo zero	13
CAPÍTULO III - FORMALISMO DA TEORIA DE GRUPOS DE RENORMA- LIZAÇÃO	20
III.1 - Idéias gerais.....	20
III.2 - Formalismo da teoria	24
CAPÍTULO IV - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO (DEDECORAÇÃO)	33
IV.1 - Transformações de dedecoração com $b = 2$	33
IV.2 - Busca de novas variáveis ($N = 4$)	37
IV.2.1 - Relações de recorrência e linhas de fluxo do $Z(4)$	38
IV.2.2 - Cálculo da energia livre	39
IV.3 - Variáveis mais adequadas para N qualquer	42
IV.3.1 - Transformações com $b > 2$	45
IV.4 - Relações de escala e expoentes crí- ticos	49
IV.5 - Casos particulares	59
IV.5.1 - $Z(2)$	59
IV.5.2 - $Z(3)$	62
IV.5.3 - $Z(4)$	64

IV.5.4 - $Z(5)$	73
IV.5.5 - $Z(6)$	76
IV.5.6 - $Z(7)$	82
IV.5.7 - Pontos fixos para $N > 7$	84
IV.6 - Campos de escala não lineares	84
IV.6.1 - Determinação dos cam- pos não lineares para $Z(N)$	88
IV.7 - Conclusões e conjecturas	89
APÊNDICE A - DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ CÍCLICA $N \times N$	91
APÊNDICE B - CÁLCULO DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DO TIPO $\langle (S_L S_L)^r \rangle$	94
APÊNDICE C - TRANSFORMAÇÃO DE DEDECORAÇÃO COM b INTEIRO QUALQUER	96
APÊNDICE D - ENERGIA LIVRE PARA $Z(N)$	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA II.1	- Rede de spins de Ising unidimensional	5
FIGURA II.2	- Subistemas escolhidos para estabelecer a matriz de transferência	10
FIGURA III.1	- Superfície crítica e caminho termodinâmico no espaço de parâmetros	22
FIGURA III.2	- Pontos fixos típicos numa superfície crítica bidimensional	22
FIGURA III.3	- Sistema de eixos locais usado na linearização da teoria,	23
FIGURA IV.1	- Transformação de dedecoração com fator de reescala espacial (b) igual a 2	33
FIGURA IV.2	- Trajetórias e pontos fixos do grupo de dedecoração ($b = 2$) do modelo $Z(4)$	39
FIGURA IV.3	- Transformação de dedecoração com $b = 3$	45
FIGURA IV.4	- Transformação de dedecoração com b inteiro qualquer	48
FIGURA IV.5	- Diagrama esquemático (trajetórias, pontos fixos, etc) do modelo $Z(2)$	60
FIGURA IV.6	- Diagrama esquemático (trajetórias, pontos fixos, etc) do modelo $Z(3)$	64
FIGURA IV.7	- Diagrama esquemático (trajetórias, pontos fixos, etc) do modelo $Z(4)$	66
FIGURA IV.8	- Caminhos termodinâmicos do modelo $Z(4)$ para os quais existe um valor zero para o comprimento de correlação	73
FIGURA IV.9	- Diagrama esquemático (trajetórias, pontos fixos, etc) do modelo $Z(5)$	75
FIGURA IV.10	- Região física do modelo $Z(6)$ no espaço dos parâmetros	78
FIGURA IV.11	- Região física do modelo $Z(7)$ no espaço dos parâmetros	83

LISTA DE TABELAS

TABELA IV.1	- Pontos fixos do modelo $Z(4)$ nos dois espaços de parâmetros usados	67
TABELA IV.2	- Pontos fixos do modelo $Z(6)$ nos dois espaços de parâmetros usados	79
TABELA IV.3	- Variável $Z(6)$ expressa em termos de variáveis $Z(2)$ e $Z(3)$	80

RESUMO

O comportamento crítico de sistemas unidimensionais de spin do tipo $Z(N)$ na ausência de campos magnéticos, é estudado sob a luz da teoria do grupo de renormalização. Os modelos são resolvidos exatamente pelo método da matriz de transferência e expressões para as funções de correlação e susceptibilidade (a campo zero) por sítio são também calculadas.

As transformações do grupo de renormalização são efetuadas através de um traço parcial na função de partição, obtendo-se um conjunto de relações de recorrência que podem ser escritas de maneira simples para qualquer valor inteiro do fator de reescala espacial, mediante o uso de campos de escala convenientes.

Tirando vantagem de um ponto fixo inteiramente atrativo, calculamos uma expressão para a energia livre por sítio, exata para $T \neq 0$. Analisamos o comportamento de nossos modelos no espaço de parâmetros, onde identificamos em particular as regiões ferro e antiferromagnéticas. O problema de correções às previsões de escala em termos de campos de escala não lineares é discutido. Aventamos também a possibilidade de calcular os autovalores da matriz de transferência através dos campos não lineares.

ABSTRACT

In this work we study the critical behaviour of one dimensional $Z(N)$ spin systems in zero magnetic fields, using the approach of the renormalization group (RG) theory. The models are solved by the transfer matrix method and expressions for the correlation functions and zero field susceptibility per site are found.

The RG transformations are carried out via a partial trace over the partition function and one obtains a set of recursion relations which, with the use of a convenient set of scaling fields, are written out in a simple manner for any integer value of the spatial rescaling factor.

Using a totally attractive fixed point we calculate an expression for the free energy per site, valid exactly for non zero values of the temperature. We analyse the behaviour of our models in the space of parameters, identifying in particular ferro and antiferromagnetic regions. The problem of corrections to scaling in terms of nonlinear scaling fields is discussed and a possibility of finding the eigen values of the transfer matrix from such fields is contemplated.

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

A teoria do grupo de renormalização já vinha sendo utilizada com bastante sucesso em teoria de campos quando seus conceitos fundamentais, em uma versão ligeiramente diferente, foram introduzidos por Wilson, em 1971¹⁵. Após esse trabalho várias áreas da física têm sido beneficiadas, como a mecânica estatística, estado sólido, etc, existindo¹⁶ até mesmo especulações sobre a possibilidade de aplicação da teoria na ciência como um todo (e.g. ciências sociais). Não há dúvida alguma sobre quão frutífera tem sido sua utilização no estudo de fenômenos críticos em transições de fase, particularmente no que diz respeito a comportamentos críticos magnéticos. Apesar disso a teoria do grupo de renormalização não possui ainda fundamentos matemáticos firmemente estabelecidos e, por outro lado, ainda que suas idéias básicas sejam relativamente fáceis de se compreender, sua utilização na prática constitui tarefa em geral bastante complicada. Mesmo os exemplos mais simples de sua aplicação são, em geral, difíceis de serem executados, sendo necessário efetuar cálculos perturbativos como expansões ϵ ($\epsilon = 4-d$, onde d é a dimensionalidade do espaço) e $1/n$ (onde n é o número de graus de liberdade internos do sistema).

Torna-se, assim, necessário e importante testar as previsões da teoria em sistemas exatamente solúveis e, se possível, com soluções exatas também para as equações do grupo de renormalização. O modelo de Baker, por exemplo, é um caso em que o grupo de renormalização é realizável exatamente, mas nem o modelo, nem as equações do grupo de renormalização foram resolvidos de maneira exata¹⁷.

Em 1975, Nelson e Fischer⁵ efetuaram transformações de dedecoração¹¹ em sistemas de spins de Ising em uma dimensão, para os quais as equações de grupo de renormalização puderam ser construídas exatamente, sob a forma de relações de recorrência. Dessa maneira uma série de previsões da teoria puderam ser testadas uma vez que o sistema é exatamente solúvel, e vários de seus aspectos foram compreendidos com maior nitidez, dada a simplicidade do modelo (V. também ref. 21).

Nosso trabalho consiste, de uma certa maneira, em uma generalização de alguns tópicos do trabalho de Nelson e Fischer, uma vez que consideramos uma rede unidimensional populada não por spins de Ising, mas por variáveis de spin do tipo $Z(N)$. Esse sistema é invariante por uma rotação de todas as variáveis de spin de um ângulo igual a $2\pi/N$, i.e., o sistema exibe uma simetria global e discreta do tipo $Z(N)$, a qual não pode ser quebrada espontaneamente em uma dimensão. Não se espera, portanto, uma transição de fase a $T \neq 0$. Entretanto, a $T = 0$ o sistema possui uma "transição de fase" (com invariança por transformações de escala, singularidade na energia livre e nos comprimentos de correlação, etc) que pode ser estudada dentro do formalismo da teoria do grupo de renormalização, permitindo que uma série de fatos e características da teoria sejam analisados e comparados com a solução exata do modelo, a qual pode ser facilmente obtida em uma dimensão.

O trabalho está dividido em 4 capítulos. O Capítulo II trata da solução exata, onde se obtém a função de partição (mediante a diagonalização da matriz de transferência - Apêndice A) e as funções de correlação (Apêndice B) para campo magnético igual a zero. Um caso particular do $Z(N)$, o modelo N-Potts escalar com valores especiais dos campos magnéticos, é também resolvido exatamente.

No Capítulo III fazemos uma revisão dos principais aspectos da teoria de grupos de renormalização a serem utilizados no decorrer do trabalho. Algumas referências bibliográficas utilizadas para a elaboração desse capítulo foram: Ma¹⁸, Pfeuty e Toulouse¹⁶, Kogut¹⁹, Fischer²⁰ e Nelson e Fischer⁵.

O Capítulo IV trata das transformações propriamente ditas onde se discute, entre outras coisas: transformações com fator de reescala espacial $b=2$ e $b=3$, energia livre para o $Z(4)$, variáveis mais adequadas para descrever a transformação para b inteiro qualquer, transformação com b qualquer (Apêndice C), energia livre para $Z(N)$ (Apêndice D), pontos fixos ferro e antiferromagnéticos, pontos de temperatura zero que não são fixos, expoentes críticos, dois comportamentos diferentes para uma função de correlação ao longo de um caminho termodinâmico, campos não lineares, propriedade de semi grupo da teoria, etc.

As transformações que efetuamos são apenas com campo magnético igual a zero. Isso porque para $H \neq 0$ o sistema de equações que se obtém não é compatível, sendo necessário adicionar mais constantes de acoplamento na Hamiltoniana renormalizada, constantes essas que não existiam na Hamiltoniana original. Portanto as transformações com campo magnético tiram o sistema do espaço de parâmetros considerado originalmente se $N > 2$ (para $N = 2$ isso não acontece⁵), o que nos levou a fazer $H = 0$ a fim de obter equações de transformação exatas.

Também, e finalmente, o problema de correções às previsões de escala, consideradas originalmente por Wegner¹⁴, foi tratado por Nelson e Fischer no caso de valores discretos do fator de reescala espacial (o tratamento dado por Wegner era para valores contínuos desse fator). As expressões obtidas por eles no modelo de Ising para os campos de escala não lineares (em forma de série de potências) não foram colocadas em forma fechada, o

que deixou em aberto o problema da convergência de tais expressões. No nosso caso, graças às variáveis utilizadas, as relações de recorrência se desacoplam e os campos não lineares podem ser "vistos" de imediato em forma fechada, sem a necessidade de uso de qualquer método aproximativo na sua obtenção. Portanto o método utilizado e desenvolvido por Nelson e Fischer pode ser testado e sua eficiência comprovada.

CAPÍTULO II

SISTEMAS DE SPINS UNIDIMENSIONAIS COM SIMETRIA GLOBAL $Z(N)$ II.1 - Descrição dos modelos

Consideremos uma rede unidimensional ($d=1$), com N sítios e parâmetro de rede constante e unitário, e coloquemos em cada sítio i uma variável de "spin" σ_i que pode assumir os valores $\sigma_i = +1$ (spin para cima) e $\sigma_i = -1$ (spin para baixo).

FIGURA II.1 - Rede de spins de Ising para $d=1$

A Hamiltoniana (ou Ação) a campo zero, com interação apenas entre os primeiros vizinhos, será dada por

$$H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (\text{II.1})$$

Este modelo foi proposto por Lenz em 1920¹ e resolvido por Ising⁶, em 1925, para o caso unidimensional, e por Onsager², em 1944, para o caso bidimensional. Apesar disso é usualmente chamado, mesmo para $d=2$, de modelo de Ising.

Neste trabalho vamos considerar uma generalização desse modelo, que consiste em colocar em cada sítio i da rede unidimensional, uma variável de spin, S_i , que pode assumir os valores das N raízes da unidade, ou seja:

$$S_i^N = 1 \quad (\text{II.2a})$$

ou equivalentemente,

$$S_i = \exp \{ 2\pi i n_i / N \} \quad (\text{II.2b})$$

onde introduzimos variáveis de valores inteiros, n_i , para cada sítio.

A Hamiltoniana mais geral possível para esses modelos, com interação apenas entre os primeiros vizinhos e construída de forma a ser Hermitiana é

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} \left[J_m (S_i S_j^\dagger)^m + J_m^* (S_i^\dagger S_j)^m \right] \quad (\text{II.3})$$

onde $\langle i,j \rangle$ indica que a soma deve ser efetuada apenas entre os vizinhos mais próximos e $\bar{N}$ é o maior inteiro menor ou igual a $N/2$. O motivo de não se estender a somatória em m para potências maiores que $\bar{N}$ decorre de

$$(S_i S_j^\dagger)^n = (S_i^\dagger S_j)^{N-n} \quad (\text{II.4})$$

o que implicaria apenas numa redefinição das constantes de acoplamento.

Usando as partes real $J_m^{(R)}$ e imaginária $J_m^{(I)}$ de J_m , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[J_m (S_i S_j^\dagger)^m + J_m^* (S_i^\dagger S_j)^m \right] &= \\ &= J_m^{(R)} \cos \frac{2\pi m(n_i - n_j)}{N} - J_m^{(I)} \sin \frac{2\pi m(n_i - n_j)}{N} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Por questões de simplicidade operacional, vamos considerar apenas o caso particular de (II.3) em que J_m é real. Então ficamos com:

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} J_m \{ (S_i S_j^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_j)^m - 2 \} \quad (\text{II.6a})$$

$$= - \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \left\{ \cos \frac{2\pi m (n_i - n_j)}{N} - 1 \right\} \quad (\text{II.6b})$$

onde omitimos o R de $J_m^{(R)}$ e acrescentamos constantes de maneira a fazer a energia do estado fundamental ferromagnético igual a zero.

A Hamiltoniana assim particularizada exibe uma simetria global do tipo $Z(N)$, i.e., se girarmos todos os spins de um ângulo igual a $2n\pi/N$ (o que corresponde a fazer $n_i \rightarrow n_i + \Delta n$) a expressão não se altera. Somando-se a isso o fato de que a interação é de curto alcance, não devemos esperar que o sistema apresente transição de fase a $T \neq 0$.

Naturalmente, para $N=2$ recupera-se o modelo de Ising com $J_1 = J$ e uma constante fisicamente irrelevante. Outros modelos englobados pela Hamiltoniana geral acima⁷ são, por exemplo, os modelos Potts vetorial ("clock model") e Potts escalar. No primeiro a ação é dada por:

$$A_V = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \{ S_i S_j^\dagger + S_i^\dagger S_j \} \quad (\text{II.7})$$

que é o caso particular $J_m = J \delta_{m,1}$. No segundo

$$A_E = -\epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \delta_{S_i, S_j} \quad (\text{II.8})$$

o que confere ao sistema uma energia $-\epsilon$ quando as variáveis estão alinhadas e zero quando não estão. Devido à propriedade

$$\sum_{n=0}^{N-1} \{ S_i S_j^\dagger \}^n = N \delta_{S_i, S_j} \quad (\text{II.9})$$

vemos que este modelo é o caso particular de (II.6a) quando:

$$J_1 = J_2 = \dots = \frac{3 + (-1)^N}{2} \quad J_{\bar{N}} = 2\epsilon/N \quad (\text{II.10})$$

II.2 - Matriz de transferência e função de partição

Para resolver o sistema descrito pela Hamiltoniana (II.6) vamos utilizar o método da matriz de transferência, uma poderosa técnica operacional formulada originalmente por várias pessoas: Kramers and Wannier⁸, Montroll⁹, Lasettre and Howe¹⁰ entre outros. O formalismo independe da dimensionalidade da rede, mas esse fator poderá limitar os cálculos.

A eficiência do método reside na possibilidade de dividir o sistema dado em um certo número M de subsistemas idênticos, que denotaremos por γ_i , de tal maneira que a energia do sistema como um todo possa ser decomposta em uma soma

$$E(\gamma) = \sum_{i=1}^M E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \sum_{i=1}^M E_S(\gamma_i) \quad (\text{II.11})$$

onde $E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1})$ é uma energia de interação entre os subsistemas γ_i e γ_{i+1} e $E_S(\gamma_i)$ é a energia do subsistema γ_i .

Usando condições periódicas de contorno $\gamma_{M+1} = \gamma_1$, podemos escrever a função de partição como:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\gamma\}} \exp\{-\beta E(\gamma)\} = \\ &= \sum_{\gamma_1} \sum_{\gamma_2} \dots \sum_{\gamma_M} \prod_{i=1}^M \exp\{-\beta [E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} E_S(\gamma_i) + \frac{1}{2} E_S(\gamma_{i+1})]\} \\ &= \sum_{\{\gamma\}} T(\gamma_1, \gamma_2) T(\gamma_2, \gamma_3) \dots T(\gamma_M, \gamma_1) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

onde $\beta = (K_B T)^{-1}$, K_B = constante de Boltzmann e $\{\gamma\}$ indica uma soma sobre todas as configurações possíveis do sistema.

A expressão acima pode ser interpretada como um produto de matrizes cujos elementos são:

$$T(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = \exp\{-\beta[E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \frac{1}{2}E_S(\gamma_i) + \frac{1}{2}E_S(\gamma_{i+1})]\} \quad (\text{II.13})$$

onde T é chamada matriz de transferência. Naturalmente T é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ onde n é o número de configurações possíveis do subsistema γ_i .

Efetuada a soma em (II.12) teremos:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\gamma_1} \sum_{\gamma_3} \dots \sum_{\gamma_M} (T^2)(\gamma_1, \gamma_3) T(\gamma_3, \gamma_4) \dots T(\gamma_M, \gamma_1) \\ &= \sum_{\gamma_1} T^M(\gamma_1, \gamma_1) = \text{Tr } T^M \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Se $E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = E_I(\gamma_{i+1}, \gamma_i)$, a matriz de transferência será simétrica o que possibilitará sua diagonalização por uma transformação de semelhança. Então existe uma matriz U tal que

$$(U^{-1} T U)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (\text{II.15})$$

Como o traço é invariante por tal transformação, teremos:

$$Z = \sum_i \lambda_i^M \quad (\text{II.16})$$

onde λ_i são os auto valores de T .

No limite termodinâmico em que o número de graus de liberdade vai para infinito, apenas o maior auto valor será relevante para o cálculo da energia livre por spin, $f(\beta)$, dada por:

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(\beta, N) \quad (\text{II.17})$$

onde N é o número de graus de liberdade do sistema e absorvemos um fator de $(-\beta)$ na definição de $f(\beta)$ por comodidade de notação.

O problema consiste, então, na escolha dos subsistemas, o que é bastante flexível, e na diagonalização da matriz de transferência. Para nossos sistemas unidimensionais com interação apenas entre primeiros vizinhos, vamos adotar como subsistemas cada um dos sítios da rede (fig. II.2). Como em cada sítio vive uma variável que pode tomar N valores, T será uma matriz $N \times N$.

FIGURA II.2 - Os subsistemas γ_i e γ_{i+1} escolhidos para estabelecer a matriz de transferência no sistema $Z(N)$ unidimensional.

Como não haverá campos externos atuando sobre os sistemas, o segundo termo em (II.11) será igual a zero. Portanto temos apenas o termo que descreve a interação entre os subsistemas, e, de (II.6b) vemos que os elementos da matriz de transferência são:

$$\begin{aligned} T(\gamma_i, \gamma_{i+1}) &= \exp[-\beta E_I(\gamma_i, \gamma_{i+1})] \\ &= \exp \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_i - n_{i+1})}{N} - 1 \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

onde $K_m = J_m / K_B T$. Em termos dos pesos estatísticos

$$x_n = \exp \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi mn}{N} - 1 \right] \right]; \quad x_n = x_{N-n} \pmod{N} \quad (\text{II.19})$$

a matriz de transferência se escreve:

$$T = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_1 & x_0 & x_1 & \dots & x_{N-3} & x_{N-2} \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_{N-4} & x_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N-2} & x_{N-3} & x_{N-4} & \dots & x_0 & x_1 \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

De $x_n = x_{N-n}$ (II.19) reconhecemos em T duas propriedades importantes³:

- 1) os elementos de matriz são da forma $x_{m,n} = x_{m-n}$ (os elementos de cada diagonal são iguais);
- 2) transpondo a primeira linha para o fundo e a primeira coluna para a extrema direita, a matriz não se altera.

