

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

PROPRIEDADES CRÍTICAS DO  
MODELO DE ASHKIN - TELLER

JOSÉ ROBERTO DRUGOWICH  
DE FELÍCIO

Tese apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para a obtenção do título de Doutor em Ciências (Física Básica)

Orientador:

Prof.Dr. Roland Köberle



BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP  
FÍSICA

São Carlos

1982

Aos meus pais

À Ana Silvia , Ana Helena  
e Henrique

208

## AGRADEÇO

À Ana Silvia, de quem procurei copias a firmeza no trato com a vida.

Ao meu irmão Pedro, exemplo de dedicação e capacidade de trabalho.

Aos meus pais e à Cláudia, pela confiança que sempre em mim depositaram.

Aos meus amigos Almir, Coca, Caparica, Dodô, Foresti, Luiz e Zílio que tantas queixas ouviram pacientemente...

Ao Luiz Nunes e ao Valério, pelas sugestões, críticas e discussões que muito contribuíram para o aprimoramento desse trabalho.

Aos professores Sylvio Rosa, Oscar Hipólito e Roberto Lobo que acompanharam os meus primeiros passos em Física.

Ao professor Roland Köberle, pela sugestão do tema dessa tese e importante ajuda na solução dos problemas apresentados pela mesma.

À Marta e Cecília, pela datilografia.

## RESUMO

O modelo de Ashkin-Teller (1943) exibe um comportamento crítico, aparentemente não universal, semelhante ao do modelo de Baxter. Entretanto ele pode também ter propriedades críticas idênticas às do modelo de Ising, dependendo da relação entre as constantes de acoplamento.

Nesse trabalho investigamos essas duas regiões de comportamento distinto, usando a hamiltoniana de tempo contínuo e, fazendo a hipótese de que esse limite não tira o sistema de sua classe de universalidade.

Na região  $K_4 < K_1 = K_2$  a hamiltoniana equivalente é uma versão discreta do modelo de Thirring massivo, e os índices críticos são calculados após a identificação das densidades com operadores desse modelo da teoria de campos.

A região  $K_4 > K_1 = K_2$ , em que o modelo sofre duas transições, é estudada usando uma transformação do grupo de renormalização no espaço real. O modelo é reconhecido, nessa região, como sendo um modelo de Ising diluído que tem os expoentes usuais.

## ABSTRACT

The Ashkin-Teller model (1943) displays non-universal critical behavior similar to the one found in the Baxter model. For appropriate values of the coupling constants it can, nevertheless, have critical properties identical to those found in the Ising model. In this work we study the entire phase diagram, and thus investigate both behaviours, using the continuous time hamiltonian. We assume that this limit preserves the universality class of the model.

For  $K_4 < K_1 = K_2$  the equivalent hamiltonian is a discrete version of the Thirring model, and critical indices are calculated after identification of the densities with operators of this field theoretical model.

For  $K_4 \gtrsim K_1 = K_2$  the hamiltonian is equivalent to a dilute Ising model with the usual exponents. We also derive these exponents through a real space renormalization group transformation.



## ÍNDICE

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II	- O MODELO DE 8-VÉRTICES	
	II.A) Os modelos de vértices .....	5
	II.B) O modelo de Baxter .....	12
	II.B.1) Os expoentes do 8-V .....	19
	II.C) A matriz de transferência .....	21
	II.D) A solução para os modelos de vértices pelo método do espa lhamento inverso quântico .....	27
	II.E) A teoria de campos subjacente .....	31
CAPÍTULO III	- O MODELO DE ISING	
	III.A) Introdução .....	36
	III.B) A matriz de transferência .....	37
	III.C) Hamiltoniana de tempo contínuo .....	41
	III.D) Os índices críticos .....	46
CAPÍTULO IV	- O MODELO DE ASHKIN-TELLER	
	IV.A) Relações de simetria e diagrama de fases .....	52
	IV.B) A equivalência na rede .....	55
	IV.C) Relações entre os operadores do A.T. e 8-V .....	64
	IV.D) A teoria de campos do modelo .....	66
	IV.E) A verificação da conjectura de Kadanoff .....	72
	IV.F) A Polarização (verificação da conjectura de Enting) .....	76
	IV.G) Estrutura Ordem-Desordem .....	82
	IV.H) Transformação de dualidade no contínuo .....	84
CAPÍTULO V	- QUEBRA PARCIAL DE SIMETRIA	
	V.A) Introdução .....	88
	V.B) Grupo de renormalização aplicado ao A.T. com $K_4 > K$ .....	90
	V.C) O A.T. como um modelo de Ising diluído .....	98

APÊNDICE A - O Problema das N cores .....	103
APÊNDICE B - O "Ansatz" de Bethe para o XXZ .....	110
APÊNDICE C - A relação entre a matriz de trans_ ferência do 8-V e a hamiltoniana de Heisenberg .....	117
REFERÊNCIAS .....	120

A década passada se notabilizou pelo aparecimento de um formalismo adequado (o Grupo de Renormalização) para estudar transições de fase, em que as singularidades provêm da divergência do comprimento de correlação (Wilson, 1971; Wegner, 1972). A grande conquista foi explicar o aparecimento de expoentes críticos (Kadanoff et al., 1967) obtidos experimentalmente, que estavam muito longe dos valores clássicos da teoria de Landau (1937). Esses índices, que caracterizam a maneira pela qual uma quantidade física diverge ou se anula na transição, não se identificam com as dimensões canônicas (que se obtêm por simples análise dimensional). Eles refletem, contudo, a forma com que as variáveis  $M$  se transformam frente a uma dilatação da unidade de comprimento  $s$ :

$$s \rightarrow bs \tag{I.1a}$$

$$M \rightarrow M' = b^{d_a} M \tag{I.1b}$$

O expoente  $d_a$  é chamado dimensão de escala (anômala) de  $M$  e para calculá-lo é preciso fazer a transformação de escala apenas na unidade de comprimento (escalando todos os parâmetros encontráramos a dimensão canônica  $d^0$ ).

A principal razão para estudar os índices críticos é que eles governam um comportamento espetacular (as divergências das funções resposta) e são insensíveis à detalhes microscópicos da interação. Essa propriedade permite dividir os sistemas físicos em classes de universalidade que têm em comum esse conjunto de números "mágicos". A explicação para o fato é que esses diferentes sistemas, terão seu comportamento crítico determinado pelo comportamento dos campos de escala (que nada mais são que

os auto-vetores da transformação do grupo de renormalização) nas vizinhanças de um ponto fixo. Esse ponto especial, do espaço de parâmetros, tem uma área de atração (superfície crítica) na qual recairão todos os membros da classe de universalidade.

Paralelamente a esse desenvolvimento da escala de Cornell, surgiram os primeiros resultados de Baxter para o modelo de 8-vértices simétrico. Os expoentes, exatos, dependiam dos pesos atribuídos aos vértices e aparentemente violam as hipóteses de universalidade. Embora o modelo fosse bidimensional, gozava de ampla aceitação a idéia de que esse fenômeno não era uma peculiaridade do mundo bidimensional. De fato, logo se percebeu que esse modelo não tinha um ponto fixo isolado, mas sim uma linha deles o que explicou a variação contínua dos expoentes (afinal cada ponto fixo tem a sua vizinhança) e a obediência às leis de escala ponto por ponto. A razão para a existência de uma linha de pontos fixos é a existência de um operador marginal na hamiltoniana, que tem dimensão zero frente a uma transformação de escala. A marginalidade, que pode ser local ou persistente, viria mais tarde explicar correções às leis de escala a 4 dimensões (Wegner, 1974) e outros fenômenos interessantes (o efeito Kondo é um deles). Kadanoff, que, junto com Wegner (1971), apontou a importância do operador marginal no modelo de 8-V, ao apresentar seu trabalho em Cornell ficou sabendo, através de K. Wilson, que coisas semelhantes aconteciam em modelos da Teoria Quântica de Campos. Wilson (1970) havia calculado recentemente as dimensões de operadores compostos do modelo de Thirring (1958), e mostrou que elas variavam continuamente, em função da constante de acoplamento ( $g$ ). Algum tempo ainda se passou mas finalmente Luther e Peschel (1974, 1975) mostraram que o modelo de Baxter está efetivamente relacionado (de uma forma que ficará clara no texto) com o modelo de Thirring.

Pouco tempo depois do trabalho de Baxter com o 8-V ; surgiu um artigo do Fan(1972) que explorava a conexão entre esse modelo e um outro, proposto por Ashkin e Teller (1943) para estudar sistemas de 4 componentes. Embora essa tentativa tenha sido um fracasso, Wegner (1972) exibiu a equivalência entre os dois modelos, que por sinal deixava clara a maior dificuldade do A.T.. Essa dificuldade que não permitiu, até hoje, resolver o modelo, não impediu que várias conjecturas surgissem a respeito do seu comportamento crítico (expoentes críticos dependendo continuamente dos parâmetros, relação simples com os índices do 8-V , região de comportamento Ising, etc.). Essas conjecturas são suportadas e às vezes até originadas, pelo mapeamento desses modelos num outro para o qual se conhecem exatamente as funções de correlação (o modelo Gaussiano). Conviver com toda essa "estrutura", e verificar as conjecturas para os expoentes, foi basicamente o desafio que nessa tese pretendemos enfrentar. Para permitir uma perfeita penetração nesse emaranhado de equivalências, resultados exatos e não exatos, mecânica estatística e teoria de campos, esse trabalho está organizado da seguinte forma:

- a) no capítulo II apresentamos os modelos de vértices, os resultados de Baxter para o 8-V simétrico, a explicação de Kadanoff e Wegner para a variação contínua dos índices críticos e a solução do 6-V pelo método do espalhamento inverso quântico. Mostramos a equivalência entre o modelo do gelo e o "problema das 3 cores", e no apêndice-A apresentamos a relação entre o problema das N cores e o modelo de 6-V alternado. Há também um apêndice(B) que contém o "ansatz" de Bethe para a hamiltoniana de Heisenberg e outro (C) que reproduz a relação entre o modelo de 8-V e a hamiltoniana de Heisenberg completamente anisotrópica.

- b) no capítulo III, trabalhando com o modelo de Ising, introduzimos a hamiltoniana de tempo contínuo, a transformação de Jordan-Wigner e o limite de escala, obtendo o expoente  $\nu$  para esse modelo. Esse material não é original mas torna o trabalho auto-suficiente.
- c) no capítulo IV, discutimos a equivalência entre o Ashkin-Teller e o modelo de 8-V (na rede), obtendo o mapeamento exato entre os dois modelos na criticalidade. Em seguida, fazendo o limite de tempo contínuo obtemos uma hamiltoniana que é uma versão discreta do modelo de Thirring massivo. Quando o parâmetro da rede for feito zero ganhamos uma teoria invariante frente a transformações de escala no limite de massa zero. Isso permite determinar relações entre os índices críticos e verificar as conjecturas de Enting e Kadanoff para as linhas de Baxter do A.T.
- d) no capítulo V analisamos a região do A.T. em que a transição não é única, e por dois processos independentes concluimos que essas transições estão na mesma classe de universalidade do Ising. Portanto os expoentes são os usuais independentes da constante de acoplamento.

## II.A) OS MODELOS DE VÉRTICES

O modelo de 6 vértices teve sua origem em 1935, quando Linus Pauling (1935,1960) se propôs a explicar a entropia residual do gelo I, ou seja um valor de entropia que não podia ser atribuído unicamente às vibrações da rede (essa anomalia foi detectada por Giauque e Ashkley (1933)). Na busca de uma explicação para o fato, Pauling percebeu que a estrutura do gelo (figura 1) apresenta átomos de Oxigênio regularmente arranjados numa rede cristalina, porém os átomos de H não demonstram qualquer arranjo regular distinguível por Raios-X.

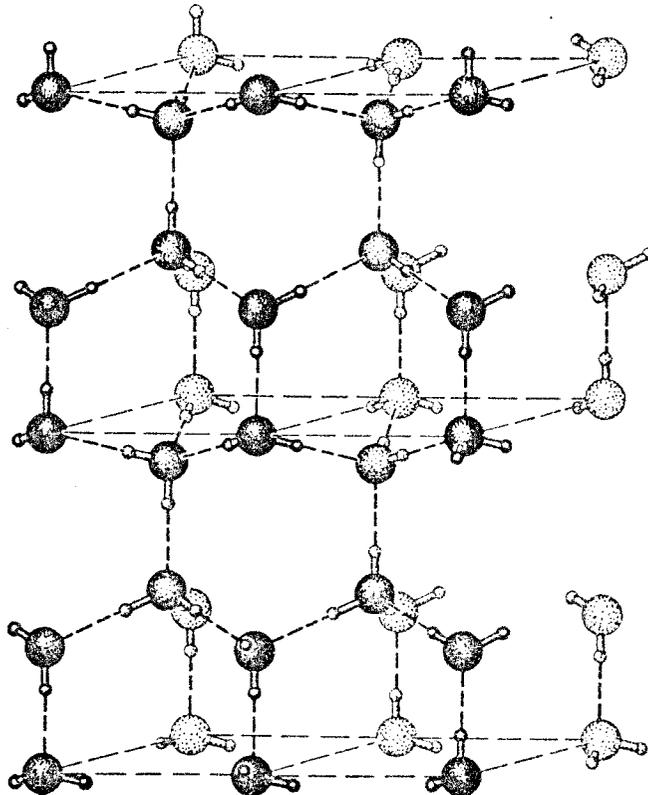


FIG. 1 - A estrutura cristalina do gelo I. Cada átomo de O está ligado a quatro outros formando uma estrutura tetraédrica.

Apoiado em idéias anteriores de Bernal e Fowler (1933)

Pauling fez as seguintes hipóteses:

- a) o gelo é uma substância que apresenta pontes de hidrogênio com um átomo de H entre cada par de Oxigênios próximos. Desde que a distância O-O é de 2,76 Å e a ligação OH tem 0,95 Å, existem duas posições acessíveis ao hidrogênio. Esses dois estados são energeticamente equivalentes exceto pela:
- b) regra do gelo: a concentração de íons  $(OH)^-$  e  $(H_3O)^+$  na água é muito pequena e uma situação análoga é esperada no gelo. Em consequência, cada átomo de O deve ter dois e somente dois H's próximos a ele.

Essa situação pode ser representada geometricamente atribuindo sentido às ligações (pontes) para representar o Hidrogênio próximo ou distante do Oxigênio. O Oxigênio é o vértice onde se encontram as 4 ligações. Como cada ligação tem dois estados há  $2^4 = 16$  vértices distintos dos quais apenas 6 satisfazem a regra do gelo.

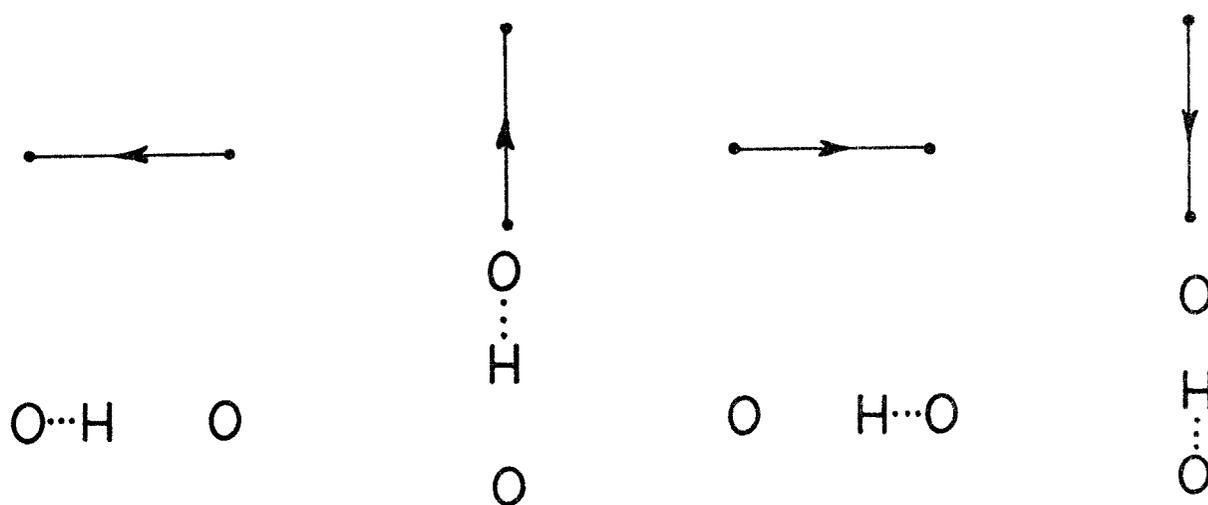


FIG. 2 - Representação de átomos de O e H por ligações orientadas

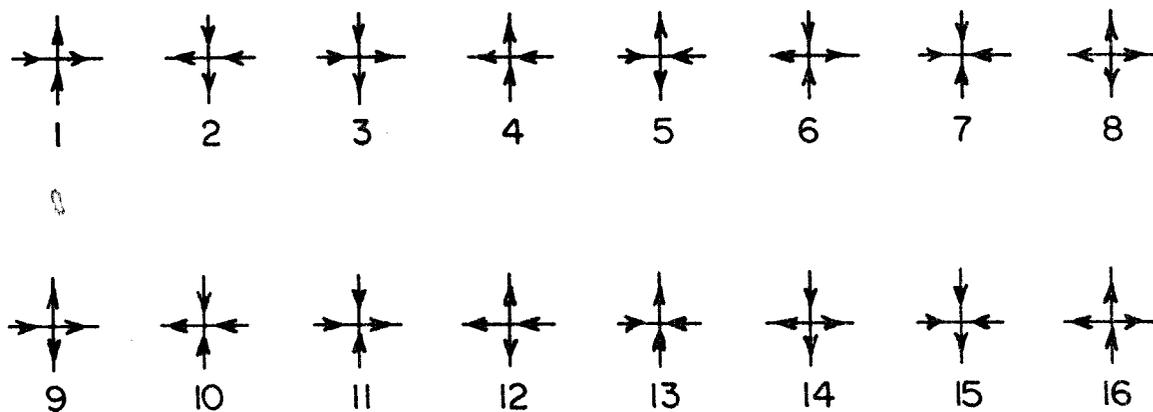


FIG. 3 - Os 16 vértices que se pode formar com 4 ligações e as 6 (primeiras) que satisfazem a regra do gelo.

De posse dessas hipóteses Pauling fez uma estimativa para o número de microestados de uma rede com  $N$  átomos: nesse caso haverá (no limite de  $N$  grande)  $2N$  ligações, e se fosse possível atribuir livremente sentido a elas haveria  $(2)^{2N}$  configurações distintas. Porém, agindo dessa forma imprudente estaríamos gerando muitos vértices proibidos pela regra do gelo. Para reparar esse erro é preciso multiplicar o resultado por  $(6/16)^N$  onde  $(6/16)$  vem da regra do gelo e  $N$  do número de átomos de  $O$ . Sendo assim,

$$W = (2)^{2N} \left( \frac{6}{16} \right)^N = \left( \frac{3}{2} \right)^N \quad (II.1)$$

Sendo as configurações 1 a 16 energeticamente equivalentes (portanto ensemble microcanônico) segue para a entropia o resultado

$$S = k \ln W = Nk \ln(3/2) = nR \ln(1.5) \quad (II.2)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $R$  a constante universal dos gases

$$s = R \ln(1.5) = 0.805 \text{ cal/mol K} \quad (II.3)$$

a ser comparado com o resultado experimental

$$s = 0.82 \pm 0.05 \text{ cal/mol K} \quad (II.4)$$

Era sem dúvida uma concordância espantosa, obtida com um cálculo que comete um erro grosseiro de estatística. Ao escrever  $(6/16)^N$  estava implícita a noção de "eventos independentes" para os vértices, quando se sabe, por exemplo, que um vértice do tipo 5 não admite como vizinho horizontal direito um vértice do tipo 1 (portanto, não são independentes).



FIG. 4 - Os vértices 5 e 1 não podem ser vizinhos na ordem indicada na figura.

Essas restrições, de caráter topológico, alteram as propriedades desse sistema e poderiam em princípio alterar completamente o resultado de Linus Pauling.

John Nagle (1966) entretanto mostrou que mesmo levando em conta a "interação" entre os vértices, em uma estrutura que simula a do gelo, obtém-se o resultado

$$s = 0,8145 \pm 0,0002 \text{ cal/mol K (3-D)} \quad (\text{II.5})$$

o que revela que o modelo é realmente bom. Nesse mesmo trabalho, Nagle verificou que uma rede bidimensional quadrada representava muito bem as propriedades do sistema original e obteve para ela

$$s = 0,858 \text{ cal/mol k (2-D)} \quad (\text{II.6})$$

Embora o problema combinatório original permaneça ainda hoje sem solução, o caso da rede quadrada (figura 5) que guarda as principais características do modelo - cada O está ligado a outros qua-

tro por pontes em que há apenas um H - foi logo resolvido exatamente por Lieb (1967a) que encontrou

$$s = R \ln(4/3)^{3/2} = R \ln(1.5396007) = 0,857 \text{ cal/mol K} \quad (\text{II.7})$$

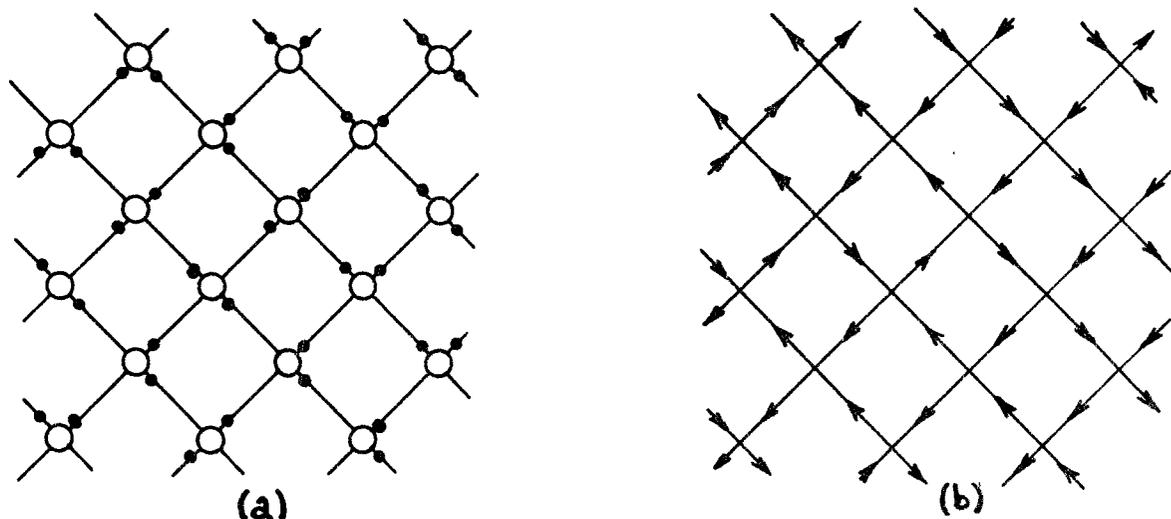


FIG. 5 - O problema do gelo em 2 dimensões.  
(a) representação por átomos de O e H(•); (b) representação por vértices.

O sucesso do modelo de Pauling estava garantido porém não devia se restringir ao gelo. De fato Slater (1941) e Takahashi (1941) usaram o modelo do gelo para estudar as propriedades do  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  (fosfato dihidrogenado de potássio) que se cristaliza numa estrutura complicada como se mostra na figura 6.

Também nesses compostos a entropia residual é muito grande, porém nesse caso as seis configurações do gelo não são mais equivalentes, já que o eixo  $c$  da célula unitária tetragonal é uma direção privilegiada. Dessa forma configurações nas quais os dois protons estejam acima ou abaixo do íon  $(\text{PO}_4)^{3-}$  terão energia menor do que aquelas em que os protons residam em lados opostos. Essa diferença de energia é a responsável pelo aparecimento de um estado ordenado (figura 7) em que todas as células ficam na mesma configuração. Desde que a combinação do ânion fosfato com o proton  $\text{H}^+$

constitue um dipolo elétrico o tal estado ordenado pode ser caracterizado pelo aparecimento da Polarização e o material (no caso o KDP) é dito ferroelétrico. A representação dessa situação é feita na tabela I, onde se mostra também a situação ADP (fosfato dihidrogenado de amônia  $\text{NH}_4 \cdot \text{H}_2\text{PO}_4$ ) que é um antiferroelétrico, e cujo estado ordenado é mostrado na figura 8.

CONFIGURAÇÃO			
MODELO			
GELO	0	0	0
KDP	0	E	E
ADP (F)	E	E	0

TABELA I - As energias associadas nos vários modelos.  
( $e^{-\beta E_i} = \omega_i$ )

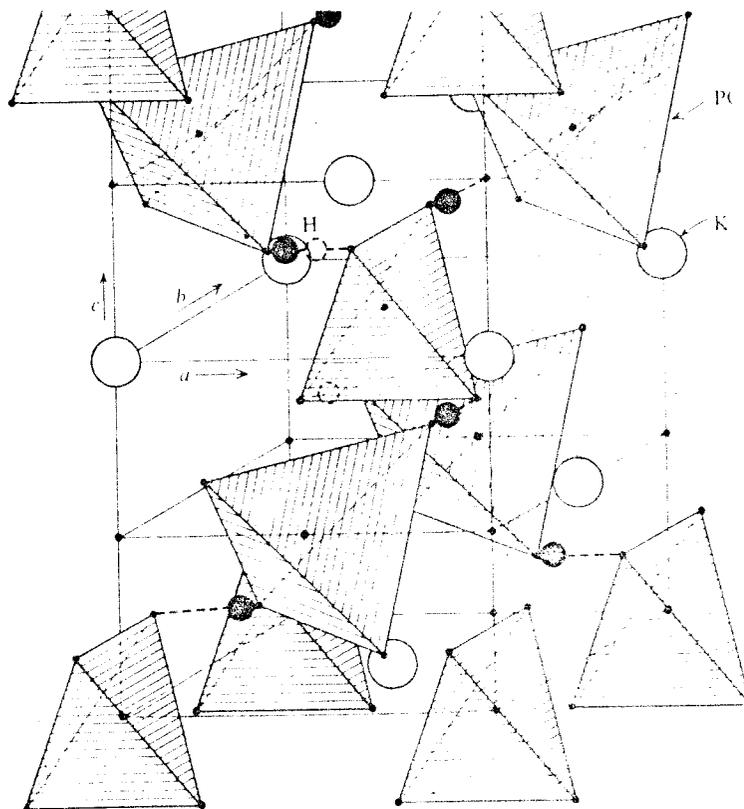


FIG. 6 - Estrutura de KDP

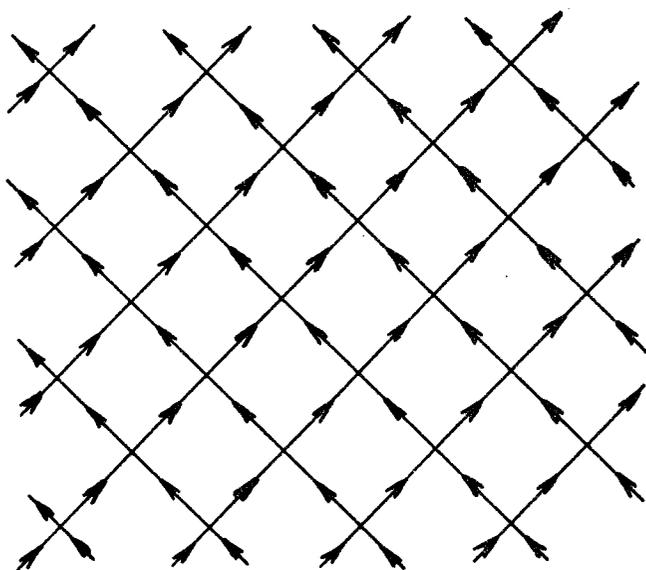


FIG. 7 - Ordem ferroelétrica (KDP)

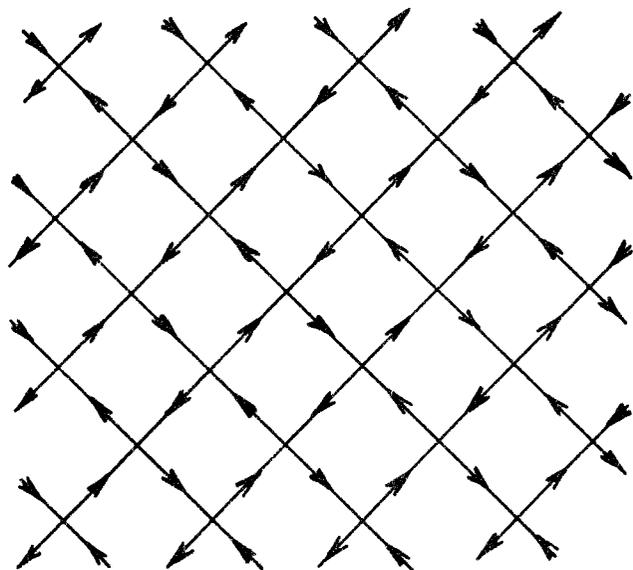


FIG. 8 - Ordem antiferroelétrica (ADP)

No caso do KDP (e do ADP) a transição é do tipo ordem-desordem e acontece a uma certa temperatura crítica ( $T_c$ ) que foi encontrada exatamente também por Lieb (1967 b,c). Os comentários a respeito da solução são reservados para a próxima secção.

Como último item, dessa introdução aos modelos de vértices, queremos mostrar que ao resolver o modelo do gelo Lieb estava, ao mesmo tempo, encontrando a solução para o famoso problema das três cores num "mapa" quadrado. Esse problema é enunciado da seguinte forma: dada uma superfície plana finita, composta de quadrados, de quantas maneiras distintas se pode colorir o mapa dispondo de três cores (amarelo, branco e verde) tal que quadrados adjacentes nunca tenham a mesma cor? Escolha um quadrado e o pinte de amarelo por exemplo (há um fator 3 devido a essa opção inicial). Agora considere um dos quatro vértices que determinam o quadrado. Percorra-o no sentido anti-horário e pinte o quadrado adjacente de branco (ordem cíclica) se a flecha estiver saindo do vértice e de verde em caso contrário. Depois de pintar as 3 células que junto com a amarela, previamente colorida, formam aquele vértice passe ao próximo até colorir todo o mapa. Agora observe que os vértices compatíveis com a condição de "cores diferentes" para "quadrados adjacentes" são exatamente aqueles que satisfazem a regra do gelo (1 a 6). Dessa forma o problema de contar o número de maneiras que se pode colorir é (a menos do fator 3) idêntico aquele de contar microestados do gelo.

Assim o número de maneiras de se colorir o mapa ( $N$ ) é

$$N = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{3N/2} \quad (\text{II.8})$$

onde  $N$  é o número de vértices internos.

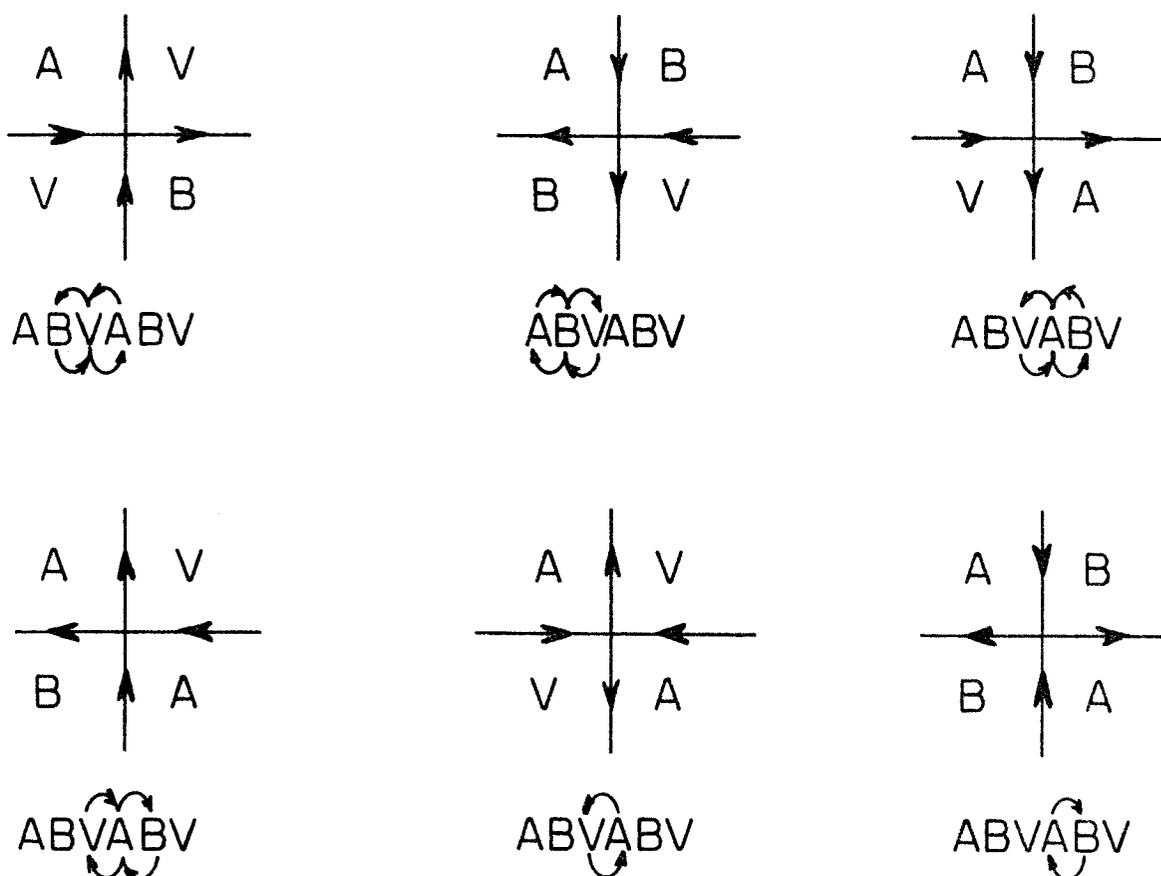


FIG. 9 - A representação das cores em termos dos vértices.

