CLARICE GAMEIRO DA FONSECA PACHI

**Modelo matemático para o estudo da propagação
de informações por campanhas educativas e
rumores**

Tese apresentada à Faculdade de
Medicina da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Doutor em
Ciências.

SÃO PAULO
2006

CLARICE GAMEIRO DA FONSECA PACHI

**Modelo matemático para o estudo da propagação
de informações por campanhas educativas e
rumores**

Tese apresentada à Faculdade de
Medicina da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Doutor em
Ciências.

Área de Concentração: Fisiopatologia
Experimental

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Nascimento
Burattini

SÃO PAULO
2006

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Preparada pela Biblioteca da
Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo

©reprodução autorizada pelo autor

Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca

Modelo matemático para o estudo da propagação de informações por campanhas educativas e rumores / Clarice Gameiro da Fonseca Pachi. -- São Paulo, 2006.

Tese(doutorado)--Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Fisiopatologia Experimental.

Orientador: Marcelo Nascimento Burattini.

Descritores: 1.Modelos matemáticos 2.Modelos psicológicos 3.Troca de informações 4.Modelos epidemiológicos

USP/FM/SBD-381/06

Primeiro a notícia e depois a doença.....

“Uma vez, num feriado público, não me recordo se era um domingo, na igreja de Aldgate, num banco cheio de gente, uma mulher de repente começou a sentir um mau cheiro. Imediatamente, ela supôs que a peste estava naquele banco, cochichando sua impressão ou suspeita para quem estava a seu lado; depois, levantou-se e saiu do banco. Imediatamente, o próximo fez o mesmo e assim foi até saírem todos; e cada um de dois ou três bancos mais próximos também saiu da igreja sem saber o que o atingia ou de quem vinha”.

A Journal of the Plague Year
Daniel Defoe (1660-1731)

Aos meus pais,
Ao Marcos e
À minha filha Laura

AGRADECIMENTOS

Tenho poucas certezas na vida, mas uma delas é a de que muitas pessoas contribuíram para a realização deste trabalho.
Serei eternamente grata a todos vocês, obrigada!

À professora Sílvia Martorano Raimundo, pelas inúmeras aulas e discussões conceituais e, principalmente, pela dedicação, carinho e verdadeira amizade que sempre estiveram presentes em todos os momentos.

Ao professor Marcelo Nascimento Burattini, pela orientação, pelas sugestões conceituais e apoio no processo de execução do trabalho.

Ao professor Eduardo Massad, por ter me proposto o tema para este trabalho, por propiciar condições técnicas e financeiras para que ele fosse realizado e, principalmente, por ter acreditado que eu conseguiria.

Ao professor Luis Fernandez Lopez pelo suporte financeiro e pela oportunidade de trabalhar em sua equipe.

Ao professor Francisco Antônio Bezerra Coutinho, meu orientador da dissertação de mestrado, que propiciou meus primeiros conhecimentos na área de Epidemiologia Matemática.

Aos professores Neli Regina Ortega e Marcos Amaku, membros da Banca Examinadora da Qualificação, pelas várias sugestões de conclusão para o trabalho.

À amiga professora Márcia Perez Resende Oliveros pelo carinho de todas as horas.

Aos amigos da DIM (Disciplina de informática médica –FMUSP) pela ajuda e carinho de todo o dia.

Aos meus pais, pelo exemplo de coragem e luta.

À Laura, Marcos e Juliana pela felicidade que é viver ao lado de vocês.

RESUMO

Modelo matemático para o estudo da propagação de informações por campanhas educativas e rumores

Formulamos um modelo matemático determinístico baseado no princípio de ação de massas, em analogia aos trabalhos que estudam a dinâmica de doenças infecciosas em Epidemiologia. Analisamos a dinâmica do espalhamento de rumores levando em conta a simetria no número de contatos diretos entre “suscetíveis” e “infectados” pelo rumor e estudamos as implicações de uma campanha publicitária educativa na dinâmica do modelo.

Posteriormente, propomos uma simplificação do modelo e desconsideramos o contato entre os indivíduos “suscetíveis” e “infectados” mais resistentes às novidades. Discutimos suas implicações no espalhamento do rumor e a conexão com os parâmetros que descrevem o comportamento social.

ABSTRACT

Mathematical Model to study the spread of information from educative campaigns and rumors

We have developed a deterministic mathematical model based on the mass-action principle, in analogy to the works that study the dynamics of infectious diseases in Epidemiology. We analyzed the dynamic of *rumors* spreading, taking into account the symmetry of contacts among “susceptible” and “infectious” individuals and studied the implications of an educative broadcasting advertising in the model.

We also simulated the model eliminating the contact among opinioned “susceptible” and “infective” to simplify the model. Their implications to the spread of rumor and its connection with parameters describing social behavior are discussed.

ÍNDICE

Capítulo I	
INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Propagação de idéias: rumores.....	1
1.2. Objetivos.....	6
Capítulo II	
REVISÃO DA LITERATURA	8
2.1. Modelos Matemáticos.....	8
2.2. Epidemiologia Matemática	11
2.2.1. Histórico.....	11
2.2.2. Força de Infecção.....	15
2.2.3. Reprodutibilidade Basal.....	17
2.2.4. Bifurcações	18
2.3. Histórico dos modelos de espalhamento de idéias.....	21
2.4. Transmissão de idéias: <i>Memes</i>	24
Capítulo III	
MATERIAIS E MÉTODOS.....	31
3.1. Formulação do Modelo	31
3.2. Análise do Modelo.	38
3.2.1. Presença de campanha educacional ($\lambda \neq 0$)	42
3.2.2. Ausência de campanha educacional ($\lambda = 0$)	45
3.3. Modelo Simplificado.	51
3.4. Análise do Modelo.	53
3.4.1. Presença de campanha educacional ($\lambda \neq 0$)	54
3.4.2. Ausência de campanha educacional ($\lambda = 0$)	56
Capítulo IV	
RESULTADOS	62
4.1. Modelo Geral	63
4.1.1. Presença de campanha educacional ($\lambda \neq 0$)	64
4.1.2. Ausência de campanha educacional ($\lambda = 0$)	68
4.2. Modelo Simplificado.....	70
4.2.1. Presença de campanha educacional ($\lambda \neq 0$)	70
4.2.2. Ausência de campanha educacional ($\lambda = 0$)	72
Capítulo V.....	
DISCUSSÃO.....	76
Capítulo VI.....	
CONCLUSÃO	83
Capítulo VII.....	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

Capítulo I

INTRODUÇÃO

1.1. Propagação de idéias: rumores

As grandes mudanças que ocorrem na sociedade, muitas vezes se dão de forma repentina e inesperada. A divulgação de tendências da moda, as campanhas publicitárias e/ou educacionais, as ondas de violência que perturbam a rotina das cidades, a propaganda boca a boca, os boatos; são exemplos de idéias que se espalham entre as pessoas por meio de uma espécie de “contágio” social, provocando mudanças de comportamento e atitude.

Uma das formas de compreendermos a dinâmica da divulgação de uma idéia é estudar o comportamento de um poderoso instrumento de propagação de idéias chamado “**Rumor**”. Analisado sob o aspecto

semântico; “Rumor” (do latim; *rumore*); possui também o sentido figurado de informação, notícia, fama ou ainda, boato, e pode ser definido como uma notícia anônima que corre publicamente.

Os Rumores são elementos que pertencem ao cotidiano de nossas vidas, algumas vezes contém informações importantes e confidenciais sobre figuras públicas, problemas sociais ou econômicos. De maneira geral possuem características que podem dividir a opinião pública de uma sociedade ou de um mercado econômico, afetando e reorientando a crença individual de seus membros (Kosfeld, 2005).

O Rumor atende a uma necessidade humana, que reúne as expectativas e ansiedades dos indivíduos em relação aos acontecimentos que os cercam. A base psicológica que explica a teia de relações formadas por essa rede informal de comunicação, justifica que o espalhamento de um rumor pode ocorrer por mecanismos de conservação do indivíduo e da espécie (Torquato, 2006).

Em outras palavras, poderíamos justificar que uma das razões da difusão de um rumor pode ser o fato de que ao se sentir ameaçado, o indivíduo reage por meio de automatismos e sentimentos como o medo, a angústia, a depressão, a coragem, o entusiasmo, a agressividade, o desejo pelo poder, a dominação, a luta por cargos e salários, a ansiedade, a violência física e mental; entre outros (Allport, 1947; Sperry, 1965).

A difusão de Rumores é uma das formas mais naturais de comunicação social, e se principia nos elos de uma cadeia sociológica de

pequenos núcleos que se comunicam diretamente com outros grupos de pessoas.

Em geral, à medida que os contatos entre os indivíduos aumentam, pode se desencadear um mecanismo de adição de novos fatos e a informação passa a ser modificada por cargas emotivas que são filtradas por interesses particulares ou de grupos de referência. Neste caso, cada pessoa pode eliminar partes do tema que não satisfaçam seu sistema cognitivo e passa a construir sua narrativa própria em conformidade à sua interpretação dos fatos (Peterson&Gist, 1951; Dickinson&Pearce, 2003; Torquato, 2006).

Contudo, se a informação inicial for de tal forma transformada a ponto de se construir novo significado, dizemos que o rumor passa a assumir o conceito de “fofoca”. Em geral, quando se usa essa definição o rumor adquire o sentido depreciativo e o tema gerador já se transformou em questão de pouca importância (Peterson&Gist, 1951; Dunbar,1996).

Analisando estas considerações, podemos comparar espalhamento de Rumores à deflagração da epidemia de uma doença infecciosa. A similaridade existente entre o comportamento de rumores e de doenças epidêmicas é amplamente reconhecida nas literaturas das ciências sociais e de epidemias e, portanto, podemos classificar os Rumores como um tipo de “contágio comportamental”. De forma geral, os Rumores são altamente contagiosos e o que os diferencia de outras partes da comunicação é a urgência na transmissão da informação (Noymer, 2001).

Em resumo, assim como uma única pessoa infectada pode dar início a uma epidemia de gripe, também depredadores incentivam ondas de

crimes numa comunidade, ou um cliente satisfeito pode contribuir para divulgar um determinado produto ou serviço, criando o que chamamos de “epidemias sociais”. O sucesso de qualquer tipo de epidemia depende muito do envolvimento de pessoas dotadas de um conjunto raro e particular de talentos sociais, que podem ser classificadas em “comunicadores”, “experts” e “vendedores”, terminologia comum na área de Marketing Empresarial (Gladwell, 2000).

Os chamados comunicadores são capazes de introduzir novos indivíduos nos círculos sociais e têm um talento especial para reunir pessoas de diferentes grupos. Este indivíduo tem como traço de sua personalidade o impulso de comunicar e possuem a habilidade de circular entre grupos distintos, agregando diferentes pessoas por um processo aleatório.

Um bom comunicador tem capacidade de propagar rumores e podemos dizer que quanto mais próximo uma idéia ou um produto estiver de um comunicador, mais poder e oportunidade eles terão para serem divulgados.

Existem também os Experts, um outro tipo de indivíduo que tem a habilidade de acumular conhecimento, são importantes fontes de informação, capazes de iniciar discussões e divulgar novas idéias. As habilidades destas pessoas podem se resumir na capacidade de reunir outras e iniciar o rumor e por isso, são elementos indicados como controladores de ações publicitárias.

O grupo conhecido popularmente como Vendedores se refere àqueles indivíduos com empatia e desta forma são capazes de convencer outras

pessoas sobre uma idéia, geralmente criadas por outras pessoas. Sua característica principal é que são capazes de fazer outras pessoas entrarem no seu próprio ritmo, e por terem uma personalidade persuasiva, são capazes de ditar os termos da interação.

De maneira geral iniciar a propagação de uma idéia exige a concentração de recursos em algumas poucas áreas essenciais. Um rumor pode se propagar com mais facilidade simplesmente por estar associado a um desses tipos particulares de pessoa citado anteriormente, pois são responsáveis por iniciar e propagar epidemias “boca a boca” e por isso a publicidade procura concentrar seus recursos neles (Kosfeld, 2005; Price, 1995).

Porém, ainda devemos ter em mente que quem cria com sucesso uma epidemia social através de um rumor, não consegue isso agindo apenas mediante o que acha certo. Estas pessoas importantes no processo da comunicação, experimentam por em prática as suas intuições e são influenciados também pelo meio em que vivem e pelo contexto imediato em que estão inseridos (Gladwell, 2000).

Alguns outros fatores como a manipulação do tamanho do grupo no qual se quer propagar uma informação e a forma de apresentar as idéias ao grupo também são importantes para o sucesso na propagação de um rumor. Mas ao observarmos o papel do contato entre os indivíduos especiais que detém o poder social, compreendemos que ao entender seu comportamento é possível mudar o curso dos rumores e conseqüentemente a aceitação das idéias (Kosfeld, 2005; Price, 1995).

Neste contexto social e epidemiológico, surge a motivação para este trabalho no qual propomos o desenvolvimento de um modelo matemático para descrever uma dinâmica de transmissão de idéias, e que pode representar um importante instrumento de avaliação e otimização de campanhas educacionais.

O investimento de campanhas educacionais, principalmente as destinadas aos jovens, tem sido uma preocupação constante para as autoridades governamentais de todo o mundo. Apesar dos investimentos constantes para melhorar a eficácia dessas campanhas, observa-se que em muitos casos, os resultados estão abaixo das expectativas.

Para ilustrar esse fato podemos citar a transmissão do HIV que apesar de inúmeros esforços no sentido educacional, os programas educativos se fazem cada vez mais necessários, pois ainda não se nota entre os jovens uma mudança efetiva de comportamento, hábito, atitude e crença (Pachi, 2004).

1.2. Objetivos

A) Gerais:

Formular um modelo matemático que descreva a analogia existente entre o espalhamento de idéias e as doenças infecciosas e represente um dispositivo prático para avaliar a eficácia de campanhas educacionais.

B) Específicos:

- Formular um modelo matemático determinístico compartimental para descrever a semelhança existente entre o espalhamento de idéias e de doenças infecciosas;
- Determinar as soluções analíticas do sistema de equações diferenciais ordinárias;
- Analisar a dinâmica do espalhamento de idéias numa população por meio das simulações numéricas;
- Analisar os resultados numéricos e interpretar suas implicações com as soluções analíticas encontradas para o modelo;
- Observar as conclusões obtidas e associar a sua utilização na avaliação de campanhas educacionais.

Capítulo II

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Modelos Matemáticos

O desenho de modelos matemáticos de sistemas lineares reais complexos (e freqüentemente não lineares) é essencial em vários ramos das ciências. Os modelos propostos e desenvolvidos podem ser usados para explicar o comportamento subjacente de sistemas reais, e esse tipo de sistema linear tenta traduzir na forma de equações diferenciais (ou de diferença) o comportamento do sistema real do fenômeno que se quer estudar (Massad, 2004).

Assim, parece natural pensar que o melhor modelo é aquele que agrega a maior quantidade de realismo biológico. Porém, a associação de muitos detalhes ao sistema pode aumentar sua complexidade matemática e desta forma dificultar sua solução. Por outro lado, uma simplificação exagerada do realismo do problema pode comprometer a sua utilidade.

Portanto, as variáveis escolhidas para representar o modelo devem ser as mais representativas e exercerem maior influência no problema e assim poderemos determinar como interagem entre si e como variam em função do tempo (Aris, 1980).

Se esse novo problema, agora redesenhado em novas variáveis, for suficiente para que possamos obter os dados aplicativos necessários, então teremos obtido um modelo matemático válido para a análise do problema (Wolfram, 1990).