Matrizes que possuem a primeira propriedade são chamadas matrizes de Toeplitz³; acrescentando-se a segunda a matriz é denominada cíclica. No apêndice (A) mostramos como a diagonalização de uma matriz cíclica pode ser efetuada. De acordo com o resultado (A.10a) os auto valores são:

$$\lambda_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp[2\pi i k m / N] \quad (\text{A.10a})$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

Note-se que, como $x_m = x_{N-m}$, estes termos se compõem na expressão acima resultando

$$x_m \left[\exp[2\pi i k m / N] + \exp[2\pi i k (N-m) / N] \right] = 2 x_m \cos \frac{2\pi k m}{N} \quad (\text{II.21})$$

o que mostra que os auto valores são reais, como esperávamos. Para valores pares de N , $X_{N/2}$ ficaria sozinho mas $\exp(2\pi i k/2) = \pm 1$.

De (II.17) a energia livre por spin, que passaremos a chamar apenas de energia livre, se escreve:

$$f(\beta) = \ln \lambda_N \quad (\text{II.22})$$

onde

$$\lambda_N = \sum x_n \quad (\text{II.23})$$

é o maior dos auto valores de T . A somatória se estende desde $n=0$ até $n=N-1$, convenção que adotaremos daqui para a frente para os índices de soma, a menos que esteja explicitamente indicado de outra maneira.

No caso de existir um campo magnético externo, podemos escrever a Hamiltoniana (II.6) genericamente como

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} J_m \{ (S_i S_j^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_j)^m \} \right] + \\ - \sum_i \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} H_m \{ S_i^m + (S_i^\dagger)^m \} \right] \quad (\text{II.3'})$$

o que faz com que a matriz de transferência deixe de ser cíclica dificultando sua diagonalização no caso mais geral. Entretanto o modelo Potts (II.8) com campos tais que

$$H_1 = H_2 = \dots = \frac{3 + (-1)^N}{2} H_{\bar{N}} \quad (\text{II.10'})$$

reduz (II.3') a

$$H = - J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{n_i, n_j} - H \sum_i \delta_{n_i, 0} + NH/N \quad (\text{II.8'})$$

onde $J = N J_1/2$, $H = N H_1/2$ e usamos

$$\sum_n S_i^n = N \delta_{S_{i,1}} \quad . \quad (II.9')$$

Neste caso particular, trabalhando as linhas e colunas do determinante característico, obtivemos os seguintes auto valores definidos a menos do termo constante em (II.8'):

$$\lambda_{\pm} = \frac{(e^{K+L} + e^K + N-2) \pm \sqrt{(e^K - e^{K+L} + N-2)^2 + 4(N-1)e^L}}{2} \quad (A.15')$$

$$\lambda_n = e^K - 1 \quad (A.15'')$$

$$n = 1, 2 \dots N-2$$

onde $L = H/(K_B T)$.

Para grandes valores de N a energia livre (II.17) pode ser escrita como

$$f(\beta, L) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln [e^{-NL/N} (\lambda_+)^N]$$

$$= -\frac{L}{N} + \ln \lambda_+ \quad . \quad (II.22')$$

É fácil ver que a magnetização média por sítio, $M = -(\partial f / \partial H)_T$, é igual a zero para $H = 0$, o que era esperado uma vez que sistemas de spins com simetria global discreta e interação de curto alcance não podem experimentar quebra espontânea de simetria em uma dimensão¹³.

II.3 - Funções de correlação spin-spin e susceptibilidade magnética a campo zero

O próximo objeto a ser calculado é, naturalmente, a

função de correlação spin-spin, $G(L, L')$, definida por:

$$G(L, L') = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_L S_{L'}^\dagger \rangle \quad (\text{II.24})$$

onde S_L e $S_{L'}$ são variáveis de spin localizadas nos sítios L e L' , respectivamente, e o valor esperado $\langle \dots \rangle$ é definido como

$$\langle S_L S_{L'}^\dagger \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{n_i\}} S_L S_{L'}^\dagger e^{\bar{H}} \quad (\text{II.25})$$

$\{n_i\}$ indicando uma soma sobre todas as configurações possíveis do sistema e a Hamiltoniana reduzida, $\bar{H}$, sendo dada por

$$\bar{H} = -H/K_B T = \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_i - n_j)}{N} - 1 \right] \quad (\text{II.26})$$

com $K_m = J_m/K_B T$ já definidos anteriormente.

Vamos reescrever (II.25) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle S_L S_{L'}^\dagger \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_N} \langle n_1 | T | n_2 \rangle \langle n_2 | T | n_3 \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle n_{L-1} | T | n_L \rangle \exp\{2\pi i n_L / N\} \langle n_L | T | n_{L+1} \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle n_{L'-1} | T | n_{L'} \rangle \exp\{-2\pi i n_{L'} / N\} \langle n_{L'} | T | n_{L'+1} \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle n_N | T | n_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

onde usamos condições periódicas de contorno e o elemento de matriz $\langle n_i | T | n_{i+1} \rangle$ é dado por

$$\langle n_i | T | n_{i+1} \rangle = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_i - n_{i+1})}{N} - 1 \right] \right\} \quad (\text{II.28})$$

que coincide com a definição (II.18) (introduzimos esta nova notação unicamente por razões de conveniência).

Efetutando os produtos de matrizes em (II.27) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle S_L S_{L'}^\dagger \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_L, n_{L'}} \langle n_1 | T^{L-1} | n_L \rangle \exp\{2\pi i n_L / N\} \\
 &\quad \langle n_L | T^{L'-L} | n_{L'} \rangle \exp[-2\pi i n_{L'} / N] \langle n_{L'} | T^{N-L'+1} | n_1 \rangle \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ T^{N-R} M_+ T^R M_- \} \quad (\text{II.29})
 \end{aligned}$$

onde $R = L' - L$ e $M_\pm$ são matrizes definidas por

$$M_\pm = \sum_{n_L} |n_L\rangle \exp\{\pm 2\pi i n_L / N\} \langle n_L| \quad (\text{II.30})$$

sendo $|n_L\rangle$ os vetores coluna

$$|n_L = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{N \times 1} \quad ; \quad |n_L = 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{N \times 1} \quad (\text{II.31})$$

e assim por diante, com $n_L = 0, 1, 2 \dots N-1$.

Podemos, agora, reescrever (II.29) da seguinte maneira

$$\langle S_L S_{L'}^\dagger \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[(U^{-1} T^{N-R} U) (U^{-1} M_+ U) (U^{-1} T^R U) (U^{-1} M_- U) \right] \quad (\text{II.32})$$

onde U é a matriz que diagonaliza T por uma transformação de semelhança (ver apêndice A).

Vamos chamar $A_\pm = U^{-1} M_\pm U$, ou seja:

$$A_\pm = U^{-1} I_1 U + e^{\pm 2\pi i / N} U^{-1} I_2 U + \dots + e^{\pm 2\pi i (N-1) / N} U^{-1} I_N U \quad (\text{II.33})$$

onde I_n é a matriz com elemento unitário na linha n e coluna n e zero nas outras posições:

$$(I_n)_{ij} = \delta_{in} \delta_{jn} \quad . \quad (II.34)$$

Lembrando que os elementos de U são da forma $\frac{1}{\sqrt{N}} u_{nk}$ com $u_{nk} = \exp[2\pi i n k / N]$, podemos obter os elementos das matrizes $A_{\pm}$:

$$a_{ij}^{\pm} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{\pm 2\pi i (n-1)/N} u_{ni}^* u_{nj} \quad . \quad (II.35)$$

Uma vez que $U^{-1} T U$ é diagonal, ou seja,

$$(U^{-1} T U)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (II.36)$$

onde os λ 's são os auto valores de T dados por (A.10a), podemos escrever (II.32) como

$$\langle S_L S_L^{\dagger} \rangle = \frac{1}{Z} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1^{N-R} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{N-R} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_N^{N-R} \end{bmatrix} A_+ \begin{bmatrix} \lambda_1^R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^R & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_N^R \end{bmatrix} A_- \right\} \quad (II.37)$$

Como λ_N é o maior dos auto valores e $Z = \sum \lambda_n^N$, quando tomarmos o limite termodinâmico (com R fixo), o único termo que sobreviverá será aquele que contém λ_N^{N-R} no numerador. É fácil ver que esse termo será $\lambda_N^{N-R} b_{NN}$ onde b_{NN} é elemento da matriz

$$B = A_+ \begin{bmatrix} \lambda_1^R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^R & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N^R \end{bmatrix} A_- \quad (II.38)$$

$N \times N$

Portanto

$$\begin{aligned}
 b_{NN} &= \sum_{k,\ell} a_{Nk}^+ \lambda_k^R \delta_{k\ell} a_{\ell N}^- \\
 &= \sum_k a_{Nk}^+ \lambda_k^R a_{kN}^- \quad .
 \end{aligned} \tag{II.39}$$

De (II.35) obtemos:

$$\begin{aligned}
 a_{Nk}^+ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i(n-1)/N} u_{nN}^* u_{nk} \\
 &= \frac{e^{-2\pi i/N}}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i(k+1)n/N} \\
 &= e^{-2\pi i/N} \delta_{k,N-1}
 \end{aligned} \tag{II.40a}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_{kN}^- &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i(n-1)/N} u_{nk}^* u_{nN} \\
 &= \frac{e^{2\pi i/N}}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i(k+1)n/N} \\
 &= e^{2\pi i/N} \delta_{k,N-1} \quad .
 \end{aligned} \tag{II.40b}$$

Então b_{NN} fica

$$b_{NN} = \sum_k \lambda_k^R \delta_{k,N-1} = \lambda_{N-1}^R \tag{II.41}$$

e a expressão final para $G(R)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 G(R) &= (\lambda_{N-1}/\lambda_N)^R \\
 &= (\lambda_1/\lambda_N)^R
 \end{aligned} \quad .$$

onde usamos $\lambda_{N-1} = \lambda_1$.

Naturalmente, para $N > 3$ existirão funções de correlação do tipo $\langle (S_L S_L^\dagger)^r \rangle$ com $r=1,2,\dots,\bar{N}$ que calculamos genericamente no apêndice B. O resultado, de acordo com (B.8), se escreve

$$G_r(R) = (\lambda_r / \lambda_N)^R \quad . \quad (B.8)$$

Vamos definir o comprimento de correlação ξ_r associado a $G_r(R)$ como:

$$\frac{1}{\xi_r} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{R} \ln |G_r(R)| \right\} \quad . \quad (II.43)$$

Portanto, se $1/\xi_r \neq 0$, a função de correlação decai como $\exp(-R/\xi_r)$ quando R vai para infinito. Entretanto esta definição é suficientemente geral para incluir funções que decaem como $P(R;n) \exp(-R/\xi_r)$ onde $P(R;n)$ é um polinômio de grau n em R e R^{-1} (12).

De (B.8) obtemos

$$1/\xi_r = \ln |\lambda_N / \lambda_r| \quad . \quad (II.44)$$

Esta expressão tem a forma geral obtida por Fischer e Camp¹² para inversos de comprimentos de correlação em sistemas com graus de liberdade discretos e camadas de tamanho finito (pensamos no sistema d -dimensional como sendo construído por camadas interagentes e sobrepostas, por exemplo, na direção $\hat{z}$), sendo a correlação calculada entre spins situados em camadas distintas. Esta última condição pode, na verdade, ser relaxada para incluir correlações na direção das camadas de um grande, mas finito, hipercubo no caso de interações de curto alcance. Evidentemente, no nosso caso, as camadas seriam cada um dos sítios da rede.

Apesar de não possuirmos a solução com campo magnético, podemos calcular a susceptibilidade inicial (a campo zero) usando o teorema da flutuação-dissipação⁴, i.e.:

$$\chi_r(T) = \frac{1}{K_B T} \sum_{L, L'} \langle (S_L S_{L'}^\dagger)^r \rangle \quad (\text{II.45})$$

Como $\langle (S_L S_{L'}^\dagger)^r \rangle = (\lambda_r / \lambda_N)^{|L' - L|}$, teremos, chamando $\lambda_r / \lambda_N = x$ e olhando para um único sítio:

a) à direita do sítio considerado (inclusive ele)

$$1 + x + x^2 + \dots = 1/(1 - x) \quad (\text{II.46a})$$

b) à esquerda

$$x + x^2 + \dots = x/(1 - x) \quad (\text{II.46b})$$

De a e b :

$$\sum_{L, L'} x^{|L' - L|} = N(1 + x)/(1 - x) \quad (\text{II.47})$$

onde o fator N é devido ao número de pontos.

Portanto a susceptibilidade inicial por sítio se escreve:

$$\chi_r(T) = \frac{1}{K_B T} \frac{\lambda_N + \lambda_r}{\lambda_N - \lambda_r} \quad (\text{II.48})$$

CAPÍTULO III

FORMALISMO DA TEORIA DE GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO

III.1 - Teoria de grupos de renormalização - idéias gerais

A Hamiltoniana de um sistema de spins, e.g. (II.3) , mostra claramente como os graus de liberdade interagem a distâncias da ordem do espaçamento da rede, mas não deixa transparecer as características de longa distância da teoria, particularmente importantes na região crítica, onde o comprimento de correlação é enorme dada a ocorrência de efeitos cooperativos. Para estudar tal região podemos fazer médias sobre alguns graus de liberdade do sistema mediante a construção de blocos de spins substituindo, em seguida, cada um desses aglomerados por um único spin definido, por exemplo, como a média dos spins em um bloco e localizado no centro do bloco correspondente. Os spins são então re-rotulados de σ_x para $\tau_{x'}$, mediante

$$\tau_{x'} = f(\sigma_x) \quad (\text{III.1})$$

onde $x' = x/b$, b sendo o tamanho de uma das arestas do bloco. Claramente este último passo encolhe o tamanho do sistema por um fator b . Quanto a $f(\sigma_x)$, em geral é escolhida como sendo igual a $c^{-1} \sigma_x$ onde $c[\bar{H}]$ é chamado fator de reescala dos spins, dependente dos acoplamentos existentes na Hamiltoniana. Essa escolha classifica o grupo de renormalização como sendo linear uma vez que relaciona linearmente o spin renormalizado com o spin original.

Evidentemente o procedimento de substituir um bloco por um único spin empobrece a resolução espacial do sistema, uma vez que os spins de bloco podem descrever variações desde uma distância mínima da ordem de b , o tamanho do bloco, que é de algumas

vezes o parâmetro da rede. Isso não vai, entretanto, alterar o comportamento de longas distâncias em que estamos interessados.

A fim de definir alguns conceitos, vamos voltar nossa atenção para o espaço de parâmetros. Mantendo fixos os valores das constantes de acoplamento, à medida que a temperatura varia o sistema descreve uma curva nesse espaço, a qual denominaremos caminho termodinâmico do modelo. A cada ponto do espaço de parâmetros corresponde uma Hamiltoniana a uma certa temperatura; escolhendo um deles como ponto de partida, e iterando o processo de construção de blocos esquematizado acima, geraremos uma sequência de Hamiltonianas que por sua vez definirá uma trajetória no espaço de parâmetros, que será chamada linha de fluxo (ou simplesmente trajetória) do grupo de renormalização. Vamos denotar por Γ_ξ a superfície no espaço de parâmetros sobre a qual o comprimento de correlação se mantém constante. A superfície Γ_∞ (superfície crítica) será de interesse especial, essencialmente por dois motivos:

- a) o ponto P (Fig. III.1) onde um determinado caminho termodinâmico intercepta Γ_∞ corresponde ao ponto crítico e define a temperatura crítica (T_c) do modelo;
- b) pontos fixos (P^*) i.e., pontos que não mudam por transformações de grupo de renormalização, estão necessariamente sobre Γ_∞ (ou Γ_0).

É fácil de compreender o item (b) se lembrarmos que, uma vez que os spins que efetivamente se acoplam entre si estão contidos num volume com dimensões lineares da ordem do comprimento de correlação, o processo de construção de blocos (ou seja, de redução do número de graus de liberdade do sistema) estabelece uma correspondência entre um problema com um certo comprimento de correlação e outro com um comprimento de correlação menor. Dessa maneira pontos pertencentes a Γ_∞ permanecerão nessa superfície.

FIGURA III.1 - Superfície crítica e caminho termodinâmico (CT) mostrando um ponto fixo P^* e o ponto crítico P .

Os pontos fixos são de interesse crucial na teoria de grupos de renormalização. Na figura III.2 mostramos uma superfície crítica bidimensional com os três casos possíveis de pontos fixos (note-se que as trajetórias que se iniciam em pontos pertencentes a Γ_∞ permanecem inscritas nessa superfície): totalmente estável (fundo de cavidade), de estabilidade menor (ponto de sela) e instável (pico).

FIGURA III.2 - Tipos de pontos fixos: A é um fundo de cavidade, B um ponto de sela e C um pico.

Perto de um dado ponto fixo podemos linearizar a teoria estudando apenas os pontos que diferem pouco do valor do ponto fixo. Dessa maneira definimos um sistema de eixos locais (ver Figura III.3) através da diagonalização de uma matriz de transformação linear. Nessa região linear o efeito da transformação é simplesmente multiplicar as variáveis (ou campos) de escala h_j definidas pelos eixos locais, por números $b_j^{\lambda_j}$, onde b é o fator de reescala espacial, i.e., a dilatação da unidade de comprimento, e λ_j a dimensão anômala da variável de escala h_j . Se $\lambda_j > 0$ a trajetória ao longo do eixo h_j tende a se afastar de P^* e h_j é chamada variável relevante; para $\lambda_j < 0$ a trajetória caminha em direção a P^* e h_j é denominada variável irrelevante; e finalmente para $\lambda_j = 0$ a variável h_j é chamada marginal. Nesse último caso o campo h_j não muda por transformações do grupo de renormalização e o eixo correspondente se constitui, até onde é válida a aproximação linear, em um contínuo de pontos fixos. Em geral os eixos locais, e portanto as variáveis de escala, são diferentes para diferentes pontos fixos.

FIGURA III.3 - Sistema de eixos locais na proximidade de um ponto fixo mostrando três eixos, um dos quais corresponde a um campo relevante e os dois outros a campos irrelevantes.

A cada ponto fixo corresponde um comportamento crítico governado pelas variáveis de escala locais e suas dimensões anômalas. Todo sistema cujo caminho termodinâmico intercepte a área de captação de um dado ponto fixo P^* (esta definida como a região constituída por pontos que convergem para P^*), apresenta o comportamento crítico associado a esse ponto fixo.

Em termos das variáveis h_j definidas pelos eixos locais, a teoria de grupos de renormalização fornece previsões de escala que são válidas apenas na região linear em torno do ponto fixo, onde as variáveis renormalizadas h'_j são dadas por $h'_j = b^{\lambda_j} h_j$. Essa região de validade pode ser ampliada através da introdução de termos não lineares nos campos de escala. Os novos eixos correspondem a um sistema de coordenadas curvilíneas e as novas variáveis, chamadas variáveis (ou campos) de escala não lineares que denotaremos por $g_j(h_i)$, se transformam como $g'_j(h_i) = b^{\lambda_j} g_j(h_i)$ e se reduzem a h_j em primeira ordem. Como os campos de escala lineares, os campos g 's dependem, em geral, do particular ponto fixo em torno do qual são calculados sendo, portanto, não únicos sob esse ponto de vista. Entretanto, mesmo para apenas um ponto fixo, os campos não lineares não são únicos. De fato, Nelson e Fischer⁵ exibiram um contínuo de campos não lineares, calculados em torno do ponto fixo ferromagnético de uma cadeia de Ising, campos esses associados a grupos de renormalização distintos. Na aproximação linear todos os campos g 's se reduziam aos mesmos campos lineares, i.e., $g_j(h_i) \approx h_j + O(h_i^2)$.

III.2 - Formalismo da teoria

Vamos rever o formalismo geral da teoria de grupos de renormalização de maneira mais quantitativa, embora bastante sintética, e com enfoque voltado para nossas necessidades futuras.

A Hamiltoniana reduzida, translacionalmente invariante

$$\bar{H} = -\bar{H}(\{s\}_N)/K_B T \quad (\text{III.2})$$

onde $\{s\}_N = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ denota um conjunto de graus de liberdade locais ou variáveis de campo, é transformada, por uma transformação do grupo de renormalização R , em uma nova Hamiltoniana $\bar{H}'$ (omitiremos o termo reduzida daqui para a frente) e escrevemos

$$\bar{H}' = R[\bar{H}] \quad (\text{III.3})$$

onde supomos que a Hamiltoniana renormalizada $\bar{H}'$ também exibe invariança translacional.

