Universidade de São Paulo
Faculdade de Educação

Suemilton Nunes Gervázio

A heurística matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem

Versão corrigida

São Paulo,
Setembro de 2019

Suemilton Nunes Gervázio

A heurística matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em Educação.
Área de Concentração: Educação Científica, Matemática e Tecnológica
Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

São Paulo,
Setembro de 2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação da Publicação
Ficha elaborada pelo Sistema de Geração Automática a partir de dados fornecidos pelo(a) autor(a)
Bibliotecária da FE/USP: Nicolly Soares Leite - CRB-8/8204

G386h

Gervázio, Suemilton Nunes
Heurística matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem / Suemilton Nunes Gervázio; orientador Oscar João Abdounur. -- São Paulo, 2019.
157 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação Educação Científica, Matemática e Tecnológica) -- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Ensino de matemática. 2. Heurística matemática. 3. Métodos de ensino. 4. Aprendizagem matemática. 5. Resolução de problemas. I. Abdounur, Oscar João , orient. II. Título.

GERVÁZIO, Suemilton Nunes. A heurística matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem. Tese apresentada à banca examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo como exigência parcial para a obtencão do título de DOUTOR em educação.

Aprovado em: 25/06/2019
Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Oscar João Abdounur - IME - USP (Orientador)

Profª. Drª. Abigail Fregni Lins - UEPB

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio - UNIAN

Profª. Drª Giseli Novelli - FICS

Prof. Dr. Gean Pierre da Silva Campos - UFES

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por ter me dado forças, coragem, fé, confiança, discernimento e por ter colocado em meu caminho pessoas essenciais para o meu fortalecimento, encorajando-me a seguir em busca dos meus objetivos.

- A minha mãe, Maria José Gervázio, por ter me concedido a vida, ter sempre me dado forças, mesmo quando tudo parecia estar perdido e, apesar da distância, fez-se presente por meio de orações.

- Ao meu orientador Oscar João Abdounur, por ter me ajudado durante todo o curso, motivando minha formação profissional, contribuindo exponencialmente com meus conhecimentos e além de disso, grande amigo. Sem dúvida foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

- Aos meus irmãos, pelo carinho e apoio durante momentos difícieis e alegres.

- Aos meus familiares em geral, por ter me proporcionado momentos de lazer e descontração.

- A minha esposa, Valéria Santos, por estar ao meu lado durante quase todo o curso, me poporcionando momentos inesquecíveis.

"Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade."

D. C. M. E. B.

DEDICATÓRIA

A Deus, é sua toda honra e glória. Só tenho a lhe agradecer por tudo que tem concretizado em minha vida.

RESUMO

GERVÁZIO, S. N. **A heurística matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem**. 2019. 251 f. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Esta tese de doutorado consiste de uma pesquisa bibliográfica e de campo, cujo objetivo é analisar e discutir a heurística matemática como sendo uma potencializadora dos processos de ensino-aprendizagem nessa área do conhecimento. Para uma melhor compreensão desse potencial, apresentamos inicialmente os fundamentos da heurística matemática e o que dissertam importantes pesquisadores a respeito do tema. Em seguida, debatemos sobre a relação entre a heurística e o desenvolvimento do conhecimento científico, realçando a necessidade de explorá-la nas aulas dessa disciplina. Posteriormente, analisamos se ela é passível de ser vista como um processo capaz de reduzir o desinteresse e aumentar o aprendizado dos estudantes nas aulas de Matemática. Finalmente, no último capítulo, discutimos a importância de conceber a heurística como uma metodologia de ensino eficiente, que quando incorporada ao processo educacional ameniza as problemáticas existentes nessa área do conhecimento.

Palavras - Chave: Ensino de matemática; Heurística matemática; Métodos de ensino; Aprendizagem matemática; Resolução de problemas.

ABSTRACT

GERVÁZIO, S. N. **The mathematical heuristic: an allied to the processes of teaching and learning**. 2019. 251 f. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

This doctoral thesis consists of a bibliographical and field research, which aim to analyze and to discuss the mathematical heuristic as being a potentiator of the teaching-learning processes in this area of knowledge. For a better understanding of its potential, we initially present the fundamentals of mathematical heuristics and what important scientists say about the subject. Next, we discuss the relationship between heuristics and the development of scientific knowledge, emphasizing the need to explore it in the classes of this subject. Then we analyze whether it can be seen as a process capable of reducing disinterest and increasing students learning in Mathematics classes. Finally, in the last chapter, we discuss the importance of conceiving heuristics as an efficient teaching methodology, which when incorporated into the educational process softens the existing problems in this area of knowledge.

Keywords: Mathematics teaching; Mathematical heuristics; Teaching methods; Mathematical learning; Problem solving.

SUMÁRIO

Introdução **2**

1 A heurística ao longo do tempo **9**

1.1 Arquimedes: o método e o surgimento de procedimentos análogos à heurística matemática 11

1.2 Pappus: as contribuições heurísticas que culminaram na famosa Coleção Matemática 15

1.3 Descartes: regras para a solução heurística de problemas 17

1.4 Polya: beleza e arte da heurística na resolução de problemas matemáticos 19

1.5 Lakatos: a heurística como metodologia de ensino e pesquisa 23

1.6 Bachelard: a heurística na constituição do espírito científico 25

1.7 Puchkin: a heurística como precursora do pensamento criador 27

1.8 Bazarian: o papel da intuição heurística na resolução de problemas . 28

2 Heurística: um recurso precursor da criatividade e um aliado no desenvolvimento do conhecimento matemático **31**

2.1 A heurística matemática: resistências em inseri-la no meio acadêmico 32

2.2 Criatividade e heurística matemática 35

2.3 Criatividade e descoberta científica 39

3 A percepção matemática dos alunos e professores do ensino básico: quais seriam os principais agravantes do insucesso no processo de ensino/aprendizagem? **42**

3.1 O insucesso dos alunos na aprendizagem matemática 44

3.2 O que tem levado um grande número de alunos do ensino básico não considerarem a Matemática uma disciplina atrativa? 47
3.3 Resultados da pesquisa de campo a respeito do que supõem os alunos sobre suas aulas de Matemática 55
3.4 Resultados da pesquisa de campo sobre o que os professores acreditam a respeito das relações conflituosas entre alguns alunos e a aprendizagem matemática 68

4 A heurística como metodologia de ensino: questões teóricas e práticas 78
4.1 A necessidade de reconfiguração da dinâmica das aulas de Matemática 78
4.2 A importância de inserir a Heurística Matemática no processo educacional 82
4.3 A heurística na resolução de problemas: uma metodologia emergente 87
4.4 Resultados da pesquisa de campo referente à aplicação em sala de aula da resolução de problemas apresentados por George Polya: uma análise do método heurístico 92
4.4.1 Resultados da aplicação feita na turma do 1° ano do Ensino Médio 94
4.4.2 Resultados da intervenção feita com a turma do 2° ano do Ensino Médio 100
4.4.3 Resultados da intervenção feita com a turma do 3° ano do Ensino Médio 105
4.5 A Heurística Matemática: uma ferramenta que pode auxiliar a reduzir a rejeição dos alunos a esse componente curricular 107

5 Discussão dos resultados 112

Conclusão 116

Referências Bibliográficas 118

Apêndice 126

A Questionários usados na primeira fase da pesquisa de campo 126
A.1 Questionário para os alunos 126
A.2 Questionário para os professores 128

B Problemas usados na segunda fase da pesquisa de campo 131

C Questionário final usado na terceira fase da pesquisa de campo 134
C.1 Respostas apresentadas por alguns alunos no questionário final 134

LISTA DE FIGURAS

3.1 Gráfico das respostas obtidas na questão 1 aplicada aos alunos 56
3.2 Gráfico das respostas obtidas na questão 2 aplicada aos alunos 57
3.3 Gráfico com dados comparativos entre o gostar de matemática dos alunos do ensino básico 59
3.4 Gráfico das respostas obtidas na questão 3 aplicada aos alunos 60
3.5 Gráfico das respostas obtidas na questão 4 aplicada aos alunos 61
3.6 Gráfico das respostas obtidas na questão 5 aplicada aos alunos 62
3.7 Gráfico das respostas obtidas na questão 6 aplicada aos alunos 63
3.8 Gráfico das respostas obtidas na questão 7 aplicada aos alunos 63
3.9 Gráfico das respostas obtidas na questão 8 aplicada aos alunos 64
3.10 Gráfico das respostas obtidas na questão 9 aplicada aos alunos 65
3.11 Gráfico das respostas obtidas na questão 10 aplicada aos alunos . . . 66
3.12 Gráfico das respostas obtidas na questão 11 aplicada aos alunos . . . 67
3.13 Gráfico das respostas obtidas na questão 12 aplicada aos alunos . . . 68
3.14 Gráfico das respostas obtidas na questão 1 aplicada aos professores . 69
3.15 Gráfico das respostas obtidas na questão 2 aplicada aos professores . 70
3.16 Gráfico das respostas obtidas na questão 3 aplicada aos professores . 71
3.17 Gráfico das respostas obtidas na questão 4 aplicada aos professores . 72
3.18 Gráfico das respostas obtidas na questão 5 aplicada aos professores . 73
3.19 Gráfico das respostas obtidas na questão 6 aplicada aos professores . 74
3.20 Gráfico das respostas obtidas na questão 7 aplicada aos professores . 75
3.21 Gráfico das respostas obtidas na questão 8 aplicada aos professores . 76

4.1 Resposta apresentada por um aluno do 1° Médio para o primeiro problema 97

4.2 Resposta apresentada para o primeiro problema por um aluno do 1° Médio 97
4.3 Dedução da fórmula do x do vértice de uma parábola feita por um aluno do 1° Médio. 98
4.4 Dedução da fórmula do y do vértice de uma parábola feita por um aluno do 1° Médio. 99
4.5 Resposta apresentada por um aluno do 2° Médio para o primeiro problema 102
4.6 Resposta feita por um aluno do 2° Médio para o primeiro problema . 103
4.7 Dedução da fórmula do termo geral de uma P.A feita por um aluno do 2° Médio. 104
4.8 Dedução da fórmula do termo geral de uma P.A apresentada por um aluno do 2° Médio. 104
4.9 Resposta apresentada por um aluno do 3° Médio para o primeiro problema 106
4.10 Resposta execultada por um aluno do 3° Médio para o primeiro problema 106

INTRODUÇÃO

É consenso entre os historiadores que a Matemática é uma das ciências mais antigas. Há séculos, o conhecimento matemático tem sido desenvolvido por diferentes civilizações, mesmo que com perspectivas divergentes e trilhando caminhos distintos. Entretanto, os aspectos que englobam processos de como conduzir ao aprimoramento da assimilação desta ciência pelas pessoas, isto é, o ensino e a aprendizagem da matemática, entraram apenas recentemente na pauta das preocupações da sociedade acadêmica.

A partir dessas preocupações surgiu a Educação Matemática, que como área do conhecimento, teve seus primeiros passos firmes somente no final do século XIX, por intermédio das discussões de matemáticos e educadores que objetivavam dar acessibilidade, a ciência matemática, para um número maior de pessoas.

Apesar dela ter surgido há pouco tempo, podemos inferir, com base em leituras nossas e das obras de D'Ambrósio *et al.* (2004) e Kilpatrick (1998), que questionamentos e indagações a respeito sobre como construímos o conhecimento matemático (que está ligado ao ensino e a aprendizagem dessa disciplina), são temas relativamente antigos e que por sinal, podem ter servido de guia no desenvolvimento da Matemática.

Fazendo uma releitura do que Kilpatrick (1998, p. 01) expõe, podemos indagar que as investigações em Educação Matemática tiveram sua maior expansão durante os dois últimos séculos, bem provavelmente devido às preocupações de matemáticos e educadores que procuravam entender como se davam os processos educacionais da Matemática nas instituições de ensino.

Nesse contexto, cabe citarmos um dos mais importantes educadores do século passado, principalmente quando se refere à reformulação no ensino e aprendizagem

da Matemática, a saber, Hans Freudenthal (1905-1990), o qual é conhecido como possibilitador da Matemática Realística[1]. Para esse autor, a matemática é uma atividade humana e que, portanto "o que os seres humanos devem aprender não é a Matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, como um processo de matematização da realidade" (FREUDENTHAL, 1968, p. 07). Mais que isso, ele indagava que apresentar a Matemática pronta e acabada, diretamente para os alunos, seria uma didática falível e que não traria bons resultados. Ao contrário disso, Freudenthal apostava no ensino conectado com a realidade, ter mais proximidade com os alunos e principalmente ser relevante para a humanidade.

Ainda é importante destacar que as investigações em Educação matemática tiveram suas origens nas universidades, como já citado, por volta do século XIX, pegando impulso com a reforma da educação superior iniciada na Prússia e que se estendeu para outros países. Tal reforma fez do professor também um investigador, e tudo isso conduziu a educação a tornar-se uma disciplina independente.

Nessa perspectiva, apesar de ser um tema que já vem sendo discutido, o ensino-aprendizagem da Matemática, ainda apresenta muitas questões a serem desveladas, discutidas e solucionadas. Pois, temos visto corriqueiramente um vasto número de informações, oriundas de avaliações nacionais e internacionais, que mostram a grande fragilidade existente no aprendizado da Matemática em nível básico.

Tal fragilidade educacional é um fato preocupante na contemporaneidade. A partir de Bessa (2007, p. 04) podemos inferir que em muitos casos faltam aos professores metodologias de ensino que facilitem a aprendizagem. Já para os estudantes, faltam-lhes interesses e perspectivas com relação a essa disciplina. Para as escolas faltam-lhes estruturas físicas (pelo menos na grande maioria dos casos) e projetos que estimulem o aprendizado, enquanto que as famílias têm se abstido cada vez mais de papeis cruciais na viabilização da instrução dos seus filhos.

O atual fracasso na referida disciplina é um problema alarmante. Os dados mais atuais mostram que no Brasil o Ensino Médio está estagnado desde 2009 e, na avaliação de Matemática cerca de 70% dos estudantes do país que participaram do SAEB (Sistema de avaliação da educação básica) apresentaram resultados insuficientes. Isso significa que apenas três em cada dez alunos do terceiro ano do Ensino Médio tem adquirido os conhecimentos mínimos necessários para esse nível

[1]Para Buriasco e Ferreira (2016), a Educação Matemática Realística – RME é uma abordagem para o ensino que surgiu na Holanda entre o final da década de 1960 e começo dos anos 1970. Nessa época, educadores holandeses, influenciados pelas ideias de Hans Freudenthal, buscavam elaborar uma proposta curricular que modernizasse a Educação Matemática do país, com uma perspectiva de reforma educacional em oposição ao movimento da Matemática Moderna, que tinha uma perspectiva de ensino estruturalista como base.

de escolaridade e, somente 4% deles demonstraram ter conhecimentos adequados, segundo os dados do INEP (2018).

Tais informações apontam, entre outros obstáculos, que as atuais metodologias de ensino em Matemática não tem se mostrado eficientes. Mais do que isso, poderíamos argumentar, com base nos dados anteriormente apresentados e em experiências próprias como professor, que são diversos os problemas que acomete o bom aprendizado dessa disciplina. Entre eles destacam-se a inadequação do componente curricular, a ausência da família no processo de aprendizagem, o desinteresse dos estudantes, a super lotação das salas de aula, a desmotivação dos docentes e o sistema educacional que restringe muito, tanto o professor quanto o aluno.

Nesse sentido, é pertinente ao campo de pesquisa em Educação Matemática procurar encontrar os prováveis fatores desencadeadores dos problemas aqui em questão e apresentar soluções factíveis, uma vez que pesquisas indicam que os alunos têm mostrado cada vez mais uma aversão pela Matemática, mesmo a considerando como uma disciplina de destacável importância na sociedade atual. No entanto, a grande maioria deles apresenta bloqueios quando se trata em estudá-la.

São diversos os possíveis aspectos motivadores desse bloqueio. Lima (1995, p. 3) e Pacheco e Andreis (2018) salientam que as dificuldades com a Matemática são consequências de fatores internos e externos à escola. Dentre os quais, eles elencam questões metodológicas inadequadas, professores mal qualificados, experiências anteriores negativas, pouca dedicação por parte de professores e alunos e infraestrutura escolar inadequada.

Outros pesquisadores ainda indicam para as circunstâncias de insucesso nesse componente curricular, como decorrência da falta de aprendizado consistente nos primeiros anos escolares, o que pode levar a prejudicar a construção do conhecimento matemático no Ensino Fundamental e consequentemente nos próximos níveis de ensino. Nesse contexto, Prediger, Berwanger e Mors (2009) mostram em suas pesquisas que, com os avanços nos níveis escolares, os alunos vão cada vez mais apresentando repulsa pela Matemática e consequentemente o aprendizado também vai tornando-se pouco legítimo.

É importante ressaltar que tais dados realçam a necessidade urgente de transições educacionais. Porém, essas mudanças devem ultrapassar várias barreiras. Não se deve alterar apenas a grade curricular de Matemática, é crucial que se mexa na própria forma de expor o conteúdo a ser ensinado. Mais que isso, é primordial resgatar o papel da família no processo educacional. Nesse aspecto Prediger *et al.*

(2009, p. 23) sugerem que mais importante quanto metodologias adequadas é passar aos discentes a ideia de que a Matemática é um complexo de áreas que se conecta com diferentes representações do nosso cotidiano.

Como já introduzido, alguns estudos, como a pesquisa de Prediger *et al.* (2009), destacam que estes problemas com a Matemática se agravam com o aumento nos níveis de ensino. Essa última autora acredita que tais dificuldades podem ser frutos da passagem de conteúdos que são mais concretos e conceituais. Isto é, habituais a tópicos mais abstratos e lineares, que exigem conhecimentos acumulados de séries precedentes, destacável capacidade de raciocínio lógico e concentração, algo um tanto difícil em nosso modelo atual de escola.

Esse ensino de forma descontextualizada tem se ocasionado, com base em pesquisas de Pacheco (*et al.*, 2018, p. 108), devido "a falta de uma visão mais concreta sobre a Matemática que faz com que os professores utilizem situações irreais de contextualização". Nessa perspectiva, os alunos, que dispõem de menos familiarização com a abstração, acabam por perder o sentido daquele conteúdo e consequentemente não constroem o conhecimento.

Essa falta de vínculo entre os conteúdos matemáticos e situações concretas do dia a dia pode ser uma das principais causas das inúmeras insatisfações com a referida componente curricular. Isso se justifica pelo fato de que a metodologia de ensino pouco contextualizada e problematizada, caracteriza-se por centrar-se em métodos que conduzem a procedimentos meramente mecânicos, e que deixam de captar o sentido mais importante por traz de cada conteúdo, que são os meios pelos quais se chegou a ele, o que inferimos como sendo heurística.

Nessa perspectiva, os processos heurísticos matemáticos é um tema viável de ser investigado, porque pode conduzir os alunos a uma forma mais eficiente de aprender Matemática. Assim, é importante compreendermos o tema para que possíveis mudanças nesse sentido tornem-se aplicáveis. Conforme a lei de diretrizes e bases (LDB, 1997), "há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama" (BRASIL, 1997, p. 15), o que pode proporcionar um ensino de Matemática mais igualitário e menos excludente.

Toda essa exposição indica que a metodologia tradicional- meramente conteúdista – quando trabalhada de forma única e exclusiva torna-se um grande obstáculo na vida escolar, tanto do aluno quanto do professor. Nessa metodologia, o processo torna-se mecanizado e maçante, isto é, se ensinam perguntas prontas para respostas sem muita relevância científica. Tal situação acaba por dificultar a

construção lógica do conhecimento matemático no aluno, o que pode levá-lo a não conseguir fazer sinapse entre aquilo que ele já sabe e o conteúdo novo. Júnior e Barboza (2012) corroboram com tais conjecturas e afirmam que:

> Assim, o professor deve interpretar e modelar as questões matemáticas para a realidade do aluno, onde ele terá condições de utilizar e ampliar os conhecimentos matemáticos, então aprender matemática deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculado ao domínio de um saber fazer matemática e de pensar matemático (JÚNIOR E BARBOZA, 2012, p. 05).

Nesse sentido, essas problemáticas acabam por suscitar em obstáculos epistemológicos, que são entraves à aprendizagem, conforme apresentados por Bachelard (1996). Tudo isso tem conduzido a Educação Matemática a um desafio, pois, grande parte dos conteúdos que são abordados pelos professores acabam por ser expostos de modo particularmente abstratos e pouco legítimo, de feitio propedêutico e de sistematização superficial, tornando-se irrisório no avanço matemático do aluno.

Com base no exposto, procuramos com essa pesquisa desvelar os principais elementos desencadeadores dessa fragilidade atual no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, investigando o que tem levado um número cada vez maior de alunos da educação básica a apresentar apatia por esta disciplina. Em contrapartida, buscamos analisar se a heurística como metodologia de ensino pode ser encarada como uma alternativa exequível e eficiente neste processo educacional.

Nesse sentido, os principiais objetivos da pesquisa é responder aos seguintes questionamentos: o que tem levado um número crescente de alunos da educação básica a não se interessar por Matemática? O índice de rejeição dessa disciplina varia de acordo como o aumento no nível de escolaridade? Tal rejeição pode ser consequência de um ensino menos heurístico e mais mecanizado? Quais os fundamentos e importância da heurística para o progresso educacional? A heurística pode ser considerada um recurso auxiliar, facilitador do processo de ensino-aprendizagem? O que conjecturam os professores à respeito da aversão dos alunos pela matemática?

Para tanto, organizamos a estrutura dessa tese em cinco partes. No primeiro capítulo exibimos o histórico da heurística matemática, onde apresentamos suas origens, o seu significado e os principais filósofos/matemáticos que a deram destaque, como sendo um instrumento atenuante no processo de aprendizagem. Entre eles, destacamos Arquimedes, Pappus, Descartes, Lakatos e Polya. Tal abordagem será importante porque nos servirá de guia para que reconheçamos as motivações que

culminaram no termo heurística e o que conjeturavam renomados autores a respeito da temática.

No segundo capítulo discorremos sobre as pesquisas que indicam as atividades heurísticas como desencadeadoras do processo de desenvolvimento do conhecimento matemático. Para tanto, usamos como base as pesquisas e teses dos autores French (2009), Polya (1945), Llera (2000) e Mendes (2013). Essa parte da discussão nos servirá de embasamento teórico para que compreendamos e reforcemos o papel da heurística como um dispositivo colaborador, que quando aliada à prática docente, pode tornar-se atividades complementares que beneficiam tal prática.

No capítulo três, com base nas duas primeiras etapas, alguns levantamentos são feitos sobre os principais fatores que têm levado os alunos a não se interessarem pelas aulas de Matemática. Discutimos a falta da atividade heurística como um possível agravante nessa situação e pesquisamos também a visão dos professores a respeito desse tema, analisando seus apontamentos sobre suas práticas pedagógicas e a aprendizagem, buscando encontrar correlações com a heurística. Para tanto, realizamos uma pesquisa de campo, dividida em três etapas, com professores e alunos, de uma escola particular e duas públicas da cidade de São Paulo - SP, com o objetivo, além de outros aspectos que serão abordados no capítulo seguinte, de procurar os prováveis indícios que indiquem os motivos das problemáticas existentes nas aulas de Matemática. Logo, esse capítulo procura nos dar subsídios a permitir tirarmos conclusões a respeito de alguns questionamentos feitos a princípio, um dos quais se resume em esclarecer o porquê de um expressivo número de alunos exprimirem defasagens e consequente apatia pela Matemática e se seria o ensino propedêutico, perfunctório e pouco heurístico uma dessas possíveis causas.

No quarto capítulo apresentamos a heurística matemática como metodologia de ensino. Com esse fim, usamos como principais norteadores teóricos as teses de Imre Lakatos (1978), George Polya (1994), Chaves e Neves (2016), Resende e Mesquita (2012), Tatto e Scapin (2004) e Pérez (2015). Aqui esboçamos a questão da heurística como aliada imprescindível e facilitadora na resolução de problemas matemáticos, trazendo os aspectos que permeiam essa teoria. Para subsidiar nossas conjecturas, apresentamos, com base nos resultados obtidos da mesma pesquisa de campo citada anteriormente, o desenvolvimento matemático dos alunos do Ensino Médio da escola particular. Ou seja, exibimos e analisamos o aprendizado de tais alunos ao serem introduzidos aos processos heurísticos como recurso auxiliar na resolução destes problemas. Nessa fase, o objetivo é expor os benefícios da heurística matemática quando disseminada na metodologia de ensino do professor, o que servirá

de base para responder aos questionamentos apresentados.

Por fim, no último capítulo discutimos sobre os dados obtidos nas pesquisas de campo e bibliográficas. Procuramos encontrar correlações entre heurística e o interesse pela Matemática; verificamos as principais causas do desinteresse nessa disciplina; refletimos sobre o que os alunos presumem a respeito da Matemática escolar e analisamos os apontamentos dos professores participantes da pesquisa a respeito do tema.

CAPÍTULO 1

A HEURÍSTICA AO LONGO DO TEMPO

Para discorremos sobre heurística, inicialmente definiremos um termo que está estreitamente ligado àquela, criatividade. Para tanto, cabe aqui expor que criatividade pode ser designada como a ocasionadora do desenvolvimento do conhecimento humano, visto que, em certa medida, ela entra em cena quando o intelecto fecundo se depara com problemas desafiadores e, portanto, recorre a caminhos inéditos que conduzem a soluções para tais problemas. Logo surge a criatividade, vinculada a não solução por vias tradicionais e corriqueiras e que, assim, necessita de estratégias inovadoras que perpetuam em saberes consolidados.

Em outras palavras, a criatividade se revela quando encontra um terreno fértil ao desenvolvimento de novos mecanismos de soluções para tais problemas. Nesse aspecto, no que tange o ensino, é primordial que criemos na escola um ambiente propício ao surgimento da criatividade e a metodologia de ensino, mediante resolução de problemas, parece ser uma alternativa louvável. Isso significa que táticas sistematizadas de ensino que tornem oportunas implementações de novas estratégias de resolução podem ser tão importantes quanto à própria elucidação em si.

Nesse contexto, Sternberg (2000, p. 163) presume que a inteligência criativa, ou seja, a criatividade "[...] é a capacidade de ir além do estabelecido para gerar ideias novas e interessantes". Torrance (1976) também corrobora com nossas idéias e indaga que aquela pode ser encarada como o motor impulsionador do conhecimento científico:

> Criatividade é um processo que torna alguém sensível aos problemas, deficiências, hiatos ou lacunas nos conhecimentos, e o leva a identificar dificuldades, procurar soluções, fazer especulações ou formular hipóteses, testar e retestar essas hipóteses, possivelmente modificando-as e a comunicar os resultados (TORRANCE, 1976, p. 22).

Assim, é perceptível a questão da criatividade como um fator preponderante no aperfeiçoamento do conhecimento humano, o que nos direciona para conjeturar o mérito do estímulo à criatividade como estratégia de ensino viável e oportuno em virtude do detrimento à educação básica, ocasionado por um sistema educacional insustentável.

Após essa exposição relativa à criatividade, correlata com a busca de novas habilidades que norteiam a elucidação de problemas matemáticos, podemos difundir a noção de heurística. Tal conceito se relaciona com os meios singulares de pensar, aprimorar e encontrar o conhecimento, que foi algo significativo para o desenvolvimento da ciência em antigas civilizações, como pode ser observado em Gervázio (2015).

A essa singularidade associa-se uma heurística, cujo termo teve origem na Grécia antiga e denota encontrar, descobrir e inventar. Para o dicionário Houaiss (2009), a sua definição é: No contexto científico é "a ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos"; no contexto de problemas é "a arte de inventar, de fazer descobertas" e no contexto pedagógico "método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar". Em síntese, Leite (2010) e Ferreira (2004) a descreve como "um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas". Isto é, a heurística conecta-se com os processos relativos à descoberta e à invenção, que são os principais ingredientes da criatividade.

Compreendido essa noção, nos cabe discorrer sobre as principais áreas nas quais a heurística tem sido aplicada na atualidade. São quatro ramos: A heurística na psicologia cognitiva, cujo foco principal é a pesquisa de inteligência artificial, designada como um complexo de estratégias adquiridas por um ser cognitivo que a partir de objetos e valores previamente determinados pode-se chegar a novas concepções; A heurística na pesquisa matemática (a qual é o foco principal dessa tese e que discorremos com mais detalhes no desenvolvimento) que é norteada na procura de estratégias que direcionam a resolução de problemas matemáticos, ou seja, relaciona-se com os aspectos que permeiam as indagações de como o ser humano raciocina para encontrar essas soluções; A heurística na pesquisa histórica, que tem relação com os mecanismos que asseguram certo grau de veracidade nas pesquisas em História; e a última é a heurística na pesquisa filosófica, que se incube de estudar a

criação de novas proposições e os processos de funcionamento do pensamento. Essas linhas de pesquisa podem ser consultadas com mais detalhes em Garcia (2008).