Desta forma podemos definir que um modelo matemático é um resumo simplificado, uma relação matemática construída de uma parte da realidade e criado para um propósito particular (Bender; 2000).

Os modelos matemáticos que têm como fundamentação metodológica o raciocínio dedutivo pertencem a uma classe específica de modelos chamada de determinísticos. Este tipo de modelo é adequado às situações em que conhecemos com exatidão o processo a ser modelado, ou àquelas em que estamos lidando com populações suficientemente grandes. Nestes casos, dadas às condições iniciais e os valores dos parâmetros, toda a evolução das variáveis é determinada pela estrutura do modelo. Porém, existe um caso particular de modelos determinísticos em que esta regra é violada; são os modelos que apresentam dinâmica caótica, em que o curso da evolução do sistema é extremamente sensível às condições iniciais (Massad, 2004).

Os modelos determinísticos em Epidemiologia podem ser representados por meio de compartimentos nos quais a população é

subdividida em categorias de acordo com o estado que os indivíduos se encontram no desenvolvimento da doença, Assim, os indivíduos podem ser classificados como suscetíveis, infectados, infecciosos, imunes, recuperados, etc. A movimentação dos indivíduos de um compartimento para outro é representada por meio de equações de diferença (o tempo varia em intervalos discretos) ou por equações diferenciais (o tempo varia continuamente) (Hethcote, 2000).

Os modelos matemáticos também podem ser classificados, de acordo com o tipo de solução que apresentam e neste caso, são chamados de analíticos ou computacionais.

Os modelos matemáticos computacionais são na realidade sistemas de simulação de modelos estocásticos, pois agregam elementos probabilísticos. São os chamados sistemas de “vida artificial” que tentam reproduzir a dinâmica dos sistemas reais, representando a chamada simulação *in silico* (Massad, 2004).

Os modelos analíticos (ou dinâmicos) podem ser de natureza determinística e assim, para descrever as alterações temporais de cada variável do fenômeno biológico que se deseja modelar, esse tipo de modelo associa um conjunto de equações de diferença, diferenciais, integrais ou funcionais.

Neste caso, os modelos que possuem menor realismo biológico são os de fácil solução analítica. Podem ser resolvidos sem a necessidade de computação numérica e para solucionar o problema basta interpretar estes resultados determinados.

Em contrapartida, à medida que são agregados mais elementos biológicos, o número de variáveis do modelo aumenta comprometendo a solução analítica. Neste caso, é necessário o uso de sistemas computacionais (programas) para obtenção de soluções numéricas que resolvam o problema e desta forma seja possível interpretar os resultados obtidos.

Contudo, se não existir um sistema computacional eficiente, o problema deve ser reformulado e se possível, reiniciado. Infelizmente, se neste caso for detectado que não se pode reformular o problema, será impossível encontrar soluções e desta forma o sistema não tem continuidade.

2.2 Epidemiologia Matemática

2.2.1 Histórico

Com a intenção de encontrar os primórdios dos estudos sobre as doenças epidêmicas, nos deparamos com o trabalho de Hipócrates (458-377 a.C.) intitulado *Epidemias*, o qual já mostrava interesse em relacionar a mortalidade humana às doenças infecciosas. Também é possível encontrar nos trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.) idéias sobre a existência de “seres invisíveis” e desconhecidos, que seriam os responsáveis pelo surgimento de doenças (Wikipédia, 2004).

Observando o processo histórico, é possível encontrar vários indícios de certa percepção da existência de organismos vivos e invisíveis, que seriam responsáveis pela causa e transmissão de doenças.

Mas somente a partir do nascimento da bacteriologia, com Louis Pasteur (1822-95) e Robert Koch (1843-1910), e a descoberta dos vírus neste século, foi possível identificar as causas das doenças infecciosas e, conseqüentemente, aplicar à epidemiologia modelos matemáticos mais gerais e mais próximos da realidade (Coutinho, 2004; Yang, 2001).

Em uma publicação de 1906, W.H. Hamer postulou que o desenvolvimento de uma epidemia depende de alguns fatores, como o número de suscetíveis, o número de infectados e a taxa de contatos entre indivíduos suscetíveis e infectados. Em alguns trabalhos, como os de Wilson e Worceser, foi feita uma analogia entre este princípio e a lei de equilíbrio químico (Amaku, 2001).

Este postulado, hoje conhecido como o *princípio de ação das massas*, tornou-se o mais importante conceito da epidemiologia matemática e tem sua origem no estudo da cinética química. Nele se postula que a taxa de formação de um composto é proporcional às concentrações dos reagentes. Esta suposição justifica-se em níveis de concentração suficientemente baixos, para que cada molécula possa se movimentar independente das demais. Assim, ao aumentar-se a concentração de reagentes, aumenta-se proporcionalmente o número de colisões entre as moléculas que levam à formação do composto final (Coutinho, 2004)

A “*Lei de ação das massas*” é traduzida para a epidemiologia pela idéia de que a disseminação da epidemia em uma população é proporcional ao produto da densidade de indivíduos suscetíveis pela densidade de indivíduos infecciosos e foi originalmente formulado através de um modelo de tempo discreto (Massad, 1996).

Este conceito supõe que os indivíduos infecciosos misturam-se homogeneamente aos suscetíveis em toda a população. Porém, esta consideração não é verdadeira, e a pesquisa epidemiológica já mostrou que as heterogeneidades intervêm no processo de transmissão das infecções (Coutinho, 2004).

Sir Ronald Ross, em seus magistrais trabalhos sobre a malária, publicados entre os anos de 1904 e 1917, desenvolveu então um sistema de equações onde definiu padrões de incidência e prevalência que seriam esperados sob diversas situações na população de hospedeiros. Foi a partir das primeiras formulações matemáticas de Ross e seus colaboradores que uma série de deduções puderam ser testadas na prática (Almeida, 2002; Massad, 1992, Burattini, 1983-89).

Entre algumas das importantes formulações elaboradas por Ross, nos estudos sobre a dinâmica de transmissão da malária, podemos destacar a generalização do princípio de Hamer para tempo contínuo e a formulação da hipótese de existir um limiar de densidade de mosquitos abaixo do qual ocorreria a extinção natural da doença (Burattini, 1989).

Em 1927, W.O.Kermack e A.G.Mckendrick estenderam a teoria e propuseram o *Teorema do limiar*, segundo o qual há uma densidade crítica

de indivíduos suscetíveis, abaixo da qual a introdução de casos infecciosos em uma comunidade não provoca uma epidemia. O modelo que apresentou este conceito é conhecido como modelo do tipo *SIR*, onde *S* indica o compartimento dos indivíduos suscetíveis, *I* o grupo dos indivíduos infectados (ou também infecciosos neste caso particular) e *R* como o grupo dos indivíduos recuperados (ou imunes) e considera a população total constante, ou seja, a soma do número total de indivíduos distribuídos em cada um dos compartimentos é igual a população total ($S + I + R = N$).

A teoria do valor limiar e o princípio da ação das massas tornaram-se a base da epidemiologia matemática moderna (Coutinho, 2004; Amaku, 2001; Yang, 2001).

Por meio do grande avanço tecnológico e do conhecimento biológico dos anos seguintes, a epidemiologia matemática se desenvolveu muito após a divulgação desses trabalhos iniciais, principalmente após a década de 1950.

Estudos recentes têm desenvolvido temas como aplicações de teoria de controle em modelos epidêmicos, espalhamento espacial de doenças, investigação de mecanismos de sazonalidade e epidemias, teoria do limiar em modelos estocásticos e determinísticos mais complexos. De uma forma geral a epidemiologia matemática é uma área de caráter interdisciplinar, resultado da interação entre epidemiologistas, biólogos, matemáticos e físicos; e pode ser considerado um campo ainda completamente aberto à aplicação dos conceitos e métodos já bem estabelecidos na física e em outras disciplinas (Coutinho, 2004; Amaku, 2001).

2.2.2 Força de infecção

Pela lei de ação das massas, a incidência (número de novos casos da doença) é proporcional às quantidades de indivíduos suscetíveis e infectados que se encontram homogeneamente misturados em um ambiente, e cujo encontro é aleatório. Dividindo-se a incidência pelo número de indivíduos suscetíveis obtém-se a incidência per capita, conhecida como força de infecção (Yang, 2001).

O conceito central da teoria matemática aplicada a epidemias é a chamada força de infecção, que é definida como a taxa per capita com que indivíduos suscetíveis adquirem a infecção, por unidade de tempo. Seu valor nos estudos epidemiológicos está na habilidade para distinguir mudanças relacionadas à idade em taxas de infecção independentemente de mudanças na proporção de indivíduos suscetíveis em cada idade (Massad et al., 1995).

A força de infecção depende somente do número de indivíduos infectantes e está diretamente relacionada com a taxa de contatos efetivos per capita (β) entre os indivíduos de uma dada população. Assim, se o número total de indivíduos numa população for N e assumindo que o número de contatos infectantes seja β , teremos que βS é o número de contatos que o número de S suscetíveis faz e que a fração $\frac{I}{N}$ destes contatos é infecciosa, sendo I o número de infectados (Amaku, 2001).

Os modelos que supõem uma mistura homogênea e que adotam o termo de transmissão $\beta S \frac{I}{N}$ são chamados de modelos “verdadeiros” de

ação das massas e fornecem boa aproximação para dados experimentais. Quando o termo de transmissão for definido por βSI temos os chamados “pseudo-modelos” (De Jong, 1995; Hethcote, 2000).

O risco de adquirir uma infecção depende do padrão de contatos entre os indivíduos e da presença de indivíduos infectados. Efeitos sazonais e demográficos influenciam o número de contatos entre indivíduos, por unidade de tempo, enquanto que a resposta imune do indivíduo infectado vai depender da concentração inicial e da virulência do agente infeccioso. O modelo mais simples, portanto, que só depende da concentração de indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, não é o mais adequado para obter estimativas sobre situações mais complexas. Uma forma de se imprimir um pouco mais de realidade ao modelo é através da incorporação da estrutura etária dos indivíduos (Almeida, 2002).

Uma das razões da importância do parâmetro força de infecção está relacionada à sua utilidade para elaboração de estratégias de controle e eliminação de doenças (Anderson&May, 1991).

Um exemplo da relevância desse parâmetro pode ser observado ao tentar diminuir o número de suscetíveis por meio de vacinação. Nesse caso, afetamos diretamente o valor do termo $\beta S \frac{I}{N}$ e desta forma, reduzimos o número de casos da doença na população.

2.2.3 Reprodutibilidade Basal

A reprodutibilidade Basal de uma infecção, R_0 , pode ser definida para microparasitas (vírus, bactérias, protozoários) como “o número de infecções secundárias produzidas por um único indivíduo infectado, ao longo de seu período de infectividade, em uma população inteiramente suscetível ao agente”. Em se tratando de macroparasitas (vermes metazoários, ectoparasitos, etc), define-se R_0 como o número médio de descendentes férteis e viáveis gerados por um parasita adulto, e que também atinjam a idade reprodutiva (Massad, 1992).

O conceito de R_0 é originário da biologia evolutiva e é utilizado para se determinar se uma população crescerá ou caminhará para a sua extinção. Sua aplicabilidade na área epidemiológica é muito grande, pois permite avaliar o esforço para se controlar ou erradicar uma determinada doença na população. A razão de reprodutibilidade basal depende, por sua vez, da probabilidade de transmissão quando do contato entre um indivíduo infectante e um indivíduo suscetível, da frequência de contatos na população, do período de infecciosidade de um indivíduo e da proporção de indivíduos suscetíveis na população (Almeida, 2002; Lopez, 2002).

O conceito de R_0 foi utilizado pela primeira vez em um contexto epidêmico por MacDonald, no início da década de 1950, nos estudos sobre a malária e outras infecções transmitidas por vetores. Neste caso o parâmetro foi definido como uma composição entre a densidade da população de mosquitos em relação à população de hospedeiros humanos,

a taxa média de picadas diárias de cada mosquito em cada ser humano, a taxa de recuperação espontânea da parasitemia e a taxa de mortalidade do mosquito em relação ao período de incubação do parasito (Burattini, 1989; Hethcote, 2000).

Embora R_0 seja uma medida de ordem teórica, ela permite definir ao menos hipoteticamente as condições pelas quais uma determinada doença se manterá ou não em uma população.

Depois de iniciada a epidemia, a proporção de suscetíveis na população vai diminuindo abaixo dos 100% iniciais. Desta forma, a reprodutibilidade passa a ser denotada apenas pela letra R (Anderson&May, 1992; Hethcote, 2000; Coutinho, 2004).

Fica óbvio desta definição que, se o número de casos secundários gerados por um caso índice durante o período de infecciosidade não for pelo menos maior que um a infecção não se “repõe”, ou seja, não consegue se estabelecer na população hospedeira. Este limiar é de fundamental importância e todas as medidas de controle devem ter como objetivo principal a redução do valor do R_0 abaixo da unidade (Coutinho, 2004).

2.2.4 Bifurcações

A bifurcação é um fenômeno que caracteriza uma mudança qualitativa no comportamento das soluções de sistema dinâmico e está relacionada à variação de algum parâmetro desse sistema.

O ponto de bifurcação é uma solução que determina a mudança de comportamento qualitativo do sistema de equações e está associada a um valor específico do parâmetro variado (Edelstein-Keshet, 1988).

O conjunto de soluções obtidas na variação do parâmetro controle de uma bifurcação está contido num intervalo contínuo, que possui uma vizinhança de soluções próximas com características semelhantes (Raimundo, 2004; Hadelar, 1997).

Este tema adquiriu importância no estudo sobre as soluções de equações diferenciais e propiciou inclusive, o aparecimento da *teoria das bifurcações*, que estuda as possíveis alterações na estrutura das órbitas de uma equação diferencial de parâmetros variáveis (Hale&Koçak, 1991).

Vários estudos sobre dinâmica populacional de insetos mostram que mudanças nos parâmetros que controlam as taxas de crescimento populacional, podem mudar o comportamento, passando de uma situação com um ponto de equilíbrio para ciclos oscilatórios, ou ainda, para situações de caos (Murray, 1991; Edelstein-Keshet, 1988).

O comportamento das bifurcações de equações diferenciais específicas pode ser representado por certas figuras chamadas “*diagramas de bifurcação*”. Estes diagramas são determinados por um procedimento numérico e permitem a descoberta de interessantes parâmetros de um sistema dinâmico (Baker&Gollup, 1990).

Algumas das principais idéias sobre o estudo das mudanças de soluções de uma equação diferencial que resultam no fenômeno das

bifurcações, podem ser representadas nos tipos mais usuais encontrados (Edelstein-Keshet, 1988; Hale&Koçak, 1991):

- Bifurcação sela-nó: o número de órbitas varia a partir de um valor crítico mesmo que a variação do parâmetro seja muito pequena;
- Equilíbrio hiperbólico: há um ponto de equilíbrio hiperbólico que é assintoticamente estável para qualquer valor do parâmetro;
- Transcrítica: existe um valor de parâmetro que une os dois equilíbrios na origem e para valores do parâmetro acima do valor crítico, a origem se torna instável transferindo sua estabilidade para outro ponto de equilíbrio;
- Histerese: neste caso o sistema pratica um salto para dois valores diferentes do parâmetro e o valor onde o salto acontece é determinado pela direção em que o parâmetro físico é variado;
- Pitchfork (Forquilha): sua característica é que sempre um ponto de equilíbrio é a origem e quando o parâmetro passa por um valor crítico o equilíbrio perde a estabilidade e surgem dois novos ramos estáveis que coexistem com o equilíbrio trivial. Esse tipo de bifurcação pode ainda ser classificada como: *supercrítica* - quando os pontos de equilíbrios que surgem no valor da bifurcação ocorrem para valores do parâmetro nos quais o ponto de equilíbrio original é instável; ou *subcrítica* – quando os pontos de equilíbrios adicionais ocorrem para valores nos quais o ponto de equilíbrio original é estável.
- Fold ou cusp: são originárias de equações diferenciais cúbicas simples e dependem de dois parâmetros reais. Este caso

compreende casos de bifurcações histerese, pitchfork e sela-nó supercrítica;

- Hopff: neste caso o sistema antes representado por um equilíbrio, passa a ser representado por um ciclo limite onde as oscilações são regulares e a diferença das demais bifurcações comentadas acima é que as outras apresentam equilíbrio em todos os ramos.