O operador R age no sentido de diminuir o número de graus de liberdade do sistema, ou seja

$$N' = N/b^d \quad (\text{III.4})$$

onde b é o fator de reescala espacial e d a dimensionalidade do sistema. Existe uma grande flexibilidade na construção de R , sendo que para nós esse operador será definido via um traço parcial sobre $N - N'$ das N variáveis de campo, definindo a Hamiltoniana renormalizada por

$$\exp \bar{H}' = \text{Tr}'_{N-N'} \{ \exp \bar{H} \} \quad (\text{III.5})$$

onde Tr_N denota a operação de traço, soma, integração, etc, apropriada às variáveis de campo $\{s\}_N$.

A condição essencial a ser satisfeita pelo operador de grupo é que a função de partição $z_N[\bar{H}] = \text{Tr}_N e^{\bar{H}}$ seja preservada, ou seja:

$$z_{N'}[\bar{H}'] = z_N[\bar{H}] \quad (\text{III.6})$$

o que é garantido simplesmente efetuando o traço sobre as variáveis

veis restantes em (III.5).

Com o intuito de preservar a densidade espacial dos graus de liberdade, todos os vetores espaciais devem ser reescalados pelo fator b , isto é:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x}/b \quad (\text{III.7})$$

e, finalmente, os vetores de spin são reescalados de acordo com

$$\vec{S}_{\vec{x}} \rightarrow \vec{S}'_{\vec{x}'} = \vec{S}_{\vec{x}}/c[\bar{H}] \quad (\text{III.8})$$

De (III.4) e (III.6) vemos que a energia livre (II.17) satisfaz a uma relação de recorrência básica

$$f[\bar{H}'] = b^d f[\bar{H}] \quad (\text{III.9})$$

Analogamente a função de correlação spin-spin, para grupos de renormalização lineares, se transforma como:

$$G[\vec{R}; \bar{H}] = c^2 G[\vec{R}/b, \bar{H}'] \quad (\text{III.10})$$

Estas últimas relações levarão a propriedades de homogeneidade e escala no ponto crítico.

Definido o grupo de renormalização, a teoria toma o seguinte rumo:

a) Iteração - A transformação é iterada:

$$\bar{H}' = R[\bar{H}] ; \bar{H}'' = R[\bar{H}'] = R^2[\bar{H}] \dots \quad (\text{III.11})$$

onde o fator de reescala espacial associado a R^2 é:

$$b_2 = b^2 \quad (\text{III.12})$$

Em geral

$$b_{\ell} = b^{\ell} \quad (\text{III.13})$$

satisfazendo a propriedade de semi grupo

$$\mathbb{R}^{\ell+\ell'} = \mathbb{R}^{\ell} \mathbb{R}^{\ell'} \quad (\text{III.14a})$$

com

$$b_{\ell+\ell'} = b^{\ell} b^{\ell'} \quad (\text{III.14b})$$

b) Ponto fixo - Variando os parâmetros da Hamiltoniana inicial , procura-se um ponto fixo da transformação definido por

$$\mathbb{R}[\bar{H}^*] = \bar{H}^* \quad (\text{III.15})$$

c) Linearização - Presume-se que a seguinte expansão possa ser feita:

$$\bar{H}' = \mathbb{R}[\bar{H}^* + wQ] = \bar{H}^* + w\mathbb{L}Q + O(w^2) \quad (\text{III.16})$$

onde w é um parâmetro escalar e $\mathbb{L}$ um operador de renormalização linear que age sobre Hamiltonianas.

d) Diagonalização - Em face de um operador linear, pergunta-se por seus auto-operadores Q_j e auto valores λ_j tais que

$$\mathbb{L} Q_j = \lambda_j Q_j \quad (\text{III.17})$$

Da propriedade de semi grupo, espera-se que os auto valores λ_j tenham a forma:

$$\lambda_j(b) = b^{\lambda_j} \quad (\text{III.18})$$

onde λ_j independe de b .

e) Expansão em torno do ponto fixo - Supondo a completeza do conjunto de auto operadores Q_j para o ponto fixo H^* teremos:

$$\bar{H} = \bar{H}^* + \sum_j h_j Q_j \quad (\text{III.19})$$

onde $\{h_j\} = \{h_0, h_1, \dots\}$ são chamados campos críticos ou campos de escala. (Na verdade a completeza suposta acima pode perfeitamente ser questionada, mas algum tipo de "completeza assintótica" com respeito a valores esperados termodinâmicos para Hamiltonianas aproximadamente críticas, deve ser esperada). Um dos auto operadores, por exemplo Q_1 , pode ser identificado com a densidade de energia e outro, Q_2 , com o parâmetro de ordem, a magnetização; os campos de escala correspondentes seriam a temperatura $(T - T_c / T_c) \propto t$, $t \propto h_1$ e o campo magnético $H \propto h_2$, respectivamente. Para transições ocorrendo a $T_c = 0$ outras escolhas poderão ser mais convenientes para h_1 . O termo constante na Hamiltoniana pode sempre ser identificado com um auto operador, digamos Q_0 , com campo de escala correspondente h_0 . Como este termo pode ser removido para fora do traço na função de partição, segue-se que ele sempre se transforma de tal maneira que seu auto valor λ_0 seja igual a b^d .

Inserindo (III.19) em (III.16) obtém-se:

$$\bar{H}' = R[\bar{H}] = H^* + \sum_j h_j \Lambda_j Q_j + O(h^2) \quad (\text{III.20})$$

que se pode expressar na forma de relações de recorrência

$$h_j' = \Lambda_j h_j [1 + O(h_0, h_1, \dots)] \quad (\text{III.21})$$

ou, iterando ℓ vezes e desprezando termos não lineares (portanto perto do ponto fixo):

$$h_j^{(\ell)} \approx \Lambda_j^{(\ell)} h_j \quad (\text{III.22})$$

A esta altura podemos classificar os campos de escala lineares em:

- 1) relevantes quando $\Lambda_j > 1$ ($\lambda_j > 0$);
- 2) irrelevantes quando $\Lambda_j < 1$ ($\lambda_j < 0$); e
- 3) marginais quando $\Lambda_j = 1$ ($\lambda_j = 0$)

cujo significado físico foi discutido no início do capítulo.

f) Energia livre - Usando a relação básica de recorrência (III.9) obtêm-se:

$$f(h_0, h_1, \dots) \approx b^{-\ell d} f(b^{\ell \lambda_0} h_0, b^{\ell \lambda_1} h_1, \dots) \quad (\text{III.23})$$

onde parametrizamos a energia livre em termos dos campos de escala. Esta é uma relação de homogeneidade assintótica que implica em escala. Basta escolher ℓ tal que, quando um campo relevante, e.g. $h_1 = t$, estiver próximo do ponto fixo (portanto bastante pequeno) se tenha $b^{\ell \lambda_1} t = 1$. Dessa maneira (III.23) pode ser escrita na forma de escala

$$f(h_0, t, H, \dots) \approx t^{d/\lambda_1} Y(h_0/t^{\phi_0}, H/t^{\phi_2}, \dots) \quad (\text{III.24})$$

onde

$$\phi_j = \lambda_j / \lambda_1 \quad (\text{III.25})$$

e a função de escala é dada por

$$Y(y_0, y_2, \dots) = f(y_0, 1, y_2, \dots) \quad (\text{III.26})$$

Para campos irrelevantes o expoente ϕ_j em (III.25) (chamado expoente de "crossover") é negativo e portanto $h_j/t^{\phi_j} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Esperamos então poder ignorar a dependência da energia livre em h_j fazendo o argumento correspondente y_j em (III.26) igual a zero na

região crítica. Podemos obter correções às previsões de escala expandindo em potências de y_j . Note-se que é também necessário levar em conta termos não lineares nos campos de escala relevantes (termos esses oriundos de (III.22)), os quais podem perfeitamente ser mais importantes que as correções de irrelevância⁵.

Comparando (III.24) com a previsão de escala

$$f(T, H) \approx t^{2-\alpha} Y(H/t^\Delta) \quad (\text{III.27})$$

vemos que

$$2-\alpha = d/\lambda_1 \quad (\text{III.28})$$

e

$$\Delta = \lambda_2/\lambda_1 \quad (\text{III.29})$$

onde Δ (expoente de gap) é determinado em termos de α e γ por

$$\Delta = (2 - \alpha + \gamma)/2 \quad (\text{III.30})$$

γ sendo o expoente crítico associado à susceptibilidade, i.e.:

$$\chi(T) \propto t^{-\gamma} \quad (\text{III.31})$$

g) Função de correlação - A propriedade de semi grupo só é válida se $c[\bar{H}]$ tiver uma dependência em b do tipo

$$c = b^\kappa \quad (\text{III.32})$$

onde κ independe de b . Então, usando (III.10) no ponto fixo teremos:

$$G(\vec{R}) = c^*{}^2 G(\vec{R}/b) \quad (\text{III.33})$$

$$= b^{-2\omega} G(\vec{R}/b) \quad (\text{III.34})$$

Escolhendo $b = R$ vem que

$$G(\vec{R}) \propto D/R^{2\omega}$$

identificando, dessa maneira, o expoente crítico η através da relação

$$\begin{aligned} d - 2 + \eta &= 2\omega \\ &= -2 \frac{\ln c}{\ln b} \end{aligned} \quad (III.36)$$

Isso mostra que, em geral, $c[\bar{H}]$ deve ser escolhido convenientemente a fim de que o ponto fixo obtido de $R[\bar{H}^*] = \bar{H}^*$ descreva o comportamento crítico sob interesse. Na verdade o valor de $c[\bar{H}^*]$ está ligado à existência de um ponto fixo, i.e., a escolha do fator de reescala dos spins deve ser tal que $R[\bar{H}^*] = \bar{H}^*$ tenha solução não trivial.

Por outro lado, perto do ponto fixo temos, ainda de (III.10):

$$G(\vec{R}, h_0, h_1, \dots) \approx b^{-2\ell\omega} G(\vec{R}/b^\ell, b^{\ell\lambda_0} h_0, b^{\ell\lambda_1} h_1, \dots) \quad (III.37)$$

e escolhendo ℓ tal que $b^{\ell\lambda_1} t = 1$ e b tal que $b^\ell = R$ vem que

$$G(\vec{R}, h_0, h_1, \dots) \approx R^{-2\omega} D(\vec{R}/t^{1/\lambda_1}, \dots, h_j/t^{\phi_j}, \dots) \quad (III.38)$$

identificando assim $1/\lambda_1 = \nu$ o que em combinação com (III.28) implica em

$$2 - \alpha = d\nu \quad (III.39)$$

h) Campos de escala não lineares - São campos para os quais relações do tipo (III.22) são válidas exatamente. Portanto tais campos, que chamaremos g 's, diagonalizam as relações de recorrência mesmo longe do ponto fixo. A relação linear (III.21) ou (III.22), em termos dos campos não lineares devem ser lidas

$$g_j^{(\ell)} = \Lambda_j^{(\ell)} g_j \quad (III.40)$$

sem termos de correção. Parametrizando $\bar{H}$ em termos dos g 's, as relações de homogeneidade para a energia livre e função de correla-

ção tornam-se exatas e válidas mesmo em regiões afastadas do ponto fixo. Por exemplo, a relação para a energia livre se escreve:

$$f(g_0, g_1, \dots) = b^{-\ell d} f(b^{\ell \lambda_0} g_0, b^{\ell \lambda_1} g_1, \dots) \quad . \quad (\text{III.41})$$

Para finalizar, notemos que a idéia de universalidade entra de maneira muito natural no contexto da teoria de grupos de renormalização. Se adicionarmos a uma Hamiltoniana próxima de $\bar{H}^*$ um operador Q_K para o qual $\lambda_K < 1$ (ou seja, um operador irrelevante), devido ao fato de o correspondente campo crítico h_K decair rapidamente por iteração, os expoentes críticos e as funções de escala não mudarão. Em outras palavras, a classe de universalidade engloba todas as Hamiltonianas cujo caminho termodinâmico intercepta a área de captação do ponto fixo $\bar{H}^*$.

CAPÍTULO IV

GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO (DEDECORAÇÃO)

IV.1 - Transformações de dedecoração com $b = 2$

A transformação de grupo de renormalização que vamos utilizar é uma transformação essencialmente algébrica conhecida como transformação de dedecoração (ou iteração) desenvolvida genericamente por Fisher¹¹ para spins de Ising. A idéia é substituir um spin central, S_0 , acoplado a dois spins vizinhos, S_1 e S_2 , por uma única ligação (ver figura IV.1) acoplando os spins externos. A transformação, na verdade, é mais geral podendo existir, em vez de S_0 , um sistema físico mais complicado acoplando S_1 e S_2 . Efe-
tua-se a transformação mediante um traço parcial sobre os graus de liberdade internos do sistema físico. No caso desse sistema ser um único spin teremos

FIG: IV.1 - Transformação de dedecoração no caso mais simples de um único spin acoplado aos spins externos.

onde $\{K\} = \{K_1, K_2 \dots K_{\overline{N}}\}$ são as constantes de acoplamento entre os spins.

Vamos trabalhar com a Hamiltoniana introduzida no Capítulo II acrescida de algumas constantes que se mostrarão convenientes no futuro:

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} \left[\sum_{m=1}^{\overline{N}} \frac{1}{2} J_m \left[(S_i S_j^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_j)^m \right] \right] - NE(\{K\}) \quad (\text{IV.1})$$

onde $E(\{K\})$ representa uma contribuição de spin zero para a energia. Na forma reduzida teremos:

$$\bar{H} = -H/K_B T = \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} K_m \left[(S_i S_j^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_j)^m \right] + NC(\{K\}) \quad (\text{IV.2})$$

onde $C(\{K\}) = E/K_B T$. A fim de que a Hamiltoniana assuma um aspecto de nosso interesse, vamos reescreve-la como:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} K_m \left[(S_i S_j^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_j)^m - 2 \right] + \\ & + N \left[C + K_1 + K_2 + \dots + K_{\bar{N}} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.3a})$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_i - n_j)}{N} - 1 \right] + \\ & + N \left[C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.3b})$$

onde apenas somamos e subtraímos constantes.

Os pesos estatísticos

$$x_\theta = \exp \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos \frac{2\pi m\theta}{N} - 1 \right] \right] \quad (\text{IV.4})$$

$$x_\theta = x_{N-\theta} \quad (\text{MOD. } N)$$

já definidos no Capítulo II, desempenharão um papel importante nas expressões que estão por vir.

Quando se efetua o traço parcial mencionado acima, ficamos com uma função de partição condicional, $\psi_2(\{K\}, S_1, S_2)$, que depende das variáveis de spin externas. É fácil ver que no nosso caso:

$$\begin{aligned}
\psi_2(\{K\}, n_1, n_2) &= \sum_{n_0} \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\bar{N}} \left[K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_1 - n_0)}{N} - 1 \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_2 - n_0)}{N} - 1 \right] \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[C + K_1 + K_2 + \dots + K_{\bar{N}} \right] \right\} \\
&= \exp \left[2(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}}) \right] \sum_{n_0} x_{|n_1 - n_0|} x_{|n_2 - n_0|}
\end{aligned}
\tag{IV.5}$$

onde o índice 2 lembra o fator de reescala espacial $b=2$.

A fim de que possamos expressar a transformação na forma de relações de recorrência entre os parâmetros das Hamiltonianas inicial e final, faremos o seguinte "ansatz":

$$\begin{aligned}
\psi_2(\{K\}, n_1, n_2) &= \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\bar{N}} K'_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_1 - n_2)}{N} - 1 \right] + C' + K'_1 + \dots + K'_{\bar{N}} \right\} \\
&= x'_{|n_1 - n_2|} \exp \left[C' + K'_1 + \dots + K'_{\bar{N}} \right]
\end{aligned}
\tag{IV.6}$$

Podemos agrupar $C(\{K\})$ e $C'(\{K\})$ definindo

$$\phi_2(\{K\}) = \frac{\exp \left[C' + K'_1 + \dots + K'_{\bar{N}} \right]}{\exp \left[2 \left(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}} \right) \right]}
\tag{IV.7}$$

o que nos deixa com as relações de recorrência

$$\phi_2(\{K\}) x'_{|n_1 - n_2|} = \sum_{n_0} x_{|n_1 - n_0|} x_{|n_2 - n_0|}
\tag{IV.8}$$

As expressões (IV.5) e (IV.6) geram o sistema de equações (IV.8) com as novas constantes de acoplamento $K'(K)$ como incógnitas o qual, esperamos, seja compatível e tenha solução uni-

ca. Com tais aspectos do problema em mente, vamos olhar o número de configurações possíveis do sistema a ser dedecorado, ou seja, o número de valores possíveis que $\psi(\{K\}, n_1, n_2)$ pode assumir. É fácil ver que a soma em (IV.5) depende apenas da diferença $|n_1 - n_2|$ pois o que se faz é somar todos os produtos possíveis $x_p x_q$ com diferença $|p - q|$ constante e isso, evidentemente, depende apenas de $|p - q|$. Como após $\bar{N}$ todos os pesos estatísticos começam a se repetir, teremos $\bar{N} + 1$ possibilidades para $\psi(\{K\}, n_1, n_2)$. Por outro lado, de (IV.6) vemos que existem $\bar{N} + 1$ incógnitas. Tantas possibilidades quantas incógnitas não é uma garantia de compatibilidade, principalmente num sistema não linear, mas constitui-se em uma grande esperança nesse sentido. Devemos salientar que quando tratamos o mesmo problema com campo magnético, encontramos um número maior de equações do que de incógnitas, o que nos levou a considerar o fato de que a expressão obtida, correspondente a (IV.6), poderia não ser uma identidade válida para todos os valores de n_1 e n_2 (com certeza o "ansatz" (IV. 6) não foi suficientemente geral, isto é, deveríamos considerar, além dos campos magnéticos, mais termos quebrando a simetria $Z(N)$). E realmente, como pudemos notar para o $Z(3)$ e um caso particular do N-Potts, as equações levavam a informações não compatíveis o que nos forçou a abandonar as transformações com campo magnético.

Se, dessa maneira, dedecorarmos os spins alternadamente, estaremos gerando um exemplo de uma transformação de grupo de renormalização com fator de reescala espacial $b = 2$. Note-se que estamos, na verdade, efetuando uma soma sobre spins pares e o efeito desse traço parcial na função de partição é

$$Z_N(\{K\}, C) = Z_{N/2}(\{K'\}, C') \quad (\text{IV.9})$$

onde $\{K'\} = \{K'_1, K'_2 \dots K'_{\bar{N}}\}$ representa o conjunto de acoplamentos

efetivos entre os spins remanescentes. A transformação de dedecoração mapeia o ponto $\{K\}$ em outro ponto $\{K'\}$ no espaço de parâmetros.

O objeto removido pela dedecoração poderia, como observamos, ser algo mais complicado do que um único spin. Mais tarde veremos o caso em que removemos um número qualquer de spins situados entre dois spins externos S_1 e S_2 .

O sistema de equações implícito em (IV.8), pode ser colocado em forma mais adequada agora que sabemos que a soma do lado direito depende apenas da diferença $|n_1 - n_2|$. Basta fazermos $n_1 = 0$ e variarmos n_2 desde 0 até $\bar{N}$. Assim ficamos com as seguintes relações de recorrência:

$$\phi_2(\{K\}) = \sum_n x_n^2 \quad (\text{IV.10a})$$

$$x'_\theta = \frac{\sum_n x_n x_{|n-\theta|}}{\sum_n x_n^2} \quad (\text{IV.10b})$$

$$\theta = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

onde fizemos $n_2 = \theta$.

IV.2 - Busca de novas variáveis ($N = 4$)

Apesar de as variáveis x 's serem inegavelmente úteis para descrever a transformação (note-se que as relações de recorrência foram facilmente obtidas em virtude da parametrização em termos dos x 's), existe outro conjunto de variáveis que se adapta melhor nesse sentido, simplificando enormemente as relações (IV.10b). Como percebemos sua existência, quase que acidentalmente, no $Z(4)$, vamos ilustrar como isso ocorreu antes de prosseguirmos com o esquema geral da teoria de grupos de renormalização do Capítulo III.