Dentro dessa perspectiva, no que tange essa tese, esboçaremos um panorama geral sobre os apontamentos de alguns autores com relação à heurística na Matemática, como sendo propulsora do conhecimento científico nessa área e que logo pode ser adotada como metodologia de ensino-aprendizagem, desencadeadora de procedimentos integrantes e complementares no desenvolvimento intelectual dos alunos.

Compreender as propostas desses pensadores sobre a temática em questão será importante, pois norteará os capítulos subsequentes e permitirá fundamentar nossas respostas para as problemáticas apresentadas no início desse trabalho.

É importante salientarmos que os autores a seguir não são os únicos que de alguma forma consideraram e apresentaram o pensamento heurístico em seus trabalhos. No entanto, eles são os principais quando se remete ao tema heurística e Matemática.

Alguns deles serão abordados durante toda a tese, enquanto outros apresentamos apenas nessa primeira parte, para que tenhamos uma visão geral sobre o que estes autores, sejam eles matemáticos ou filósofos de áreas diversas, consideram a respeito da heurística na resolução de problemas e suas possíveis relações com o desenvolvimento humano.

1.1 Arquimedes: o método e o surgimento de procedimentos análogos à heurística matemática

Com base nas leituras de Roque (2012), Boyer (1993) e Mol (2013) podemos inferir que, segundo os escritos do historiador grego Bizantino João Tzetzes, Arquimedes de Siracusa viveu 75 anos, de 287 a 212 a.C. Nasceu e viveu a maior parte da sua vida na cidade de Siracusa, localizada na costa da Sicília, onde atualmente está situada a Itália. O historiador Lúcio Méstrio Plutarco, ao qual se deve a maior parte das informações que temos hoje a respeito de Arquimedes, afirma que ele era filho de um astrônomo, Fídias, e que tinha parentesco com o rei Híeron II.

Boyer (1993) ainda ressalta que a vida acadêmica de Arquimedes se deu durante sua juventude em Alexandria no Egito, local onde teve contato com renomados matemáticos da época, entre eles Canon de Samos e Erastóstenes. Essas informações

sobre sua vida foram escritas muitos anos após a sua morte por historiadores da Antiguidade. No entanto, um fato importante é que quase todos eles se referiam a Arquimedes como um cientista excepcional devido as suas inúmeras criações de guerra e máquinas utilitárias que potencializou seu reconhecimento em todo o mundo antigo.

Após ter estudado e convivido com cientistas da época, Arquimedes voltou para Siracusa e dedicou-se totalmente às suas pesquisas, se tornando um dos maiores cientistas da antiguidade clássica, contribuindo com seus trabalhos à Matemática, Física, Engenharia e a Astronomia, igualando-se ou até mesmo superando, conforme Mol (2013), os trabalhos de Aristóteles, Newton, Gauss e Euler.

Os estudos de Arquimedes lhe fizeram descobrir a lei do empuxo e da alavanca, que estão nas bases da Hidrostática e Estática, importantes áreas da Física. Acredita-se que ele tenha criado diversos inventos de uso bélicos, entre os quais destacamos as armas de cerco e a bomba de parafuso. Algumas dessas invenções podem o ter ajudado a defender a sua cidade de ataques inimigos, como a máquina capaz de erguer navios para fora d'água e a que os queimavam por meio de convergência de raios solares usando um conjunto de espelhos. Conforme Mol (2013):

> Arquimedes foi um inventor com uma grande reputação em todo o mundo grego. Eram famosas suas máquinas de guerra, usadas para defender Siracusa de ataques de navios romanos. Há relatos de que um desses engenhos usava espelhos parabólicos para fazer convergir raios de sol e atear fogo aos navios inimigos (MOL, 2013, p. 53).

Arquimedes ainda fez o uso do método da exaustão por meio da soma de uma série infinita para calcular a área embaixo do arco de uma parábola e também conseguiu encontrar uma boa aproximação para o número π. Além disso, ele descobriu e estudou a espiral que leva seu nome e chegou a produzir fórmulas para calcular os volumes de sólidos de revolução, como o cilindro e o cone.

É muito provável, segundo relatam os historiadores anteriormente citados, que Arquimedes tenha morrido durante a segunda guerra púnica, onde o Império Romano, comandado pelo general Marco Cláudio Marcelo, após cercar a cidade por dois anos, conseguiu capturar Siracusa e matar grande parte da população, entre ela Arquimedes.

É importante destacar, com base em Boyer (1993), que Arquimedes foi o impulsionador da Matemática Moderna, tendo se diferenciado dos filósofos antigos por relacionar, aplicar e explicar suas pesquisas de áreas distintas, o que influenciou os matemáticos que o procederam, como Galileu Galilei e Isaac Newton.

Neste contexto, cabe agora dissertar sobre a genialidade de Arquimedes em

correlacionar seus trabalhos de Física (a Mecânica) com a Matemática em prol de solucionar alguns problemas desta área do conhecimento. Assim, o seu trabalho mais importante nesse contexto foi o livro O método dos Teoremas Mecânicos, que estava direcionado a Erastóstenes. No livro, ele mostrou seus métodos utilizados por meio de uma aplicação totalmente inovadora, da Mecânica à Geometria, na qual ele supostamente pesava, imaginariamente, os volumes e as áreas para determinar os seus valores.

O livro em questão, segundo a literatura, é considerado o trabalho mais antigo de que se tem conhecimento, no qual se mostram as estratégias pelas quais se chegou à resolução dos problemas, utilizando mecanismos inéditos. Com base nos conceitos apresentados na seção anterior, envolvem os procedimentos que caracterizamos como sendo de feitio heurístico. Para Roque (2012, p. 102), o Método de Arquimedes é uma obra inédita quando falamos de heurística no mundo antigo já que "não há sinais de que a matemática desenvolvida na Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. tivesse qualquer precaução quanto ao uso de procedimentos heurísticos e informais".

Nesta obra, Arquimedes aplicou um aspecto bastante incomum para a Matemática grega, conforme Filho:

> [...] Além disso, convém salientar um aspecto inovador na matemática produzida por Arquimedes que se caracteriza por um rompimento com a tradição grega geométrica encaminhada a determinar medidas (áreas e volumes) e analogias entre essas medidas (quadratura, cubaturas e retificações de curvas) estabelecida pelos geômetras do século III a.C. e, em particular, por Euclides de Alexandria; assim, a geometria arquimediana procurou considerar e demonstrar proposições sobre áreas e volumes limitadas por novas linhas ou superfícies curvas (quadratura da parábola e espirais, cubaturas da esfera, cilindro, conóides e esferóides), equilíbrio de planos e seus centros de gravidade, sobre corpos flutuantes (FILHO, 2004, p. 54).

Na tentativa de solucionar os problemas da Geometria, Arquimedes utilizou alguns métodos mecânicos provenientes de suas pesquisas em Física, o que tornou suas demonstrações geométricas um feito inovador para a época. Esse seu ineditismo rendeu importante notoriedade à sua obra, pois mostrou sua engenhosa peculiaridade em juntar áreas distintas até então, na tentativa de resolver problemas. Tal estratégia concebeu-lhe inúmeras patentes, e assim seus métodos inovadores, ou seja, heurísticos, ficaram amplamente conhecidos. Nesse contexto, Filho (2004) conjetura que:

> Para estabelecer seus resultados, Arquimedes utilizava-se de procedimentos heurísticos, isto é, recursos provenientes das investigações mecânicas, pois suas descobertas geométricas estão fundadas e relacionadas com postulados e proposições

> de estática e hidrostática, formuladas nos tratados Sobre o equilíbrio dos planos e Sobre os corpos flutuantes, que não só permitem elaborar um esboço prévio das soluções ou demonstrações de alguns problemas ou teoremas geométricos, mas sugerem um delineamento plausível que possibilitará facultar essas soluções ou demonstrações por meio de um raciocínio, rigorosamente lógico, firmado em verdades desde logo aceitas sem demonstração e em outras verdades de antemão demonstrada sem conformidade com os padrões clássicos da geometria grega, através do método de exaustão (FILHO, 2004, p. 54).

O método dos Teoremas Mecânicos foi o único trabalho de Arquimedes que se tem registro, no qual ele esboça detalhadamente os procedimentos e métodos utilizados para se chegar aos resultados apresentados. É muito provável neste livro que ele tivesse a pretensão de mostrar para os demais estudiosos matemáticos as motivações que o fez utilizar seus conhecimentos de Mecânica para procurar soluções de problemas na Matemática. Mais importante que isso, ele esclareceu como foi possível chegar a tais soluções por meio dessas estratégias inovadoras:

> Arquimedes para Erastóstenes, saudações. Enviei a você em uma ocasião anterior alguns dos teoremas que descobri, apresentando simplesmente os enunciados e convidando-o a descobrir as demonstrações, as quais não forneci naquela época. [...] Escrevi as demonstrações destes teoremas neste livro e agora o envio a você. [...] (ASSIS, 2008, p. 15).

Nessa perspectiva conseguimos captar que Arquimedes utilizou no livro "O Método dos Teoremas Mecânicos"o raciocínio e preceitos heurísticos para resolver os problemas matemáticos de Geometria. Essa nossa afirmação se embasa em dois aspectos facilmente encontrados em sua obra: o primeiro reside no seu desejo em apresentar o que o levou a procurar caminhos não tradicionais para solucionar problemas matemáticos. Mais que isso, ele explanou como foi possível chegar a tais soluções. Já o segundo encontra-se na sua singularidade e ineditismo em usar métodos mecânicos para resolver estes problemas, fato novo na cultura grega, dando-lhe o cunho de criador da heurística matemática, mesmo não se remetendo diretamente a este conceito. Corroborando com nossas ideias, Roque (2012), indica que:

> Conforme sugere Knorr, ao invés de estender ou generalizar a estrutura axiomática da matemática, Arquimedes parecia estar mais preocupado em comunicar novas descobertas relativas à resolução de problemas geométricos. Em alguns prefácios, ele toma o cuidado de distinguir os procedimentos heurísticos de descoberta dos procedimentos de demonstração (ROQUE, 2012, p. 160).

1.2 Pappus: as contribuições heurísticas que culminaram na famosa Coleção Matemática

Roque (2012), Boyer (1993) e Mol (2013) indicam em suas obras que Papo de Alexandria, ou Pappus Alexandrinus, viveu de 290 a 350 d.c, sendo um dos últimos importantes matemáticos do período helênico da Grécia antiga. Ele foi um renomado geômetra, pesquisador e autor de diversas obras relativas a cientistas da antiga civilização grega. Ele, junto com Diofanto, foram os principais matemáticos que fizeram parte da conhecida idade de prata da Universidade de Alexandria que se deu de 250 a 350.

Ele formulou uma série de teoremas que foram cruciais para o desenvolvimento da Geometria Projetiva, que são as propriedades descritivas das figuras geométricas. Além de pesquisar sobre o conhecido problema de Dido ou Isoperimétrico (problema do Cálculo das Variações), ele conseguiu demonstrar que entre as formas geométricas que as abelhas poderiam utilizar para construir os seus favos de mel, elas escolheram exatamente a forma em que se usa menos cera, mas que a capacidade de armazenamento é máxima. Essas suas conclusões tornaram possíveis os avanços na Geometria Analítica, desenvolvidos por Descartes treze séculos mais tarde.

A principal obra de Papo é Mathematicae collectiones - A Coleção Matemática de Papo -, uma coleção de oito livros escritos em grego, dos quais a primeira e a segunda parte foram perdidas. Nela podemos encontrar novas demonstrações, relatos e apontamentos suplementares a respeito dos escritos de cientistas precedentes, entre eles Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolemeu, que discutiam sobre planos, sólidos e superfícies de revolução.

Além de toda essa contribuição para a Matemática, Boyer (1993) indica que Papo ainda estudou e publicou algumas obras que verssavam sobre Hidrostática e Música. Com cerca de 60 anos de idade ele morreu na Grécia. No entanto, não se conhece os motivos que acarretaram a sua morte.

Para os objetivos dessa tese, discorremos aqui sobre a sua Coleção Matemática. Como já introduzido anteriormente, tal obra é uma compilação de conhecimentos antigos de alguns matemáticos gregos, onde foram acrescentadas novas proposições, importantes comentários, uma série de esclarecimentos, além de algumas correções e críticas, o que vem a salientar tal coleção como sendo de tendência heurística.

Nesta acepção, Filho salienta que de fato Pappus utilizou de estratégias similares à heurística. Para este autor, "quanto A Coleção Matemática [...], Pappus aborda e conceitua os aspectos referentes à análise e síntese, que fornecem subsídios à

atividade heurística"(FILHO, 2004, p. 4). Ele ainda discorre que presumivelmente Pappus sistematizou esta obra como uma espécie de síntese, planejando uma melhor compreensão dos conhecimentos acumulados dos trabalhos de matemáticos precedentes.

Ver Eecke (1982) considera que a Coleção Matemática de Pappus é uma respeitável obra para a Matemática, onde ele fez louváveis contribuições, elucidando demonstrações engenhosas, descrevendo-as de modo singularizado e sempre que possível fazendo analogias a casos mais fáceis de discernir:

> Pappus não se limita, com efeito, a expor notáveis proposições devidas a seus antecessores acompanhando-as de uma grande quantidade de lemas destinados a esclarecer as passagens difíceis das suas demonstrações, mas ele estabelece frequentemente demonstrações diferentes; ele as estende a casos particulares ou análogos, aplica-as à solução de problemas novos ou já resolvidos anteriormente de uma outra maneira, e completa numerosas proposições inteiramente novas extraídas de seu próprio cabedal, as quais indicam pesquisas já muito avançadas no que chamamos agora a geometria superior (EECKE, 1982, p. 13).

Pappus considerava que na Matemática dos geômetras da antiguidade grega, surgia com freqüência a síntese e a análise como ferramentas de demonstrações de importantes teoremas. Neste aspecto, Filho (2004) discorre que a análise conforma-se com a metodologia empregada para encontrar caminhos possíveis para a elucidação/demonstração de teoremas ou problemas matemáticos, enquanto que a síntese se baseava no resultado final.

Assim, é nesse âmbito da análise onde podemos identificar características de atividades heurísticas na obra de Pappus:

> Fica explícito que os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utiliza a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema [...] (FILHO, 2004, p. 69).

Relativamente a este aspecto Albuquerque (2014, p. 07), corrobora com Filho (2004), ao discorrer que "[. . .] neste Livro, dedicado ao seu filho Hermódoro, Papo transmite-nos o método de análise e síntese dos antigos geômetras, constituindo o Tesouro da Análise [Heurística], que considera essencial para a resolução dos problemas de Geometria".

Nessa perspectiva podemos inferir que a abordagem heurística no referido trabalho de Pappus se correlaciona com os métodos de análise, conectados

fortemente com elementos desenvolvedores do raciocínio lógico indutivo[1], mediados muito provavelmente pela intuição heurística (conforme definida por Bazarian), o que pode vir a calhar em descobertas inéditas e, consequentemente novos meios para a resolução de problemas matemáticos.

Nessa acepção, Rosa e Orey (2009) argumentam que:

> [...] Dessa forma, a análise é considerada como um método que possui características heurísticas, pois envolve um processo lógico, que antecede uma demonstração rigorosa, e que é finalizada pela síntese e que tem como objetivo determinar soluções para os problemas geométricos e matemáticos (ROSA, 2009, p. 25).

1.3 Descartes: regras para a solução heurística de problemas

Com base em Boyer (1993), podemos indagar que René Descartes viveu de 1596 a 1650 da era comum e foi um filósofo, físico e matemático que nasceu em La Haye, na França. Aos oito anos de idade ele ingressou no colégio jesuíta Royal Henry Le Grand, onde ficou de 1607 a 1615 e logo após estudou direito na Universidade de Poitiers. No entanto, apesar dessa sua formação, Descartes nunca exerceu a profissão de advogado. No período da idade moderna ele era igualmente conhecido como Renatus Cartesius, que foi seu nome latino.

Descartes enfatizou a importância da autoridade da razão em Filosofia e em Ciências Naturais e desenvolveu a utilização de métodos de verificação da autenticidade no âmbito científico. Em sua perspectiva, a Filosofia poderia ser comparada como uma árvore onde a metafísica corresponde a raiz, ou seja, a base, a Física o tronco, e as demais ciências seriam as ramificações. No entanto, o mais prodígio desses galhos de sabedoria encontrava-se a moral, que para ele era o pré-requisito básico para estas ciências.

Ele rompeu com a Filosofia de Aristóteles que foi bastante usada nas academias, e no ano de 1619 criou as bases do método científico moderno, o racionalismo[2], ao propor uma ciência unitária e universal. Ele defendeu a teoria de que o primeiro

[1]Segundo Abbagnano (1999) o raciocínio indutivo é o modo ou processo de raciocinar, que consiste em estabelecer uma conclusão geral dos fatos particulares que se produzem constantemente. Isso significa que "A indução é o procedimento que leva do particular ao universal: com esta definição de Aristóteles concordam todos os filósofos. O próprio Aristóteles vê na indução um dos caminhos pelos quais conseguimos formar nossas crenças (Abbagnano, 1999, p. 556).

[2]Segundo o dicionário Houaiss (2009), o Racionalismo é qualquer doutrina que privilegia a razão como meio de conhecimento e explicação da realidade.

passo para se chegar ao conhecimento devia originar-se da dúvida. Uma das suas maiores façanhas para a Matemática foi aplicar a fusão da Álgebra com a Geometria, criando a Geometria Analítica e o sistema de coordenadas cartesianas. Antes dele, estes dois ramos da Matemática apareciam de maneiras isoladas e a partir dessa sua junção os problemas de Geometria puderam ser tratados de modo algébrico, por meio de um sistema de coordenadas.

Boyer (1993) indica que Descartes morreu em 11 de Fevereiro de 1651, vítima de pneumonia. No entanto, esses 55 anos vividos foram repletos de contribuições ao mundo científico, dentro do campo da Matemática, da Filosofia e da Física. Para os fins dessa tese, nos restringiremos a falar sobre sua obra "Regras para direção do espírito". Nesse livro, Descartes continua com os trabalhos de Pappus, pois ele preserva e amplia as mesmas questões sobre síntese e análise, onde esta última estaria relacionada com os procedimentos heurísticos, relativos à arte da procura e da descoberta.

Descartes argumenta na referida obra que a análise estaria ligada com os elementos a priori (a busca de estratégias de solução). Por outro lado, a síntese se referia a elementos aposteriori, isto é, apenas com os resultados das investigações. Para este autor, um exemplo contundente a respeito dessa abordagem aposteriori poderia ser facilmente observada no livro Os Elementos de Euclides, que evidencia o método sintético da axiomática meramente conteúdista e imediatista, mostrando exclusivamente uma série de resultados de diversos conteúdos matemáticos, ignorando e desvalendo todo o percurso usado para se chegar a tais conhecimentos, ou seja, marginalizando a heurística nessas descobertas científicas.

Nesse contexto, Chaves (2011, p. 5) acredita que ao ocultar a heurística nos Elementos de Euclides "[...] os antigos não quiseram revelar o método de análise, o qual ficou preservado na obra de Pappus."

Em Regras para direção do espírito, Descartes também assegura a importância do pensamento heurístico matemático que torna possível o estudo dos elementos que envolvem um objeto, como por exemplo, um problema matemático, o que em suas conjecturas poderiam conceber conexões essenciais para se chegar ao verdadeiro conhecimento.

Neste livro ele apresentou um conjunto de regras perspicazes que conduziam seus leitores a uma metodologia plausível na possível elucidação de qualquer problema, científico ou não. Ou seja, a grosso modo, poderíamos inferir que ele pretendia com essa sua teoria transformar qualquer problema, independente de sua natureza, em um problema matemático.

Na tentativa de tornar aplicável essa sua conjectura, Descartes dividia o processo de resolução de problemas em três partes. A primeira consistia em reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equações. A segunda etapa era reduzir qualquer problema matemático em um problema de natureza algébrica. Por fim, reduzir qualquer problema em um problema matemático, o que podia em alguns casos, possibilitar a elucidação de tais problemas.

Nesse sentido, Filho (2004) indaga que:

> Descartes, ainda destaca que a utilização de seu método em Geometria não tira o rigor das demonstrações, já que a natureza das demonstrações em Matemática consiste em descobrir e organizar as relações rigorosamente lógicas existentes entre a hipótese e a tese, porém esse encadeamento lógico é o resultado de um procedimento da atividade heurística (FILHO, 2004, p. 118).

Com isso, podemos identificar alguns pontos cruciais em Regras para a direção do espírito que caracterizam a heurística matemática como precursora do conhecimento cientifico. Entre eles, podemos citar o uso da analogia por meio de proposições mais simples com relação à proposição original, a exaltação da intuição atrelada à dedução como importantes recursos na aquisição do "verdadeiro conhecimento", e o seu ineditismo em unir a Álgebra com a Geometria.

Assim, Descartes enaltece o pensamento heurístico matemático em sua obra, quando prioriza a indução frente à dedução[3], e estabelece aquela penúltima como estratégia viável na construção do saber. Além disso, essa sua visão de liberdade na procura do conhecimento não tira o rigor lógico das ciências. Pelo contrário, proporciona estratégias que fomentam o pensamento criador que é viabilizador do conhecimento científico.

1.4 Polya: beleza e arte da heurística na resolução de problemas matemáticos

Filho (2004) indaga que George Polya foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. Filho de judeus, nasceu em Budapeste, Hungria, e viveu de 1887 até 1985. Ele licenciou-se em 1905, e por ter sido considerado um dos melhores alunos da sua turma conseguiu uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste, onde começou a estudar Direito, mas desistiu do curso e passou a estudar Línguas e

[3]Segundo French (2009, p. 20) "dedutiva indica que consequências experimentais são deduzidas a partir da hipótese e são submetidas ao teste experimental." Isso significa que "O raciocínio dedutivo é o modo ou processo de raciocinar, na qual se parte da causa para os efeitos, dos princípios para as consequências, do geral para o particular". (Abbagnano, 1999).

Literatura. Em seguida, dedicou-se à Física, Filosofia e Matemática, tendo concluído seu doutorado em 1912.

Polya tornou-se professor do Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ETH Zurich) em 1914, onde permaneceu até 1940, ano que ingressou como professor na Universidade de Stanford, na qual permaneceu até 1953, tornando-se professor emérito até o fim de sua vida. Ele trabalhou com uma diversidade de assuntos matemáticos, entre eles Teoria dos Números, Análise Matemática, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Combinatória.

Os primeiros trabalhos de Polya foram sobre resolução de problemas. A respeito desse tema, junto com Gábor Szegő, escreveram dois livros, "Problemas" e "Teoremas de Análise". Daí em diante, Polya desenvolveu teorias que versavam sobre métodos de resolução de problemas. Um dos produtos mais importantes destas pesquisas foi sua obra How to Solve It – A arte de resolver problemas. Nesse livro, Polya desenvolve ideia de heurística matemática como recurso para auxiliar na resolução de problemas.

É importante destacar que George Polya foi um matemático singular pelo fato de ter se interessado por metodologias de ensino da Matemática em nível básico, e por ter se preocupado com os elementos envolvidos no currículo desta disciplina. Foram poucos os matemáticos que se preocupavam com essas questões.

Do mesmo modo que Pappus e Descartes, Polya utilizou o modelo da síntese e análise na conformação do conhecimento matemático. Como já relatado anteriormente, a análise relacionava-se com a invenção, ou seja, com a estruturação de um esquema para a solução de um problema, enquanto que a síntese seria a aplicação e o resultado final desse plano. Em suas palavras, "Análise é invenção, síntese é execução" (POLYA, 1945, p. 146).

Sua obra mais importante que trata sobre esse tema "A arte de resolver problemas" foi publicada em 1957. Nela, Polya expõe a heurística voltada especialmente para a resolução de problemas matemáticos. Para ele, o pensamento heurístico matemático é um valoroso componente na elucidação de problemas. Em suas palavras, "a Heurística trata do comportamento humano em face de problemas"(POLYA, 1994, p. 88).

Polya conjecturava que a Matemática é uma ciência, na qual observação e analogia são imprescindíveis na estruturação do conhecimento. Mais que isso, ela pode ser retratada como uma ciência rigorosa, assim como aquela encontrada nos elementos de Euclides, mas também pode ser revelada como uma ciência experimental e indutiva.

Nesse contexto, Polya cogitava a heurística como uma área de conhecimento da Lógica, Filosofia ou Psicologia, na qual se estuda um complexo de metodologias e normas que direcionam a descoberta e invenção:

> Heurística, Heurética ou ars inveniendi era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalho dos comentaristas de Euclides. A este respeito, Pappus tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da Heurística devem-se a Descartes e a Leibniz, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard Bolzano apresentou notável descrição pormenorizada da Heurística (POLYA, 1994, p. 86).

Objetivando uma percepção mais profunda sobre a heurística na resolução de problemas, Polya fornece um capítulo de sua obra para implementar um tipo de dicionário que apresenta diversos construtos relacionados com o tema. Nessa perspectiva, Filho (2004, p. 139) argumenta que "para explicar e discutir o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte, Polya elabora um pequeno dicionário de Heurística com sessenta e sete artigos, dando o significado e fundamentos de cada um deles".

Na mesma linha de raciocínio de Descartes, Polya também julga a analogia como um elo relevante para a resolução de problemas:

> A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alcançar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles (POLYA, 1994, p. 29).

Nesse sentido, Polya considera que o pensamento heurístico matemático "[....] é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta" (Polya, 1994, p. 132). Nessa mesma linha de pensamento, ele ainda discorre que esse raciocínio provisório e plausível é indispensável na concretização do conhecimento final que apresenta o rigor lógico e sofisticado, isto é:

> Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos a absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas frequentemente, antes de

> chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício (Polya, 1994, p. 132).

Assim, poderíamos inferir que ele considera o pensamento heurístico como sendo as bases principais do conhecimento final, estruturado e axiomatizado. Dentro dessa perspectiva, o raciocínio indutivo, que em sua conjectura é o processo que disponibiliza a descoberta de leis gerais por intermédio da observação de casos particulares, poderia ser considerado como um componente integrante deste pensamento heurístico. Neste contexto, Filho (2004) ainda argumenta que:

> Para Polya o pensamento matemático não está relacionado apenas com axiomas, definições e demonstrações rigorosas, mas também com analogias, induções, conjecturas, relações, generalizações e outros processos mentais. Nessa perspectiva, são discutidos nos dois livros analisados [A arte de resolver problemas e Matemática e raciocínio plausível], exemplos de problemas de Matemática que buscam estimular atitudes e hábitos de pensamento desejáveis para o desenvolvimento do raciocínio heurístico e que enfatizam o saber-fazer, ou seja, problemas que valorizem, mais do que a obtenção da resposta certa, os processos envolvidos na sua resolução (Filho, 2004, p. 155).

Com base no aspecto heurístico observado nos processos de análises na resolução de problemas, Polya engendra um plano de como resolver tais problemas. O plano contém quatro fases. A primeira trata-se da compreensão do problema, isto é, todos os dados devem estar compreendidos para que se prossiga com a elucidação; a segunda consiste no estabelecimento de uma estratégia, ou seja, se deve encontrar um planejamento de como proceder frente ao problema; na terceira a estratégia que foi estabelecida na fase anterior deve ser executada e na quarta fase, os procedimentos utilizados para a execução do plano devem ser revistos, isto é, deve ser feito um retrospecto, analisando e discutindo a validade da solução apresentada.

Por fim, Polya discorre sobre a relevância do pensamento heurístico no processo de construção do conhecimento matemático. Em sua acepção, Leibniz já dizia há certo tempo que "nada é mais importante do que observar as origens das invenções, as quais são, na minha opinião, mais interessantes que as próprias invenções"(POLYA, 1994, p. 96). Com isso, ele endossa que buscar compreender a gênese e o desdobramento das invenções é um fato primordial para a compreensão do conhecimento cientifico, o que pode ajudar a aprimorá-lo.

1.5 Lakatos: a heurística como metodologia de ensino e pesquisa

Filho (2004) aponta que Lakatos veio de uma família de judeus e teve como nome de nascimento Imre Lipschitz. Ele nasceu em Decebren, na Hungria, em 1922, e morreu em Londres, na Inglaterra, em 1974. A sua vida foi fortemente influenciada pelo Nazismo e pela Segunda Guerra Mundial, tanto que para evitar perseguições dos nazistas ele mudou seu nome para Imre Molnár, evitando ser executado nos campos de concentração, como ocorreu com milhares de judeus húngaros, incluindo sua mãe e sua avó.