No apêndice A mostramos que o problema de  $N$  cores está relacionado com o estado fundamental do modelo de Potts que por sua vez é equivalente a um modelo de seis vértices "alternado".

## II.B) O MODELO DE BAXTER

A solução de Lieb (1967 b,c) para os modelos do KDP e ADP revela certas peculiaridades. Por exemplo, na temperatura crítica todas as derivadas da energia livre do ADP são contínuas enquanto no caso ferroelétrico (KDP) há uma descontinuidade na primeira derivada ( $S$ ) que implica na existência de calor latente. A Polarização, que é o parâmetro de ordem do KDP não se desenvolve continuamente a partir da temperatura crítica (o sistema se pola-

riza completamente a  $T = T_c$ ). Mais ainda; as funções de correlação acima da temperatura crítica não decaem exponencialmente, conforme ocorre no modelo de Ising. Esse comportamento "anormal" era frequentemente atribuído às singularidades introduzidas, ao proibir as configurações 7, 8, 9, ..., 16 ( $\epsilon_7 = \epsilon_8 = \dots = \epsilon_{16} = \infty$ ).

Abrir mão de todas essas restrições ainda hoje é um desafio aos mais hábeis estatísticos, porém liberar os vértices 7 e 8 parecia ser um problema tratável (observe que junto com os vértices 1, ..., 6 eles formam um grupo em que o número de flechas entrando ou saindo do vértice é par: 2 ou 4). Realmente não foi preciso muito tempo para que o genial australiano Rodney J. Baxter (1971a) resolvesse o modelo de 8-V simétrico, assim chamado por considerar iguais os pesos estatísticos dos vértices 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, 7 e 8.

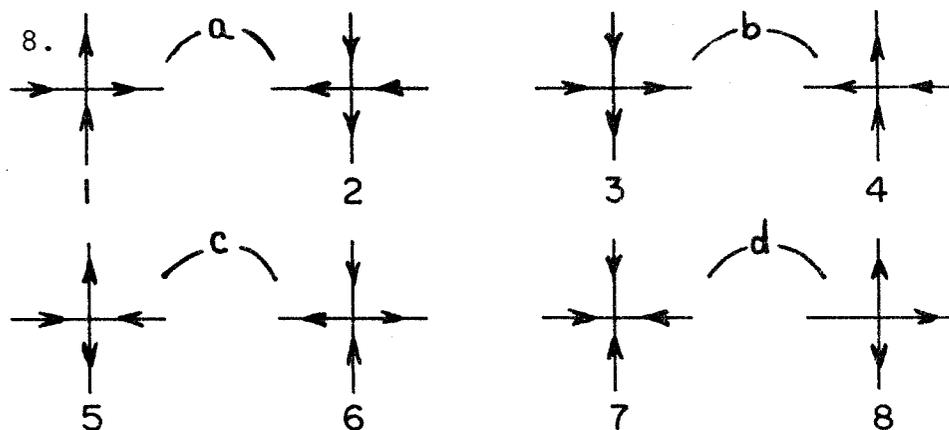


FIG. 10 - Os vértices e seus respectivos pesos no modelo de 8-V simétrico (ou modelo de Baxter).

O trabalho de Baxter comprovou de maneira inequívoca as expectativas de Sutherland (1970) segundo o qual o comportamento estranho do 6V poderia ser suprimido levando-se em conta os vértices 7 e 8.

Satisfações à parte, havia uma surpresa desafiadora nos resultados de Baxter: o expoente  $\alpha$ , que caracteriza a divergência do calor específico na transição, dependia dos pesos estatísticos atribuídos aos vértices. A expressão era

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi\alpha}{2(2-\alpha)} \right] = \frac{ab - cd}{ab + cd} \quad . \quad (\text{II.9})$$

A razão para a surpresa é que já se cultivava há algum tempo a idéia de que os expoentes críticos de uma transição de segunda ou maior ordem, dominadas por correlações de longo alcance, não deviam depender dos detalhes da interação (quando ela fosse de curto alcance). Essa conhecida "hipótese da universalidade", que estava sendo agora ameaçada pela solução exata de um modelo, tinha como defensores gente do mais alto gabarito. Dois deles, Leo Kadanoff e Franz Wegner (1971) apressaram-se em mostrar que a variação contínua dos índices críticos pode ocorrer, desde que compareça na hamiltoniana um operador marginal, isto é, um termo da forma  $\lambda \sum_r \tilde{u}_r$  onde  $\tilde{u}_r$  se transforma como  $(1/r^D)$  ao se fazer uma mudança de escala  $r' = r/s$  ( $D$  é a dimensão da rede). Para perceber o significado especial desse operador, cujo efeito não é aumentado nem diminuído por uma transformação de escala, vamos recordar a definição de "scaling": na região crítica a transição de fase é supostamente descrita por flutuações de grandezas locais, por exemplo a densidade de magnetização, densidade de energia, que denotaremos por  $O_\alpha(r)$ , onde  $\alpha$  rotula a quantidade envolvida. Consideremos um produto de  $n$  operadores diferentes

$$O = \prod_{i=1}^n O_{\alpha_i}(r_i) \quad (\text{II.10})$$

onde cada par de operadores do produto é separado por uma distância  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = R$  que é muito maior que o parâmetro de rede e muito menor que o comprimento de correlação. Dessa forma ao dizer que  $O_\alpha(r)$  escala como  $1/r^{\chi_\alpha}$  estamos afirmando que

$$\langle O \rangle_\lambda \approx \frac{1}{R^x}, \quad x = \sum_{j=1}^n x_{\alpha_j} \quad (\text{II.11})$$

Mais ainda, é preciso dizer que os  $x_\alpha$  são índices críticos, que descrevem o comportamento das variáveis, ou seja caracterizam o decaimento da correlação  $\langle O_\alpha(r_i) O_\alpha(r_j) \rangle$  com a distância  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ . Por exemplo no modelo de Ising (2-D), a magnetização tem um índice  $x_\sigma = 1/8$  e a densidade de energia<sup>(\*)</sup>  $x_\epsilon = 1$ .

Se os índices críticos dependerem de  $\lambda$  (coeficiente do operador marginal) então

$$\frac{\partial \langle O \rangle_\lambda}{\partial \lambda} = - \langle O \rangle_\lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_{\alpha_j}}{\partial \lambda} \right) \ln R + \dots \quad (\text{II.12})$$

Para ver como esses termos logarítmicos, que caracterizam a variação do índice crítico com a constante de acoplamento  $\lambda$ , podem aparecer lembre que

$$\frac{\partial \langle O \rangle_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sum O e^{-\beta H}}{\sum e^{-\beta H}} = \sum_r \langle O \tilde{u}_r \rangle_\lambda + \dots \quad (\text{II.13})$$

Expandindo o produto de operadores de acordo com Kadannoff (1969)

$$O_\alpha(\vec{r}_1) O_\beta(\vec{r}_2) = \sum_\gamma A_{\alpha\beta,\gamma}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) O_\gamma(\vec{r}_1 + \vec{r}_2/2) \quad (\text{II.14a})$$

onde

$$A_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{a_{\alpha\beta,\gamma} \left[ \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{x_\alpha + x_\beta - x_\gamma}} \quad (\text{II.14b})$$

---

(\*) Esse resultado será obtido no capítulo III

é fixado por "scaling"), nós teremos um termo da forma

$$O_{\alpha}(\vec{r}_1) \tilde{u}(\vec{r}) = \frac{a_{\alpha} O_{\alpha}(\vec{r}_1 + \vec{r}/2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^d} + \dots \quad (\text{II.15})$$

onde  $\alpha$  é o expoente que aparece na fórmula de redução quando  $\alpha = \gamma$  e  $O_{\beta} = \tilde{u}$ . Finalmente, levando em (II.13) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle O \rangle_{\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{|r-r_j|^{<R}} \langle O \rangle_{\lambda} + \dots \quad (\text{II.16})$$

Em duas dimensões obtém-se

$$\sum_{r < R} \frac{1}{r^2} \approx 2\pi \ln \left( \frac{R}{a_0} \right) \quad (\text{II.17})$$

Usando as equações (II.12), (II.16) e (II.17) chegamos ao resultado

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \lambda} = -2\pi a_{\alpha} \quad (\text{II.18})$$

o que mostra quantitativamente, a "capacidade" que um operador marginal tem de variar os índices críticos.

Finalmente, para mostrar que essa era exatamente a situação do modelo de Baxter, Kadanoff e Wegner notaram que a nível de função de partição, o 8-V é equivalente a um modelo de Ising com interação de 4 spins. De fato: escolha uma célula qualquer da rede e coloque no seu centro o spin para cima (ou para baixo). Em seguida coloque os spins nos quadrados vizinhos de acordo com a seguinte convenção: spins vizinhos na mesma horizontal (vertical) terão o mesmo sinal se a flecha entre eles apontar para cima (a direita); nos casos restantes eles terão sinais diferentes (figura 11).

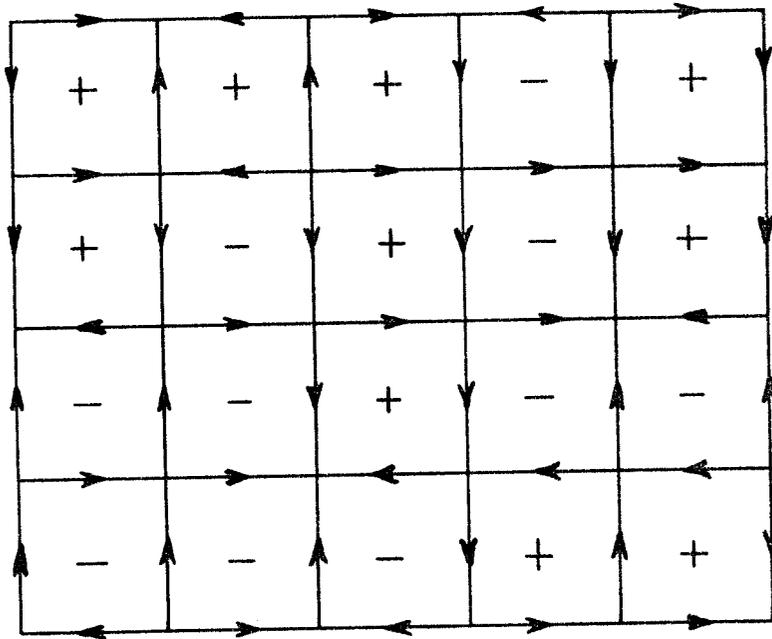


FIG. 11 - Uma configuração de vértices e sua possível representação por spins.

O peso  $\omega_i$  (a, b, c ou d) será representado na função de partição por um fator

$$A \exp \left\{ K_1 \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k+1} + K_2 \sigma_{j+1,k} \sigma_{j,k+1} + \lambda \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k+1} \sigma_{j+1,k} \sigma_{j,k+1} \right\} \quad (\text{II.19})$$

com

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln(ac/bd) \quad (\text{II.20a})$$

$$K_2 = \frac{1}{4} \ln(ad/bc) \quad (\text{II.20b})$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \ln(ab/cd) \quad (\text{II.20d})$$

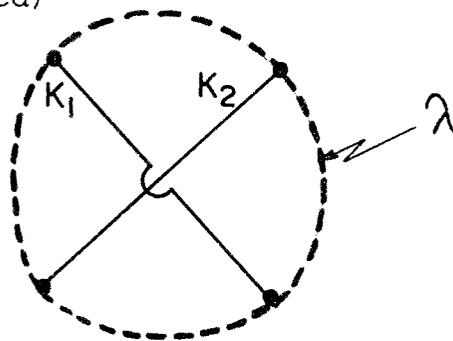


FIG. 12 - As interações entre os spins, necessárias para reproduzir os pesos dos vértices.

Com  $\lambda=0$  (não há interação de 4 spins) o sistema se divide em duas sub-redes de Ising (anisotrópicas e independentes) com a mesma temperatura de transição dada por

$$\sinh 2K_1 \sinh 2K_2 = 1 \quad (\text{II.21})$$

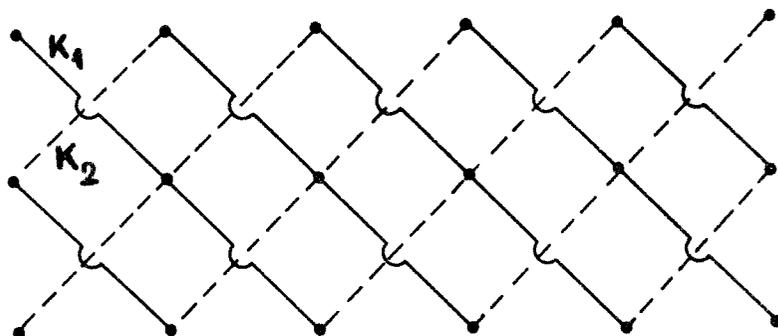


FIG. 13 - As duas sub-redes independentes

Quando  $\lambda \neq 0$  haverá um termo adicional (na hamiltoniana) da forma  $\lambda \sum_r \epsilon_r^{(1)} \epsilon_r^{(2)}$  onde  $\epsilon_r^{(1)}$  e  $\epsilon_r^{(2)}$  são as densidades de energia das sub-redes (1) e (2). Esse tipo de acoplamento permite que a magnetização de cada sub-rede seja livre para apontar no mesmo sentido que a outra ou em sentido oposto.

Dessa forma o estado fundamental tem degenerescência 4 e portanto a transição é do tipo  $\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{1}$ , exceto no caso  $\lambda=0$  (Ising) em que ela é do tipo  $\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ .

Para completar o raciocínio voltemos ao caso  $\lambda=0$ . Nessa situação a densidade de energia  $\epsilon_r$  de cada sub-rede (1 Ising) escala como  $(1/r)$  (veja Capítulo III) e dessa forma  $\epsilon_r^{(1)} \epsilon_r^{(2)}$  escala como  $(1/r)^2 = (1/r)^D$  satisfazendo portanto a condição necessária para que a universalidade seja violada.

É claro que quando  $\lambda \neq 0$ , a interação modifica o comportamento de  $\epsilon_r^{(1)}$  e  $\epsilon_r^{(2)}$  mas o que se espera é que o operador  $\tilde{u}_r = \epsilon_r^{(1)} \epsilon_r^{(2)}$  continue sendo marginal.

### II.B.1 - Os expoentes do 8-V

A equivalência obtida na secção anterior permite reescrever a equação (II.9) como

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi\alpha}{2(2-\alpha)} \right] = \tanh(2\lambda) \quad (\text{II.22})$$

desde que

$$a = A e^{K_1 + K_2 + \lambda} \quad (\text{II.23a})$$

$$b = A e^{-K_1 - K_2 + \lambda} \quad (\text{II.23b})$$

$$c = A e^{K_1 - K_2 - \lambda} \quad (\text{II.23c})$$

$$d = A e^{-K_1 + K_2 - \lambda} \quad (\text{II.23d})$$

Baxter também calculou o valor de  $\underline{\nu}$  (o expoente do comprimento de correlação) e verificou que

$$\underline{\nu} = \frac{\pi}{2 \cos^{-1}[-\tanh 2\lambda]} = \frac{\pi}{2\mu} \quad (\text{II.24})$$

Curiosamente, embora  $\alpha$  e  $\underline{\nu}$  tenham uma sofisticada dependência com  $\lambda$ , eles obedecem a relação de escala

$$2 - \alpha = \underline{\nu}d = 2\underline{\nu} \quad (\text{II.25})$$

De fato substituindo (II.25) em (II.22) obtém-se

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi(2-2\underline{\nu})}{2(2\underline{\nu})} \right] = \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2\underline{\nu}} - \frac{\pi}{2} \right] = \tanh 2\lambda$$

ou ainda

$$\cos \left( \frac{\pi}{2\underline{\nu}} \right) = -\tanh 2\lambda \quad (\text{II.26})$$

que é a própria equação (24).

Os outros expoentes não foram ainda obtidos exatamente, no entanto Baxter e Kelland (1974) fizeram uma proposta para

o expoente  $\beta_e$  que caracteriza o decaimento da polarização espontânea com a temperatura. É sempre bom lembrar que a polarização está relacionada com o sentido da flecha no modelo de vértices e na representação de Ising pode ser obtido como produto dos dois spins separados pela flecha. Assim:

$$P = \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1} \quad (\text{II.27})$$

e

$$P \propto (T - T_c)^{\beta_e} \quad (\text{II.28})$$

com

$$\beta_e = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4\mu} \quad (\text{II.29})$$

Novamente apesar da dependência em  $\lambda$ , há uma relação simples entre os expoentes:

$$4\beta_e = 2\nu - 1 \quad (\text{II.30})$$

só que essa não segue de nenhuma relação de escala tradicional, e por ser uma lei de escala adicional reduziria a apenas um o número de expoentes necessários para determinar todos os outros.

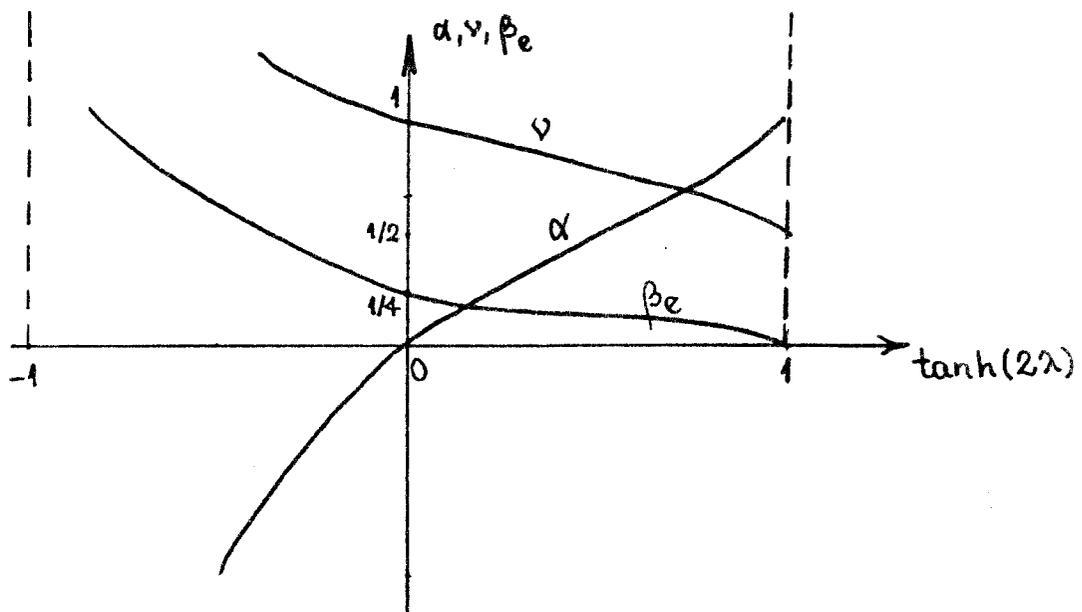


FIG. 14 - A dependência em  $\lambda$  dos expoentes críticos do modelo de Baxter

### II.C) A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Na maioria dos problemas de Mecânica Estatística o cálculo da função de partição se reduz à determinação do maior auto-valor da matriz de transferência. Na verdade o que se faz é dividir o sistema, mentalmente, num grande número de subsistemas idênticos e escrever o peso estatístico de um microestado (do sistema todo) como produto de fatores que representam, cada um, o efeito de se adicionar um subsistema (camada) ao existente. No caso dos modelos de vértices as camadas serão as  $N$  ligações verticais paralelas. Cada ligação pode estar orientada para cima ou para baixo e portanto será representada por uma variável de spin  $\alpha_j = \pm 1$ , onde  $j$  designa a coluna onde está a flecha em pauta.

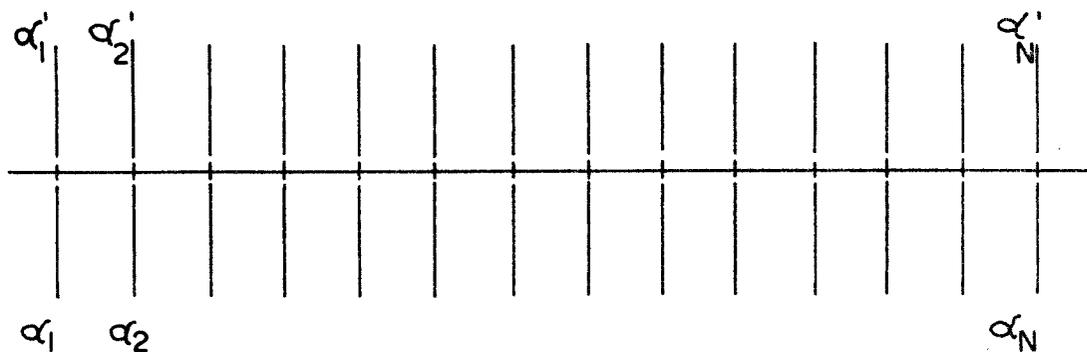


FIG. 15 - Sequência de duas camadas de ligações verticais.

O conjunto  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} = \alpha$  define a configuração da camada de ligações (barras) verticais e há  $2^N$  distintas. Suponha agora que  $\alpha$  e  $\alpha'$  correspondam à configuração de duas camadas sucessivas e introduza a matriz  $T$  ( $2^N \times 2^N$ ) com elementos

$$T_{\alpha|\alpha'} = \sum \exp \left( -\beta \sum_{j=1}^N n_j \epsilon_j \right) = \sum \prod_j \omega_j^{n_j} \quad (\text{II.31})$$

onde a soma é sobre todos os arranjos possíveis de flechas nas ligações horizontais (designadas por  $\lambda_j$ ), e  $n_j$  é o número de vértices do tipo  $j$ . A função de partição será

$$Z = \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_M} T_{\alpha_1|\alpha_2} T_{\alpha_2|\alpha_3} \dots T_{\alpha_M|\alpha_1} = \text{Tr} \{ T^M \} \quad (\text{II.32})$$

Chamando  $\lambda_j = +1$  ou  $-1$  conforme a flecha horizontal que precede o vértice  $j$  aponte para a direita ou para a esquerda teremos

$$T_{\alpha|\alpha'} = \sum_{\lambda_1} \dots \sum_{\lambda_N} \prod_{j=1}^N L_{\alpha_j \alpha'_j}^{\lambda_j \lambda_{j+1}} = \text{tr} \left\{ \prod_{j=1}^N L_j \right\} \quad (\text{II.33})$$

Note que  $\alpha_j, \alpha'_j, \lambda_j$  e  $\lambda_{j+1}$  especificam a configuração do  $j$ -ésimo vértice, isto é,

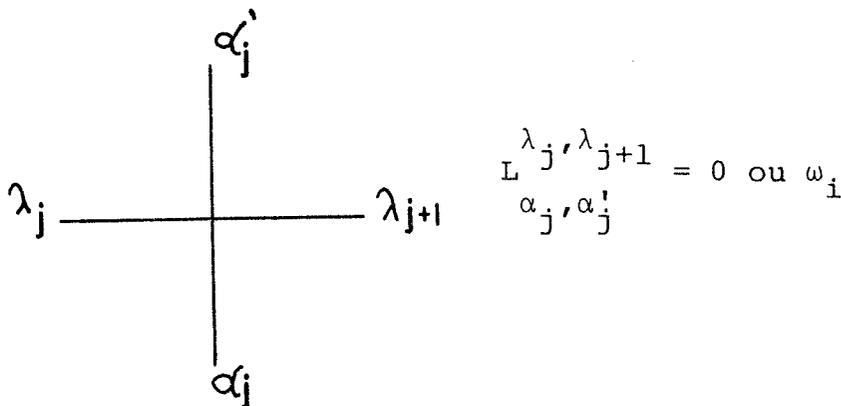


FIG. 16 - A configuração de um dado vértice.

conforme essa configuração seja proibida (9, ..., 16) ou uma das oito primeiras.  $L$  é uma matriz  $4 \times 4$  e pode ser dividida em quatro blocos (submatrizes)  $2 \times 2$ . Os índices  $\alpha, \alpha'$  servem para designar a localização do bloco na matriz e os  $\lambda_j, \lambda_{j+1}$  para indicar o elemento do bloco que nos interessa. Para montar a matriz basta variar os índices e ver que vértice é formado. Todos os índices iguais a 1 formam um vértice do tipo 1 cujo peso é  $\underline{a}$ . O elemento  $L_{12}^{21}$  corresponde ao vértice do tipo 5  $\left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \right)$  cujo peso é  $\underline{c}$ . Na matriz ele pertence ao 2º bloco superior (12) e dentro do bloco ele está na 2a. linha, 1a. coluna  $\begin{pmatrix} x & x \\ \blacksquare & x \end{pmatrix}$ . Dessa forma obtém-se para o 8-V simétrico



$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (II.34)$$

Introduzindo novas variáveis

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(c+d) & w_3 &= \frac{1}{2}(a-b) \\ w_2 &= \frac{1}{2}(c-d) & w_4 &= \frac{1}{2}(a+b) \end{aligned} \quad (II.35)$$

é possível escrever L em termos das matrizes de Pauli ( $\sigma^4 = I$ )

$$L_{\alpha, \alpha'}^{\lambda, \lambda'} = \sum_{i=1}^4 w_i \sigma_{\alpha\alpha'}^i \sigma_{\lambda\lambda'}^i \quad (II.36)$$

ou ainda como

$$L_j = \begin{pmatrix} w_3 \sigma_j^3 + w_4 \sigma_j^4 & w_1 \sigma_j^1 - i w_2 \sigma_j^2 \\ w_1 \sigma_j^1 + i w_2 \sigma_j^2 & -w_3 \sigma_j^3 + w_4 \sigma_j^4 \end{pmatrix} \quad (II.37)$$

O caso particular do 6V se obtém impondo  $d=0$ , isto é,  $w_1 = w_2$ . Nesse caso a matriz L é bloco-diagonal e isso se pode ver tanto da equação (II.34) como de (II.37) que passa a ser escrita

$$L_j^{6V} = \begin{pmatrix} w_3 \sigma_j^3 + w_4 \sigma_j^4 & 2w_1 \sigma_j^- \\ 2w_1 \sigma_j^+ & -w_3 \sigma_j^3 + w_4 \sigma_j^4 \end{pmatrix} \quad (II.38)$$

em virtude de

$$\sigma_j^+ = \frac{1}{2} (\sigma_j^1 + i\sigma_j^2) \quad (II.39a)$$

$$\sigma_j^- = \frac{1}{2} (\sigma_j^1 - i\sigma_j^2) \quad (II.39b)$$

A matriz de transferência do modelo de 6-V

$$T_{6V} = \text{tr} \left\{ \prod_{j=1}^N L_j^{6V} \right\} \quad (\text{II.40})$$

tem uma propriedade importante que permite a construção de seus auto-estados de uma maneira simples (comparada com o 8-V). Isso ocorre em virtude de  $T_{6V}$  ser uma soma (traço) de termos, cada um deles contendo o mesmo número de  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ . Portanto ao atuar em uma configuração  $\alpha$ ,  $T$  conserva o número de flechas para cima ou para baixo e dessa forma

$$\left[ T, \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \right] = 0 \quad (\text{II.41})$$

isto é,  $n$  = número de spins para cima é um bom número quântico porque  $T$  não mistura camadas com  $n$  diferentes. A explicação para esse fato é a seguinte: dos 6 primeiros vértices apenas dois permitem inverter o sentido das flechas verticais (5 e 6).

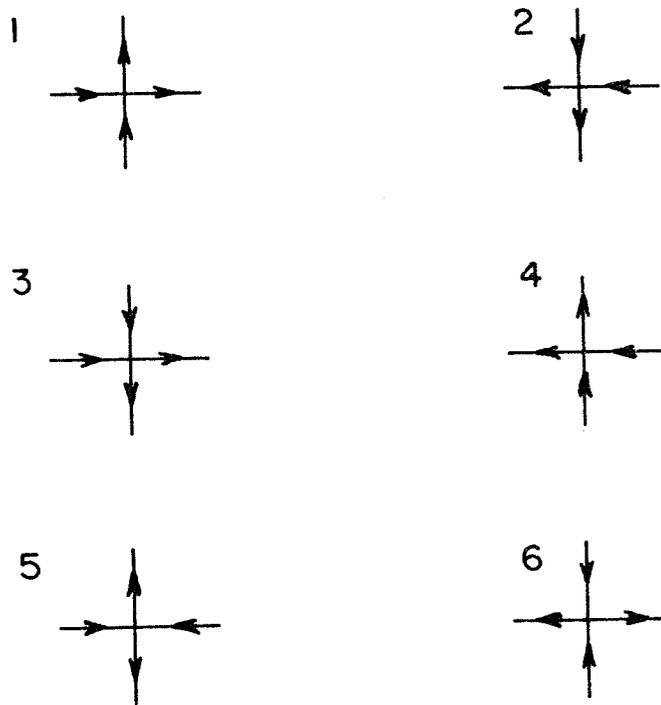


FIG. 17 - Os 6 vértices permitidos pela regra do gelo.

Entretanto, a condição periódica de contorno exige que o número de vértices 5 e 6 sejam idênticos (caso contrário não será possível voltar ao sentido original e fechar a cadeia na horizontal). Dessa forma os vértices do tipo 5 aumentam o número de flechas para cima enquanto os do tipo 6 desfazem essa vantagem, seguindo daí a conservação do número de flechas para cima (ou para baixo). A consequência dessa propriedade é que desde o início se conhece um auto-estado da matriz de transferência: todas as flechas para cima ( $\sum_j \sigma_j^Z = N$ ). Sobre esse estado de referência pode-se construir todos os outros auto-estados usando um ansatz de Bethe (1930) cujas "partículas" serão as flechas para baixo. Nesse trabalho, que foi desenvolvido por Lieb (1967a), ocorrem cancelamentos extraordinários entre os termos indesejáveis. Na leitura do trabalho de Lieb um outro fato chama a atenção do leitor: é o uso, quase constante, dos resultados há pouco obtidos por Yang e Yang (1966a,b) que aplicaram o método de Bethe ao modelo de Heisenberg anisotrópico (veja apêndice B) unidimensional.

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_j \left[ S_j^X S_{j+1}^X + S_j^Y S_{j+1}^Y + \Delta S_j^Z S_{j+1}^Z \right] \quad (\text{II.42})$$

Lieb percebeu que ao fazer  $\Delta = 1/2$  nas equações de Yang-Yang obtinha simplesmente as suas equações do gelo. Mais do que isso, ele se refere a eles quando se trata de mostrar que o seu auto-estado realmente é o estado fundamental no sub-espaço  $n \leq N/2$ . Finalmente ele não precisa resolver a equação integral (porque essa também já fora resolvida por Yang-Yang) para a densidade de estados  $\rho(k)$ .