IV.2.1 - Relações de recorrência e linhas de fluxo do $Z(4)$

Para $N=4$ as relações de recorrência (IV.10) se escrevem:

$$x_1' = 2x_1(1+x_2)/(1+2x_1^2+x_2^2) \quad (\text{IV.11a})$$

$$x_2' = 2(x_2+x_1^2)/(1+2x_1^2+x_2^2) \quad (\text{IV.11b})$$

$$\phi_2(K_1, K_2) = 1 + 2x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{IV.11c})$$

onde

$$x_1 = e^{-K_1 - 2K_2} \quad (\text{IV.11d})$$

e

$$x_2 = e^{-2K_1} \quad (\text{IV.11e})$$

Uma vez que os parâmetros x_1 e x_2 movem-se no plano (x_1, x_2) independentemente do termo independente de spin, C , implícito em $\phi_2(K_1, K_2)$, podemos pesquisar os pontos fixos da transformação usando apenas as duas primeiras relações, (IV.11a) e (IV.11b). Encontramos os seguintes pontos fixos:

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, 0), (0, 1) \text{ e } (1, 1) \quad (\text{IV.12})$$

onde $(0, 0)$ é ferromagnético e $(1, 1)$ paramagnético correspondendo a $T=0$ e $T=\infty$, respectivamente, enquanto que em $(0, 1)$ temos um modelo de Ising (a temperatura zero) na variável S^z , uma vez que $x_2=1$ implica em $J_1=0$. À medida que a transformação é iterada, uma Hamiltoniana inicial especificada por $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ descreve uma trajetória no plano (x_1, x_2) . À guisa de ilustração mostramos na figura IV.2 algumas dessas trajetórias (ou linhas de fluxo) traça

das como se fossem contínuas, no caso $J_1 > 0$.

FIGURA IV.2 - Pontos fixos e trajetórias para o grupo de dedecoração com $b = 2$. Os pontos fixos são $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. As trajetórias, têm o sentido indicado pelas setas sobre as curvas contínuas, onde estão mostrados pontos representando aplicações sucessivas da transformação a partir de um ponto inicial.

Evidentemente pode-se concluir que a transição de fase do $Z(4)$ ferromagnético se dá a temperatura zero, como já esperávamos de resultados mais gerais¹³.

Não queremos entrar em maiores detalhes e também não efetuaremos o passo seguinte do esquema geral das transformações' de grupo de renormalização, i.e., linearizar as relações de recorrência em torno dos pontos fixos de temperatura zero, uma vez que o $Z(4)$ será discutido extensivamente mais adiante.

IV.2.2 - Cálculo da energia livre

O ponto $(1, 1)$ é totalmente atrativo, isto é, completamente destituído de operadores relevantes e assim não pode descre

ver um comportamento verdadeiramente crítico. Entretanto o fato de todas as trajetórias levarem a ele, pode servir como ponto de partida na busca de uma expressão para a energia livre, exata para $T \neq 0$. Para isso vamos usar a Hamiltoniana (IV.2) no caso específico de $N=4$, ou seja:

$$\bar{H} \equiv \sum_{\langle i,j \rangle} \left\{ \frac{K_1}{2} [s_i s_j^\dagger + s_i^\dagger s_j] + \frac{K_2}{2} [(s_i s_j^\dagger)^2 + (s_i^\dagger s_j)^2] \right\} + NC \quad (IV.13)$$

Agora olhamos para a função de partição e fazemos uma expansão a altas temperaturas. Obtemos:

$$Z \approx 4^N e^{NC} [1 + O(N K_1^2, N K_2^2)] \quad (IV.14)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(w^{(\ell)}, x_1^{(\ell)}, x_2^{(\ell)}) &\approx \ln 4 + C^{(\ell)} + O(K_1^2, K_2^2) \\ &\approx -\ln \frac{[w^{(\ell)}]^{1/4}}{4} + O[(K^{(\ell)})^2] \end{aligned} \quad (IV.15)$$

onde

$$w^{(\ell)} = \exp[-4 C^{(\ell)}] \quad (IV.16)$$

Da relação básica de recorrência para a energia livre

$$f(w^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 2^{-\ell} f(w^{(\ell)}, x_1^{(\ell)}, x_2^{(\ell)}) \quad (IV.17)$$

e notando que no $\lim \ell \rightarrow \infty$, $K^{(\ell)} \rightarrow 0$, encontramos:

$$f(w^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = -\lim_{\ell \rightarrow \infty} 2^{-\ell} \ln \frac{(w^{(\ell)})^{1/4}}{4} \quad (IV.18)$$

que é exata para $T \neq 0$.

Para calcular este limite, teremos que iterar as relações de recorrência (IV.11). Se, em lugar de ϕ_2 , x_1 e x_2 usarmos, respectivamente, u , v_1 e v_2 dados por

$$u = 1/4 \exp[-C - K_1 - K_2] \quad (\text{IV.19a})$$

$$v_1 = (1 - x_2)/(1 + 2x_1 + x_2) \quad (\text{IV.19b})$$

$$v_2 = (1 - 2x_1 + x_2)/(1 + 2x_1 + x_2) \quad (\text{IV.19c})$$

as relações de recorrência se escreverão

$$u' = u^2 (1 + 2v_1 + v_2)^2 / (1 + 2v_1^2 + v_2^2) \quad (\text{IV.20a})$$

$$v_1' = v_1^2 \quad (\text{IV.20b})$$

$$v_2' = v_2^2 \quad (\text{IV.20c})$$

Iterando (IV.20a) ℓ vezes, teremos

$$u^{(\ell)} = (u^{(0)})^{2^\ell} [1 + 2v_1 + v_2]^{2^\ell} / [1 + 2(v_1)^{2^\ell} + (v_2)^{2^\ell}] \quad (\text{IV.21})$$

e usando novamente o fato de que no $\lim \ell \rightarrow \infty$, $K^{(\ell)} \rightarrow 0$, (IV.18) fica:

$$f(w^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = -\lim_{\ell \rightarrow \infty} 2^{-\ell} \ln u^{(\ell)} \quad (\text{IV.22})$$

Notando que

$$1 + 2v_1 + v_2 = 4/(1 + 2x_1 + x_2) \quad (\text{IV.23})$$

teremos, afinal:

$$f(w^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = C + K_1 + K_2 + \ln[1 + 2x_1 + x_2] \quad (\text{IV.24})$$

válida para $T \neq 0$.

Note-se que essa expressão concorda com aquela calculaa

da no Capítulo II usando a técnica de transferência (a menos, é claro, da constante que não existia na Hamiltoniana considerada naquela ocasião).

As variáveis definidas em (IV.19) são evidentemente mais adequadas para descrever a transformação de dedecoração com $b = 2$ do $Z(4)$, como se pode ver comparando (IV.20) com (IV.11). Conforme veremos em seguida, a generalização dessas variáveis para N qualquer permitirá obter uma expressão para a energia livre do $Z(N)$, facilitará o trabalho de pesquisa dos pontos fixos, levará a uma expressão extremamente simples para transformações com b qualquer o que por sua vez fornecerá também pontos fixos antiferromagnéticos, etc.

IV.3 - Variáveis mais adequadas para N qualquer

Uma vez que nosso objetivo neste trabalho não é unicamente resolver o sistema e comparar com os resultados oriundos da teoria de grupos de renormalização, mas sim, e principalmente, aprender a manipular essa teoria, vamos nos permitir, a esta altura, olhar também para a solução exata já obtida, na tentativa de reconhecer as variáveis "naturais" do sistema. Veremos que dessa maneira poderemos, de uma certa forma, extrapolar as idéias de maneira interessante e significativa.

Se olharmos para as funções de correlação do $Z(4)$ calculadas genericamente no Apêndice B, ou seja:

$$\begin{aligned} G_1(R) &= (\lambda_1/\lambda_4)^R \\ &= [(1 - x_2)/(1 + 2x_1 + x_2)]^R \end{aligned} \quad (\text{IV.25a})$$

e

$$\begin{aligned} G_2(R) &= (\lambda_2/\lambda_4)^R \\ &= [(1 - 2x_1 + x_2)/(1 + 2x_1 + x_2)]^R \end{aligned} \quad (\text{IV.25b})$$

onde, lembramos, $G_r(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle (S_L S_L^\dagger)^r \rangle$ reconheceremos nas razões λ_1/λ_4 e λ_2/λ_4 as expressões para v_1 e v_2 dadas por (IV.19b) e (IV.19c), respectivamente. Será que para $N > 4$ as razões $v_r = \lambda_r/\lambda_N$ $r=1,2,\dots,\bar{N}$ se transformarão como v_1 e v_2 , ou seja, $v'_r = v_r^2$, no caso $N=4$? Para verificar vamos definir as variáveis

$$\begin{aligned} v_r &= \lambda_r/\lambda_N \\ r &= 1, 2, \dots, \bar{N} \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

e calcular v'_r . Teremos (lembramos que os índices de soma assumem valores desde 0 até $N-1$ quando não especificado diferentemente):

$$\begin{aligned} v'_r &= \lambda'_r/\lambda'_N = \frac{\sum_n x'_n \exp(2\pi i n r/N)}{\sum_n x'_n} \\ &= \frac{\sum_n \left[\frac{\sum_{n_0} x_{n_0} x_{|n_0-n|}}{\sum_{n_0} x_{n_0}^2} \right] \exp(2\pi i n r/N)}{\sum_n \left[\frac{\sum_{n_0} x_{n_0} x_{|n_0-n|}}{\sum_{n_0} x_{n_0}^2} \right]} \\ &= \frac{\sum_{n_0} x_{n_0} \sum_n x_{|n_0-n|} \exp(2\pi i n r/N)}{\sum_{n_0} x_{n_0} \sum_n x_{|n_0-n|}} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Portanto podemos escrever v'_r como

$$v'_r = \frac{\sum_{n_0} x_{n_0} \exp(2\pi i n_0 r/N) \sum_n x_{|n_0-n|} \exp(2\pi i r(n-n_0)/N)}{\sum_{n_0} x_{n_0} \sum_n x_{|n_0-n|}} =$$

$$= \left[\frac{\sum_n x_n \exp(2\pi i r n / N)}{\sum_n x_n} \right]^2 = v_r^2 \quad (\text{IV.28})$$

o que confirma nossa expectativa.

Para completar a transformação precisamos escrever $\phi_2(\{K\})$ em termos dos v 's. Para isso vamos mostrar que $\phi_2(\{K\}) = \sum_n x_n^2$ pode ser escrito como

$$\phi_2(\{K\}) = N \sum_n \lambda_n^2 / (\sum_n \lambda_n)^2 \quad (\text{IV.29})$$

O numerador fica

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 &= \sum_n \left[\sum_{m=1}^N x_m \exp(2\pi i m n / N) \right]^2 \\ &= \sum_n \sum_m x_m \exp(2\pi i m n / N) \sum_p x_p \exp(2\pi i p n / N) \\ &= \sum_{m,p} x_m x_p \sum_{n=1}^N \exp[2\pi i n (m+p) / N] \\ &= N \sum_m x_m^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

E o denominador, por sua vez, fornece

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N x_m \exp(2\pi i m n / N) \\ &= \sum_m x_m \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i m n / N) \\ &= N \sum_m x_m \delta_{m,N} = N \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

completando assim a demonstração.

Então as relações de recorrência (IV.10a) e (IV.10b)

ficam, em termos das novas variáveis:

$$\phi_2(\{v\}) = N \sum v_n^2 / (\sum v_n)^2 \quad (\text{IV.32a})$$

$$v_r' = v_r^2 \quad (\text{IV.32b})$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad \text{e} \quad r = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

onde (IV.32a) é obtida multiplicando e dividindo (IV.29) por λ_N^2 .

A presença do fator numérico 2 em (IV.32b) nos lembra fortemente que estamos fazendo transformações com fator de reescala espacial $b=2$! Isso sugere tentarmos transformações com $b > 2$ o que será feito a seguir.

IV.3.1 - Transformações com $b > 2$

Inicialmente faremos transformações com $b=3$. Portanto o objeto a ser dedecorado consiste, agora, em dois spins (figura IV.3)

FIGURA IV.3 - Transformação de dedecoração com $b=3$.

A função de partição condicional $\psi_3(\{K\}, n_1, n_2)$, a menos da exponencial (ver (IV.5)) que será englobada futuramente em $\phi_3(\{K\})$ como fizemos em (IV.7), agora se escreve:

$$\begin{aligned} \psi_3(\{K\}, n_1, n_2) = \sum_{n_{01}, n_{02}} \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\bar{N}} \left[K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_1 - n_{01})}{N} - 1 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_{01} - n_{02})}{N} - 1 \right] \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_2 - n_{02})}{N} - 1 \right] \Bigg\} \\
& = \sum_{n_{01}, n_{02}} x_{|n_1 - n_{01}|} x_{|n_{01} - n_{02}|} x_{|n_2 - n_{02}|} \\
& = \sum_{n_{02}} x_{|n_1 - n_{02}|}^{(1)} x_{|n_2 - n_{02}|} \quad (\text{IV.33})
\end{aligned}$$

onde $x_{|n_1 - n_{02}|}^{(1)} = \sum_{n_{01}} x_{|n_1 - n_{01}|} x_{|n_{01} - n_{02}|}$ depende apenas de $|n_1 - n_{02}|$ e, como é fácil ver, $x_\theta = x_{N-\theta} \pmod{N}$.

Portanto concluímos que $\psi_3(\{K\}, n_1, n_2)$, como $\psi_2(\{K\}, n_1, n_2)$, depende apenas da diferença $|n_1 - n_2|$ com $|n_1 - n_2| = 0, 1, \dots, \bar{N}$.

Analogamente ao que fizemos no caso $b = 2$, escrevemos

$$\begin{aligned}
\psi_3(\{K\}, n_1, n_2) &= \phi_3(\{K\}) \exp \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} K'_m \left[\cos \frac{2\pi m(n_1 - n_2)}{N} - 1 \right] \right] \\
&= \phi_3(\{K\}) x'_{|n_1 - n_2|} \quad (\text{IV.34})
\end{aligned}$$

onde

$$\phi_3(\{K\}) = \frac{\exp [C' + K'_1 + \dots + K'_{\bar{N}}]}{\exp [3(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}})]} \quad (\text{IV.35})$$

Novamente, como $\psi_3(\{K\}, n_1, n_2)$ depende apenas da diferença $|n_1 - n_2|$, fazemos $n_1 = 0$ e variamos n_2 desde 0 até $\bar{N}$, resultando as seguintes relações de recorrência.

$$\phi_3(\{K\}) = \sum_{n_{01}, n_{02}} x_{n_{01}} x_{|n_{01} - n_{02}|} x_{n_{02}} \quad (\text{IV.36a})$$

$$x'_\theta = \frac{\sum_{n_{01}, n_{02}} x_{n_{01}} x_{|n_{01} - n_{02}|} x_{|\theta - n_{02}|}}{\phi_3(\{K\})} \quad (\text{IV.36b})$$

$$\theta = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

Vamos tentar, novamente, as variáveis $v_r = \lambda_r / \lambda_N$ utilizadas no caso $b = 2$. A variável transformada, v'_r , ficará:

$$v'_r = \lambda'_r / \lambda'_N = \frac{\sum_n x'_n \exp(2\pi i n r / N)}{\sum_n x'_n} \quad (IV.37)$$

O numerador pode ser escrito

$$\begin{aligned} \sum_n \left[\sum_{n_{01}, n_{02}} x_{n_{01}} x_{|n_{01}-n_{02}|} x_{|n-n_{02}|} \right] \exp(2\pi i n r / N) \\ = \sum_{n_{01}} x_{n_{01}} \exp\left[2\pi i n_{01} r / N\right] \sum_{n_{02}} x_{|n_{01}-n_{02}|} \exp\left[2\pi i (n_{02}-n_{01}) r / N\right] \\ \sum_n x_{|n-n_{02}|} \exp\left[2\pi i (n-n_{02}) r / N\right] = \lambda_r^3 \end{aligned} \quad (IV.38a)$$

e o denominador

$$\begin{aligned} \sum_n x'_n &= \sum_n \sum_{n_{01}, n_{02}} x_{n_{01}} x_{|n_{01}-n_{02}|} x_{|n-n_{02}|} \\ &= \sum_{n_{01}} x_{n_{01}} \sum_{n_{02}} x_{|n_{01}-n_{02}|} \sum_n x_{|n-n_{02}|} \\ &= \left(\sum_m x_m \right)^3 \\ &= (\lambda_N)^3 \end{aligned} \quad (IV.38b)$$

Para escrever $\phi_3(\{K\})$ em termos dos v 's, vamos calcular $\sum \lambda_r^3$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \lambda_r^3 &= \sum_{r=1}^N \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(2\pi i n r / N) \right]^3 \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_m x_m \sum_n x_n \sum_p x_p \exp\left[2\pi i r (m+n+p) / N\right] \\ &= N \sum_{m,n,p} x_m x_n x_p \delta_{m+n+p,0} \end{aligned}$$

$$= N \sum_{m,n} x_m x_{|m-n|} x_n \quad , \quad (IV.39)$$

Como, de (IV.31) $\sum \lambda_n = N$, teremos:

$$\begin{aligned} \phi_3(\{K\}) &= N^2 \sum_n \left[\lambda_n^3 / (\sum \lambda_n)^3 \right] \\ &= N^2 \sum_n \left[(\lambda_n / \lambda_N)^3 / (\sum \lambda_n / \lambda_N)^3 \right] \end{aligned} \quad (IV.40)$$

De (IV.38) e (IV.40), podemos escrever as relações de recorrência para o grupo de dedecoração $b = 3$:

$$\phi_3(\{v\}) = N^2 \sum_n \left[v_n^3 / (\sum v_n)^3 \right] \quad (IV.41a)$$

$$v_r' = v_r^3 \quad (IV.41b)$$

$$\begin{aligned} n &= 1, 2 \dots N \\ r &= 1, 2 \dots \bar{N} \end{aligned}$$

No apêndice C calculamos as relações de recorrência para b inteiro qualquer, i.e., no caso em que o objeto a ser removido pela dedecoração é constituído de $b-1$ spins situados entre dois spins externos (Fig. IV.4).

FIGURA IV.4 - Dedecoração com b inteiro qualquer .

O resultado é

$$\phi_b(\{v\}) = N^{b-1} \sum_n \left[\frac{v_n^b}{(\sum v_n)^b} \right] \quad (\text{IV.42a})$$

$$v_r' = v_r^b \quad (\text{IV.42b})$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

como era de se esperar em vista dos resultados anteriores para $b = 2$ e $b = 3$, sendo ϕ_b dado por

$$\phi_b(\{K\}) = \frac{\exp \left[C' + K_1' + \dots + K_{\bar{N}}' \right]}{\exp \left[b \left(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}} \right) \right]} \quad (\text{IV.43})$$

IV.4 - Relações de escala e expoentes críticos

Note-se que o termo constante $C(\{K\}) = E(\{K\})/K_B T$, analogamente ao que ocorreu quando escrevemos as relações de recorrência para o $Z(4)$ usando os pesos estatísticos como variáveis, não participa das relações (IV.42b) que descrevem as transformações dos termos de interação. Dessa forma podemos pesquisar pontos fixos através do estudo dessas relações apenas.

Naturalmente o espaço de parâmetros é um hiperespaço $\bar{N}$ dimensional e as variáveis v_r assumem valores que vão desde -1 até $+1$. Portanto tais variáveis "vivem", nesse espaço, dentro da região delimitada externamente por um hipercubo com centro na origem das coordenadas e "arestas" que vão desde -1 até $+1$ e cujos vértices e centros das faces, juntamente com a origem $(0, 0, \dots, 0)$, são os pontos fixos da transformação, como podemos ver de (IV.42b). Evidentemente, para valores pares de b , os vértices e faces com

uma ou mais coordenadas negativas deixam de representar pontos fixos. Além disso, no interior desse hipercubo existem, em geral, regiões correspondendo a acoplamentos imaginários (valores negativos dos x 's) e portanto não físicas. Tais regiões devem ser excluídas de nosso estudo o que implicará, naturalmente, na exclusão também dos pontos fixos situados em seu interior.

Se invertermos a relação (IV.26) para obter $x(v)$ teremos:

$$x_r = \frac{\sum_n v_n \exp(2\pi i n r / N)}{\sum_n v_n} \quad (\text{IV.44})$$

$$r = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

e portanto o ponto fixo $(v_1, v_2, \dots, v_{\bar{N}}) = (1, 1, \dots, 1)$, que denotaremos por $\{v\} = \{1\}$, pertence à região física uma vez que corresponde a $(x_1, x_2, \dots, x_{\bar{N}}) = (0, 0, \dots, 0)$, (ou $\{x\} = \{0\}$). Das relações (IV.42b) vemos que perto desse ponto todas as variáveis v_r , $r = 1, 2, \dots, \bar{N}$ são relevantes já que as trajetórias se afastam dele à medida que a transformação é iterada, dirigindo-se para $\{v\} = \{0\}$ (ou, no espaço dos x 's, $\{x\} = \{1\}$). Uma vez que $\{v\} = \{1\}$ corresponde a $T = 0$ concluímos que a transição de fase dos modelos $Z(N)$ em estudo se dá a temperatura zero. O ponto fixo $\{v\} = \{0\}$ para o qual convergem todas as trajetórias do interior do hipercubo representa $T = \infty$ e o fato de ser completamente destituído de operadores relevantes pode ser usado, como no caso $N = 4$, para se obter uma expressão para a energia livre, exata para $T \neq 0$ (ver apêndice D), que concorda com o resultado do Capítulo II.