Ele passou os anos da Segunda Guerra Mundial, na qual se tornou um comunista ativo, na Universidade de Decebren onde se graduou em Matemática, Física e Filosofia no ano de 1944. Ao final da segunda guerra ele alterou outra vez o seu sobrenome, dessa vez para Lakatos, que tinha significado de serralheiro e homenageava o general que liderou o governo húngaro Géza Lakatos. Com isso, ele retomou seus estudos de doutorado na mesma universidade onde se graduou, quase que no mesmo ano em que ocupou um cargo no Ministério de Educação da Hungria. Este trabalho, no entanto, lhe custou brigas políticas e acabou acarretando em sua prisão em 1950, a qual durou três anos.

Com a invasão da Hungria pela União Soviética, no ano de 1956, Lakatos conseguiu se evadir para Viena e em seguida para a Inglaterra onde concluiu o doutorado em Filosofia no ano de 1961, pela Universidade de Cambridge, cuja tese lhe rendeu o livro Proofs and Refutations (Provas e Refutações) que foi publicado em 1976, logo após a sua morte.

Lakatos foi um filósofo não apenas da Matemática, mas também de outras ciências. Reconhecido internacionalmente devido a sua metodologia nos programas de investigação cientifica, descrevendo de que maneira se dá o desenvolvimento do conhecimento científico.

Suas ideias corroboram com as de Polya, visto que, além de conceber a heurística como instrumento que auxilia o progresso da Matemática, ele a caracteriza não somente com o seu rigor lógico, mas também como uma ciência indutiva e experimental. Seus estudos são embasados na invenção e na descoberta por meio de hipóteses, ou até mesmo de adivinhações.

O seu livro mais importante "A Lógica do Desenvolvimento Matemático: Provas e Refutações" é um material muito rico no que tange a metodologia do pensamento heurístico. Na obra, ele procura demonstrar que, divergente do que

pensam os formalistas "a matemática não deve se desenvolver por meio de um aumento monótono de quantidade de teoremas deduzidos indubitavelmente, mas por meio da melhoria incessante de adivinhações, especulações e críticas, pela lógica das demonstrações e refutações"(LAKATOS, 1976. p. 05). Worrall (1974) também considera sua obra como sendo um importante material para a Filosofia da Matemática, pois nela podemos observar que:

> A tese de "Provas e Refutações"é que o desenvolvimento da matemática não consiste (como a filosofia da matemática convencional nos diz que não) na acumulação constante das verdades eternas. Matemática desenvolve, de acordo com Lakatos, de uma forma muito mais dramática e emocionante - por um processo de conjectura, seguido por tentativas de "provar"a conjectura (ou seja, reduzi-lo para outras conjecturas), seguido pela crítica através de tentativas de produzir contra-exemplos tanto com o teorema de conjectura e as diversas etapas da prova (WORRALL, 1974, p. 212).

Lakatos foi influenciado pelos estudos de Polya (tanto que traduziu para o húngaro o livro How to Solve It), pela teoria do conhecimento de Karl Popper, que foi um destacável filósofo das Ciências do século XX, e pela dialética de Friedrich Hegel e de Karl Marx. Para Imre, a Filosofia das Ciências e a História das Ciências deveriam ter uma abordagem indissociável. Em suas palavras, "A filosofia da ciência sem a história da ciência é vazia; a história da ciência sem a filosofia da ciência é cega"(LAKATOS, 1983, p. 107).

Para endossar essas suas teorias, Lakatos apresenta no primeiro capítulo do livro Provas e Refutações, uma conversa fictícia entre alunos de uma escola, os quais dialogam sobre a validade da famosa fórmula de Euler. Nesse aspecto, Trevisa (2013) indaga que:

> [...], no primeiro capítulo do livro supracitado, na busca de tentar provar o teorema de Euler de que em um poliedro vale a relação V - A + F = 2, ele emprega seu método e utiliza-se de elementos como: inflar um poliedro até obter-se uma esfera, recortar com uma tesoura e encaixar, retirar uma face e expandir (planificar) sobre um quadro negro. O autor apresenta esse capítulo em forma de um diálogo entre uma sala de aula e seu professor, as notas de rodapé desse capítulo acabam por guiar o leitor sobre a própria história da demonstração dessa fórmula. Esses elementos são utilizados de maneira geral na busca da criação de lemas para a prova apresentada e na tentativa de melhorar a conjectura buscando enquadrar-se frente aos contra exemplos, ou seja, no processo de investigação. Essa aceitação da utilização desses procedimentos parece-nos muito propício para aplicação em ambientes educacionais, pensando no desprendimento do rigor que o mesmo admite, já que muitas vezes um dos empecilhos para utilização das provas e demonstrações em sala de aula que tem

> sido apresentado, versa justamente sobre a necessidade de um alto grau de rigor, que muitas vezes os alunos ainda não adquiriram (TREVISA, 2013, p. 140 - 141).

É importante ressaltar por último que Lakatos critica o modelo euclidiano de como é apresentado o conhecimento matemático, pois, em sua concepção, os livros que seguem tal modelo quase sempre ocultam os caminhos que tornaram possíveis os resultados ali apresentados:

> A metodologia euclidiana desenvolveu certo estilo obrigatório de apresentação. Vou designá-lo "estilo dedutivista". Este estilo começa com uma lista laboriosamente feita de axiomas, lemas e/ou definições. Os axiomas e definições frequentemente parecem artificiais e mistificadamente complicados. Nunca se fica sabendo como essas complicações surgiram. A lista de axiomas é seguida de teoremas cuidadosamente redigidos. Estes por sua vez estão carregados de pesadas condições; parece impossível que alguém jamais os tivesse suposto (LAKATOS, 1978, p. 185).

1.6 Bachelard: a heurística na constituição do espírito científico

Gaston Bachelard nasceu em Paris no ano de 1884 e morreu em 1962. Ele veio de uma família de classe pobre e sempre trabalhou e estudou concomitante. Tornou-se um dos filósofos mais importantes da contemporaneidade, também foi poeta francês e seus estudos eram focados na teoria do conhecimento nas ciências naturais, mais especificamente em Física.

Ele foi professor de Química e Física em nível secundário e aos 30 anos de idade começa a estudar Filosofia e logo depois também se torna professor dessa matéria. Os seus trabalhos buscaram compreender e desenvolver o significado epistemológico dessa nova ciência, que carecia de uma filosofia científica que abarcasse essa novidade.

Para tanto, Bachelard argumenta que há uma necessidade de ter rupturas epistemológicas entre a ciência contemporânea e o senso comum, ou seja, a nova teoria do conhecimento apresenta descontinuidades com o empirismo. Neste aspecto, no que tange a História das Ciências, ele conjectura que o conhecimento ao longo da história não deve ser tomado em forma de acúmulos, mas sim como rupturas e ramificações por meio de observações de equívocos anteriores.

Para conseguir ultrapassar as barreiras do empirismo, Bachelard julga necessário trazer para a pesquisa cientifica o racionalismo:

> A ruptura entre o conhecimento comum e o conhecimento científico nos parece tão nítida que esses dois tipos de conhecimentos não poderiam ter a mesma filosofia.

> O empirismo é a filosofia que convém ao conhecimento comum. O empirismo encontra aí sua raiz, suas provas, seu desenvolvimento. Ao contrário, o conhecimento científico é solidário com o racionalismo e, quer se queira ou não, o racionalismo está ligado à ciência, o racionalismo reclama fins científicos. Pela atividade científica, o racionalismo conhece uma atividade dialética que prescreve uma extensão constante dos métodos (BACHELARD, 1972, p. 45).

Bachelard discorda, em partes, das teorias de alguns autores apresentados nas seções anteriores. Ele critica, por exemplo, o essencialismo racionalista de Descartes[4] ao afirmar que este filósofo negligencia a Filosofia das Ciências, pois ele usaria equivocadamente a simplicidade como método científico.

Para uma melhor compreensão a respeito das concepções de Bachelard, onde poderemos identificar indícios do pensamento heurístico, é necessário discorremos a respeito do que ele define como obstáculos epistemológicos. Para ele, a superação de tais obstáculos são determinantes para o sucesso de uma pesquisa científica:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 13).

Bachelard elenca dois obstáculos como os principais entraves à consolidação do que ele denomina como espírito científico. O primeiro seria a realidade, na qual encontraremos o empirismo, que ele considera uma ameaça para a teoria do conhecimento. Para ele, "diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber" (BACHELARD, 1996, p. 13). O segundo é o senso comum, que está relacionado com as dificuldades dos cientistas em separar suas opiniões, seus preceitos e suas teorias, do conhecimento teórico científico, que tem como pilar as leis gerais.

Ele também disserta sobre a importância da resolução de problemas como impulsionador do conhecimento científico. Nesse aspecto, ele considera que tal conhecimento deve se iniciar tomando como ponto de partida um problema, e que as respostas para este será a formulação do próprio conhecimento. Isso significa que o conhecimento científico surge como resposta a um problema, ou seja, é

[4]Em Houaiss (2009) podemos encontrar que o essencialismo racionalista é toda filosofia que sustenta que a essência ou forma fundamental dos entes e dos fenômenos precede a existência destes.

"[...] precisamente o sentido do problema que dá a marca do verdadeiro espírito científico"(BACHELARD, 1996, p. 55).

Assim, inferimos que mesmo não se remetendo diretamente à Matemática e também não ao pensamento heurístico, podemos identificar em sua obra a ênfase da construção do conhecimento por meio da resolução de problemas, mediada pela procura e descoberta, o que vem a caracterizar processos heurísticos. Para embasar essa nossa teoria, citamos a sua seguinte afirmação: "Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta à uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído"(BACHELARD, 1996, p. 18).

Corroborando com as teorias de Descartes e Polya, Bachelard também acredita que o conhecimento científico não deva ser encarado apenas como algo pronto, acabado e perfeito. Ao contrário disso, deve-se investigar e levar em consideração todo o processo de formulação e reformulação das ideias que encaminharam a síntese de tais conhecimentos.

Estes fatos caracterizam outra vez a sua propensão em considerar o pensamento heurístico como promotor do conhecimento científico. Nesse contexto ele indaga que:

> Logo, toda cultura científica deve começar, como será longamente explicado, por uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir"(BACHELARD, 1996, p. 24).

Cabe ressaltar por último que Barchelard critica o ensino regular atual que tem ofuscado a formação científica dos estudantes, pelo fato de que esse método de ensino ignora o viés histórico-epistemológico da ciência, que tem uma proximidade com a heurística. Para ele, "a ciência moderna, em seu ensino regular, afasta-se de toda referência à erudição. E dá pouco espaço à história das idéias científicas"(BACHELARD, 1996, p. 34).

1.7 Puchkin: a heurística como precursora do pensamento criador

O livro "Heurística: A Ciência do Pensamento Criador" de V. N. Puchkin, publicado no ano de 1969 esboça um panorama geral a respeito da heurística em diversos aspectos. Isto é, endossa desde o pensamento heurístico presente nas

atividades que permeiam os processos de construção do conhecimento científico, até a heurística como uma intuição capaz de prever e solucionar problemas comuns de natureza não científica.

Nessa sua obra, ele teoriza a relevância em abordar a heurística como sendo uma ciência articuladora que compõe o pensamento criador, que pode potencializar a capacidade humana para prover novas estratégias de resolução de problemas que conduzem à descoberta e a invenção.

Relativamente a esse tema, Puchkin (1969) começa definindo que:

> Pode ser designada pelo nome Heurística a Ciência que estuda as constantes da atividade do pensamento criador. Seus objetivos não se reduzem apenas as pesquisas das constantes do pensamento criador, mas compreendem também a elaboração de métodos e modos de direção dos processos heurísticos. Ultimamente, passaram também ao âmbito da heurística os trabalhos experimentais, através dos quais os cientistas cibernéticos procuram dar formas às manifestações superiores do intelecto humano (PUCHKIN, 1969, p. 8).

Nessa perspectiva, ele conjectura que o pensamento heurístico é uma variável da mente humana que pode gerar novos esquemas de ação, capazes de esclarecer os objetos desconhecidos que entornam a vida do homem. Mais que isso, no que concerne as ideias de Polya, ele concorda com o fato de que o objetivo da heurística é a pesquisa de regras e métodos que direcionam as descobertas e invenções.

Puchkin ressalta também que "primordialmente, podemos definir a heurística como atividade humana que leva à solução de um problema atípico e que como heurísticos os específicos meios elaborados pelo homem no decorrer da solução de certos problemas que, mais ou menos conscientemente, são transferidos para outros problemas"(PUCHKIN 1969, p. 18 - 19).

Ele ainda considera que tal atividade é um processo de ordem psicológica que fomenta o pensamento criador. Para ele, "sem embargo, como base nesse novo e complexo ramo do conhecimento, que é a Heurística, aparece a Psicologia, principalmente sua parte denominada psicologia criadora ou pensamento produtivo"(PUCHKIN 1969, p. 9).

1.8 Bazarian: o papel da intuição heurística na resolução de problemas

Jacob Bazarian foi um filósofo que definiu em seu livro, "Intuição Heurística: uma análise heurística da intuição criadora", alguns aspectos que tangem o incentivo à

criação de metodologias capazes de elucidar problemas, sejam de cunho científico ou não. Em suas teorias, ele considera que:

> A intuição heurística é a musa da criatividade, da descoberta, da adivinhação e da solução de problemas. Quem conhecer o método de intuição heurística terá uma grande superioridade sobre os demais, sob todos os pontos de vista, tanto pessoal como profissional. E o principal - não será atormentado, nem aniquilado sob o peso de problemas não-solucionados"(BAZARIAN, 1986, p. 28).

Nesse contexto, é perceptível sua estima pela intuição heurística como sendo fundamental para o sucesso, quer seja pessoal, profissional ou científico.

Essa sua reverência pela intuição heurística fica mais esclarecida quando analisamos o significado que ele dá a esta intuição. Para tanto, Bazarian (1986) a concebe com dois conceitos complementares:

> 1) É uma forma de conhecimento direto, em que a solução de um problema prático ou teórico é encontrado de modo imediato, repentino, não consciente e sem dados suficientes. (2) É um excelente meio ou método para descobrir ou adivinhar a verdade e pressentir ou achar a solução de problemas pessoais e profissionais que nos preocupam (BAZARIAN, 1986, p. 51).

Como exemplo desse conceito, Bazarian apresenta a descoberta de um dos princípios fundamentais da hidrostática feita por Arquimedes. Isto é, para Bazarian tal descoberta teria sido concretizada por intermédio da intuição heurística.

Corroborando com as teorias de Puchkin, Bazarian concebe a heurística como uma ciência que está intrinsecamente ligada com a criatividade. Para ele, "heurística é a ciência do pensamento criador, o método ou a arte de descobrir ou adivinhar a verdade ou criar algo novo"(BAZARIAN, 1986, p. 48). Finaliza acrescentando também que "[...] em pedagogia, heurística é o método de ensino que leva o aluno a descobrir por si mesmo o que se pretende ensinar"(BAZARIAN, 1986, p. 48).

No entanto, ele alerta ao fato de que "apesar de ser a mais rica operação da mente humana, a intuição heurística é a mais pobre em análise científica" (BAZARIAN, 1986, p. 48). Com isso, essa constatação sugere o teor empírico e até mesmo abstrato que ele dá a intuição heurística.

Assim, finalizando essa primeira parte da tese, constatamos, por meio de uma análise da abordagem heurística nas obras dos autores apresentados que a heurística como ciência é indissociável do desenvolvimento do conhecimento científico, mais especificamente o conhecimento matemático.

Por isso, compreender as teorias de importantes autores a respeito desse tema nos dá o embasamento teórico necessário para prosseguir com a discussão sobre

a relevância do pensamento heurístico matemático como potencialializador do processo de ensino/aprendizagem desse componente curricular.

CAPÍTULO 2

HEURÍSTICA: UM RECURSO PRECURSOR DA CRIATIVIDADE E UM ALIADO NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Como já exposto anteriormente, com base nas teorias dos filósofos e matemáticos apresentados, relativos às atividades heurísticas, abordamos agora essa integrante do pensamento humano como uma aliada no incremento do conhecimento matemático e que, portanto, deve ser encarada como uma ferramenta indissociável no progresso dessa ciência.

Esta questão da preocupação com o desenvolvimento da ciência tem tomado certa notoriedade já há algum tempo devido a vários fatores. Entre eles, podemos citar o bem estar e a necessidade de continuidade da humanidade. No entanto, French (2009) alerta ao fato de que:

> É um pouco de exagero grosseiro, mas não tão distante da verdade, dizer que foi somente com a demonstração potencial da ciência para a guerra, para o desenvolvimento de novas armas, de novas defesas, e assim por diante, que governos e políticos em geral começaram levá-la a sério e digna de investimentos significativos (French 2009, p. 13).

Para os fins dessa tese, independente da pretensão de quem investe e investiga no progresso científico, abordamos agora os aspectos que permeiam e que possibilitam tal progresso. Mais precisamente apresentamos o pensamento heurístico como uma

ferramenta facilitadora na condução de paradigmas propulsores do desenvolvimento científico matemático.

A princípio discorremos sobre as dificuldades da inserção do pensamento heurístico na academia e no ensino básico, como sendo um aliado no desenvolvimento do conhecimento e, portanto uma ferramenta crucial. Em seguida dialogamos sobre a heurística como sendo a geradora de possibilidades que tornam o ambiente propício à criatividade Por fim apresentamos essa criatividade como sendo a desencadeadora de descobertas cientificas.

2.1 A heurística matemática: resistências em inseri-la no meio acadêmico

Para darmos continuidade com a temática em questão, cabe citarmos preliminarmente, e mais uma vez, George Polya. Nesse contexto, ele salienta que o pensamento heurístico não deve ser encarado como uma verdade científica absoluta. No entanto, deve ser compreendido como uma conduta preeminente para a conformação da ciência. Em suas palavras, "se tomas uma conclusão heurística como uma certeza, poderás se equivocar e sentir-se enganado; más se ignoras totalmente as conclusões heurísticas não terás nenhum progresso"(POLYA, 1945, p. 181).

Esse apontamento do autor, e suas próprias concepções sobre heurística, nos direcionam para a via da Matemática Formalista, que busca evitar todo e qualquer tipo de pensamento que se baseia na indução e experimentação. Porém, Polya destaca em sua citação anterior a importância e viabilidade em abordar o pensamento heurístico como um propulsor do conhecimento científico matemático.

Nesse contexto, e considerando os conceitos de análise e síntese, como apresentados no capítulo precedente, podemos observar que a análise, apesar de ter sido teorizada já há algum tempo, ainda hoje sofre bastante resistência para ser apresentada nos livros, didáticos ou científicos, como uma estratégia plausível para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Relativamente a este fato, Llera (2000) indica que:

> Exemplos de análises são raros na matemática antiga e quando ocorrem são geralmente seguidas de suas apresentações em síntese. Este também é o caso da matemática contemporânea: o objetivo é apresentar como um descobrimento, um novo teorema, se deriva dos axiomas já conhecidos e já demonstrados, e não como é que se descobriram esses teoremas e axiomas necessários para poder demonstrar o teorema proposto (LLERA, 2000, p. 12. Tradução nossa).

Essa falta de valorização do pensamento heurístico matemático pode ser encarada como consequência de uma tradição que surgiu desde tempos antigos, nos quais sempre foram valorizados e reverenciados apenas os produtos finais. Isto é, teoremas, axiomas e corolários deixando em um segundo plano, ou até mesmo rejeitando, os caminhos e tentativas falhas, mas que podem ter contribuído de alguma forma com a estruturação de tais produtos.

Assim, um fator que pode ter contribuído, em certa medida, para que tenhamos reproduzido a desvalorização da heurística durante tanto tempo (e que ainda continua) pode ter sido a adesão por quase totalidade dos cientistas dessa área pela corrente de pensamento do formalismo matemático. Como a heurística está intimamente ligada com a intuição, tem certo viés empírico e valoriza a indução e experimentos como fator preponderante na invenção e descoberta, logo, o formalismo evita apresentar em suas obras o pensamento heurístico como um indutor dos conhecimentos ali encontrados. Roque (2012, p. 180) corrobora com nossa teoria ao inferir que "os objetivos e métodos heurísticos dos antigos matemáticos podem ter sido então obscurecidos pela tendência formalista dos comentadores".

Com isso, partindo do pressuposto que somos em certa medida influenciados pelos livros que usamos durante a nossa vida escolar, os quais seguem o formalismo, que se baseia no modelo axiomático e que tem como exemplo mais trivial "Os elementos de Euclides", então somos levados a não pensar heuristicamente na constituição dos conteúdos ali encontrados. Este fato pode apontar para as possíveis causas do elevado número de pessoas que não aprendem Matemática, pois muitas delas têm a falsa impressão de que os conhecimentos apresentados foram criados de modo infalíveis por algumas espécies de deuses e que portanto somente gênios aprenderão Matemática. Discutiremos mais detalhadamente sobre esse tema no capítulo quatro.

Nesse aspecto, Llera (2000) corrobora com nossas conjecturas ao discorrer sobre o fato de que "a apresentação das demonstrações em matemática segue o método dedutivo que herdamos dos Elementos de Euclides, no qual, a partir de certos axiomas básicos, se deduzem todas as verdades geométricas da geometria elementar" (LLERA, 2000, p. 12-13. Tradução nossa). Inferimos assim que esse modelo de apresentação do conhecimento reforça a falsa impressão apresentada anteriormente.

Essa percepção equivocada sobre a construção do conhecimento matemático é muito provável, como já indagamos, que seja resquício da omissão do pensamento heurístico por trás de cada resultado. Este que surge nos livros de modo esquematizado, muitas vezes sem uma introdução histórica e que tomam como fundamentos, axiomas, teoremas e corolários com teor tão complexo quanto os

próprios resultados que se pretendem compreender.

Llera (2000) discorre sobre este aspecto indagando que os livros de Matemática simplesmente omitem o caminho trilhado para se chegar aos resultados:

> Nos livros especializados de matemática as demonstrações se apresentam usando os métodos antes expostos [método euclidiano] e outros mais, porém, nunca se explica por que e como o matemático os escolheu para obter uma demonstração. Este processo não se considera parte da prova, mas da sagacidade do matemático que guarda para si a rota que o levou a sua solução. Também, nas demonstrações não existem rastros das tentativas falhas para obter a prova. Qualquer um que tenha tentado provar teoremas sabe bem que para fazer uma demonstração é muito comum tentar vários caminhos antes de encontrar o êxito (LLERA, 2000, p. 14-15. Tradução nossa).

Relativamente a essa questão, na qual os matemáticos evitam mostrar suas trajetórias heurísticas nas concepções de seus resultados apresentados, Llera (2000) ainda discorre sobre esse tema expondo que apesar de ser uma ciência exata e que portanto seu aparato científico precisa estar bem fundamento e organizado axiomaticamente por meio da lógica. No entanto, para que se consiga alcançar tais resultados, muito provavelmente se percorreu um caminho guiado pelo pensamento heurístico. Este que é de grande valia para a Matemática e que segundo o autor:

> Para Polya, um matemático descobre seus resultados da mesma forma que um biólogo, observando a coleção de suas espécies (sejam números ou plantas) e logo conjecturando suas conexões e relações. A diferença é que a verificação por observação é suficiente para o biólogo, enquanto que o matemático requer de uma prova rigorosa para aceitar o que foi encontrado. No entanto, a forma em que obtém novos resultados é similar e pode guiar-se mediante regras heurísticas (LLERA, 2000, p. 16. Tradução nossa).

Por fim, aspiramos que o pensamento heurístico matemático seja visto como um mediador entre a indução/empirismo e o conhecimento científico e que, portanto, os cientistas o concebam como uma atividade geradora de tais conhecimentos e por isso, de grande importância para a ciência. No entanto, ainda existe uma grande resistência para que isso ocorra. Porém, nesse contexto, French (2009, p. 14) nos respalda como o nosso ideal ao expor que a história das ciências "[...] ilustram como mesmo o que nós hoje consideramos como avanços científicos muito importantes sofreram resistência e inclusive foram rejeitados" (FRENCH, 2009, p. 14).

2.2 Criatividade e heurística matemática

Destacaremos agora, assim como já mencionado na introdução dessa tese, que alguns matemáticos historicamente importantes revelaram os seus pensamentos heurísticos por trás de suas obras, como é o caso de Arquimedes e Pappus, ou seja, expuseram os caminhos que o fizeram conceber os resultados encontrados em seus trabalhos.

Desta forma, podemos observar que essa questão de mostrar como se chegou aos resultados matemáticos também já teve certa relevância para alguns cientistas antigos. Tal fato pode ser observado quando se analisa seus escritos, nos quais eles deixaram explícito a heurística envolvida no descobrimento e expressam a preocupação em fazer com que o leitor compreendesse, como e porque ele pensou daquela maneira.

Nesse contexto, Mendes (2013) argumenta que os trabalhos desses pensadores matemáticos antigos foram importantes para a conformação da ciência matemática que temos hoje e principalmente por ser a base dos conteúdos da matemática escolar. Para ele, o diferencial nos trabalhos dos matemáticos que expõe os meios pelos quais se chegou aos resultados, encontra-se na sua comprovação de que o conhecimento não surge como um lampejo apenas em mentes brilhantes, mas sim a partir da busca de novas estratégias de solução baseadas na criatividade:

> Nesse sentido, os trabalhos de Arquimedes, Galileu, Descartes, Newton, Leibniz e outros matemáticos, trazem em suas obras, comprovações de que o exercício criativo da cognição matemática originou elaborações de extrema relevância para definirmos o contorno dos desafios que levaram à produção de saberes matemáticos atualmente abordados no ensino fundamental, médio e superior (MENDES, 2013, p. 185).

Em relação ao potencial da heurística no desenvolvimento do conhecimento matemático, Mendes (2013) considera que o processo de produção de tal conhecimento, diferentemente de como se apresenta na grande maioria dos livros, não se dá de modo linear. Ao contrário disso, a criatividade nessa área depende de vários fatores que estão muito mais ligados às atividades heurísticas do que de um processo unilateral, dedutivo e infalível. Este autor pondera que:

> O processo criativo não decorre de maneira sistemática e organizada do começo ao fim. As etapas não seguem necessariamente uma sequência linear. Elas podem se desenvolver de acordo com o ambiente estimulador e os desafios que se mostrarem em cada momento da ação cognitiva de quem exercita a criação (MENDES, 2013, p. 188).

Neste contexto de criatividade no âmbito da Matemática, corroborando com as teses de Llera, Mendes (2013) ainda contribui com nossas conjecturas ao discorrer sobre o fato de que, tão importante quanto à solução de um problema, são os meios pelos quais se chegou a ela. E mais que isso, ele indica que investigar os erros cometidos e os caminhos que não deram certo na elucidação do problema pode ser muito frutífero:

> A discussão dos erros em geometria, por exemplo, estimulou os trabalhos desenvolvidos por Ptolomeu, Apolônio, Pappus e outros, ocasionando uma produção matemática decisiva no século XVII, com o trabalho de René Descartes (1637) sobre o discurso do métodoe a solução do problema de Pappus originando assim um novo ramo na Matemática: a solução de problemas geométricos apoiado na resolução de equações, o que desencadeou posteriormente os estudos em geometria analítica. Este parece ser um exemplo singular de criatividade e criação matemática (MENDES, 2013, p. 195).

Nesse âmbito, cabe salientar que o conhecimento prévio de quem vai investigar determinada área do conhecimento é um aspecto importante quando falamos em criatividade matemática. Visto que quando pesquisamos uma área na que já temos certa familiaridade, teremos mais abrangência e perspicácia para captar e criar novas rotas que norteiem tanto o que se pretende elucidar como também visualizar possíveis novas ramificações de tal área.

Em relação a essa afinidade com o que se pretende pesquisar, Mendes (2013) argumenta que:

> Outro fator decisivo na criação e criatividade matemática é o conhecimento que cada um tem sobre o tema que vai investigar, ou seja, sobre os aspectos transversalizantes dos quais a Matemática se nutre para se configurar continuamente. Essas informações conectadas ao conhecimento matemático que se pretende descrever, explicar e formalizar se torna essencial ao desenvolvimento e à implementação de novas ideias (MENDES, 2013, p. 188).

Diante dos argumentos apresentados, podemos intuir que possibilitar um ambiente propício ao pensamento heurístico matemático é uma tarefa que carece de urgência, pois essa atitude pode estabelecer uma nova relação e um novo diálogo das pessoas com esta ciência. Além disso, tal ambiente é fomentador da criatividade e "nessa perspectiva, pensar criativamente é engendrar alternativas, enfrentar desafios, descobrir soluções, ou seja, é saber usar recursos variados que nos possibilitem ir além do que imaginávamos ser possível" (ARAÚJO, 2009, p. 52-53).