A leitura do trabalho de Lieb não deixava dúvidas: havia com certeza alguma coisa, mais forte que uma simples coincidência, ligando esses dois problemas aparentemente tão distintos. Um ano mais tarde, McCoy e Wu (1968) deram o "status" de fato àquela ex-coincidência intrigante, ao mostrar que dado um 6-V arbitrário

existe sempre uma hamiltoniana que comuta com a matriz de transferência do modelo. Essa hamiltoniana é uma generalização (não hermitiana) do Heisenberg anisotrópico ( $H_{XXZ}$ )

$$H = -\frac{1}{2} \sum_j \left[ J_X S_j^X S_{j+1}^X + J_Y S_j^Y S_{j+1}^Y + J_Z S_j^Z S_{j+1}^Z + J_S (S_j^X S_{j+1}^Y - S_j^Y S_{j+1}^X) \right] \quad (\text{II.43})$$

com

$$J_X = J_Y = \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_4 \quad (\text{II.44a})$$

$$J_Z = \omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4 - c^2 \quad (\text{II.44b})$$

$$J_S = i(\omega_1 \omega_3 - \omega_2 \omega_4) \quad (\text{II.44c})$$

que no caso do 6-V simétrico ( $\omega_1 = \omega_2 = a$  e  $\omega_3 = \omega_4 = b$ ) reproduz o bem conhecido

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_j \left[ S_j^X S_{j+1}^X + S_j^Y S_{j+1}^Y + \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) S_j^Z S_{j+1}^Z \right] \quad (\text{II.45})$$

com  $\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  (que é 1/2 no caso do gelo em que  $a=b=c=1$ ).

O trabalho de McCoy e Wu abriu nova perspectiva nessa área e não demorou muito para que Sutherland (1970) mostrasse a comutatividade entre a hamiltoniana de Heisenberg completamente anisotrópica ( $H_{XYZ}$ ) e a matriz de transferência do 8-V simétrico ( $\omega_1 = \omega_2 = a$ ;  $\omega_3 = \omega_4 = b$ ). Nesse caso porém, havia uma grande frustração porque os auto-estados da hamiltoniana também não eram conhecidos. Bill Sutherland mesmo assim estava seguro de que o problema de  $H$  era mais fácil que o da matriz de transferência equivalente. A razão para essa fé é que  $H$  é a soma de  $N$  termos, bilineares nos operadores de spins, enquanto  $T$  é o traço de um produto envolvendo  $N$

matrizes cujos elementos são operadores. Dentro desse espírito , Sutherland chegou a investigar a hamiltoniana para obter informações a respeito do 8-V.

O trabalho de Baxter (1972) surpreende novamente ao resolver primeiro o problema dos 8-V para daí extrair informações a respeito da hamiltoniana de Heisenberg. E nessa passagem uma vez mais Baxter confirma a sua criatividade: ele mostra que a hamiltoniana que comuta com a matriz de transferência do 8-V é proporcional à derivada logarítmica da matriz de transferência em relação a um certo parâmetro (essa demonstração está feita no Apêndice C). Note que se  $T$  fosse da forma  $\exp(-\beta H)$ , a derivada de  $\log T$  em relação a  $(-\beta)$  já daria esse resultado. Entretanto , a situação não é tão simples.

#### II.D) - A SOLUÇÃO PARA OS MODELOS DE VÉRTICES PELO MÈTODO DO ESPALHAMENTO INVERSO QUÂNTICO

Na solução do 8-V simétrico Baxter produziu um verdadeiro dilúvio de parametrizações, comutações todas elas da maior importância. Entretanto, nesse trabalho nós só iremos destacar um resultado, não apenas por ter sido decisivo para a solução mas pela importância que ele viria ter cerca de 8 anos depois de proposto.

Expressando os pesos  $a, b, c$  e  $d$  em termos das funções elípticas de Jacobi

$$a:b:c:d = \text{sn}(v + \eta, k) : \text{sn}(v - \eta, k) : \text{sn}(2\eta, k) : k \text{sn}(2\eta, k) \text{sn}(v - \eta, k) \text{sn}(v + \eta, k) \quad (\text{II.46})$$

Baxter mostrou que duas matrizes de transferência que tiverem o mesmo valor de  $\eta$  e  $k$  comutarão mesmo quando seus  $v$ 's forem diferentes. Para chegar a isso ele precisou encontrar uma matriz  $R$  da mesma forma de  $L$  tal que

$$L_n(v) \otimes L_n(v') = R \left[ L_n(v') \otimes L_n(v) \right] R^{-1} \quad (\text{II.47})$$

ou ainda

$$R \left[ L_n(v) \otimes L_n(v') \right] = \left[ L_n(v') \otimes L_n(v) \right] R \quad (\text{II.48})$$

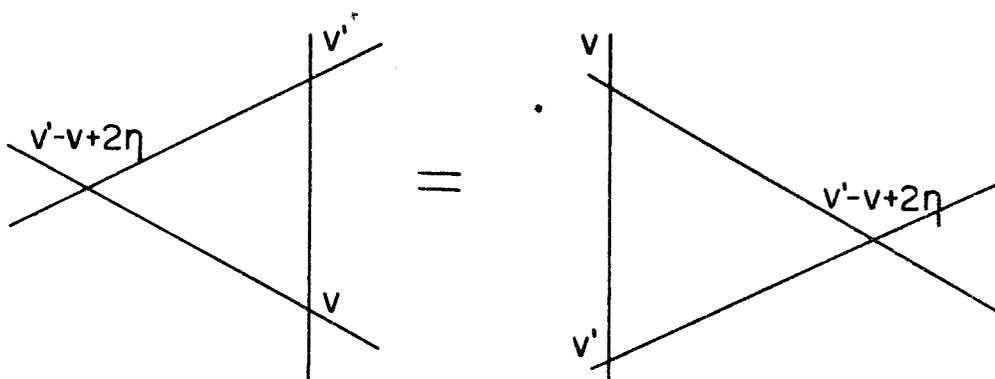


FIG. 18 - A relação dos triangulos (II.48)

A matriz  $R$  coincide com  $L_n(v-v'+2\eta)$ .

Nesse ponto nós abandonamos o trabalho de Baxter e começamos observando que a chamada matriz de monodromia

$$\tau = \prod_{n=1}^N L_n = \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} \quad (\text{II.49})$$

também satisfaz a equação (II.48). É claro que daí fica fácil mostrar que

$$T(v) = \text{tr } \tau = (A(v) + D(v)) \quad (\text{II.50})$$

comuta com  $T(v') = (A(v') + D(v'))$ . Porém mais do que isso nós podemos obter relações entre todos os operadores de  $\tau$  ( $A, B, C$  e  $D$ ). Esse avanço, que só foi conseguido em 1979 independentemente pelo grupo do Fadeev (na União Soviética) e Thacker (Estados Unidos), deu um novo suporte ao "ansatz" de Bethe 50 anos depois de seu primeiro sucesso (Bethe, 1930).

A fim de mostrar a transparência do método, nós encon

traremos os auto-vetores e auto-valores do 6-V. Nesse caso particular,  $d=0$  implica em  $k=0$ , e as funções elípticas de Jacobi tornam-se funções trigonométricas. Assim

$$a:b:c = \text{sen}(v + \eta) : \text{sen}(v - \eta) : \text{sen}(2\eta) \quad (\text{II.51})$$

que leva a

$$w_1 = w_2 = \frac{c}{2} = \rho \text{sen}(2\eta) \quad (\text{II.52a})$$

$$w_3 = \frac{1}{2}(a-b) = \rho \text{sen} \eta \cos v \quad (\text{II.52b})$$

$$w_4 = \frac{1}{2}(a+b) = \rho \text{sen} v \cos \eta \quad (\text{II.52c})$$

A matriz  $R$  é

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} \alpha(v, v') &= \frac{\text{sen}(v-v')}{\text{sen}(v-v'-2\eta)} \\ \beta(v, v') &= \frac{-\text{sen}(2\eta)}{\text{sen}(v-v'-2\eta)} \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Dessa forma a equação para  $\tau = \prod_{n=1}^N L_n = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\tau(v') \otimes \tau(v) = R[\tau(v) \otimes \tau(v')] R^{-1} \quad (\text{II.54})$$

especifica os relações de comutação entre os operadores  $A, B, C$  e  $D$ . Elas são

$$[A(v) + D(v), A(v') + D(v')] = 0 \quad (\text{II.55a})$$

$$[A(v), A(v')] = [B(v), B(v')] = 0 \quad (\text{II.55b})$$

$$\begin{aligned} A(v) B(v') &= \frac{1}{\alpha(v', v)} B(v') A(v) - \\ &- \frac{\beta(v', v)}{\alpha(v', v)} B(v) A(v') \end{aligned} \quad (\text{II.55c})$$

$$D(v) B(v') = \frac{1}{\alpha(v, v')} B(v') D(v) + \frac{\beta(v, v')}{\alpha(v, v')} B(v) D(v') \quad (\text{II.55d})$$

Como já vimos o estado com todos os spins para cima é um auto-estado da matriz de transferência

$$\left[ A(v) + D(v) \right] |\Omega_0\rangle = \left[ \text{sen}^N(v+\eta) + \text{sen}^N(v-\eta) \right] |\Omega_0\rangle \quad (\text{II.56})$$

Agora é preciso gerar os outros auto-vetores a partir de  $|\Omega_0\rangle$ . Considere então o vetor

$$|v_1, v_2, \dots, v_n\rangle = \prod_{i=1}^n B(v_i) |\Omega_0\rangle \quad (\text{II.57})$$

e aplique a ele  $(A(v) + D(v)) = T(v)$ .

Usando as relações (II.56) e (II.55) podemos mostrar que

$$T(v) |v_1, \dots, v_n\rangle = \Lambda(v, v_1, \dots, v_n) |v_1, \dots, v_n\rangle \quad (\text{II.58})$$

com

$$\Lambda(v, v_1, \dots, v_n) = \left[ \text{sen}(v+\eta)^N \right] \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\text{sen}(v-v_i-2\eta)}{\text{sen}(v-v_i)} \right] - \left[ \text{sen}(v-\eta)^N \right] \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\text{sen}(v-v_i+2\eta)}{\text{sen}(v-v_i)} \right] \quad (\text{II.59})$$

desde que

$$\begin{aligned} & \left[ \text{sen}(v_j - \eta) \right]^N \prod_{\substack{H=1 \\ H \neq j}}^n \left[ \text{sen}(v_j - v_\ell + 2\eta) \right] = \\ & = \left[ \text{sen}(v_j + \eta) \right]^N \prod_{\substack{H=1 \\ H \neq j}}^n \left[ \text{sen}(v_j - v_\ell - 2\eta) \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Dessa forma obtemos os auto-vetores e os auto-valores para a ma-

triz de transferência do modelo de 6V.

O modelo de Baxter completo tem dificuldades adicionais: as relações de comutação são mais complicadas e o fato de  $L$  não ser bloco-diagonal ( $d \neq 0$ ) implica na impossibilidade de escolher um "vácuo" local que possa ser aniquilado pelo bloco inferior esquerdo de  $L$ . Entretanto há uma certa liberdade na escolha do vértice  $L_\ell$  que permite introduzir um vértice "equivalente"

$$L'_\ell = M_\ell^{-1} L_\ell M_{\ell+1} \quad (\text{II.61})$$

onde os  $M_\ell$ 's formam um conjunto de matrizes  $2 \times 2$  (número  $c$ ). A matriz  $\tau$  construída a partir dos  $L_\ell$ , novos tem elementos que são combinações lineares de  $A, B, C$  e  $D$ .

$$\tau' = L'_1 L'_2 \dots L'_N = M_1^{-1} \tau M_{N+1} \quad (\text{II.62})$$

Com uma escolha apropriada da transformação  $M_n$  é possível encontrar (Takhtajan e Fadeev, 1979) um estado de spin local que seja aniquilado pelo bloco inferior esquerdo do  $L'$ . Para uma discussão detalhada recomendamos o trabalho dos russos e os artigos originais de Baxter (1972a,b; 1973a,b,c).

## II.E) - A TEORIA DE CAMPOS SUBJACENTE

Schultz, Mattis e Lieb (1964) mostraram que há uma estreita ligação entre o modelo de Ising na rede bidimensional e o gás de fermions livres em uma dimensão (espacial e uma temporal). Como o modelo de Baxter é uma generalização do modelo de Ising, era natural procurar pela teoria de fermions associada a ele. Acrescentando-se a isso, o fato de que as soluções do modelo de Thirring (1958) e de Luttinger (1963) exibem um comportamento não universal (à semelhança do 8-V), e teremos uma forte razão para acreditar no sucesso dessa empresa.

De fato Luther e Peschel (1975) e Luther (1976,1977) mostraram que a hamiltoniana de Heisenberg (e portanto o modelo de 8-V na rede bidimensional) tem como limite contínuo uma teoria quântica de campos. Partindo de

$$H_{XYZ} = - \sum_{i,\alpha} J_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{i+1}^{\alpha} \quad (\text{II.63})$$

(onde  $\alpha = X, Y, Z$  e  $S_i$  é um operador de spin 1/2) e fazendo uma transformação de Jordan-Wigner (1930), cujo mérito é passar de operadores com relações de comutação não usuais (Paulions) para fermions, temos

$$S_j^+ = a_j^+ \exp\{i\pi \sum_0^{j-1} a_j^+ a_j\} \quad S_j^Z = a_j^+ a_j - \frac{1}{2} \quad (\text{II.64})$$

e

$$H = \sum_j H_s(j) \quad (\text{II.65})$$

com

$$\begin{aligned} H_s(j) = & - \frac{1}{2} i v (a_j^+ a_{j+1} - a_{j+1}^+ a_j) + \\ & + \frac{1}{2} i J_{\perp} (a_j^+ a_{j+1}^+ + a_j a_{j+1}) (-1)^j + J_Z a_j^+ a_j a_{j+1}^+ a_{j+1} \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

Na equação anterior

$$2v = J_X + J_Y \quad (\text{II.67a})$$

e

$$2J_{\perp} = J_X - J_Y \quad (\text{II.67b})$$

e os termos lineares em  $n_j = a_j^+ a_j$  foram eliminados porque o estado fundamental tem magnetização zero. Na verdade isso implica que a média de  $n_j$  seja 1/2 e novos operadores  $n_j = n_j - \frac{1}{2}$  podem ser definidos. Em teoria de muitos corpos isso corresponde a es-

colher o potencial químico como nível de referência). Chamando  $s$  o parâmetro de rede  $s = L/N$  queremos converter a cadeia de  $N$  estados de fermions, a uma corda com um infinito número de estados fermiônicos ( $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, Na = L = \text{finito}$ ). Define-se então dois campos

$$\psi_c(k) = (2/L)^{1/2} \sum_n a_n e^{ikns} \quad (II.68a)$$

$$\psi_b(k) = (2/L)^{1/2} \sum_n a_{n+1} e^{ik(n+1)s} \quad (II.68b)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

e os operadores densidades

$$\rho_c = \frac{1}{s} a_n^+ a_n \quad (II.69a)$$

e

$$\rho_b = \frac{1}{s} a_{n+1}^+ a_{n+1} \quad (II.69b)$$

onde  $n$  é par e índices repetidos significa soma. Os vetores de onda ( $k$ ) residem na 1ª. zona de Brillouin  $-\frac{\pi}{2s} < k < \frac{\pi}{2s}$ , e as componentes do spinor  $\psi$  satisfazem as equações

$$i\dot{\psi}_c(k) = v \text{sen}(ks) \psi_b(k) - i \text{cos}(ks) \psi_b^+(-k) - 4 \frac{Jz}{N} \sum_{k'} \text{cos}(k's) \psi_c(k-k') \rho_b(k') \quad (II.70a)$$

$$i\dot{\psi}_b(k) = v \text{sen}(ks) \psi_c(k) + i \text{cos}(ks) \psi_c^+(-k) - 4 \frac{Jz}{N} \sum_{k'} \text{cos}(k's) \psi_b(k-k') \rho_c(k') \quad (II.70b)$$

A prescrição para determinar a densidade de hamiltoniana na  $H_c(x)$  a partir da hamiltoniana de rede  $H_s(j)$  é

$$\sum_{j=1}^N H_s(j) \rightarrow \int_0^L dx H_c(x) \quad (II.71)$$

onde  $x = sj$  é uma distância fixa ( $s \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$  tal que  $x$  seja fixo na razão  $\frac{j}{N} = \frac{x}{L}$ ). Dessa forma com  $m = (J_{\perp}/S)$  teremos

$$i\dot{\psi}_b(k) = vk\psi_c(k) - im_0\psi_c^+(-k) - 4\frac{J_z}{L} \sum_{k'} \psi_c(k-k') \rho_b(k') \quad (\text{II.72a})$$

$$i\dot{\psi}_c(k) = vk\psi_b(k) + im_0\psi_b^+(-k) - 4\frac{J_z}{L} \sum_{k'} \psi_b(k-k') \rho_c(k') \quad (\text{II.72b})$$

que exceto pelo  $\psi^+$  (ao invés de  $\psi$ ) aparecendo no termo de massa são exatamente as equações de campo do modelo de Thirring massivo.

Dessa equivalência várias informações foram extraídas. O próprio Luther (1976) foi capaz de determinar o espectro (na realidade o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados) do gás de Fermi 1-d a partir do conhecimento do espectro de  $H_{XYZ}$  (Baxter 1972,b; Johnson et all. 1972). Lüscher construiu infinitas cargas locais conservadas para o modelo de Thirring massivo na rede (uma das possíveis discretizações do modelo). Finalmente o próprio Luther (1976) provou a relação de escala adicional ( $4\beta_e = 2v - 1$ ) examinando o comportamento da função de correlação  $S_j^Z S_{j+n}^Z$  (que é a correlação Polarização-Polarização) e da função de correlação energia-energia representada por

$$\left( S_j^X S_{j+1}^X - S_j^Y S_{j+1}^Y \right) \left( S_{j+n}^X S_{j+n+1}^X - S_{j+n}^Y S_{j+n+1}^Y \right) .$$

A relação de escala adicional nessa linguagem toma a forma

$$x_P^{8-V} = \frac{x_\epsilon^{8-V}}{4} \quad (\text{II.73})$$

onde  $(2x)$  caracteriza o decaimento polinomial da função de correlação. Por exemplo

$$\langle \epsilon(r_i) \epsilon(r_j) \rangle \propto \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{2x_\epsilon}} \quad (\text{II.74})$$

Para ver que a relação (II.73) é idêntica à  $4\beta_e = 2\nu - 1$  basta usar em (II.73) uma conhecida relação de escala que liga  $\beta_e$  ao  $x_p(\eta/2)$  (Amit, 1978)

$$\beta_e = \frac{\nu}{2}(d - 2 + 2x_p) = \nu x_p \quad (\text{II.75})$$

e ainda que

$$x_\varepsilon = 2 - \frac{1}{\nu} \quad (\text{II.76})$$

(veja Capítulo IV).

### III. O MODELO DE ISING

#### III.a) INTRODUÇÃO

Nesse capítulo nós usamos o modelo de Ising, (2-d) numa rede quadrada, para apresentar as técnicas que serão utilizadas posteriormente no estudo do modelo de Ashkin-Teller. Como sabemos o modelo de Ising é definido pela ação

$$A = - \frac{J}{2} \sum_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle} \sigma_{\vec{i}} \sigma_{\vec{j}} \quad (\text{III.1})$$

onde  $\sigma_{\vec{i}}$  é uma variável de spin que pode assumir dois valores (+1 ou -1) e  $J$  é a energia ganha se dois spins passam de anti-paralelos a paralelos. A soma  $\sum_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}$  significa que só devem ser considerados na soma vizinhos mais próximos.

A termodinâmica desse sistema pode ser obtida a partir da função de partição

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{K \sum_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle} \sigma_{\vec{i}} \sigma_{\vec{j}}\right\} \quad (\text{III.2})$$

com

$$\sum_{\{\sigma\}} = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_{N^2} = \pm 1} \quad (\text{III.3})$$

e  $\beta = (kT)^{-1}$ ,  $K = \beta J$ .

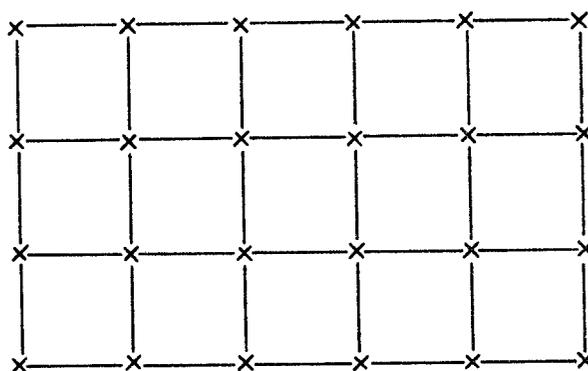


FIG.19 - No modelo de Ising só interagem entre si os vizinhos mais próximos.

Em 1944 Onsager provou que esse modelo tem uma transição de fase de 2a. ordem (segundo a velha classificação de Ehresfest) numa temperatura crítica dada por

$$\frac{J}{kT_c} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad . \quad (\text{III.4})$$

Da solução de Onsager (1944) sai

$$\nu = 1 \quad (\text{III.5})$$

isto é, o expoente que caracteriza a divergência do comprimento de correlação na temperatura crítica é igual a 1.

Entretanto, apesar de todo o folclore, só em 1952 Yang foi capaz de obter o expoente  $\beta$  da magnetização

$$\beta = \frac{1}{8} \quad (\text{III.6})$$

Todos esses cálculos são extremamente difíceis e em geral não são aproveitáveis na solução de outros problemas. Essa é pelo menos uma razão forte para se tentar obter índices críticos por métodos mais gerais e diretos. Esse é o objetivo desse capítulo. Antes disso porém, vamos encontrar a matriz de transferência do modelo.

## II.B) A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

A matriz de transferência que, conforme já vimos, reduz o problema bidimensional a um unidimensional, será introduzida usando já uma notação adequada para a próxima seção. Chame as duas direções da rede quadrada  $x$  e  $\tau$ , conforme mostra a figura. O estado do sistema em  $\tau=0$  é determinado pelos valores atribuídos às  $N$  variáveis  $\sigma_{i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, N$ ;  $i_2 = 1$ ). Indicando por  $\alpha_1$  o conjunto desses spins teremos

$$\alpha_1 = (\sigma_{1,1}; \sigma_{2,1}; \sigma_{3,1}; \dots; \sigma_{N,1}) \quad .$$

Em geral,  $\alpha_n$  especifica o estado da  $n$ -ésima linha ( $n = 1, 2, \dots, M$ ).

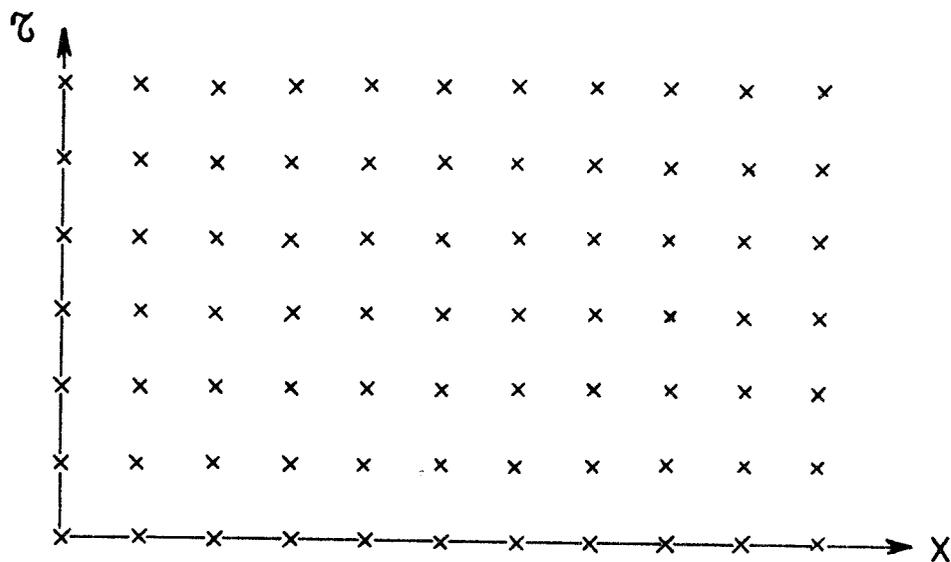


FIG.20 - A matriz de transferência mede a variação da função de partição ao adicionar uma camada (x) na direção ( $\tau$ )

Como a matriz de transferência liga a camada  $\alpha_{n+1}$  à camada  $\alpha_n$  nós podemos entendê-la como um operador de evolução (ã semelhança de  $e^{iHt/\hbar}$  que permite obter  $\psi(t)$  a partir de  $\psi(0)$ ) num tempo discreto. Porém em virtude de não haver um verdadeiro tempo essa "evolução" ocorre num tempo imaginário, isto é, T será da forma  $\exp(-\tau H)$ . Como cada spin tem duas possibilidades a matriz de transferência tem dimensão  $2^N$  e seus elementos de matriz são

$$\begin{aligned}
 T(\alpha_j, \alpha_{j+1}) &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^N K_x \sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j} \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N K_\tau \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1} \right\} \\
 &= T_1(\alpha_j, \alpha_j) T_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \quad (\text{III.7})
 \end{aligned}$$

onde consideramos o modelo anisotrópico ( $K_x \neq K_\tau$ ). Note que T é o produto de uma matriz diagonal  $T_1$  por uma outra matriz  $T_2$  que tem elementos fora da diagonal. Não é difícil mostrar que as duas podem ser escritas em termos dos operadores quânticos de spin. Com essa finalidade representaremos os spins para cima e para baixo pelos vetores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  que são auto-vetores de  $\hat{\sigma}^Z$  com auto-valores +1 e -1 respectivamente.

Designando por  $|i\rangle$  o estado de spin na  $i$ -ésima coluna então o estado de uma linha será dado por

$$|\alpha\rangle = \prod_{i=1}^N |i\rangle$$

onde o produto acima indicado é produto direto. Para agir nesse espaço produto nós definimos o operador

$$\sigma_i^Z = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_i^Z \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes |1\rangle \quad (\text{III.8})$$

↑  
i-ésima posição

e portanto  $T_1$  é simplesmente

$$T_1 = \exp \left\{ K_x \sum_i \sigma_i^Z \sigma_{i+1}^Z \right\} \quad (\text{III.9})$$

A representação para  $T_2$  é um pouco mais sofisticada.

$$T_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) = \exp \left\{ \sum_i K_\tau \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1} \right\} = \prod_{i=1}^N e^{K_\tau \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}} \quad (\text{III.10})$$

é produto de termos do tipo

$$e^{K_\tau \sigma_i \sigma'_i} = e^{K_\tau} \delta_{\sigma_i \sigma'_i} + e^{-K_\tau} \delta_{\sigma_i, -\sigma'_i} \quad (\text{III.11})$$

que pelo uso de

$$\langle i' | |1\rangle |i\rangle = \delta_{\sigma_i \sigma'_i} \quad (\text{III.12a})$$

e

$$\langle i' | \hat{\sigma}^X |i\rangle = \delta_{\sigma_i, -\sigma'_i} \quad (\text{III.12b})$$

podem ser escritos

$$e^{K_\tau \sigma_i \sigma'_i} = \langle i' | e^{K_\tau} |1\rangle + e^{-K_\tau} \hat{\sigma}^X |i\rangle \quad .$$

Com a introdução de

$$\sigma_i^X = \uparrow\uparrow \otimes \uparrow\uparrow \otimes \dots \otimes \hat{\sigma} \otimes \uparrow\uparrow \dots \otimes \uparrow\uparrow \quad (\text{III.13})$$

$T_2$  fica

$$T_2 = \prod_{i=1}^N \left[ e^{K_\tau} + e^{-K_\tau} \sigma_i^X \right] \quad (\text{III.14})$$

Os fatores  $\left[ e^{K_\tau} + e^{-K_\tau} \hat{\sigma}_i^X \right]$  podem ser reescritos ainda

como

$$C e^{K_\tau^* \hat{\sigma}_i^X} \quad .$$

De fato como  $(\hat{\sigma}_i^X)^2 = \uparrow\uparrow$

$$C e^{K_\tau^* \hat{\sigma}_i^X} = C \cosh K_\tau^* + \hat{\sigma}_i^X C \sinh K_\tau^*$$

que fornece o fator desejado  $(e^{K_\tau} + e^{-K_\tau} \hat{\sigma}_i^X)$  desde que

$$C = (2 \sinh 2K_\tau)^{1/2}$$

e

$$K_\tau^* = -\frac{1}{2} \ln [\tanh K_\tau] \quad (\text{III.15})$$

Finalmente temos para  $T$  a expressão

$$T = (2 \sinh 2K_\tau)^{N/2} e^{K_X \sum_i \sigma_i^Z \sigma_{i+1}^Z} e^{K_\tau^* \sum_i \sigma_i^X} \quad (\text{III.16})$$

Como  $\sigma_i^Z$  não comuta com  $\sigma_i^X$

$$T \neq C^N \exp \{ K_X \sum_i \sigma_i^Z \sigma_{i+1}^Z + K_\tau^* \sum_i \sigma_i^X \}$$

e os auto-valores de  $T$  não são iguais aos do operador no expoente. Na próxima secção nós vamos ver como é que esse problema pode ser simplificado.

## III.C) - HAMILTONIANA DE TEMPO CONTÍNUO

É sempre possível definir um operador  $\hat{H}$  pela fórmula

$$\hat{H} = - \frac{1}{\tau} \ln T \quad (\text{III.17})$$

onde  $\tau$  é o espaçamento da rede na direção "temporal". Sabendo os auto-valores de  $\hat{H}$  também conhecemos os de  $T = e^{-\tau\hat{H}}$ . Naturalmente diagonalizar  $\hat{H}$  é tão difícil quanto diagonalizar  $T$ . O problema pode no entanto ser consideravelmente simplificado fazendo-se o limite de  $\tau \rightarrow 0$  (tempo contínuo), tomando-se o cuidado de ajustar os acoplamentos  $K_x$  e  $K_\tau$  de maneira que se obtenha um resultado finito:

$$H = \lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{H} \quad (\text{III.18})$$

No caso do modelo de Ising, por exemplo,  $T$  é produto de duas exponenciais de operadores que não comutam

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2} [A,B] + \dots}$$

que leva a um  $\hat{H}$  dado por

$$\hat{H} = - \frac{1}{\tau} \left\{ K_x \sum_{j=1}^N \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + K^* \sum_{j=1}^N \sigma_j^Z + \right. \\ \left. + 2K_x K_\tau^* \sum_{j=1}^N i \sigma_j^Y \sigma_{j+1}^Z + \dots + \text{cte} \right\} \quad (\text{III.19})$$

onde  $\text{cte} = \frac{N}{2} \ln \{2 \sinh 2K_\tau\}$  é uma constante aditiva irrelevante para a definição de  $\hat{H}$  que omitiremos a seguir. Como se vê a expressão para  $\hat{H}$  é bastante complicada. O limite  $\tau \rightarrow 0$  no entanto faz, como veremos abaixo, desaparecer todos os comutadores. Nesse limite, é preciso que

$$K_x \propto \tau \quad (\text{III.20a})$$

$$K_\tau^* \propto \tau \quad (\text{III.20b})$$

para que o  $\tau$  do denominador seja cancelado, nos dois primeiros termos e os outros sejam de ordem superior em  $\tau$ . Essa restrição obriga tomar o limite de acoplamento fraco na horizontal. Na vertical não se vê diretamente qual é a restrição mas lembrando que

$$K_{\tau}^* = -\frac{1}{2} \ln \tanh K_{\tau} \quad (\text{III.21})$$

e que  $K_{\tau}^*$  deve ir a zero concluímos que o acoplamento na direção temporal dever ser extremamente forte.