Vamos expandir as relações de recorrência (IV.42b) em torno de $\{v\} = \{1\}$ (os outros pontos fixos serão vistos mais tarde para valores particulares de N). Chamando

$$\Delta v_r = 1 - v_r \quad (\text{IV.45})$$

vemos que

$$\Delta v_r' \approx b \Delta v_r \quad (\text{IV.46})$$

perto do ponto fixo. Portanto os auto valores são

$$\Lambda_r = b \quad ; \quad \lambda_r = 1 \quad (\text{IV.47})$$

existindo $\bar{N}$ campos críticos relevantes, como dissemos acima. Um tal número de parâmetros relevantes era esperado se lembrarmos que o $Z(N)$ possui $\bar{N}$ funções de correlação distintas, cada uma originando um comprimento de correlação os quais são capazes de, independentemente, tirar o sistema da criticalidade.

Se agora olharmos a expressão (IV.42a) veremos que, perto do ponto fixo acima, $\phi_b \approx 1$ e portanto, definindo

$$z \approx \exp \left[-(C^{(0)} + K_1^{(0)} + \dots + K_{\bar{N}}^{(0)}) \right] \quad (\text{IV.48})$$

teremos, de (IV.43);

$$z' \approx z^b \quad (\text{IV.49})$$

Tomando o logarítmo vem que:

$$(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}})' \approx b(C^{(0)} + K_1^{(0)} + \dots + K_{\bar{N}}^{(0)}) \quad (\text{IV.50})$$

o que confirma nossa observação acerca do auto valor do termo constante ser da forma b^d .

Se interpretarmos a relação acima pensando na temperatura como não sendo afetada pela transformação, teremos, por iteração

$$(E + J_1 + \dots + J_{\bar{N}})^{(l)} \approx b^l (E^{(0)} + J_1^{(0)} + \dots + J_{\bar{N}}^{(0)}) \quad (\text{IV.51})$$

e escolhendo $E^{(0)} = -(J_1^{(0)} + J_2^{(0)} + \dots + J_{\bar{N}}^{(0)})$ o que equivale a fa-

zer o estado fundamental igual a zero, obteremos

$$E^{(\ell)} \approx -(J_1^{(\ell)} + J_2^{(\ell)} + \dots + J_{\bar{N}}^{(\ell)}) \quad (\text{IV.52})$$

o que mostra que, perto do ponto fixo, a energia do estado fundamental permanecerá nula na região linear. Dessa maneira evitamos considerações sobre o termo constante na energia livre naquela região. Com essa escolha e usando as relações básicas de recorrência, equações (III.9) e (III.10), para a energia livre e função de correlação, respectivamente, podemos escrever, parametrizando essas funções em termos de $\{\Delta v_r\}$:

$$f(\{\Delta v_r\}) \approx b^{-\ell} f(\{b^{\ell} \Delta v_r\}) \quad (\text{IV.53a})$$

e

$$G(R, \{\Delta v_r\}) \approx G(R/b^{\ell}, \{b^{\ell} \Delta v_r\}) \quad (\text{IV.53b})$$

onde iteramos ℓ vezes a transformação.

Escolhendo ℓ tal que $b^{\ell} \Delta v_p = k \ll 1$, de forma a permanecer dentro do regime linear, vem que

$$f(\Delta v_1, \Delta v_2 \dots \Delta v_{\bar{N}}) \approx \Delta v_p Y_p \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta v_p}, \dots, \frac{\Delta v_{p-1}}{\Delta v_p}, \frac{\Delta v_{p+1}}{\Delta v_p}, \dots, \frac{\Delta v_{\bar{N}}}{\Delta v_p} \right) \quad (\text{IV.54a})$$

e

$$G(R, \Delta v_1, \Delta v_2 \dots \Delta v_{\bar{N}}) \approx D_p \left(R \Delta v_p, \frac{\Delta v_1}{\Delta v_p}, \dots, \frac{\Delta v_{p-1}}{\Delta v_p}, \frac{\Delta v_{p+1}}{\Delta v_p}, \dots, \frac{\Delta v_{\bar{N}}}{\Delta v_p} \right) \quad (\text{IV.54b})$$

onde as funções de escala são dadas por

$$Y_p(\{u\}) = \frac{1}{k} f(ku_1, \dots, ku_{p-1}, k, ku_{p+1}, \dots, ku_{\bar{N}}) \quad (\text{IV.55a})$$

e

$$D_p(s, \{u\}) = G(s/k, ku_1 \dots ku_{p-1}, k, ku_{p+1}, \dots, ku_{\bar{N}}) \quad (\text{IV.55b})$$

Identificando, em (IV.54b) a combinação de escala $R\Delta v_p = R/\xi_p$ obtemos os comprimentos de correlação:

$$\xi_p \approx 1/\Delta v_p, \quad p = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (\text{IV.56})$$

que, perto de $\Delta v_p = 0$, podem ser aproximados por

$$\begin{aligned} \xi_p &\approx \frac{1}{\ln(1/v_p)} \\ &\approx \frac{1}{\ln(\lambda_N/\lambda_p)} \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

que concorda com a expressão exata (II.44).

No que diz respeito aos expoentes críticos, notemos que a definição usual

$$\Delta f = f - f_c \propto t^{2-\alpha} \quad (\text{IV.58a})$$

$$\chi(T) \propto t^{-\gamma} \quad (\text{IV.58b})$$

$$\xi \propto t^{-\nu} \quad (\text{IV.58c})$$

onde $t = (T - T_c)/T_c$, não é adequada para transições ocorrendo a temperatura zero. Por isso vamos definir expoentes críticos reduzidos⁵ em termos do comprimento de correlação, i.e.:

$$\Delta f \propto \xi^{-(2-\alpha)/\nu} \quad (\text{IV.59a})$$

$$\chi(T) \propto \xi^{\gamma/\nu} \quad (\text{IV.59b})$$

Note-se que se substituirmos t por $T - T_c = T$ nas expres

sões (IV.58), chegaremos à conclusão de que $2-\alpha$, γ e ν são iguais a ∞ .

De (IV.56), (IV.54a) e (IV.59a) obtemos

$$\frac{2-\alpha_p}{\nu_p} = 1 \quad (\text{IV.60})$$

e reescrevendo (II.48) em termos de Δv ou seja

$$\begin{aligned} \chi_p(T) &= \frac{1}{K_B T} (1 + \nu_p) / (1 - \nu_p) \\ &= \frac{1}{K_B T} (2 - \Delta \nu_p) / (\Delta \nu_p) \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

chegaremos a $\gamma_p = \nu_p$.

Portanto, de (IV.60):

$$\begin{aligned} 2 - \alpha_p &= \gamma_p = \nu_p \\ p &= 1, 2, \dots, \bar{N} \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

Como na transformação que estamos efetuando o fator de reescala dos spins $c[\bar{H}]$ é constante e unitário, podemos obter de (III.36) o valor do expoente crítico η :

$$\begin{aligned} \eta_p &= 1 \\ p &= 1, 2, \dots, \bar{N} \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

que concorda com o resultado exato para a função de correlação, $G_p(R) = (\lambda_p/\lambda_N)^R$, se lembrarmos a definição de η , ou seja,

$$G_{\text{crítico}} \approx 1/R^{d-2+\eta} \quad (\text{IV.64})$$

Os resultados (IV.62) e (IV.63) foram obtidos por Nelson e Fischer⁵ no caso $N=2$ ($p=1$).

Note-se que as relações acima para os expoentes críticos concordam com as relações de escala $d\nu = 2-\alpha$ e $\gamma = (2-\eta)\nu$.

O fato de existirem $\bar{N}$ possibilidades para cada um dos índices críticos está, naturalmente, ligado às diferentes orientações das variáveis de spin. Se for possível construir um campo de temperaturas que faça distinção entre essas orientações, certamente seremos capazes de observar $\bar{N}$ valores de α . Quanto aos outros expoentes será necessário um feixe de neutrons que possa sentir diferentemente as diferentes orientações dos momentos magnéticos daquelas variáveis.

As previsões de escala da teoria de grupos de renormalização devem ser comparadas com as soluções exatas do Capítulo II. Para isso vamos escrever a energia livre, equação (II.22) como:

$$f(\{v_r\}) = \ln \frac{N}{\sum_n v_n} \quad (\text{IV.65})$$

onde usamos (II.23) e (IV.44).

Note-se que em (II.22) está implícito que o termo constante foi escolhido de maneira a fazer o estado fundamental igual a zero, como se pode ver de (II.6a) e (II.6b).

A energia livre, parametrizada em termos dos campos de escala Δv_r , fica:

$$\begin{aligned} f(\{\Delta v_r\}) &= \ln \frac{N}{N - \left[2\Delta v_1 + 2\Delta v_2 + \dots + \frac{3-(-)^N}{2} \Delta v_{\bar{N}} \right]} \\ &\approx \frac{1}{N} \left(2\Delta v_1 + 2\Delta v_2 + \dots + \frac{3-(-)^N}{2} \Delta v_{\bar{N}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.66})$$

onde a última passagem é válida perto do ponto fixo. Dessa maneira identificamos a função de escala em (IV.54a) como

$$Y_p(\{u\}) = \frac{1}{N} \left(2u_1 + 2u_2 + \dots + 2 + \dots + \frac{3-(-)^N}{2} u_{\bar{N}} \right) \quad (\text{IV.67})$$

Por outro lado, as funções de correlação são dadas por (B.8) e podem ser escritas

$$\begin{aligned} G_r &= (v_r)^R \\ &= (1 - \Delta v_r)^R \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

ou, perto do ponto fixo:

$$G_r \simeq R \Delta v_r \quad (\text{IV.69})$$

Então

$$D_p(s, \{u\}) = R s \quad (\text{IV.70})$$

Para identificar, dentro do formalismo da teoria de grupos de renormalização, a função de correlação à qual ξ_p está associado, vamos fazer uma mudança de variáveis, desta vez nas variáveis de spin:

$$S_i S_{i+1}^\dagger = \sigma_i \quad (\text{IV.71a})$$

$$S_j = \prod_{n \leq j} \sigma_n \quad (\text{IV.71b})$$

Vamos considerar N muito grande de maneira que não precisaremos nos incomodar com os spins situados nas extremidades do sistema. Em termos de σ_i a Hamiltoniana

$$\bar{H} = \sum_i \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} K_m \left[(S_i S_{i+1}^\dagger)^m + (S_i^\dagger S_{i+1})^{m-2} \right] \quad (\text{IV.72})$$

se escreve:

$$\bar{H} = \sum_i \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} K_m \left[\sigma_i^m + (\sigma_i^\dagger)^m - 2 \right] \quad (\text{IV.73})$$

onde omitimos o til nos índices das novas variáveis. Como σ_i assume os N valores das raízes da unidade, ou seja,

$$\sigma_i = \exp(2\pi i n_i / N) \quad (\text{IV.74})$$

$$n_i = 0, 1 \dots N-1$$

teremos

$$\bar{H} = \sum_i \sum_{m=1}^{\bar{N}} K_m \left[\cos(2\pi m n_i / N) - 1 \right] \quad (\text{IV.75})$$

Portanto a função de correlação pode ser escrita como

$$G_p(R, \{K\}) = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma_i\}} (\sigma_1^\dagger)^p (\sigma_2^\dagger)^p \dots (\sigma_R^\dagger)^p e^{\bar{H}} \quad (\text{IV.76})$$

Agora faremos a transformação somando sobre $b-1$ spins situados entre dois spins externos, supondo que aqueles localizados nos sítios 0 (zero) e R não são removidos pela dedecoração. No denominador teremos

$$(1 + x_1 + \dots + x_{N-1})^{N(b-1)/b} = \lambda_N^{N(b-1)/b} \quad (\text{IV.77})$$

onde a potência indica o número de spins que são dedecorados. No numerador existem dois casos:

a) os spins removidos não se localizam entre os sítios 0 (zero) e R . Teremos:

$$(1 + x_1 + \dots + x_{N-1})^{(N-R)(b-1)/b} = \lambda_N^{(N-R)(b-1)/b} \quad (\text{IV.78})$$

b) os spins removidos estão localizados entre aqueles sítios. Teremos:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{\sigma} (\sigma^\dagger)^p \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} K_m \left[\sigma^m + (\sigma^\dagger)^m - 2 \right] \right\} \right]^{R(b-1)/b} = \\ & = \left[\sum_n e^{2\pi i p n / N} x_n \right]^{R(b-1)/b} \\ & = (\lambda_p)^{R(b-1)/b} \quad (\text{IV.79}) \end{aligned}$$

Então a função de correlação fica

$$G_p(R, \{v\}) = (\lambda_p / \lambda_N)^{R(b-1)/b} G_p(R/b, \{v\}) \quad (\text{IV.80})$$

e iterando ℓ vezes vem que

$$G_p(R, \{v\}) = (v_p)^{R(1-1/b^\ell)} G_p(R/b^\ell, \{v\}) \quad (\text{IV.81})$$

Agora escolhemos ℓ tal que $b^\ell = R$ e ficamos com

$$\begin{aligned} G_p(R, \{v\}) &= (v_p)^{R(1-1/R)} G_p(1, \{v\}) \\ &= \exp \left[\frac{-R[1-1/R]}{[\ln(1/v_p)]^{-1}} \right] G_p(1, \{v\}) \\ &\approx \exp \left[\frac{-R}{[\ln(1/v_p)]^{-1}} \right] G_p(1, \{v\}) \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

onde o último passo é válido perto de $T=0$ (lembramos que nessa região $[\ln(1/v_p)]^{-1}$ diverge). Como toda a dependência em R está na exponencial, podemos identificar o comprimento de correlação associado a $G_p(R, \{v\})$ como sendo

$$\begin{aligned} \xi_p &\approx 1/\ln(1/v_p) \\ &\approx 1/\ln(\lambda_N/\lambda_p) \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

o que completa o quadro de informações oriundos da teoria de grupos de renormalização na região crítica em torno de $\{v\} = \{1\}$.

IV.5 - Casos Particulares

Vamos estudar o fluxo do grupo de renormalização no espaço dos parâmetros dos modelos $Z(N)$ com Hamiltoniana dada por (IV.3), para valores particulares de N em termos dos pesos estatísticos x_θ e das variáveis v_r ($-1 \leq v_r \leq +1$) definidos por (II.19) e (IV.26) respectivamente.

IV.5.1 - $Z(2)$

O caso $N=2$ já foi objeto de estudo⁵ inclusive com campo magnético. Vamos incluí-lo aqui apenas por completeza.

O espaço de parâmetros é unidimensional com peso estatístico

$$x_1 = e^{-2K_1} \quad (\text{IV.84})$$

e o modelo mais geral é o Potts escalar $Z(2)$ (modelo de Ising). A variável v_1 é dada por

$$v_1 = (1 - x_1)/(1 + x_1) \quad (\text{IV.85})$$

e existe uma região ferromagnética ($0 < x_1 < 1$ ou $v_1 > 0$) e uma antiferromagnética ($x_1 > 1$ ou $v_1 < 0$). As relações de recorrência são

$$v'_1 = v_1^b \quad (\text{IV.86a})$$

$$\phi_b = 2^{b-1} (1 + v_1^b)/(1 + v_1)^b \quad (\text{IV.86b})$$

onde

$$\phi_b = e^{C' + K'_1} / e^{b(C + K_1)} \quad (\text{IV.87})$$

e existe um ponto fixo ferromagnético $v_1^* = +1$ ($T=0$, $J_1 > 0$), um antiferromagnético (para b ímpar) $v_1^* = -1$ ($T=0$, $J_1 < 0$) e um paramagnético $v_1^* = 0$ ($T=\infty$ ou, equivalentemente, $J_1 = 0$). À medida que a transformação é iterada, a Hamiltoniana descreve uma trajetória cu

ja direção está mostrada na Figura IV.5.

FIG. IV.5 - Diagrama de fluxo do $Z(2)$ em termos de $v_1 = (1-x_1)/(1+x_1)$. A região $v_1 > 0$ é ferromagnética e $v_1 < 0$ antiferromagnética. Os pontos indicados são pontos fixos e as setas indicam a direção do fluxo.

Note-se que para valores pares de b , se começarmos com um ponto na região antiferromagnética ($v_1 < 0$), tal ponto será mapeado na região ferromagnética ($v_1 > 0$) após a primeira iteração. Isso ocorre porque, mesmo no caso não ferromagnético, a interação entre spins distando um número par de parâmetros da rede um do outro tem caráter ferromagnético.

A região próxima de $v_1^* = +1$ foi estudada genericamente na seção anterior em termos de $\Delta v_1 = 1 - v_1$ onde obtivemos que o comprimento de correlação diverge como

$$\xi \approx 1/\Delta v_1 \approx e^{2K_1} \quad (\text{IV.88})$$

com expoentes críticos tais que

$$2 - \alpha = \gamma = \nu \quad (\text{IV.89a})$$

$$\eta = 1 \quad (\text{IV.89b})$$

resultados que já eram de nosso conhecimento⁵. Perto de $v_1^* = -1$ (b

ímpar) vemos que $\phi_b \rightarrow \infty$ e portanto o termo constante deveria, em princípio, ser levado em conta na relação de recorrência para a energia livre. Entretanto, se em (IV.87) fizermos

$$\begin{aligned}\phi_b &= \frac{e^{C'-K'_1}}{e^{b(C-K_1)}} \frac{e^{2K'_1}}{e^{2bK_1}} \\ &= \frac{e^{C'-K'_1}}{e^{b(C-K_1)}} \frac{x_1^b}{x_1'} \\ &= \frac{e^{C'-K'_1}}{e^{b(C-K_1)}} \frac{[(1-v_1)/(1+v_1)]^b}{(1-v_1^b)/(1+v_1^b)}\end{aligned}\quad (\text{IV.90})$$

teremos, usando (IV.86b),

$$\frac{e^{C'-K'_1}}{e^{b(C-K_1)}} \approx 1 \quad (\text{IV.91})$$

perto de $v_1^* = -1$. Então, analogamente ao que fizemos para $Z(N)$ em geral, escolhendo

$$E^{(0)} = J_1^{(0)} \quad (\text{IV.92})$$

vem que

$$E^{(\ell)} \approx J_1^{(\ell)} \quad (\text{IV.93})$$

na região linear. Note-se que a Hamiltoniana (IV.1) se escreve, com essa escolha:

$$H = - \sum_i J_1 \left[\cos[\pi(n_i - n_{i+1})] + 1 \right] \quad (\text{IV.94})$$

Como $J_1 < 0$, o estado fundamental é antiferromagnético (corresponde a $n_i - n_{i+1} = 1$) e (IV.93) implica em fazer a energia

desse estado igual a zero. Dessa maneira não teremos que nos preocupar com o termo constante na energia livre. Ao que parece o valor da energia do estado fundamental, mesmo para $N > 2$ (testamos também para $N = 4$), se mantém nulo na região linear se o fizermos nulo antes da transformação mediante uma escolha apropriada do termo constante. Por isso esse termo não mais será analisado daqui para a frente.

Usando

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= 1 + v_1 \\ &= 1 - |v_1|\end{aligned}\tag{IV.95}$$

teremos, perto de $v_1^* = -1$,

$$\Delta v_1' \approx b \Delta v_1\tag{IV.96}$$

e portanto seguem-se, para esta região, os mesmos resultados obtidos para a região linear próxima de $v_1^* = +1$, os quais concordam com a solução exata do Capítulo II.

A redefinição da variável de escala da maneira acima não afeta as relações entre os expoentes críticos, que continuarão sendo dadas por (IV.89a) e (IV.89b). Em geral, se para um dado ponto fixo alguma coordenada, digamos v_q , é negativa (i.e., $v_q = -1$), definimos $\Delta v_q = 1 + v_q$ e as relações (IV.62) e (IV.63) serão obtidas para $p = q$. Por isso situações análogas não serão discutidas nos próximos exemplos.

Note-se que quando $v_1 < 0$, $G(R)$ se alterna entre valores positivos (R par) e negativos (R ímpar), o que é natural numa região antiferromagnética.

IV.5.2 - $Z(3)$

Para $N = 3$ o modelo mais geral é ainda um Potts escalar com espaço de parâmetros unidimensional e peso estatístico

$$x_1 = e^{-3K_1/2} \quad (IV.97)$$

A variável v_1 é dada por

$$v_1 = (1-x_1)/(1+2x_1) \quad (IV.98)$$

e existe uma região ferromagnética ($0 < x_1 < 1$ ou $v_1 > 0$) e uma antiferromagnética ($x_1 > 1$ ou $v_1 < 0$). As relações de recorrência são

$$v'_1 = v_1^b$$

$$\phi_b = 3^{b-1} (1+2v_1^b) / (1+2v_1)^b \quad (IV.99)$$

com

$$\phi_b = \frac{\exp(C' + K'_1)}{\exp[b(C+K)]} \quad (IV.100)$$

A Figura IV.6 mostra o espaço de parâmetros (em termos de v_1) cuja região física se situa entre $-1/2$ e $+1$, implicando na não existência de ponto fixo antiferromagnético. Isso acontece porque no $Z(3)$, mesmo a $T=0$, as interações entre segundos, terceiros vizinhos, etc, não têm, necessariamente, caráter antiferromagnético. Para ver isso basta fixar um spin e olhar para o segundo, terceiro vizinho, etc; estes podem estar apontando no mesmo sentido que o spin fixado. Portanto uma transformação com $b=2$, $b=3$, etc, não levaria a um sistema com interações de caráter totalmente antiferromagnético como o original, e assim $T=0$ não é ponto fixo da transformação.