2.3 Histórico dos modelos de espalhamento de idéias

A utilização de modelos matemáticos para descrever o espalhamento de idéias e informações não é recente. Em 1952, Rapoport e colaboradores desenvolveram o primeiro modelo determinístico que tentou facilitar o entendimento da comunicação em sociedade. Em 1965, Daley e Kendall, mostraram a similaridade existente na propagação de idéias e de doenças infecciosas, e criaram a terminologia “*Rumores*” para este tipo de fenômeno. A partir da expansão dessa concepção foi que surgiu mais recentemente a noção do conceito de *memes* (Dickinson&Pearce, 2003).

Assim, partindo da idéia que as evoluções culturais, incluindo a evolução do conhecimento, podem ser modeladas utilizando-se dos mesmos princípios básicos de variação e seleção da evolução biológica; em 1995, Rogers apresenta um sistema dinâmico para representar a propagação de idéias numa população (Massad, 2006).

Uma característica de similaridade importante a ser ressaltada é que assim como nos modelos matemáticos, os modelos de rumores podem ser estocásticos ou dinâmicos.

No caso dos modelos estocásticos a transmissão do rumor é global, já nos modelos dinâmicos a transmissão é local, ou seja, se propaga de indivíduo para indivíduo. Além disso, nesse tipo de modelo também se reconhece a *Lei de Ação das Massas* (Kosfeld, 2005).

Os Rumores podem ser altamente contagiosos, da mesma forma que algumas doenças infecciosas, e o que os diferenciam de outras partes da informação é a urgência na sua transmissão. Podemos definir também que acreditar em um rumor e desejar espalhá-lo podem ser considerados idênticos, e podemos observar que um rumor pode persistir até depois que o desejo de propagá-lo diminui (Noymer, 2001).

Outra característica interessante está relacionada ao ceticismo em relação aos rumores. Um cético não aceita um rumor como verdade, nem da primeira vez que ouve, nem depois de exposto novamente ao rumor e esse comportamento pode ser associado ao mesmo significado que a vacinação tem para a epidemiologia.

A imunidade adquirida tem significado análogo tanto no estudo de rumores, como na epidemiologia e pode ser comparada à situação na qual, depois de infectado pelo rumor, por certo período de tempo, a pessoa começa a acreditar que foi enganada e deixa de acreditar na idéia e o rumor cessa (Noymer, 2001).

Nos modelos do tipo SIR da epidemiologia matemática os indivíduos infectados podem morrer ou adquirir imunidade permanente. A suposição de voltar a ser suscetível é pouco apropriada, pois no caso de agentes de contágio biológico a recuperação é geralmente associada a apenas algum período de imunidade. No caso de modelos de contágio social o indivíduo pode voltar a ser suscetível, incorporando a memória ao rumor. Um exemplo a ser citado é o caso dos “fumantes sociais”, onde um indivíduo pode parar e iniciar novamente o hábito de fumar (Doods, 2004).

Muitas extensões recentes dos estudos de modelos de rumores do tipo SIR incluem uma classe geral de processos de Markov para gerar a evolução dependente do tempo. Da mesma forma, em alguns casos tentam agregar os estudos dos efeitos do panorama social no espalhamento de rumores, por meio de simulação com Monte Carlo, ou por derivação de equações para uma população com heterogeneidade entre as classes de suscetíveis e infectados (Bettencourt et al., 2005).

Muitos modelos matemáticos de propagação de rumores estão atentos a capturar a capacidade de uma pessoa ou idéia de persuadir outros, levando a imitação de comportamentos. Este tipo de modelo tem despertado especial interesse de grupos de estudos em Marketing empresarial e estão sendo desenvolvidos com o objetivo de gerar predições a respeito da adoção de produtos ou para pesquisar sobre a tendência de opinião pública.

Apesar do interesse cada vez mais crescente na modelagem matemática do espalhamento de informações, podemos observar que se

trata de um assunto pouco estudado e que a maior parte desses modelos ainda não tem validação por dados empíricos.

Desta forma os estudos sobre esse tema se fazem interessantes e justificam nossa tentativa de explorar o assunto, inclusive com a possibilidade de validação dos resultados analíticos encontrados por meio de aplicação dos resultados obtidos em campanhas educativas e/ou publicitárias.

2.4 Transmissão de idéias: *Memes*

A publicação do livro “O gene egoísta” por Richard Dawkins, em 1976, apresenta o termo *meme* para definir a idéia que um padrão cognitivo ou comportamental pode ser transmitido de um indivíduo para outro.

Neste trabalho ele observou que as culturas podem evoluir de modo muito similar ao das populações de organismos vivos e que as idéias passadas ao longo das gerações, podem aumentar ou diminuir a sobrevivência dos indivíduos que as incorporam e utilizam (Dawkins, 1976). Esse processo ocorre por um mecanismo natural que seleciona as idéias que continuarão a ser passadas às gerações futuras (Dawkins, 1993a).

Além dos mecanismos de hereditariedade e de seleção natural, os *memes* também incorporam a propriedade de mutação (Best, 1997; Goodenough, 1995; Heylighen, 1992; Kauffman, 1992). Assim, as idéias que são transmitidas de cérebro em cérebro podem sofrer modificações que se acumulam ao longo do tempo e as informações são então alteradas e

recebem um novo formato. Os contos populares e mitos são exemplos de mutação de informação, pois com o objetivo de serem mais facilmente memorizados, freqüentemente recebem novos adornos em cada etapa de sua divulgação, aumentando dessa forma a probabilidade de serem recontados (Heyes, 1994-96; Turchin, 1977)

Também de forma análoga ao gene, o sucesso de um *mime* é determinado pelo número de cópias existentes gerado por ele. Assim, da mesma forma que um gene bem sucedido pode se conservar e sobreviver para as gerações futuras, um *mime* bem sucedido pode propagar-se de indivíduo para indivíduo numa população durante muito tempo como um replicador de comportamentos (Yando et al., 1978; Mettler et al., 1988; Sperber, 1999; Heyes, 1996).

Podemos então, entender o *mime* como uma *unidade mínima da memória* de forma análoga ao gene para a genética. Assim, podemos considerá-lo como uma unidade de informação que se multiplica de cérebro em cérebro, ou seja, pelo contato direto entre pessoas (Dawkins, 1989; Lumsden & Wilson, 1981; Best, 1997). Porém, o elemento de transmissão da informação também pode ser inanimado como é o caso dos livros, artigos, campanhas publicitárias; e neste caso temos os chamados “sistemas retentores” (Turchin, 1977; Banerjee, 1992; Heylighen, 1994).

No que diz respeito à sua funcionalidade, o *mime* é considerado uma unidade de evolução cultural que pode de alguma forma se autopropagar. Os *memes* podem ser idéias ou fragmentos de idéias, idiomas, sons, desenhos, capacidades, valores estéticos e morais, ou qualquer outra coisa

que possa ser aprendida e transmitida enquanto unidade autônoma. Uma característica chave do *meme* é que ele é propagado por imitação, ou seja, a informação é levada ao cérebro por algum órgão sensorial (Dawkins, 1989-93a; Kauffman, 1992; Glueck & Klimov, 1995; Best, 1997).

O estudo dos modelos evolutivos da transferência de informação é conhecido como memética; e nesse campo surgiram estudos sobre a idéia de que certos grupos de *memes* podem agir como “*vírus meméticos*”, criando uma nova e controversa aplicação para o conceito original dos *memes* (Lumsden & Wilson, 1981; Goodenough, 1995; Lynch, 1996; Wilson, 1998; Sperber, 1999).

Concentram-se aqui os estudos sobre os conjuntos de idéias que se comportam como formas de vida independentes, e continuam a ser transmitidas de uma mente para a outra porque estão bem estabelecidas entre seus hospedeiros. Neste contexto, as religiões e os cultos podem exemplificar este tipo de comportamento, pois atribuem ao ato de transmitir suas crenças como uma virtude moral e, desta forma, outras idéias e comportamentos são transmitidos simultaneamente, mesmo que elas não sejam particularmente valiosas para o crente (Peterson & Gist, 1951; Mullen, 1972; Buss, 1987; Dawkins, 1993 a,b; Cullen, 1998).

Apesar das controvérsias, alguns estudos especulam que as religiões tradicionais agem como sistemas imunológicos mentais que suprimem novos *memes* que podem ser contrários a sua ideologia. De uma forma geral, a própria religião pode ser definida como um meme ou, mais precisamente,

um grupo de memes associados - um “memeplexo” (Dawkins, 1993 a,b; Cullen, 1998).

Certos movimentos evangélicos fundamentalistas são notáveis por se dedicarem tempo exclusivo à atividade evangélica, aumentando assim sua propagação. Isto possibilita que este tipo de instituição seja considerada simplesmente como um *meme auto-centrado* e, em alguns casos, particularmente eficiente (Turchin,1977; Dawkins, 1993 a,b; Cullen, 1998).

Ao longo da história é possível observar em livros religiosos como a bíblia, que existe a influência de *memes* que foram adquiridos em diversas localidades ou períodos, na expressão de seus dogmas religiosos. Esse tipo de fenômeno pode ter originado as diferentes interpretações da mesma religião que surgiram ao longo do tempo, e desta forma, originaram novas correntes religiosas a partir de uma base em comum (Dawkins, 1993 a,b; Cullen, 1998).

Também por analogia à genética populacional tradicional, observamos nos *memes* a ocorrência do fenômeno do “isolamento reprodutivo”. Isto implica que normalmente, a população dos indivíduos portadores de um meme é heterogênea em suas consciências e se relacionam de forma suficiente para manter o meme intacto, ainda que isso permita uma grande amplitude de variações. Mas se por alguma razão a população se dividir, sem contato suficiente entre os dois subgrupos, as variações do meme se equilibram e, eventualmente em cada grupo irá evoluir sua própria versão desse mesmo *meme*, podendo se diferenciar de tal forma que os grupos passam a ser considerados como entidades

distintas (Turchin, 1977; Buss, 1987; Mettler et al., 1988; Heyes, 1996; Sperber, 1999).

Em resumo, podemos concluir que o sucesso na propagação de uma idéia está diretamente relacionado à capacidade de contágio dos indivíduos de um grupo e que essa transmissão tem comportamento similar à dos organismos biológicos.

Embora haja uma tendência para associar que um *meme* bem sucedido tem efeito positivo e verdadeiro, observamos que nos processos psicológicos isso pode não ser real, pois existem idéias cujo efeito pode ser negativo (Heylighen et al., 1994; Rogers, 1995).

Para facilitar a localização de um *meme* dentro de um processo de comunicação e conseqüentemente de transmissão de uma informação, podemos classificá-lo de acordo com algumas de suas características peculiares, por exemplo (Dawkins, 1989-93a,b; Banerjee, 1992; Cullen, 1998):

1. **Experiência:** é um tipo de *meme* que correlaciona o universo de experiências dos indivíduos, com o objetivo de facilitar sua crença e conseqüentemente sua propagação;
2. **Felicidade:** garante sua propagação exatamente por transmitir a sensação de contentamento. A idéia de vida após a morte pode ser um exemplo de embasamento desse conceito;
3. **Medo:** esse tipo de *meme* pode ser transmitido por constituir uma ameaça e fazer com que os indivíduos o aceitem por questões de segurança;

4. **Economia:** este tipo específico leva em consideração o poder e a influência que pode ter sobre as pessoas ou organizações que detêm o controle e influenciam o mercado econômico; ou ainda se ele tende a propiciar o aumento de riquezas de um indivíduo ou instituição;
5. **Censura:** neste caso observamos a restrição da manifestação da opinião dos indivíduos, penalizando-os muitas vezes severamente, por tentar se expressar. Em contrapartida é possível perceber também a existência do *meme* "é errado censurar". Especula-se que este tipo de *meme* teria prosperado pelo aumento da riqueza de algumas nações que o aplicaram e dessa forma aumentaram a sua influência;
6. **Conformidade e inovação:** esses tipos de *memes*, como no o caso do apego ao tradicional e do repúdio ao novo, podem se replicar por serem simplesmente mais aceitos socialmente. Em contrapartida, outros *memes* podem se propagar com mais facilidade por razão oposta, isto é, por serem incomuns ou inovadores como no caso das artes e da moda.

Como resultado do processo histórico da evolução dos estudos sobre transferência de informação surge no início dos anos oitenta a teoria de co-evolução de genes e cultura, onde as unidades fundamentais biológicas da cultura devem corresponder a redes neuronais que funcionam como conexões de memória semântica (Lumsden, 1981).

Foi como consequência desse estudo, que o termo "meme" recebeu então a definição de unidade fundamental de herança cultural e ganhou

destaque no sentido de ser considerado como elemento unificador entre as ciências naturais e sociais (Wilson, 1998).

Capítulo III

MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Formulação do Modelo

Os modelos matemáticos que descrevem os processos de contágio social possuem algumas características semelhantes aos modelos que descrevem a transmissão de doenças em uma população (Dickinson&Pearce, 2003).

Embora a dinâmica desses dois fenômenos apresente semelhanças, é importante ressaltar que existem diferenças qualitativas e quantitativas entre o espalhamento de idéias e a propagação de doenças. O espalhamento de uma idéia é geralmente consequência de um ato intencional da parte de quem a transmite ou de quem a adota (Bettencurt et al., 2005; Kosfeld, 2005). De uma forma geral, a aquisição de novas idéias é sempre vantajosa; fato que já não ocorre em relação à “aquisição” de uma

doença, que geralmente é um ato involuntário de quem a transmite e de quem a adquire.

O ponto de partida deste estudo é a consideração que tanto a idéia/informação quanto a doença, têm a característica comum de serem “transmitidas” na população e podem ser adquiridas por um indivíduo que esteja suscetível a elas. E dentro deste contexto social e epidemiológico, propomos um modelo matemático para descrever a dinâmica da transmissão de idéias, e investigar o espalhamento delas na população. Para isso, são empregados não só os conceitos epidemiológicos que descrevem a dinâmica da transmissão de doenças, como também se avaliam campanhas educativas, por meio do mesmo instrumento usado para as estratégias de controle e de erradicação da doença na população (Massad et al., 2006).

Também apropriaremos a nomenclatura utilizada nos modelos em epidemiologia matemática dividindo-se a população em subpopulações, ou seja, os indivíduos estão presentes em compartimentos, classificados de acordo com a susceptibilidade em relação à informação, e em condições específicas (Diekmann&Heesterbeek, 2000).