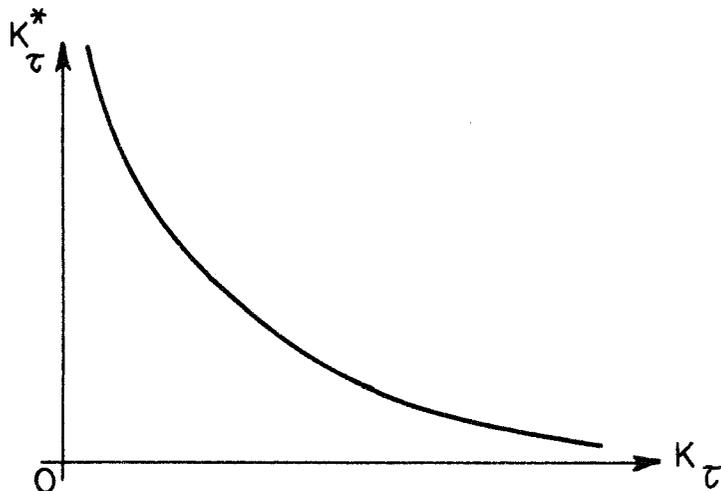


FIG.21 - O acoplamento forte ( $K_{\tau}$ ) e o seu "dual"

Trabalhando um pouquinho mais com a equação acima vemos que para  $K_{\tau} \rightarrow \infty$

$$\tanh K_{\tau} = \frac{e^{K_{\tau}} - e^{-K_{\tau}}}{e^{K_{\tau}} + e^{-K_{\tau}}} = \frac{1 - e^{-2K_{\tau}}}{1 + e^{-2K_{\tau}}} \approx 1 - 2e^{-2K_{\tau}}$$

e portanto

$$-\frac{1}{2} \ln \tanh K_{\tau} \approx e^{-2K_{\tau}} \quad (\text{III.22})$$

de modo que  $K_{\tau}$  deve ir a infinito tal que  $e^{-2K_{\tau}} \propto \tau$ . Esse  $\tau$  por enquanto é um parâmetro arbitrário que deve tender a zero, para que a evolução determinada por  $T$  passe a ser contínua. Podemos fi-

xar a "escala" de  $\tau$  identificando-o da maneira abaixo (Fradkin e Susskind, 1978)

$$\tau = e^{-2K_\tau} \quad (\text{III.23})$$

e a seguir

$$K_x = \Lambda \tau = \Lambda e^{-2K_\tau} \quad (\text{III.24})$$

Resulta então para H

$$H = \lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{H} = -\Lambda \sum_j \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z - \sum_j \sigma_j^X \quad (\text{III.25})$$

Alguns comentários sobre esse operador são agora imprescindíveis. Na verdade esse H só determina a dinâmica do modelo de Ising numa vizinhança do ponto crítico, e  $\Lambda$  é exatamente uma medida do afastamento de  $T_c$ . A razão para que H descreva o sistema apenas nas vizinhanças da transição é que o limite de tempo contínuo é uma transformação do grupo de renormalização e que porisso mesmo somente preserva as propriedades do sistema nas proximidades do ponto fixo. De fato, ao fazer  $\tau \rightarrow 0$  mudamos a escala vertical e para manter a mesma física a grandes distâncias reescalamos os parâmetros

$$\tau \rightarrow \tau' \quad \{K_\alpha\} \rightarrow \{K'_\alpha\} \quad .$$

É possível entender intuitivamente o que está ocorrendo (Kogut 1979, Fradkin e Susskind 1978): considere a função de correlação spin-spin com  $K_x = K_\tau$ . A rede então é simétrica sob rotações de  $90^\circ$  e a função de correlação

$$\Gamma(n) = \langle \sigma_n^Z \sigma_0^Z \rangle \quad (\text{III.26})$$

exibe essa simetria, Curvas de  $\Gamma(n)$  constante são mostradas na figura 22. Elas são aproximadamente circulares, para grandes valores de n.

Se o valor de  $K_\tau$  for aumentado então as correlações na direção  $\tau$  serão mais fortes, e as curvas de  $\Gamma$  constantes serão distorcidas (elipses com eixo maior na direção  $\tau$ ). Um exemplo é demonstrado na figura 23.

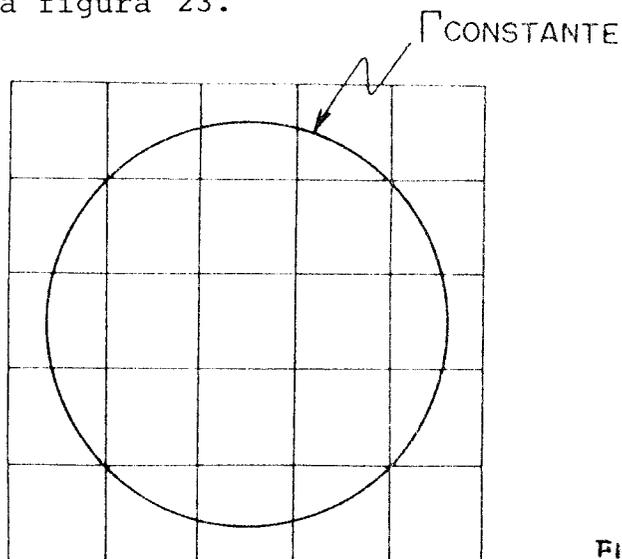


FIG. 22

Mas como queremos preservar a mesma física nas duas formulações precisamos compensar a desigualdade  $K_\tau > K_x$  distorcendo a rede, isto é fazendo  $\tau < s$ . Um ajuste adequado deixará as curvas de  $\Gamma$  constante invariantes, conforme se mostra na figura 24.

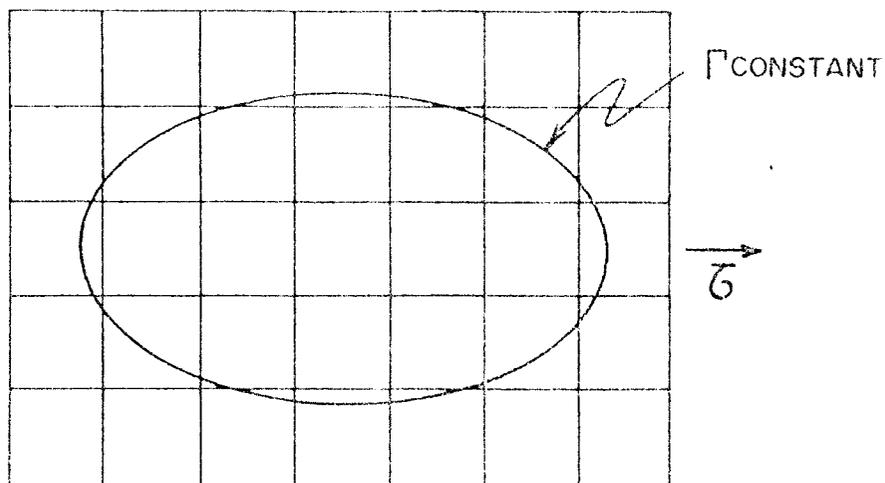


Fig. 23

Quando  $K_\tau \rightarrow \infty$ , o espaçamento da rede na direção tempo - ral será reduzido a zero. A relação (III.23) garante que a física a grandes distâncias das duas formulações seja essencialmente a mesma.

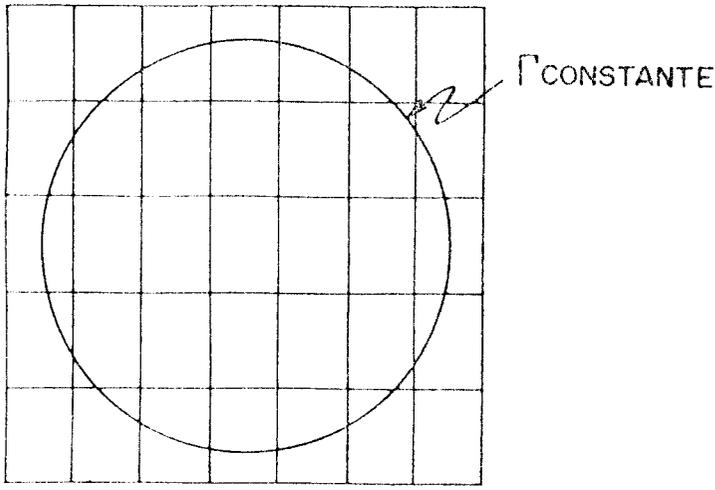


Fig.24

É possível entender também o significado de  $\Lambda$ , usando a condição de criticalidade do Ising anisotrópico

$$\sinh(2K_x) \sinh(2K_\tau) = 1 \quad (III.27)$$

Essa curva é mostrada num gráfico de  $K_x$  contra  $K_\tau$  onde as fases são rotuladas apropriadamente.

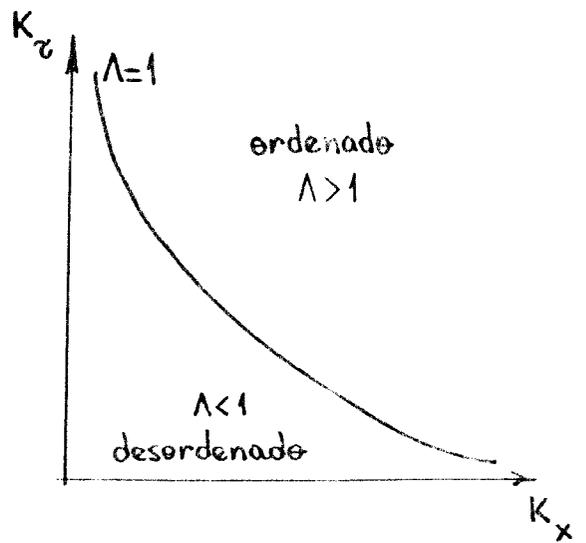


Fig.25

Quando  $K_\tau \rightarrow \infty$

$$\sinh(2K_\tau) \rightarrow \frac{1}{2} \exp(2K_\tau)$$

$$\sinh(2K_x) \rightarrow 2K_x$$

de tal maneira que para satisfazer (III.27) é preciso que

$$K_x = e^{-2K_\tau} \quad (III.28)$$

ou seja (comparando com III.24)

$$\Lambda = 1$$

Na próxima seção nós usaremos H para estudar a região crítica do modelo bidimensional clássico. De acordo com as considerações anteriores ela tem o mesmo diagrama de fases e expoentes críticos do Ising (estão na mesma classe de universalidade).

### III.D) - OS ÍNDICES CRÍTICOS

Para obter índices críticos do modelo de Ising, sem passar pela solução de Onsager, partiremos de H e faremos uma transformação de Jordan-Wigner (1930). Essa transformação consiste em definir spinores  $\eta_\alpha(j)$  como funções não locais dos  $\sigma$ 's. Os  $\eta$ 's satisfazem relações de comutação de fermions enquanto os  $\sigma$ 's não têm simetria definida. Eles são relacionados por

$$\eta_1(j) = \prod_{k < j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \quad (\text{III.29a})$$

$$\eta_2(j) = \prod_{k \leq j} \sigma_k^X \sigma_j^Z . \quad (\text{III.29b})$$

Os  $\eta$ 's satisfazem

$$\{\eta_\alpha(i), \eta_\beta(j)\} = 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \quad (\text{III.30})$$

e são hermitianos

$$\eta_\alpha^2 = 1 .$$

Apesar de  $\eta_\alpha(i)$  ser uma função não local dos  $\sigma$ 's (devido ao "rabo" de Jordan-Wigner  $\prod \sigma^X$ ) a hamiltoniana é local em  $\eta_\alpha$ , desde que

$$\eta_1(j+1) \eta_2(j) = i \sigma_{j+1}^Z \sigma_j^Z \quad (\text{III.31})$$

e

$$\eta_1(j) \eta_2(j) = -i \sigma_j^X . \quad (\text{III.32})$$

Dessa forma

$$H = \sum_j \left[ i \Lambda \eta_1(j+1) \eta_2(j) - i \eta_1(j) \eta_2(j) \right] \quad (\text{III.33})$$

que gera as seguintes equações de movimento para os  $\eta$ 's:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(j) &= [\eta_1(j), H] = 2i\Lambda\eta_2(j-1) - 2i\eta_2(j) \\ &= 2i(\Lambda-1)\eta_2(j-1) - 2i[\eta_2(j) - \eta_2(j-1)] \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

onde  $\eta_2(j-1)$  foi somado e subtraído.

Analogamente

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2(j) &= [\eta_2(j), H] = -2i\Lambda\eta_1(j+1) + 2i\eta_1(j) \\ &= -2i(\Lambda-1)\eta_1(j+1) - 2i[\eta_1(j+1) - \eta_1(j)] \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Para reunir as duas equações numa só define-se o spinor de Majorana (auto-conjugado) por

$$\psi(j) = \begin{pmatrix} \eta_1(j+1) \\ \eta_2(j) \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Chamando  $t = 2\tau$  obtém-se para  $\psi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(j) = i(\Lambda-1) \begin{pmatrix} \eta_2(j) \\ -\eta_1(j+1) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \eta_2(j+1) - \eta_2(j) \\ \eta_1(j+1) - \eta_1(j) \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

que com a ajuda das matrizes

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2$$

se deixa escrever como

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - M] \psi = 0 \quad (\text{III.38})$$

onde  $\mu = 1, 2$ , índices repetidos subentende soma,  $M = (\Lambda - 1)$ ,  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\partial_1$  é proporcional à derivada espacial, e definido como

$$\partial_1 \psi(j) = \begin{pmatrix} \eta_1(j+1) - \eta_1(j) \\ \eta_2(j+1) - \eta_2(j) \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

que não é  $\psi(j+1) - \psi(j)$ .

Como se vê a equação (III.38) é a equação de Dirac para um fermion livre de massa  $M = \Lambda - 1$  na rede.

Outro exercício interessante é expressar  $H$  em termos dos  $\psi$ 's. O resultado é

$$H = \frac{1}{2} \sum_j [iM \bar{\psi}(j)\psi(j) + \psi(j) \gamma^1 \partial_1 \psi(j)] \quad (\text{III.40})$$

onde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^2$ .

Se agora fizermos o espaçamento horizontal ( $s$ ) também tender a zero, teremos uma teoria livre no contínuo da qual se conhece todas as funções de correlação. Essa passagem ao contínuo não é trivial e só foi feita rigorosamente (Schor e Carroll, 1980; McCoy e Wu, 1979) para o modelo de Ising. Antes de prosseguir é conveniente acertar as dimensões.  $H$  tem que ter dimensão de energia, e no sistema natural de unidades (em que  $e = \hbar = c = 1$ ) isso significa inverso de comprimento  $1/s$ . Por essa razão trabalharemos com

$$\tilde{H} = \frac{H}{s} \quad (\text{III.41})$$

e o limite de escala, que consiste em fazer  $s \rightarrow 0$ , só terá sentido quando simultaneamente  $\Lambda \rightarrow 1$  de tal forma que a razão

$$m_0 = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \Lambda \rightarrow 1}} \frac{(\Lambda - 1)}{s} \quad (\text{III.42})$$

seja um número finito. Isso coincide com o trabalho de McCoy e Wu (1979), que mostraram que uma teoria de campos associada ao modelo de Ising só existe na temperatura crítica. Além disso em razão do interesse pelas propriedades a longas distâncias (pequenos momentos) desprezaremos o termo de energia cinética ficando com

$$H_c = \int dx m_0 : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad (\text{III.43})$$

em que

$$\psi(x) = s^{-1/2} \psi(j) \quad (\text{III.44})$$

tem a dimensão correta (1/2) do campo livre em duas dimensões, e os dois pontos simbolizam a bem conhecida ordenação de Wick. Agora uma identificação: tal como o operador conjugado ao campo magnético é a magnetização o conjugado à temperatura ( $\Lambda^{-1}$ ) é a densidade de energia. Isto identifica  $\bar{\psi}\psi$  como densidade de energia no sentido de Mecânica Estatística. É possível tirar a mesma conclusão lembrando que a energia de interação no modelo de Ising vem do termo  $\sigma\sigma'$ . Ao fazer o limite de tempo contínuo diminuimos uma dimensão e ganhamos operadores no lugar de variáveis clássicas. Dessa forma

$$\varepsilon = \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \quad (\text{III.45})$$

que pode ser escrito em termos de

$$\varepsilon = \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z = i\eta_1(j+1) \eta_2(j) = \bar{\psi}(j)\psi(j) \quad (\text{III.46})$$

Sabendo expressar a densidade de energia em termos de  $\psi$ , poderemos agora utilizar da melhor forma possível as conhecidas propriedades da teoria no contínuo. Por exemplo, a correlação energia-energia pode ter a sua dependência polinomial na distância ( $r_i - r_j$ ) calculada a partir da dimensão anômala (dimensão do operador frente a uma mudança de escala apenas em  $r$ ) de  $\bar{\psi}\psi$  desig-

nada por  $x_\epsilon$

$$\epsilon(r_i)\epsilon(r_j) = \langle : \bar{\psi}(r_i)\psi(r_i) : : \bar{\psi}(r_j)\psi(r_j) : \rangle \propto \frac{1}{|r_i - r_j|^{2x_\epsilon}} \quad (\text{III.47})$$

Como numa teoria livre basta o ordenamento de Wick para deixar  $\bar{\psi}\psi$  bem definido, a dimensão de escala será simplesmente a soma

$$x_\epsilon = \dim(\bar{\psi}\psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad . \quad (\text{III.48})$$

Isso não acontecerá nos casos em que existir uma interação porque nesse caso não bastará o ordenamento de Wick para tornar o produto  $\bar{\psi}\psi$  bem definido. Nesses casos será preciso renormalizar o produto e esse processo introduzirá uma dependência em  $r$  diferente da usual (embora a dimensão dos engenheiros, obtida por simples análise dimensional continue sendo a esperada). Uma vez conhecido o  $x_\epsilon$  é possível determinar o  $\nu$ , usando o teorema da flutuação-dissipação que relaciona o calor específico à correlação energia-energia

$$C \propto \int d^2r \langle \epsilon(r)\epsilon(0) \rangle \propto \int_0^\infty r dr e^{-r/\xi} r^{-2x_\epsilon} \int_0^\xi dr (r)^{1-2x_\epsilon} \approx (\xi)^{2-2x_\epsilon} \approx \left( \frac{T-T_c}{T_c} \right)^{-\nu(2-2x_\epsilon)} \quad (\text{III.49})$$

que por definição de  $\alpha$  fornece

$$\alpha = +\nu(2 - 2x_\epsilon) \quad . \quad (\text{III.50})$$

Usando a lei de escala

$$\nu d = 2 - \alpha \quad (\text{III.51})$$

segue

$$v = \frac{1}{2-x_\epsilon} \quad . \quad (\text{III.52})$$

Essa última equação fornece para o modelo de Ising  
( $x_\epsilon = 1$ )

$$v = \frac{1}{2-1} = 1 \quad (\text{III.53})$$

e (III.51) dá

$$\alpha = 0 \quad . \quad (\text{III.54})$$

Para gerar todos os índices críticos são necessários apenas dois. Isso significa que há necessidade de calcular mais um expoente (ou por exemplo). Nós deixamos de apresentar esse cálculo nesse capítulo, uma vez que no capítulo seguinte ele será feito de uma maneira mais fácil (dobrando o sistema).

IV - O MODELO DE ASHKIN-TELLER

IV.A) RELAÇÕES DE SIMETRIA E DIAGRAMA DE FASES

Há cerca de 40 anos J. Ashkin e E. Teller (1943) propuseram uma generalização do modelo de Ising para o caso de quatro componentes, designadas aqui por A,B,C e D. O modelo é definido pelas energias atribuídas aos pares (de vizinhos próximos) que são apresentadas abaixo:

- $\epsilon_0$  se os vizinhos estiverem no mesmo estado AA, BB, CC, DD
- $\epsilon_1$  se o par for do tipo AB ou CD
- $\epsilon_2$  se o par for do tipo AC ou BD
- $\epsilon_3$  se o par for do tipo AD ou BC

A seguir, eles mesmos (Ashkin-Teller) encontraram, usando uma transformação de dualidade, a temperatura crítica para o tal modelo quando  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$  (caso particular  $q=4$  do modelo proposto mais tarde por Potts, 1952.)

Somente 30 anos mais tarde esse modelo foi redescoberto por Fan (1972a,b), que encontrou para ele uma representação de Ising e estendeu os resultados de Ashkin e Teller para quaisquer valores das energias. Infelizmente essa última parte do trabalho estava errada porque a transformação de dualidade só determina a temperatura crítica no caso dela ser única.

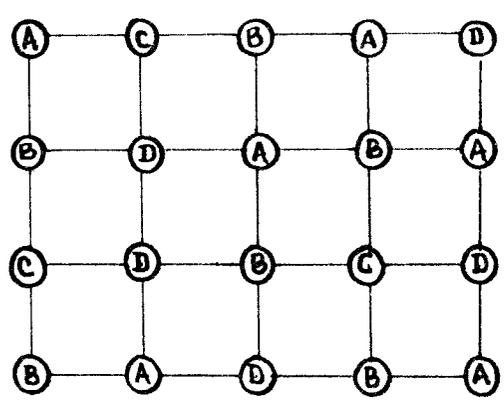


FIG. 26 - O modelo de Ashkin-Teller numa rede quadrada

De qualquer forma a boa idéia de Fan estava em representar os 4 componentes A, B, C e D pelas configurações de dois spins de Ising ( $\sigma, \mu$ ). Chamaremos

$$A \equiv (+, +) \quad B \equiv (+, -) \quad C \equiv (-, +) \quad D \equiv (-, -)$$

embora qualquer permutação de nomes seja igualmente adequada. Para reproduzir as energias é necessário supor acoplamento entre spins da mesma classe ( $\sigma\sigma'$  e  $\mu\mu'$ ) e ainda uma interação de quatro spins ( $\sigma\sigma'\mu\mu'$ ), todas elas entre vizinhos mais próximos. Em outras palavras, há de se impor uma ação do tipo

$$A = - \sum_{\langle \rangle} [ J_0 + J_1 \sigma\sigma' + J_2 \mu\mu' + J_4 \sigma\sigma'\mu\mu' ] \quad (\text{IV.1})$$

com

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) & J_2 &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ J_1 &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) & J_4 &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Temos então a equivalência local entre o A.T. e dois sistemas de Ising acoplados. De posse dessa identificação podemos observar que no caso em que  $\varepsilon_0 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  as duas redes se desacoplam dando origem a dois modelos de Ising usuais que sofrem transição em temperaturas, em geral, distintas

$$T_1 = \frac{2 J_1}{k \ln(1 + \sqrt{2})} \quad T_2 = \frac{2 J_2}{k \ln(1 + \sqrt{2})}$$

A existência de mais de uma transição de fase no A.T. pode ser vista em outros casos particulares. Juntando a isso o argumento de continuidade nos valores da energia para os quais o modelo é crítico Wu e Lin (1974) propuseram para o A.T. o exótico diagrama de fases da figura 27.

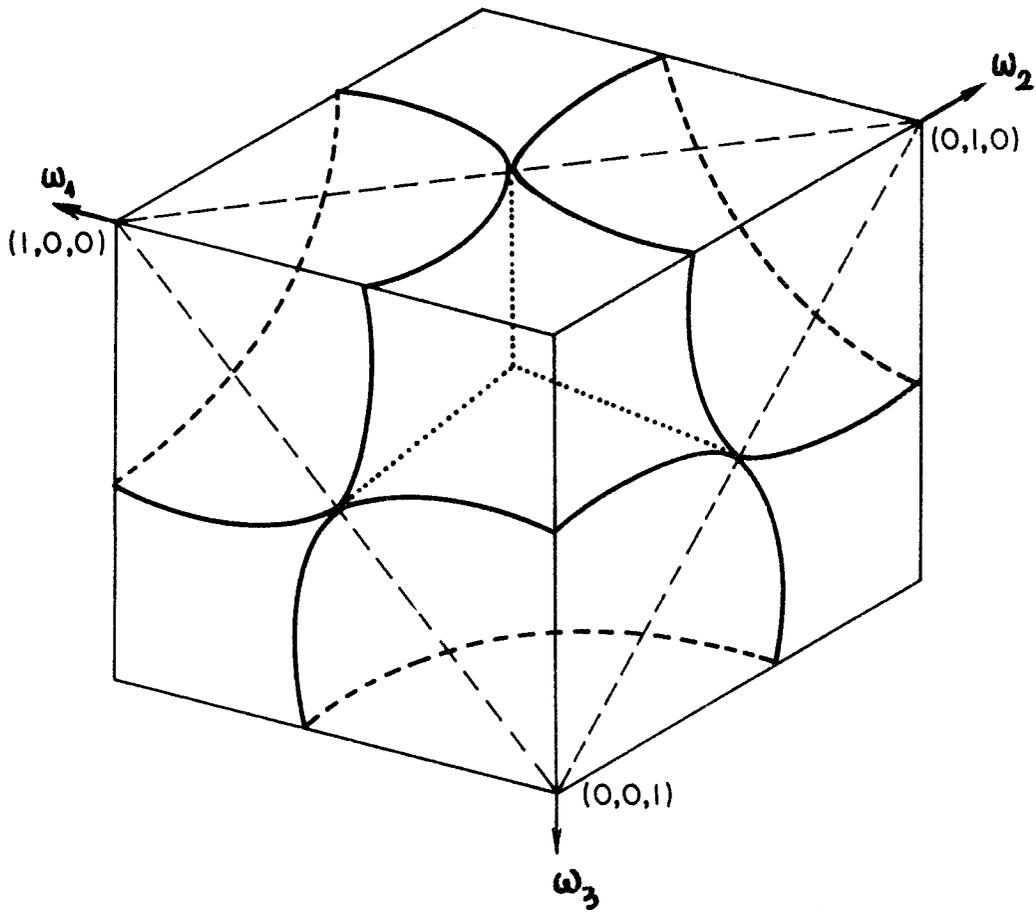


FIG. 27 - O diagrama de fases do A.T.

onde

$$\omega_0 = e^{-\beta \epsilon_0} = e^{K_0 + K_1 + K_2 + K_4}$$

$$\omega_2 = e^{-\beta \epsilon_2} = e^{K_0 - K_1 + K_2 - K_4}$$

$$\omega_1 = e^{-\beta \epsilon_1} = e^{K_0 + K_1 - K_2 - K_4}$$

$$\omega_3 = e^{-\beta \epsilon_3} = e^{K_0 - K_1 - K_2 + K_4}$$

Escolhendo  $K_0$  (que é arbitrário) de forma que  $\omega_0 = 1$  teremos

$$\omega_1 = e^{-2K_2 - 2K_4} \quad (\text{IV.3a})$$

$$\omega_2 = e^{-2K_1 - 2K_4} \quad (\text{IV.3b})$$

$$\omega_3 = e^{-2K_1 - 2K_2} \quad (\text{IV.3c})$$

Esse diagrama de fases, embora complicado, exibe simetrias que obviamente existem no modelo. De fato com introdução

de uma variável  $\tau = \sigma\mu$  (que também assume os valores  $+1$  e  $-1$ ) a ação adquire a forma

$$A = - \sum_{\langle \rangle} [ J_0 + J_1 \sigma\sigma' + J_4 \tau\tau' + J_2 \tau\tau' \sigma\sigma' ]$$

ou ainda

$$A = - \sum_{\langle \rangle} [ J_0 + J_2 \mu\mu' + J_4 \tau\tau' + J_1 \tau\tau' \mu\mu' ]$$

o que implica na invariância da função de partição frente a permutações dos acoplamentos

$$Z(K_1, K_2, K_4) = Z(K_1, K_4, K_2) = Z(K_2, K_4, K_1) \quad (\text{IV.4})$$

onde  $K_i = \beta J_i$ .

#### IV.B) A EQUIVALÊNCIA NA REDE

Com a representação introduzida por Fan o modelo de A.T. deixa à vista uma extrema semelhança com o 8-V. Um exame mais cuidadoso revela no entanto que há uma diferença fundamental entre os dois modelos: enquanto no 8-V há apenas um spin por ponto da rede o A.T. é um modelo de duas camadas ( $\sigma$  e  $\mu$ ). Wegner (1972) eliminou essa diferença fazendo uma transformação de dualidade em apenas uma classe de spins ( $\mu$  por exemplo). Essa transformação, que foi usada por Kramers e Wannier (1942) para determinar a temperatura crítica do modelo de Ising, permite substituir a rede original de spins  $\mu$  por uma nova rede de spins  $\gamma$  sem alterar a função de partição. Essa mudança é acompanhada por uma alteração do acoplamento

$$e^{K\mu\mu'} \rightarrow e^{K^*\gamma\gamma'}$$

e os novos spins  $\gamma$  que interagem via  $K^*$  residem na rede "dual"

cujos sítios são as intersecções das mediatrizes às ligações originais.

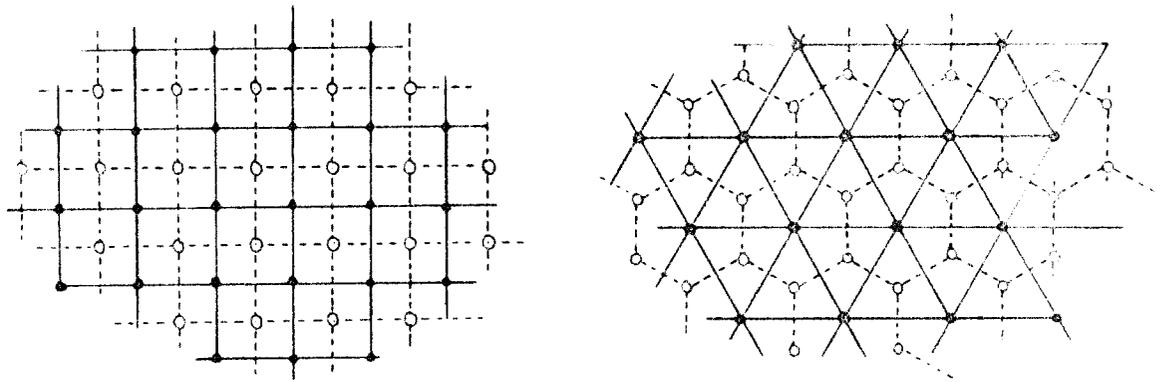


FIG. 28 - Redes bidimensionais e suas respectivas redes duais

No caso do A.T. o fator de Boltzmann envolve duas redes de spins ( $\sigma$  e  $\mu$ ) e a transformação de dualidade em uma delas ( $\mu$  por exemplo) dá origem a uma rede decorada de uma só camada (super-rede)

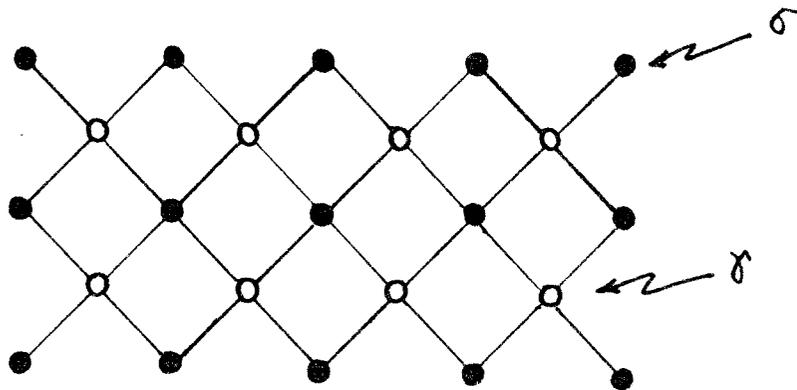


FIG. 29 - A super rede

Como no modelo de Ising, a transformação de  $\mu$  para  $\gamma$  vem acompanhada por uma alteração dos acoplamentos (Wu, 1977)

$$e^{K_0 + K_1 \sigma \sigma' + K_2 \mu \mu' + K_4 \sigma \sigma' \mu \mu'} \rightarrow e^{K_0^* + K_1^* \sigma \sigma' + K_2^* \gamma \gamma' + K_4^* \sigma \sigma' \gamma \gamma'}$$

onde

$$K_0^* = (1/4) \ln[pqrs] \quad (\text{IV.5a})$$

$$K_1^* = (1/4) \ln[pq/rs] \quad (\text{IV.5b})$$

$$K_2^* = (1/4) \ln[pr/qs] \quad (\text{IV.5c})$$

$$K_4^* = (1/4) \ln[ps/qr] \quad (\text{IV.5d})$$

com

$$p = \left( 1 + e^{-2K_2 - 2K_4} \right) \quad (\text{IV.6a})$$

$$q = \left( 1 - e^{-2K_2 - 2K_4} \right) \quad (\text{IV.6b})$$

$$r = \left( e^{-2K_1 - 2K_4} + e^{-2K_1 - 2K_2} \right) \quad (\text{IV.6c})$$

$$s = \left( e^{-2K_1 - 2K_4} - e^{-2K_1 - 2K_2} \right) \quad (\text{IV.6d})$$

Girando de  $45^\circ$  a super rede da figura 29, e conectando os pontos médios dos lados adjacentes da rede original teremos coroado nosso esforço na construção de um modelo de vértices equivalente ao A.T.