FIG. IV.6 - Diagrama de fluxo do $Z(3)$. A região física está entre $-1/2$ e $+1$ e os pontos fixos são $v_1^* = +1$ ($T = 0$) e $v_1^* = 0$ ($T = \infty$). Não há ponto fixo antiferromagnético.

A região próxima de $v_1^* = +1$ já foi estudada (ver caso geral) e fornece,

$$\begin{aligned} \xi &\approx 1/\Delta v_1 \\ &\approx e^{3K/2} \end{aligned} \quad (\text{IV.101})$$

para o comprimento de correlação; os expoentes críticos se relacionam como no $Z(2)$, equações (IV.89a) e (IV.89b), resultados que concordam com a solução exata.

IV.5.3 - $Z(4)$

Neste caso temos um espaço de parâmetros bidimensional com pesos

$$x_1 = e^{-K_1 - 2K_2} \quad (\text{IV.102a})$$

$$x_2 = e^{-2K_1} \quad (\text{IV.102b})$$

e variáveis v_1 e v_2 dadas por

$$v_1 = (1 - x_2) / (1 + 2x_1 + x_2) \quad (\text{IV.103a})$$

$$v_2 = (1 - 2x_1 + x_2) / (1 + 2x_1 + x_2) \quad (\text{IV.103b})$$

As relações de recorrência são

$$v_1' = v_1^b \quad (\text{IV.104a})$$

$$v_2' = v_2^b \quad (\text{IV.104b})$$

$$\phi_b = 4^{b-1} \frac{(1 + 2v_1^b + v_2^b)}{(1 + 2v_1 + v_2)^b} \quad (\text{IV.104c})$$

onde

$$\phi_b = \frac{\exp[C' + K_1' + K_2']}{\exp[b(C + K_1 + K_2)]} \quad (\text{IV.105})$$

Da solução exata vemos que as funções de correlação as sociadas a $\langle S_O S_R^\dagger \rangle$ e $\langle (S_O S_R^\dagger)^2 \rangle$ são, respectivamente,

$$G_1(R) = (v_1)^R \quad (\text{IV.106a})$$

e

$$G_2(R) = (v_2)^R \quad (\text{IV.106b})$$

e, de (IV.102), os caminhos termodinâmicos são dados por

$$x_2 = x_1^\rho \quad (\text{IV.107a})$$

onde

$$\rho = \frac{2}{1 - 2J_2/J_1} \quad (\text{IV.108b})$$

Na figura IV.7 mostramos a região física do $Z(4)$ no plano (v_1, v_2) , bem como indicamos os pontos fixos da transformação para b ímpar (ver Tab. IV.1). Com exceção da origem $(0,0)$ onde $T = \infty$ esses pontos fixos representam $T = 0$. Algumas linhas de fluxo no caso $b = 3$ estão também indicadas na figura.

Os eixos coordenados da figura IV.7 separam as regiões ferro e antiferromagnéticas que definimos através dos sinais dos v 's: se um ponto possuir ambas as coordenadas positivas, nesse ponto o sistema é ferromagnético; se pelo menos uma das coordenadas

FIG. IV.7 - Diagrama de fluxo do $Z(4)$ no plano (v_1, v_2) . O triângulo delimita a região física onde estão indicadas as regiões ferro (F) e antiferromagnéticas (A) separadas pelos eixos. Algumas linhas de fluxo para $b=3$ e os pontos fixos ($\circ$) estão indicados. Na origem $T=\infty$ e nos pontos fixos restantes $T=0$.

for negativa ocorre antiferromagnetismo. Esse critério nos parece adequado uma vez que $v_r < 0$ significa que $G_r(R) = (v_r)^R$ se alterna entre valores positivos (R par) e negativos (R ímpar) indicando que vizinhos ímpares tendem a se orientar de maneira não ferromagnética. Por exemplo, lembrando que $G_r \propto (S_0 S_R)^r$, se $G_1(R) > 0$ para todo R e $G_2(R)$ oscila com R (portanto $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$), então dois vizinhos próximos (R ímpar) se orientarão de maneira a desfavorecer, em média, a formação de um ângulo de 180° entre eles (porque $S_0 S_1^\dagger < 0$ se S_0 e S_1 formam um ângulo de 180° entre si). Assim, em média, spins vizinhos oscilam apenas num hemisfério. A esta e outras situações análogas damos o nome de antiferromagnetismo uma vez que diferem do caso ferromagnético ($v_r > 0$, $r = 1, 2$) onde ambas as funções de correlação são positivas de maneira que vizinhos pró

ximos tendem a se alinhar na mesma direção (ângulo de 0° entre si). Esse critério para separar as regiões ferro e antiferromagnéticas se adapta aos modelos $Z(2)$ e $Z(3)$ (i.e., para esses modelos $G(R)>0$ para todo R na região ferromagnética e oscilante com R na região antiferromagnética) onde ferro e antiferromagnetismo são bem distinguidos uma vez que existe apenas uma constante de acoplamento. Por outro lado podemos verificar se o critério é adequado também nos pontos onde $T=0$. Nesses pontos não é necessário considerar o fator de entropia e assim considerações energéticas (em termos dos pesos estatísticos) são suficientes para determinar a configuração do sistema. Notemos inicialmente que para spins vizinhos que se orientam formando um ângulo igual a $2\pi m/4$ ($m=0,1,2$) o peso estatístico associado é x_m . Dessa maneira x_1 (x_2) é o peso quando spins vizinhos formam um ângulo igual a $\pi/2$ (π) entre si (o peso estatístico x_0 foi normalizado a 1 - Ver equação II.19). Então, por exemplo no ponto fixo $(v_1^*, v_2^*) = (1,1)$ o peso $x_0 = 1$ predomina sobre os outros ($x_1 = x_2 = 0$ conforme Tab. IV.1) e spins vizinhos apontam na mesma direção (ângulo igual a zero). Daí o sistema ser ferromagnético nesse ponto, o que está de acordo com nosso critério que prevê ferromagnetismo para todo o 1º quadrante da figura IV.7. No ponto $(v_1^*, v_2^*) = (-1,1)$, $x_2 = \infty$ predomina e o sistema adquire uma configuração do tipo antiferromagnética com spins vizinhos formando um ângulo de 180° entre si, ajustando-se também ao critério escolhido. Assim, um a um podemos testar todos os pontos de $T = 0$ e veremos que não há desacordo nenhum com nossa proposta de classificação de ferro e antiferromagnetismo para o modelo.

TABELA IV.1

Pontos fixos do $Z(4)$ para valores ímpares de b .

(v_1^*, v_2^*)	(x_1^*, x_2^*)
$(0, 0)$	$(1, 1)$
$(1, 1)$	$(0, 0)$
$(-1, 1)$	$(0, \infty), (1, \infty)$ ou (∞, ∞) p/ $x_2/x_1 \rightarrow \infty$
$(0, -1)$	$(\infty, 0), (\infty, 1)$ ou (∞, ∞) p/ $x_1/x_2 \rightarrow \infty$
$(0, 1)$	$(0, 1)$

Uma vez que para R par as funções de correlação $G_r(R) = (v_r)^R$, $r=1,2$ são sempre positivas, os vizinhos pares terão sempre a tendência de se orientarem de maneira ferromagnética. Por esse motivo transformações com valores pares de b sempre mapeiam pontos das regiões antiferromagnéticas em pontos na região ferromagnética, como se pode ver das relações de recorrência.

A vizinhança linear do ponto fixo ferromagnético $(v_1^*, v_2^*) = (1,1)$, já foi estudada e fornece para os comprimentos de correlação:

$$\begin{aligned}\xi_1 &\approx 1/\Delta v_1 \\ &= (1 + 2x_1 + x_2)/(2x_1 + 2x_2) \\ &\approx 1/(e^{-2K_1} + e^{-K_1 - 2K_2})\end{aligned}\quad (\text{IV.108a})$$

e

$$\begin{aligned}\xi_2 &\approx 1/\Delta v_2 \\ &\approx e^{K_1 + 2K_2}\end{aligned}\quad (\text{IV.108b})$$

onde $v_p = 1 - v_p$, $p=1,2$ ($K_1, K_1 + 2K_2 \rightarrow +\infty$).

Quanto aos expoentes críticos teremos:

$$2 - \alpha_p = \gamma_p = v_p \quad (\text{IV.108c})$$

$$\eta_p = 1 \quad (\text{IV.108d})$$

Perto de $(v_1^*, v_2^*) = (-1, +1)$ (onde $-K_1 \rightarrow \infty$, $x_2/x_1 \rightarrow \infty$), mudando a definição de Δv_1 para

$$\Delta v_1 = 1 + v_1 \quad (\text{IV.109})$$

como fizemos no $Z(2)$, obtemos

$$\begin{aligned}\xi_1 &\approx 1/\Delta v_1 \\ &= (1 + 2x_1 + x_2)/(2 + 2x_1)\end{aligned}$$

$$\approx x_2 = e^{|2K_1|} \quad (\text{IV.110a})$$

e

$$\begin{aligned} \xi_2 &\approx 1/\Delta v_2 \\ &\approx x_2/x_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.110b})$$

Nos pontos fixos restantes onde $v_1^* = 0$ e $v_2^* = \pm 1$ devemos notar que (ver tabela IV.1):

- 1) $(v_1^*, v_2^*) = (0, +1) \Leftrightarrow (x_1^*, x_2^*) = (0, +1)$. Neste caso $J_1 = 0$, $J_2 > 0$ e portanto $v_1 = 0$ enquanto a temperatura varia desde 0 até $+\infty$ (levando o sistema para $(v_1^*, v_2^*) = (0, 0)$ ou seja, $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$);
- 2) $(v_1^*, v_2^*) = (0, -1) \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = (\infty, 0), (=, 1)$ ou (∞, ∞) , este desde que $x_2/x_1 \rightarrow 0$. Aqui a variável v_1 não está vinculada ao valor crítico $v_1^* = 0$ à medida que T vai para infinito. Entretanto haverá sempre a tendência de "puxar" o sistema para o eixo $v_1 = 0$ uma vez que $v_1' = v_1^b$ (e $|v_1| < 1$).

Neste último caso não achamos conveniente classificar o campo v_1 como irrelevante já que ele se pode assumir valores diferentes de zero se v_2 também se afastar do seu valor crítico. Entretanto, irrelevante ou não, o fato de ir a zero rapidamente nos permite usar o argumento delineado após (III.26) resultando:

$$\text{CASO 1 - } J_1 = 0, J_2 > 0, \Delta v_2 = 1 - v_2$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &\approx 1/\Delta v_2 \\ &= (1 + 2x_1 + x_2)/(4x_1) \\ &\approx 1/x_1 = e^{2K_2} \end{aligned} \quad (\text{IV.111})$$

$$\text{CASO 2} - J_1 + 2J_2 < 0, \quad v_2 = 1 + v_2$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &\approx 1/\Delta v_2 \\ &= (1+2x_1+x_2)/(2+2x_2) \\ &\approx x_1 = e^{|K_1+2K_2|} \end{aligned} \quad (\text{IV.112})$$

Quanto aos expoentes críticos, as relações (IV.108c) e (IV.108d) são ainda válidas mas apenas para $p=2$ uma vez que somente a variável v_2 é relevante.

Se agora escrevermos as variáveis $Z(4)$ em termos de variáveis de Ising⁷, i.e.,:

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\pi/4} \sigma_i + e^{i\pi/4} \tau_i \right] \quad (\text{IV.113})$$

a Hamiltoniana do modelo $Z(4)$ pode ser escrita como

$$H = - \frac{J_1}{2} \sum_i \left[\sigma_i \sigma_{i+1} + \tau_i \tau_{i+1} \right] - J_2 \sum_i \sigma_i \tau_i \sigma_{i+1} \tau_{i+1} \quad (\text{IV.114})$$

e quando $J_1 = 0$ a transformação $\sigma\tau \rightarrow \sigma'$ fornece

$$Z_4(J_1 = 0) = 2^N Z_2(J_2) \quad (\text{IV.115})$$

mostrando que o sistema se comporta como um modelo de Ising na variável $\sigma' = s^2$. Portanto devemos esperar um comportamento crítico tipo Ising perto dos pontos onde $J_1 = 0$ ($v_1 = 0$), o que pode ser confirmado através de (IV.111).

Quando $J_2 = 0$ vemos que, de (IV.114), temos dois modelos de Ising não interagentes com constante de acoplamento igual a $J_1/2$. O caminho termodinâmico correspondente será definido por

$\rho = 2$, ou seja,

$$x_2 = x_1^2 \quad (\text{IV.116})$$

o que implica em

$$v_2 = v_1^2 \quad (\text{IV.117})$$

Note-se que se começarmos com um ponto sobre essa curva a trajetória (descontínua) descrita pela Hamiltoniana quando iteramos as transformações de dedecoração andarã sobre tal curva, como é natural uma vez que as transformações são exatas e não levam o $Z(2)$ a outros modelos. Também $\xi_1 \approx \xi_2 \approx e^{K_1}$ (de (IV.108a) e (IV.108b)) para $J_2 = 0$, como se espera para um modelo de Ising com constante de acoplamento $J_1/2$.

Quando $J_2 \rightarrow \infty$ ($x_1 = 0$), devemos ter

$$\sigma_i \sigma_{i+1} = \tau_i \tau_{i+1} \quad (\text{IV.118})$$

pois seria preciso uma quantidade infinita de energia para violar tal condição. Nesse caso a Hamiltoniana (IV.114) pode ser escrita

$$H(J_2 \rightarrow \infty) = -J_1 \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (\text{IV.119a})$$

$$= -J_1 \sum_i \tau_i \tau_{i+1} \quad (\text{IV.119b})$$

que é equivalente a um modelo de Ising. O caminho termodinâmico correspondente sai de $(v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$ ou $(v_1^*, v_2^*) = (-1, +1)$ e anda sobre a reta $v_2 = 1$ enquanto $J_2/T \rightarrow \infty$. Quando $J_2/T \rightarrow 0$ o sistema é imediatamente jogado em $(v_1^*, v_2^*) = (0, 0)$.

No caso $x_1 = x_2$ (modelo Potts), teremos

$$v_1 = v_2 = (1-x)/(1+3x) \quad (\text{IV.120})$$

onde $x = e^{-2K_1} = e^{-4K_2}$. Naturalmente a trajetória estará sobre o

caminho termodinâmico do Potts se o ponto inicial estiver sobre ele, como se pode ver das relações de recorrência. Neste caso teremos

$$\xi_1 = \xi_2 = e^{2K_1} \quad (\text{IV.121})$$

Queremos também salientar que, como ocorreu no $Z(3)$, existem pontos de temperatura zero $((x_1, x_2) = (1, 0)$ e $x_1 = x_2 = \infty$, i.e., $(v_1, v_2) = (1/3, -1/3)$ e $(v_1, v_2) = (-1/3, -1/3)$, respectivamente), que não são pontos fixos de transformação. Podemos entender isso elaborando um pouco mais o argumento apresentado no $Z(3)$: lembrando que $x_0 = 1$ e que em $T = 0$ não é preciso se preocupar com o fator de entropia, se olharmos por exemplo para $(x_1, x_2) = (1, 0)$ veremos que nesse ponto as únicas configurações proibidas são aquelas em que vizinhos mais próximos estão orientados antiparalelamente (pois $x_2 = 0$) o que não impede, entretanto, que vizinhos mais distantes, e.g. segundos, terceiros vizinhos, etc., se orientem dessa maneira. Assim um traço parcial que remova as variáveis situadas entre tais spins (o que equivale a efetuar uma transformação de dedecoração com um valor apropriado de b) levará a um estado com $x_2 > 0$ uma vez que o acoplamento efetivo entre as variáveis remanescentes favorece tal configuração, tirando o sistema do ponto onde $x_2 = 0$. O mesmo argumento se aplica, com algumas mudanças, a $x_1 = x_2 = \infty$ bem como a outras situações semelhantes que encontraremos mais adiante.

Finalmente queremos chamar a atenção para o seguinte fato: existem caminhos termodinâmicos que, a $T \neq 0$, cruzam a fronteira entre duas regiões, cada uma exibindo um tipo de comportamento para a função de correlação $G_2(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle (S_0 S_R^\dagger)^2 \rangle$. Por exemplo, para $p > 2$ (ver equação (IV.107)), variando a temperatura desde $T = 0$ ($x_1^* = x_2^* = 0$) até $T = \infty$ ($x_1^* = x_2^* = 1$), os caminhos termodinâmicos cruzam a reta $1 - 2x_1 + x_2 = 0$ para algum valor finito da

temperatura (ver figura IV.8). Portanto a função de correlação $G_2(R)$ passa de $G_2(R) = (|v_2|)^R$ para $G_2(R) = (-1)^R (|v_2|)^R$ (o que lembra o modelo XY bidimensional onde também não há quebra espontânea de simetria mas existe uma transição de fase devido a comportamentos diferentes da função de correlação a baixas e altas temperaturas).

FIG. IV.8 - Caminhos termodinâmicos (CT) do $Z(4)$ para $\rho > 2$ cruzando a reta $1 - 2x_1 + x_2 = 0$ (onde $G_2(R) = 0$).

Entretanto, uma vez que o comprimento de correlação permanece finito (na verdade $\xi_2 = 0$) no ponto de fronteira, não existe correlação de longo alcance e portanto não há possibilidade de transição de fase no sentido usual (com invariança por transformações de escala, singularidades, expoentes críticos, etc.).

IV.5.4 - $Z(5)$

O espaço de parâmetros é bidimensional, como no $Z(4)$, com pesos

$$x_1 = \exp \left[-K_1 \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1 \right) - K_2 \left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1 \right) \right] \quad (\text{IV.122a})$$

$$x_2 = \exp \left[-K_1 \left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1 \right) - K_2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1 \right) \right] \quad (\text{IV.122b})$$

e variáveis v_1 e v_2 dadas por

$$v_1 = \frac{1 + 2x_1 \cos \frac{2\pi}{5} + 2x_2 \cos \frac{4\pi}{5}}{1 + 2x_1 + 2x_2} \quad (\text{IV.123a})$$

$$v_2 = \frac{1 + 2x_1 \cos \frac{4\pi}{5} + 2x_2 \cos \frac{2\pi}{5}}{1 + 2x_1 + 2x_2} \quad (\text{IV.123b})$$

As funções de correlação se escrevem

$$G_1(R) = (v_1)^R \quad (\text{IV.124a})$$

e

$$G_2(R) = (v_2)^R \quad (\text{IV.124b})$$

Podemos obter a região física no espaço dos v 's (ver figura IV.9) impondo $x_1, x_2 \geq 0$. Os caminhos termodinâmicos obedecem a uma expressão do tipo $x_2 = x_1^{\bar{\rho}}$ (comparar com (IV.107)) onde

$$\bar{\rho} = \frac{\left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1 \right) + \frac{J_2}{J_1} \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1 \right)}{\left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1 \right) + \frac{J_2}{J_1} \left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1 \right)} \quad (\text{IV.125})$$

e as regiões ferro e antiferromagnéticas do $Z(5)$ têm o mesmo aspecto das regiões análogas do $Z(4)$. A diferença essencial, na verdade, entre esses dois casos, reside no fato de que aqui, como no $Z(3)$, existem apenas dois pontos fixos qualquer que seja o valor de b : $(v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$ onde $T = 0$ e $(v_1^*, v_2^*) = (0, 0)$ onde $T = \infty$.

Não existem pontos fixos antiferromagnéticos com simetria $Z(5)$ pelas mesmas razões já discutidas anteriormente (ver por exemplo o caso $N = 3$). Por outro lado o $Z(5)$ não pode ser subdividido, ou seja, não existem pontos no espaço de parâmetros que cor

FIG. IV.9 - Diagrama de fluxo do $Z(5)$. Existem apenas dois pontos fixos (pontos cheios): $(v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$ e $(v_1^*, v_2^*) = (0, 0)$. As linhas de fluxo correspondem a $b=2$ e as regiões ferro e antiferromagnéticas estão separadas pelos eixos. Não há ponto fixo antiferromagnético.

respondem a sistemas com simetria $Z(N)$, $N < 5$ (subsimetrias), o que explica o fato de não existirem outros pontos fixos (ferro e antiferromagnéticos) associados a essas subsimetrias.