Com isso, pensar heuristicamente produz criatividade e esta conduz a novos paradigmas dentro dessa área do conhecimento. Assim, é fundamental que os

caminhos condutores das verdades em Matemática (e até mesmo os não condutores) sejam desvelados, oportunizando o aluno a perceber que tais caminhos não foram únicos, erros podem ter sido cometidos e que portanto ele próprio pode encontrar novas teorias matemáticas por uma via inédita.

Para promover esse pensamento heurístico, estimulador da criatividade, é importante que reformulemos o sistema de ensino/aprendizagem. Quer seja o professor nas escolas modificando suas aulas de expositiva, propedêutica e dedutiva para dialogada, indutiva e colaborativa; quer seja a mudança nas apostilas e livros didáticos, de axiomáticos para um viés mais heurístico. Além disso, uma reformulação dos e nos conteúdos, principalmente em nível básico, também é uma alternativa viável.

A esse respeito, Stein (1974) indica que caso tais mudanças não venham a se concretizar, os espaços para a disseminação da criatividade poderá não se desenvolver, pois para o autor:

> Se aqueles que circundam o indivíduo não valorizam a criatividade, não oferecem o ambiente de apoio necessário, não aceitam o trabalho criativo quando este é apresentado, então é possível que os esforços criativos do indivíduo encontrem obstáculos intransponíveis (STEIN, 1974, p. 12).

Nesse sentido, é importante destacarmos que compete ao sistema educacional, e em particular a nós como professores, reconstruir o modo como temos conduzido o processo de ensino/aprendizagem e como o conhecimento científico tem sido difundido nas escolas. Nessa perspectiva, Mendes (2013) assinala que é imprescindível "um contínuo reinventar-se" no sentido de compreender "os múltiplos processos de problematização, imaginação, formulação e representação do conhecimento, pois é no domínio dessa teia de ações cognitivas que se expressa a criatividade" (MENDES, 2013, p. 191).

Relativamente a esse processo de criatividade, outro aspecto pertinente a ser comentado é que este, conforme alguns estudiosos e contrariamente ao que indicam as academias de artes e ciências, não pode ser considerada apenas como uma aptidão inata, mas sim uma habilidade a ser desenvolvida e aperfeiçoada. Para Mendes (2013):

> Uma indagação frequentemente estabelecidas nos ambientes educativos e nos contextos das academias de ciências e artes refere-se ao ato da criação, tomando sempre como ponto de discussão a criatividade como uma habilidade inerente ao ser humano em seu processo de conhecer, explicar e compreender. Tal inquietação indagativa remete a duas interrogações: por quê e para quê? A esse respeito

> diversos estudiosos no assunto asseguram que a criatividade é uma habilidade humana essencial a ser desenvolvida porque é fundamental para o desenvolvimento do potencial de quem estuda, aprende e produz conhecimento e é essencial para a autonomia do ser humano (MENDES, 2013, p. 189).

Alguns autores apontam para a resolução de problemas como uma estratégia indutora desse processo de criatividade. No entanto, conforme indica Mendes (2013), é importante assinalar que se deve explorar esse método de investigação em todos os seus aspectos, as estratégias iniciais de solução, os caminhos falhos, as possíveis analogias, as verificações das legitimidades atribuídas e por fim a elucidação final.

Esse mesmo autor também argumenta que uma fragilidade da sociedade contemporânea é de dar maior foco e visibilidade apenas aos resultados finais dos problemas e desconsiderar, ou em alguns casos evitar, as técnicas condutoras de tais resultados:

> A árvore do conhecimento que subjaz do discurso do método proposto por René Descartes (1637) nos faz refletir sobre um processo de criatividade na busca de soluções para problemas de explicação dos fenômenos naturais e a sua relação que o estabelecimento de questões gerais e secundárias para solucionar um problema. No decorrer das práticas científicas e sociais de um modo geral, os problemas passaram a ser tomados apenas a partir do caule dessa árvore, depois os ramos e por fim somente às folhas, até o foco ser dado somente à flor e ao fruto (MENDES, 2013, p. 190).

Diante desse cenário cabe apontarmos que é crucial abordar o pensamento heurístico como um possível gerador de novas concepções no âmbito do conhecimento científico, uma vez que a História das Ciências, em particular da Matemática, indicam que boa parte do conhecimento que temos hoje, advierem de um exame minucioso de erros e falhas cometidas por antigos cientistas. Com isso, ressaltamos mais uma vez que, quando se trata do progresso do conhecimento científico, o início e o meio (as estratégias) são tão importantes quanto o fim (os resultados). Isso significa que "A coisa importante na ciência não é tanto obter novos fatos, mas descobrir novas maneiras de pensar a respeito deles" (BRAGG, 1995, p.01).

Assim, em vista do que já foi exposto, podemos inferir que tais erros ou até mesmo inconclusões, são passiveis de serem vistas como uma fonte fecunda de conhecimentos a serem desvelados. Estes podem instigar a curiosidade e promover o surgimento de novas conclusões, onde:

> A beleza e a perspicácia fornecidos pelos novos resultados e enunciados foram fundamentais para se compreender o quanto a curiosidade matemática pode influenciar no processo de invenção e descoberta matemática. Para isso, muitas vezes a investigação de erros nos trabalhos de matemáticos foram a base da criatividade matemática na história desse conhecimento (MENDES, 2013, p. 195).

Neste sentido, podemos afirmar que pesquisar e refazer diversos experimentos que culminaram em teorias matemáticas historicamente importantes são atitudes plausíveis na conformação dessa ciência e que portanto pode ser utilizada como um metodologia de ensino/pesquisa de destacável viabilidade. Ou seja, "as contínuas investigações, indagações e revisões feitas ao conhecimento matemático em diferentes épocas da história constituíram um instrumento extremamente enriquecedor" (MENDES, 2013, p. 195).

2.3 Criatividade e descoberta científica

Após compreendermos a relação entre a heurística e a criatividade, discorremos agora sobre como esta pode promover as descobertas cientificas. Para tanto, cabe citarmos mais uma vez French (2009). Relativamente a esse fato ele argumenta que:

> Nos quadrinhos, a criatividade é muitas vezes representada por uma lâmpada sobre a cabeça do herói. Supõe-se que represente o lampejo da inspiração. De modo semelhante, as descobertas científicas são geralmente caracterizadas como algo que ocorre de repente, em um dramático momento criativo da imaginação, um lampejo de visão ou uma experiência do tipo "aha!" (FRENCH, 2009, p. 16).

Nas idéias desse autor, ele considera que muito provavelmente tais descobertas de fato surgem dessa inspiração e desse momento criativo. No entanto, ele ressalta e alerta ao fato de que não é tão somente assim que uma descoberta científica acontece. Para que ela venha a ocorrer, uma série de fatores que estão intrinsecamente ligados à criatividade entra em cena como, por exemplo, o conhecimento prévio e o domínio de habilidades resolutivas fornecidas pelo pensamento heurístico.

Neste aspecto, Popper (2002, p. 08) indaga que nessas descobertas, além do conhecimento prévio e das estratégias heurísticas do pesquisador entra em cena outro elemento. Para ele, tal elemento seria "minha opinião pode ser expressa com as palavras de que toda descoberta contém "um elemento irracional" ou uma "intuição criativa".

É importante frisar aqui que esse elemento propulsor da descoberta, elencado por Popper, estão relacionados com as concepções filosóficas da heurística matemática, como apresentadas por Puchkin e Bazarian no capítulo 1. Corroborando com as teorias desses autores, French (2009, p. 32) também argumenta que "uma heurística está em algum lugar entre a formalidade límpida da lógica e o lampejo aparentemente caótico e irracional da inspiração".

Frente a essa emblemática intuição apontando para um caráter mais irracional da heurística, o que leva muitos cientistas a caracterizarem com um viés de pouca ou nenhuma validade científica, French (2009) argumenta que de fato não se deve embasar o conhecimento cientifico nestes elementos irracionais. Entretanto, para ele não são nestes elementos que a heurística se apóia. Na verdade, ela se encontraria numa fronteira muito tênue entre o conhecimento formal prévio e a inspiração. Nessa acepção do autor ele indica que:

> Ora, não estamos sugerindo que os cientistas, ao tentarem criar novas hipóteses ou teorias, usem esse tipo particular de heurística. Contudo, eles usam algo similar, que tem a mesma espécie de caráter. Em particular, o domínio da descoberta científica está estruturado de uma certa maneira, por meio da qual ele não é distinguido simplesmente pelo momento eureca ou pelo lampejo de gênio, mas incorpora certos movimentos e abordagens que conduzem os cientistas para onde eles precisam ir (FRENCH, 2009, p. 36).

Essa visão da heurística como uma atividade da intuição e de pouca validade para a ciência, muitas vezes está relacionada com o equívoco dos cientistas de áreas diferentes ao considerarem que muitas descobertas se deram por um lampejo de gênio. Em muitos desses casos, tais descobertas se concretizaram, não por uma inspiração intuitiva e irracional, mas sim por um processo heurístico que criou, com base em conhecimentos científicos prévios do pesquisador, novos caminhos que culminaram na elucidação do problema.

Podemos citar aqui que esse é o caso da famosa anetoda de Arquimedes, onde muitos livros relatam que ao tomar banho, mergulhando em uma banheira, teve um lampejo genial e descobriu como provar se a coroa do rei de Híeron tinha sido falsificada ou não. Assim, ao contrário dos livros, conjecturamos que, independente da veracidade desse fato, é muito mais provável que Arquimedes tenha descoberto como demonstrar a falsidade da coroa com base em seus conhecimentos acumulados, referente à densidade dos corpos, fluídos, volumes, massa, entre outros, e que, em um momento de relaxamento, fez sinapses entre esses conhecimentos e, heuristicamente, conseguiu resolver o problema em questão. A mesma inferência serve para a anetoda de Isaac Newton, que ao ver uma maçã cair em sua cabeça, teve uma intuição genial, e formulou a lei da gravidade.

Nesse aspecto, French (2009, p. 36) corrobora com essa nossa constatação ao afirmar que "[...] contudo, uma grande quantidade de criações que são atribuídas ao "gênio" e à "criatividade" podem ser entendidas como a percepção e a exploração judiciosas de uma situação heurística particular." E mais incisivo ainda nessa

questão, ele conclui que "a descoberta não acontece num "lampejo de gênio" ou num momento eureca"(FRENCH, 2009, p. 47).

Por fim, no que tange a descoberta científica, French (2009) indica três pontos importantes como sendo os propulsores desta descoberta: o conhecimento prévio, o experimento e a construção do modelo teórico. Assim, observamos que o progresso do conhecimento matemático se dá pelo enlace desses três elementos, onde os dois primeiros conduzem à atividade heurística para possibilitar a construção do terceiro e consequentemente engendrar o desenvolvimento desta ciência.

De fato, com a finalização desse capítulo, podemos observar que a heurística matemática é passível de ser vista como uma impulsora do progresso dessa ciência. Apesar de ainda haver muita resistência para a sua abordagem como uma aliada ao descobrimento cientifico, pudemos observar, e com base no que mostram a História das Ciências, que muito do conhecimento que temos hoje foi consequência do estudo do pensamento heurístico de antigos cientistas, onde observamos erros, acertos e caminhos alternativos, mas, principalmente, encontramos os problemas de investigação que possibilitaram impulsionar, com base na heurística, as diversas ramificações da Matemática que temos hoje.

CAPÍTULO 3

A PERCEPÇÃO MATEMÁTICA DOS ALUNOS E PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO: QUAIS SERIAM OS PRINCIPAIS AGRAVANTES DO INSUCESSO NO PROCESSO DE ENSINO/APRENDIZAGEM?

Agora, com base nos argumentos apresentados nos dois capítulos anteriores, seguiremos expondo dados e argumentos que nos nortearão para responder aos questionamentos dessa tese. Para tanto, discutiremos sobre a visão dos alunos e professores com relação à Matemática escolar, expondo suas percepções e indagações, procurando encontrar possíveis indicadores do desinteresse por este componente curricular.

Nessa perspectiva, seguiremos explanando (assim como já citado na introdução) que essa disciplina tem se tornado um grande problema na vida escolar dos alunos. Temos visto corriqueiramente pesquisas apontarem que a grande parte deles expressam que antipatizam com a Matemática, que não conseguem compreendê-la e que esta apenas tem sido uma barreira de aprendizagem intransponível na escola.

São várias pesquisas atuais que trazem essas informações. Por exemplo, os

trabalhos de Ferreira (1998), Rodrigues (2001), Santos (2008), Bretas (2007), Pacheco e Andreis (2018), Tatto e Scapin (2004), Lima (1995), Lorenzato (2010), Conceição, Mendes e Borges (2015) e Prediger (*et al.*, 2009). Assim, para enriquecer nossas considerações, traremos para discussão os resultados apresentados por esses autores.

Para tanto, é importante começarmos relatando que a Matemática, como disciplina escolar, tem tomado cada vez mais destaque relevante quando comparada com as demais disciplinas. Mas essa notoriedade não deve ser encarada apenas como aspecto positivo. Ao contrário disso, esse destaque tem se alastrado muito mais pelos problemas na aprendizagem dessa matéria (fatores negativos) do que pelo seu importantíssimo papel na sociedade (fatores positivos).

Tal destaque pode ser identificado frequentemente nas conversas entre estudantes da escola básica, quando estão se referindo as disciplinas da grade curricular. Eles abordam a Matemática como sendo uma protagonista, mesmo que às vezes vilã. Muitos a apontam negativamente. A grande maioria, como sendo complexa, entediante, frustrante, incompreensível e traumatizante. Outros, uma ínfima parte deles, a consideram como uma propulsora de conhecimentos, de fácil aprendizado e ferramenta facilitadora na resolução de problemas.

Nesse contexto, é importante deixar registrado que são diversos aspectos que acabam por suscitar nessa antipatia pela Matemática. O primeiro deles seria o fato de que, por ser uma disciplina aonde os conteúdos vão avançando sequencialmente com o nível de escolaridade, ou seja, seguem uma progressão de conteúdos onde o anterior é uma ponte para o subsequente, então os alunos que perdem alguma parte dessa sequência não conseguirão compreender de imediato (e não compreenderão enquanto essa lacuna anterior não for preenchida) o novo assunto a ser aprendido. Assim, em certa medida, eles passam a construir uma relação negativa com a aprendizagem matemática.

Concordando com essa nossa constatação, Silva e Martinez (2017) considera também que:

> Percebe-se muitas vezes a existência da relação entre o desinteresse e a consequente desmotivação dos estudantes com o déficit de aprendizagem, pois o conteúdo que o professor está ensinando, muitas vezes, não é compreendido devido às lacunas conceituais, ou seja, algo que ficou para trás no decorrer do Ensino Fundamental (SILVA e MARTINEZ, 2017, p. 11840).

Um segundo ponto, que acreditamos ser o condutor de tal antipatia, é o próprio sistema educacional que nos impõem limitações. Como já discorremos na introdução,

somos constantemente podados, tanto como alunos quanto como professores. Temos uma ementa ultrapassada que deve ser seguida fielmente, já que os sistemas de avaliações a cobram, o que acarreta em ter que ensinar conteúdos mais rapidamente, mesmo que a grande parte dos alunos ainda não tenham compreendido. Temos poucos recursos e infra-estruturas disponíveis, o que acaba nos induzindo a seguir exclusivamente o ensino tradicionalista. Temos uma sobrecarga de estudantes por sala, o que acaba por não tornar factível um acompanhamento mais especializado, quando necessário.

No que se refere a essas limitações existentes em nosso modelo atual de educação, Santos (2008) certifica nossas conjecturas:

> Como estudantes ou como professores somos testemunhas de práticas na escola que tendem a inibir nossa participação, a calar nossas questões e dúvidas, que não nos encorajam a discutir, por exemplo, situações e idéias matemáticas, nossas estratégias e soluções para problemas propostos, promovendo a condição de indivíduos isolados num espaço. (SANTOS, 2008, p. 33-34).

Sendo assim, muitas problemáticas têm conduzido os alunos a não se interessarem pelas aulas de Matemática. E, se tratando desses aspectos, Ferreira (1998, p. 20) argumenta que "ao perceberem a matemática como algo difícil e não se acreditando capaz de aprendê-la, os estudantes, muitas vezes, desenvolvem crenças aversivas em relação à situação de aprendizagem, o que dificulta a compreensão do conteúdo e termina por reforçar sua postura inicial, gerando um círculo vicioso".

Dessa forma, partindo desses apontamentos, seguiremos agora para uma discussão mais detalhada acerca desse desafeto dos alunos para com a Matemática. Buscaremos assim apresentar os principais indicadores desses problemas, nos subsidiando das pesquisas já realizadas pelos autores anteriormente citados. Para tanto, começaremos discutindo sobre as principais causas do fracasso na aprendizagem dessa disciplina.

3.1 O insucesso dos alunos na aprendizagem matemática

É um fato conhecido por todos que a Matemática como componente curricular não tem conseguido atingir os resultados esperados. Com o passar dos tempos temos visto cada vez mais um elevado número de informações que mostram o quanto está sendo falha a construção do conhecimento matemático pelos alunos.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática para o Ensino Fundamental já vem sinalizando há anos que, apesar da relevância da Matemática para a nossa sociedade, o seu aprendizado tem sido irrisório. Fato este que suscitada preocupações entre as pessoas:

> O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem (BRASIL,1997, p. 15).

Salientamos que esses resultados negativos podem ser facilmente encontrados nas principais pesquisas nacionais, como o SAEB, e internacionais, como o Pisa, que o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Elas indicam que nossa educação básica, especificamente em Matemática, quase não tem progredido nos últimos anos.

Pesquisadores apresentam algumas conjecturas para esse fracasso. Lorenzato (2010), por exemplo, acredita que isso tenha relações diretas com os primeiros anos escolares. Para ele, se o aluno tiver sucesso nas séries iniciais a tendência é que isso se perpetue e, caso haja o insucesso, é pouco provável que este estudante se sobressaia na Matemática, na medida em que os níveis escolares forem aumentando.

Com essa mesma reflexão, Pacheco e Andreis (2018) indica que, além desse último apontamento, outras fatores são passíveis de serem vistos como agravantes desse insucesso:

> As dificuldades de aprendizagem em Matemática podem estar relacionadas a impressões negativas oriundas das primeiras experiências do aluno com a disciplina, à falta de incentivo no ambiente familiar, à forma de abordagem do professor, a problemas cognitivos, a não entender os significados, à falta de estudo, entre outros fatores (PACHECO e ANDREIS, 2018, p. 106).

Lima (1995, p. 03) também ressalta a questão da falta de incentivo dos familiares e da ausência de metodologias mais efetivas por parte dos professores, como complicadores do rendimento em Matemática. Para este autor a "pouca dedicação aos estudos por parte dos alunos (e da própria sociedade que os cerca, a começar pela própria família) e despreparo dos seus professores nas escolas que frequenta" estariam no cerne dessa problemática.

Em relação à omissão da família como apoio e incentivo ao aprendizado da Matemática, Brum (2013) argumenta que "os pais têm se omitido da vida escolar de seus filhos, e estão cada vez mais terceirizando sua educação, jogando essa

responsabilidade para a escola". O que nos leva a inferir que esta omissão poderia estar agravando, em certos casos, as dificuldades dos alunos nesse componente curricular.

Nesse contexto, Pacheco e Andreis (2018) delegam a família um papel importante no que tange a vida escolar dos seus filhos, em especial quando se refere a aprendizagem Matemática:

> A família tem um papel importante na vida escolar dos alunos, logo sua atuação é extremamente necessária para obter-se um bom rendimento escolar. Assim, o papel não é só dos educadores, pois a família também faz parte do processo de aprendizagem do aluno, uma vez que as atitudes da família influenciam na forma como o aluno interioriza novas concepções (PACHECO e ANDREIS, 2018, p. 108).

Sendo assim, diante do afastamento da família do processo educativo, Pacheco e Andreis (2018, p. 111) são incisivos ao afirmarem que "esta falta de apoio pode ter como consequência o desinteresse pelas atividades, acarretando um baixo índice de rendimento em Matemática". Mais que isso, consideram ainda que "as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Matemática são muitas, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores". Para estes autores, estas dificuldades são resultados de um complexo de elementos que culminam em uma aprendizagem deficiente. Entre elas a "falta de compreensão e interpretação; o aluno não se lembra dos conteúdos dos anos anteriores; forma com que o professor apresenta o conteúdo e falta de incentivo da família" Pacheco e Andreis(2018, p. 113).

Consideramos também que estas dificuldades, além dos agravantes já relatados, podem ser decorrentes da própria epistemologia da Matemática que, como tem sido trabalhada em grande parte das escolas, utiliza-se de um aparato simbológico rebuscado, o qual pode prejudicar o entendimento dos que não tem familiaridade com tais símbolos. Assim, os alunos ao se depararem com esses empecilhos, muitas vezes não compreendem o funcionamento dos encadeamentos lógicos que envolvem estes símbolos, indispensáveis na Matemática e, portanto, "[...] a falta de compreensão dos alunos os conduz a acreditarem que a Matemática é difícil e que eles não são inteligentes, entre inúmeras outras consequências maléficas" Lorenzato (2010, p. 04).

Por último, apresentamos os resultados da pesquisa de Bessa (2007, p. 02), o qual elenca cinco fatores como sendo os principais contribuintes para esse insucesso escolar. O primeiro seria as "dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência Matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações

básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações". O segundo seriam as "dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e a fatores emocionais acerca da Matemática". O terceiro as "dificuldades relativas à própria complexidade da Matemática, como seu alto nível de abstração e generalizações, a complexidade dos conceitos e de alguns algoritmos". O quarto as "dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas alteradas" e por fim, ele considera a "dificuldade originada no ensino inadequado ou insuficiente".

Dessa forma, com base nas exposições apresentadas, acreditamos que de fato todos esses tópicos (a defasagem, a ausência da família, a complexidade simbólica e o ensino inadequado) são indicadores do fracasso que encontramos na instrução da Matemática escolar pelos alunos. Julgamos que além desses, ainda existam outros fatores que não foram abordados nessa pesquisa, mas que juntos tornam-se dificultadores no processo de construção do conhecimento matemático.

3.2 O que tem levado um grande número de alunos do ensino básico não considerarem a Matemática uma disciplina atrativa?

Em decorrência dos argumentos apresentados na seção anterior, discorremos agora sobre a falta de interesse dos alunos pelas aulas de Matemática. Além disso, buscaremos encontrar relações entre o insucesso nessa disciplina com a falta de afeição pela mesma. Conforme acreditam Pacheco e Andreis(2018, p. 106), "o insucesso de muitos estudantes é um fator que os leva, cada vez mais, a terem certa aversão a essa disciplina, desenvolvendo dificuldades ainda maiores com o passar dos anos escolares".

Para tanto, começaremos expondo que é uma afirmação inquestionável na contemporaneidade que a Matemática é um complexo de conhecimentos que são fundamentais para atuarmos com discernimento em quase tudo na nossa sociedade. Desde as tarefas mais simples, como ir ao mercado ou preparar uma refeição, até outras mais complexas, como sincronizar o funcionamento dos semáforos das cidades ou possibilitar construções engenhosas.

Nesta perspectiva, devido a toda essa aplicabilidade e importância, é muito evidente que essa disciplina tenha um destaque notório na comunidade escolar. Santos (2008, p. 27), argumenta que "dentro ou fora da escola há razoável acordo sobre a necessidade de se ensinar e aprender matemática, dado que se reconhece

que noções matemáticas estão na base de boa parte das atividades desenvolvidas na vida".

Em decorrência disso, é crucial destacarmos que em grande medida, há um consenso entre as pessoas sobre a importância da Matemática no que concernem os afazeres nos mais diversos âmbitos da sociedade. De fato, os alunos, seus familiares e a população em geral delegam essa responsabilidade para a Matemática, considerando-a uma ferramenta inseparável dos mais variados aspectos que circundam as nossas vidas.

A quase totalidade de educadores, matemáticos, filósofos e cientistas em geral, também corroboram com essa nossa afirmação. Bretas (2007, p. 15), por exemplo, indica que "a maioria dos alunos reconhece a importância da Matemática. Vêem nela a oportunidade de entrar no mundo do trabalho e também como uma disciplina que se aplica no cotidiano". Nessa mesma linha de raciocínio, Rodrigues (2001, p.11) constata que "quanto a Matemática, os alunos a consideram como sendo um conhecimento importante para o mundo do trabalho e de modo geral, para as atividades cotidianas".

No entanto, contraditoriamente ao que deveria ocorrer, já que quase todas as pessoas reconhecem a onipresença que tem a Matemática em nossas vidas, essa mesma grande maioria apresenta relações conflituosas com a disciplina a qual dão tanto prestígio. São muitos os que possuem traumas e indiferenças quando se refere à aprendizagem matemática.

Em relação a esta contradição, Santos (2008), com base nos resultados das suas pesquisas, explana que:

> A unanimidade, entretanto, é oposta quando a resposta se refere à experiência de cada um como aluno em matemática. Expressões frequentemente enunciadas na escola ou fora dela revelam certo pessimismo em contraste com o entusiasmo manifestado anteriormente: "a matemática é difícil", "a matemática é chata", "eu não consigo entender", "tenho horror à matemática", "é o bicho papão da escola" (SANTOS, 2008, p. 28).

Diante disso, percebemos que esta unanimidade com relação à importância e ao significado positivo, dado pelas pessoas à Matemática, é desfeita quando se trata das experiências individuais de cada um com esse componente curricular. Santos (2008, p. 28) conclui seus argumentos presumindo que "em resumo, há um consenso quanto à importância e utilidade da matemática na vida dos cidadãos e, contraditoriamente, há quase uma unanimidade em afirmar que mesmo sendo necessário, aprender matemática não é tarefa das mais fáceis e agradáveis".

Para tentar entender essa contradição, abordaremos algumas pesquisas que conduzem a possíveis indícios que podem ter causado (e estar causando) o distanciamento das pessoas em relação ao compreender e desenvolver em si mesmos os processos de construção do conhecimento matemático. Levando-os ao desinteresse pelas aulas, considerando-a uma matéria incompreensível e entediante, possibilitando muitos traumas em suas vidas escolares.

Neste contexto, as principais pesquisas mostram que essa aversão com a aprendizagem matemática não é consequência somente dos modelos de ensino exclusivamente tradicionalista, mas sim em decorrência de outros fatores que ultrapassam as barreiras das escolas.

Alguns autores acreditam que tais aversões advieram desde as civilizações clássicas. Como é o caso da Grécia Antiga, na qual os candidatos a participar da Escola de Pitágoras[1] eram obrigados a passar por um processo de seleção exótico, com problemas quase indecifráveis. Tatto e Scapin (2004) relatam que:

> No século VI a.C., a Aritmética e a Geometria começaram a ser tratadas como ciências, então, nesta época começaram a aparecer os filósofos de Pitágoras (pessoas que pretendiam pertencer ao Instituto de Pitágoras - nesta época a Matemática era vista com caráter religioso). Para o candidato pertencer ao Instituto de Pitágoras era obrigado a passar a noite em uma caverna que havia nas proximidades da cidade, onde se lhe fazia crer que existiam monstros e se davam aparições. Aqueles que não tivessem coragem para suportar as impressões fúnebres da solidão e que se recusassem a entrar na caverna, ou que saíssem antes do amanhecer, eram julgados incapazes para a iniciação e despedidos. A prova moral era mais séria. Bruscamente, sem preparação prévia, o candidato (o discípulo) era trancado em uma cela, onde deveria descobrir o sentido de um dos símbolos pitagóricos, por exemplo: "Que significa o triângulo inscrito em círculo?" ou "Por que é que o dodecaedro compreendido na esfera é a cifra do universo?". O candidato passava doze horas trancado nesta cela tentando decifrar o seu problema, sem outra companhia a mais que um vaso com água e pão seco. Após as doze horas ele era conduzido a uma sala, com a presença de todos os noviços reunidos, que nessa circunstância, tinham ordem de zombarem sem piedade do infeliz, o qual, aborrecido e com fome, parecia um criminoso. Irritado pela gozação, humilhado por não ter podido decifrar o enigma incompreensível, deveria fazer um esforço enorme para conter-se (TATTO e SCAPIN, 2004, p. 04).