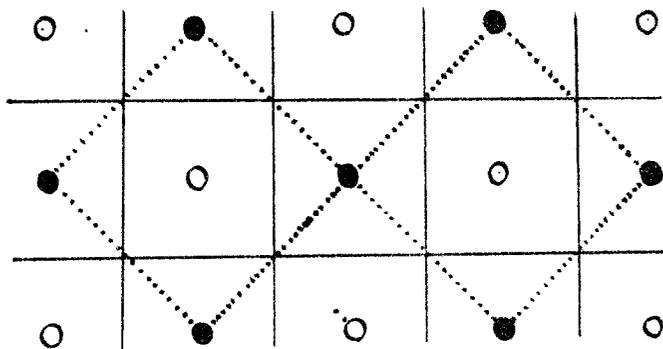


FIG. 30 - A rede original  $\sigma(\cdot)$  pontilhada a super rede  $\sigma\mu$  e a rede medial (linha cheia), onde residem os vértices do modelo associado.

O raciocínio de Kadanoff-Wegner, aplicado no sentido inverso, permite construir vértices (na rede medial) a partir do sinal relativo dos spins da super-rede. Os pesos dos vértices se rão encontrados em função dos acoplamentos  $(K_0^*, K_1^*, K_2^*, K_4^*)$ . Mas, atenção para um detalhe importante: na rede medial há dois tipos de vértices, sendo um aquele que tem na face superior direita um spin  $\gamma(o)$ , designado doravante por A e outro o que tem o spin  $\sigma(\bullet)$  naquela posição (designado por B). Em virtude do acoplamento entre os spins ser sempre  $K_1^*$  e entre os spins sempre  $K_2^*$  haverá uma alternativa de acoplamentos em diagonais paralelas, diferente do Baxter normal em que o acoplamento numa dada direção não varia.

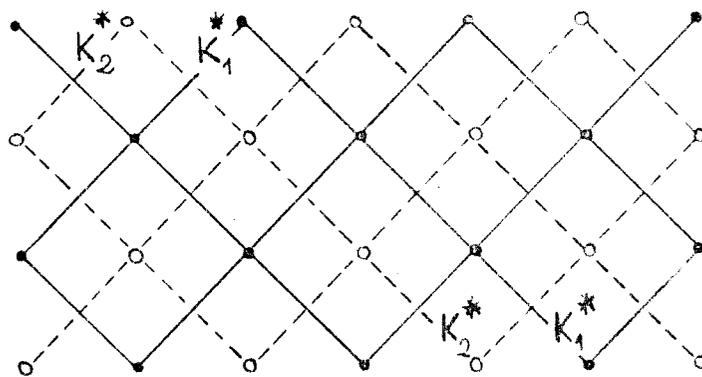
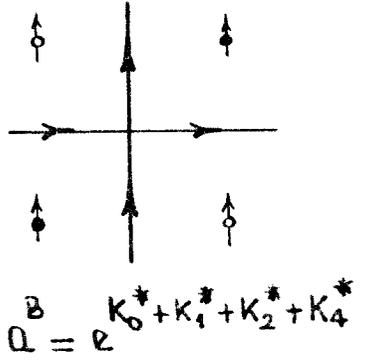
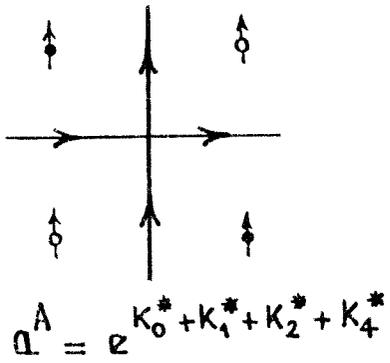


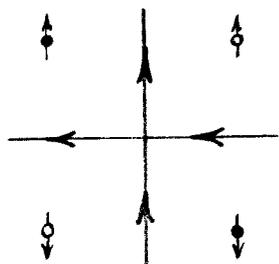
FIG. 31 - Os acoplamentos de dois spins nas sub-redes  $\sigma$  e  $\gamma$ .

A consequência dessa "alternância" é que o peso do vértice vai depender não somente do sinal relativo dos spins, mas também da sua "geografia" conforme verificamos a seguir.

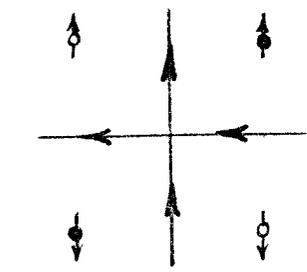
SUB-REDE (MEDIAL) A

SUB-REDE (MEDIAL) B

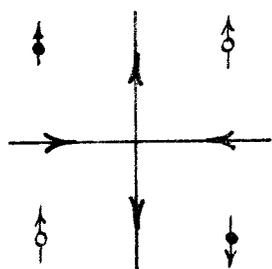




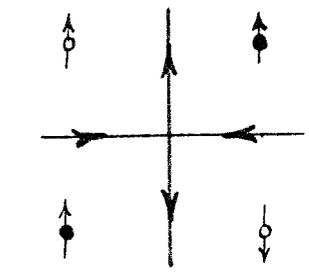
$$b^A = e^{K_0^* - K_1^* - K_2^* + K_4^*}$$



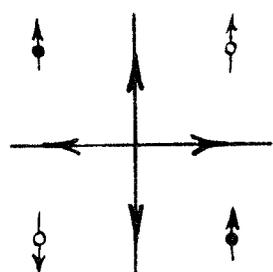
$$b^B = e^{K_0^* - K_1^* - K_2^* + K_4^*}$$



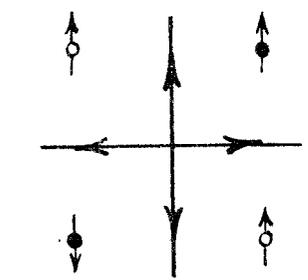
$$c^A = e^{K_0^* - K_1^* + K_2^* - K_4^*}$$



$$c^B = e^{K_0^* + K_1^* - K_2^* - K_4^*}$$



$$d^A = e^{K_0^* + K_1^* - K_2^* - K_4^*}$$



$$d^B = e^{K_0^* - K_1^* + K_2^* - K_4^*}$$

$$c^A = d^B$$

$$c^B = d^A$$

A conclusão é que o modelo de A.T. é (a nível de função de partição) equivalente a um modelo de 8-V que alterna os pesos c e d de uma sub-rede para outra ("staggered").

Na verdade os pesos a e b são mantidos havendo uma troca apenas entre os vértices (5,6) e (7,8). O causador dessa

encrenca é um sô:  $K_1^* \neq K_2^*$ . Faça-os iguais e terá um 8-V normal (também não é para menos já que ao igualar os acoplamentos desapareceu a alternância ao longo das diagonais). A condição  $K_1^* = K_2^* = K^*$  quando escrita em termos dos acoplamentos originais, significa

$$e^{-2K_2 - 2K_4} + e^{-2K_1 - 2K_4} + e^{-2K_1 - 2K_2} = 1 \quad (\text{IV.7a})$$

ou

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \quad (\text{IV.7b})$$

que é um plano inteiro onde o A.T. é um verdadeiro 8-V (não alternado). Chegou a hora do chocolate: para o 8-V se conhece a condição de criticalidade (Baxter, 1972a) que é

$$c = a + b + d \quad (\text{IV.8})$$

na região fundamental em que todos os pesos são positivos e  $c$  é o maior de todos

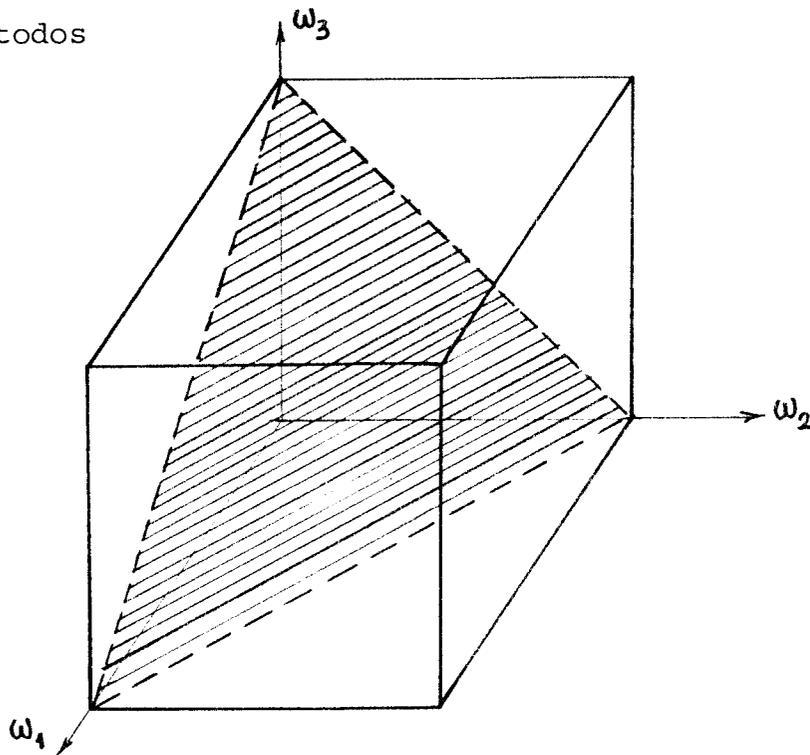


FIG. 32 - O plano onde o A.T. é um 8-V normal

Obviamente os pesos do A.T. não estão na ordenação desejada, mas para isso existem as relações de simetria (Fan e Wu, 1970)

para o 8-V

$$Z(a,b;c,d) = Z(c,d;a,b) \quad (\text{IV.9})$$

que permitem reescrever a equação (IV.8) como

$$a = c + b + d \quad (\text{IV.10})$$

Lembrando que  $c = d$  nesse plano e chamando  $a = 1$  (um dos pesos é arbitrário e não há perda de generalidade em fixá-lo) (IV.10) significa

$$e^{-4K^*} = 1 - 2 e^{-2K^*} - 2K_4^* \quad (\text{IV.11})$$

ou ainda

$$K_1 = K_2 \quad \text{se} \quad K_2 \geq K_4 \quad (\text{IV.12a})$$

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \text{se} \quad \omega_2 \geq \omega_3 \quad (\text{IV.12b})$$

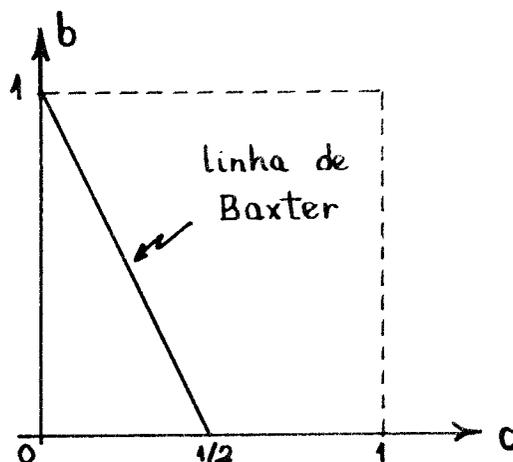
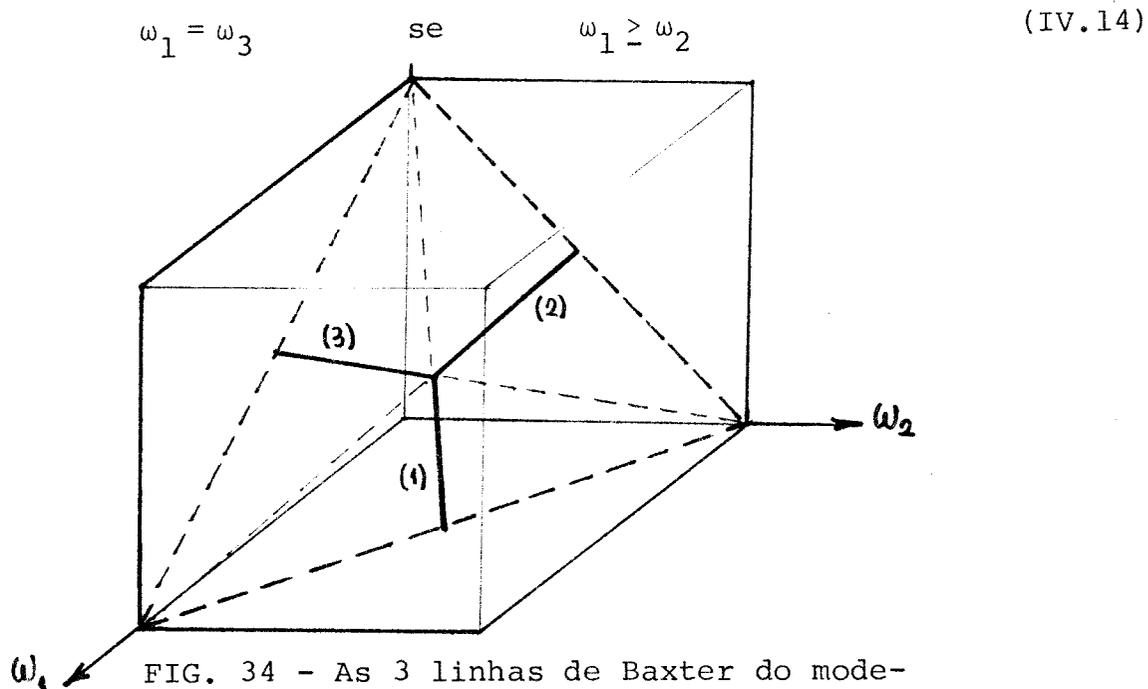


FIG. 33 - A condição de criticalidade para o 8.V com  $c = d$

A seguir as relações de simetria (IV.4) do A.T. implicam na existência de outras duas linhas de Baxter ocorrendo em

$$\omega_2 = \omega_3 \quad \text{se} \quad \omega_2 \geq \omega_1 \quad (\text{IV.13})$$



Na região  $K_4 > K_1 = K_2$  a transição não pode ser única, porque se assim fosse ela teria que acontecer na continuação da linha de Baxter, que acidentalmente é a linha auto-dual (Alcaraz e Köberle, 1980) do modelo. O conhecimento detalhado do 8-V, no entanto, garante que ali o sistema não é crítico donde segue que nessa região haverá mais de uma transição. Nós dedicaremos o próximo capítulo ao estudo dessa região.

De novo na região  $K_4 < K_{1,2}$  nosso interesse é determinar em que 8-V (caracterizado por  $\lambda$ ) crítico o A.T. também crítico irá recair. Para isso lembramos que a condição de criticalidade do A.T., no caso de apenas uma transição de fase é

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \quad \text{e} \quad \omega_1 = \omega_2 \quad (\text{IV.15})$$

ou ainda

$$e^{-2K_4} = \cosh 2K \quad . \quad (\text{IV.16})$$

Por outro lado de (IV.5d) segue

$$\lambda = K_4^* \left| \begin{array}{l} = \frac{1}{4} \ln (ps/qr) \\ (IV.16) \end{array} \right| \quad (IV.16)$$

ou ainda

$$e^{-4\lambda} = \frac{e^{4K} + 2 + e^{-4K}}{3e^{4K} - 10 + 3e^{-4K}} = \frac{1}{1 - 2 \frac{(6 - e^{4K} - e^{-4K})}{(2 + e^{4K} + e^{-4K})}}$$

Trabalhando com (IV.16) chega-se a

$$e^{-4\lambda} = \frac{1}{1 - 2 \tanh(2K_4)} \quad (IV.17)$$

que pode ainda ser escrita

$$\tanh(2\lambda) = \frac{\tanh(2K_4)}{\tanh(2K_4) - 1} \quad (IV.18)$$

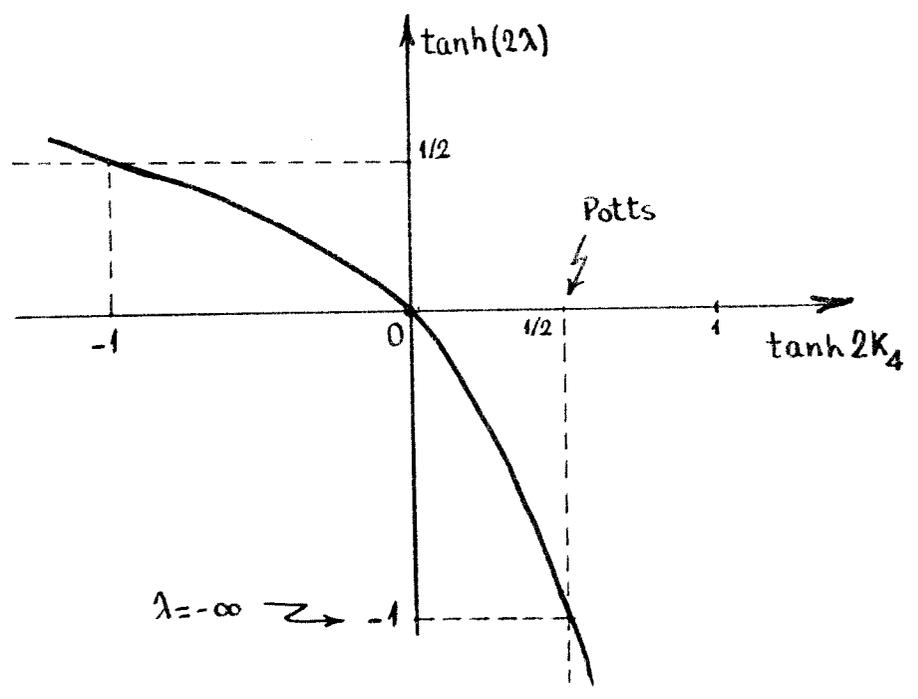


FIG. 35 - A relação entre os acoplamentos de 4 spins do A.T. e do 8-V

## IV.C) RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES DO A.T. e 8-V

O modelo de A.T. com  $K_1 = K_2$  pode ser alternativamente formulado em termos de uma variável  $S$  definida por

$$S = \frac{(1+i)}{2} \sigma + \frac{(1-i)}{2} \mu \quad (\text{IV.19})$$

que assume os valores  $1, i, -1, -i$ . Em termos de  $S$  a ação (IV.1) fica

$$A = - \sum_{\langle \rangle} J_0 + J(SS^+ + S^+S) + J_4 \left[ (SS^+)^2 \right] \quad (\text{IV.20})$$

que é a própria ação ferromagnética do modelo  $Z(4)$ , cujo nome provém do fato de que os valores formam o grupo multiolitivo de 4 elementos.

Entretanto é preciso ficar bem claro que  $J_1 = J_2$  (ou  $K_1 = K_2$ ) não significa que o modelo seja crítico uma vez que a condição de criticalidade do 8-V só vale para o modelo normal e não para o "alternado". É por essa razão que a linha de Baxter está na intersecção do plano  $Z(4)$  ( $\omega_1 = \omega_2$ ) com o plano não "alternado" ( $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ ). Para melhor entender o que está ocorrendo vamos escrever o fator de Boltzmann numa forma adequada

$$A \text{ e } \frac{K_1+K_2}{2} (\sigma\sigma' + \mu\mu') + \frac{K_1-K_2}{2} (\sigma\sigma' - \mu\mu') + K_4 \sigma\sigma' \mu\mu' \quad (\text{IV.21})$$

Agora percebemos que ao fazer  $K_1 = K_2$  anulamos no A.T. o coeficiente do operador que quebra a simetria entre  $\sigma$  e  $\mu$  ( $CR = \sigma\sigma' - \mu\mu'$ ). No modelo de vértices correspondente isso significa anular o coeficiente da densidade de energia ( $\sigma\sigma' + \mu\mu'$ ). (Para se convencer disso lembre que, não fosse pela alternância dos pesos o modelo estaria no plano  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$  e a criticalidade seria  $K_1 = K_2$ , isto é  $(K_1 - K_2) \propto (T - T_c) |_{8V}$  (conjugado da energia do 8V).

Outra maneira de investigar a relação entre os operadores é a seguinte: suponha que o sistema esteja na criticalidade e faça-o abandonar a linha de Baxter por efeito do operador energia do 8-V. Em consequência disso o modelo sai do plano  $K_1 = K_2$ , evidenciando que ao liberar a energia do 8-V automaticamente aparece no A.T. uma quebra de simetria entre  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\mu}$ .

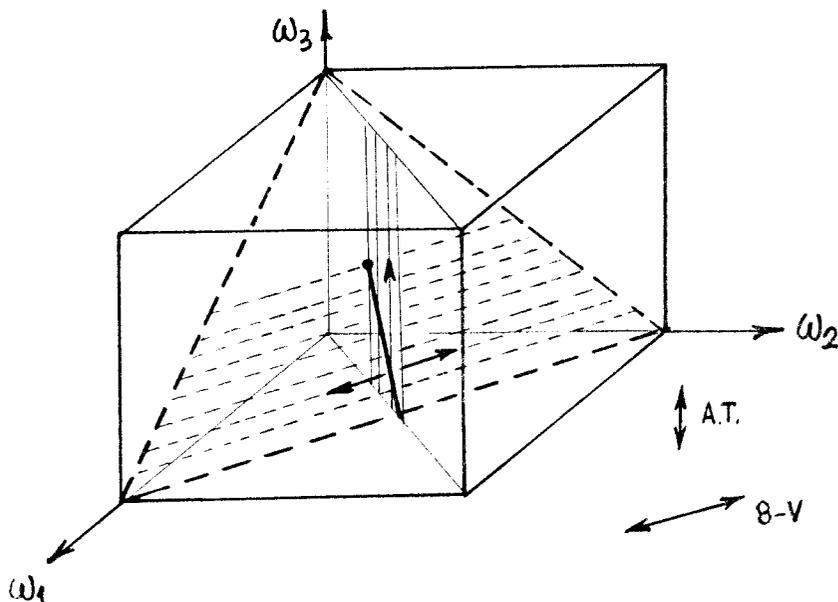


FIG. 36 - As direções para abandonar a linha de Baxter

Inversamente, o operador energia do  $Z(4)$  também tira o sistema da linha crítica só que agora por distinguir as duas redes de spins ( $\sigma$  e  $\gamma$ ) através dos acoplamentos ( $K_1$  e  $K_2$ ). Isso significa que o efeito do operador energia do  $Z(4)$  é quebrar a simetria entre os spins que formam o 8-V. Dessa forma o operador energia do 8-V é o quebrador de simetria ( $CR = \sigma\sigma' - \mu\mu'$ ) do A.T. e a energia do A.T. é o quebrador de simetria do 8-V<sup>\*</sup>. Chamando  $x$  o índice crítico desses operadores, teremos

---

(\*) Essas relações estão em concordância com aquelas obtidos por Kadanoff-Ceva (1971) no célebre artigo em que foi introduzida a variável desordem.

$$x_{\epsilon}^{8-V} = x_{CR}^{A.T.} \quad (IV.22a)$$

$$x_{\epsilon}^{A.T.} = x_{CR}^{8-V} \quad (IV.22b)$$

Entre 1972 e 1980 várias conjecturas foram feitas para os índices críticos do A.T. entre as quais:

a) a relação de Baxter-Kelland entre a polarização e a energia

$$x_P^{A.T.} = \frac{x_{\epsilon}^{A.T.}}{4} \quad (IV.23)$$

proposta por Enting (1973).

b) a relação entre  $x_{\epsilon}$  e  $x_{CR}$  dentro do mesmo modelo

$$x_{\epsilon}^A = \frac{1}{x_{CR}} \quad (IV.24)$$

sugerida por Kadanoff e Brown (1979), tanto para o 8-V como para o A.T.

Essas relações, que permitem determinar os índices críticos do A.T. a partir daqueles conhecidos do 8-V, foram verificadas nas proximidades do ponto de desacoplamento ( $K_4=0$ ,  $\lambda=0$ ) por Kadanoff e Brown (1979). Eles fizeram um mapeamento do A.T. e do 8-V no modelo Gaussiano, identificaram os operadores e desenvolveram um "formalismo de universalidade para as linhas críticas".

Nas próximas secções nós verificamos essas relações para qualquer valor de  $K_4$  (ao longo de toda a linha de Baxter).

#### IV.D) A TEORIA DE CAMPOS DO MODELO

Nesta secção mostramos que o A.T. na região crítica é a versão discretizada de uma teoria de campos. Com esse objetivo

calculamos a matriz de transferência do modelo no caso  $K_1=K_2$ , já que no plano  $\omega_1=\omega_2$  está contida uma linha de Baxter.

Considerando a rede formada por camadas na direção  $\underline{x}$  a matriz de transferência será

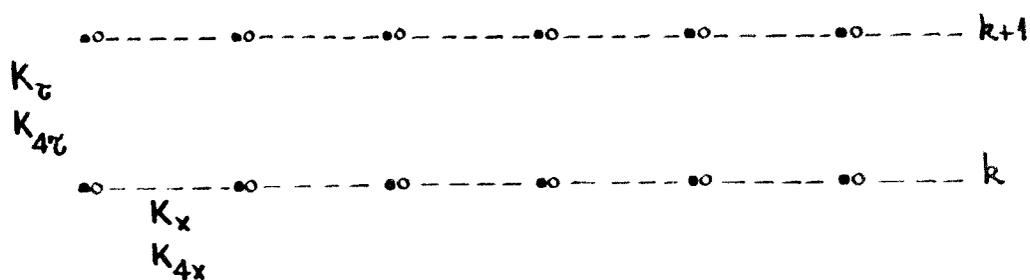


FIG. 37 - As duas camadas vizinhas

$$T(\alpha, \alpha') = T_1(\alpha, \alpha) T_2(\alpha, \alpha') \quad (\text{IV.25})$$

com

$$T_1(\alpha, \alpha) = C \exp \sum_i \left[ K_x (\sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k} + \mu_{j,k} \mu_{j+1,k}) + K_{4x} \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k} \mu_{j,k} \mu_{j+1,k} \right]$$

e

$$T_2(\alpha, \alpha') = C' \exp \sum_i \left[ K_\tau (\sigma_{j,k} \sigma_{j,k+1} + \mu_{j,k} \mu_{j,k+1}) + K_{4\tau} (\sigma_{j,k} \sigma_{j,k+1} \mu_{j,k} \mu_{j,k+1}) \right]$$

Para obter a hamiltoniana equivalente no limite de tempo contínuo faremos  $K_x \rightarrow 0$ ,  $K_{4x} \rightarrow 0$  de tal forma que a razão entre eles que, em última análise, dita as propriedades de modelo, permaneça constante ( $\Delta = (K_{4x}/K_x) = \text{fixo}$ ). Simultaneamente é preciso crescer indefinidamente os acoplamentos na direção temporal  $K_\tau \rightarrow \infty$  e  $K_{4\tau} \rightarrow \infty$  mantendo também a razão fixa e igual a  $\Delta$ . Essa prescrição para o limite (Alcaraz e Köberle, 1980) tem como obje

tivo permanecer na mesma classe de universalidade, embora estejamos com isso sacrificando propriedades importantes tais como a auto-dualidade do modelo.

A matriz  $T$  já escrita em termos de operadores, (conforme capítulo III, secção ) no limite de  $K_x, K_{4x} \rightarrow 0$  é dada por

$$T = \prod_j C'' \left[ 1 + K_x (\sigma_{j,k}^Z \sigma_{j+1,k}^Z + \mu_{j,k}^Z \mu_{j+1,k}^Z) + K_{4x} \sigma_{j,k}^Z \sigma_{j+1,k}^Z \mu_{j,k}^Z \mu_{j+1,k}^Z + \dots \right] \times e^{\frac{2K_x + K_{4x}}{\tau} \sum_j (\sigma_{j,k}^X + \mu_{j,k}^X)} e^{-\frac{2K_x - K_{4x}}{\tau} \sum_j (\sigma_{j,k}^X - \mu_{j,k}^X)}$$

(IV.26)

e chamando  $e^{-\frac{2K_x - K_{4x}}{\tau} \sum_j (\sigma_{j,k}^X - \mu_{j,k}^X)} = \frac{\tau}{2}$  e  $K_x = \frac{\Lambda \tau}{2}$  a expressão para a hamiltoniana de tempo contínuo será (omitindo o  $k$  da camada)

$$H = \lim_{\tau \rightarrow 0} -\tau \sum_i \frac{\Lambda \tau}{2} (\sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z) + \Lambda \frac{\Delta \tau}{2} (\sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z) + \frac{\tau}{2} (\sigma_j^X + \mu_j^X) + \left( \frac{\tau}{2} \right)^{2/(1+\Delta)} (\sigma_j^X \mu_j^X)$$

que para  $\Delta = \frac{K_{4x}}{K_x} < 1$  (estritamente menor) fornece

$$H_{\Delta < 1} = -\frac{\Lambda}{2} \sum_j (\sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z) - \frac{\Lambda \Delta}{2} \sum_j \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z - \frac{1}{2} \sum_j (\sigma_j^X + \mu_j^X) \quad (IV.27)$$

Essa hamiltoniana de acordo com a secção IV.B é apropriada para estudar a linha de Baxter. Como ela está escrita em termos de paulions vamos fazer duas transformações de Jordan-Wigner:

$$\eta_1(j) = \prod_{k < j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \quad \tilde{\zeta}_1(j) = \prod_{k < j} \mu_k^X \mu_j^Z$$

$$\eta_2(j) = i \prod_{k \leq j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \quad \tilde{\zeta}_2(j) = i \prod_{k \leq j} \mu_k^X \mu_j^Z$$
(IV.28)

Embora  $\eta_1$  e  $\eta_2$  anticomutem entre si e  $\tilde{\zeta}_1$  e  $\tilde{\zeta}_2$  também, não há nenhum compromisso entre  $\eta$ 's e  $\zeta$ 's, portanto eles comutam, Também essa dificuldade pode ser superada fazendo uma outra transformação semelhante à de Klein. Ela consiste em colocar no  $\tilde{\zeta}$  o rabo inteiro do  $\sigma \left( \prod_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_{\ell}^X \right)$  obtendo dessa forma

$$\eta_1(j) = \prod_{k < j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \quad \zeta_1(j) = \prod_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_{\ell}^X \prod_{k < j} \mu_k^X \mu_j^Z$$

$$\eta_2(j) = i \prod_{k \leq j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \quad \zeta_2(j) = i \prod_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_{\ell}^X \prod_{k \leq j} \mu_k^X \mu_j^Z$$
(IV.29)

que satisfazem as relações

$$\{\eta_{\alpha}(i), \eta_{\beta}(j)\} = 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

$$\{\zeta_{\alpha}(i), \zeta_{\beta}(j)\} = 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

$$\{\eta_{\alpha}(i), \zeta_{\beta}(j)\} = 0$$

Em termos dos fermions reescrevemos

$$\sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z = -i\eta_1(j+1) \eta_2(j) \quad \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z = -i\zeta_1(j+1) \zeta_2(j) \quad (\text{IV.30a})$$

$$\sigma_j^X = i\eta_1(j) \eta_2(j) \quad \mu_j^X = i\zeta_1(j) \zeta_2(j) \quad (\text{IV.30b})$$

e a hamiltoniana fica

$$\begin{aligned}
H' = \frac{H}{S} = \sum_j \frac{(\Lambda-1)}{2S} i \left[ \eta_1(j+1)\eta_2(j) + \zeta_1(j)\zeta_2(j) \right] + \\
+ \frac{i}{2S} \sum_i \left[ \eta_1(j+1) - \eta_1(j) \right] \eta_2(j) + \left[ \zeta_1(j+1) - \zeta_1(j) \right] \zeta_2(j) + \\
+ \frac{\Lambda}{2S} \sum_i \eta_1(j+1)\eta_2(j)\zeta_1(j+1)\zeta_2(j) \quad (IV.31)
\end{aligned}$$

Introduzindo o spinor  $\psi$

$$\psi(j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1(j+1) - i\zeta_1(j+1) \\ \zeta_2(j) + i\eta_2(j) \end{pmatrix} \quad (IV.32)$$

e as matrizes  $2 \times 2$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \quad (IV.33)$$

que obedecem a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad ; \quad g^{\infty\infty} = -g^{11} = 1 \quad (IV.34)$$

podemos escrever

$$\frac{i}{2} \left[ \eta_1(j+1)\eta_2(j) + \zeta_1(j+1)\zeta_2(j) \right] = \psi^\dagger(j) \gamma^0 \psi(j) = \bar{\psi}(j) \psi(j) \quad (IV.35)$$

$$\frac{i}{2} \left[ \left[ \eta_1(j+1) - \eta_1(j) \right] \eta_2(j) + \left[ \zeta_1(j+1) - \zeta_1(j) \right] \zeta_2(j) \right] = -i \bar{\psi}(j) \gamma^1 \partial_1 \psi \quad (IV.36)$$

onde

$$\partial_1 \psi(j) = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} \eta_1(j+1) - i\zeta_1(j+1) - \eta_1(j) + i\zeta_1(j) \\ \zeta_2(j+1) + i\eta_2(j+1) - \zeta_2(j) - i\eta_2(j) \end{pmatrix} \quad (IV.37)$$

e

e

$$\eta_1(j+1)\eta_2(j)\zeta_1(j+1)\zeta_2(j) = -2(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (\text{IV.38})$$

Dessa forma a hamiltoniana  $H'$  se escreve

$$H' = \sum_j \frac{(\Lambda-1)}{S} \bar{\psi}(j)\psi(j) - i\bar{\psi}(j)\gamma^1\partial_1\psi(j) - \frac{\Lambda\Delta}{a}(\bar{\psi}(j)\psi(j))^2 \quad (\text{IV.39})$$

o que permite identificá-la como sendo aquela do modelo de Thirring (1958) massivo. É claro que ainda estamos com  $S$  (o espaçamento) finito e portanto  $H'$  é uma versão do modelo de Thirring na rede. Ao fazer o limite de escala ( $S \rightarrow 0$  e  $\Lambda \rightarrow 1$  com  $\lim \frac{\Lambda-1}{S} = m_0$ ) para obter uma teoria no contínuo, enfrentamos problemas tais como a definição de  $\psi$ , do produto de vários  $\psi$ 's no mesmo ponto (operadores compostos) que representam observáveis do modelo de partida e que, por isso mesmo, precisam ser bem definidos. Supondo resolvidos esses problemas teremos uma teoria de campos formulada em um espaço-tempo bidimensional ( $\tau$  é o tempo) e contínuo e o que desejamos é encontrar os expoentes críticos de Ashkin-Teller. Para esse fim vamos recorrer à solução do modelo de Thirring sem massa, uma vez que os expoentes críticos não dependem dela.