Perto de $(v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$, i.e., $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ temos (ver caso geral):

$$\begin{aligned} \xi_1 &\approx 1/\Delta v_1 \\ &\approx \frac{1}{x_1 + x_2} \end{aligned} \quad (\text{IV.125a})$$

e

$$\xi_2 \approx 1/\Delta v_2$$

$$\approx \frac{1}{x_1 + x_2} \quad (\text{IV.125b})$$

com expoentes críticos obedecendo às relações (IV.62) e (IV.63) para $p = 1, 2$.

IV.5.5 - Z(6)

Neste caso (e no Z(7) a seguir) vamos apenas identificar os pontos fixos existentes fazendo a devida associação com as subsimetrias eventualmente englobadas pelo modelo. Cálculos no sentido de determinar as divergências apresentadas pelos comprimentos de correlação perto de um dado ponto fixo podem ser facilmente efetuados nos mesmos moldes dos casos anteriores; os expoentes críticos sempre obedecerão às relações (IV.62) e (IV.63) onde p é o índice da variável relevante correspondente.

Para $N = 6$ o espaço de parâmetros é tridimensional com pesos

$$x_1 = \exp \left\{ - \left[K_1/2 + 3K_2/2 + 2K_3 \right] \right\} \quad (\text{IV.127a})$$

$$x_2 = \exp \left\{ - \frac{3}{2} \left[K_1 + K_2 \right] \right\} \quad (\text{IV.127b})$$

$$x_3 = \exp \left\{ -2 \left[K_1 + K_3 \right] \right\} \quad (\text{IV.127c})$$

e as variáveis v_p , $p = 1, 2$ e 3 dadas por

$$v_1 = \frac{1 + x_1 - x_2 - x_3}{1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3} \quad (\text{IV.128a})$$

$$v_2 = \frac{1 - x_1 - x_2 + x_3}{1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3} \quad (\text{IV.128b})$$

$$v_3 = \frac{1 - 2x_1 + 2x_2 - x_3}{1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3} \quad (\text{IV.128c})$$

que se transformam como

$$v'_p = (v_p)^b \quad (\text{IV.129})$$

As funções de correlação se escrevem

$$G_p(R) = (v_p)^R \quad (\text{IV.130})$$

e invertendo as relações (IV.128) podemos obter $x_p(v)$:

$$x_1 = \frac{1 + v_1 - v_2 - v_3}{1 + 2v_1 + 2v_2 + v_3} \quad (\text{IV.131a})$$

$$x_2 = \frac{1 - v_1 - v_2 + v_3}{1 + 2v_1 + 2v_2 + v_3} \quad (\text{IV.131b})$$

$$x_3 = \frac{1 - 2v_1 + 2v_2 - v_3}{1 + 2v_1 + 2v_2 + v_3} \quad (\text{IV.131c})$$

Como sempre, impondo $x_p \geq 0$ encontramos a região física no espaço (v_1, v_2, v_3) mostrada na Figura IV.10 onde não aparecem os pontos fixos e linhas de fluxo para não sobrecarregar a figura.

Os pontos fixos, naturalmente, são os vértices e centros das faces do cubo, devendo ser considerados apenas aqueles situados na região física. Tais pontos fixos estão relacionados na tabela IV.2 juntamente com os pesos estatísticos correspondentes; como anteriormente, a origem corresponde a $T = \infty$ (inteiramente atrativo, como se pode ver das relações de recorrência) e os

pontos fixos restantes a $T=0$.

FIG. IV.10 - Região física do $Z(6)$ no espaço (v_1, v_2, v_3) : os pontos interiores ao tetraedro, bem como os de sua superfície. Os pontos fixos (não indicados na figura) são os vértices e centros das faces do cubo, o qual está centrado na origem das coordenadas.

TABELA IV.2

Pontos fixos no caso $N=6$ (ver figura IV.10). O ponto $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0,0,0)$ corresponde a $T=\infty$ e os restantes a $T=0$. Naturalmente pontos com coordenadas negativas sã fixos apenas para valores ímpares de b .

(v_1^*, v_2^*, v_3^*)	(x_1^*, x_2^*, x_3^*)
$(0,0,0)$	$(1,1,1)$
$(1,1,1)$	$(0,0,0)$
$(0,1,0)$	$(0,0,1)$
$(0,0,1)$	$(0,1,0)$
$(0,0,-1)^{(1)}$	$x_3 = x_1 = \infty \quad , \quad x_3/x_2 \rightarrow \infty$
$(-1,+1,-1)^{(2)}$	$x_3/x_1 \rightarrow \infty \quad , \quad x_3/x_2 \rightarrow \infty$

Poderemos entender melhor o significado dos pontos fixos da Tabela IV.2 se colocarmos⁷ em cada ponto da rede uma variável $Z(2)$ ($\sigma = \pm 1$) e uma variável $Z(3)$ ($\mu = e^{i2\pi n/3}$, $n = 0,1,2$). A variável $Z(6)$ pode então ser escrita em termos das variáveis $Z(2)$ e $Z(3)$ conforme Tabela IV.3 abaixo.

(1) Neste caso $x_2 = 0,1,\infty$ com $x_3/x_2 \rightarrow \infty$ ($x_3 = x_1$)
(2) Aqui $x_1, x_2 = 0,1,\infty$ e $x_3/x_1 \rightarrow \infty$, $x_3/x_2 \rightarrow \infty$.

TABELA IV.3

Variável Z(4) expressa em termos de variáveis
Z(2) e Z(3)

S	1	$e^{i\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i\pi}$	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i5\pi/3}$
σ_μ	+1	$-e^{i4\pi/3}$	$+e^{i2\pi/3}$	-1	$+e^{i4\pi/3}$	$-e^{i2\pi/3}$

Vê-se então que:

$$S_i = \sigma_i \mu_i \tag{IV.132}$$

o que permite escrever a Hamiltoniana para N = 6 como

$$\begin{aligned} H = & -J_1/2 \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} [\mu_i \mu_{i+1}^\dagger + \mu_i^\dagger \mu_{i+1}] \\ & - J_2/2 \sum_i (\mu_i \mu_{i+1}^\dagger + \mu_i^\dagger \mu_{i+1}) \\ & - J_3 \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \end{aligned} \tag{IV.133}$$

Vamos considerar os seguintes casos limites:

a) $J_1 = J_3 = 0$ ($x_1 = x_2, x_3 = 1$); a Hamiltoniana acima torna-se análoga a um Potts Z(3) com variáveis v_p dadas por

$$v_1 = v_3 = 0 \tag{IV.134a}$$

$$v_2 = (2-2x)/(2+4x) \tag{IV.134b}$$

onde $\uparrow \overset{x}{x} e^{-3K_2/2}$ ($= x_1 = x_2$). Existe um ponto fixo ferromagnético, $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0, 1, 0)$ correspondente a $J_2 > 0, T = 0$; não há ponto fixo antiferromagnético, como era de se esperar.

b) $J_1 = J_2 = 0$ ($x_1 = x_3$, $x_2 = 1$); a Hamiltoniana (IV.132) torna-se análoga a um modelo de Ising com variáveis v_p dadas por

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (\text{IV.135a})$$

$$v_3 = (3-3x)/(3+3x) \quad (\text{IV.135b})$$

de $x = e^{-2K_3}$ ($=x_1 = x_2$). Existe um ponto fixo ferromagnético $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0, 0, 1)$ onde $J_3 > 0$, $T = 0$ e um antiferromagnético, $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0, 0, -1)$ para $J_3 < 0$, $T = 0$.

c) $J_3 \rightarrow \infty$ ($x_1 = x_3 = 0$); neste caso as variáveis $Z(2)$ ficam congeladas ($\sigma_i \sigma_{i+1} = +1$) uma vez que seria necessário uma energia infinita para virar um dado spin σ_i . Assim a Hamiltoniana (IV.132) se escreve de maneira análoga a um Potts $Z(3)$, ou seja:

$$H(J_3 \rightarrow \infty) = -(J_1 + J_2)/2 \sum_i (\mu_i \mu_{i+1}^\dagger + \mu_i^\dagger \mu_{i+1}) \quad (\text{IV.136})$$

As variáveis v_p ficam

$$v_1 = v_2 = (1-x)/(1+3x) \quad (\text{IV.137a})$$

$$v_3 = 1 \quad (\text{IV.137b})$$

onde $x = e^{-\frac{3}{2}(K_1 + K_2)}$ ($=x_2$). O ponto fixo ferromagnético ($J_1 + J_2 > 0$, $T = 0$) tem coordenadas $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1, 1, 1)$ e não há ponto fixo antiferromagnético.

d) $J_2 \rightarrow \infty$ ($x_1 = x_2 = 0$); agora as variáveis $Z(3)$ é que se congelam ($\mu_i \mu_{i+1}^\dagger = +1$) e ficamos com um modelo de Ising com Hamiltoniana

$$H(J_2 \rightarrow \infty) = -(J_1 + J_3) \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (\text{IV.138})$$

e variáveis v_p dadas por

$$v_1 = v_3 = (1-x)/(1+x) \quad (\text{IV.139a})$$

$$v_2 = 1 \quad (\text{IV.139b})$$

com $x = e^{-2(K_1+K_3)}$ ($=x_3$). Existe um ponto fixo ferromagnético com coordenadas $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1, 1, 1)$ e um antiferromagnético com coordenadas $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (-1, +1, -1)$.

Naturalmente os pontos fixos não estão associados unicamente aos modelos com subsimetrias; na verdade eles correspondem a uma ampla gama de valores das constantes de acoplamento (entre os quais se incluem os casos particulares acima) que descrevem o comportamento crítico do modelo mais geral com simetria global $Z(6)$.

IV.5.6 - $Z(7)$

O espaço de parâmetros é tridimensional, como no $Z(6)$, com pesos

$$x_p = \exp - \left[\sum_{m=1}^3 K_m \left[\cos \frac{2\pi mp}{7} - 1 \right] \right] \quad (\text{IV.140})$$

$$p = 1, 2, 3$$

e variáveis v_1 , v_2 e v_3 dadas por

$$v_1 = \frac{1 + 2x_1 \cos \frac{2\pi}{7} + 2x_2 \cos \frac{4\pi}{7} + 2x_3 \cos \frac{6\pi}{7}}{1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3} \quad (\text{IV.141a})$$

$$v_2 = \frac{1 + 2x_1 \cos \frac{4\pi}{7} + 2x_2 \cos \frac{6\pi}{7} + 2x_3 \cos \frac{2\pi}{7}}{1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3} \quad (\text{IV.141b})$$

$$v_3 = \frac{1 + 2x_1 \cos \frac{6\pi}{7} + 2x_2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2x_3 \cos \frac{4\pi}{7}}{1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3} \quad (\text{IV.141c})$$

A figura IV.11 mostra a região física no espaço (v_1, v_2, v_3) . O que queremos salientar é que aqui existem apenas dois pontos fixos (como em $N=3$ e $N=5$): um ferromagnético, $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1, 1, 1)$ onde $T=0$ e um paramagnético, $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0, 0, 0)$ onde $T=\infty$ correspondendo, respectivamente, a $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 0)$ e $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 1, 1)$. A não existência de outros pontos fixos pode ser entendida através dos mesmos argumentos dados anteriormente (ver $Z(3)$ e $Z(5)$).

FIG. IV.11 - Região física do $Z(7)$ no espaço (v_1, v_2, v_3) : pontos do interior e da superfície do tetraedro. Note-se que o lado inferior desse tetraedro (que não pode ser visto) está contido no plano $1+2v_1+2v_2+2v_3=0$, definido pelos segmentos da reta traçados na superfície do cubo. Dessa maneira o tetraedro "toca" dita superfície apenas no ponto $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1, 1, 1)$

IV.5.7 - Pontos fixos para $N > 7$

Dos casos estudados podemos fazer algumas previsões a respeito da existência de pontos fixos para um dado N . Por exemplo:

- (1) o ponto fixo ferromagnético $\{v\} = \{1\}$ e o paramagnético $\{v\} = \{0\}$ existem sempre;
- (2) valores primos de N possuem apenas os dois pontos fixos acima (exceção feita a $N=2$ que, por ser par, admite ainda um ponto fixo antiferromagnético associado a $x_{N/2} = x_1 = \infty$);
- (3) existe sempre um ponto fixo (ou mais) associado a cada uma das subsimetrias englobadas pelo modelo mais geral (para verificar quais são essas subsimetrias basta decompor N em seus fatores primos);
- (4) modelos N -Potts escalares ($N > 2$) não possuem pontos fixos antiferromagnéticos. Para N ímpar existem apenas os pontos fixos mencionados em (1); e assim por diante.

IV.6 - Campos de escala não lineares

Até agora estudamos a renormalização de parâmetros que diferem pouco do seu valor no ponto fixo, o que trouxe como consequência previsões de escala que são válidas apenas na região linear próxima daquele ponto. Nesta seção vamos fazer algumas discussões a respeito da introdução de termos não lineares nos campos de escala o que irá aumentar a região de validade de tais previsões.

Vamos definir as variáveis

$$\bar{v}_j = 1 - v_j$$

$$j = 1, 2, \dots, \bar{N}$$

(IV.142)

em termos das quais as relações de recorrência têm a seguinte expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned}\bar{v}_j' &= b\bar{v}_j - b(b-1) \frac{\bar{v}_j^2}{2!} + b(b-1)(b-2) \frac{\bar{v}_j^3}{3!} + \dots \\ &= b\bar{v}_j + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{jn} \bar{v}_j^n\end{aligned}\quad (\text{IV.143})$$

onde

$$a_{jn} = (-1)^{n+1} \frac{b!}{(b-n)!} \quad (\text{IV.144})$$

Perto do ponto fixo ferromagnético $\{v\} = \{1\}$ o termo mais importante é o linear, cujo coeficiente é da forma b^{λ_j} (com $\lambda_j = 1$), resultado que já era de nosso conhecimento (também esperado da propriedade de semi-grupo da teoria de grupos de renormalização). O que queremos é encontrar campos não lineares, que chamaremos $g_i(\bar{v}_j)$, os quais se reduzem a $\bar{v}_i$ perto do ponto fixo e que sob a ação do operador de grupo de renormalização se transformam como

$$R(g_i) \equiv (g_i') = (b^{\lambda_i} g_i) \quad (\text{IV.145})$$

com $\lambda_i = 1$. Isso implica em que todas as previsões de escala escritas em termos dos campos lineares $\bar{v}_i$, podem ser escritas em termos dos g 's fazendo a substituição $\bar{v}_i \rightarrow g_i$, com o que passam a ser válidas para todos os valores dos campos g_i e não apenas nas proximidades do ponto fixo onde $g_i = 0$. Dada a simplicidade das relações de recorrência que, além de desacopladas estão escritas em forma fechada, não é preciso ir muito longe para encontrar os g 's; tomando o logaritmo dessas relações (lembrar que $v_i' = (v_i)^b$) vem que

$$g_i = -\ln |v_i| \quad (\text{IV.146})$$

e poderíamos concluir esta seção neste ponto. Entretanto, já que estamos de posse dos campos não lineares escritos em forma fechada, o que não é comum, podemos testar os métodos de aproximação conhecidos e que agem no sentido de determinar uma expressão em série de potências para esses campos, expansão essa cuja convergência não pode, em geral, ser provada⁵.

O problema de corrigir as previsões de escala assintóticas, foi tratado por Wegner¹⁴ através da introdução de termos não lineares nos campos de escala, termos esses que podem ser obtidos se forem conhecidas as relações de recorrência (dadas em forma diferencial) para os campos lineares. O método apresentado por Wegner, no entanto, envolve derivadas, em relação a b , dos coeficientes dos termos da expansão dessas relações, e uma vez que os grupos de renormalização que vimos discutindo são definidos apenas para valores discretos de b , não podemos utilizar esse procedimento. Em vez disso vamos recorrer a um método desenvolvido por Nelson e Fisher⁵, seguindo a linha geral de Wegner, e adaptado para tratar grupos de renormalização discretos.

O método supõe conhecidas as relações de recorrência diagonalizadas até primeira ordem, i.e.,

$$h'_j = b^{\lambda_j} h_j + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{I(n)} a_{jI(n)} h_{I(n)} \quad (\text{IV.147})$$

onde o multi-índice $I(n)$ representa $i_1 i_2 \dots i_n$ e

$$h_{I(n)} = h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n} \quad (\text{IV.148})$$

Supõe-se também que $g_j(h_i)$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$g_j(h_i) = h_j + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{I(n)} C_{jI(n)} h_{I(n)} \quad (\text{IV.149})$$

o que é bastante plausível uma vez que g_j deve se reduzir a h_j em primeira ordem. Os coeficientes $c_{jI(n)}$ não devem depender de b , uma vez que $g_j(h_i)$ independe desse fator. Formando o produto

$$h'_{I(2)} = b^{\lambda_{I(2)}} h_{I(2)} + O(h_{I(3)}) \quad (\text{IV.150})$$

onde

$$\lambda_{I(n)} = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_n} \quad (\text{IV.151})$$

podemos construir a combinação linear

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{I(2)} c_{jI(2)} h'_{I(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{I(2)} b^{\lambda_{I(2)}} c_{jI(2)} h_{I(2)} + \\ &+ O(h_{I(3)}) \end{aligned} \quad (\text{IV.152})$$

que adicionada a (IV.147) fornece

$$\begin{aligned} h'_j + \frac{1}{2} \sum_{I(2)} c_{jI(2)} h'_{jI(2)} &= \\ &= b^{\lambda_j} \left[h_j + \frac{1}{2} \sum_{I(2)} \left(b^{-\lambda_j} a_{jI(2)} + b^{\lambda_{I(2)} - \lambda_j} c_{jI(2)} \right) h_{I(2)} \right] \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{I(n)} a_{jI(n)}^{(3)} h_{I(n)} \end{aligned} \quad (\text{IV.153})$$

onde $a_{jI(3)}^{(3)}$ vem da adição dos termos de terceira ordem em (IV.152) aos termos correspondentes em (IV.147).

Portanto, a quantidade

$$\dot{g}_j^{(2)}(h_i) = h_j + \frac{1}{2} \sum_{I(2)} c_{jI(2)} h_{jI(2)} \quad (\text{IV.154})$$

satisfaz (IV.145) até segunda ordem se

$$c_{jI(2)} = a_{jI(2)} / \left(b^{\lambda_j} - b^{\lambda_{I(2)}} \right) \quad (\text{IV.155})$$

Dessa maneira podemos gerar uma sequência $g_j^{(2)}(h_i)$,
 $g_j^{(3)}(h_i)$ onde

$$g_j^{(n+1)}(h_i) = g_j^{(n)}(h_i) + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{I(n+1)} c_{jI(n+1)} h_{I(n+1)} \quad (\text{IV.156})$$

satisfaz (IV.145) até $(n+1)$ ésimas ordens desde que

$$c_{jI(n+1)} = a_{jI(n+1)}^{(n+1)} / \left(b^{\lambda_1} - b^{\lambda_{I(n+1)}} \right) \quad (\text{IV.157})$$

Note-se que se em algum estágio $\lambda_{I(n)} = \lambda_j$, o lado direito da expressão para $c_{jI(n)}$ pode divergir. Não pretendemos nos aprofundar nesse aspecto do problema, mas queremos mencionar que justamente nesse caso Wegner precisou introduzir correções logarítmicas.

IV.6.1 - Determinação dos campos não lineares para $Z(N)$

Evidentemente, o método apresentado acima é bastante geral para incluir casos em que as relações de recorrência estão acopladas, como geralmente acontece; daí a necessidade de introduzir o multi-índice $I(n)$ para levar em conta termos do tipo $h_i h_j$, $i \neq j$ (e de ordem mais alta) em (IV.147) e (IV.149). No nosso caso as relações de recorrência não possuem termos desse tipo, (ver equação (IV.142)) e é fácil de ver que, como consequência, também os $g_j^{(n)}(\bar{v}_i)$ dependem, na verdade, apenas de $\bar{v}_j$ (ver por exemplo $g_j^{(2)}$ em (IV.154) onde $c_{jI(2)}$, de (IV.155), é zero quando $i \neq j$).

Com isso os cálculos ficam bastante simples e fornecem

$$g_j(\bar{v}_j) = \bar{v}_j + \frac{1}{2} \bar{v}_j^2 + \frac{1}{3} \bar{v}_j^3 + \frac{1}{4} \bar{v}_j^4 + \dots \quad (\text{IV.158})$$

independente do fator de reescala espacial, como esperávamos.

Vemos que até a ordem calculada $g_j(v_j)$ concorda com o resultado exato (IV.146), o que comprova a eficiência do método de Nelson e Fischer para a obtenção desses campos.