Neste trabalho, assumimos uma situação hipotética na qual a população total (N) é subdividida em classes de indivíduos “susceptíveis” (S), “infectados” (I) e “recuperados” (R) pela inovação. Cada uma dessas classes será ainda subdividida em dois grupos: um grupo é formado pelos indivíduos mais receptíveis a novas idéias, enquanto que no outro grupo, os indivíduos têm um comportamento mais resistente às novidades. Assim, define-se a população total, $N = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$, com S_1 , I_1 e

R_1 sendo as classes dos indivíduos mais receptíveis a inovação e S_2 , I_2 e R_2 as classes dos indivíduos mais resistentes à inovação. A dinâmica da transmissão da informação será então representada pelo seguinte diagrama de fluxo:

*Ilustração 1: Diagrama de fluxo do Modelo de Transmissão de Informação.
As setas pontilhadas indicam apenas o contato entre os indivíduos
“susceptíveis” e “infectados”*

Consideramos também duas possíveis formas de uma inovação ser transmitida e então assimilada pelos indivíduos “susceptíveis”. Na primeira, os “susceptíveis” podem ter acesso à nova idéia pelo contato direto com os indivíduos “infectados”, que já reconheceram e aceitaram a novidade. A transmissão da informação ocorre de acordo com a Lei de Ação das Massas em Epidemiologia - LAME (Hamer, 1906; Hethcote, 2000). Esta lei, denotando “quem adquire a informação de quem”, é matematicamente

descrita por uma bilinearidade. Na segunda situação, assume-se que os indivíduos “susceptíveis” são submetidos a uma campanha educativa, podem reconhecer e aceitar a nova idéia divulgada por qualquer meio de comunicação em massa e a transmissão da informação ocorre a uma taxa constante.

A diferença fundamental entre essas duas formas de transmissão é que se ela ocorre segundo a LAME, então a probabilidade de encontro entre um indivíduo “suscetível” e um “infectado” é proporcional ao número de indivíduos infecciosos da população na qual a idéia está sendo divulgada, ou seja, βSI . Em nosso estudo β é o coeficiente de transmissão da informação e representa a taxa de contato entre esses indivíduos “susceptíveis” e “infectados” por unidade de tempo. Por outro lado, se a informação é divulgada através de campanhas educativas por meio de comunicação em massa, a transmissão é considerada constante, não aleatória e essencialmente não depende do número de indivíduos infecciosos da população, ou seja, λS , com λ constante.

Também é importante ressaltar que, de forma diferente ao que ocorre na maioria dos modelos de transmissão de doenças, aqui não faremos distinção entre indivíduos infecciosos e infectados, ou seja, no momento que o indivíduo aceita a novidade, ele torna-se “infectado” e, portanto, transmissor da informação. Além disso, esses agentes transmissores da novidade mantêm suas características, ou seja, o grupo I_1 representa o conjunto dos indivíduos que são mais receptíveis à novidade e também

possuem maior capacidade de comunicação. No grupo I_2 estão aqueles indivíduos com características mais conservadoras em relação à aceitação de uma nova idéia, com menos capacidade ou interesse em difundi-las.

Portanto, assume-se que o contato entre os indivíduos “infectados” I_1 e os “susceptíveis” S_1 , ocorre a uma taxa β_1 , e, entre os indivíduos I_1 e S_2 , a uma taxa β_2 . Porém, os indivíduos “infectados” I_2 influenciam os indivíduos S_1 , mais receptíveis à inovação, a uma taxa $\beta_3 = \sigma \beta_1$, e também influenciam os indivíduos S_2 , menos receptíveis à inovação, a uma taxa $\beta_4 = \sigma \beta_2$. O parâmetro σ representa a eficiência dos indivíduos I_2 na transmissão da informação e se $\sigma = 0$ a transmissão não ocorre; se $\sigma = 1$ a transmissão é perfeita. Como nenhum desses casos extremos é real, assumimos $0 < \sigma < 1$.

Consideramos também a situação na qual uma vez adaptados à inovação, os indivíduos “infectados” recuperam-se depois de certo período de tempo. Desta forma, deixam de acreditar na idéia ou simplesmente se esquecem da novidade passando para o compartimento dos indivíduos “recuperados”, R_1 e R_2 , a uma “taxa de esquecimento” γ_1 e γ_2 , respectivamente. Assim, γ_1^{-1} e γ_2^{-1} representam os tempos nos quais os indivíduos permanecem contaminados pela idéia. Sob o aspecto epidemiológico, tal situação representa os indivíduos infectados recuperando-se da doença com imunidade permanente.

O modelo apresenta uma dinâmica vital, isto é, todos os indivíduos estão sujeitos à mortalidade natural (μ). Existe um fluxo de entrada (π) de indivíduos “susceptíveis” na comunidade e uma proporção (p) de indivíduos susceptíveis que entram por unidade de tempo para as classes S_1 e S_2 , representada por $p\pi$ e $(1 - p)\pi$, onde $0 < p < 1$.

Com o objetivo de facilitar a compreensão da dinâmica do modelo, apresentamos na tabela abaixo, um resumo das variáveis e parâmetros do modelo. Note que como o modelo monitora população humana, assume-se que todos os parâmetros e variáveis do modelo são não negativos.

Tabela 1 Resumo das variáveis e parâmetros do modelo

S_1	População de indivíduos “susceptíveis” e receptivos às novas idéias
S_2	População de indivíduos “susceptíveis”, porém resistentes às novas idéias
I_1	População de indivíduos “infectados” e receptivos às novas idéias
I_2	População de indivíduos “infectados”, porém resistentes às novas idéias
R_1	População de indivíduos “recuperados” e receptivos, e que deixam de acreditar na idéia ou simplesmente se esquecem da novidade
R_2	População de indivíduos “recuperados”, porém resistentes, e que deixam de acreditar na idéia ou simplesmente se esquecem da novidade
N	População total, onde $N = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$
β_i ($i = 1, 2, 3 \text{ e } 4$)	Coeficientes de transmissão da informação entre os indivíduos “infectados” e “susceptíveis”
γ	Taxa de recuperação ou de “esquecimento”
p	Proporção de indivíduos susceptíveis que entram no sistema $0 < p < 1$
π	Fluxo de entrada de indivíduos suscetíveis
μ	Taxa de mortalidade natural
λ	Taxa de transmissão da informação em massa (λ^{-1} representa o período de duração da campanha educativa)
σ	Eficiência da transmissão da informação $0 < \sigma < 1$

Baseado nas suposições descritas anteriormente, a dinâmica do modelo dada pela Figura-1, pode ser então descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_1}{dt} = (1-p)\pi N - \lambda S_1 - \frac{\beta_1 S_1 I_1}{N} - \frac{\beta_3 S_1 I_2}{N} - \mu S_1 \\ \frac{dS_2}{dt} = p\pi N - \lambda S_2 - \frac{\beta_4 S_2 I_2}{N} - \frac{\beta_2 S_2 I_1}{N} - \mu S_2 \\ \frac{dI_1}{dt} = \lambda S_1 + \frac{\beta_1 S_1 I_1}{N} + \frac{\beta_3 S_1 I_2}{N} - (\gamma_1 + \mu) I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} = \lambda S_2 + \frac{\beta_4 S_2 I_2}{N} + \frac{\beta_2 S_2 I_1}{N} - (\gamma_2 + \mu) I_2 \\ \frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 I_1 - \mu R_1 \\ \frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 I_2 - \mu R_2 \end{array} \right. , \quad (3.1.1)$$

com condições iniciais não negativas e $N(0) > 0$. O sistema (3.1.1) é invariante: as soluções permanecem não negativas para condições iniciais não negativas. Observe que $\frac{dN}{dt} = \pi - \mu N$, e que $\frac{dN}{dt} = 0$ se e somente se

$\pi - \mu N = 0$, ou seja, quando $N = \frac{\pi}{\mu}$. Isto implica que $N(t) \rightarrow \frac{\pi}{\mu}$, quando

$t \rightarrow \infty$. Portanto, se $N(t)$ for menor que $\frac{\pi}{\mu}$ a população aumenta, enquanto

que para $N(t)$ maior que $\frac{\pi}{\mu}$, a população diminui até eventualmente atingir

$\frac{\pi}{\mu}$, para todo t suficientemente grande. Como a população total é

constante, admitimos $\pi = \mu N$, e o sistema pode então ser re-escrito em termos de proporções:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= (1-p)\pi - \lambda S_1 - \beta_1 S_1 I_1 - \beta_3 S_1 I_2 - \mu S_1 \\
\frac{dS_2}{dt} &= p\pi - \lambda S_2 - \beta_4 S_2 I_2 - \beta_2 S_2 I_1 - \mu S_2 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \lambda S_1 + \beta_1 S_1 I_1 + \beta_3 S_1 I_2 - (\gamma_1 + \mu) I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \lambda S_2 + \beta_4 S_2 I_2 + \beta_2 S_2 I_1 - (\gamma_2 + \mu) I_2 \\
\frac{dR_1}{dt} &= \gamma_1 I_1 - \mu R_1 \\
\frac{dR_2}{dt} &= \gamma_2 I_2 - \mu R_2,
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

onde S_i, I_i, R_i (com $i = 1, 2$) se conservam escritos em letra maiúscula mas passam a representar, respectivamente, as proporções das populações dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, com $N = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2 = 1$.

3.2 ANÁLISE DO MODELO

Neste capítulo, apropriamos o uso de uma importante ferramenta, amplamente utilizada nos modelos matemáticos em epidemiologia teórica, para avaliar estratégias de erradicação ou de controle de uma doença numa população. Intitulado R_o , o número de reprodutibilidade basal, é definido como o número médio de infecções secundárias causadas por um único

indivíduo infeccioso, introduzido numa população homogênea e inteiramente susceptível (Lopez, 2002; Hethcote, 2000).

Em geral, quando $R_o < 1$, dizemos que o equilíbrio trivial ou o equilíbrio livre da doença é globalmente assintoticamente estável (G.A.E.). Quando $R_o > 1$, implica que o equilíbrio trivial torna-se instável e o equilíbrio não trivial (ou endêmico) é assintoticamente estável, ou seja, a doença é capaz de invadir uma população totalmente susceptível (Lopez et al., 2002; Diekmann & Heesterbeek, 2000). Importante ressaltar que quando isso ocorre, isto é, quando um sistema dinâmico passa de um foco estável para um instável ao se variar o valor de algum parâmetro, diz-se que “o sistema sofreu uma bifurcação” e que o valor crítico $R_o = 1$ é o ponto de bifurcação. (Lopez et al., 2002; Edelstein-Keshet, 1988).

Neste trabalho adaptamos essa definição e, R_0^* , será definido como o número médio de indivíduos que adotam uma nova idéia, gerado por um único indivíduo “infectado” por ela e introduzido numa população inteiramente susceptível à novidade.

Assim, para $R_0^* < 1$ tem-se a ausência da novidade na população, ou seja, o equilíbrio trivial é globalmente assintoticamente estável (G.A.E.). Quando $R_0^* > 1$ a novidade “invade” a população dando origem ao rumor, ou seja, o equilíbrio não trivial é localmente assintoticamente estável. Neste caso, existe um único equilíbrio endêmico, a transmissão ocorre segundo a clássica LAME e para $R_0^* = 1$, observa-se a presença da bifurcação “forward”.

Em detalhe, o que queremos representar é que se um indivíduo com as características de um “comunicador” entrar em contato com uma população de indivíduos susceptíveis a novidades, pode se deflagrar uma “epidemia” de idéias (Gladwell, 2000). De uma forma geral, o valor R_0^* pode indicar a velocidade inicial de crescimento desse rumor, pois cada indivíduo que aceitou a idéia ramifica-se em R_0^* novos indivíduos persuadidos que, por sua vez, originam R_0^* convencidos, e assim sucessivamente (Lopez et al., 2002).

Atualmente a teoria epidemiológica tem mostrado também interesse em investigar a existência de múltiplos equilíbrios endêmicos e os mecanismos epidemiológicos que os produzem. Os modelos matemáticos que consideram múltiplos equilíbrios endêmicos apresentam o fenômeno de bifurcação que, em geral, está associado a um conjunto de valores limiares de parâmetros no qual o equilíbrio do sistema considerado muda a estabilidade (Raimundo, 2006). Nestes tipos de modelo observa-se um outro tipo de bifurcação, denominada bifurcação “backward”, que está relacionada à presença de mais de uma classe de suscetíveis. Assim, para $R_0 < 1$ nota-se a existência de um equilíbrio trivial e um não trivial, ambos estáveis, e um outro equilíbrio não trivial instável (Haderler&Driessche; 1997). Isto significa que para o equilíbrio trivial ser estável não basta baixar o R_0 para valores menores que um; é preciso definir um outro valor limiar R_p de tal forma que $R_p < R_0$ (Raimundo, 2006).

Em termos práticos, e adaptando-se essa definição ao modelo de comportamento social apresentado neste trabalho, uma alternativa para se alcançar a erradicação do rumor seria baixar o número de indivíduos “infectados” de tal forma que $R_p^* < R_0^* < 1$.

Na próxima secção investigamos o comportamento do modelo (3.1.2) para duas situações específicas de transmissão da informação, previamente descritas. Primeiro, consideramos que além do contato direto entre os indivíduos susceptíveis e os propagadores de rumor (LAME), existe também a presença de uma campanha educacional como instrumento de divulgação da informação em massa, isto é, $\beta \neq 0, \lambda \neq 0$. Posteriormente, analisamos a situação na qual o rumor ocorre na população apenas de acordo com a LAME, ou seja, $\beta \neq 0, \lambda = 0$.

Entretanto, para alguns casos dessas duas situações, devido à complexidade das coordenadas dos pontos de equilíbrio e dos coeficientes do polinômio característico associado à Matriz Jacobiana, as análises do modelo (3.1.2) ficaram um pouco comprometidas. Em contrapartida, para contornar tais dificuldades, apresentamos no capítulo (IV. Resultados) uma análise numérica do modelo utilizando o software MATLAB 7.0. Propomos também uma simplificação do modelo (3.1.2), no qual fazendo $\lambda = 0$, assumimos que a campanha educativa não é considerada. Para este caso específico, apresentamos analítica e numericamente a existência dos equilíbrios trivial e não trivial, além de analisarmos a estabilidade para ambos os equilíbrios.

3.2.1. PRESENÇA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda \neq 0$)

O ponto de equilíbrio trivial do sistema (3.1.2) corresponde ao ponto onde não existem pessoas potencialmente capazes de transmitir uma informação, ou seja, $I_1 = I_2 = 0$, significando que a população está livre de qualquer rumor. Igualando-se a zero as duas primeiras e as duas últimas equações do sistema (3.1.2) tem-se, respectivamente,

$$S_1 = \frac{(1-p)\pi}{\lambda + \mu}, \quad S_2 = \frac{p\pi}{\lambda + \mu}, \quad R_1 = R_2 = 0. \quad (3.2.1)$$

Por outro lado, assumindo a condição de equilíbrio e substituindo-se $I_1 = I_2 = 0$ na terceira e na quarta equação do sistema (3.1.2) tem-se $S_1 = S_2 = 0$, o que contradiz (3.2.1).