Assim, com base na exposição desses autores, os candidatos a aprendizes da escola de Pitágoras passavam a ter uma visão distorcida a respeito da Matemática,

[1]Para Mol (2013, p. 33) a Escola de Pitágoras foi uma irmandade religiosa, filosófica e científica, uma escola de pensamento onde o racionalismo grego convivia com elementos de misticismo. A Escola Pitagórica dava destaque a quatro campos do saber: aritmética, música, geometria e astronomia. A concepção pitagórica do universo era aritmética: "todas as coisas são números", segundo Pitágoras. Os números, elementos básicos da filosofia pitagórica, eram tratados como entidades místicas e objeto de devoção.

considerando-a de caráter sobrenatural e que apenas pessoas especiais poderiam compreendê-la. Dessa forma, conjecturamos que essa percepção pode ter se propagado ao longo do tempo e ser ainda hoje uma das causas das aversões para com essa ciência.

Essa teoria é embasada por outros autores ao afirmarem que já se tem enraizado na sociedade um mito (que muito provavelmente adveio de antigas civilizações) a respeito da Matemática, onde esta seria uma Ciência extremamente complexa e que somente gênios a compreendem. Nesse contexto, Bretas (2007, p. 01) indica que "a Matemática é cercada de mitos tais como: "é a disciplina mais difícil de se aprender", é o "bicho de sete cabeças" e só "pessoas inteligentes são capazes de aprendê-la". Isso faz com que muitos alunos se julguem incapazes de aprendê-la, sintam medo da disciplina e manifestem um sentimento negativo em relação à mesma".

No que concerne essa hipótese, Santos (2008), também respalda as conjecturas de Tatto e Scapin (2004) e Bretas (2007, p. 01), quando se trata dessa crença que coloca a Matemática em um patamar superior. No entanto, ele considera que é o contato direto do aluno com esta disciplina que de fato possibilita a impregnação de aversões. Em seus estudos esse autor julga que:

> Embora já se tenha criado um folclore a respeito da matemática que acompanha a sua história e transcende a instituição escolar, é o contato com a escolarização, por mínimo que seja, que permite ao cidadão estabelecer relação com noções matemáticas, sabendo que se trata de matemática. Essa experiência, ao contrário do que deveria, pode até ser suficiente para explicitar a importância, mas não para firmar uma aproximação prazerosa e significativa dos aprendizes com a matemática. A relação estabelecida é marcada por sentimentos confusos, rejeições, estigmas. O destino de muitos dos alunos, no que se refere à sua relação com a matemática, é selado logo nos primeiros anos de escolaridade e as razões para isso são várias (SANTOS, 2008, p. 28-29).

Nesse contexto, podemos perceber que existem outros indícios que apontam para essa aversão. Tatto e Scapin (2004), por exemplo, ainda argumentam que outra possível causa da rejeição a Matemática pode ser em decorrência do contato das crianças, mesmo bem antes de iniciarem seus estudos, com amigos e familiares que tiveram experiências negativas com essa disciplina:

> As experiências positivas ou negativas no convívio familiar e escolar no uso dos números, ou mesmo o próprio descaso pode marcar indelevelmente a criança e estruturar um sentimento de rejeição que se manifesta conscientemente no momento que ingressa na escola. Determina um comportamento de rejeição, antes do discernimento pessoal. Por exemplo, quando uma criança, antes mesmo de ingressar em uma escola, ouve os pais, irmãos ou amigos mais velhos falar que a Matemática é

> difícil e que não gostam dela, esta criança mentaliza isto inconscientemente e, quando inicia sua vida escolar e tem seus primeiros contatos com a Matemática, ao encontrar obstáculos e dificuldades, torna aquela idéia que ela tinha, inconscientemente, mentalizada sobre a Matemática consciente e passa, então, a concluir como seus pais, irmãos ou amigos, que a Matemática é realmente difícil, desenvolvendo um sentimento de rejeição a ela (TATTO e Scapin, 2004, p. 08).

Essa exposição dos autores sugere que o desinteresse dos alunos pode ser encarado como fruto de preconceitos, que muito provavelmente foram propagados pela comunidade que os cercam. Dessa forma, ao chegarem à escola, já possuem uma idéia preconcebida com respeito à aprendizagem da Matemática e, ao terem uma primeira dificuldade com a matéria, podem bloquear automaticamente outras formas de aprender o conteúdo. Assim, passam a sentir na prática (mesmo que equivocadamente) aquilo que sempre o fizeram crer como verdade. Com isso, percebemos que a cada dificuldade encontrada, os alunos podem ir adquirindo indiferença com a disciplina, acarretando nesses desinteresses.

Confirmando as idéias de Tatto e Scapin (2004), Coll (1995) também considera que o contato dos alunos com as pessoas do seu grupo familiar e de amigos pode os conduzir a preconceberem uma interpretação coletiva da Matemática:

> As representações sociais que alunos têm da Matemática podem também influenciar os seus desempenhos. Quando os alunos chegam à escola, já têm uma representação da Matemática, uma vez que estas não se constroem no vazio social, sendo influenciadas pelas vivências pessoais, pelas interações que estabelecemos e pelo meio sociocultural em que estamos inseridos (COLL, 1995).

Neste contexto, ainda é importante destacarmos também que os alunos ao se depararem com situações matemáticas que requerem um pouco mais de raciocínio lógico e abstrações, acabam por considerá-la muito complexa e, em alguns casos, desistem de aprender certos conteúdos e isso vai defasando o seu aprendizado, levando-os a situações desconfortáveis e conflitantes com a matéria. Ou seja, quando eles inferem que a Matemática é difícil e que não são capaz de aprendê-la, então "[...] desenvolvem crenças aversivas em relação à situação de aprendizagem, o que dificulta a compreensão do conteúdo e termina por reforçar sua postura inicial, gerando um círculo vicioso" (FERREIRA, 1998, p. 20).

Ainda sobre essa temática, Pacheco e Andreis (2018, p. 107), acreditam que "uma criança que, antes de entrar na escola, escuta de seus familiares e amigos que a Matemática é difícil e que não gostam dela, acaba tendo seu primeiro contato com essa disciplina de forma negativa". Sendo assim, o ambiente onde vive os

alunos antes de ingressarem na escola pode ser decisivo no interesse ou aversão pela Matemática.

Essas nossas hipóteses são reforçadas pelos estudos de Tatto e Scapin (2004, p. 12). Em suas pesquisas estes autores concluíram que um dos motivos da rejeição a Matemática é o contato dos alunos com pessoas que tiveram relações hostis com esta disciplina. Estes autores alegam que "foi possível constatar que realmente as causas da rejeição podem estar ligadas diretamente com o meio em que o aluno vive, ou seja, com os pais, professores e amigos [...]".

Com essas explanações podemos perceber que são inúmeros os fatores que contribuem para o desinteresse dos alunos com essa disciplina. Mais que isso, é inegável o fato de que ela é uma das que mais causam desconforto para a comunidade escolar. Sobre isso, Rodrigues (2001, p. 10), argumenta que "a matemática tem sido apontada como a disciplina que mais suscita dúvidas e questionamentos dentro do contexto escolar, provocando desde a indiferença por parte dos alunos até traumas pessoais".

Esse argumento nos leva a discorrer sobre a questão dessa disciplina ter se tornado um caos nas escolas. Como já relatamos, diversas pesquisas indicam que a quase totalidade os alunos declaram explicitamente sua aspereza com esse componente curricular. Muitos a apontam negativamente como a principal causa do seu insucesso escolar. Mais que isso, "Alguns abandonam a escola alegando que não aprendem a Matemática, que não tem jeito, nunca vão conseguir e acabam desistindo dos estudos (BRETAS, 2007, p. 12). Certificando essa constatação, Reis (2005) também indica que essa disciplina tem se tornado cada vez mais um problema para os alunos, que a vêem como uma matéria de compreensão inexequível:

> É fácil observar na comunidade escolar que a relação entre aluno e Matemática não é das mais amistosas. Muitos são enfáticos quando afirmam não gostarem desta disciplina, até mesmo os alunos que têm bom rendimento declaram sua rejeição, não sentem prazer em resolver problemas de Matemática, declaram ainda que não gostam das aulas, pois são muito chatas. Que não entendem nada do que o professor fala, dentre outras queixas. Este fato pode ser observado desde os primeiros anos de escolarização até os cursos superiores (REIS, 2005, p. 04).

Nesse contexto, grande parte dos pesquisadores evidencia que a rejeição a Matemática está presente em todas as etapas de ensino. Para Tatto e Scapin (2004, p. 02), "em todos os níveis de ensino, desde o aluno que ingressa nos primeiros anos, até o ensino superior, encontramos esta rejeição na afirmação de que a Matemática é difícil". Ou seja, para eles os problemas quando se trata em aprender Matemática se propagam desde o Ensino Fundamental até os níveis mais

elevados. Os alunos não se sentem confortáveis com esta matéria e "até escolhem profissões nas quais a Matemática não esteja presente, antes mesmo de conhecer suas aptidões e interesses".

Além disso, outros pesquisadores também consideram que essa rejeição vai aumentando com o decorrer dos anos escolares. Quanto mais alto o nível, no ensino básico, maior é o índice de rejeição. Soares (1999, p. 01) discorre que "[...] um número muito grande de alunos do Ensino Médio e Superior afirma que até determinado momento de sua escolarização não tinha a menor dificuldade na disciplina Matemática". Ou seja, para este autor o desinteresse surge em algum momento da formação básica do aluno e então vai se agravando, isto é, "no decorrer da sua caminhada escolar, esse prazer, para muitos alunos, vai se transformando em desprazer e torna-se um obstáculo para a aprendizagem".

Nesse contexto, Conceição, Mendes e Borges (2015), também concordam com as indicações de Soares (1999, p. 01). De fato os alunos vão perdendo o encantamento pela Matemática com o passar dos anos escolares, pois esta matéria deixaria de ser algo mais concreto e factível e passaria a tomar feições mais abstratas e complexas:

> O entusiasmo dos alunos nos primeiros anos do ensino faz com que a matemática seja algo novo e atraente, tornando os números algo mágico, como por exemplo '1 + 1 = 2; 2 + 2 = 4', e todo esse entusiasmo torna-se, muitas vezes, em frustrações quando se percebe que toda essa magia é muito mais complexa e, ao mesmo tempo, importante para todas as áreas de atuações. A medida que os estudos avançam, começam a surgir as dificuldades: surgem as expressões algébricas, com as famosas letras, chamadas incógnitas e, quando surgem as primeiras dificuldades, a maioria dos alunos acha que sua vocação não está relacionada à matemática (CONCEIÇÃO, MENDES e BORGES, 2015, p. 02).

As pesquisas de campo efetuadas por Prediger, Berwanger e Mors (2009), confirmam as conjeturas desses dois últimos autores. Como resultados de tais pesquisas, os autores averiguaram que "os alunos que responderam que o interesse por matemática diminuiu com o passar dos anos, apontam que a matéria tornou-se muito difícil: nos primeiros anos era mais fácil e agora é chato e cansativo" (PREDIGER, BERWANGER e MORS, 2009, p. 28).

Concluindo com essa pauta, sobre avanço nos níveis escolares e rejeição pela Matemática, destacaremos ainda os resultados das pesquisas de Ferreira *et al.* (2011, p. 05). Em suas investigações, esses autores observaram que "nas turmas de 6° ano, os alunos dizem que gostam das aulas de Matemática. Porém, no 7° e 8° anos eles as julgam "chatas" e os alunos do 9° ano classificam-nas como ruins". Corroborando assim com as constatações dos autores precedentes.

Ainda com relação às causas da rejeição a Matemática, as pesquisas de Tatto e Andreis (2004) também esboçam que essa problemática poderia ser encarada como consequência de certo comodismo dos alunos que são displicentes quando se trata em estudar as matérias que exigem um pouco mais de raciocínio e concentração. Estes autores verificaram que "Durante as entrevistas alguns alunos admitiram que não gostam da Matemática devido a alguns conteúdos exigirem raciocínio, eles preferem outras disciplinas que basta apenas decorarem alguns conceitos para irem bem em provas e trabalhos [...]" (TATTO e ANDREIS, 2004, p. 12).

Em síntese, estes últimos autores concluíram suas pesquisas expondo que são diversos os elementos que contribuem para a rejeição a aprendizagem da Matemática. Entre os quais eles acreditam que existam sete que são os mais incisivos. São eles: a idéia pré-concebida de que a Matemática é difícil pelas experiências negativas passadas; a falta de interesse e a uma auto-imagem negativa que o aluno tem de si próprio; a falta de apoio familiar; a falta de motivação devido aos conteúdos não terem uma aplicação prática; a falta de incentivos de alguns professores e a formação não específica; ao relacionamento humano em conflito; ao condicionamento, à passividade e ao uso da memória em detrimento do raciocínio.

Com isso, poderíamos ainda trazer para um dialogo final a respeito dessa problemática no âmbito da Educação Matemática as análises de Reis (2005, p. 04). Para este autor é inegável que a Matemática é uma ciência de natureza complexa e que por isso, em certa medida, tenhamos tantas aversões e defasagens em relação à sua aprendizagem. Ou seja, "talvez por ser tão rígida provoca certo medo aos alunos que a acham difícil criando assim uma relação áspera, às vezes até traumática que pode culminar em dificuldade, falta de interesse e rejeição".

Diante de todas essas prováveis causas da rejeição à Matemática que elencamos, acreditamos que cada uma delas tenha, em certa medida, uma parcela de contribuição para essa antipatia. O que vem a depender de cada caso. No entanto, devemos nos atentar ao fato de que essas adversidades no ensino da Matemática são muito complexas para serem tomados de forma linear. Na verdade, devemos as encarar como consequência de um amontoado de fatores (uns mais que outros; alguns apresentados aqui e outros ainda desconhecidos). Entretanto, é inegável a existência dessa rejeição, porém é muito preliminar considerar um único agravante como sendo o único indutor dela.

3.3 Resultados da pesquisa de campo a respeito do que supõem os alunos sobre suas aulas de Matemática

Após os argumentos apresentados nas seções anteriores, mostraremos agora os resultados da nossa pesquisa de campo que buscou identificar quais seriam os principais agravantes, na perspectiva dos alunos, que os levam a não se interessar pelas aulas de Matemática. Tentaremos também verificar se os nossos resultados comprovam (ou não) o que os autores citados no item anterior apresentaram como possíveis causas.

Para tanto, é crucial destacarmos primeiramente que tal pesquisa foi realizada em três etapas. A primeira delas se concretizou com a aplicação de dois questionários estruturados destinados aos alunos e seus professores do Ensino Fundamental II e Médio, composto de 12 questões o questionário destinado aos alunos, e de 8 questões aquele destinado aos professores. O intuito disso foi compreender os fatores que levam os alunos a terem relações aversivas com a Matemática e a dos professores verificar quais os seus apontamentos a respeito destas aversões.

Já a segunda etapa da pesquisa se deu por meio de uma intervenção pedagógica em três turmas do Ensino Médio (alunos estes que também participaram da primeira etapa), objetivando identificar a aplicabilidade da Heurística apresentada por Polya como metodologia de ensino. A última etapa tratou da aplicação de um questionário final, semi estruturado que buscou verificar se a intervenção pedagógica, aplicada na segunda fase da pesquisa de campo, possibilitou a redução da aversão a Matemática.

É importante deixarmos registrado que nesse capítulo da tese exibiremos e discutiremos apenas os resultados da primeira etapa desta pesquisa, já que o nosso foco agora é compreender os prováveis fatores que levam os alunos a não se interessarem pelas aulas de Matemática. Assim, deixaremos para as próximas seções as análises e discussões dos resultados da segunda e terceira etapa.

Diante disso, apresentaremos agora os participantes da primeira etapa da pesquisa. Tratou-se de 208 alunos, dos quais 114 eram do Ensino Fundamental II (do 6° ao 9° ano) e 94 do Ensino Médio (do 1° ao 3° ano), de três escolas do município de São Paulo – SP (uma da rede particular de ensino, 108 alunos, outra da rede pública municipal de ensino, 40 alunos, e a última da rede pública estadual de ensino, 60 alunos). Do mesmo, o questionário destinado aos docentes foi aplicado a 8 professores que atuam nestas três escolas. Essa parte da pesquisa foi realizada

entre os meses de Abril e Junho do ano de 2018.

A escolha dessas três instituições educacionais se deu pelo fato de tentarmos retratar, da forma mais real possível a percepção dos alunos e professores do ensino básico da cidade de São Paulo com relação à Matemática. Por isso escolhemos uma escola da esfera municipal, outra da esfera estadual e outra da esfera privada. Tendo assim representantes de todos os segmentos do Ensino Fundamental II e Médio e das esferas municipal, estadual e particular de ensino.

Assim, identificados os elementos da pesquisa, partiremos agora para as análises e discussões das respostas obtidas no questionário dos alunos. Deixaremos para a próxima parte da tese os resultados da pesquisa com os professores. Diante disso, começamos com a primeira questão, que se tratava da seguinte pergunta: "O QUE É A MATEMÁTICA PARA VOCÊ?". Com essa indagação, buscávamos analisar qual é o significado dado pelos alunos para a Matemática em suas vidas. Entre as alternativas que dispusemos para respostas, tínhamos: a) Apenas mais uma disciplina; b) Uma matéria de extrema importância, por ter aplicabilidades no dia a dia; c) Uma matéria extremamente difícil por exigir a memorização de muitas fórmulas; d) Uma matéria que só dificulta a nossa vida escolar; e alternativa e) Resume-se a cálculos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

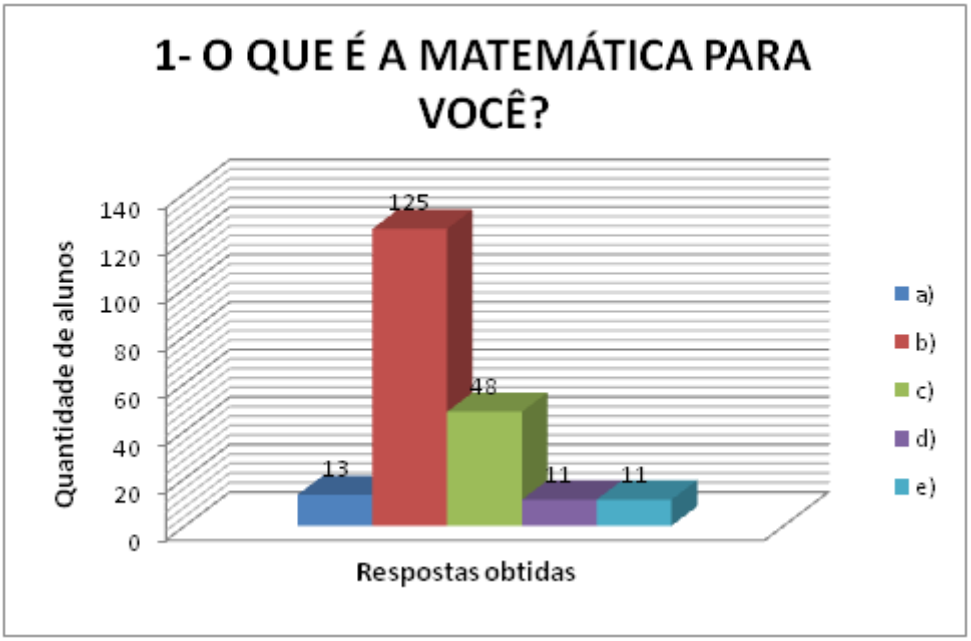


Figura 3.1: Gráfico das respostas obtidas na questão 1 aplicada aos alunos

Assim, observando o resultado das respostas, podemos analisar que a alternativa "b" foi a considerada mais adequada pelos alunos. Ou seja, 125 deles, o que

representa 60% dos pesquisados, acreditam que a Matemática é uma matéria de extrema importância, por ter aplicabilidades práticas no dia a dia.

Com isso, destacamos que esse resultado corrobora com as pesquisas e teorias apresentadas pelos autores da seção anterior, cujas afirmações indicavam que a grande maioria dos alunos reconhece a importância e presença da Matemática em diversos âmbitos de suas vidas. Sendo assim, observamos que essa constatação embasa as conjeturas apresentadas anteriormente nas pesquisas de Bretas (2007), Rodrigues (2001) e Santos (2008), o que reforça as nossas teorias e nos guiará para conclusões posteriores.

Em relação ao item dois, a pergunta apresentada objetivava averiguar se eles gostam de estudar Matemática. Com essa questão buscávamos identificar se realmente eles expressam aversões quando se trata da aprendizagem dessa disciplina. Assim, a questão foi "VOCÊ GOSTA DE ESTUDAR MATEMÁTICA?" e as alternativas que disponibilizamos como opções para respostas foram: a) Sim; b) Não; c) Um pouco; e alternativa d) Às vezes. Nessa pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

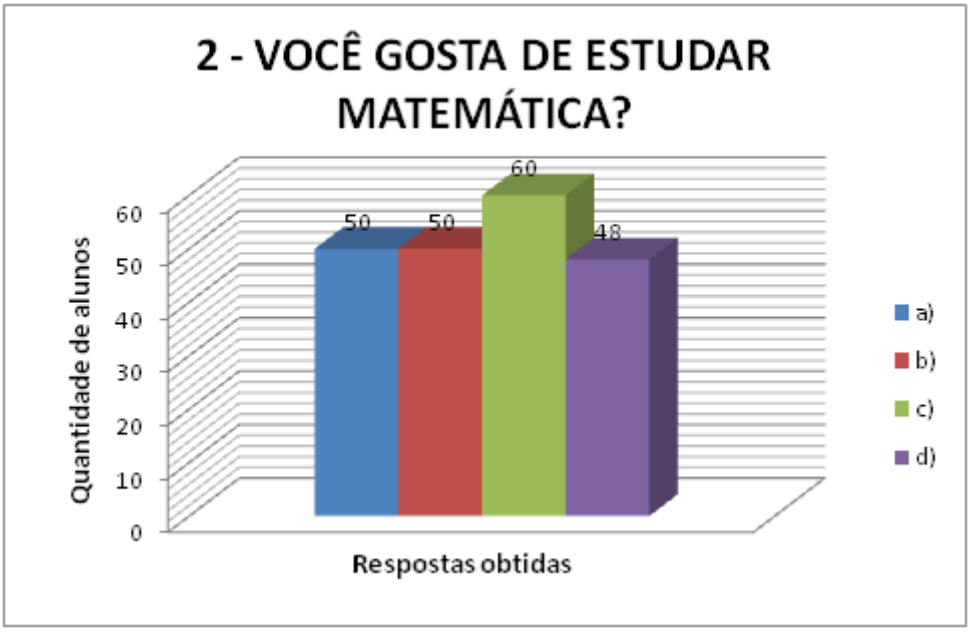


Figura 3.2: Gráfico das respostas obtidas na questão 2 aplicada aos alunos

Com base nos resultados desse item, constatamos que não houve uma alternativa que levou a maioria dos alunos a apontarem como sendo a que consideram mais incisiva, quando se refere ao prazer em estudar essa disciplina. Na verdade, esses dados nos mostram que quando se trata do "gostar" de estudar Matemática, existe quase uma equidade entre os que gostam e os que não gostam. Isso é verificado

quando analisamos que 24% deles indicaram gostar de estudar esta matéria, do mesmo modo que 24% disseram não gostar. No entanto, $28,8\%$ deles responderam que gostam somente um pouco e $23,2\%$ julgaram que gostam somente às vezes, isto é, apenas em determinados conteúdos.

Assim, é importante salientarmos que, contrariamente ao que muitos acreditam não há, portanto, um consenso entre os alunos do ensino básico, no que se refere ao gostar de estudar Matemática. No entanto, analisando mais detalhadamente, constatamos que a porcentagem de respostas "a) sim" vão diminuindo e as respostas "b) não" vão aumento, na mesma medida em que os níveis de ensino também vão. Essa tendência pode ser verificada nos gráficos abaixo, onde comparamos os resultados da turma do 6° ano com a do 8° ano do Ensino Fundamental II e a do 1° com a do 3° do ensino médio.

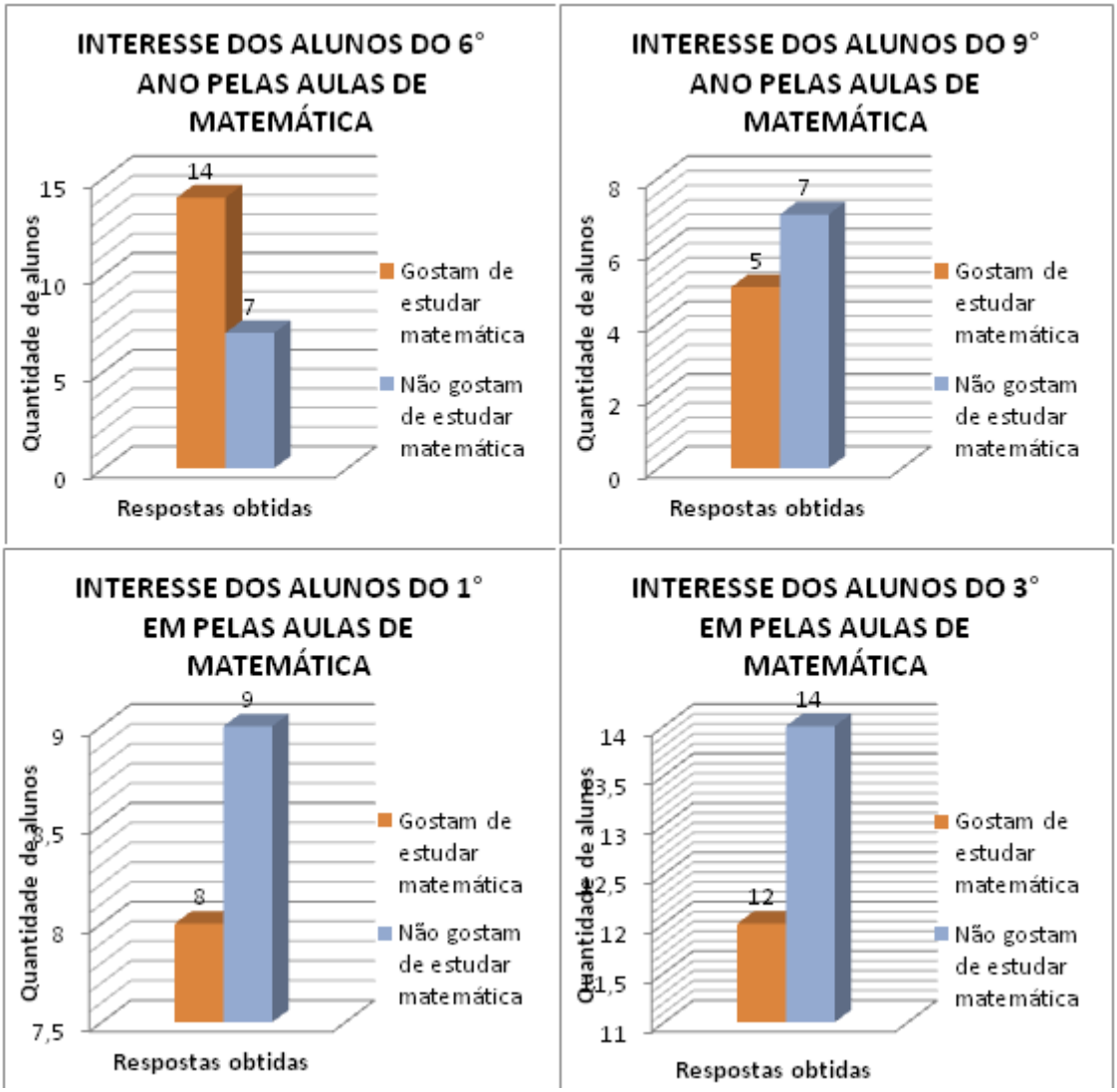


Figura 3.3: Gráfico com dados comparativos entre o gostar de matemática dos alunos do ensino básico

No que se refere à questão três, questionamos os alunos sobre: "O QUE TE LEVA A NÃO SE INTERESSAR PELA MATEMÁTICA?". Com essa indagação buscávamos averiguar os principais fatores agravantes no desinteresse por essa matéria. Para tanto, as alternativas que disponibilizamos como possíveis respostas foram: a) A maneira como ela é ensinada, de modo quase totalmente expositiva; b) A sua abstração, exigindo um elevado domínio da lógica; c) A falta de relação com o cotidiano, tendo poucas aplicações; d) O professor que dificulta os conteúdos; e alternativa e) Tenho um bom interesse pela Matemática. Desse modo, obtivemos os seguintes resultados:

Figura 3.4: Gráfico das respostas obtidas na questão 3 aplicada aos alunos

Com base nesses dados evidenciamos que, entre os alunos pesquisados, o maior empecilho, quando se refere ao desinteresse pelas aulas de Matemática, é uma característica bem intrínseca dessa ciência, que seria a necessidade do domínio da abstração. Tal característica exige uma certa familiaridade com a lógica, que caso não esteja desenvolvida, a construção do conhecimento matemático poderá ser prejudicado.