IV.7 - Conclusões e conjecturas

O que possibilitou analisar o modelo para N qualquer foi, naturalmente, o fato de termos conseguido encontrar as variáveis $v_r = \lambda_r / \lambda_N$ em termos das quais as transformações se expressam de maneira trivial. Essa descoberta permitiu escrever as relações de recorrência para b qualquer, o que por sua vez tornou possível o estudo de pontos fixos antiferromagnéticos (nesse sentido $b = 3$ teria sido suficiente) e facilitou o trabalho de procura dos pontos fixos do modelo (note-se que, em termos dos x 's as relações de recorrência não deixam claro, à primeira vista, quais são os pontos fixos, mesmo para $b = 2$, como se pode ver de (IV.11) no caso $N = 4$); devido à simplicidade das relações de recorrência foi também possível obter uma expressão exata para a energia livre do modelo (Apêndice D). Além disso, com os v 's, notamos que os casos $b = 2$ e $b = 3$ (em geral, par e ímpar) cobrem todas as situações possíveis, i.e., nenhum ponto fixo diferente aparecerá para $b > 3$. Também, a propriedade de semi grupo (III.14) da teoria de grupos de renormalização pode ser provada neste tipo particular de transformação (dedecoração) para os modelos $Z(N)$. De fato:

$$\mathbb{R}^{\ell'}(v) = v^{(b^\ell)} \quad (\text{IV.159})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\ell} \left[\mathbb{R}^{\ell'} (V) \right] &= V^{(b^{\ell} b^{\ell'})} \\ &= \mathbb{R}^{\ell+\ell'} (V) \end{aligned} \quad (\text{IV.160})$$

de onde podemos identificar

$$\mathbb{R}^{\ell+\ell'} = \mathbb{R}^{\ell} \mathbb{R}^{\ell'} \quad (\text{IV.161a})$$

$$b_{\ell+\ell'} = b_{\ell} b_{\ell'} \quad (\text{IV.161b})$$

onde $b_{\ell} = b^{\ell}$.

De caráter mais geral, de (II.44) e (IV.146) vemos que

$$g_r \propto 1/\xi_r \quad (\text{IV.162})$$

o que podia ser previsto de antemão usando (III.37) para os campos g 's; como existe uma relação entre ξ e os auto valores da matriz de transferência¹² válida para uma ampla classe de sistemas, podemos obter os auto valores de T a partir dos campos não lineares. Uma vez que estes últimos podem ser obtidos de uma maneira natural pelo grupo de renormalização, temos aqui uma forma de calcular os auto valores da matriz de transferência através da teoria de grupos de renormalização, método este que talvez possa vir a ser estendido a outros modelos. Note-se que os comprimentos de correlação são sempre candidatos a campos não lineares. Isso porque o processo de redução do número de graus de liberdade seguido de uma mudança de escala faz com que o comprimento de correlação do sistema mude por um fator igual a b .

Também, a possibilidade de inclusão dos termos proporcionais à parte imaginária de J_m na Hamiltoniana (II.6) e/ou a adição de campos magnéticos externos ao sistema, poderão ser abordados no futuro, o que fecharia o problema em uma dimensão.

APÊNDICE A

DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ CÍCLICA $N \times N$

Consideremos a matriz cíclica abaixo:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{N-3} & x_{N-2} \\ x_{N-2} & x_{N-1} & x_0 & & x_{N-4} & x_{N-3} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{N-1} & x_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A equação de auto valores

$$X V_k = \lambda_k V_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.2})$$

com

$$V_k = \begin{pmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ \vdots \\ v_{N,k} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

escreve-se explicitamente como

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 v_{1,k} + x_1 v_{2,k} + x_2 v_{3,k} + \dots + x_{N-2} v_{N-1,k} + x_{N-1} v_{N,k} = \lambda_k v_{1,k} \\ x_{N-1} v_{1,k} + x_0 v_{2,k} + x_1 v_{3,k} + \dots + x_{N-3} v_{N-1,k} + x_{N-2} v_{N,k} = \lambda_k v_{2,k} \\ \vdots \\ x_2 v_{1,k} + x_3 v_{2,k} + x_4 v_{3,k} + \dots + x_0 v_{N-1,k} + x_1 v_{N,k} = \lambda_k v_{N-1,k} \\ x_1 v_{1,k} + x_2 v_{2,k} + x_3 v_{3,k} + \dots + x_{N-1} v_{N-1,k} + x_0 v_{N,k} = \lambda_k v_{N,k} \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Usando o seguinte "ansatz"

$$v_{\ell,k} = (\alpha_k)^\ell \quad (\text{A.5})$$

com

$$(\alpha_k)^N = 1 \quad (\text{A.6})$$

e em seguida dividindo a primeira equação por $v_{1,k}$, a segunda por $v_{2,k}$ e assim por diante, as N equações do sistema ficam idênticas. Para ver isso basta enumerar as linhas e as colunas da matriz X de zero a $N-1$. Então a n -ésima equação do sistema (A.4) será, após a divisão por $v_{n+1,k}$:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{x_{N-(n-m)} v_{m+1,k}}{v_{n+1,k}} = \lambda_k(\alpha) \quad (\text{A.7})$$

Como, de (A.6),

$$\alpha_k = \exp(2\pi i k/N); \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.8})$$

teremos, usando (A.5)

$$\lambda_k = \sum_{m=0}^{N-1} \left[x_{N-(n-m)} \exp(2\pi i k [N-(n-m)]/N) \right] \quad (\text{A.9a})$$

ou

$$\lambda_k = \sum_{m=0}^{N-1} \left[x_{m-n} \exp\{2\pi i k (m-n)/N\} \right] \quad (\text{A-9b})$$

Esta soma, evidentemente, independe de n e assim tomando $n=0$ teremos para os auto valores $\{\lambda_k\}$ e auto vetores $\{v_k\}$ correspondentes:

$$\lambda_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp\{2\pi i k m/N\} \quad (\text{A.10a})$$

$$V_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{Nk} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10b})$$

onde

$$v_{nk} = \exp\{2\pi i nk/N\} \quad (\text{A.11})$$

Então a matriz U que diagonaliza X mediante a transformação $U^{-1} X U$ terá elementos $\frac{1}{\sqrt{N}} v_{nk}$ onde v_{nk} são dados por (A.11).

Note-se que U é unitária, isto é, $U^\dagger = U^{-1}$ onde $U^\dagger$ é a adjunta de U pois $U^\dagger U$ fornece

$$\begin{aligned} (u^\dagger u)_{pq} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (u^n)_{pn}^* u_{nq} \\ &= \frac{1}{N} \sum u_{np}^* u_{nq} = \frac{1}{N} \sum e^{2\pi i (q-p)n/N} \\ &= \delta_{pq} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Evidentemente o mesmo resultado é obtido para $UU^\dagger$ de onde se segue

$$U^{-1} = U^\dagger \quad (\text{A.13})$$

Para o modelo Potts escalar (II.8) onde

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = 1 \quad (\text{A.14a})$$

$$x_0 = e^{\epsilon/K_B T} \quad (\text{A.14b})$$

(A.10a) fica:

$$\lambda_k = e^{\epsilon/K_B T - 1 + N \delta_{k,N}} \quad (\text{A.15})$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

APÊNDICE B

CÁLCULO DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DO TIPO $\langle (S_L S_{L'}^\dagger)^r \rangle$

Basta generalizar algumas das expressões obtidas no cálculo para $r=1$. Por exemplo, (II.29) se generaliza para

$$\langle (S_L S_{L'}^\dagger)^r \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ T^{N-R} M_+^R T^R M_- \} \quad (\text{B.1})$$

onde agora

$$M_\pm = \sum_{n_L} |n_L\rangle \exp [\pm 2\pi i r n_L / N] \langle n_L| \quad (\text{B.2})$$

Naturalmente (II.33) será escrita como

$$A_\pm = U^{-1} I_1 U + e^{\pm 2\pi i r / N} U^{-1} I_2 U + \dots + e^{\pm 2\pi i r (N-1) / N} U^{-1} I_N U \quad (\text{B.3})$$

e (II.35), por sua vez, ficará

$$a_{ij}^\pm = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \{ 2\pi i r (n-1) / N \} u_{ni}^* u_{nj} \quad (\text{B.4})$$

Agora precisamos apenas de b_{NN} onde B é a matriz

$$B = A_+ \begin{pmatrix} \lambda_1^R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^R & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_N^R \end{pmatrix} A_- \quad (\text{B.5})$$

sendo os elementos das matrizes $A_\pm$ dados por (B.4). Portanto,

$$b_{NN} = \sum_{k=1}^N a_{Nk}^+ \lambda_k^R a_{kN}^- \quad (\text{B.6})$$

O cálculo dos elementos de matriz a_{Nk}^+ e a_{kN}^- é imediato;

$$\begin{aligned}
 a_{Nk}^+ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp\{2\pi i r(n-1)/N\} u_{nN}^* u_{nk} \\
 &= \frac{e^{-2\pi i r/N}}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (k+r)n/N} \\
 &= e^{-2\pi i r/N} \delta_{k, N-r}
 \end{aligned} \tag{B.7a}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_{kN}^- &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp\{-2\pi i r(n-1)/N\} u_{nk}^* u_{nN} \\
 &= \frac{e^{2\pi i r/N}}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i (k+r)n/N} \\
 &= e^{2\pi i r/N} \delta_{k, N-r}
 \end{aligned} \tag{B.7b}$$

Portanto ficamos com

$$\begin{aligned}
 G_r(R) &= (\lambda_{N-r}/\lambda_N)^R \\
 &= (\lambda_r/\lambda_N)^R
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

onde usamos $\lambda_{N-r} = \lambda_r$, $r = 1, 2, \dots, \bar{N}$.

APÊNDICE C

TRANSFORMAÇÃO DE DEDECORAÇÃO COM b INTEIRO QUALQUER

Neste caso queremos remover $b-1$ spins situados entre S_1 e S_2 (figura IV.4). A função de partição condicional, neste caso, assume a forma

$$\begin{aligned}
 \psi_b(\{K\}, n_1, n_2) &= \sum_{n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0(b-1)}} x^{|n_1 - n_{01}|} x^{|n_{01} - n_{02}|} \dots x^{|n_{0(b-1)} - n_2|} \\
 &= \sum_{n_{02}, n_{03}, \dots, n_{0(b-1)}} x^{(1)}_{|n_1 - n_{02}|} x^{|n_{02} - n_{03}|} \dots x^{|n_{0(b-1)} - n_2|} \\
 &= \sum_{n_{03}, n_{04}, \dots, n_{0(b-1)}} x^{(2)}_{|n_1 - n_{03}|} x^{|n_{03} - n_{04}|} \dots x^{|n_{0(b-1)} - n_2|} \\
 &= x^{(b-1)}_{|n_1 - n_2|} \quad . \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

Portanto, seguindo a mesma linha de raciocínio dos casos anteriores, concluímos que também $\psi_b(\{K\}, n_1, n_2)$ depende apenas da diferença $|n_1 - n_2|$.

A generalização de (IV.34) é imediata

$$\psi_b(\{K\}, n_1, n_2) = \phi_b(\{K\}) x^{|n_1 - n_2|} \quad (C.2)$$

com

$$\phi_b(\{K\}) = \frac{\exp\{C' + K'_1 + \dots + K'_{\bar{N}}\}}{\exp\{b(C + K_1 + \dots + K_{\bar{N}})\}} \quad (C.3)$$

e, de (C.2), vemos que possuímos um sistema com $\bar{N}+1$ equações e $\bar{N}+1$ incógnitas, como antes. Novamente, como ψ_b depende apenas da diferença $|n_1 - n_2| = 0, 1, \dots, \bar{N}$, fazemos $n_1 = 0$ e variamos n_2 desde 0

até $\bar{N}$. Então (C.2) fica

$$\psi_b(\{K\}, n_2) = \phi_b(\{K\}) x'_{n_2} \quad (C.4)$$

Assim as relações de recorrência em termos de x 's se escrevem:

$$\phi_b(\{K\}) = \psi_b(\{K\}, 0) \quad (C.5a)$$

$$x'_\theta = \psi_b(\{K\}, \theta) / \phi_b(\{K\}) \quad (C.5b)$$

e queremos tais relações em termos dos v 's. Para tanto vamos procurar escrever a variável transformada v'_r , ou seja:

$$\begin{aligned} v'_r &= \lambda'_r / \lambda_N \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x'_n \exp(2\pi i n r / N) \right] / \sum_{n=0}^{N-1} x'_n \\ &= \frac{\sum_n \left[\sum_{n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0(b-1)}} x_{n_{01}} x_{|n_{01}-n_{02}|} \dots x_{|n_{0(b-1)}-n|} \right] e^{2\pi i n r / N}}{\sum_n \left[\sum_{n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0(b-1)}} x_{n_{01}} x_{|n_{01}-n_{02}|} \dots x_{|n_{0(b-1)}-n|} \right]} \end{aligned} \quad (C.6)$$

O numerador pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\sum_{n_{01}} x_{n_{01}} \exp\{2\pi i n_{01} r / N\} \sum_{n_{02}} x_{|n_{01}-n_{02}|} \exp\{2\pi i (n_{02}-n_{01}) r / N\} \dots \\ &\dots \sum_{n_{0(b-1)}} x_{|n_{0(b-2)}-n_{0(b-1)}|} \exp\left[2\pi i \left(n_{0(b-1)}-n_{0(b-2)}\right) r / N\right] \\ &\sum_n x_{|n_{0(b-1)}-n|} \exp\left[2\pi i \left(n-n_{0(b-1)}\right) r / N\right] \\ &= (\lambda'_r)^b \end{aligned} \quad (C.7)$$

A soma no denominador é imediata (idêntica à do numerador mas sem a exponencial) e fornece $(\sum x_n)^b = (\lambda_N)^b$. Portanto:

$$\begin{aligned} v_r' &= (\lambda_r / \lambda_N)^b \\ &= (v_r)^b, \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (C.8)$$

A transformação do termo constante representado por ϕ_b também não oferece dificuldades. Basta olhar para

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\lambda_n)^b &= \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp(2\pi i n m / N) \right]^b \\ &= \sum_n \sum_{m_1=0}^{N-1} x_{m_1} \sum_{m_2} x_{m_2} \dots \sum_{m_b} x_{m_b} \exp\{2\pi i n (\sum m_i) / N\} \\ &= N \sum_{m_1} x_{m_1} \sum_{m_2} x_{m_2} \dots \sum_{m_b} x_{m_b} \delta_{\sum m_i, 0} \\ &= N \sum_{m_1} x_{m_1} \sum_{m_2} x_{|m_2 - m_1|} \dots \sum_{m_{b-2}} x_{|m_{b-2} - m_{b-1}|} \sum_{m_{b-1}} x_{m_{b-1}} \end{aligned} \quad (C.9)$$

Comparando com (C.1) (no caso $n_1 = n_2 = 0$) e considerando que $\sum \lambda_n = N$ (IV.31), podemos escrever, para ϕ_b :

$$\begin{aligned} \phi_b(\{v\}) &= N^{b-1} \sum (\lambda_n)^b / (\sum \lambda_n)^b \\ &= N^{b-1} \sum (\lambda_n / \lambda_N)^b / (\sum \lambda_n / \lambda_N)^b \\ &= N^{b-1} \sum v_n^b / (\sum v_n)^b \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

Esta expressão, ao lado de (C.8), completa a busca das relações de recorrência que estavam procurando.

APÊNDICE D

ENERGIA LIVRE PARA $Z(N)$

Os cálculos são análogos àqueles que levaram à expressão da energia livre para o $Z(4)$.

Uma expansão a altas temperaturas fornece, para a função de partição:

$$Z_N(C, \{K\}) \approx N^N \exp[N C + O(\{N K^2\})] \quad (D.1)$$

onde usamos a Hamiltoniana (IV.2) para $Z(N)$.

Iterando ℓ vezes vem

$$Z_N(C^{(\ell)}, \{K^{(\ell)}\}) \approx N^N \exp[N C^{(\ell)} + O(\{N (K^{(\ell)})^2\})] \quad (D.2)$$

e a energia livre fica

$$f(C^{(\ell)}, \{K^{(\ell)}\}) \approx \ln N + C^{(\ell)} + O(\{(K^{(\ell)})^2\}) \quad (D.3)$$

Definindo

$$w^{(\ell)} = \exp[-N C^{(\ell)}] \quad (D.4)$$

podemos escrever

$$f(w^{(\ell)}, \{K^{(\ell)}\}) \approx -\ln \left[\frac{(w^{(\ell)})^{1/N}}{N} \right] \quad (D.5)$$

Se usarmos a relação básica de recorrência para a energia livre

$$f(w^{(0)}, \{x^{(0)}\}) = b^{-\ell} f(w^{(\ell)}, \{x^{(\ell)}\}) \quad (D.6)$$

notando que no $\lim \ell \rightarrow \infty$, $K^{(\ell)} \rightarrow 0$, teremos

$$f(w^{(0)}, \{x^{(0)}\}) = -\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{-\ell} \ln \left[\frac{(w^{(\ell)})^{1/N}}{N} \right] \quad (D.7)$$

Definindo

$$u = \frac{1}{N} e^{-[C + K_1 + K_2 + \dots + K_{\bar{N}}]} \quad (D.8)$$

e usando (IV.43) vem que

$$u' = \frac{N^{b-1} u^b}{\phi_b(\{k\})} \quad (D.9)$$

Portanto as relações de recorrência (IV.42a) e (IV.42b) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$u' = \frac{u^b [\sum v_n]^b}{\sum v_n^b} \quad (D.10a)$$

$$v_r' = v_r^b \quad r = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (D.10b)$$

Iterando (D.10a) ℓ vezes obtemos

$$u^{(\ell)} = (u^{(0)})^{b^\ell} (\sum v_n^{(0)})^{b^\ell} / (\sum (v_n^{(0)})^{b^\ell}) \quad (D.11)$$

Novamente, como no $\lim_{\ell \rightarrow \infty}$, $\{K^{(\ell)}\} \rightarrow 0$, podemos escrever (D.7) em termos de $u^{(\ell)}$:

$$f(w^{(0)}, \{x^{(0)}\}) = -\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{-\ell} \ln u^{(\ell)} \quad (D.12)$$

e afinal

$$f(w^{(0)}, \{x^{(0)}\}) = C^{(0)} + K_1^{(0)} + \dots + K_{\bar{N}}^{(0)} + \ln(\sum x_n) \quad (D.13)$$

onde usamos

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{-\ell} \ln \sum (v_n^{(0)}) b^{\ell} = 0 \quad (\text{D.14})$$

e

$$\sum v_n = N / \sum x_n \quad . \quad (\text{D.15})$$

A expressão (D.13), válida para $T \neq 0$, concorda com o resultado exato do Capítulo II.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LENZ, W. - Physik Z. 21 613, 1920.
2. ONSAGER, L. - Phys. Rev. 65 117, 1944.
3. McCOY, B.M. and WU, T.T. - "The two dimensional Ising Model" (Harvard University Press), 1973.
4. STANLEY, H.E. - "Introduction to phase transitions and critical phenomena" (Oxford University, New York), 1971.
5. NELSON, D.R. and FISHER, M.E. - Annals of Phys. 91 226-274, 1975.
6. ISING, E. - Z. Phys. 31 253, 1925.
7. ALCARAZ, F.C. - Tese de Doutorado USP/IFQSC, 1980.
8. KRAMERS, H.A. and WANNIER, G.H. - Phys. Rev. 60 252, 1941.
9. MONTROLL, E.W. - J. Chem. Phys. 9 706, 1941.
10. LASSETTRE, E.N. and HOWE, J.P. - J.Chem.Phys. 9, 747, 1941.
11. FISHER, M.E. - Phys. Rev. 113, 969, 1959.
12. CAMP, W.J. and FISHER, M.E. - Phys. Rev. B 6 946-959, 1972.
13. MERMIN, N.D. and WAGNER, H. - Phys. Rev. Lett. 17 1133, 1966.
14. WEGNER, F.J. - Phys. Rev. B 5 4529-4536, 1972.
15. WILSON, K.G. - Phys. Rev. B 4 3174-3183, 3184-3205, 1971.
16. PFEUTY, P. and TOULOUSE, G. - "Introduction to the renormalization group and to critical phenomena" (John Wiley & Sons), 1977.
17. BAKER Jr., G.A. - Phys. Rev. B 5 2622-2633, 1972; BAKER Jr., G.A. and GOLNER, G.R. - Phys. Rev. Letters 31 22-25, 1973.
18. MA, S.K. - "Modern theory of critical phenomena" (W.A. Benjamin, Inc.), 1976.
19. KOGUT, J.B. - Rev. Mod. Phys. 51 659-713, 1979.
20. FISHER, M.E. - Rev. Mod. Phys. 46 597-616, 1974.
21. NAUEMBERG, M. - Journal of Mathematical Physics, Vol. 16, nº 3, 1975.