Portanto, para $\lambda \neq 0$, o sistema (3.1.2) não apresenta o ponto de equilíbrio trivial. Desta forma, espera-se que o sistema (3.1.2) apresente pelo menos um equilíbrio não-trivial, correspondendo à situação na qual ocorre a propagação da novidade pelo rumor. Este ponto de equilíbrio, definido por $P^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*)$, é socialmente viável quando todas as suas coordenadas são positivas. Igualando-se a zero as equações (3.1.2), tem-se que para

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= 0, & S_1^* &= \frac{(1-p)\pi}{\lambda + \beta_1 I_1^* + \mu + \beta_3 I_2^*} > 0, \\ \frac{dS_2}{dt} &= 0, & S_2^* &= \frac{p\pi}{\lambda + \beta_4 I_2^* + \beta_2 I_1^* + \mu} > 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 0, \quad R_1^* = \frac{\gamma_1 I_1^*}{\mu} > 0,$$

$$\frac{dR_2}{dt} = 0, \quad R_2^* = \frac{\gamma_2 I_2^*}{\mu} > 0.$$

Substituindo-se o valor de S_1 na terceira equação do sistema (3.1.2)

obtem-se o seguinte polinômio de 2º grau em I_1^* dado por

$$P(I_1^*) = A_1 I_1^{*2} + B_1 I_1^* + C_1 = 0 \quad (3.2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= (\gamma_1 + \mu)\beta_1 \\ B_1 &= (\gamma_1 + \mu)(\lambda + \mu) - (1-p)\pi\beta_1 + (\gamma_1 + \mu)\beta_3 I_2^* \\ C_1 &= -(1-p)\pi\beta_3 I_2^* - (1-p)\pi\lambda \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

do polinômio (3.2.3), tem-se

$$I_2^* = \frac{[(1-p)\pi\beta_1 - (\gamma_1 + \mu)(\lambda + \mu)]I_1^* - (\gamma_1 + \mu)\beta_1 I_1^{*2} + (1-p)\pi\lambda}{\beta_3[(\gamma_1 + \mu)I_1^* - (1-p)\pi]}. \quad (3.2.5)$$

Que é socialmente viável ($I_2^* > 0$), quando

$$\frac{(1-p)\pi}{(\gamma_1 + \mu)} < I_1^* < \frac{(1-p)\pi}{(\gamma_1 + \mu)} \left[\frac{\lambda}{\beta_1} + 1 \right] - \frac{(\lambda + \mu)}{\beta_1} \quad (3.2.6)$$

Por outro lado, substituindo-se o valor de S_2 na quarta equação do sistema (3.1.2), tem-se o polinômio de 2º grau em I_2^* dado por

$$P(I_2^*) = A_2 I_2^{*2} + B_2 I_2^* + C_2 = 0 \quad (3.2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} A_2 &= (\gamma_2 + \mu)\beta_4 \\ B_2 &= (\gamma_2 + \mu)(\lambda + \mu) - p\pi\beta_4 + (\gamma_2 + \mu)\beta_2 I_1^* \\ C_2 &= -p\pi\beta_2 I_1^* - p\pi\lambda \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Analogamente, do polinômio (3.2.7), tem-se

$$I_1^* = \frac{p\pi\lambda + [p\pi\beta_4 - (\gamma_2 + \mu)(\lambda + \mu)]I_2^* - \beta_4(\gamma_2 + \mu)I_2^{*2}}{\beta_2[(\gamma_2 + \mu)I_2^* - p\pi]}. \quad (3.2.9)$$

Que é socialmente viável ($I_1^* > 0$), quando

$$\frac{p\pi}{(\gamma_2 + \mu)} < I_2^* < \frac{p\pi}{(\gamma_2 + \mu)} \left(\frac{\lambda}{\beta_4} + 1 \right) - \frac{(\lambda + \mu)}{\beta_4} \quad (3.2.10)$$

Além disso, sabemos que um polinômio do segundo grau, da forma $P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, com $A > 0$ e $C < 0$, tem sempre uma única raiz positiva independente do sinal do coeficiente B . Pelas expressões (3.2.4) e (3.2.8), tem-se que como $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ e $C_1 < 0$, $C_2 < 0$, então existe uma única raiz positiva para o polinômio (3.2.3) e, portanto, uma única raiz positiva para o polinômio (3.2.7)

Em outras palavras, existe um único valor de I_1^* e de I_2^* para os polinômios (3.2.3) e (3.2.7), respectivamente, donde podemos concluir que existe um único equilíbrio não trivial para o sistema (3.1.2).

Por outro lado, como o sistema (3.2.1) não apresenta equilíbrio trivial, então podemos estabelecer o seguinte lema:

Lema1: “Se o equilíbrio não trivial existe, então ele é único e é globalmente assintoticamente estável”.

Neste cenário podemos concluir que a campanha educacional é também um instrumento disponível para o espalhamento de uma novidade. Se ela existe, observamos que o espalhamento da notícia ocorre de forma conjunta com a propagação realizada pelo rumor provocado pelo contato entre os indivíduos “infectados” e “susceptíveis” (LAME)

A estabilidade do equilíbrio não trivial será apresentada no capítulo (IV Resultados) por meio de simulações numéricas, usando o software MATLAB 7.0. Variando-se os valores dos coeficientes de transmissão da informação, β , e mantendo-se fixos os valores dos outros parâmetros de acordo com a Tabela 2, as simulações numéricas indicam que a dinâmica do sistema (31.2) sempre converge para o ponto de equilíbrio não trivial (Figuras 2 e 3).

3.2.2. AUSÊNCIA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda = 0$)

Nessa situação, o sistema (3.1.2) tem sempre o equilíbrio trivial dado por:

$$P_0^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*) = \left(\frac{(1-p)\pi}{\mu}, \frac{p\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right). \quad (3.2.11)$$

com a matriz Jacobiana J_0 , calculada neste ponto, dada por

$$J_0(S_1, S_2, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu} & -\frac{\beta_3(1-p)\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\frac{\beta_2 p\pi}{\mu} & -\frac{\beta_4 p\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu} - \gamma_1 - \mu & \frac{\beta_3(1-p)\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2 p\pi}{\mu} & \frac{\beta_4 p\pi}{\mu} - (\gamma_2 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & -\mu \end{bmatrix} = 0. \quad (3.2.12)$$

Quatro dos autovalores são dados por: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = -\mu$, enquanto que os outros dois autovalores restantes são dados pelo polinômio característico

$$P(\Lambda) = a_0 \Lambda^2 + a_1 \Lambda + a_2 = 0, \quad (3.2.13)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \quad , \\ a_1 = (\gamma_1 + \mu) + (\gamma_2 + \mu) - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu} - \frac{\beta_4 p \pi}{\mu} \quad , \\ a_2 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu) - \frac{\beta_1(1-p)\pi(\gamma_2 + \mu)}{\mu} - \frac{\beta_2\beta_3(1-p)\pi p \pi}{\mu^2} - \\ \quad - \frac{\beta_4 p \pi(\gamma_1 + \mu)}{\mu} + \frac{\beta_1\beta_4(1-p)\pi p \pi}{\mu^2} . \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

Observe que embora o polinômio (3.2.13) seja um polinômio de segundo grau, a complexidade de seus coeficientes (3.2.14) dificulta a determinação de suas raízes ou de seus autovalores. Entretanto, existem alguns métodos que contornam tais dificuldades, e neste caso, será aplicado o critério de Routh-Hurwitz que estabelece que as condições necessárias e suficientes para estabilidade local do ponto de equilíbrio são: $a_0 = 1$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ (Edelstein-Keshet, 1988).

Observe de (3.2.14) que $a_0 = 1$, e escrevendo-se de forma conveniente os outros coeficientes de (3.2.14), tem-se que $a_1 > 0$,

$$(\gamma_1 + \mu) \left[1 - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu(\gamma_1 + \mu)} \right] + (\gamma_2 + \mu) \left[1 - \frac{\beta_4 p \pi}{\mu(\gamma_2 + \mu)} \right] > 0, \quad (3.2.15)$$

e, $a_2 > 0$ quando

$$(\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu) \left[1 - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu(\gamma_1 + \mu)} - \frac{\beta_2\beta_3(1-p)\pi p \pi}{\mu^2(\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)} - \frac{\beta_4 p \pi}{\mu(\gamma_2 + \mu)} + \frac{\beta_1\beta_4(1-p)\pi p \pi}{\mu^2(\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)} \right] > 0, \quad (3.2.16)$$

Assim, o polinômio (3.2.13) possui duas raízes negativas quando as condições (3.2.15) e (3.2.16) forem simultaneamente satisfeitas.

Além disso, tomando-se $\beta_3 = \sigma\beta_1$ e $\beta_4 = \sigma\beta_2$, e definindo-se

$$\begin{aligned} R_0^{*1} &= \frac{\beta_1}{\beta^C}, & \text{com} & \quad \beta^C = \frac{\mu(\gamma_1 + \mu)}{(1-p)\pi}, \\ R_o^{*2} &= \frac{\beta_2}{\beta^{2C}}, & \text{com} & \quad \beta^{2C} = \frac{\mu(\gamma_2 + \mu)}{p\pi}, \\ R_o^{*3} &= \frac{\beta_3}{\beta^{3C}} = \sigma R_0^{*1}, & \text{com} & \quad \beta^{3C} = \beta^C, \\ R_o^{*4} &= \frac{\beta_4}{\beta^{4C}} = \sigma R_0^{*2}, & \text{com} & \quad \beta^{4C} = \beta^{2C}, \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

de (3.2.17) podemos reescrever de forma conveniente as equações (3.2.15) e (3.2.16). Portanto, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ serão positivos se e somente se

$$(\gamma_1 + \mu)(1 - R_0^{*1}) + (\gamma_2 + \mu)(1 - \sigma R_0^{*2}) > 0 \tag{3.2.18}$$

e

$$R_0^{*1} + \sigma R_0^{*2} < 1 \tag{3.2.19}$$

ou seja, o ponto de equilíbrio trivial será assintoticamente estável se e somente se as equações (3.2.18) e (3.2.19) forem simultaneamente satisfeitas, ou seja, quando $R_0^{*1} < 1$, e $R_0^{*2} < \frac{1}{\sigma}(1 - R_0^{*1})$, com $0 < \sigma < 1$.

Em contrapartida, se uma dessas condições apresentadas não for satisfeita, o ponto de equilíbrio trivial passa a ser instável e o sistema se estabiliza. Contudo, pode haver “surto” transitórios de propagação da informação, gerando oscilações amortecidas progressivamente até o seu equilíbrio. Em outras palavras, para que haja a propagação permanente da

novidade sem a presença de algum tipo de campanha educacional, é necessário que o ponto de equilíbrio trivial seja instável. Assim o contato entre os indivíduos “susceptíveis” e “infectados” ocorre e a novidade permanece se espalhando na população por meio de um rumor.

Portanto, além do equilíbrio trivial, o sistema (3.1.2) apresenta o equilíbrio não-trivial dado por $P^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*)$ que é socialmente viável quando todas as coordenadas são positivas. Analogamente, igualando-se a zero as equações do sistema (3.3.2), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^* = \frac{(1-p)\pi}{\beta_1(I_1^* + \sigma I_2^*) + \mu} > 0, \\ S_2^* = \frac{p\pi}{\beta_2(I_1^* + \sigma I_2^*) + \mu} > 0, \\ R_1^* = \frac{\gamma_1 I_1^*}{\mu} > 0 \text{ e } R_2^* = \frac{\gamma_2 I_2^*}{\mu} > 0. \end{array} \right. \quad (3.2.20)$$

Substituindo-se o valor de S_1 na terceira equação do sistema (3.1.2), obtém-se o polinômio de segundo grau em I_1^*

$$P(I_1^*) = A_3 I_1^{*2} + B_3 I_1^* + C_3 = 0 \quad (3.2.21)$$

onde

$$\begin{aligned} A_3 &= (\gamma_1 + \mu)\beta_1 \\ B_3 &= (\gamma_1 + \mu)\mu \left[\frac{\mu + \sigma\beta_1 I_2^*}{\mu} - R_0^{*1} \right] \\ C_3 &= -(1-p)\pi\sigma\beta_1 I_2^* \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

do polinômio (3.3.21), têm-se:

$$I_2^* = \frac{[(\gamma_1 + \mu)\mu(R_0^{*1} - 1) - (\gamma_1 + \mu)\beta_1 I_1^*] I_1^*}{\sigma\beta_1 [(\gamma_1 + \mu)I_1^* - (1 - p)\pi]} \quad (3.2.23)$$

Que é socialmente viável, ($I_2^* > 0$), quando

$$\frac{(1 - p)\pi}{(\gamma_1 + \mu)} < I_1^* < \frac{\mu}{\beta_1} [1 - R_0^{*1}] \quad (3.2.24)$$

Por outro lado, como a condição necessária para a existência de I_1^* é $R_0^{*1} > 1$, tem-se que o denominador da expressão (3.2.23) é negativo e $I_2^* > 0$, quando o numerador de (3.3.23) for negativo. Logo $I_2^* > 0$, se e somente se

$$0 < I_1^* < \frac{(1 - p)\pi}{(\gamma_1 + \mu)} \quad (3.2.24B)$$

Da mesma forma, substituindo o valor de S_2 na quarta equação, obtém-se o

polinômio de segundo grau em I_2^*

$$P(I_2^*) = A_4 I_2^{*2} + B_4 I_2^* + C_4 = 0 \quad (3.2.25)$$

onde

$$\begin{aligned} A_4 &= (\gamma_2 + \mu)\sigma\beta_2 \\ B_4 &= (\gamma_2 + \mu)\mu \left[\frac{\mu + \beta_2 I_1^*}{\mu} - \sigma R_0^{*2} \right] \\ C_4 &= -p\pi\beta_2 I_1^* \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

do polinômio (3.2.25), têm-se:

$$I_1^* = \frac{\left[(\gamma_2 + \mu)\mu \left(\frac{\mu + \sigma\beta_2 I_2^*}{\mu} - \sigma R_0^{*2} \right) \right] I_2^*}{\beta_2 (p\pi - (\gamma_2 + \mu)I_2^*)} \quad (3.2.27)$$

Que é socialmente viável, ($I_1^* > 0$), quando

$$\frac{\mu}{\sigma\beta_2}(\sigma R_0^{*2} - 1) < I_2^* < \frac{p\pi}{(\gamma_2 + \mu)} \quad (3.2.28)$$

Mas como por hipótese, $0 < \sigma < 1$ e $R_0^{*2} > 1$ é condição necessária para a existência de I_2^* , então $\sigma R_0^{*2} - 1 > 0$, e assim a expressão (3.2.28) é sempre satisfeita. Desta forma, podemos concluir que I_1^* é socialmente viável ($I_1^* > 0$) sempre que a condição (3.2.28) for satisfeita.

Analogamente ao que ocorre com os polinômios (3.2.3) e (3.2.7), os polinômios (3.2.21) e (3.2.25) possuem a forma $P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, com os coeficientes $A_1 > 0, A_2 > 0$ e $C_1 < 0, C_2 < 0$. Portanto, estes polinômios têm sempre uma única raiz positiva independente do sinal dos coeficientes B_1 e B_2 , ou seja, existe um único valor positivo I_1^* para o polinômio (3.2.21); e conseqüentemente, um único valor de I_2^* para o polinômio (3.2.25).

Portanto, o sistema (3.1.2) sempre possui um único ponto de equilíbrio não trivial, $P^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*)$, socialmente viável sempre que as condições (3.2.24), (3.2.24B) e (3.2.28) forem satisfeitas. Entretanto, como não foi possível determinar explicitamente as coordenadas deste ponto, sua estabilidade será apresentada apenas numericamente por meio de simulações no programa MATLAB 7.0. Variando-se os valores dos coeficientes de transmissão da informação (β_1 e β_2), e mantendo-se fixos os valores dos outros parâmetros (ver Tabela 2), as simulações numéricas

indicam que a matriz Jacobiana (3.2.12) não tem sempre autovalores negativos e que, portanto, o ponto de equilíbrio trivial (3.2.11) é localmente instável. Por outro lado, como sabemos que existe um único ponto de equilíbrio não trivial, concluímos que se ele existe então ele é estável. Na figura 5 (capítulo IV Resultados) procuramos descrever a dinâmica do sistema (3.1.2) para esta situação.