Assim, constatamos que entre os alunos, $43,7\%$ apontou esse quesito como sendo o maior agravante, enquanto que a minoria, apenas $9,1\%$ considera que isso seria consequência da falta de relação dos conteúdos com o cotidiano, tendo poucas aplicações práticas. Esse resultado confirma os apontamos de Bessa (2007), Conceição (*et al.*, 2015) e Soares (1999) que, como já relatamos anteriormente, delegam a abstração como sendo um dos principais condutores desse desinteresse.

É importante destacarmos ainda a respeito dos resultados obtidos nessa pergunta que um número expressivo de alunos, 50 (o que representa cerca $24,5\%$), tem um bom interesse pelas aulas de Matemática. Com isso reforçamos mais uma vez, assim como no item anterior, que o desinteresse pela Matemática pode não ser tão grave como a grande maioria das pesquisas aponta.

Na questão quatro, perguntamos: "COMO VOCÊ SE SENTE ESTUDANDO MATEMÁTICA?". Com essa indagação pretendíamos analisar como estão sendo as relações entre os alunos e a Matemática escolar. Com esse intuito, as alternativas disponíveis para resposta foram as seguintes: a) Gosto da matéria e vou bem; b)

Gosto da matéria e vou mal; c) Não gosto da matéria e vou mal; d) Não gosto da matéria e vou bem; e item e) Não consigo aprender a matéria. Nesse contexto, as respostas apresentadas como as mais adequadas foram:

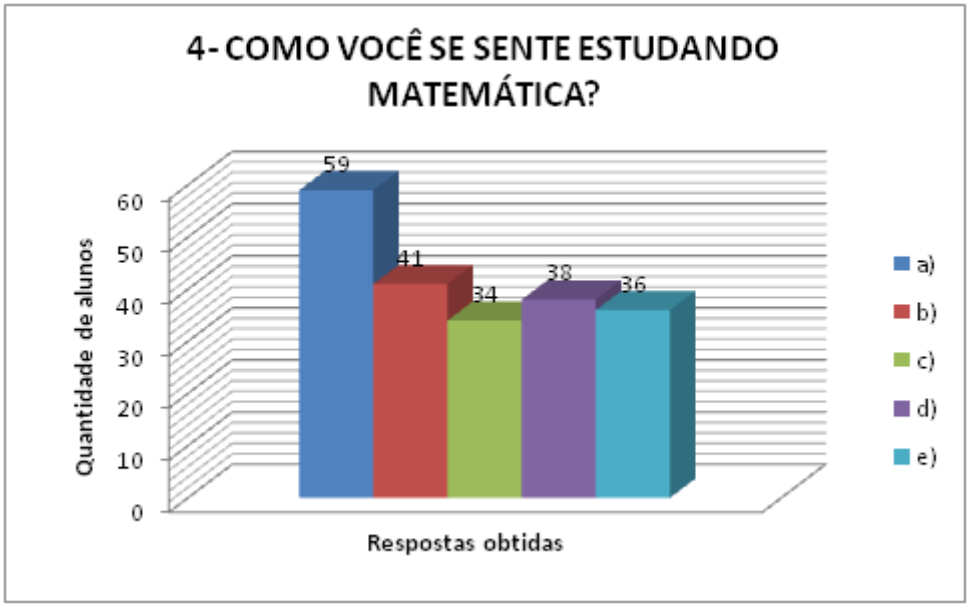


Figura 3.5: Gráfico das respostas obtidas na questão 4 aplicada aos alunos

Com base nesse resultado, constatamos que 59 alunos, o que representa $28,4\%$, gostam da Matemática e vão bem na matéria, e essa foi a maior quantidade de reposta obtida, o que mostra mais uma vez um indício de que existe uma razoável quantidade de alunos que gostam dessa ciência. No entanto, quando consideramos as três ultimas alternativas, que estão relacionadas ao não gostar, elas três juntas totalizam 108 alunos, cerca de 52%, ou seja, a maioria apresenta relações negativas com essa matéria.

Em relação à questão cinco, perguntamos aos alunos: "QUAIS ASSUNTOS VOCÊ MAIS GOSTA DE ESTUDAR EM MATEMÁTICA?". Assim, as alternativas que disponibilizamos para resposta foram as seguintes: a) Álgebra; b) Conteúdos que se relacionam com problemas do dia a dia; c) Todos os conteúdos; d) Geometria; e alternativa e) Nenhum conteúdo. Nessa pergunta, obtivemos as respostas:

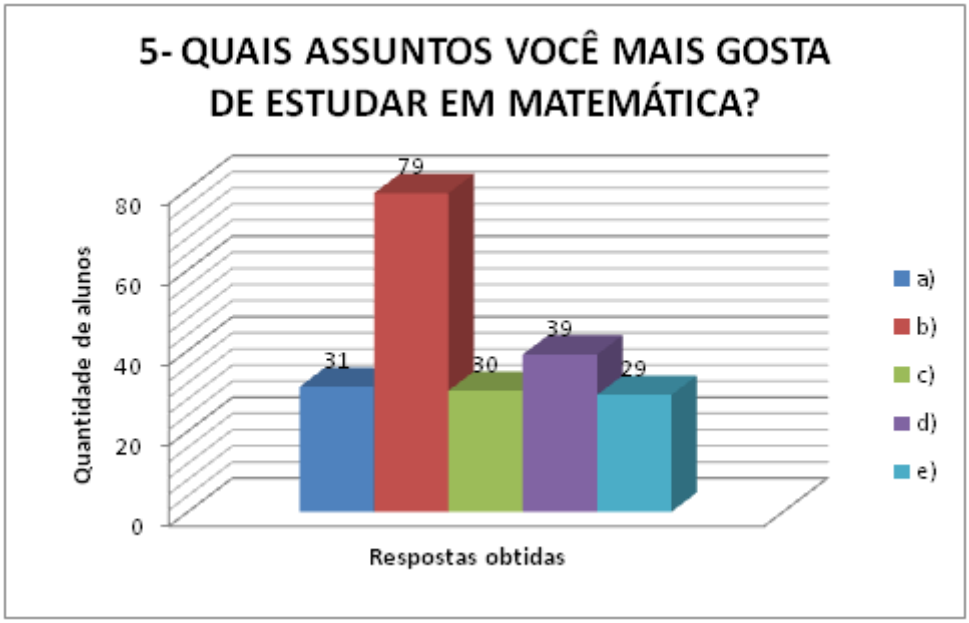


Figura 3.6: Gráfico das respostas obtidas na questão 5 aplicada aos alunos

Com base nesse resultado é possível observar que os conteúdos que de certa forma se relacionam com problemas do dia a dia são os quais os alunos pesquisados mais gostam de estudar em Matemática, 79 deles (o que representa 38%). Essa constatação nos leva a refletir que é crucial, no que tange instigar o interesse deles pelas aulas dessa disciplina, propor problemas que estejam interligados com o cotidiano. No entanto, é importante observar que a falta desse aspecto não deve ser encarada como o maior (ou único) agravante no desinteresse, visto que, na questão três tivemos que apenas a menor parte deles apontou essa falta de ensino com aplicações práticas, como sendo a principal causadora deste desinteresse.

Na questão seis, indagamos os alunos sobre: "COMO SÃO AS AULAS DE MATEMÁTICA NA SUA ESCOLA?". Objetivamos com essa pergunta identificar como eles analisam as suas aulas de Matemática. Com esse propósito disponibilizamos as seguintes alternativas: a) Repetitivas e sem aplicações práticas; b) Repetitivas, mas com aplicações práticas; c) Inovadoras, participativas e prazerosas; d) Apenas expositivas; e alternativa e) Interessantes. Assim, o resultado foi o seguinte:

Figura 3.7: Gráfico das respostas obtidas na questão 6 aplicada aos alunos

Analisando essas respostas, podemos observar que, ao contrário do que muitas pesquisas retratam, quase metade dos alunos investigados, $44,7\%$, considera que as suas aulas de Matemática tem sido interessantes. Esse resultado necessita de uma discussão mais aprofundada, portanto a deixaremos para o último capítulo.

Em relação à questão sete, perguntamos aos alunos: "SE VOCÊ PUDESSE MUDAR ALGUMA COISA NAS SUAS AULAS DE MATEMÁTICA, O QUE MUDARIA?". O intuito dessa pergunta foi verificar o que eles alegam como causador do seu insucesso nas aulas dessa disciplina. Assim, disponibilizamos os seguintes itens como alternativas para resposta: a) A forma como os conteúdos são apresentados; b) A quantidade de aulas; c) O livro didático; d) O professor; e item e) Não mudaria nada. Nessa pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

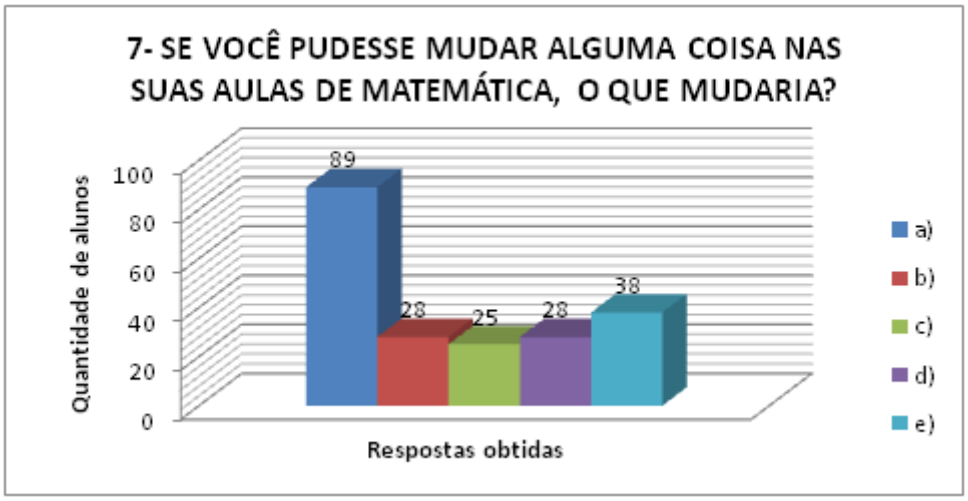


Figura 3.8: Gráfico das respostas obtidas na questão 7 aplicada aos alunos

Dessa forma, verificamos que para a maior parte deles, $42,8\%$, a maneira como os conteúdos tem sido apresentados pelos professores, é um aspecto que não tem trazido bons rendimentos. Isto é, eles acreditam, do mesmo modo que vários autores relatam, que há uma necessidade urgente de mudanças na maneira como os professores conduzem suas aulas.

Na questão oito, indagamos os alunos a respeito do "POR QUE VOCÊ ACHA QUE SE DEVE APRENDER MATEMÁTICA?". Objetivávamos com essa pergunta verificar qual é a importância e o papel que eles dão a Matemática em suas vidas. Para tanto, as alternativas disponíveis para resposta foram: a) Porque ela é extremante importante no nosso dia a dia; b) Porque serve para passar no vestibular e/ou em concursos; c) Porque é uma matéria obrigatória na escola; e d) Não acho importante aprender matemática. Aqui obtivemos o seguinte resultado:

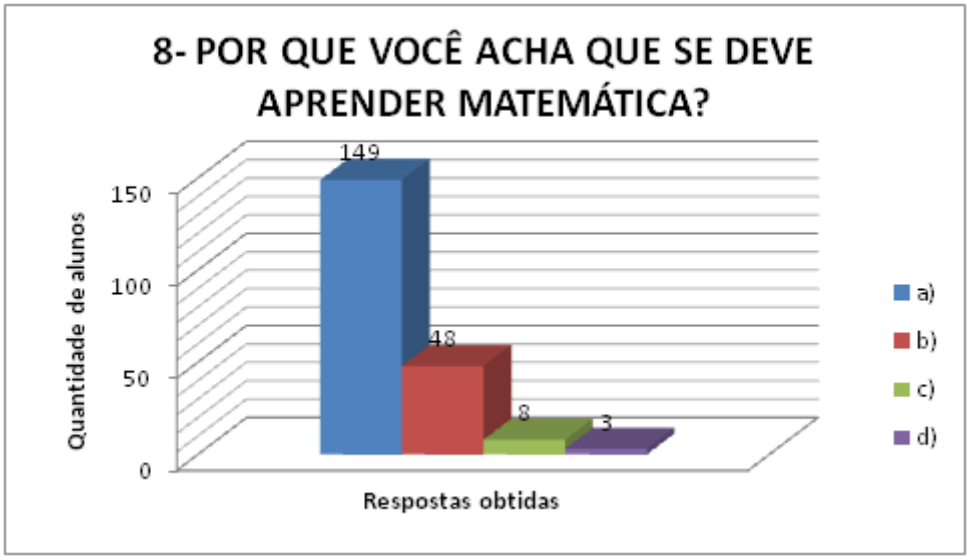


Figura 3.9: Gráfico das respostas obtidas na questão 8 aplicada aos alunos

Assim, fazendo uma análise do gráfico acima, fica explícito que a grande maioria dos alunos pesquisados, $71,6\%$, considera a Matemática como uma ciência de destacável importância para a sociedade atual. Essa constatação corrobora com as pesquisas apresentadas anteriormente por Santos (2008), Bretas (2007) e Rodrigues (2001), as quais também afirmam que os alunos reconhecem a importância que tem a Matemática em nossa sociedade.

No que concerne a questão nove, perguntamos aos alunos: "EM SUA OPINIÃO, QUAL É A MELHOR MANEIRA DE APRENDER MATEMÁTICA?". Aqui, pretendíamos verificar o que eles acreditam ser mais crucial na aprendizagem da Matemática. Assim, com esse objetivo, disponibilizamos as seguintes alternativas:

a) Por meio de jogos e resolução de problemas; b) Por meio de exercícios em grupos; c) Por meio de exercícios individuais; d) Por meio da explicação do professor; e item e) Outra maneira. Nesse quesito, obtivemos as seguintes respostas:

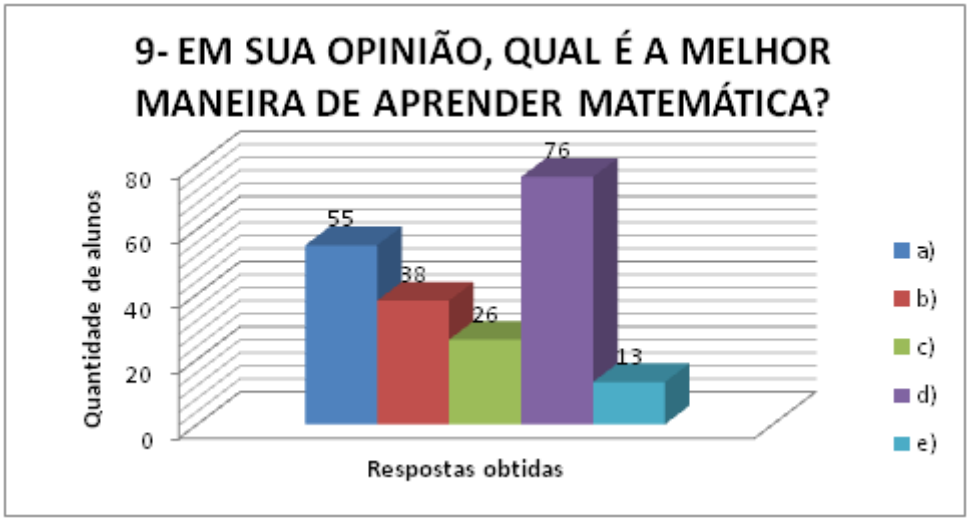


Figura 3.10: Gráfico das respostas obtidas na questão 9 aplicada aos alunos

Com base nessas respostas verificamos que eles consideram a explicação do professor como sendo a melhor forma possível de aprender Matemática. Isso nos evidencia mais uma vez a importância do professor no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, é importante destacar também que a segunda assertiva mais votada foi a que se referia à aprendizagem por meio de jogos e resolução de problemas, o que nos mostra a necessidade de implantar metodologias de ensino que tornem as aulas mais interativas.

No que se refere à questão dez, perguntamos aos alunos: "VOCÊ SE DEDICA AO ESTUDO DA MATEMÁTICA?". O intuito dessa pergunta foi analisar se eles estão se esforçando para aprender os conteúdos dessa disciplina. Assim, as alternativas que disponibilizamos para resposta foram às seguintes: a) Sim. Faço as tarefas de casa e procuro revisar o conteúdo estudado em aula; b) Um pouco. Estudo só poucos dias antes da avaliação; c) Sempre que tenho tempo estudo; e d) Não estudo. Nesse item, obtivemos as seguintes respostas:

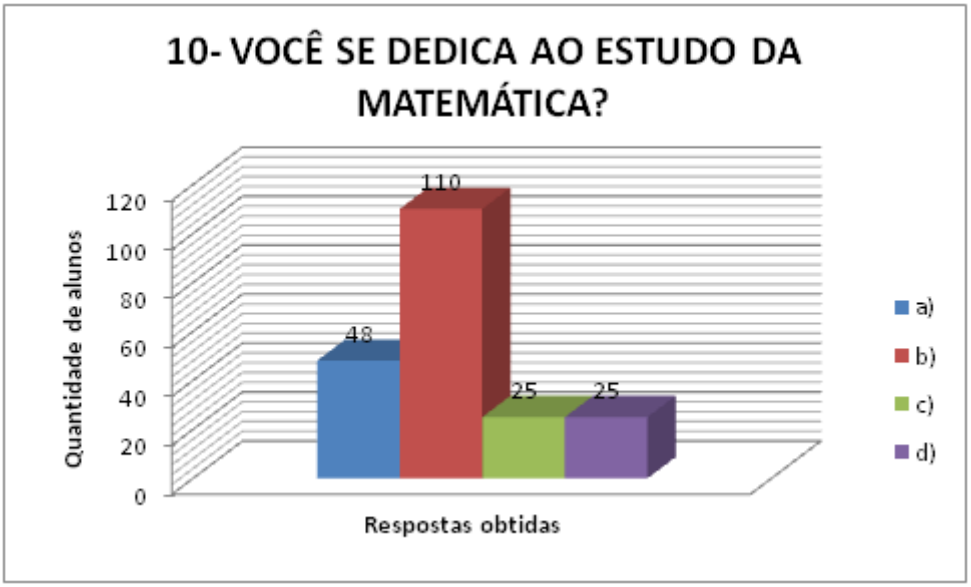


Figura 3.11: Gráfico das respostas obtidas na questão 10 aplicada aos alunos

Analisando esse gráfico observamos que a maioria dos alunos, $52,9\%$, afirma que quase não estudam para Matemática e que apenas poucos dias antes das avaliações é que procuram compreender com mais detalhes os conteúdos. Dessa forma, essa constatação nos leva a inferir que, do mesmo modo como Tatto e Andreis (2004) pontuou, os alunos também não tem cumprido suas obrigações como estudantes, o que pode, em certa medida, os condicionar a não compreender com eficiência vários tópicos dessa disciplina. Consequentemente, esse fato pode ser considerado como um dos condutores dessas problemáticas que temos discutido.

Na questão onze, perguntamos aos alunos como estão sendo estabelecidas suas relações com a Matemática. Para tanto, os indagamos: "DURANTE SUA VIDA ESCOLAR...", e disponibilizamos as seguintes alternativas: a) O interesse pela matemática aumentou com o passar dos anos; b) Nos primeiros anos escolares sentia-me mais motivado pela Matemática do que hoje, já que os conteúdos passaram a ser mais abstratos; c) Sinto o mesmo interesse pela Matemática do início da caminhada escolar até hoje; d) Achava muito mais fácil antes do que hoje; e letra e) Acho agora os conteúdos mais interessantes do que antes por terem se tornado mais desafiadores. Diante desse questionamento, obtivemos o seguinte resultado:

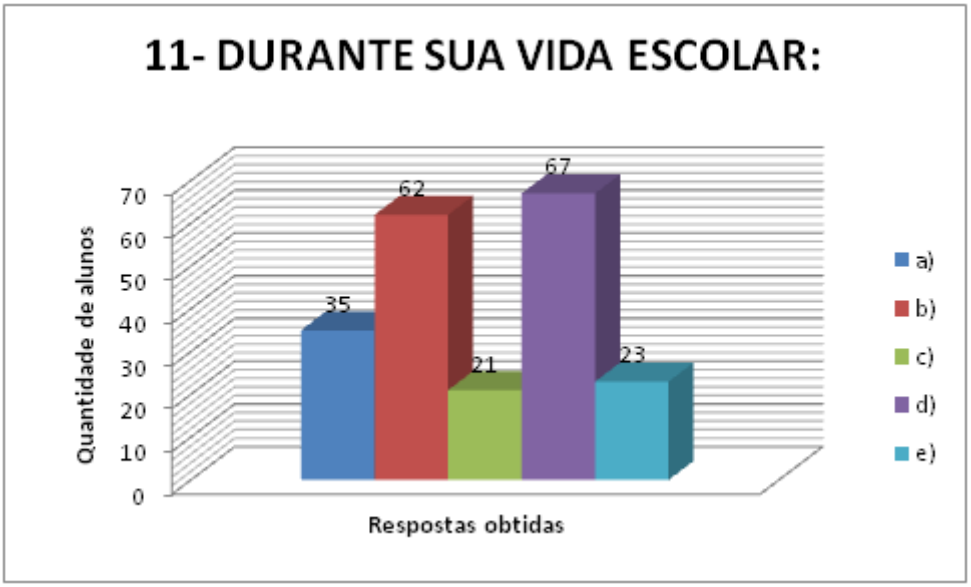


Figura 3.12: Gráfico das respostas obtidas na questão 11 aplicada aos alunos

Assim, com base nesses dados, inferimos que como $29,8\%$ deles diz que considerava a Matemática muito mais fácil antes do que hoje e $32,3\%$ que nos primeiros anos escolares sentiam-se mais motivados com os estudos dessa disciplina. Concluímos que $62,1\%$ deles foi adquirindo dificuldades, com o passar dos anos escolares e consequentemente aumentando o desinteresse. Essa constatação está de acordo com as pesquisas de Soares (1999), Conceição (2015), Prediger (*et al.*, 2009) e Ferreira (*et al.*, 2011), as quais já foram anteriormente apresentadas.

Em relação à pergunta doze, questionamos os alunos sobre: "QUAL A SUA MAIOR DIFICULDADE PARA APRENDER MATEMÁTICA?". Aqui, o intuito era verificar os principais fatores que eles apontam como dificultadores no processo de aprendizagem dessa disciplina. Para tanto, disponibilizamos as seguintes alternativas como prováveis respostas: a) A não compreensão de conteúdos de séries anteriores; b) Não saber fazer cálculos e operações; c) Interpretar o enunciado dos exercícios; d) Decorar fórmulas e teoremas, e item e) Relacionar a teoria com a prática. Nessa pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

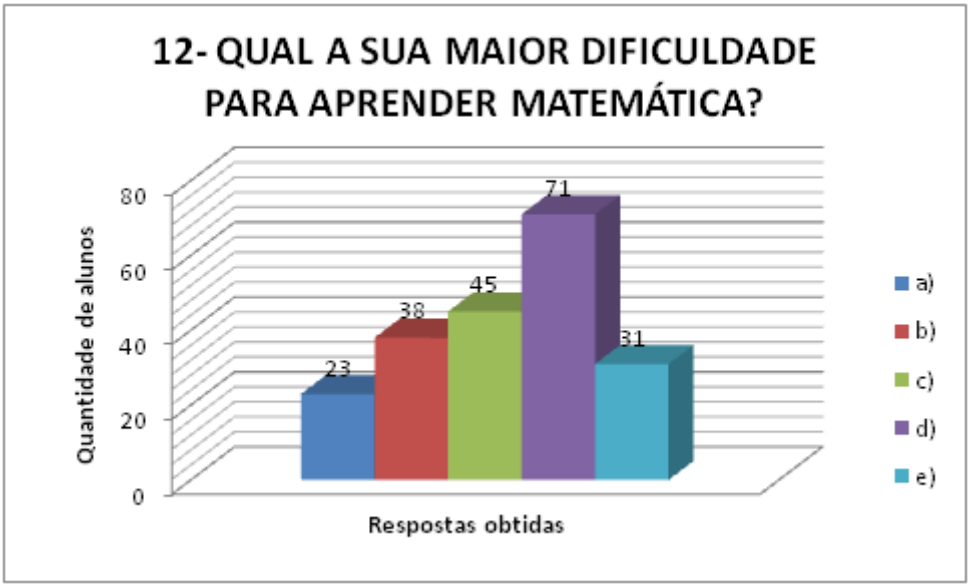


Figura 3.13: Gráfico das respostas obtidas na questão 12 aplicada aos alunos

Com base nesse resultado, verificamos que a maioria dos alunos, 34, 2%, considera que decorar fórmulas e teoremas são suas maiores dificuldades quando se refere à aprendizagem da Matemática. Sendo assim, isso reforça mais uma vez a necessidade do professor de criar estratégias metodológicas de ensino que desvinculem a visão equivocada de que essa disciplina é um amontoado de fórmulas, sem as quais é impossível aprender os conteúdos.

Finalizando essa seção, concluímos que os resultados de algumas perguntas do questionário estão de acordo com as constatações já observadas por pesquisadores, enquanto que outros resultados indicam que algumas teorias, quase estabelecidas como verdades, precisam ser revistas, como por exemplo, a afirmação de muitas pessoas que "a quase totalidade dos alunos odeiam Matemática". Discutiremos mais a respeito desses resultados no último capítulo.

3.4 Resultados da pesquisa de campo sobre o que os professores acreditam a respeito das relações conflituosas entre alguns alunos e a aprendizagem matemática

Partiremos agora para as discussões dos resultados apresentados no questionário dos professores na primeira fase da pesquisa de campo. Para tanto, é importante

deixarmos registrado que buscamos analisar, na percepção deles, os principais perpetuadores do desafeto de alguns alunos no que concerne a aprendizagem da Matemática. Além disso, também verificamos como eles consideram suas aulas, o que tem feito para melhorá-las e quais são suas principais dificuldades.

Dentro dessa perspectiva, em relação à primeira pergunta do questionário, indagamos os professores sobre: "COMO TEM SIDO O INTERESSE DOS ALUNOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?". O objetivo aqui foi averiguar o que eles conjecturam a respeito dos seus alunos quando se refere ao estudo da Matemática. Para tanto, disponibilizamos as seguintes alternativas para respostas: a) Estão a cada dia menos interessados; b) Tem demonstrado certo aumento no interesse com o passar das séries escolares; c) Tem demonstrado certa diminuição no interesse com o passar das séries escolares; d) A grande maioria está desinteressada; e item e) É razoável o número de alunos que se interessam pela matéria. Nesse quesito, obtivemos as seguintes respostas:

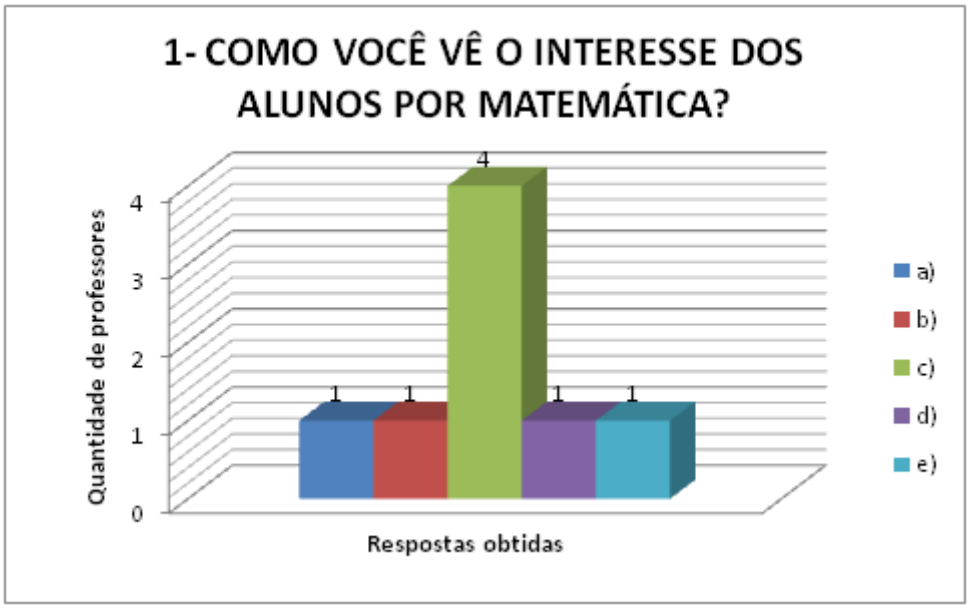


Figura 3.14: Gráfico das respostas obtidas na questão 1 aplicada aos professores

Com base nos dados dessa pergunta, observamos que 50% dos professores pesquisados acredita que, com o passar das séries escolares, os alunos têm demonstrado certa diminuição no interesse pelas aulas de Matemática. Essas considerações respaldam as concepções de Soares (1999), Conceição (*et al.*, 2015), Prediger (*et al.*, 2009) e Ferreira (*et al.*, 2011), que como já expusemos anteriormente, salientam que os alunos vão perdendo o encanto pela Matemática na medida em que os anos escolares vão progredindo.