É possível e extremamente conveniente reescrever o campo  $\psi$  em termos de um campo livre  $\phi$  de massa zero (Swieca, 1977). Esse procedimento é conhecido na literatura como bosonização. Assim

$$\psi_1 = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} : \exp\left[i\left(\alpha\phi_A(u) + \delta\phi_B(v)\right)\right] : \quad (\text{IV.40a})$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} : \exp\left[-i\left(\delta\phi_A(u) + \alpha\phi_B(v)\right)\right] : \quad (\text{IV.40b})$$

onde o ordenamento  $::$  é o usual de Wick desde que  $\phi$  é um campo

canônico livre em duas dimensões, isto é<sup>(\*)</sup>.

$$\partial^2 \phi = 0 \quad ; \quad \left[ \phi(x, \tau), \dot{\phi}(x, \tau) \right] = i \delta(x-y) \quad (\text{IV.41})$$

cuja solução é

$$\phi(x, \tau) = \phi_A(x + \tau) + \phi_B(x - \tau) = \phi_A(u) + \phi_B(v) \quad (\text{IV.42})$$

e a função de dois pontos dada por

$$\langle 0 | \phi_A(u) \phi_A(u') | 0 \rangle = - \frac{1}{4\pi} \log \left[ i(u - u' - i\varepsilon) \right] \quad (\text{IV.43a})$$

$$\langle 0 | \phi_B(v) \phi_B(v') | 0 \rangle = - \frac{1}{4\pi} \log \left[ i(v - v' - i\varepsilon) \right] \quad (\text{IV.43b})$$

#### IV.E) A VERIFICAÇÃO DA CONJECTURA DE KADANOFF

Agora identificamos os operadores com os campos compostos. Por exemplo, a densidade de energia do A.T. é

$$\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} = \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z + \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z = \bar{\psi}(j) \psi(j) = \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 \quad (\text{IV.44})$$

No contínuo  $\psi_1^*(x) \psi_2(x)$  é mal definido assim como  $\psi_2^*(x) \psi_1(x)$  e para que tenhamos uma densidade de energia finita e não nula é preciso extrair um termo singular, sendo exatamente essa a causa para o aparecimento da dimensão anômala.

Para descobrir o termo a ser retirado é necessário estudar o comportamento de  $\psi_1^*(u, v) \psi_2(0, 0)$  quando  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$  isto é, as propriedades a curtas distâncias.

---

(\*) Na verdade esse campo não existe, porém nós vamos precisar apenas de exponenciais de  $\phi$  que Sweica (1977) mostrou serem bem definidos como limite da teoria massiva.

$$\begin{aligned}
\psi_1(u,v) \psi_2(0,0) &\approx : e^{-i(\alpha\phi_A(u)+\delta\phi_B(v))} : : e^{-i(\delta\phi_A(0)+\alpha\phi_B(0))} : \\
&= e^{-i\alpha\phi_A^+(u)} e^{-i\alpha\phi_A^-(u)} e^{-i\delta\phi_B^+(v)} e^{-i\delta\phi_B^-(v)} \\
&\quad e^{-i\delta\phi_A^+(0)} e^{-i\delta\phi_A^-(0)} e^{-i\alpha\phi_B^+(0)} e^{-i\alpha\phi_B^-(0)}
\end{aligned} \tag{IV.45}$$

Para ordenar o produto basta comutar  $\exp(-i\delta\phi_A^+(0))$  com  $\exp(-i\alpha\phi_A^-(u))$  e  $\exp(-i\alpha\phi_B^+(0))$  com  $\exp(-i\delta\phi_B^-(v))$ . Esses comutadores são obtidos retomando a função de dois pontos para  $(\phi_A$  ou  $\phi_B)$ . Então resulta

$$\begin{aligned}
[\phi_A^-(u), \phi_A^+(u')] &= -\frac{1}{4\pi} \log [i(u-u'-i\varepsilon)] \\
[\phi_B^-(v), \phi_B^+(v')] &= -\frac{1}{4\pi} \log [i(v-v'-i\varepsilon)]
\end{aligned}$$

que levados à equação (I .45) fornece

$$\begin{aligned}
\psi_1^*(u,v) \psi_2(0,0) &\approx e^{\frac{\alpha\delta}{4\pi} \ln [i(u-i\varepsilon)] + \frac{\alpha\delta}{4\pi} \ln [i(v-i\varepsilon)]} : e^{-i(\alpha+\delta)(\phi_A+\phi_B)} : \\
\psi_1^*(u,v) \psi_2(0,0) &\approx [i(u-i\varepsilon)]^{\alpha\delta/4\pi} [i(v-i\varepsilon)]^{\alpha\delta/4\pi} : e^{-i(\alpha+\delta)\phi} :
\end{aligned} \tag{IV.46}$$

Dessa equação podemos facilmente computar a dimensão de escala de  $N(\bar{\psi}\psi)$  em função da dimensão de  $\psi$ .

$$\dim(\bar{\psi}\psi) = 2 \dim \psi + \frac{\alpha\delta}{2\pi} \tag{IV.47}$$

A dimensão de  $\psi$  também pode ser calculada por processo semelhante e o resultado é

$$\dim \psi = \frac{\alpha^2 + \delta^2}{8\pi} \tag{IV.48}$$

Finalmente o índice de escala do operador densidade

de energia renormalizada é

$$\chi_{\epsilon} = \dim(\bar{\psi}\psi) = \frac{(\alpha+\delta)^2}{4\pi} \quad (IV.49)$$

O procedimento descrito acima permite encontrar ainda a dimensão do operador ("crossover") quebrador de simetria

$$CR = \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z - \mu_j^Z \mu_{j+1}^Z = \psi_1^* \psi_2^* - \psi_1 \psi_2 \quad (IV.50)$$

que vale

$$\chi_{CR} = \frac{(\alpha-\delta)^2}{4\pi} \quad (IV.51)$$

Nesse ponto é necessário lembrar que no "mundo" bidimensional não existe grupo de rotação e portanto fica perdido o conceito de spin convencional (aliás, é por essa razão que se pode bosonizar o campo fermiônico de Thirring). Entretanto sobrevive o "spin" de Lorentz que dá o comportamento das funções de onda ou operador de campo quando sujeitos às transformações de Lorentz. O "spin" de  $\psi$  é dessa forma calculado e vale

$$S_{\psi} = \frac{\alpha^2 - \delta^2}{8\pi} \quad (IV.52)$$

Como estamos interessados nas soluções  $S = 1/2$  do modelo de Thirring podemos usar que

$$\frac{(\alpha+\delta)(\alpha-\delta)}{8\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow (\alpha-\delta) = \frac{4\pi}{(\alpha+\delta)}$$

que substituído em (I .51) fornece

$$\chi_{CR}^{A.T.} = \frac{(4\pi)^2}{(4\pi)(\alpha+\delta)^2} = \frac{4\pi}{(\alpha+\delta)} = \frac{1}{\dim \bar{\psi}\psi} = \frac{1}{\chi_{\epsilon}^{A.T.}} \quad (IV.54)$$

que é a relação conjecturada por Kadanoff e Brown (1979) entre

operadores do mesmo modelo.

É claro que  $\alpha$  e  $\delta$  são funções da constante de acoplamento do modelo de Thirring (coeficiente do termo  $(\bar{\psi}\psi)^2$ ) designado por  $g$ . Isso permitiria, em princípio, obter o valor de  $x^{A.T.}$  diretamente de (IV.49). Entretanto esta relação, entre a dimensão e o  $g$ , depende da definição de limite usada para o termo de interação (Dell'Antonio et al., 1972).

As expressões em termos de  $\dim(\bar{\psi}\psi)$  são, entretanto, universais (independentes da particular parametrização) e permitem estabelecer a relação (IV.54). Finalmente, juntando a isso as equações (IV.22a), (IV.18) e (II. ) obtem-se

$$x_{\epsilon}^{A.T.} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left[ \frac{\tanh 2K_4}{\tanh 2K_4 - 1} \right]} \quad (IV.55)$$

e

$$\nu^{A.T.} = \frac{1}{2 - x_{\epsilon}^{A.T.}} \quad (IV.56)$$

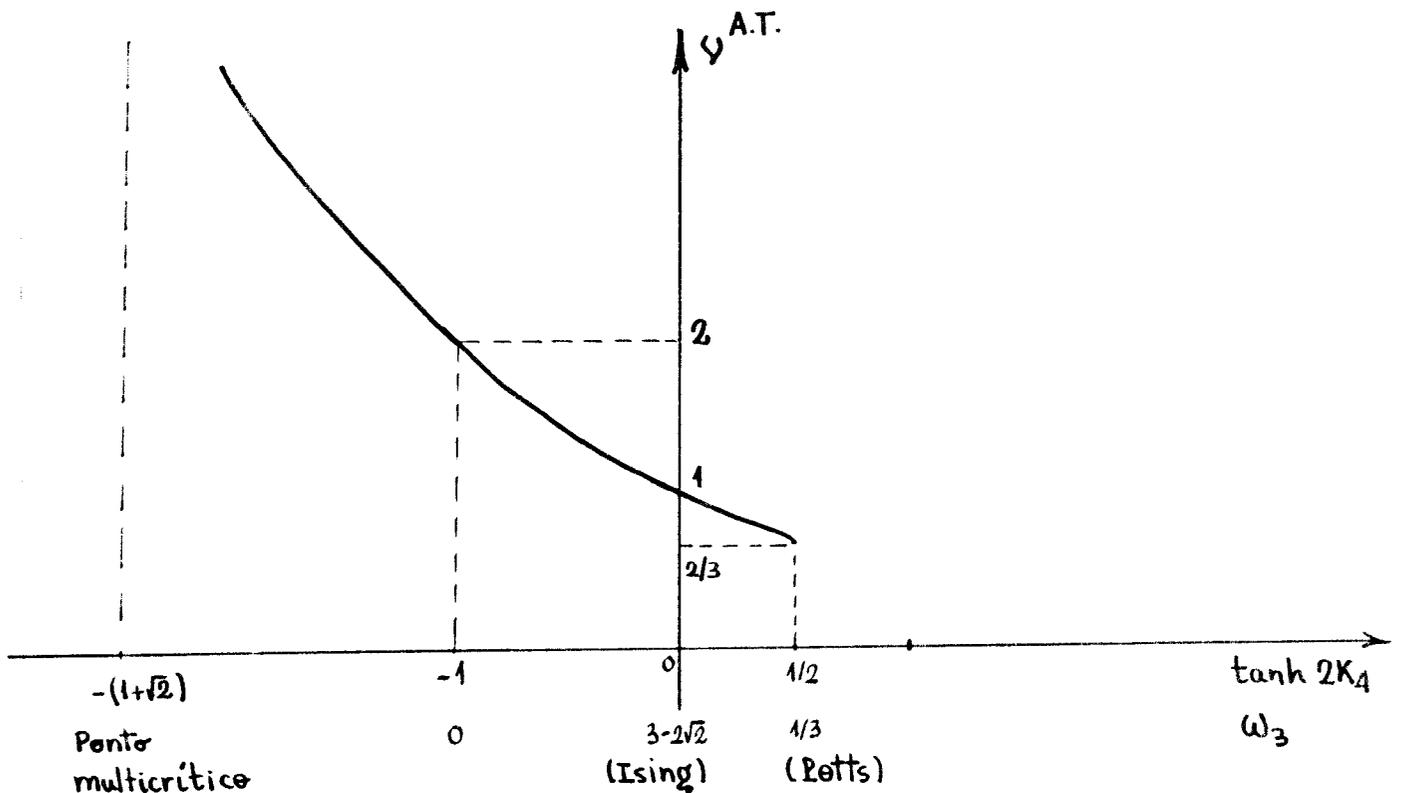


FIG. 38 - O expoente  $\nu$  do Ashkin-Teller em função da constante de acoplamento dos 4 spins

IV.F) A POLARIZAÇÃO (verificação da conjectura do Enting)

No modelo de 8-vértices há duas escolhas para o parâmetro de ordem, conforme se pretenda descrever um ferroelétrico ou um ferromagneto. No primeiro caso o parâmetro de ordem é o conjugado do campo elétrico externo (a Polarização), que está relacionado com a correlação flecha-flecha. Na segunda alternativa a magnetização espontânea é o candidato natural para se estudar a quebra da simetria, graças à representação de Ising introduzida por Wu (1971) e Kadanoff-Wegner (1971). Embora a Polarização possa ser vista sem recorrer à representação Ising ela pode ser escrita nessa linguagem magnética (lembrando que o sentido da flecha é determinado pelo sinal relativo dos spins) como

$$P = \sigma_j \sigma_{j+1} \tag{IV.57}$$

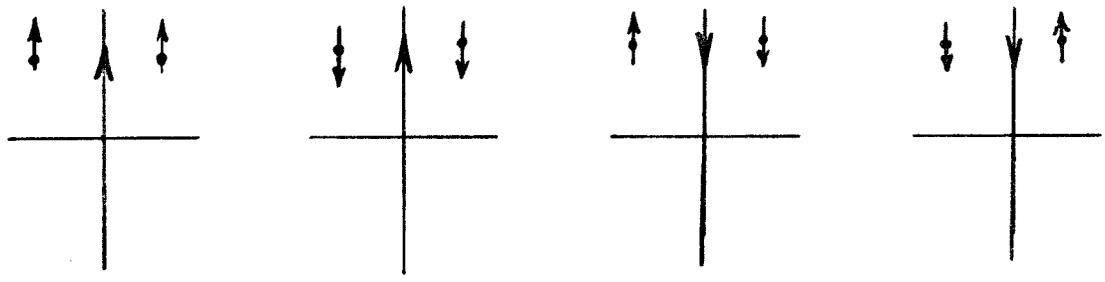


FIG. 39 - A Polarização em termos dos spins

O expoente que descreve o decaimento da correlação flecha-flecha com a distância é chamado  $x_p$ , e não deve ser confundido com  $\beta_e$  que descreve o desaparecimento da Polarização com a temperatura.

Por analogia, define-se a Polarização do modelo de Ashkin-Teller como o produto dos dois spins (que agora residem no mesmo ponto)

$$P^{A.T.} = \sigma_j \mu_j \quad (IV.58)$$

No limite de tempo contínuo reduzimos a dimensionalidade do sistema e em contrapartida passamos de variáveis clássicas  $(\sigma, \mu)$  para operadores quânticos  $(\sigma^Z, \mu^Z)$ . Assim, teremos na formulação hamiltoniana

$$P = \sigma_j^Z \mu_j^Z \quad (IV.59)$$

Tudo o que precisamos agora é escrever  $P$  em termos dos  $\psi$ 's para a seguir encontrar a sua dimensão anômala. Nesse ponto deparamo-nos com uma séria dificuldade:  $P$  é não local nos  $\psi$ 's. A fim de comprovar esse fato lembramos que

$$\begin{aligned} \eta_1(j) &= \pi \prod_{k < j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \\ &\rightarrow \sigma_k^X = -i\eta_1(k)\eta_2(k) \quad (IV.60) \\ \eta_2(j) &= i \prod_{k \leq j} \sigma_k^X \sigma_j^Z \end{aligned}$$

Invertendo e usando (IV.60) vem

$$\sigma_j^Z = \pi \prod_{k < j} \sigma_k^X \eta_1(j) = \pi \prod_{k < j} \left[ -i\eta_1(k)\eta_2(k) \right] \eta_1(j) \quad (IV.61)$$

e uma expressão análoga para  $\mu_j^Z$

$$\mu_j^Z = \pi \prod_{k < j} \left[ -i\zeta_1(k)\zeta_2(k) \right] \zeta_1(j) \prod_{p=-\infty}^{\infty} \left[ -i\eta_1(p)\eta_2(p) \right] \quad (IV.62)$$

Da definição do spinor  $\psi$  na secção (IV.D)

$$\psi(j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1(j+1) - i\zeta_1(j+1) \\ \zeta_2(j) + i\eta_2(j) \end{pmatrix} \quad (IV.63)$$

segue

$$\begin{aligned} \eta_1(j+1) &= \left( \psi_1(j) + \psi_1^*(j) \right) & \zeta_1(j+1) &= i \left( \psi_1(j) - \psi_1^*(j) \right) \\ \eta_2(j) &= -i \left( \psi_2(j) - \psi_2^*(j) \right) & \zeta_2(j) &= 1 \left( \psi_2(j) + \psi_2^*(j) \right) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} P = \sigma_j^Z \mu_j^Z &= -\pi \prod_{k \leq j} \left[ -i \left( \psi_1(k-1) + \psi_1^*(k-1) \right) \left( \psi_2(k) - \psi_2^*(k) \right) \right] \left( \psi_1(j-1) + \psi_1^*(j-1) \right) \\ &\quad \prod_{\ell < j} \left[ -i \left( \psi_1(\ell-1) - \psi_1^*(\ell-1) \right) \left( \psi_2(\ell) + \psi_2^*(\ell) \right) \right] \left( \psi_1(j-1) - \psi_1^*(j-1) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.64})$$

Encontrar a dimensão anômala de um produto desses não é uma tarefa fácil, desde que no limite de escala os  $\psi$ 's que antes estavam em pontos distintos, irão coincidir, dando origem a uma combinação não trivial das dimensões (elas não se somam). A saída certamente não é por aí. E novamente o que vai permitir o cálculo da dimensão é a bosonização, com a diferença que desta vez nós devemos ser um pouco mais explícitos. Essa técnica, que permitiu escrever o spinor do Thirring (sem massa) em termos de um campo livre  $\phi$ , na verdade pode também ser usada para escrever o spinor do Thirring massivo em função de um bosônico  $\phi$ , que satisfaz a equação de sine-Gordon.

Essa equivalência entre as duas teorias (no espaço-tempo bidimensional) foi proposta por Coleman (1975) e "escrita" por Mandelstam (1975) na seguinte forma:

$$\psi(x) = : \exp \left\{ i \frac{\beta\gamma^5}{2} \phi(x) + \frac{2\pi}{\beta} i \int_{x_1}^{\infty} \phi(x_1) dx_1 \right\} : \frac{e^{i\pi\gamma^5/4}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(IV.65)

satisfaz a equação de movimento do Thirring massivo se  $\phi$  satisfizer

$$\square \phi + \frac{\beta \delta m}{\pi} : \sin \beta \phi : = 0$$

com

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV.66})$$

Na verdade as expressões (IV.40a) e (IV.40b) seguem de (IV.65) no limite de massa zero, quando

$$\phi(x) = \phi(t + x_1) + \phi(t - x_1) = \phi(u) + \phi(v) \quad (\text{IV.67})$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \phi(u) - \phi(v) \right] \quad (\text{IV.68})$$

que leva a

$$\psi(x) = : \exp \left\{ i \left( \frac{\beta \gamma^5}{2} - \frac{2\pi}{\beta} \right) \phi(u) + i \left( \frac{\beta \gamma^5}{2} + \frac{2\pi}{\beta} \right) \phi(v) \right\} : \quad (\text{IV.69})$$

Comparando (IV.69) com (IV.40) concluímos que o  $\beta$  da sine-Gordon está relacionado de maneira unívoca com  $\dim(\bar{\psi}\psi)$  do Thirring através de

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{(\alpha + \delta)^2}{4\pi} = \dim \bar{\psi}\psi \quad (\text{IV.70})$$

Voltando ao caso massivo, é possível mostrar (Swieca 1977) que o  $\phi$  é o potencial da corrente axial

$$j_\mu^5 = - \frac{\beta}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (\text{IV.71})$$

e portanto pode ser obtido através da corrente vetorial\*

$$\phi(x_1) = \frac{2\pi}{\beta} \int_{-\infty}^{x_1} \psi^+(z_1) \psi(z_1) dz_1 = \frac{2\pi}{\beta} \int_{-\infty}^{x_1} j^0(z_1) dz_1 \quad (\text{IV.72})$$

A observação de que a corrente  $j^\mu$  (que é sempre conservada no contínuo) também é conservada na rede, sugere a possibilidade de se representar um produto infinito de  $\psi$ 's por meio de um pseudo-potencial "discreto"

$$\phi(j) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{k=-\infty}^j \psi^+(k) \psi(k) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{k=-\infty}^j j(k) \quad (\text{IV.73})$$

De (IV.32) segue

$$\phi(j) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{k=-\infty}^j \left\{ 1 - \frac{i}{2} \eta_1(k+1) \zeta_1(k+1) - \frac{i}{2} \eta_2(k) \zeta_2(k) \right\} \quad (\text{IV.74})$$

onde o fator  $2\pi/\beta$  foi mantido na definição para que o limite de escala conduza ao  $\phi(x)$  adequado. A experiência de Mandelstam indica que devemos olhar para exponenciais do campo  $\phi$ . Então calculamos

---

(\*) A relação entre a corrente vetorial  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  e a axial  $j_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$  é  $j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu^5$  e segue da propriedade dos  $\gamma$ 's  $\gamma^\mu \gamma^5 = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu$  válida apenas em duas dimensões. É importante notar que  $j^\mu$  é sempre conservada em virtude da simetria  $U(1)$  ( $\psi \rightarrow e^{i\sigma} \psi$ ), mas a massa destrói a conservação de  $j^{5\mu}$ . ( $\epsilon_{01} = \epsilon^{10} = 1$ ).

$$e^{i\frac{\beta}{2}\phi(j)} = \exp \left\{ i\pi \sum_{k \leq j} \left[ 1 - \frac{i}{2} \eta_1(k+1) \zeta_1(k+1) - \frac{i}{2} \eta_2(k) \zeta_2(k) \right] \right\} \quad (\text{IV.75})$$

Separando, e a seguir expandindo as exponenciais, teremos

$$e^{i\frac{\beta}{2}\phi(j)} = (-1)^m \pi \prod_{k \leq j} \left[ \eta_1(k+1) \zeta_1(k+1) \right] \left[ -\eta_2(k) \zeta_2(k) \right]$$

que após o uso das equações (IV.60) transforma-se em

$$e^{i\frac{\beta}{2}\phi(j)} = (-1)^m \pi \prod_{k \leq j} \left[ \sigma_{-\infty}^X \dots \sigma_k^{XZ} \sigma_{k+1}^X \sigma_{-\infty}^X \dots \sigma_{\infty}^X \mu_{-\infty}^X \dots \mu_k^{XZ} \mu_{k+1}^X \right] \times \\ \times \left[ \sigma_{-\infty}^X \dots \sigma_k^{XZ} \sigma_{k+1}^X \sigma_{-\infty}^X \dots \sigma_{\infty}^X \mu_{-\infty}^X \dots \mu_k^{XZ} \mu_{k+1}^X \right] = (-1)^m (\sigma_{j+1}^Z \mu_{j+1}^Z) \sigma_{-\infty}^Z \mu_{-\infty}^Z \quad (\text{IV.76})$$

É extremamente interessante observar que, de fato, a menos de condições de contorno, irrelevantes no cálculo da função de correlação para um número par de operadores, temos uma expressão local para a Polarização.

Finalmente, no limite de escala, calcula-se com facilidade a dimensão anômala de  $P = : \exp\{i\frac{\beta}{2}\phi\} :$ , usando as bem conhecidas propriedades de exponenciais de campos livres (considerando o caso de massa zero). O resultado é

$$x_P^{\text{A.T.}} = \frac{\beta^2}{16\pi} = \frac{1}{4} \dim(\bar{\psi}\psi) = \frac{1}{4} x_{\epsilon}^{\text{A.T.}} \quad (\text{IV.77})$$

que confirma a conjectura de Enting (1975).

## IV.G) ESTRUTURA ORDEM-DESORDEM

Voltando a observar a equação (IV.65) notamos que  $\psi$  pode ser decomposto em produto de uma parte local por uma outra não local em  $\phi$ . Além disso identificamos a parte local, que é exatamente a Polarização ( $\exp i\frac{\beta\phi}{2}$ ). Não é surpreendente, desse ponto de vista, que para se obter P seja necessário uma corda de  $\psi$ 's (para eliminar a parte não local dos mesmos).

Outra informação relevante a respeito de  $\psi$  (IV.65) é que ele tem uma estrutura de ordem-desordem (Marino e Swieca, 1980) semelhante àquela detectada por Kadanoff no spinor de Schultz, Mattis e Lieb (1964) para o modelo de Ising. Para entender essa afirmação é preciso recorrer ao próprio modelo de Ising. Nesse caso o operador desordem (que gira todos os spins à sua esquerda) é o  $\tau^Z(n^*)$  definido por

$$\tau^Z(n^*) = \prod_{m \leq n} \sigma^X(m) \quad n^* = n + \frac{1}{2} \quad (\text{IV.78})$$

que junto com  $\sigma$  obedece à seguinte regra de comutação

$$\tau^Z(n^*) \sigma^Z(j) = -\sigma^Z(j) \tau^Z(n^*) \quad \text{se } j < n^* \quad (\text{IV.79a})$$

$$= \sigma^Z(j) \tau^Z(n^*) \quad \text{se } j > n^* \quad (\text{IV.79b})$$

Lembrando que a simetria global do modelo de Ising é  $\sigma^Z \rightarrow -\sigma^Z$  podemos dizer que o operador desordem ( $\tau^Z$ ) aplica em  $\sigma^Z$  a operação de simetria do modelo, se este se encontra à sua esquerda, deixando-o inalterado se ele estiver à sua direita. Além disso o spinor  $\eta$  é exatamente o produto do operador desordem pelo operador ordem.

Voltando ao caso específico do  $\psi$  notamos que as suas duas unidades (parte local e não local) satisfazem as proprieda-

des usuais de um produto do tipo ordem-desordem. De outra forma,

$$\tau(x^0, x^1) = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\beta} \int_{x_1}^{\infty} \dot{\phi}(x^0, z^1) dz^1 \right\} \quad (\text{IV.80})$$

e

$$\sigma(x^0, y^1) = \exp \left\{ i \frac{\beta\gamma^5}{2} \phi(x^0, y^1) \right\} \quad (\text{IV.81})$$

com  $\phi$  obedecendo relações de comutação canônicas

$$[\phi(x^0, x^1), \dot{\phi}(x^0, y^1)] = i \delta(x^1 - y^1) \quad (\text{IV.82})$$

satisfazem

$$\tau(x^0, x^1) \sigma(x^0, y^1) = \begin{cases} -\sigma(x^0, y^1) \tau(x^0, x^1) & \text{se } x^1 < y^1 & (\text{IV.83a}) \\ \sigma(x^0, y^1) \tau(x^0, x^1) & \text{se } x^1 > y^1 & (\text{IV.83b}) \end{cases}$$

Uma vez reconhecido o papel de cada fator em  $\psi$  escrevemos\*

$$\psi(x) = \lim_{\substack{x_a, x_b \rightarrow x}} [:\sigma(x^a): : \mu(x^b):] \quad (\text{IV.84})$$

e encontramos a dimensão do operador desordem ( $x_D$ )

$$\dim \psi = x_P + x_D$$

$$\frac{\alpha^2 + \delta^2}{8\pi} = \frac{(\alpha + \delta)^2}{16\pi} + x_D$$

---

(\*) A renormalização  $\tilde{\epsilon}$  para eliminar o termo ambíguo

$$\lim_{x^a \rightarrow x^b} \exp\{-\pi\gamma^5 \int_{x_b^1}^{\infty} |\phi^+(x^a), \phi^-(z^1, x_b^0)| dz^1\} = \lim_{x^a \rightarrow x^b} \exp\{-\frac{\gamma^5}{4} \ln \frac{u^a - u^b - i\epsilon}{v^a - v^b - i\epsilon}\}$$

que por ser uma razão ( $u/v$ ) não muda a dimensão.

$$x_D = \frac{(\alpha - \delta)^2}{16\pi} = \frac{\pi}{\beta^2} \quad (\text{IV.85})$$

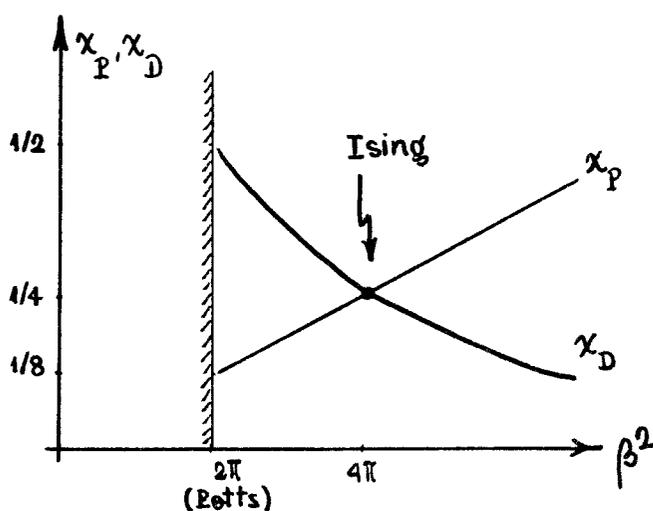


FIG. 40 - Os índices dos operadores ordem e desordem

A conclusão é que o modelo só é auto-dual (no sentido de ordem e desordem obedecerem a mesma dinâmica e portanto adquirirem a mesma dimensão anômala) para  $\beta^2 = 4\pi$  que é o conhecido modelo de Ising. Não há nesse resultado nenhuma surpresa fantástica uma vez que a prescrição utilizada na formulação hamiltoniana destruiu a auto-dualidade do modelo. É importante observar também que o modelo de Potts, que é auto-dual não está incluído na região em estudo ( $\omega_3 < \omega_1 = \omega_2$ ).

#### IV.H) TRANSFORMAÇÃO DE DUALIDADE NO CONTÍNUO

Nas secções anteriores pudemos observar que, ao fazer uma transformação de dualidade no modelo de A.T. encontrávamos na rede um 8-V associado. Por outro lado, trabalhando com a hamiltoniana de tempo contínuo do A.T. vimos que ela tem como limite de escala a hamiltoniana do Thirring massivo. Acontece que Luther mostrou a mesma coisa para a hamiltoniana de Heisenberg ( $\equiv T_{8V}$ ). A pergunta que surge é natural: será que existe alguma relação

entre os dois modelos no contínuo, que lembre a transformação de dualidade na rede?