Desta forma, podemos estabelecer o seguinte lema:

Lema2: Se o equilíbrio não trivial existe, então ele é único e globalmente assintoticamente estável.

Com o objetivo de realizar uma investigação mais detalhada, propomos a seguir uma simplificação do modelo (3.1.1), onde as análises são feitas para a situação em que o não consideramos o contato entre os indivíduos I_2 e S_2 .

3.3 O MODELO SIMPLIFICADO

Nesta secção, propomos um modelo matemático simplificado, considerando uma situação alternativa, na qual a dinâmica da transmissão da novidade passa a ser afetada por uma consideração especial do comportamento dos indivíduos pertencentes à classe I_2 . Supomos que estes indivíduos, diferentemente dos indivíduos do grupo I_1 , não possuem habilidades de bons comunicadores e não conseguem (ou não têm interesse) em divulgar as novidades (Gladwell, 2000).

Neste contexto, os indivíduos I_2 , transmitem a inovação apenas aos indivíduos S_1 , que por serem mais receptivos têm mais facilidade para aceitarem uma nova idéia e, portanto, teoricamente não se exige muita argumentação para persuadi-los. Em termos matemáticos, desconsideramos o contato entre os indivíduos I_2 e S_2 , admitindo a taxa de contato $\beta_4 = 0$ no sistema (3.1.2).

Em contrapartida, as características das outras subpopulações e o comportamento mais e menos contumaz às novidades se mantêm em todas as outras classes. Assim, as duas possibilidades de transmissão da inovação ainda são: campanha educativa e contato direto com os indivíduos que reconhecem e aceitam a novidade de acordo com a Lei de Ação das Massas em Epidemiologia – LAME (Hethcote, 2000).

A dinâmica que representa essa situação simplificada é dada pelo diagrama de fluxo abaixo:

*Ilustração 2: Diagrama de fluxo do Modelo de Transmissão de Informação.
As setas pontilhadas indicam apenas o contato entre os indivíduos
“suscetíveis” e “infectados”*

Baseado nas suposições descritas anteriormente (secção 3.1), a dinâmica do modelo normalizado fica então descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_1}{dt} = (1-p)\pi - \lambda S_1 - \beta_1 S_1 I_1 - \beta_3 S_1 I_2 - \mu S_1 \\ \frac{dS_2}{dt} = p\pi - \lambda S_2 - \beta_2 S_2 I_1 - \mu S_2 \\ \frac{dI_1}{dt} = \lambda S_1 + \beta_1 S_1 I_1 + \beta_3 S_1 I_2 - (\gamma_1 + \mu) I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} = \lambda S_2 + \beta_2 S_2 I_1 - (\gamma_2 - \mu) I_2 \\ \frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 I_1 - \mu R_1 \\ \frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 I_2 - \mu R_2 \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

onde S_i, I_i, R_i (com $i = 1, 2$) se conservam escritos em letra maiúscula mas passam a representar, respectivamente, as proporções das populações dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, com $N = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2 = 1$.

3.4 ANÁLISE DO MODELO

O modelo (3.3.1) será analisado para as mesmas situações de transmissão da informação já propostas anteriormente; onde consideramos a campanha educacional, $\lambda \neq 0$, juntamente com a transmissão da

informação de acordo com a LAME, $\beta \neq 0$; e depois desconsideramos a campanha educacional, ou seja, fazemos $\lambda = 0$.

3.4.1 PRESENÇA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda \neq 0$)

O ponto de equilíbrio trivial do sistema (3.3.1) corresponde ao ponto onde a população está livre de qualquer rumor, ou seja, $I_1 = I_2 = 0$. Assim, igualando-se a zero as equações do sistema (3.3.1), tem-se:

$$S_1 = \frac{(1-p)\pi}{\lambda + \mu}, \quad S_2 = \frac{p\pi}{\lambda + \mu}, \quad R_1 = 0 \quad \text{e} \quad R_2 = 0. \quad (3.4.1)$$

Observamos que de forma análoga ao que ocorre no sistema (3.1.2), ao substituirmos $I_1 = I_2 = 0$ nas terceira e quarta equações do sistema (3.3.1), tem-se $S_1 = 0$ e $S_2 = 0$, o que contradiz (3.4.1).

Assim, concluímos que para a situação $\lambda \neq 0$, não existe o ponto de equilíbrio trivial e desta forma, esperamos que o sistema (3.3.1) também apresente pelo menos um equilíbrio não-trivial, que corresponde à situação na qual há propagação da nova idéia pelo rumor.

Analogamente ao que foi feito no sistema (3.1.2), para determinarmos o equilíbrio não trivial dado por, $P^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*)$, igualamos a zero as derivadas do sistema (3.3.1) e obtemos as coordenadas são definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^* = \frac{(1-p)\pi(\lambda + \beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)}{(\lambda + \beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)(\lambda + \beta_1 I_1^* + \mu) + \beta_3(\lambda + \beta_2 I_1^*)p\pi}, \\ S_2^* = \frac{p\pi}{\lambda + \beta_2 I_1^* + \mu}, \\ I_2^* = \frac{(\lambda + \beta_2 I_1^*)p\pi}{(\lambda + \beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)}, \\ R_1^* = \frac{\gamma_1 I_1^*}{\mu}, \\ R_2^* = \frac{\gamma_2(\lambda + \beta_2 I_1^*)p\pi}{(\lambda + \beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu}. \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

Como por hipótese, todos os parâmetros são positivos e $0 < p < 1$, então todas as coordenadas em (3.4.2) são socialmente viáveis, ou seja, todas as coordenadas são positivas. Observe que elas estão em função de I_1^* e que para determiná-las é necessário determinar o valor de I_1^* . Para isso, substitui-se o valor de S_1 na terceira equação do sistema (3.1.1), obtendo-se o polinômio em I_1^* ,

$$b_0 I_1^{*3} + b_1 I_1^{*2} + b_2 I_1^* + b_3 = 0, \quad (3.4.3)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\beta_1\beta_2, \\ b_1 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\beta_1(\lambda + \mu) + (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\beta_2(\lambda + \mu) + \\ \quad + \beta_2(\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu) \left[\frac{p\pi\beta_3}{(\gamma_2 + \mu)} - \frac{(1-p)\pi\beta_1}{(\gamma_1 + \mu)} \right] \\ b_2 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)(\lambda + \mu)^2 + (\gamma_1 + \mu)p\pi\beta_3\lambda - \\ \quad - (1-p)\pi(\gamma_2 + \mu)[\beta_2\lambda + \beta_1(\lambda + \mu)] - (1-p)\pi p\pi\beta_2\beta_3 \\ b_3 = -(1-p)\pi(\gamma_2 + \mu)\lambda(\lambda + \mu) - (1-p)\pi p\pi\beta_3\lambda \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

Observe de (3.4.4) que $b_0 > 0$ e $b_3 < 0$. Assim, pela regra de sinal de Descartes, o polinômio (3.4.3) pode apresentar uma, duas ou três raízes positivas.

Devido à complexidade dos demais coeficientes, as análises de existência e de estabilidade do equilíbrio não trivial do sistema (3.3.1) serão desenvolvidas apenas por meio de simulações numéricas utilizando-se o software MATLAB 7.0. Estas análises serão descritas em detalhes no capítulo (IV Resultados) onde mostramos que o ponto de equilíbrio trivial não existe e que a dinâmica do sistema (3.3.1) converge sempre para o ponto de equilíbrio não trivial que é assintoticamente estável.

3.4.2 AUSÊNCIA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda = 0$)

Nesta situação específica o sistema (3.3.1) tem o equilíbrio trivial dado por

$$P_0^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*) = \left(\frac{(1-p)\pi}{\mu}, \frac{p\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right). \quad (3.4.5)$$

Observe que as coordenadas deste ponto são as mesmas do ponto de equilíbrio trivial (3.2.11) do sistema (3.1.1.).

Analogamente, a matriz Jacobiana do sistema (3.3.1), calculada no ponto (3.4.5), é dada por

$$J_0(S_1, S_2, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \frac{-\beta_1(1-p)\pi}{\mu} & \frac{-\beta_3(1-p)\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \frac{-\beta_2 p\pi}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu} - \gamma_1 - \mu & \frac{\beta_3(1-p)\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2 p\pi}{\mu} & -(\gamma_2 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & -\mu \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.6)$$

cujos quatro autovalores são dados por $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = -\mu$, enquanto que os outros dois são determinados através do polinômio característico de segundo grau:

$$P(\Lambda) = c_0 \Lambda^2 + c_1 \Lambda + c_2 = 0, \quad (3.4.7)$$

com

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = (\gamma_1 + \mu) + (\gamma_2 + \mu) - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu} \\ c_2 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu) - \frac{\beta_1(1-p)\pi(\gamma_2 + \mu)}{\mu} - \frac{\beta_2\beta_3(1-p)\pi p\pi}{\mu^2}. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Neste caso usamos o critério de Routh-Hurwitz, cujas condições necessárias e suficientes para a estabilidade local do ponto de equilíbrio são: $c_0 = 1$, $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ (Edelstein-Keshet, 1988).

Observe de (3.4.8) que $c_0 = 1$. Além disso, $c_1 > 0$, quando

$$(\gamma_2 + \mu) + (\gamma_1 + \mu) \left[1 - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu(\gamma_1 + \mu)} \right] > 0 \quad (3.4.9)$$

enquanto, $d_2 > 0$ quando

$$(\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu) \left[1 - \frac{\beta_1(1-p)\pi}{\mu(\gamma_1 + \mu)} - \frac{\beta_2 p \pi}{\mu(\gamma_2 + \mu)} \frac{\beta_3(1-p)\pi}{\mu(\gamma_1 + \mu)} \right] > 0 \quad , \quad (3.4.10)$$

Assim, o polinômio (3.4.7) possui duas raízes negativas sempre que as equações (3.4.9) e (3.4.10) forem simultaneamente satisfeitas.

Além disso, fazendo $\beta_3 = \sigma\beta_1$, definimos

$$\begin{aligned} R_0^{**1} &= \frac{\beta_1}{\beta^c}, \quad \text{com} \quad \beta^c = \frac{(\gamma_1 + \mu)\mu^2}{(1-p)\pi\mu}; \\ R_o^{**2} &= \frac{\beta_2}{\beta^{2c}} \quad \text{com} \quad \beta^{2c} = \frac{(\gamma_2 + \mu)\mu^2}{p\pi\mu}; \\ R_o^{**3} &= \frac{\beta_3}{\beta^{3c}} = \frac{\sigma\beta_1}{\beta^{3c}} = \sigma R_0^{*1} \quad \text{com} \quad \beta^{3c} = \beta^c; \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

E pelas definições em (3.4.11), podemos escrever de forma conveniente as equações (3.4.9) e (3.4.10), de tal forma que $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ serão positivos quando

$$(\gamma_2 + \mu) + (\gamma_1 + \mu)(1 - R_0^{**1}) > 0 \quad (3.4.12)$$

$$\text{e} \quad R_0^{**} = R_0^{**1}(1 + \sigma R_0^{**2}) < 1 \quad (3.4.13)$$

Ou seja, o ponto de equilíbrio trivial será localmente assintoticamente estável se e somente se $R_0^{**} < 1$, e isso ocorre sempre que $R_0^{**1} < 1$.

Portanto, podemos concluir que sempre que $R_0^{**1} < 1$ o equilíbrio trivial será localmente assintoticamente estável e o rumor não se propagará na população, suprimindo a novidade. Em oposição, sempre que $R_0^{**1} > 1$ o rumor se espalhará e a novidade será difundida.

O ponto de equilíbrio não-trivial do sistema (3.3.1) é dado por $P^* = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*)$ e igualando a zero as equações desse sistema, obtemos as coordenadas definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^* = \frac{(1-p)\pi(\beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)}{(\beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)(\beta_1 I_1^* + \mu) + \beta_2 \sigma \beta_1 p \pi \theta (1-0,2) I_1^*}, \\ S_2^* = \frac{p\pi}{\beta_2 I_1^* + \mu}, \\ I_2^* = \frac{\beta_2 p \pi I_1^*}{(\beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)}, \\ R_1^* = \frac{\gamma_1 I_1^*}{\mu}, \\ R_2^* = \frac{\beta_2 \gamma_2 p \pi}{(\beta_2 I_1^* + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu}, \end{array} \right. \quad (3.4.14)$$

Observe que todas as coordenadas do ponto de equilíbrio não trivial, definidas em (3.4.14), estão em função de I_1^* . Assim, substituindo-se o

valor de S_1 e I_2 na terceira equação do sistema (3.3.1), obtemos valor da variável I_1^* definido pela equação,

$$d_0 I_1^{*3} + d_1 I_1^{*2} + d_2 I_1^* = 0 \quad , \quad (3.4.15)$$

onde $I_1^* = 0$ ou

$$d_0 I_1^{*2} + d_1 I_1^* + d_2 = 0, \quad (3.4.16)$$

com

$$\begin{cases} d_0 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\beta_1\beta_2, \\ d_1 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu[\beta_1 + \beta_2] + (\gamma_1 + \mu)p\pi\beta_2\sigma\beta_1 - \\ \quad - (\gamma_2 + \mu)(1-p)\pi\beta_1\beta_2 \\ d_2 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu^2 - (1-p)\pi\beta_1(\gamma_2 - \mu)\mu - (1-p)\pi p\pi\beta_2\sigma\beta_1 \end{cases} \quad (3.4.17)$$

De (3.4.11), podemos reescrever os coeficientes (3.4.17) como segue,

$$\begin{cases} d_0 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\beta_1\beta_2, \\ d_1 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu[\beta_1(l + \sigma R_0^{**2}) + \beta_2(l - R_0^{**l})], \\ d_2 = (\gamma_1 + \mu)(\gamma_2 + \mu)\mu^2(1 - R_0^{**}). \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Podemos apresentar as condições de existência do equilíbrio não trivial do sistema (3.3.1) determinando as condições onde as raízes de I_1^*

são positivas e encontramos os valores que tornam esse ponto viável para representar nosso estudo.

Através dos coeficientes descritos na equação (3.2.18), podemos observar que $d_0 > 0$, d_1 e d_2 podem ser positivos ou negativos.

Assim, como apenas as raízes positivas são interessantes ao nosso estudo, as possibilidades relevantes são:

- a) Quando $R_0^{**} > 1$; $d_2 < 0$, teremos uma raiz positiva e uma negativa (não “socialmente viável”);
- b) Quando $R_0^{**} < 1$; $d_2 > 0$ e por (3.4.13) temos $d_1 > 0$. Neste caso teremos duas raízes reais negativas distintas.
- c) Quando $R_0^{**} = 1$; $d_2 = 0$, teremos uma raiz positiva e uma nula.

Nesse contexto, estudando cada uma das raízes do polinômio, segundo sua importância para descrever o fenômeno representado pelo modelo, podemos analisar a dinâmica do sistema (3.1.1) quando $\lambda = 0$, e observamos que;

- 1) o ponto de equilíbrio trivial é localmente assintoticamente estável quando $R_0^{**} < 1$, desta forma garantimos a erradicação do rumor;
- 2) há um único equilíbrio não-trivial localmente assintoticamente estável quando o caso (a) for observado e o rumor se propaga;
- 3) há um único equilíbrio não-trivial localmente assintoticamente estável quando ocorrer a possibilidade (c) e neste caso, observamos a ocorrência da bifurcação forward. O rumor se propaga a partir de $R_0^{**} = 1$.