Em referência à questão dois, perguntamos aos professores: "QUAIS AS PRINCIPAIS DIFICULDADES QUE VOCÊ ENCONTRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA?". Nesse tópico, pretendíamos verificar o que eles acreditam ser mais agravante no processo de ensino da Matemática. Assim, com esse objetivo, disponibilizamos as seguintes alternativas: a) A falta de materiais de apoio; b) O grande desinteresse dos alunos; c) O sistema educacional que nos limita muito; d) O exaustivo número de conteúdos a cumprir; e item e) Não encontro dificuldades para ensinar. Nesse quesito, obtivemos as seguintes respostas:

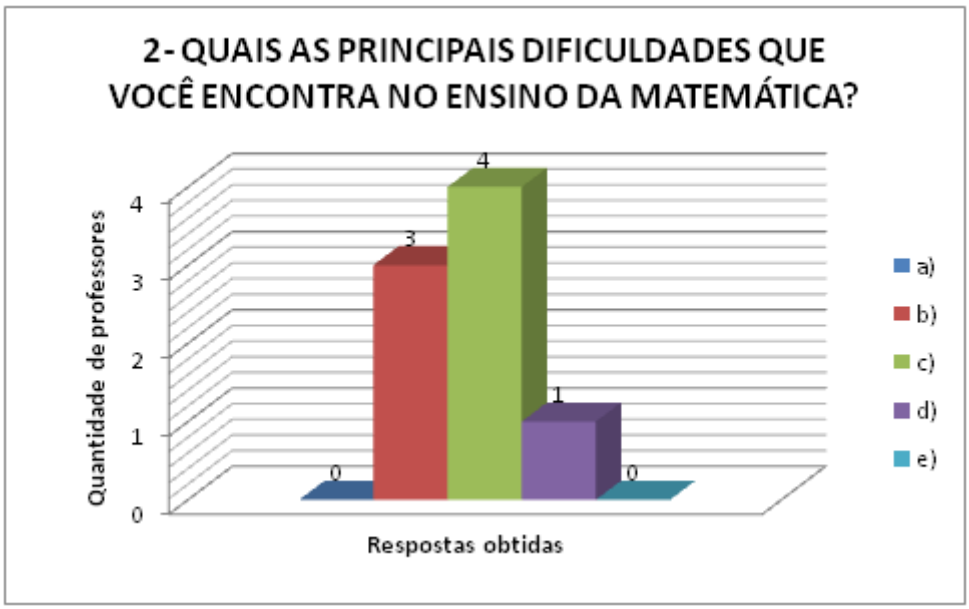


Figura 3.15: Gráfico das respostas obtidas na questão 2 aplicada aos professores

Nessa questão obtivemos de 50% dos docentes a resposta que indica o sistema educacional como sendo um dos principais empecilhos quando se refere ao ensino da Matemática. Esse dado certifica as concepções de Santos (2008), que apresentamos anteriormente, nas quais ele indica o sistema educacional como inibidor de um eficiente processo de ensino-aprendizagem.

Além disso, ainda com relação a esse item é importante evidenciar o dado que nos mostra que $37,5\%$ deles também concebe o desinteresse dos alunos como sendo outro agravante dentro desse contexto de ensino.

No que se refere à questão três, questionamos os professores sobre: "O QUE MAIS TE DESMOTIVA COMO PROFESSOR?". Com essa indagação buscávamos investigar os principais fatores impulsionadores das adversidades na atuação como docente de Matemática. Para tanto, as alternativas que disponibilizamos foram: a) O salário; b) Os alunos; c) As exigências da escola; d) A falta de reconhecimento; e

alternativa e) Outras. Desse modo, obtivemos os seguintes resultados:

Figura 3.16: Gráfico das respostas obtidas na questão 3 aplicada aos professores

Assim, verificamos que a maioria deles, $62,5\%$, considera que a falta de reconhecimento é um dos principais aspectos que os tem levado a desmotivações em suas atuações profissionais. Com isso, podemos encarar esse resultado como sendo um dos motivos pelos quais muitos professores aderem a metodologias de ensino mais tradicionais (que podem estar atreladas aos desinteresses dos alunos), porque de certo modo é menos trabalhosa, e evitam métodos mais interativos, que requerem um melhor planejamento.

Na questão quatro, perguntamos aos professores "SUA ESCOLA TE DÁ LIBERDADE DE ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO A ADOTAR?". Com essa pergunta pretendíamos analisar se eles têm autonomia para selecionar e decidir como abordar os conteúdos a serem ensinados. Com esse intuito, as alternativas disponíveis para resposta foram as seguintes: a) Sim, são bem flexíveis; b) Sim, mas devo seguir e cumprir fielmente todo o conteúdo do livro escolhido; c) Não, os livros são escolhidos pela coordenação, mas tenho a liberdade de como usá-los; e item d) Não, os livros são escolhidos pela coordenação e devo cumprir todo o conteúdo. Nesse contexto, as respostas apresentadas foram:

Figura 3.17: Gráfico das respostas obtidas na questão 4 aplicada aos professores

Nesse tópico observamos que 75% deles, a grande maioria, possue liberdade em suas escolas para selecionar os livros didáticos, elencar os conteúdos que consideram mais importantes e escolher o modo como ensiná-los. Com isso, inferimos que quando se refere aos conteúdos trabalhados nas aulas e a forma como elas são conduzidas, são escolhas de total responsabilidade dos professores.

Em relação à questão cinco, perguntamos aos professores: "VOCÊ USA PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS, OU SEJA, ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, COMO METODOLOGIA DE ENSINO NAS SUAS AULAS?". Aqui o intuito foi verificar se eles conhecem e usam a Heurística Matemática como uma ferramenta de ensino nas suas aulas. Assim, as alternativas que disponibilizamos para resposta foram às seguintes: a) Sim, Sempre uso; b) Não; c) Às vezes; d) Não conheço essas metodologias; e alternativa e) Não as considero importantes. Nessa pergunta, obtivemos as respostas:

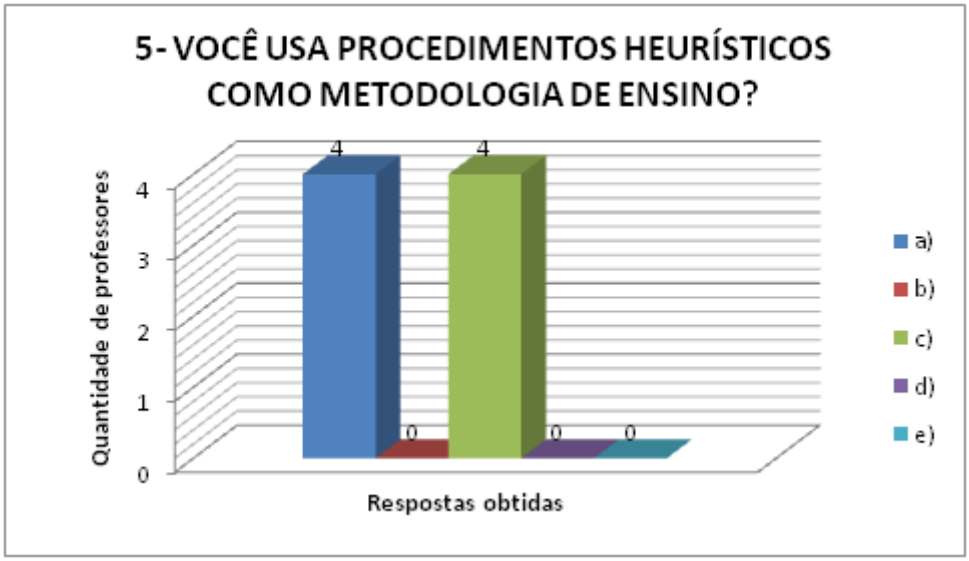


Figura 3.18: Gráfico das respostas obtidas na questão 5 aplicada aos professores

O cerne desse resultado foi o fato de que todos os professores pesquisados conhecem a Heurística Matemática como metodologia de ensino. No entanto, observamos que apenas 50% deles afirma sempre usar esses métodos em suas aulas. Assim, é importante destacar que esse apontamento dos professores validam o resultado da questão 6 aplicadas aos alunos, onde $44,7\%$ deles julga que suas aulas de Matemática são interessantes. Com isso, consideramos que esse aspecto positivo possa ter relações diretas com tal metodologia de ensino.

Na questão seis, indagamos os professores sobre: "O QUE TE IMPEDE DE USAR FERRAMENTAS DE ENSINO DIFERENTES/INOVADORAS?". Objetivamos com essa pergunta identificar se eles alegam alguma dificuldade para a aplicação de aulas mais dinâmicas. Com esse propósito disponibilizamos as seguintes alternativas: a) Nada, sempre que possível as uso; b) É inviável devido ao excessivo número de conteúdos a cumprir; c) Os alunos pouco se interessam; d) A escola onde trabalho é muito tradicional e prefere evitar essas atividades; e alternativa e) Não conheço atividades diferentes e inovadoras. Assim, o resultado foi o seguinte:

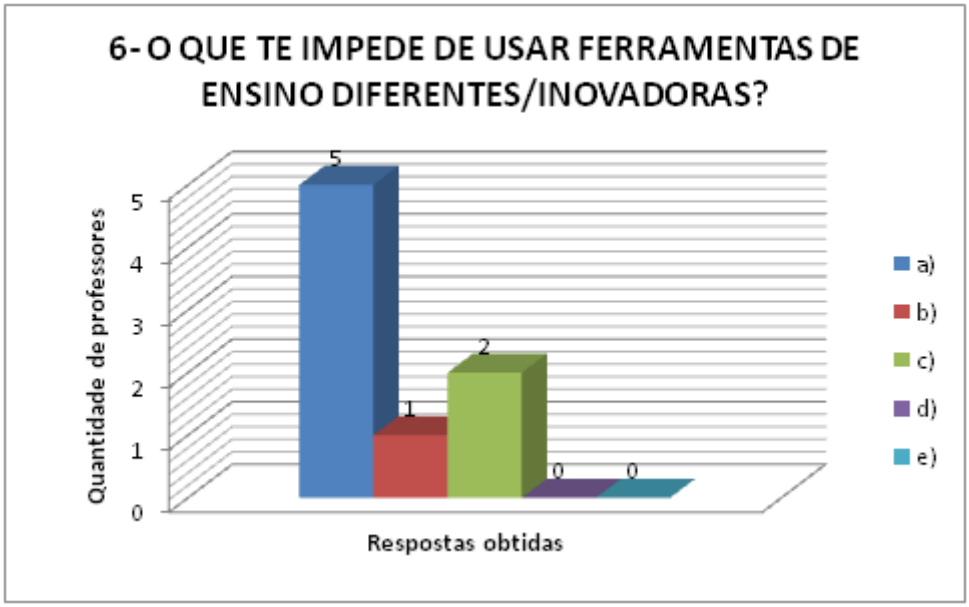


Figura 3.19: Gráfico das respostas obtidas na questão 6 aplicada aos professores

Com base nesse gráfico, constatamos que $62,5\%$ dos professores afirma que sempre que é possível usam em suas aulas tais ferramentas. Assim, inferimos que esse resultado mais uma vez está de acordo, isto é, reforça o resultado positivo que obtivemos na questão 6 que foi aplicada aos alunos.

Em relação à questão sete, perguntamos aos professores: "O QUE DEVE MUDAR NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA?". Com isso, pretendíamos verificar se eles consideram que há necessidade de alguma mudança nas aulas para que as tornem mais atrativas e eficazes. Assim, com esse objetivo, disponibilizamos as seguintes alternativas para auxiliá-los: a) Diminuir a quantidade de conteúdos por série ou aumentar a carga horária da matéria; b) Contextualizar os conteúdos por meio de problemas cotidianos; c) Possibilitar um acompanhamento mais individualizado para os alunos com mais dificuldades; d) Os alunos devem buscar por si só se interessar mais; e item e) Não há necessidade de mudanças. Nesse quesito, obtivemos as seguintes respostas:

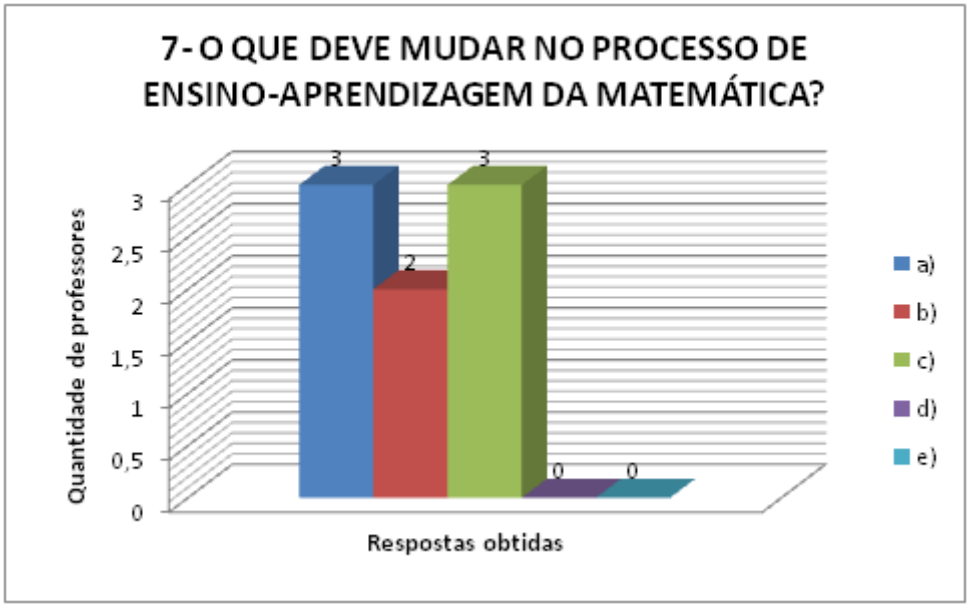


Figura 3.20: Gráfico das respostas obtidas na questão 7 aplicada aos professores

O resultado desse tópico mostrou que $37,5\%$ deles considera que há a necessidade de diminuir a quantidade de conteúdos por série ou aumentar a carga horária da matéria, do mesmo modo que $37,5\%$ também acredita que se deve disponibilizar um acompanhamento mais individualizado para os alunos que apresentam maiores dificuldades. Assim, verificamos que nesse quesito os professores pesquisados apontam que há uma maior necessidade de mudança na maneira como tem se organizado o sistema educacional das escolas, do que na estrutura e dinâmica de suas aulas.

Em relação à última pergunta, os questionamos sobre: "POR QUE MUITOS ALUNOS NÃO GOSTAM DE ESTUDAR MATEMÁTICA?". Aqui, o intuito era verificar os principais fatores que eles acreditam ser determinantes no desinteresse dos alunos pelas aulas de Matemática. Para tanto, disponibilizamos as seguintes alternativas como prováveis respostas: a) Porque é uma matéria difícil e são poucos os que aprendem; b) Porque não se dedicam a estudar o quanto deviam; c) Porque a maioria das aulas são tradicionais e descontextualizadas; d) Porque estão defasados com relação a conteúdos precedentes, e item e) Outros fatores. Nessa pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

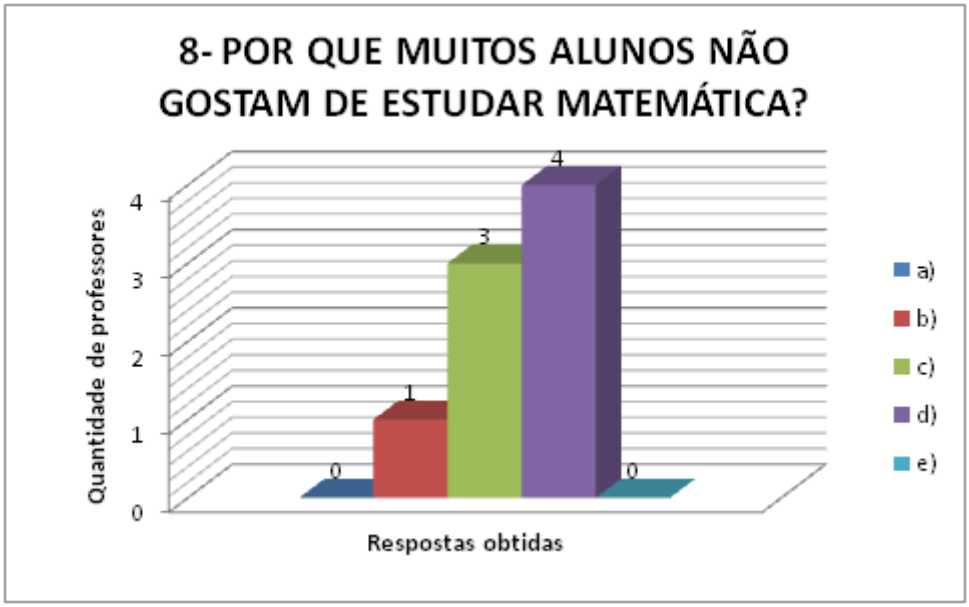


Figura 3.21: Gráfico das respostas obtidas na questão 8 aplicada aos professores

Assim, obtemos que 50% deles considera que o fator mais agravante no que concerne o desinteresse dos alunos pelas aulas de Matemática é a defasagem de conteúdos, ou seja, a falta de compreensão de temas de anos anteriores estaria levando os alunos a perderem o interesse pelas aulas, visto que tal defasagem os impossibilita de acompanhar os conteúdos que estão estudando. Além disso, destacamos também que outro dado importante, resultado dessa questão é que $37,5\%$ dos pesquisados acredita que o ensino tradicional e descontextualizado seria o principal indutor deste desinteresse.

Com isso, finalizando esse capítulo podemos concluir que de fato há um razoável número de alunos que possuem relações conflituosas quando se trata do processo de aprendizagem da Matemática. O que tem os conduzido a perpetuar essas relações negativas com os seus pares, possibilitando a construção de um ciclo vicioso na aversão por essa disciplina.

Concluímos também que as pesquisas já realizadas por alguns autores indicam uma gama de fatores que estariam culminando nessas aversões. Como, por exemplo, o mito já estabelecido na polução de que essa matéria é muito difícil, a defasagem, a falta de metodologias de ensino eficientes, a displicência dos alunos e o sistema de ensino que estar ultrapassado. Assim, com base nas nossas pesquisas com alunos e professores, pudemos constatar que ambos indicam que realmente esse desinteresse existe, e que esses fatores elencados contribuem de certa forma para isso. No entanto, essa problemática não seria algo tão generalizado, como alguns acreditam.

Por fim, destacamos que tanto os autores que citamos quanto os resultados da primeira fase da nossa pesquisa de campo, nos mostram que há uma fragilidade na aprendizagem matemática. Por isso, evidenciamos a necessidade de criar novas conexões entre os alunos, os conteúdos a serem ensinados e os professores. Isto é, há uma urgência de promover novas ferramentas metodológicas que possibilitem uma mudança estrutural e organizacional nas aulas, que torne possível um novo olhar dos alunos para essa disciplina e estabeleça um aprendizado mais atrativo, o que consequentemente poderia ajudar a reduzir essa rejeição pela Matemática.

Assim, acreditamos que a Heurística Matemática como aliada aos processos de ensino-aprendizagem pode ser uma ferramenta facilitadora dessa dinâmica. Com esse intuito, buscaremos discutir na próxima seção se essa metodologia é aplicável, isto é, verificaremos se ela conduz a uma estruturação mais eficaz das aulas de Matemática e que possa promova um melhor aprendizado.

CAPÍTULO 4

A HEURÍSTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO: QUESTÕES TEÓRICAS E PRÁTICAS

Nesse capítulo discutiremos sobre a adoção da heurística matemática como uma metodologia eficiente no processo de ensino/aprendizagem. Para tanto, iniciaremos abordando os aspectos teóricos que nos conduzem e nos embasam nessa nossa conjectura. Depois entraremos no viés da discussão sobre a heurística no processo de resolução de problemas matemáticos, como sendo um modelo emergente em tal processo educativo. Em seguida, apresentaremos os resultados da segunda fase da nossa pesquisa de campo que consistiu de uma intervenção pedagógica, com base em Polya, para verificarmos em qual medida e de que maneira as teorias deste autor, a respeito da heurística como método de ensino, é aplicável. Por fim, esboçaremos o resultado da ultima parte da pesquisa de campo que se tratou da aplicação de um questionário final que objetivou analisar os impactos causados nos alunos participantes da segunda etapa da pesquisa de campo.

4.1 A necessidade de reconfiguração da dinâmica das aulas de Matemática

Diante do que já discutimos até aqui, verificamos que há uma ineficiência nas aulas de Matemática, o que tem tornado o aprendizado pouco efetivo. As pesquisas

que já apresentamos legitimam essa teoria e, como já introduzimos, os resultados das avaliações a nível nacional e internacional certificam o quanto está sendo falha a construção do conhecimento matemático dos alunos em nível básico.

Essa constatação evidencia o quanto necessitamos de uma desconstrução dos modelos atuais de ensino-aprendizagem nessa disciplina. Já que, na maioria dos casos, temos um ensino (entre outros problemas) totalmente desprovido de qualquer tipo de interação entre professores e alunos, estes últimos que tem sido apenas agentes passivos no processo educacional. Esses fatos podem os conduzir a acreditarem que a Matemática é um amontoado de fórmulas prontas e acabadas, disponibilizadas pelos professores, que devem ser usadas para resolver exercícios, com ou sem relação com o cotidiano. Promovendo assim o desinteresse e consequentemente a defasagem na aprendizagem.

Como vimos nos resultados da primeira fase da pesquisa de campo, este desinteresse é um problema real, e que, portanto, deve ser encarado com discernimento pelos professores durante suas aulas. Isso mostra o quanto eles devem estar preparados para lidar com esses problemas e buscarem alternativas no sentido de reduzi-los.

Com relação a esse aspecto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 15), argumentam que "A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno". Ou seja, esta insatisfação com o ensino-aprendizagem da Matemática indica que algo deve ser feito, e uma reconfiguração nos métodos de ensino parece ser uma alternativa viável.

Dentro dessa perspectiva, acreditamos que os professores devem assumir uma postura imprescindível, de docentes comprometidos com uma educação de qualidade, no sentido de minimizar as rupturas existentes entre a importância da aprendizagem matemática e a compreensão dos conteúdos pelos alunos. Assim, implantar metodologias de ensino que evitem o decorar fórmulas e promovam estratégias que conduzam a criação de tais fórmulas é uma atitude louvável. Ou seja:

> O educador que pauta a sua prática apenas no que o currículo ou um livro didático impõem, pode estar negando ao seu educando aquilo que realmente é significativo, que seria estimular a curiosidade e o prazer em aprender os padrões matemáticos, procurando desenvolver uma arte e não tento como único propósito aprender simples técnicas de resolução, que nada mais são do que "cárceres" para um espírito criativo (CHAVES e NEVES, 2016, p. 179).

Sobre essas posturas a serem tomadas pelos professores, Resende e mesquita (2012) consideram que são essenciais no que concernem a eficiência da aprendizagem

dessa disciplina:

> Os próprios alunos afirmam que "decorar fórmulas" se torna uma grande dificuldade para o aprendizado da matemática, neste ponto os professores assumindo uma atitude de educador que se preocupa efetivamente com o aprendizado se preocupará com a construção deste aprendizado pelos alunos, o que com a participação dos educandos no processo evitará o decorar e favorecerá o entendimento (RESENDE e MESQUITA, 2012, p. 14).

Diante desses argumentos, acreditamos que a ausência de novas metodologias de ensino pode ser prejudicial ao bom aprendizado. Ou seja, os métodos tradicionais que focam o professor como centro do processo educativo e marginalizam os alunos, considerando-os como meros atores passivos em tal processo, tem fraquejado bastante.

Isso significa que carecemos de um ensino que leve em consideração as várias vertentes que englobam todo o ambiente de aprendizagem escolar (o professor, o aluno, os conteúdos, os insumos disponíveis, entre outras). Caso essas variáveis não sejam consideradas, a probabilidade de falha em tal processo será enorme.

Sobre essa temática Prediger, Berwanger e Mors (2009, p. 24) ponderam que "Um dos problemas mais sérios no ensino da Matemática é que ela tem sido pensada e tratada por professores distante da realidade do aluno". No entanto, esta autora também acredita que estes problemas tem se agravado ainda mais porque "Além disso, os professores encontram em sala de aula diversos obstáculos, sendo a falta de entusiasmo dos alunos um dos mais difíceis de ser resolvido".

Com base nessas suposições, julgamos ser essencial (entre outras atitudes) disponibilizar nas aulas de Matemática metodologias de ensino que instiguem os alunos a procurarem por si só os caminhos que os guiem à absorção dos conhecimentos, aos quais se pretende ensinar. Com esse intuito, acreditamos que as aulas que focam em problemas do cotidiano, isto é, que tem relações diretas com a realidade, faz mais sentido para os alunos e tornam-se mais atrativas.

Nessa circunstancia, Resende e Mesquita (2012, p. 23), tomando como base as suas pesquisas, ainda consideram que "Dentre as formas de incentivar os alunos, os professores apontaram a aula prática como a principal". Embasam essa sua conjectura afirmando que as aulas práticas, fazem mais sentido para os alunos porque foca na aplicabilidade da Matemática, o que pode induzir a "uma série de mudanças de comportamento", o que em suas teorias pode tornar possível uma "maior mobilidade e criatividade às atividades docentes e discentes dentro e fora da escola". Finalizando seus argumentos, enfatizam que "Novas técnicas devem

ser conhecidas e utilizadas no sentido de tornar o ambiente escolar o mais próximo possível da realidade do aluno".

Sobre essa necessidade de tornar aulas de Matemática mais atrativas e dinâmicas, outros pesquisadores também declaram acreditar em aulas, desenvolvidas a partir de situações concretas do dia a dia, como sendo uma alternativa apreciável. Tatto e Scapin (2004), por exemplo, apresenta que:

> Durante as entrevistas alguns alunos disseram que não gostam da Matemática, pois nas aulas aprendem conteúdos que nunca vão ocupar, conteúdos que não têm aplicação prática. Assim podemos observar o quanto é importante que o professor relacione os conteúdos matemáticos à prática, para que desperte no aluno maior interesse em estudar Matemática (TATTO e SCAPIN, 2004, p. 11).

Assim, a dinâmica das aulas centradas em conteúdos que remetam a situações reais do dia a dia pode fazer mais sentidos para os alunos. Levando-os a um melhor interesse e motivação por essas aulas, e por consequência disso, incentivando-os a procurar compreender novos conhecimentos que circundam essa ciência.

Nesse contexto, Tatto e Scapin (2004, p. 06) ainda consideram que "O professor é o elemento fundamental para assegurar um ambiente em que os alunos desenvolvam sua motivação intrínseca". Ou seja, o docente tem um papel determinante nessa motivação, pois "O professor é responsável por conduzir os alunos de maneira que a aula se torne agradável, motivadora, ligada ao dia-a-dia do aluno, etc".

Com relação a essa motivação, em suas concepções, Conceição, Mendes e Borges (2015) enfatizam a primordialidade da transição entre os métodos de ensinos convencionais para aqueles que sejam mais utilitários para os alunos. No sentido de evitar ou amenizar os problemas que já temos enraizado nesse âmbito da educação:

> Ao falar de linguagem matemática, observa-se uma enorme desmotivação por parte dos alunos que se restringem a dizer que não gostam dessa disciplina; alegam ser uma aula difícil e complicada e, por não conseguirem fazer as atividades e não tirarem notas boas nas provas, começam a se desinteressar pela matéria, dizem que o professor é ruim, e que deixam as aulas 'chatas'; isso ocorre devido ao fato desses professores não usarem metodologias lúdicas para ajudar no ensino/aprendizagem (CONCEIÇÃO *et al.*, 2015, p. 01).

Com essas considerações, verificamos que é imprescindível uma mudança nos moldes em que nós como professores temos conduzido nossas aulas. Apesar de termos constatado, na primeira fase da pesquisa de campo, que os alunos e seus professores não indicam que as metodologias de ensino utilizadas, sejam as principais causas do insucesso no ensino-aprendizagem dessa disciplina. No entanto, temos visto corriqueiramente (como já apresentamos no capítulo precedente) um elevado

número de indícios que apontam para a fragilidade dos alunos quando se refere ao conhecimento matemático.