Para responder a essa pergunta vamos lembrar que o  $\beta$  da Sine-Gordon está relacionado com a constante de acoplamento do Thirring  $g$  através de (Sommerfield, 1963)

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \dim \bar{\psi}\psi = \frac{1}{1 - g/\pi} \quad (\text{IV.84})$$

ou

$$g = \pi \left( 1 - \frac{4\pi}{\beta^2} \right)$$

Se fizermos uma transformação

$$\beta \rightarrow \beta' = \frac{4\pi}{\beta} \quad (\text{IV.85})$$

(que preserva  $\beta^2 = 4\pi$  como teoria livre) teremos um Thirring com uma nova constante de acoplamento

$$g' = \pi \left( 1 - \frac{\beta^2}{4\pi} \right) \quad (\text{IV.86})$$

Procurando a relação entre a nova e a velha constante de acoplamento encontramos

$$\left( \frac{g'}{\pi} \right) = \frac{(g/\pi)}{(g/\pi) - 1} \quad (\text{IV.87})$$

que tem exatamente a forma da relação (IV.18) que expressava  $(\tanh 2\lambda)$  em função de  $(\tanh 2K_4)$  na rede. Embora não se possa fazer uma afirmação categórica é razoável supor que  $\beta \rightarrow 4\pi/\beta$  reflète no contínuo a transformação de dualidade  $\mu \rightarrow \gamma$  introduzida na rede por Wegner (1972). Além de levar à equação (IV.87) essa transformação também satisfaz à relação predita por Kadanoff entre o  $x_\epsilon^{\text{A.T.}}$  e o  $x_\epsilon^{8-V}$ ,

$$x_{\epsilon}^{\text{A.T.}} = \frac{1}{x_{\epsilon}^{8-V}} \quad (\text{IV.88})$$

De fato, com

$$x_{\epsilon}^{\text{A.T.}} = \frac{\beta^2}{4\pi} \quad \text{e} \quad x_{\epsilon}^{8-V} = \frac{\beta'^2}{4\pi}$$

teremos

$$x_{\epsilon}^{8-V} = \frac{\beta'^2}{4\pi} = \frac{(4\pi)^2}{4\pi\beta^2} = \frac{4\pi}{\beta^2} = \frac{1}{x_{\epsilon}^{\text{A.T.}}} \quad (\text{IV.89})$$

É importante notar que, embora os expoentes críticos não tenham uma expressão universal em termos da constante de acoplamento do Thirring ( $g$ ), eles têm uma representação única em termos de  $\beta$  (Sine-Gordon), já que

$$\dim \bar{\psi}\psi = \frac{\beta^2}{4\pi} \quad (\text{IV.90})$$

Entretanto a teoria no contínuo é instável para  $\beta^2 > 8\pi$  e por essa razão é interessante usar a equação (IV.88) para verificar se os nossos modelos da Mecânica Estatística não estão sendo levados a uma teoria de campos instável. De (IV.88) e (IV.91) segue

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{1 - \frac{2}{\pi} \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\tanh(2K_4)}{\tanh(2K_4) - 1} \right]} \quad (\text{IV.91})$$

cujo gráfico é

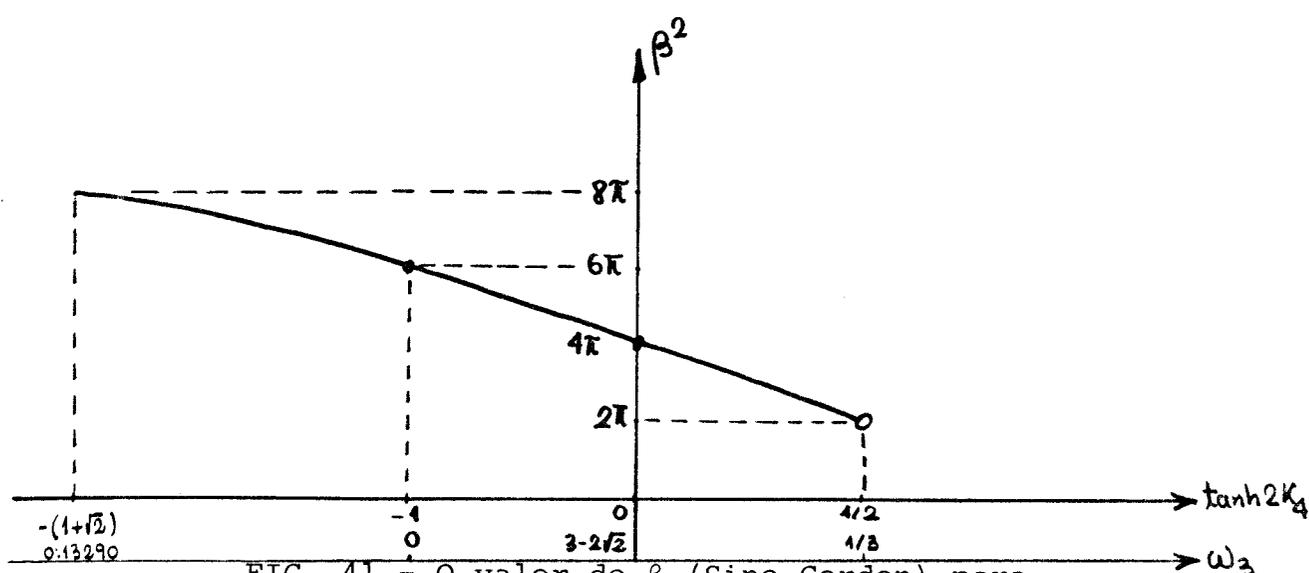


FIG. 41 - O valor do  $\beta$  (Sine-Gordon) para o modelo de A.T.

Como se pode ver, na região de interesse  $-1 \leq \tanh 2K_4 \leq \frac{1}{2}$  a teoria no contínuo é estável. Mais do que isso, há uma região de  $\beta$  ( $6\pi \leq \beta^2 \leq 8\pi$ ) que em princípio não é física porque implica em acoplamentos imaginários. Entretanto esses modelos ficam perfeitamente definidos em termos dos pesos  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  da equação (IV.3) que são reais. Apenas por curiosidade apresentamos os pesos  $\omega_i$  para o pior caso ( $\beta^2 = 8\pi$ )

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1 \\ \omega_1 &= \omega_2 = 0.56645 \\ \omega_3 &= 0.13290 \end{aligned} \tag{IV.92}$$



## V. QUEBRA PARCIAL DE SIMETRIA

### V.A) INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, mais precisamente na secção IV.B) mostramos que o A.T. na região  $K_4 > K_1 = K_2 = K$  sofre mais de uma transição. Isto significa que a simetria do sistema  $Z(4)$  não é quebrada de uma só vez. Para compreender esse fato, é conveniente introduzir a nova variável  $T = \sigma\mu$  e eliminar da ação o  $\mu$ .

$$A = - \sum_{\langle \rangle} \left[ J_0 + J\sigma\sigma' + J_4 TT' + J\sigma\sigma' TT' \right] \quad (V.1)$$

O efeito dessa mudança de linguagem sobre os componentes pode ser visto diretamente:

$$A \equiv (+, +) \text{ em } (\sigma, \mu) \text{ é } (+, +) \text{ em } (\sigma, T) \quad (V.2a)$$

$$B \equiv (+, -) \text{ em } (\sigma, \mu) \text{ é } (+, -) \text{ em } (\sigma, T) \quad (V.2b)$$

$$C \equiv (-, +) \text{ em } (\sigma, \mu) \text{ é } (-, -) \text{ em } (\sigma, T) \quad (V.2c)$$

$$D \equiv (-, -) \text{ em } (\sigma, \mu) \text{ é } (-, +) \text{ em } (\sigma, T) \quad (V.2d)$$

Agora estamos em condições de investigar as transições. Suponha que o sistema esteja na fase de alta temperatura e  $J_4$  seja maior do que  $J$ . Ao abaixar a temperatura o sistema sofrerá primeiro uma transição que quebra a simetria global  $T \rightarrow -T$ . Essa transição de fase ocorreria a uma temperatura  $T_c^0$  dada por

$$e^{-2J_4/kT_c^0} = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2} - 1 \quad (V.3)$$

se  $J$  fosse zero ( $\omega_3 = 1$ ). A presença de  $J$ , certamente altera a temperatura em que a simetria  $Z(2)$ , em  $T$ , é quebrada porém, até agora não há nenhum resultado exato para a nova temperatura crítica. Prosseguindo o resfriamento o sistema quebra espontaneamente a simetria  $Z(2)$  que restava ( $\sigma \rightarrow -\sigma$ ).

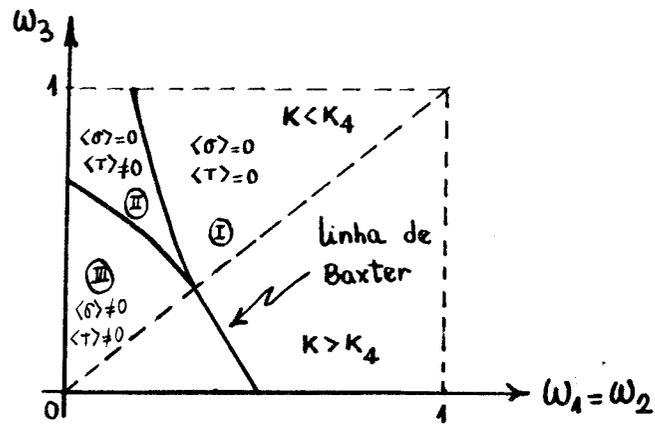


FIG. 42 - O diagrama de fases do A.T. simétrico

Voltando às configurações (V.2) observamos que a primeira transição corresponde a uma escolha entre (AD) e (BC). O sistema, no entanto, ainda não escolheu entre A e D, ou entre B e C. Na região II temos então:

$$\langle \sigma \rangle = 0$$

$$\langle T \rangle \neq 0$$

Depois da segunda transição, que corresponde à quebra espontânea da simetria em  $\sigma$ , o sistema desenvolve também um valor esperado diferente de zero para  $\sigma$ , e o que temos na região III é

$$\langle \sigma \rangle \neq 0$$

$$\langle T \rangle \neq 0$$

Designando por ④ a fase em que a simetria está completamente quebrada (há 4 vácuos completamente equivalentes), por ②<sub>T</sub> a fase em que sobrevive apenas a simetria em  $\sigma$ , e por ① a fase em que a simetria é  $Z(4)$  temos

$$\textcircled{4} \longleftrightarrow \textcircled{2}_T \longleftrightarrow \textcircled{1}$$

diferente da linha de Baxter ( $J_4 < J$ ) em que a transição é do tipo

$$\textcircled{4} \longleftrightarrow \textcircled{1}$$

Acredita-se (Wu e Lin, 1974; Zittarts, 1981; Kohmoto et al., 1981) que as transições do tipo

$$\textcircled{2m} \leftrightarrow \textcircled{m}$$

estejam na mesma classe de universalidade de Ising e tenham, em consequência disso, os mesmos índices críticos.

O objetivo desse capítulo é investigar essas transições, e isso será feito de duas maneiras distintas:

- i) fazendo uma transformação, do grupo de renormalização, na hamiltoniana equivalente (V.B), e
- ii) usando um método de "scaling" exato, recentemente desenvolvido por Stinchcombe (1981) para tratar modelo de Ising com diluição de ligações.

#### V.B) GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO APLICADO AO A.T. COM $K_4 > K$

O modelo de A.T. simétrico pode ser formulado em termos de uma variável  $Z(4)$ , conforme secção IV.C). A hamiltoniana de tempo contínuo, na região  $K_4 > K$  é dada por (Alcaraz, 1980)

$$H = -\frac{\Lambda}{2} \sum_j \left[ S(j)S^+(j+1) + S^+(j)S(j+1) \right] - \epsilon \sum_j \left[ S(j)S^+(j+1) \right]^2 - \Gamma \sum_j R^2(j) \quad (V.4)$$

onde  $S$  agora é um operador que atua no espaço  $H = \prod_{i=1}^N h_i$  e  $h_i$  é o espaço de Hilbert gerado pelos vetores

$$\langle 1 | \equiv (1, 0, 0, 0); \quad \langle 2 | \equiv (0, 1, 0, 0); \quad \langle 3 | \equiv (0, 0, 0, 1)$$

$$\text{e } \langle 4 | \equiv (0, 0, 1, 0)$$

Com  $S(j)$  estamos representando

$$S(j) = \uparrow \otimes \dots \otimes \hat{S} \otimes \dots \otimes \uparrow \quad (V.5)$$

↑ — j-ésima posição

onde  $\hat{S}$  é um operador diagonal nessa base

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.6})$$

Da mesma forma  $R(j)$  é o produto

$$R(j) = \uparrow \otimes \dots \otimes \hat{R} \otimes \dots \otimes \uparrow$$

↑-j-ésima posição

e  $\hat{R}$  é o operador que vira os spins

$$\hat{R}|n\rangle = |n+1\rangle \pmod{4} \quad (\text{V.7})$$

e tem a representação matricial

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.8})$$

É fácil mostrar que

$$\hat{S} = \frac{(1+i)}{2} \hat{\sigma}^z \otimes \uparrow + \frac{(1-i)}{2} \uparrow \otimes \hat{\mu}^z \quad (\text{V.9})$$

e que

$$\hat{R} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\sigma}^x \otimes \uparrow + \uparrow \otimes \hat{\mu}^x + i (\hat{\sigma}^y \otimes \hat{\mu}^z - \hat{\sigma}^z \otimes \hat{\mu}^y) \right] \quad (\text{V.10})$$

satisfazendo a relação de comutação de  $Z(4)$

$$\hat{S}\hat{R} = e^{i\frac{2\pi}{4}} \hat{R}\hat{S} = i \hat{R}\hat{S} \quad (\text{V.11})$$

Essas últimas equações (V.9,10,11) são importantes para fazer o contato entre as hamiltonianas escritas com variáveis  $Z(4)$ , e aquelas do capítulo anterior em que foram usadas variáveis  $Z(2)$ .

Continuando a preparar o terreno, frisamos que a escolha da base é opcional, de forma que não há nada que desabone o uso de uma outra base  $|\ell'\rangle$  em que o operador  $\hat{R}$  seja diagonal. A relação entre a velha e a nova base é

$$|\ell'\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (i)^{(\ell-1)(k-1)} |k\rangle \quad (\text{V.12})$$

que conduz aos vetores

$$|1'\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |2'\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad |3'\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e$$

$$|4'\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

O efeito de  $\hat{R}^2$  sobre esses vetores é

$$\begin{aligned} \hat{R}^2 |1'\rangle &= |1'\rangle & \hat{R}^2 |3'\rangle &= |3'\rangle \\ \hat{R}^2 |2'\rangle &= -|2'\rangle & \hat{R}^2 |4'\rangle &= -|4'\rangle \end{aligned}$$

e o de  $\hat{S}$  é

$$\hat{S}|n'\rangle = |n+1'\rangle \quad (\text{mod. } 4) \quad (\text{V.13})$$

A vantagem de trabalhar com essa base é que, ao calcular os elementos de matriz de H, o efeito de S fica separado do efeito de  $S^2$  sobre os "spins" (que não são spins reais).

Depois desse preâmbulo, partimos para a investigação da hamiltoniana (V.4), que conforme se pode observar tem dois limites solúveis:  $\Gamma = 0$  e  $\Lambda = 0$ . No primeiro caso os spins tendem a ficar alinhados, e o estado fundamental tem degenerescência 4. No

segundo caso a hamiltoniana também é solúvel uma vez que  $S^2$  comuta com  $R^2$ .

$$SSRR = iS(RS)R = -RSSR = -iRSRS = RRSS$$

Os dois auto-vetores correspondentes à energia fundamental são:

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_j + |3\rangle_j) \quad (\text{V.14a})$$

e

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_j + |4\rangle_j) \quad (\text{V.14b})$$

O que faremos em seguida é uma transformação da hamiltoniana, que é lícita em qualquer regime, e que permite localizar a mudança da natureza do estado fundamental. O estudo dos operadores, na vizinhança desse ponto especial, conduzirá aos expoentes críticos da transição. A referida transformação tem como objetivo reduzir o número de graus de liberdade, sem que se perca a informação de interesse (o estado fundamental). A experiência com os métodos variacionais da Mecânica Quântica ensina, que o sucesso de uma empresa desse tipo está ligado à habilidade com que se elimina possibilidades, e sem dúvida não há uma única maneira de conduzir tal processo. A situação aqui não é diferente e várias maneiras foram propostas para realizar o "corte nos graus de liberdade" (Drell et al. 1976, 1977, 1978; Julien et al. 1978, Hu, 1979; A. Fernandez-Pacheco, 1979), das quais a de Pacheco fornece, pelo menos para o Ising com campo transversal, o acoplamento crítico e o expoente  $\nu$  exatos. A diferença desse último com os outros esquemas é que os sítios e as ligações são tratados de maneira simétrica. Para realizar essa idéia, o sistema de spins é dissecado em blocos que interagem entre si (cada bloco tem 2 ou mais spins que interagem mutuamente e com o "campo")

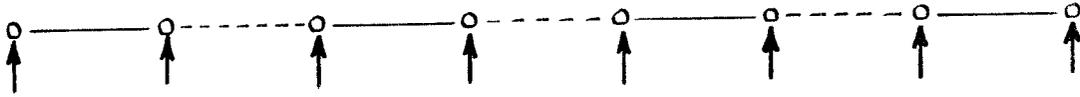


FIG.43 - A maneira "antiga" de dissecar o sistema

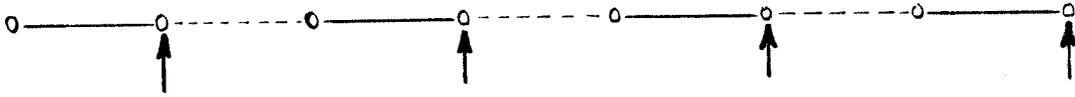


FIG.44 - A "nova" maneira de dissecar o sistema (Pacheco)

Entretanto ao escrever a hamiltoniana de bloco, Pacheco omite um dos termos de sítio ("campo"), obtendo com isso um perfeito equilíbrio sítio-ligação. Diagonalizando a hamiltoniana de bloco, e conservando apenas os estados de mais baixa energia, estaremos escolhendo uma base ortonormal incompleta, que gera um sub-espaço do espaço de Hilbert original. A esperança é que lá se encontre o estado fundamental. No estudo da hamiltoniana (V.4) adotaremos a idéia de Pacheco colocando, para cada bloco de dois spins, apenas um termo de cada espécie contida em H. Designando por  $B_\ell$  a hamiltoniana do bloco  $\ell$ , temos

$$B_\ell = -\frac{\Lambda}{2} \left[ S(1)S^+(2) + S^+(1)S(2) \right] - \epsilon S^2(1)S^2(2) - \Gamma R^2(2) \quad (\text{V.15})$$

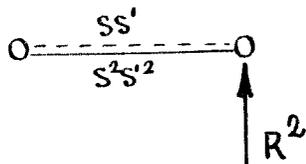


FIG. 45 - O bloco de spins

Usando a base em que R é diagonal, a hamiltoniana de bloco será uma matriz 16 x 16, que é a soma direta de 4 matrizes (4 x 4) idênticas. Uma delas é (omitindo por simplicidade de notação a linha dos estados)

$$\begin{array}{c} \langle 1,1| \\ \langle 2,4| \\ \langle 3,3| \\ \langle 4,2| \end{array} \begin{bmatrix} |1,1\rangle & |2,4\rangle & |3,3\rangle & |4,2\rangle \\ -\Gamma & -\Lambda/2 & -\epsilon & -\Lambda/2 \\ -\Lambda/2 & \Gamma & -\Lambda/2 & - \\ -\epsilon & -\Lambda/2 & -\Gamma & -\Lambda/2 \\ -\Lambda/2 & -\epsilon & -\Lambda/2 & \Gamma \end{bmatrix} \quad (V.16)$$

cujos auto-valores são:

$$\begin{array}{l} \epsilon \pm \Gamma \\ -\epsilon \pm \sqrt{\Gamma^2 + \Lambda^2} \end{array}$$

dos quais o menor

$$E_0 = -\epsilon - \sqrt{\Gamma^2 + \Lambda^2} \quad (V.17)$$

corresponde nessa sub-matriz ao auto-vetor

$$|1_b\rangle = \alpha |1,1\rangle + \beta |2,4\rangle + \alpha |3,3\rangle + \beta |4,2\rangle \quad (V.18)$$

com

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} \quad (V.19)$$

e

$$\gamma = -K + \sqrt{1+K^2} \quad K = \frac{\Gamma}{\Lambda} \quad (V.20)$$

Em cada uma das outras três sub-matrizes há um vetor correspondente a essa energia fundamental. Eles são:

$$\begin{array}{l} |2_b\rangle = \alpha |2,1\rangle + \beta |1,2\rangle + \alpha |4,3\rangle + \beta |3,4\rangle \\ |3_b\rangle = \alpha |3,1\rangle + \beta |2,2\rangle + \alpha |1,3\rangle + \beta |4,4\rangle \end{array} \quad (V.21)$$

$$|4_b\rangle = \alpha|4,1\rangle + \beta|1,4\rangle + \alpha|2,3\rangle + \beta|3,2\rangle \quad (\text{V.23})$$

Computando os elementos de matriz de H (entre blocos) nessa base truncada encontramos

$$\langle 1_b 1_b | \Lambda S_\ell(2) S_{\ell+1}^+(1) | 2_b 4_b \rangle = \Lambda(4\alpha\beta) \quad (\text{V.24})$$

$$\langle 1_b 1_b | \epsilon S_\ell^2(2) S_{\ell+1}^2(1) | 3_b 3_b \rangle = \epsilon \quad (\text{V.25})$$

$$\langle 1_b 1_b | \Gamma R_{\ell+1}^2(1) | 1_b 1_b \rangle = \Gamma 2(\alpha^2 - \beta^2) \quad (\text{V.26})$$

isto é, a hamiltoniana entre blocos é isomorfa à hamiltoniana de sítio, com os acoplamentos renormalizados

$$\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda(4\alpha\beta) \quad (\text{V.27})$$

$$\Gamma \rightarrow \Gamma' = \Gamma 2(\alpha^2 - \beta^2) \quad (\text{V.28})$$

$$\epsilon \rightarrow \epsilon' = \epsilon \quad (\text{V.29})$$

Usando  $\Lambda$  para fixar a escala de energia teremos na realidade dois acoplamentos independentes:

$$K = \frac{\Gamma}{\Lambda} \quad \text{e} \quad J = \frac{\epsilon}{\Lambda} \quad (\text{V.30})$$

De acordo com (V.19) e (V.20) teremos para K a seguinte equação:

$$K' = K \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} = K^2 \quad (\text{V.31})$$

o que significa que se K for maior do que um, a transformação fará com que ele cresça cada vez mais. Por outro lado, se K for menor do que um ele será diminuído a cada realização.

Dessa maneira, ao iterar esse processo o sistema será levado para um dos dois regimes:  $K \rightarrow \infty$  ou  $K \rightarrow 0$ , que correspondem aos casos  $\Gamma=0$  e  $\Lambda=0$  respectivamente.

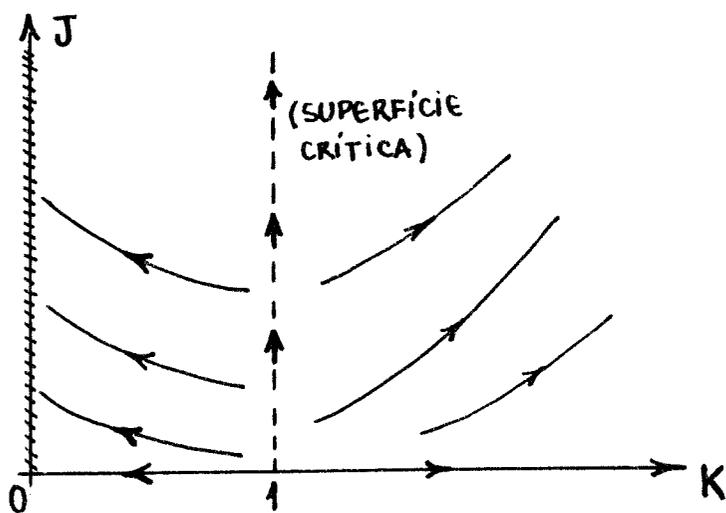


FIG. 46 - O espaço de parâmetros e as trajetórias descritas pela aplicação da transformação.

O ponto  $K=1$  é exatamente o valor, da constante de acoplamento, em que a natureza do estado fundamental muda, e portanto deve ser o ponto crítico dessa teoria. Entretanto simplesmente  $K=1$  não é um ponto fixo frente à transformação desde que

$$J' = \frac{J(1+K^2 - K\sqrt{1+K^2})}{\sqrt{1+K^2} - K} > J$$

A interação cuidará no entanto de levar a hamiltoniana para o ponto fixo  $K=1, J=\infty$ .

Voltando à equação (V.31)

$$K' = K^2$$

obtemos o chamado auto-valor térmico

$$\lambda_T = \left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K=K^*} = 2 \quad (\text{V.32})$$

e a seguir o expoente do comprimento de correlação

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda_T} = 1 \quad (\text{V.33})$$

É possível entender esse resultado para  $\nu$ , lembrando

que, ao levar para infinito o coeficiente de  $S^2 S'^2 = (\sigma\sigma' \mu\mu')$ , estamos exigindo que  $\sigma\sigma'$  e  $\mu\mu'$  tenham o mesmo sinal. Isso significa que os 2 Ising's ficam tão fortemente acoplados, que um é simples cópia do outro. Em consequência disso, toda a dinâmica da transição vem de apenas um deles.

Nós deixamos de apresentar o estudo da outra linha crítica, uma vez que ela é a dual dessa que estudamos, e tudo o que aqui foi feito pode ser repetido trocando ordem por desordem.

#### V.C) O A.T. COMO UM MODELO DE ISING DILUÍDO

Recentemente, Stinchombe (1981) obteve uma transformação de escala exata para o modelo de Ising (2-d). Esse "scaling" fenomenológico, além de fornecer os expoentes corretos, tem o mérito de descrever adequadamente também o modelo de Ising com diluição de ligações. No caso puro a hamiltoniana unidimensional equivalente é (Suzuki, 1976)

$$H = -J \sum_j S_j^z S_{j+1}^z - \Gamma \sum_j S_j^x \quad (V.34)$$

que só tem um parâmetro

$$\lambda = \frac{J}{\Gamma} \quad (V.35)$$

Conforme Suzuki (1976) o parâmetro  $\lambda$  está relacionado com os acoplamentos originais segundo:

$$\lambda = (\tanh K_x / \tanh K_\tau^*) = 1/\alpha_2 \quad (V.36)$$

onde

$$\tanh K_\tau^* = \left( \frac{1 - \tanh K_\tau}{1 + \tanh K_\tau} \right) \quad (V.37)$$

O fato interessante a destacar é que Wu\* (1966) determinou o comportamento da função de correlação  $\langle \sigma_{0,0} \sigma_{0,N} \rangle$  e para N grande encontrou

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{0,N} \rangle \approx e^{-N \ln \alpha_2} \quad ; \quad T > T_c \quad (V.38a)$$

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{0,N} \rangle \approx e^{2N \ln \alpha_2} = e^{-2N \ln(1/\alpha_2)} \quad ; \quad T < T_c \quad (V.38b)$$

que com (V.36) e  $Ns = x$  (s é o parâmetro de rede) dá para  $\xi$  (comprimento de correlação) o resultado:

$$\xi = s/2 \ln \lambda \quad \text{para } \lambda > 1 \quad (V.39a)$$

e

$$\xi = s/\ln(1/\lambda) \quad \text{para } \lambda < 1 \quad (V.39b)$$

A dependência de  $\xi$  com  $\lambda$  permite descobrir a forma com que  $\lambda$  se transforma sob dilatação do sistema. Por exemplo, substituindo grupos de  $b$  ligações da rede original por uma ligação da nova rede (o que corresponde a multiplicar por  $b$  a unidade de medida) o comprimento de correlação deve ficar dividido por  $b$ . Isso precisa acontecer a fim de que as propriedades críticas (por spin) sejam iguais nos dois sistemas. Dessa forma

$$\xi(\lambda') = \frac{\xi(\lambda)}{b} = \frac{s}{b \ln \lambda} = \frac{s}{\ln(\lambda')} \quad (V.40)$$

que leva a

$$\lambda' = \lambda^b = F(\lambda) \quad (V.41)$$

Essa é a transformação exata para o  $\lambda$  que incidentalmente satisfaz a relação de dualidade (Fradkin e Susskind, 1978)

---

(\*) Veja também o livro "The Two-Dimensional Ising System" de B. McCoy e T.T. Wu equações (2.43) e (3.24) páginas 256 e 260

$$F(\lambda) = 1/F(1/\lambda) \quad (V.42)$$

e que fornece

$$\lambda_T = b \quad (V.43)$$

e

$$\nu = 1 \quad (V.44)$$

que é o valor exato desse expoente para o modelo de Ising.

É importante destacar que o raciocínio aqui envolvido é muito semelhante àquele da secção anterior, porém evita-se a construção da base truncada por conhecer explicitamente a dependência do comprimento de correlação em  $\lambda$ .

A equação (V.41) sugere a possibilidade de estender esse tratamento "fenomenológico" para o Ising diluído, em que  $\lambda_i$  pode assumir os valores  $\lambda$  ou zero. A generalização plausível parece ser (Stinchcombe, 1981)

$$\lambda'_i = \prod_{i=1}^b \lambda_i \quad (V.45)$$

que recai na equação (V.41) no caso puro ( $\lambda_i = \lambda, \forall i$ ).

No modelo diluído o agrupamento de  $b$  ligações poderá resultar em  $\lambda^b$  ou zero com uma probabilidade que depende da chance de se ter no sistema original uma "falta" de ligação. Chamando  $p$  a probabilidade de  $\lambda_i$  ser não nula teremos inicialmente

$$P(\lambda_i) = (1-p) \delta(\lambda_i) + p \delta(\lambda_i - \lambda) \quad (V.46)$$

e após a dilatação

$$P'(\lambda'_i) = (1-p') \delta(\lambda'_i) + p' \delta(\lambda'_i - \lambda') \quad (V.47)$$

com

$$p' = p^b \quad (V.48a)$$

e

$$\lambda' = \lambda^b \quad (V.48b)$$

Para chegar  $\tilde{\Lambda}$  (V-48) lembre que, para o produto dos  $\lambda_i$  ser diferente de zero é preciso que todas as ligações do grupo existam. Como as ligações têm, independentemente, probabilidade  $p$  de existir, a probabilidade que todas sejam não nulas é

$$p' = p \cdot p \dots p = p^b$$

e obviamente o  $\lambda'$  é o produto de  $b$   $\lambda$ 's idênticos (não nulos) o que dá  $\lambda^b$ .

O ponto fixo não trivial das equações (V.48) é

$$(p^*, \lambda^*) = (1, 1) \quad (V.49)$$

que é exatamente o ponto fixo do Ising puro. Em consequência disso teremos, para o Ising com diluição de ligações, os mesmos expoentes que determinamos para o modelo original. Para tratar o modelo com diluição de sítios seria preciso conhecer o comprimento de correlação do modelo de Ising em que a constante de acoplamento varia de camada para camada (McCoy e Wu, 1968, 1969, 1971) em uma das direções. Até hoje não se conhece essa expressão e portanto a forma exata do "scaling" fica em aberto.

Para encerrar essa secção, nós vamos mostrar que o A.T com  $K_4 > K_1 = K_2 = K$  é um modelo de Ising diluído. Para isso consideramos a matriz de transferência do A.T. nas variáveis  $\sigma$  e  $T = \sigma\mu$ .

$$C \exp \{ K\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + K\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z T_j^z T_{j+1}^z + K_4 T_j^z T_{j+1}^z \} \times \\ \left( 1 + e^{-4K} \sigma_j^x + e^{-2K-2K_4} (\sigma_j^x T_j^x + T_j^x) \right) \quad (V.50)$$

e em seguida fazemos o limite de tempo contínuo, obtendo

$$H_{A.T.} = - \frac{\Lambda}{2} \sum_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \left( 1 + T_j^z T_{j+1}^z \right) - \Lambda \Delta \sum_j T_j^z T_{j+1}^z - \sum_j \sigma_j^x \quad (V.51)$$

O exame dessa hamiltoniana mostra que  $\sigma$  é um Ising cuja constante de acoplamento é  $\frac{\Lambda}{2}(1 + T_j^z T_{j+1}^z)$ . Acontece que  $T^z$  comuta com todos os termos da hamiltoniana, e nada nos impede de trabalhar com uma base em que  $T^z$  seja diagonal. Isso significa que  $T_j^z T_{j+1}^z$  assumirá em cada ligação (independentemente) os valores +1 ou -1, levando a uma constante de acoplamento que será  $\Lambda$  ou zero. Temos em mãos um modelo de Ising com diluição de ligações para o qual já determinamos o ponto fixo (V.49) e os expoentes (que são os do Ising puro  $\nu=1$ ,  $\beta=1/8$ , etc..),

Para fazer contato com a análise da secção anterior observamos que  $p=1$  significa que  $T_j^z T_{j+1}^z$  tem que valer 1 em todas as ligações ( $\forall j$ ) ou seja  $\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$  e  $\mu_j^z \mu_{j+1}^z$  têm que ter o mesmo sinal. Essa foi exatamente a conclusão a que fomos levados na secção V.B onde também obtivemos  $\Lambda=1$  como ponto fixo.