Portanto, existe sempre um único ponto de equilíbrio não trivial socialmente viável que é local e assintoticamente estável.

Capítulo IV

RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados numéricos utilizando-se o software MATLAB 7.0. com o objetivo de associá-los ao estudo qualitativo dos modelos matemáticos analisados no capítulo anterior.

Os resultados encontrados simulam o comportamento da dinâmica de transmissão de informações por meio de campanhas educativas e também o efeito da propagação de rumores numa população “suscetível” às novidades.

Com o objetivo de simular a análise da propagação de informações através de campanhas publicitárias educacionais e por meio de rumores, apresentamos na tabela abaixo os parâmetros utilizados para ambos os modelos: Geral (3.1.2) e Simplificado (3.3.1).

Tabela 2 Valores dos parâmetros utilizados na simulação do Modelo Geral (3.1.1) e do Modelo Simplificado (3.3.1)

Parâmetro	Valores	Significado
β_i $i = 1,2,3,4$	Variável	Coeficiente de transmissão da informação entre os indivíduos “infectados” e os “susceptíveis”
γ_1	0,125 (8 meses)	Taxa de recuperação ou de “esquecimento” entre I_1 e R_1
γ_2	0,1666 (6 meses)	Taxa de recuperação ou de “esquecimento” entre I_2 e R_2
p	0,2	Proporção de indivíduos susceptíveis que migram no sistema $0 \leq p \leq 1$
π	0,001388 (1/(60x12) meses)	Fluxo de entrada de indivíduos suscetíveis
μ	0,001388 (1/(60x12) meses)	Taxa de mortalidade natural
λ	0,000095	Taxa de transmissão da informação em massa
σ	$0 \leq \sigma \leq 1$	Eficiência da transmissão da informação

Dados hipotéticos

Todas as simulações foram feitas com base nos valores da *Tabela 2* acima descrita.

4.1 MODELO GERAL

O modelo Geral (3.1.2) descreve a situação na qual é considerado o contato direto entre todos os indivíduos “susceptíveis” e “infectados” pela inovação, em analogia a lei de ação das massas em modelos de dinâmica de doenças epidemiológicas.

O estudo foi subdividido em duas situações específicas, onde primeiramente consideramos a ocorrência de uma campanha publicitária educativa e assumimos valores diferentes de zero para o parâmetro lambda ($\lambda \neq 0$).

Posteriormente, analisamos os resultados da transmissão da informação apenas pelo contato entre os indivíduos “suscetíveis” e “infectados” pela inovação, surgindo assim o rumor e nesse caso, assumimos $\lambda = 0$.

A seguir apresentamos os resultados obtidos com as simulações numéricas utilizando-se com os valores dos parâmetros descritos na tabela 2 para estas duas situações citadas.

4.1.1 PRESENÇA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda \neq 0$)

Na figura 1, variando-se o parâmetro $\sigma = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ apresentamos o gráfico do polinômio (3.2.3), que mostra uma única raiz positiva I_1 e uma negativa, fato que corrobora a existência de um único valor positivo também para I_2 do polinômio (3.2.7).

Portanto, podemos verificar o *Lema.1* que afirma que o equilíbrio não trivial é único e globalmente assintoticamente estável.

Figura 1. Gráfico do polinômio em I_1 , com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ e $\sigma = [0;1]$.

A figura 2 apresenta a dinâmica do sistema (3.1.2) para um caso particular, tomando $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ e $\sigma = 1$, cujo ponto de equilíbrio não trivial dado por (3.2.2) é $P = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*) = (0,2436, 0,2899, 0,0028, 0,0017, 0,2552, 0,2068)$.

Figura 2. Dinâmica do sistema (3.1.2) com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ e $\sigma = 1$, com as condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$.

A figura 3 apresenta uma outra dinâmica do sistema tomando $\sigma = 0,1$, ou seja, a eficiência na transmissão da informação entre os “suscetíveis” e “infectados” assume valor 0,1.

Podemos observar que o sistema também converge para o ponto de equilíbrio não trivial, neste caso com as coordenadas $P = (S_1^*, S_2^*, I_1^*, I_2^*, R_1^*, R_2^*) = (0,3397, 0,3724, 0,0018, 0,0010, 0,1601, 0,1239)$.

Figura 3. Dinâmica do sistema (3.1.2) com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ para $\sigma = 0,1$, nas condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$.

Comparando os gráficos das Figuras 2 e 3, podemos observar a importância da comunicação por rumores, pois neste caso podemos observar que o número de “infectados” pela inovação I_1^* e I_2^* são maiores quando $\sigma = 1$.

4.1.2 AUSÊNCIA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda = 0$)

De forma análoga ao caso anterior, aqui também utilizamos os valores dos parâmetros da tabela 2 e variamos as taxas de contato entre os “suscetíveis” e “infectados” β_i com $i = 1, 2, 3, 4$. A figura 4 descreve o polinômio (3.2.21) tomando $\sigma = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$.

Este polinômio possui como raízes $I_1^* = 0$, e uma outra raiz positiva. Conseqüentemente, o polinômio (3.2.25) também possui uma única raiz positiva para I_2^* .

Figura 4. Gráfico do polinômio em I_1^* , com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ e $\sigma = [0;1]$.

Tomando os valores de $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ e $\sigma = 1$ foi possível encontrar que $R_0^{*1} = 1,8990$ e $R_0^{*2} = 0,2381$. Desta forma, observamos que as equações (3.2.18) e (3.2.19) não são simultaneamente satisfeitas, isto é, o ponto de equilíbrio trivial é instável.

Diante dessa situação é possível comprovar que se o ponto de equilíbrio trivial é instável, o equilíbrio não trivial será único e globalmente assintoticamente estável.

A figura 5 abaixo apresenta a dinâmica do sistema considerando apenas a transmissão da informação pelo contato entre os indivíduos “suscetíveis” e “infectados”, tomando $\sigma = 1$.

Podemos observar que o sistema também converge para o ponto de equilíbrio não trivial, neste caso com as coordenadas $(S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2) = (0,2639, 0,3132, 0,0026, 0,0015, 0,2336, 0,1852)$.

Figura 5. Dinâmica do sistema (3.1.2) com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ para $\sigma = 1$, nas condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$.

4.2 MODELO SIMPLIFICADO

Apresentamos a seguir as simulações referentes ao modelo (3.3.1) para as mesmas situações de transmissão de informação. Consideramos a presença de uma campanha publicitária educacional e posteriormente avaliamos o comportamento do modelo na ausência desta comunicação em massa.

Utilizamos os valores dos parâmetros descritos na Tabela 2 para os dois casos em estudo e apresentamos a seguir os resultados obtidos pelas simulações.

De forma análoga ao padrão apresentado neste capítulo todas as figuras foram construídas considerando a variação das taxas de contato entre os “suscetíveis” e “infectados”.

4.2.1 PRESENÇA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda \neq 0$)

Neste caso também verificamos que para o sistema (3.3.1) o ponto de equilíbrio trivial não existe e a Figura 6, abaixo, mostra um único equilíbrio não trivial.

Podemos observar que o polinômio (3.4.3) apresenta neste caso, uma

única raiz positiva para I_1^* .

Figura 6. Gráfico do polinômio I_1^* , com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$ e $\sigma = 1$.

A figura 7 descreve a dinâmica do modelo (3.3.1) convergindo sempre para um ponto de equilíbrio não trivial $P^* = (0,2436, 0,2899, 0,0028, 0,0017, 0,2552, 0,2068)$ assintoticamente estável, fato que corrobora com as considerações feitas por meio da Regra de Sinais de Descartes sobre os coeficientes (3.4.4) do polinômio (3.4.3).

Figura 7. Dinâmica do sistema (3.3.1) com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$, $\beta_4 = \sigma\beta_2$ para $\sigma = 1$, nas condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$.

4.2.2 AUSÊNCIA DE CAMPANHA EDUCACIONAL ($\lambda = 0$)

Podemos observar pela Figura 8 que o polinômio (3.4.16) possui uma raiz nula e uma única raiz positiva que é um valor plausível para descrever o a transmissão de informações por rumores.

Figura 8. Gráfico do polinômio em I_1^* , com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$; $\beta_3 = \sigma\beta_1$ e $\sigma = [0;1]$.

A figura 9 apresenta o fenômeno da “bifurcação forward” que corrobora com a afirmação que o sistema (3.3.1.) possui um único equilíbrio não trivial.

Relacionando esse fenômeno aos valores R_0^{**} , podemos dizer que no ponto onde ocorre a bifurcação temos $R_0^{**} = 1$. Quando $R_0^{**} < 1$, o rumor não se propaga na população, ou seja temos o equilíbrio trivial localmente assintoticamente estável.

Quando $R_0^{**} > 1$, observamos que existe um único equilíbrio não trivial estável. Neste caso o rumor se propaga na população e a novidade será difundida.

Figura 9. Bifurcação forward com parâmetros $\beta_2 = 0,2$ e $\beta_3 = \sigma\beta_1$, para $\sigma = 1$, com as condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$

A figura 10 apresenta a dinâmica do modelo (3.3.1) convergindo para um único ponto de equilíbrio não trivial $P^* = (0,1148, 0,3104, 0,0042, 0,0016, 0,3826, 0,1865)$ assintoticamente estável, confirmando as considerações feitas sobre os coeficientes (3.4.18) do polinômio (3.4.16).

Figura 10. Dinâmica do sistema (3.3.1) com parâmetros $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,2$ e $\beta_3 = \sigma\beta_1$ para $\sigma = 1$, nas condições iniciais $(0,3; 0,25; 0,2; 0,05; 0,1; 0,1)$

Capítulo V

DISCUSSÃO

A transmissão de idéias é um fenômeno que há muito estimula o interesse de pesquisadores e tem sido objeto de estudo em diversas áreas da cultura humana (Massad, 2006; Dickinson&Pearce, 2003; Gladwell, 2000; Goodenough, 1995; Heylighen, 1995; Strang,1991; Daley&Kendall, 1965; Rapoport, 1954)

Quando citamos o termo “idéia”, nos referimos geralmente a algum conceito que pode ser transmitido de pessoa para pessoa. Ele pode se referir à determinada tecnologia cujo escopo exige esforço e aprendizagem para ser compreendida, mas também pode ser uma parte mais instável de um conjunto de informações, transmitida de forma coloquial ou escrita (Bettencourt et al., 2005; Heyes, 1996; Glueck&Klimov, 1995;).

A difusão de idéias também pode ocorrer por meio de processos mais abrangentes, que vão além da comunicação interpessoal e atingem um número maior de pessoas simultaneamente. As campanhas publicitárias são

exemplos deste tipo de comunicação, pois são criadas para atingir um contingente maior de indivíduos e, em geral, há uma tendência a acreditar que esse tipo de comunicação que atinge um número maior de pessoas é mais eficaz do que aquela feita de forma interpessoal (Gladwell, 2000; Peterson, 1951).

Contudo, a avaliação da eficácia da comunicação é um processo elaborado e está além do conceito intuitivo de quantidade. Este fato tem incentivado estudos de modelos matemáticos que investigam os processos de propagação de idéias, principalmente aqueles que avaliam e comparam a eficácia entre a comunicação em massa e a interpessoal (Kosfeld, 2005; Bettencourt et al., 2005; Doods&Watts, 2004; Dickinson & Pearce, 2003; Rogers, 1995; Peterson, 1951).

Neste contexto, apresentamos um modelo matemático que, por meio da analogia entre o espalhamento de idéias e doenças infecciosas, visa auxiliar na avaliação de campanhas educativas comparando-as com a propagação de idéias por rumores.

Ao avaliarmos o Modelo Geral (3.1.2) na presença de uma campanha educativa, observamos que a propagação da informação ocorre conjuntamente com o rumor.

Todavia, ao compararmos o comportamento da dinâmica do modelo pelos gráficos das Figuras 2 e 3 (cap. IV Resultados), observamos que o número de pessoas “infectadas” pela inovação (I_1 e I_2) aumenta quanto maior for a eficiência da transmissão da informação pelo rumor.

Neste caso é possível concluir que o rumor é capaz de melhorar a eficácia da transmissão da inovação, mesmo que ele não seja necessário para sua existência. Este comportamento pode ser observado em situações onde os indivíduos “suscetíveis” são submetidos às duas formas de comunicação simultaneamente.

Em 1966, Coleman et al. publicaram um estudo realizado entre médicos de quatro comunidades do estado americano de Illinois, sobre a difusão da utilização de tetraciclina entre seus pacientes. Eles observaram que os médicos que tiveram acesso a mais informação por artigos médicos também foram mais influenciados pelo contato interpessoal.

Este fato indica que quando há as duas formas de transmissão da informação as eficácias se potencializam simultaneamente.

Em contrapartida, ao estudarmos a situação da transmissão da informação na ausência de campanha educacional, observamos que para haver a propagação permanente da novidade é necessário que o contato entre os indivíduos “susceptíveis” e “infectados” ocorra e assim, a novidade permanece se espalhando na população por meio de um rumor. Pelo gráfico da Figura 5 (cap. IV Resultados) é possível observar que pode haver “surto” transitórios de propagação da informação, gerando oscilações amortecidas progressivamente até a sua estabilização.

No modelo Simplificado (3.3.1) tentamos agregar uma situação especial de transmissão de informação, onde os indivíduos I_2 transmitem a inovação apenas aos indivíduos S_1 , que possuem a característica de serem

mais receptivos a novas idéias e, portanto, necessitam de menos argumentação para se convencer.

A questão que discute os contatos interpessoais que objetivam convencer sobre alguma idéia é frequentemente estudada em Teoria de Marketing e resume um conceito importante divulgado nas estratégias de campanhas publicitárias: quanto mais próximos uma idéia ou produto estiverem de um “Comunicador”, mais poder e oportunidade eles terão para serem divulgados, pois estes indivíduos possuem a habilidade de gerar “epidemias” transmitidas oralmente (Gladwell, 2000; Price et al.,1995).

Análogo à situação estudada anteriormente observamos que no modelo (3.1.1), na presença de campanha educativa a transmissão da informação também ocorre independentemente da presença do rumor e para o caso em que desconsideramos a campanha educacional a transmissão da informação é possível apenas com a presença do rumor.

Neste caso, o gráfico da Figura 9 (cap. IV Resultados) mostra a ocorrência do fenômeno da bifurcação forward. Assim, para valores do número de reprodutibilidade basal abaixo de um ($R_0^{**} < 1$), dizemos que não há transmissão da informação, pois o rumor não se propaga na população. Em contrapartida, se o número de reprodutibilidade basal for acima desse valor ($R_0^{**} > 1$), a nova idéia será difundida na população pelo rumor.

O valor do R_0 é um parâmetro de importância significativa tanto para modelos de propagação de doenças quanto os de contágio social.

Em um estudo sobre a difusão da utilização do diagrama de Feynman entre comunidades de físicos teóricos dos Estados Unidos, Japão e extinta

União Soviética, observou-se a importância do estudo dos valores de R_0 para determinar, entre outras questões, a velocidade de aceitação e utilização do método entre os grupos investigados (Bettencourt et al., 2005).

Finalmente, comparando a dinâmica do modelo (3.3.1) e as coordenadas dos pontos de equilíbrio não trivial para os dois casos estudados, observamos que os valores que representam as quantidades de indivíduos “infectados” pela inovação I_1 são maiores na ausência de campanha educativa. Este fato mostra que os rumores são elementos importantes na dinâmica de transmissão de informações.

As ciências biológicas e sociais têm mostrado crescente interesse nos estudos sobre os processos de contágio que podem ser manifestados em doenças infecciosas, vírus de computador, difusão de inovações, revoltas políticas e disseminação de doutrinas religiosas; entre outros.