Acreditamos que essas duas análises suportam a afirmação de que as transições do A.T., fora das linhas de Baxter, são do tipo Ising.

## APÊNDICE A

## O PROBLEMA DAS N CORES

O modelo de Potts (1952) é uma generalização do modelo de Ising em que o spin pode ter  $q$  valores ( $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$ ). A interação é só entre primeiros vizinhos e a energia do par é  $-\epsilon$  se os spins estiverem no mesmo estado, e zero nos outros casos. A função de partição é

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left( \beta \epsilon \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right) \quad (\text{A.1})$$

e pode ser escrita como

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} \left( 1 + v \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right) \quad (\text{A.2})$$

onde

$$v = e^{\beta \epsilon} - 1 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Expandindo o produto teremos  $2^E$  termos ( $E$  é o número de ligações entre os spins), aos quais associaremos um gráfico da rede, colocando barras nas ligações onde escolhermos o termo  $v \delta(\sigma_i, \sigma_j)$ . Há uma correspondência biunívoca entre gráficos ( $G$ ) na rede e termos da expansão, de forma que a função de partição também pode ser calculada a partir de

$$Z = \sum_G q^C v^{\ell} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\ell$  é o número de barras e  $C$  a quantidade de componentes (considerando como componente os agrupamentos de spins no mesmo estado, e também um sítio isolado). A soma indicada deve ser feita

sobre os  $2^E$  gráficos de  $Z$  (rede original).

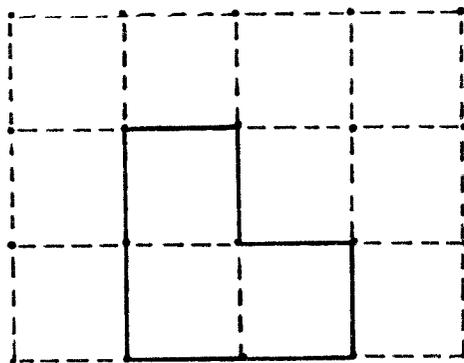


FIG. A.1 - O gráfico  $G$  correspondente a um termo da expansão de (A.2)

A expressão (A.4) é o que se costuma chamar de polinômio de Whitney (1932). Vale a pena destacar que (A.4) contém o problema da percolação e o de colorir mapas como casos particulares. Por exemplo

$$\left( \frac{\partial}{\partial q} \ln Z \right)_{q=1} \quad (\text{A.5})$$

é o número médio de componentes da percolação.

O problema das  $N$  cores é obtido fazendo-se  $\varepsilon = -\infty$  (isto é, impedindo que as cores das faces adjacentes sejam iguais) e portanto  $v = -1$ . Note que resolver o problema das  $N$  cores é equivalente a conhecer o estado fundamental do Potts- $N$ .

Temperley e Lieb (1971) mostraram que o modelo de Potts- $q$  é equivalente a um modelo de seis vértices alternado. Mais tarde, Baxter, Kelland e Wu (1976) produziram uma outra demonstração (mais transparente) dessa "equivalência a nível de função de partição". Eles fazem a expansão em gráficos de  $G$ , e usam a rede medial (veja Capítulo IV, secção B) como suporte dos vértices. Introduzem dois novos parâmetros através de

$$q^{1/2} = 2 \cosh \theta \quad (\text{A.6})$$

e

$$s = \exp(\theta/2) \quad (\text{A.7})$$

e fazem uma correspondência entre gráficos (G) na rede original (Z) e decomposição de Z' em polígonos, contornando os componentes (C).

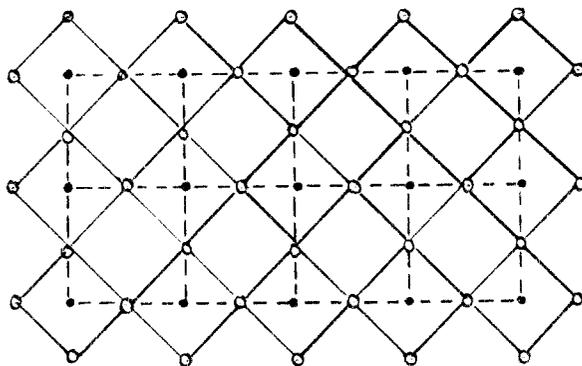
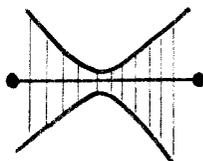
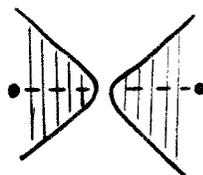


FIG. A.2 - A rede quadrada Z (círculos cheios e linhas tracejadas) e a rede medial Z' (círculos vazios e linhas sólidas).

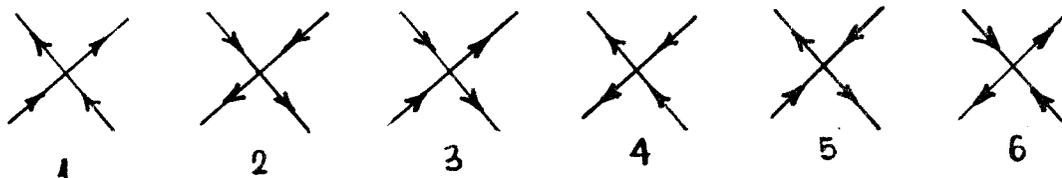
Para realizar o que foi dito basta que dois sítios, ligados por uma barra, separem os lados da rede medial



enquanto dois sítios que não estejam ligados por barras, sejam separados pela decomposição em Z'



Existem 6 possibilidades para um vértice "interno" de Z'



e os pesos atribuídos a eles devem ser:

sub-rede A (ligações horizontais)

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 = 1, 1, x, x, s^{-1}, s + xs^{-1} \quad (\text{A.8a})$$

sub-rede B (ligações verticais)

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 = x, x, 1, 1, s^{-1}, s + xs^{-1} \quad (\text{A.8b})$$

onde

$$x = q^{-1/2} v \quad (\text{A.9})$$

Temos então um modelo de 6 vértices "alternado" porque o vértice 1, por exemplo, que na sub-rede diz que não há ligação entre os spins



na sub-rede B representa exatamente o contrário



É interessante observar que embora essa equivalência seja mais abrangente (válida para qualquer número de cores) do que aquela apresentada no Capítulo II, ela não dá nenhuma informação a respeito do caso  $N=3$  (que naquele capítulo foi completa-

mente elucidado ao ser reconhecido como um 6V normal). Esse é um aspecto curioso das equivalências. Muitas vezes elas dão luz a um problema, mas causa espanto a qualquer leitor pensar que o pobre modelo de Ising é um seis vértices "staggered", ou mesmo um 16 vértices (conforme Lieb e Wu, 1972), já que nenhum desses modelos tem solução conhecida. Dentro desse espírito é gratificante saber que o Potts-4 ( $\theta=0$  e  $s=1$ ) como formulado nesse apêndice, é igual ao limite Potts ( $K_1=K_2=K_4$ ) do A.T. como interpretado no Capítulo IV. Os vértices do A.T., depois da transformação de dualidade, terão pesos

$$(a,b,c,d)^A = (\omega_0 + \omega_1, \omega_2 - \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_0 - \omega_1) \quad (\text{A.10a})$$

$$(a,b,c,d)^B = (\omega_0 + \omega_1, \omega_2 - \omega_3, \omega_0 - \omega_1, \omega_2 + \omega_3) \quad (\text{A.10b})$$

onde

$$\omega_0 = 1 \quad (\text{A.11a})$$

$$\omega_1 = e^{-2K_2 - 2K_4} = e^{-4K} \quad (\text{A.11b})$$

$$\omega_2 = e^{-2K_1 - 2K_4} = e^{-4K} \quad (\text{A.11c})$$

$$\omega_3 = e^{-2K_1 - 2K_2} = e^{-4K} \quad (\text{A.11d})$$

A relação de simetria (WU, 1970 )

$$Z(a,b;c,d) = Z\left(\frac{1}{2}(c-d+a+b); \frac{1}{2}(-c+d+a+b); \frac{1}{2}(c+d+a+b), \frac{1}{2}(c+d-a+b)\right) \quad (\text{A.12})$$

permite passar do 8-V para o 6-V (alternado).

Os novos pesos serão

<u>sub-rede A</u>	<u>sub-rede B</u>
$a'_A = \omega_1 + \omega_2 = 2e^{-4K}$	$a'_B = 1 - e^{-4K}$
$b'_A = \omega_0 - \omega_3 = 1 - e^{-4K}$	$b'_B = 2e^{-4K}$
$c'_A = 1 + e^{-4K}$	$c'_B = 1 + e^{-4K}$

que também podem ser escritos

<u>sub-rede A</u>	<u>sub-rede B</u>
$a'_A = 1$	$a'_B = (1 - e^{-4K}) / 2e^{-4K}$
$b'_A = (1 - e^{-4K}) / 2e^{-4K}$	$b'_B = 1$
$c'_A = (1 + e^{-4K}) / 2e^{-4K}$	$c'_B = (1 + e^{-4K}) / 2e^{-4K}$

Finalmente notamos que  $b'_A = a'_B$  é exatamente o  $\underline{x}$  da equação (A.9)

$$\frac{(1 - e^{-4K})}{2e^{-4K}} = \frac{e^{4K} - 1}{2} = \frac{v}{\sqrt{q}} = \frac{(e^{\beta\varepsilon} - 1)}{2} \quad . \quad (A.13)$$

Hã, aparentemente, uma diferença entre as duas versões devido ao 4 que comparece junto ao K do A.T. Entretanto é preciso lembrar que o Potts é recuperado do A.T. partindo da ação

$$K_0 + K(\sigma\sigma' + \mu\mu') + K_4(\sigma\sigma'\mu\mu')$$

substituindo

$$\sigma\sigma' + \mu\mu' = [SS^{+'} + S^+S'] = 2 \cos \left[ \frac{\pi}{2}(n_i - n_j) \right] \quad (A.14)$$

$$\sigma\sigma'\mu\mu' = \frac{(SS^{+'})^2 + (S^+S')^2}{2} = \cos \left[ \pi(n_i - n_j) \right] \quad (A.15)$$

(já que  $S = e^{\frac{i\pi}{2}n_i}$ ) e tomando  $K_0 = K_4 = K$ . Ficaremos com

$$K \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} (n_i - n_j) \right) + \cos \left( \pi (n_i - n_j) \right) \right] = 4K \delta_{n_i, n_j} \quad (\text{A.16})$$

o que mostra que o 4 também faz parte da energia de interação.

## APÊNDICE B

## O "ANSATZ" DE BETHE PARA O XXZ

O problema de encontrar o espectro de auto-valores da Hamiltoniana de Heisenberg já preocupava os físicos em 1930. Bethe então propôs que as auto-funções deviam ser de uma forma específica, pelo menos no caso isotrópico ( $J_x = J_y = J_z$ ). Essa proposta, que ficou conhecida como "ansatz" de Bethe, foi revivida por Yang-Yang (1966 a,b) na década de 60, provando que a hipótese era verdadeira mesmo para o caso anisotrópico ( $J_x = J_y \neq J_z$ ), para o qual determinaram o estado fundamental. Nesse apêndice apresentamos, por completeza, os cálculos de Yang-Yang. As referências utilizadas foram, além dos trabalhos de Yang, Kastelein (1975) e Sutherland (1970).

Introduzindo na hamiltoniana

$$H_{XXZ} = -J \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right] \quad (\text{B.1})$$

os operadores

$$\sigma_j^+ = \frac{1}{2} (\sigma_j^x + i\sigma_j^y)$$

$$\sigma_j^- = \frac{1}{2} (\sigma_j^x - i\sigma_j^y)$$

ficamos com

$$H_{XXZ} = -J \sum_j \left[ 2(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right] \quad (\text{B.2})$$

Em (B.2) observa-se que  $H_{XXZ}$  pode trocar o spin virado de uma posição para outra, mas não pode mudar o número total de spins virados. Isso significa que

$$\left[ H, \sum_j \sigma_j^Z \right] = 0$$

e portanto o número de spins para baixo é um bom número quântico. O vetor  $|0\rangle$  (todos os spins para cima) é trivialmente auto-vetor, porque a hamiltoniana nada pode fazer além de medir a quantidade de pares ordenados (que com condições periódicas de contorno é  $N$ ).

$$H_{XXZ} |0\rangle = -NJ\Delta \quad (B.3)$$

O auto-vetor com 1 spin-virado é uma combinação dos estados  $|j\rangle$ , onde  $j$  designa a posição em que se encontra a ovelha negra. Assim

$$|1\rangle = \sum_j A(j) |j\rangle \quad (B.4)$$

O coeficiente  $A(j)$  precisa ser determinado pela condição

$$H_{XXZ} |1\rangle = \lambda |1\rangle \quad (B.5)$$

que reflete no  $A(j)$  sob a forma

$$2\Delta A(j) - [A(j+1) + A(j-1)] = E^* A(j), \quad \forall j \quad (B.6)$$

onde

$$E^* = \frac{(E + N\Delta J)}{2J} \quad (B.7)$$

A simetria de translação impõe soluções do tipo Bloch

$$A(j) = e^{ikj} \quad (B.8)$$

que substituída em (B.6) fornece

$$E^* = 2\Delta - 2 \cos k \quad (B.9)$$

As condições periódicas de contorno restringem os valores de  $k$

$$A(N+1) = A(1) \rightarrow e^{ikN} = 1$$

$$k = \frac{2\pi}{N} \ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.10})$$

O auto-vetor  $n=2$ , que será combinação de vetores do tipo  $|j_1, j_2\rangle$ , tem dois vetores básicos: aqueles em que  $j_2 > j_1 + 1$  e os outros em que  $j_2 = j_1 + 1$  (os spins virados são vizinhos). Para os primeiros a equação em  $A(j_1, j_2)$  é

$$\begin{aligned} 4\Delta A(j_1, j_2) - \left[ A(j_1-1, j_2) + A(j_1+1, j_2) \right] - \left[ A(j_1, j_2-1) + A(j_1, j_2+1) \right] = \\ = E^* A(j) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

cuja solução é

$$A(j_1, j_2) = C_1 e^{i(k_1 j_1 + k_2 j_2)} + C_2 e^{i(k_2 j_1 + k_1 j_2)} \quad (\text{B.12})$$

Entretanto, quando  $j_2 = j_1 + 1$  a equação satisfeita pelos A's é diferente. A razão é que o estado  $|j_1, j_1+1\rangle$  tem dois vizinhos virados  $\uparrow\uparrow\uparrow\dots\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\dots\uparrow$  e portanto a aplicação de  $\sigma_{j_2-1}^- \sigma_{j_2}^+$  e  $\sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_1+1}^-$  dá resultado nulo. Em consequência perdemos os termos  $A(j_1+1, j_2)$  e  $A(j_1, j_2-1)$  da equação (B.11). Além disso o número de pares em que a ligação é quebrada diminui e finalmente  $A(j_1, j_1+1)$  tem que satisfazer

$$2\Delta A(j_1, j_1+1) - A(j_1-1, j_2+1) - A(j_1, j_1+2) = E^* A(j_1, j_1+1) \quad (\text{B.13})$$

Como os  $A(j_1, j_2)$  já satisfazem (B.11), o remédio é obrigar as soluções (B.12) a passar pelo teste:

$$2\Delta A(j_1, j_1+1) - A(j_1+1, j_1+1) - A(j_1, j_1) = 0 \quad (\text{B.14})$$

Essa equação exige que  $C_1$  e  $C_2$  estejam relacionados através de

$$\frac{C_1}{C_2} = -e^{-i\theta(k_1, k_2)} \quad (\text{B.15})$$

com

$$\theta(k_1, k_2) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\Delta \operatorname{sen} \frac{1}{2}(k_1 - k_2)}{\cos \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - \Delta \cos \frac{1}{2}(k_1 - k_2)} \right] \quad (\text{B.16})$$

satisfazendo

$$\theta(k_1, k_2) = -\theta(k_2, k_1) \quad .$$

Pode-se interpretar esse fato da seguinte maneira: inicialmente a "partícula" 1 viaja com momento  $k_1$  e ao colidir com a "partícula" 2 troca com ela o momento.  $(C_1/C_2)$  é então a matriz S de duas partículas.

A condição periódica agora se escreve

$$A(j_1, N+1) = A(1, j_1) \quad (\text{B.17})$$

e leva aos seguintes valores para  $k$

$$Nk_1 = (2\ell_1 - 1)\pi - \theta(k_1, k_2) \quad (\text{B.18a})$$

$$Nk_2 = (2\ell_2 - 1)\pi - \theta(k_2, k_1) \quad (\text{B.18b})$$

Caso geral - guiado por (B.12) tentamos uma solução da forma

$$A(j_1, j_2, \dots, j_n) = \sum_p C(p) e^{i(k_{p1}j_1 + k_{p2}j_2 + \dots + k_{pn}j_n)} \quad (\text{B.19})$$

onde a soma é sobre todas as permutações  $p_1, \dots, p_n$  de  $1, \dots, n$  ("Ansatz" de Bethe).

As equações de "colisão" determinam  $C(p)$

$$C(p) = (-1)^P \exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{r < s} \theta(k_{pr}, k_{ps})\right\} \quad (\text{B.20})$$

As condições periódicas restringem os valores de  $k_r$

$$Nk_r = (2\ell_r - n + 1)\pi - \sum_{s=1}^n \theta(k_r, k_s) \quad (\text{B.21})$$

Essas equações são altamente não lineares em  $e^{ikr}$  e não é uma questão trivial responder se as soluções levarão a funções (B.19) que não sejam identicamente nulas.

Yang-Yang (1966 b) mostraram que o estado fundamental para  $N$  par é aquele em que

$$n = N/2 \quad e \quad \ell_r = r - 1$$

Nesse caso a (B.21) fica

$$Nk_r = (2r - 1 - N/2)\pi - \sum_{s=1}^{N/2} \theta(k_r, k_s) \quad (\text{B.22})$$

No limite  $N \rightarrow \infty$ , o conjunto  $\{k_r\}$  torna-se denso no intervalo  $(-k_0, k_0)$  real, se  $\Delta < 1$ , e com uma densidade  $N\rho(k)$ , tal que

$$\int_{-k_0}^{k_0} N\rho(k) dk = \frac{N}{2} \quad (\text{B.23})$$

Nesse limite a menor energia (por spin) é dada por

$$e_0 = J\Delta - 4J \int_{-k_0}^{k_0} \rho(k) \cos k dk \quad (\text{B.24})$$

e  $\rho(k)$  é determinado pela equação

$$1 = 2\pi\rho(k) - \int_{-k_0}^{k_0} \frac{\partial}{\partial k} \theta(k, k') \rho(k') dk' \quad (\text{B.25})$$

Essa equação não pode ser resolvida por transformada de Fourier, já que  $\theta(k, k')$  não é função só da diferença. Para transpor essa dificuldade Yang passa à nova variável  $\alpha$ , que obedece

ce a

$$e^\alpha = (e^{ik} + e^{i\mu}) / (e^{i(k+\mu)} + 1) \quad (\text{B.26})$$

onde

$$\mu = \cos^{-1}(-\Delta) \quad \text{para } -1 < \Delta < 1 \quad (\text{B.27})$$

A vantagem dessa mudança é que

$$\theta(k, k') = \tilde{\theta}(\alpha, \alpha') = 2 \tan^{-1} \left\{ \cotg \mu \cdot \tanh \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \right\} \quad (\text{B.28})$$

que só depende da diferença  $(\alpha - \alpha')$ .

A nova expressão para  $e_0$  é

$$e_0 = -J \cos \mu - 4J \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) \left| \frac{1 - \cosh \alpha \cos \mu}{\cosh \alpha - \cos \mu} \right| d\alpha \quad (\text{B.29})$$

onde  $R(\alpha)$  é a densidade de estados em

$$R(\alpha) d\alpha = \rho(k) dk \quad (\text{B.30})$$

que satisfaz a equação (B.25) nas novas variáveis

$$A(\alpha, \mu) = 2\pi R(\alpha) + \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha - \alpha', 2\mu) R(\alpha') d\alpha' \quad (\text{B.31})$$

onde

$$A(\alpha, \mu) = \frac{dk}{d\alpha} = \frac{\sin \mu}{\cosh \alpha - \cos \mu} \quad (\text{B.32})$$

Agora sim, é possível resolver a transformada dessas equações e por inversão obter

$$R(\alpha) = \left[ 4 \mu \cosh(\pi\alpha/2\mu) \right]^{-1} \quad (\text{B.33})$$

e

$$e_0 = -J \cos \mu - \frac{J}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cosh \mu \cos \alpha) d\alpha}{\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{2\mu}\right) [\cosh \alpha - \cos \mu]} \quad (\text{B.34})$$

Finalmente desejamos ressaltar que a equação (B.16) com  $\Delta = 1/2$  é exatamente o resultado encontrado por Lieb no estudo do gelo ( $\Delta = 1/2$  significa  $\mu = 2\pi/3$ ). A determinação do maior autovalor, para a matriz transferência do modelo do gelo, usa explicitamente a "densidade"  $R(\alpha)$  do Yang (1966 a,b).

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \Lambda \left[ \frac{n}{N} = \frac{1}{2} \right] &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N/2} \ln(2 - 2 \cos k_j) \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-k_0}^{k_0} \ln(2 - 2 \cosh k) (k) dk = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 - 3(1 + 2 \cosh \alpha)^{-1} \right] R(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \ln W &= - \frac{3}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 - 3(1 + 2 \cosh \alpha)^{-1} \right] \frac{d\alpha}{\cosh(3\alpha/4)} = \\ &= \frac{3}{2} \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

## APÊNDICE C

A RELAÇÃO ENTRE A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA  
DO 8-V E A HAMILTONIANA DE HEISENBERG

Partindo da matriz de transferência do 8-V (Capítulo II) que é um produto de termos do tipo

$$L_{\alpha\alpha'}^{\lambda\lambda'} = \sum_{j=1}^4 \omega_j \sigma_{\alpha\alpha'}^j \sigma_{\lambda\lambda'}^j \quad (\text{C.1})$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$P_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \quad (\text{C.2a})$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \quad (\text{C.2b})$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \quad (\text{C.2c})$$

$$P_4 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \quad (\text{C.2d})$$

o vértice elementar se escreve

$$L_{\alpha\alpha'}^{\lambda\lambda'} = \sum_{j=1}^4 P_j \sigma_{\alpha\lambda'}^j \sigma_{\lambda\alpha'}^j \quad (\text{C.3})$$

que no caso particular  $V = \zeta$  (lembre que  $V$  e  $\zeta$  são os argumentos das funções elípticas de módulo  $\ell$  na parametrização dos pesos).

Resulta em

$$L_{\alpha\alpha'}^{\lambda\lambda'}(V = \zeta) = 2 \begin{matrix} \delta & \delta \\ \alpha\lambda' & \lambda\alpha' \end{matrix} \quad (\text{C.4})$$

já que o único  $p$  diferente de zero é o  $p_4$  que está ligado a  $\sigma^4 = \uparrow\uparrow$ .

Nesse limite a matriz de transferência será dada por

$$T_{\alpha|\alpha'} = 2^N \delta_{\alpha_1, \alpha'_2} \delta_{\alpha_2, \alpha'_3} \cdots \delta_{\alpha_N, \alpha'_1} \quad (C.5)$$

cujo efeito sobre o estado  $\alpha$  é mover uma posição à esquerda todos os spins.  $\alpha'$  é então ciclicamente equivalente a configuração original  $\alpha$ .

Agora derivamos os elementos (C.1) de  $T(V)$  em relação a  $V$ , mantendo  $\ell$  e  $\zeta$  fixos, e fazemos  $V = \zeta$ . Usando (C.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} T_{\alpha|\alpha'} &= 2^{N-1} \sum_{j=1}^N \delta_{\alpha_1, \alpha'_2} \delta_{\alpha_2, \alpha'_3} \cdots \delta_{\alpha_{j-2}, \alpha'_{j-1}} \\ &\quad \times L'_{\alpha_j, \alpha'_j}^{\alpha_{j-1}, \alpha'_{j+1}} \delta_{\alpha_{j+1}, \alpha'_{j+2}} \cdots \delta_{\alpha_N, \alpha'_1} \end{aligned} \quad (C.6)$$

onde  $L'$  é a derivada de  $L$  calculada em  $V = \zeta$ .

De (C.5) e (C.6) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\zeta)} \frac{d}{dV} T(V) \Big|_{V=\zeta} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \delta_{\alpha_1, \alpha'_1} \cdots \delta_{\alpha_{j-1}, \alpha'_{j-1}} \\ &\quad L'_{\alpha_{j+1}, \alpha'_j}^{\alpha_{j-1}, \alpha'_{j+1}} \delta_{\alpha_{j+1}, \alpha'_{j+2}} \cdots \delta_{\alpha_N, \alpha'_1} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Usando (C.3) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\zeta)} \frac{d}{dV} T(V) \Big|_{V=\zeta} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (p'_1 \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + p'_2 \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \\ &\quad + p'_3 \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + \frac{1}{2} N p'_4 E \end{aligned} \quad (C.8)$$

que é a hamiltoniana de Heisenberg (a menos de constante) com

$$J_x : J_y : J_z = \operatorname{cn}(2\zeta) : \operatorname{dn} 2\zeta : 1 \quad (\text{C.9})$$

## Referências

- Alcaraz, F. (1980), Tese de Doutorado, IFQSC-USP
- Alcaraz, F. e Köberle, R. (1980), J.Phys.A13, L153
- Alcaraz, F. e Köberle, R. (1981), J.Phys.A14, 1169
- Amit, D. (1978), Field Theory, The Renormalization Group and  
Critical Phenomena (McGraw-Hill)
- Ashkin, J. e Teller, E. (1943), Phys.Rev. 64, 178
- Baxter, R. (1971a), Phys.Rev.Letters 26, 832
- Baxter, R. (1971b), Phys.Rev.Letters 26, 834
- Baxter, R. (1972a), Annals of Physics 70, 193
- Baxter, R. (1972b), Annals of Physics 70, 323
- Baxter, R. (1973a), Annals of Physics 76, 1
- Baxter, R. (1973b), Annals of Physics 76, 25
- Baxter, R. (1973c), Annals of Physics 76, 48
- Baxter, R. e Kelland, S. (1974), J.Phys.C7, L403
- Baxter, R., Kelland, S. e Wu, F.Y. (1976), J.Phys.A9, 397
- Bernal, J.D. e Fowler, R.H. (1933), J.Chem.Phys.1, 515
- Bethe, H. (1931), Z.Phys.71, 205
- Coleman, S. (1975), Phys.Rev. D11, 2088
- Dell'Antônio, G.F. et al (1972), Phys.Rev. D6, 988
- Drell, S., Weinstein, M. e Yankielowicz (1976), Phys.Rev.D14, 487
- Drell, S., Weinstein, M. e Yankielowicz (1976), Phys.Rev.D14, 1627
- Drell, S., Weinstein, M. e Yankielowicz (1978), Phys.Rev.D16, 1769
- Enting, I. (1973), J.Phys.C10, 1681
- Enting, I. (1975), J.Phys.A8, L35
- Fadeev, L. (1979), Steklov Math.Inst. Report nº P-2-79
- Fan, C. (1972a), Phys.Letters 39A, 136
- Fan, C. (1972b), Phys.Rev.B6, 902

- Fan, C. e Wu, F.Y. (1970), Phys.Rev.B2, 723
- Fernandez Pacheco, A. (1979), Phys.Rev. D19, 3173
- Fradkin, E. e Susskind, L. (1978), Phys.Rev.D17, 2637
- Giauque, W. e Ashkley, M. (1933), Phys.Rev. 43, 81
- Hu, B. (1979), Phys.Letters 71A, 83
- Johnson, J.; Krinsky e McCoy (1972), Phys.Rev.A8, 2526
- Jordan, E. e Wigner, E. (1930), Z.Physik, 47, 631
- Julien,R.; Pfeuty, Fields e Doniach (1978), Phys.Rev.B18, 3569
- Kadanoff, L.P. et al. (1967), Review of Modern Physics 39, 395
- Kadanoff, L.P. e Wegner, F. (1971), Phys.Rev.B4, 3989
- Kadanoff, L.P. e Brown, A. (1979), Annals of Phys. 121, 318
- Kadanoff, L.P. (1979), Annals of Phys. 120, 39
- Kasteleyn, P.W. (1975), Fundamental Problems in Statistical  
Mechanics 3, 103
- Kogut, J. (1979), Rev.of Mod.Phys.51, 659
- Kohmoto, M; den Nijs, M. e Kadanoff, L.P. (1981), Phys.Rev.B24, 5229
- Kramers, H. e Wannier, G.H. (1941), Phys.Rev.60, 252
- Landau, L. (1937)
- Lieb, E. (1967a), Phys.Rev.Letters 18, 692
- Lieb, E. (1967b), Phys.Rev.Letters 18, 1046
- Lieb, E. (1967c), Phys.Rev.Letters 19, 108
- Lieb,E. e Wu,F.Y. (1972), Phase transition and Critical  
Phenomena (Domb & Green)
- Luther, A. (1976), Phys.Rev.B14, 2153
- Luther, A. (1977)
- Luther, A. e Peschel, I. (1974), Phys.Rev. B9, 2911
- Luther, A. e Peschel, I. (1975), Phys.Rev.B12, 3908
- Luttinger, J.M. (1963), J.Math.Phys.4, 1154
- Mandelstam, S. (1975), Phys.Rev. D11, 3026
- Marino, E.C. e Swieca, J.A. (1981), Nuclear Physics

- McCoy, B. e Wu, T.T. (1968), Nuovo Cimento 56B, 311
- McCoy, B. e Wu, T.T. (1969), Phys.Rev.188, 982
- McCoy, B. e Wu, T.T. (1971), Theory of the Two-Dimensional  
Ising Model (Harvard)
- Nagle, J. F. (1966), J.Math.Phys. 7, 1492
- Onsager, L. (1944), Phys.Rev.65, 117
- Pauling, L. (1935), J.Am.Chem.Soc.57, 2680
- Pauling, L. (1960), The Nature of Chemical Bond (Cornell Univ.Press)
- Potts, R.B. (1952), Proc.Camb.Soc. 48, 106
- Schor, R. e Carroll, M. (1980), PUC Preprint
- Schultz, T.D.; Mattis, D. e Lieb, E. (1964), Rev.of Mod.Phys.36, 856
- Sommerfield, C. (1963), Annals of Phys. 26, 1
- Stinchcombe, R.B. (1981), J.Phys.C14, 2193
- Sutherland, B. (1970), J.Math.Phys. 11, 3183
- Suzuki, M. (1976), Prog.Theor.Phys. 56, 1454
- Swieca, J.A. (1977), Fortschitte der Physik 25, 303
- Takahaski, H. (1941), Proc.Phys.Mat.Soc.Jap. 23, 1069
- Takhtajan e Fadeev, L. (1979), Usp.Mat.Nauk 34, 13
- Thacker, H.B. (1980), J.Math.Phys. 21, 1115
- Temperley, e Lieb, E. (1971), Proc.Roy.Soc. A321, 251
- Thirring, W. (1958), Annals of Phys. 3, 91
- Wegner, F. (1972), J.Phys.C5, L131
- Wegner, F. (1974), Phys.Rev.B5, 4529
- Wegner, F. (1971), Phys.Rev.B5, 4529
- Wilson, K. (1970), Phys.Rev. D2, 1473
- Wilson, K. (1971), Phys.Rev. B4, 3184
- Wu, F.Y. (1971), Phys.Rev. B4, 2312
- Wu, F.Y. (1977), J.Math.Phys. 18, 611
- Wu, F.Y. e Lin, K.Y. (1974), J.Phys.C7, L181
- Wu, T.T. (1966), Phys.Rev. 149, 380

Yang, C.P. e Yang, C.N. (1966a), Phys.Rev. 147, 321

Yang, C.P. e Yang, C.N. (1966b), Phys.Rev. 147, 327

Zittarts, J. (1981), Z.Physik B41, 75

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE \_\_\_\_\_

José Roberto Drugowich de Felício

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 27 DE abril DE 1982.

COMISSÃO JULGADORA:

*Roland Köberle*

Dr. Roland Köberle - Orientador

*Valério Kurak*

Dr. Valério Kurak

*Sylvio Goulart Rosa Junior*

Dr. Sylvio Goulart Rosa Junior

*Silvio Roberto de Azevedo Salinas*

Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas

*I. Fittipaldi*

Dr. I. Fittipaldi