Assim, ao formularmos um modelo matemático determinístico compartimental procuramos descrever a semelhança existente entre o espalhamento de idéias e de doenças infecciosas, de forma análoga aos estudos dos modelos do tipo SIR utilizados em epidemiologia matemática, que consideram a remoção permanente de indivíduos infectados.

Podemos observar que enquanto o fenômeno de recuperação pode ser menos provável em agentes de contágio biológico, no caso de modelos de contágio social esse fato pode ocorrer. Um exemplo é o caso de “fumantes sociais”, onde um indivíduo pode parar e iniciar novamente o hábito de fumar (Doods & Watts, 2004).

A proposta de formular um modelo matemático para avaliar campanhas educativas pode representar uma ferramenta de importância significativa para as autoridades de saúde pública.

Podemos observar que o investimento em campanhas publicitárias educativas para a divulgação da informação em massa como rádio, televisão e jornais, entre outros, são importantes para divulgar e manter uma nova idéia numa população.

Porém, a propagação da informação pelos rumores é importante para aumentar a eficácia da transmissão da inovação, ou seja, o rumor pode contribuir para “infectar” mais pessoas e ainda, provoca o efeito de manter o assunto em discussão por mais tempo.

Assim, os recursos financeiros destinados ao investimento em campanhas educativas devem ser aplicados em campanhas publicitárias, mas é imprescindível o investimento sistemático na formação de grupos de pessoas que possam agir como multiplicadores da informação.

O modelo matemático formulado neste trabalho pode ser facilmente adaptado para outras situações de contato interpessoal e essa característica o torna um instrumento de fácil utilização para auxiliar na tomada de decisões em relação às campanhas educativas.

Acreditamos que este tipo de estudo tem importância significativa para a pesquisa científica em geral e estamos investigando a possibilidade de utilização de nosso estudo teórico em dados conhecidos, ao qual testaremos o modelo matemático proposto e analisaremos a eficiência de

sua resposta em termos de coerência com os resultados conhecidos historicamente.

Capítulo VI

CONCLUSÃO

Apresentamos um modelo matemático que, por meio da analogia entre o espalhamento de idéias e doenças infecciosas, pode auxiliar na avaliação de campanhas educativas.

Na formulação do modelo matemático determinístico compartimental foi possível descrever a semelhança existente entre o espalhamento de idéias e de doenças infecciosas e determinamos as soluções analíticas do sistema de equações diferenciais ordinárias apresentado.

Analisamos a dinâmica do espalhamento de idéias numa população por meio das simulações numéricas e conseguimos interpretar as implicações desses resultados, associando-os a transmissão de informações por campanhas educativas e também por rumores.

Observamos que os rumores são elementos que intensificam a transmissão da informação e desta forma podem contribuir para melhorar a eficácia na propagação de idéias numa população.

O modelo matemático formulado neste trabalho pode ser adaptado e novos estudos podem avaliar sua utilização como ferramenta para auxiliar na criação, divulgação avaliação de campanhas educacionais.

Capítulo VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander ME, Moghadas SM. Periodicity in an epidemic model with generalized non-linear incidence. *Math Bioscience*.2004;189: 75-96.

Allport GW, Postman LJ. The psychology of rumour. New York: Henry Holt, 1947. p. 135-158.

Almeida L.M. Heterogeneidades e intensidade de transmissão da infecção pelo vírus da hepatite A no município de Duque de Caxias, Rio de Janeiro, Brasil. São Paulo, 2002. Tese (Doutoramento) – USP – Faculdade de Medicina – Departamento de Patologia.

Amaku M. Estudo de parâmetros epidemiológicos através de modelamento matemático: aspectos estacionários, espaciais e temporais. São Paulo,

2001. Tese (Doutoramento) – USP- Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.

Anderson RM, May RM. *Infectious diseases of humans: Dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press;1991.

Aris, R . **Mathematical modelling techniques**. New York, University of Minnesota, Dover Publications, 1980.

Bailey, N.T.J. *The mathematical theory of infectious diseases*. London: Charls Griffin & Company ltd, 1975.

Baker GL, M Gollub,J.P. *Chaotic dynamics – an introduction*. New York: Cambridge University Press; 1990.

Banerjee, AV. A simple model of herd behavior. *Quarterly Journal of Economics*. 1992; 107(3): 797-817.

Bender, EA. *An introduction to mathematical modeling*. New York: Dover Publications, Inc. Mineola; 2000.

Best M L,1997. Models for Interacting Populations of Memes: Competition and Niche Behavior. *Journal of Memetics - Evolutionary Models of Information Transmission*. from http://jom-emit.cfpm.org/1997/vol1/best_ml.html

Bettencourt, L.M.A., Cintrón-Arias,A., Kaiser,, D.I.,Castillo-Chávez, C.,2005.The power of a goodidea: quantitative modeling of the spread of ideas from epidemiological models. *Physica A: Stat. Mech. and its Applic.*1-24 (on line 18 october 2005)

Brauer F, Castillo-Chavez C. *Mathematical models in population biology and epidemiology. Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag. New York.2001.p.40-56

Burattini MN. Contribuição para o estudo da dinâmica da transmissão da malária a partir de inquérito soropidemiológico transversal. Apresentação de um novo modelo de análise matemática para estimar índices malariométricos, 1989. (Tese De Doutorado Apresentada À Escola Paulista De Medicina - Disciplina De Doenças Infecciosas E Parasitárias).

Buss, LW. *The Evolution Of Individuality*. Princeton, Nj: Princeton University Press; 1987.

Coleman JS, Katz E & Menzel H. *Medical innovation: A diffusion study*. New York: Bobbs-Merrill; 1966.

Coutinho, FAB. A matemática das Epidemias. In: Massad E, Menezes RX, Silveira PSP, Ortega NRS. *Métodos quantitativos em medicina*. São Paulo: Manole, 2004; 3:55-74.

Cullen, B. Parasite Ecology and The Evolution Of Religion In: Heylighen F, editor. *The Evolution Of Complexity*. Dordrecht: Kluwer Academic; 1998.

Daley DJ, Kendall DG. Stochastic rumours. *J. Inst. Mathematic Applic.* 1965; 1: 42-55.

Dawkins R. *The selfish gene*. New edition. New York -Oxford University Press; 1989

Dawkins R. Viruses of the mind. In: Bo Dalhborn, editor. *Dennett and His Critics: Demystifying Mind*. Cambridge, Mass.: Blackwell; 1993a

Dawkins R. Is religion just a disease? *The Daily Telegraph*, Wednesday December (1993b) 15, p. 18.

De Jong MCM, Diekmann O, Heesterbeek H. How does transmission of infection depend on population size? In: Mollison D, editor. *Epidemic Models: Their Structure and Relation to data*. Cambridge: Cambridge University Presss, 1995. p. 84-94.

Dickinson RE, Pearce CEM. Rumours, epidemics, and processes of mass action: synthesis and analysis. *Mathematical and Computer Modelling*. 2003; 38:1157-1167.

Diekmann O, Heesterbeek JAP. *Mathematical epidemiology of infectious diseases. Model building, analysis and interpretation. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology.* Chichester:John Wiley & Sons, Ltd; 2000.

Doods, P.S., Watts,D.J., 2004. A generalized model of social and biological contagion. *J. Theor. Biol.* 232, 587-604.

Dunbar, R.I.M. Neocortex size as a constraint on group size in primates. *Journal of Human Evolution.* 1992, 20:469-93.

Edelstein-Keshet L. *Mathematical models in biology.* Random House, New York, New York, USA;1988.

Gladwell M. The tipping point – How little things can make a big difference. Little Brown editor.2000. ([ISBN 0316316962](#))

Glueck R & Klimov A. Metasystem Transitions in Computer Science and Mathematics (rtf format). *World Futures: The Journal of General Evolution.*1995; 45: 213.

Goodenough, OR. Mind viruses: culture, evolution and the puzzle of altruism. *Social Science Information.* 1995; 34:287-320.

Hadeler KP, Castillo-Chavez C. A core group model for disease transmission. . *Mathematical Biosciences*.1995; 128:41.

Hadeler KP, Van Den Driessche P.. Backward Bifurcation in Epidemic Control. *Mathematical Biosciences*. 1997; 146:15-35.

Hale, JK, Koçak H. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, 1991.

Hethcote HW. The mathematics in infectious diseases. *SIAM Rev*. 2000; 42(4): 599-653.

Heyes, C M. Genuine imitation? In: Heyes CM & Galef BG, editores. *Social Learning in Animals: the Roots of Culture*. London: Academic Press;1996.p. 371-390.

Heyes, C M. Social learning in animals: categories and mechanisms. *Biological Reviews*.1994; 69:207-231.

Heylighen F. & Campbell DT. Selection of organization at the social level: obstacles and facilitators of metasystem transitions. *World Futures: The Journal Of General Evolution*. 1995; 45:181-212.

Heylighen F. (Meta)systems as constraints on variation: a classification and natural history of metasystem transitions. *World Futures: the Journal of General Evolution*. 1995; 45: 59-85.

Heylighen F. Selfish memes and the evolution of cooperation. *Journal Of Ideas*. 1992; 2(4): 77-84.

Heylighen F & Campbell DT. Selection of organization at the social level: obstacles and facilitators of Metasystem transitions. *World Futures: The Journal Of General Evolution*. 1995; 45:181-212.

Heylighen F, Joslyn C, Turchin V. The history of evolution. *Principia Cybernetica Web* – nov 16, 1994 (modified). From <http://pespmc1.vub.ac.be/> (pesquisa em maio de 2004).

Heylighen F, Joslyn C. The origins of life. *Principia Cybernetica Web*- Nov 16, 1994 (modified). From <http://pespmc1.vub.ac.be/ORILIFE.html> (pesquisa em abril 2004).

Holland JH, Holyoak KJ, Nisbett RE & Thagard PR. *Induction: Processes Of Inference, Learning And Discovery*. Massachusetts: Mit Press;1986

Kauffman SA. *Origins of order: self-organization and selection in evolution*. Oxford: Oxford University Press. 1992.

Kelling, G.L.; Coles,C.M. *Fixing Broken windows*. New York: Touchstone, 1996. p. 20.

Koch R. *The 80/20 Principle: The Art of Achieving More with Less*. New York:Bantam. - Ed. brasileira: *O princípio 80/20: O segredo de se realizar mais com menos*. Rio de Janeiro: Rocco, 2000.

Kosfeld M. Rumours and markets. *Journal of Mathematical Economics*. 2005;41 646-664.

Lopez LF, Coutinho FAB, Burattini MN, Massad E. Threshold conditions for infection persistence in complex host-vectors interactions. *C.R.Biologies*. 2002; 325:1073-1084.

Lumsden CJ, Wilson E O. *Genes, Mind, and Culture: The Coevolutionary Process*. Cambridge: Harvard Univ. Press, MA. 1981.

Lynch A. *Thought Contagion: How Belief Spreads Through Society: The New Science of Memes*. NewYork: BasicBooks; 1996. From <http://www.mcs.net/~aaron/thoughtcontagion.html>

Massad E. Modelagem In: Forattini OP. *Epidemiologia Geral*. 2.ed. São Paulo: Artes Médicas, 1996. p. 143-166.

Massad E, Menezes RX, Silveira PSP, Ortega NRS. Métodos quantitativos em medicina. 1ª. Edição. Barueri: Editora Manole Ltda. 2004. 1: 4-23.

Massad E, Menezes RX, Silveira PSP, Ortega NRS. Métodos quantitativos em medicina. 1ª. Edição. Barueri: Editora Manole Ltda. 2004. 2:25-53.

Massad E, Rocha AF, Lopez LF. Modeling the spread of *memes*: How units of knowledge are transferred from brain to brain. *Journal of Information Science*- submitted. 2006.

Mettler LE, Gregg TG & Schaffer HE .*Population Genetics and Evolution*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall. 1988.

Moghadas SM. Modelling the effect of imperfect vaccines on disease epidemiology. *Disc. Cont. Dynamical Systems*. 2004. – B-4,4,Nov-999-1012.

Mullen P B. Modern Legend and Rumor Theory. *Journal of the Folklore Institute*. 1972;9:2-3, 95-109.

Murray, J.D. *Mathematical Biology* (2nd ed.). Springer Verlag, Berlin (1993).

Noymer A. The transmission and persistence of “urban legends”: sociological application of age-structured epidemic models. *Working paper*. 2001; *contact: Andrew@demog.berkeley.edu*

Pearce CEM. The exact solution of the general stochastic rumour. *Mathematical and Computer Modelling*. 2000; 31:289-298.

Peterson W, Gist NP. Rumor and Public Opinion. *American Journal of Sociology*. 1951; 57:159-167.

Price, L.L.;Feick, F.; Guskey, Everyday market helping behavior.*Journal of Public Policy and Marketing*.1995; 14(2): 255-66.

Raimundo, S.M. and Yang, H.M. A mathematical model for exogenous reinfection and control of Tuberculosis transmission. *Mathematical Population Studies*, 2006. (ISSN 0889-8480)

Raimundo SM, Yang HM.Tuberculose: questões sobre reinfecção exógena e reativação endógena. XXVII CNMAC, Porto Alegre, setembro, 2004, p 54.

Raimundo SM, Engel AB, Yang HM, Bassanezi RC. An approach to estimating the transmission coefficients for AIDS and for Tuberculosis using mathematical models.*Systems Analysis Modelling Simulation*. 2003; 43(4):423-442.

Raimundo SM, Yang HM. The effects of drugs treatment, birth rate and reproductive age on the vertical transmission of HIV. Mathematical Modelling & Computing in Biology and Medicine. 5th ESMTB Conference 2002 –

Milano, Italy, MIRIAM (the Milan Research Centre for Applied and Industrial Mathematics), Società Editrice Esculapio, projeto Leonardo, p 470-477.

Rapoport A. Spread of information through a population with sociostructural bias. *Bulletin of Mathematical Biophysics*. 1954;16:75-81.

Ryan B, Gross N. The Diffusion of Hybrid seed corn in two Iowa communities. *Rural Sociology*; 1943, vol.8. p.15-24.

Ryan B & Gross N. *Acceptance and diffusion of hybrid corn seed in two Iowa communities*. Ames: IA: Iowa Agricultural Experiment Station, Research Bulletin 372, 1950.

Sperber D. *The future of 'meme': retirement or redefinition?* Paper presented at King's College Research Centre Forum, Do Memes Account for Culture?, Cambridge:University of Cambridge, UK. 1999.

Sperry R. Mind, brain, and Humanist Values. In: Platt JR, editor. *New Views of the Nature of Man*. Chicago: University of Chicago Press;1965.

Rogers, E. *Diffusion of innovation*. 4th. Edition. New York , Free Press;1995.

Torquato G. Comunicação em Tempos de Crise: A psicologia do rumor.
From http://www.politicavoz.com.br/marketingpolitico/artigo_07.asp-
(pesquisa em outubro, 2005).

Turchin V. *The Phenomenon Of Science. A Cybernetic Approach To Human Evolution*. New York: Columbia University Press. 1977.

Wikipédia - *The free encyclopedia* – disponível em <http://www.wikipedia.org/> (pesquisa em março 2006).

Wilson EO. *Consilience: The unity of knowledge*. New York: Knopf. 1998. p.328.

Yando RVS & Zigler E. *Imitation: A Developmental Perspective*. Hillsdale,NJ: Erlbaum, 1978.

Yang HM. *Epidemiologia matemática: estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta*. Campinas:Editora Unicamp, 2001.