Finalizando essas discussões sobre a preeminência de métodos de ensino mais motivadores frente os tradicionais. Silva e Martinez (2017, p. 11840) argumentam que deve-se implantar nas escolas os métodos que creditem a participação do aluno e motivem o buscar por si próprio o conhecimento. Nessa perspectiva, estes últimos autores consideram que:

> O ensino da Matemática, como uma disciplina que incorpora sentidos abstratos e concretos, não se fundamenta apenas nas teorias, é necessário uma estratégia pedagógica na direção de um conhecimento construtivo. Para tanto, além de considerar as inquietações dos sujeitos envolvidos no aprender da Matemática, é necessário incorporar metodologias adequadas para garantir sua aprendizagem (SILVA e MARTINEZ, 2017, p. 11840).

Assim, desconstruir os métodos convencionais de ensino é uma necessidade inevitável, no sentido de melhorar o quadro atual de insucesso. Para tanto, consideramos que a heurística matemática, como metodologia de ensino, aparenta ser a mais adequada, pois está ligada a estratégias inéditas para a resolução de problemas. Como veremos em seguida, ela ergue-se da necessidade de elucidação de questões do dia a dia, envolve a interação entre professores e alunos, promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, estimula a busca de padrões e flexibiliza as formas de encontrar as respostas para um problema matemático.

4.2 A importância de inserir a Heurística Matemática no processo educacional

Agora, a partir das discussões abordadas nos dois primeiros capítulos e diante das necessidades de mudanças educacionais que apresentamos anteriormente, debateremos sobre a heurística matemática como uma colaboradora dos processos cognitivos, que podem ser encarados como propulsores de novas descobertas e impulsionadores de um aprendizado aguçado. Isto é, essa heurística (considerada como a arte da procura e descoberta, de caminhos alternativos que conduzem a solução de problemas de natureza variada) pode ter um significativo potencial a ser explorado nas aulas de Matemática.

Certificando essa nossa consideração, Cascalho, Teixeira e Meireles (2015, p. 238) também acreditam que a heurística tem um importante papel nos processos educativos. Para os autores, “A abordagem do conceito de heurística torna-se

pois um elemento de orientação para professores e alunos na tarefa de melhorar a proficiência na resolução de problemas". Ou seja, ela serve como uma norteadora que torna possível o aprendizado da matemática por meio de resolução de problemas.

Nesse contexto, destacamos que alguns autores declaram que os modelos tradicionais de ensino fracassam porque são de estilos dedutivias, ou seja, estão atreladas as metodologias de cunho clássico, nas quais o professor é o detentor do conhecimento e o aluno um simples receptor. Em tal modelo, este último não possui um papel ativo no processo de aprendizagem, e por isso a estruturação do seu conhecimento é prejudicada.

Em contrapartida, a metodologia de ensino que se apoia na heurística, enfatiza o aluno como ator protagonista em tal processo, enquanto que o professor é um mediador entre aquele e o conhecimento a ser descoberto. Em relação a isso, Trevisan (2013) cogita que:

> Nesse sentido, a tendência mais adequada para exploração dos conteúdos na fase escolar, em qualquer nível não diz respeito ao estilo dedutivista, mas sim ao estilo heurístico proposto por Lakatos, esse amplia a mera preocupação com a apresentação, lógica e rigorosa, para o enfoque da construção dos elementos presentes ao longo de todo o processo de elaboração (TREVISAN, 2013, p. 143).

No que diz respeito a esse antagonismo existente entre o modelo convencional (dedutivista) e o modelo heurístico de ensino, temos um considerável número de pesquisadores que apontam uma incredibilidade neste primeiro. Lakatos (1976, p. 185), por exemplo, é incisivo ao afirmar que no modelo dedutivista, "o estudante de matemática é obrigado, de acordo com o ritual euclidiano, a assistir a esse ato conjuratório sem fazer perguntas sobre o assunto ou sobre como o ato mágico é praticado". O que pode levar o aluno a incorporar várias percepções equivocadas sobre a estruturação da Matemática e como ele deve proceder para compreendê-la.

Ao contrário disso, o método heurístico é considerado o mais apropriado para perceber como se dá o processo de construção da matemática. Isso porque este método se baseia na existência de um problema, a partir do qual se devem usar estratégias heurísticas (artifícios cognitivos solucionadores) que conduzam a elucidação. Assim, por intermédio dessas estratégias, busca-se compreender como se dão os encadeamentos lógicos que compõem as estruturas básicas dos conteúdos matemáticos.

É importante destacar que neste modelo o papel do professor é de um agente que possibilita uma ponte entre o aluno e o conhecimento a ser assimilado. Ou seja, aqui o docente deve guiar os alunos em suas estratégias no sentido de tornar

possível a elucidação dos problemas e os conduzir a descoberta de possíveis padrões, os quais possam ser usados como novas vias para as resposta de problemas similares (considerados agora como exercícios).

Acerca disso, Pérez (2015, p. 11) considera a heurística como uma ferramenta eficiente para ser utilizada como metodologia de ensino, visto que, por intervenção dela "o estudante sente alegria ao descobrir a verdade por sua própria inventividade, a partir de situações didáticas habilmente criadas diante dele pelo professor para despertar o interesse". Isso significa que ela pode ser vista como uma atenuante dos problemas existentes no âmbito da educação matemática, como por exemplo, o desinteresse, a aversão e o fracasso, pois "o método heurístico dá ao aluno uma grande parte do protagonismo no processo de ensino-aprendizagem, já que ele deve ser aquele que, por meio de pesquisa e experimentação, descobre a solução dos problemas".

Este mesmo autor também declara que a eficiência da heurística, utilizada como método de ensino, se encontra no fato de que ela ativa estratégias cognitivas, que favorecem a estruturação de mecanismos intrínsecos ao desenvolvimento do conhecimento matemático. Diante disso, esses mecanismos aparentam ter notáveis habilidades na direção de aperfeiçoar o rendimento dos alunos nas aulas de Matemática. Ou seja, "o método heurístico oferece muitas possibilidades para que os alunos desenvolvam sua criatividade e imaginação convertendo as atividades de aprendizagem em fontes de interação e descoberta" (PEREZ, 2015, p. 13).

Nesse contexto, alguns autores consideram que o cerne da adoção da heurística como método de ensino estaria em sua capacidade de ativar a criatividade. Isto é, como já discutimos no segundo capitulo, ela seria uma precursora dos elementos que viabilizam a descoberta e invenção. Sale (2015), por exemplo, informa que:

> Essa heurística de ensino eficaz é fundamental para todos os aspectos do planejamento de experiências de aprendizagem e das práticas de ensino. É também a área em que muita criatividade pode ser gerada e aplicada, pois oferece possibilidades quase ilimitadas em termos de como os professores podem maximizar a atenção e a variação no processo de aprendizagem (SALE, 2015, p. 31).

Desse mesmo modo, Oldenburg e Freiburg (2002, p. 29), também cogitam que os métodos heurísticos são valorosos como metodologia de ensino porque eles não proporcionam somente "uma solução algorítmica" para os problemas matemáticos (digamos uma solução mecânica). Ao contrário disso, eles fornecem destrezas para a descoberta e a invenção de estratégias que direcionam ao legítimo conhecimento. Além disso, estes autores julgam que os "processos heurísticos são importantes para

a compreensão matemática, e os estudantes devem ser encorajados a usar métodos heurísticos em seus processos de resolução de problemas".

Acrescentamos ainda que a heurística é um método de ensino-aprendizagem que se apoia na pesquisa ou descoberta. Por isso ela evita a memorização desnecessária de fórmulas que serão aplicadas mecanicamente em exercícios. Com efeito, esse método proporciona a investigação de resolução de situações-problemas que ajudam a servir como ponto de partida para a formalização de teoremas matemáticos.

Chaves e Neves (2016, p. 171) corroboram com as conjecturas que apresentamos até aqui. Para estes autores (além de apoiar o que já expulsemos nessa seção), a heurística é uma disseminadora de conhecimentos, pois eles acreditam que "as aulas voltadas para heurísticas são capazes de fornecer novas heurísticas, ou seja, capazes de fornecer idéias com potencial para produzir novas idéias, em novos contextos ou em novos campos". Além disso, para eles a heurística como método de ensino é importante porque envolve "o processo de fazer surgir, criar modos de investigar e descobrir relações existentes entre a experiência e os processos da natureza".

Outro autor que também compartilha com essas convicções é Moles (2010, p. 11). Para ele "O processo heurístico aparece então como o percurso de uma rede ramificada comportando múltiplos caminhos para ir de um ponto a outro". Esse seu adendo infere que a heurística seria então uma rede de caminhos que conectam os conteúdos que compõem a matemática. Assim, percebemos mais uma vez que tais processos, ao serem aplicados nas aulas, podem promover a instrução matemática tão almejada.

Nesse mesmo contexto, Varizo (1986) também contribui com nossas alegações. Fazendo uma releitura do que ele explana, constatamos que em suas convicções, o método heurístico de ensino-aprendizagem, fortalece grandemente a competência dos alunos para elaborar técnicas que interligam saberes prévios de modo a direcionar para a concretização de novos conhecimentos, por vários caminhos que podem culminar em outros, e assim por diante. Promovendo desta forma uma rede imprescindível para o desenvolvimento matemático escolar do aluno.

Em relação a essa temática, Pérez (2015, p. 12), ainda colabora, expressando que o papel do professor é primordial quando se refere à inserção da heurística nas aulas, visto que neste contexto, ele deve orientar seus alunos na validação das estratégias utilizadas e dos conteúdos a serem assimilados. Para tanto, "o professor deve criar situações problemáticas e contextualizadas na sala de aula, de tal forma que os alunos compreendam e analisem a situação por meio de perguntas que os levem a refletir sobre possíveis formas de resolver tais situações". Por fim, ele ainda conclui

suas considerações afirmando que esse processo oportuniza uma melhor relação entre professores e alunos, isto é:

> A interação entre o professor e aluno é claramente favorecida com o uso desse método, o debate e a troca de critérios são incentivados. O professor deve desenvolver a capacidade de formular perguntas claras, para alcançar a compreensão do aluno sobre o que é desejado; sem respostas óbvias, para o aluno refletir e analisar; e ter uma sequência lógica no grau de dificuldade, para que o processo se desenvolva gradualmente (PÉREZ, 2015, p. 12).

Nesse mesmo contexto, Sale (2015, p. 78) também pressupõe que a postura do professor é crucial. Além disso, ele considera que o processo heurístico é uma ferramenta indispensável em "todo o processo instrucional", pois com o auxilio dessa ferramenta, teremos a oportunidade de "desenvolver em nossos alunos a capacidade de torná-los aprendizes autodirigidos; que é capaz de planejar, monitorar e avaliar sua própria aprendizagem".

Dessa forma, diante desses argumentos apresentados, destacamos a importância de introduzir a heurística nas aulas de matemática. Como constatamos, diversos pesquisadores a elegem como uma ferramenta suplementar, cujos artifícios podem conduzir os alunos a aprender matemática de uma forma mais apropriada. Em seus estudos, Abonyi e Umeh (2014, p. 16), acreditam que essa importância provém do fato de que "a abordagem heurística no ensino de matemática em escolas primárias e secundárias, motivará, estimulará e manterá o interesse dos estudantes pela matemática".

Por fim, nos respaldando nesse momento nas pesquisas citadas, acreditamos que a heurística matemática como método de ensino, é uma aliada que pode ajudar a amenizar várias adversidades existentes no campo da educação matemática, entre as quais enfatizamos a ausência de uma visão mais verídica de como esta ciência se edifica, o desinteresse e o consequente insucesso. Destacamos ainda que ela pode auxiliar os alunos a compreender que essa edificação se dá por meio de um conjunto de tentativas e erros, precedidos muito provavelmente pela intuição, a dedução e a experimentação (os quais estão sujeitos a falhas). Dessa forma, concebemos que empregar a heurística nas aulas de matemática é um ato louvável, porque ela pode incrementar a curiosidade e por consequência a inventividade, que são precursores das descobertas científicas, como já discutimos no segundo capítulo.

4.3 A heurística na resolução de problemas: uma metodologia emergente

Como acabamos de evidenciar, acreditamos que os processos heurísticos são aliados potentes para serem usados nas aulas de matemática. Dessa forma, esboçaremos agora a importância de tais processos envolvidos na resolução de problemas matemáticos e adotaremos essa abordagem como um método de ensino emergente pelo fato de poder ajudar a minimizar as problemáticas existentes nesse campo de ensino-aprendizagem.

Para tanto, começaremos expondo que essa temática já vem sendo discutida há algumas décadas, por ter se mostrado um método vantajoso. No entanto, antes dos anos noventa, a resolução de problemas como metodologia de ensino tinha características distintas das que temos hoje. Acreditava-se que com ela dever-se-ia ensinar um conjunto fechado de técnicas (as fórmulas) que forneciam uma solução pronta para os problemas matemáticos. Fazendo com que os alunos simplesmente aplicassem as fórmulas, antecipadamente apresentadas, sem muitas vezes entender a gênese delas, tão pouco os fundamentos que estruturaram tais teorias. Ou seja, os problemas eram usados simplesmente para a aplicação de fórmulas, que em muitos casos não faziam sentido para os alunos, possibilitando apenas que eles reconhecessem exercícios similares e aplicassem-nas.

Porém, com o advento da Matemática Moderna e a disseminação dos livros "A arte de resolver problemas" de George Polya, "Provas e refutações" de Imre Lakatos, as pesquisas de Onuchic (1999) e as teorias de Stanic e Kilpatrick (1989), a resolução de problemas tornou-se uma linha de pesquisa promissora no campo da educação matemática. Tomando novos rumos, passando a ter melhor embasamento, adquirindo características diferenciadas e conquistando vários adeptos, o que a tornou um tema relevante para ser inserido na nas aulas de Matemática.

Nos dias atuais, muitos pesquisadores consideram essa metodologia de ensino como uma ferramenta que pode possibilitar a construção efetiva do conhecimento matemático pelos alunos. Isso porque os parâmetros que entornam esse tipo de abordagem consistem em ensinar os conteúdos a partir de problemas. Ou seja, todos os tópicos que compõem a grade curricular dessa disciplina seriam ensinados, tendo por base a busca de solucionar problemas matemáticos.

Essas concepções mais recentes sugerem que o professor deve propor perguntas que sejam instigantes, a partir das quais se devem procurar estratégias e caminhos que conduzam a descoberta e a invenção de soluções para elas. As quais podem

possibilitar a compreensão da estruturação das teorias que envolvem a Matemática, promovendo dessa forma um aprendizado de maior qualidade. Assim, verificamos que o principal objetivo desse método é guiar os alunos em seus mecanismos para solucionar tais problemas. O que pode perpetuar em uma compreensão mais rebuscada dessa ciência.

Nesse contexto, as inferências de Rodrigues (2015, p. 212) indicam que os processos heurísticos, atrelados à procura da solução de problemas, se tratam de "um estudo de pesquisa aberta sobre resolução de problemas matemáticos numa perspectiva educacional apoiada por processos psicológicos essenciais para construir uma aprendizagem significativa". Ou seja, para este autor os processos psicológicos (vulgamos heurísticos), seriam os elementos centrais quando se refere à resolução de problemas, pois estes estimulam a curiosidade do aluno, possibilitando a procura de caminhos estratégicos, que são muito mais significativos para o aprendizado do que a elucidação em si do problema.

Vários pesquisadores acreditam que o pensamento heurístico é um potente artifício para o aprendizado, já que estes são promotores de descobertas e estão envolvidos na busca de estratégias para solucionar os problemas matemáticos. Isso é, segundo Smole e Diniz (2001, p. 89), essa nova tendência educacional "trata de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca de solução". Mais que isso, Abrantes (1989) acredita que esse método é eficaz porque ele está no cerne de como se constroem as bases da Matemática, ou seja, "a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da atividade matemática".

Com base nesses argumentos, é importante ressaltar que os possíveis erros ou falhas cometidos pelos alunos, quando buscam resolver os problemas são passíveis de serem vistos como algo benéfico. Isso porque são essas inexatidões que permitem verificar caminhos defeituosos, eventuais dificuldades e podem promover uma resposta mais embasada, fatos estes que são determinantes para a aquisição de um conhecimento mais sólido.

Diante disso, observamos que em relação a essa metodologia de ensino, analisar e discutir os erros são tarefas prestigiosas, porque podem deixar transparecer que na construção do conhecimento, os equívocos são naturais. No entanto, a forma como eles são tratados e corrigidos, é um diferencial para o sucesso.

Júnior e Barboza (2012) reputam a resolução de problemas como uma potente forma de sistematizar a organização das aulas de matemática. Para estes autores, ao introduzir os problemas como forma de conduzir o aluno a encontrar por si só (más

com a orientação dos professores) os caminhos que o leva as verdades matemáticas, estaremos proporcionando uma instrução mais condizente com o incremento do "espírito" investigativo:

> Uma prática que pode ser incorporada é a resolução de problemas, onde o aluno para responder não vai precisar de técnicas e fórmulas padronizadas, ele terá uma atitude de investigação diante do que foi proposto, tendo que exercitar sua mente e acionar o conhecimento no sentido de vencer obstáculos para solucionar o problema, e o aluno terá que experimentar várias soluções e criar hipóteses para resolver o problema proposto, desenvolvendo o seu raciocínio matemático (JÚNIOR e BARBOZA, 2012, p. 03).

Com esse mesmo discurso, Guérios e Júnior (2013) e Disperati (2015) também apostam na resolução de problemas como um método eficiente para serem empregados nas aulas de matemática. Estes autores reforçam que a investigação é "potencialmente heurística" pelo fato de estimular invenções e desenvolver a "autonomia de aprendizagem". Aspectos estes que são cruciais no que concernem às mudanças educacionais tão desejadas.

Nesse contexto, eles acreditam que tal autonomia é impulsionada pela produção de recursos diferentes para a solução de um mesmo problema e que estas diferentes estratégias podem auxiliar a "modificar e transformar conceitos vazios de significado em situações-problema com a valorização do senso-lógico das respostas".

Outros autores presumem que essa metodologia de ensino é importante porque o modo como o ensino tradicional (como única metodologia de ensino do professor) tem se perpetuado, extrai quase toda a beleza por traz da matemática, isto é, tem a descaracterizado como uma ciência de caráter indutivo e experimental. Sobre este modelo de ensino tradicional, Pozo (1998, p. 46) argumenta que ele "não tem nada a ver com o mundo real. As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção". Assim, contrariamente a esse modelo de ensino, considerado convencional, o método de resolução de problemas auxilia os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico e investigativo, que estão nas bases da construção da matemática como ciência.

Com isso, verificamos que fortalecer os métodos que favorecem a disseminação da investigação nas aulas de matemática é uma urgência na contemporaneidade. Isso porque, conforme as teorias de Scolari, Bernardi e Cordenonsi (2007), do mesmo que na leitura ou na escrita "o raciocínio lógico na resolução de problemas matemáticos é um fator de extrema importância. É fundamental que os alunos compreendam e raciocinem sobre o que está sendo proposto e não somente decorem e apliquem fórmulas".

No que concerne a resolução de problemas como método de ensino, Dante (1991) possui varias obras que enfatizam tal método como sendo um subterfujo valioso para a aprendizagem da matemática em nível fundamental e médio. Para este autor, o crédito dessa sua conjetura se encontra no motivo de que:

> [...] é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela (DANTE, 1991, p.25).

Onuchic (1999, p. 206) também argumenta que é crucial compreender as diferenças entre três modos diferentes que permeiam essa metodologia, pois várias pessoas têm as confundido. Para a autora esses três conceitos, que se diferem totalmente em sentidos e abordagens são: "ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas".

Consideramos que esse primeiro estaria ligado ao ensino que envolve teorias a respeito da resolução de problemas; o segundo aos métodos e técnicas que possibilitam a solução de problemas matemáticos; e a última (que é a que acreditamos ser a metodologia emergente pela sua sagacidade na aprendizagem), é o método que, a partir de problemas cotidianos, deseja-se desenvolver nos alunos todos os conteúdos dessa disciplina e os auxiliar no pensar matematicamente, isto é, para Schoenfeld (1996, p. 68), os ajudam a "(a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predilecção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso".

Nesse contexto, realçamos que o terceiro conceito apresentado por Onuchic (1999) é o mais benevolente em relação à aprendizagem, porque é por intermédio dele que o aluno pode perceber uma conexão mais realística entre a matemática e o seu dia-a-dia. Dessa forma, ao fazer ligações entre estes dois, o aluno poderá perceber que a Matemática é uma ciência praticável e de caráter experimental. Com essa compreensão, o ensino poderá se tornar mais atrativo, dinâmico e o aprendizado mais efetivo e agradável.

É importante salientarmos também que para conseguirmos inserir com êxito esse método nas escolas, o papel do professor é determinante, no sentido de tornar essa prática uma ferramenta de aprendizagem útil. Validando esse nosso alegação, Velasco e Joucoski (2007, p. 13) consideram que há necessidades de "[...] mudanças

relacionadas com o desempenho do professor, cabendo-lhe o papel do mediador que observa, questiona e estabelece estratégias para auxiliar o aluno, evitando centralizar o conhecimento em suas mãos".

Com isso, verificamos que não é suficiente conhecer apenas a teoria e acreditar no seu impacto positivo. É fundamental que os professores apostem nessa metodologia e a apliquem com convicção e sagacidade, para que assim ela se torne uma prática eficiente na aprendizagem. Dessa forma, para criar um ambiente onde a resolução de problemas é um método válido e influente, é essencial que se criem uma relação de confiança entre professores e alunos, acreditando que ambos tenham algo a ensinar, más também a aprender.

Em relação a essa postura do professor, no processo de resolução de problemas, Pérez (2015) indica que a relação entre aquele e o aluno deve ser a mais cordial possível, já que ao trabalhar com esse método:

> [...] o aluno torna-se um sujeito ativo, eixo do processo, enquanto o trabalho do professor se concentra no despertar do interesse (motivador) e guia da sua atividade. Além disso, em todos os momentos o professor deve acompanhar o aluno, para ajudar a resolver os erros que incorrer e usá-los para iniciar a estratégia intelectual, cuja finalidade é que o aluno descubra por si mesmo os conceitos e as soluções dos problemas (PÉREZ, 2015, p. 10).

Nesse sentido, é essencial que o professor acredite que o aluno tem condições de produzir estratégias que o conduza as soluções almejadas e assim vá construindo o seu próprio conhecimento. Já com relação ao aluno, é fundamental que ele confie que o seu professor possui condições e saberes necessários, para compartilhar e o guiar na procura de estratégias, quando isso for necessário. Ou seja, nesse contexto Velasco e Joucoski (2007, p. 14) julgam que "o ensino-aprendizagem de matemática com resolução de problemas parece significativo para a educação desde que se estabeleçam mudanças nas posturas pedagógicas".

Diante disso, acreditamos que ao utilizar resolução de problemas como método de ensino-aprendizagem, os alunos serão induzidos a procurar estratégias, no sentido de comprovar suas presunções e argumentar com respaldo em seus resultados encontrados. O que possibilitará a criatividade, que é precursora do conhecimento cientifico (como já discutimos no segundo capítulo), desenvolvendo suas habilidades e competências, promovendo a interação e assim criando na escola um verdadeiro ambiente de difusão e produção de conhecimento.

Nessa perspectiva, Dante (1996, p. 8) ainda enfatiza a necessidade urgente de introduzir nas aulas essa metodologia, porque para ele essa prática pode auxiliar os alunos a compreender o verdadeiro sentido da matemática. Ou seja, "aprender a

resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática", pois como já relatamos, a busca por soluções podem envolver um complexo de operações mentais que conduzem ao conhecimento verdadeiro.

Assim, com relação à preeminência dos processos heurísticos na resolução de problemas, frente ao modelo convencionam de ensino, visto que este último tem sido pouco legitimado pela sociedade de um modo geral, esboçamos por último as conjecturas de Pozo (1998, p. 46). Para este autor, "A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real. As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção". Isto é, para ele o ensino tradicional é dispensável, porque marginaliza a curiosidade e barra as investigações que são tão necessárias para a aprendizagem.

Dessa forma, finalizando essa subseção, acreditamos que a resolução de problemas matemáticos é uma eficiente alternativa para aprimorar, analisar e avaliar as habilidades e competências dos alunos de pensar heuristicamente, construir primorosamente o seu conhecimento, e também produzir conhecimento. Com isso, aprender Matemática tomando como eixo central a busca de estratégias que culminam na elucidação de problemas é um método emergente e que portanto deve ser disseminado com mais profundidade entre os professores, para que tenhamos uma educação matemática básica, e consequentemente a superior, igualitária, compreensível e de qualidade.

4.4 Resultados da pesquisa de campo referente à aplicação em sala de aula da resolução de problemas apresentados por George Polya: uma análise do método heurístico

Agora, diante dos argumentos apresentados anteriormente sobre a relevância positiva que tem as atividades heurísticas, utilizadas na busca da resolução de problemas, mostraremos os resultados da segunda fase da nossa pesquisa de campo, que como já introduzimos no início do capítulo, analisaremos a validade da aplicação desse método, por intermédio de uma intervenção pedagógica.

Nessa parte da pesquisa de campo, seguindo o método heurístico na resolução de problemas, assim como sugerido por George Polya em seu livro "A arte de resolver problemas", aplicamos em três turmas do ensino médio 1°, 2° e 3° ano,

problemas matemáticos (dois em cada turma) com o objetivo de verificar se os alunos compreendem os conteúdos a serem ensinados, quando são estimulados a resolver tais problemas.

É importante deixar registrado que essas três turmas foram de uma escola da esfera particular de ensino do município de São Paulo – SP, e que também fizeram parte da primeira fase da pesquisa de campo, representando assim uma amostra dos alunos que participaram da primeira etapa. Além disso, a escolha dessas três turmas se deve ao fato de que foram as que mais se mostraram receptivas para tal intervenção, facilitando dessa forma a aplicação da metodologia de resolução de problemas.

Assim, a intervenção pedagógica se desenvolveu da seguinte forma: em cada turma explicamos quais os fundamentos da heurística na resolução de problemas, especificando as idéias de George Polya como subsídio para a procura de tais soluções; em seguida (na mesma aula), disponibilizamos para cada aluno dois problemas análogos, cujos conteúdos (devido ao ano escolar de cada um), ainda não conheciam e por isso não dispunham de uma fórmula matemática para aplicar ao problema e o resolver; a partir de então, pedimos para cada aluno ler o primeiro problema e tentassem o resolver, tomando com base os seus conhecimentos prévios e as estratégias de resolução sugeridas por George Polya; após as tentativas de solução pedimos para que eles tentassem formalizar uma teoria, ou verificassem padrões, que tornassem possível a elucidação de exercícios similares, isto é, que envolvessem o mesmo conteúdo; por último, usando as estratégias ou fórmulas que puderam perceber na solução do primeiro problema, pedimos que a usassem para resolver o segundo de modo mais rápido e eficiente, ou então que o resolvem de modo que acreditem ser mais interessante.

Portanto, o objetivo dessa parte da pesquisa, foi o de verificar a aplicabilidade do método heurístico, por meio da resolução de problemas. Procurando verificar se ela é uma estratégia louvável na construção do conhecimento matemático e em seguida, tentar verificar se essa metodologia de ensino é uma atenuante no desinteresse e uma auxiliar na redução do fracasso, nessa referida disciplina.

Ressaltamos que o plano apresentado por Polya, o qual disponibilizamos para os alunos como colaborador na solução dos problemas, é composto por uma sequência de quatro fases. Segundo este autor, ao se nortear nesta sequência, a elucidação destes problemas matemáticos tornam-se mais evidente. E mais que isso, desenvolve nos alunos a capacidade de ir além e elaborar novos procedimentos, os quais são capazes de criar ou amplificar ramificações nessa área de estudo.

Este plano heurístico em questão (como já foi apresentado no capítulo I) consiste em: 1° - compreender o problema; 2° - estabelecer um plano para a elucidação deste; 3° - executar o plano proposto, e por fim, 4° - fazer um retrospecto para que seja analisada se a solução encontrada faz sentido, e verificar possíveis erros. Filho (2004) explana as quatro fases desse plano da seguinte forma:

> A primeira fase estabelece que se deve compreender o problema, ou seja, é necessário que os dados do problema e o que se pede estejam evidentes para que seja possível resolvê-lo. Na segunda fase, a partir da percepção das relações entre as partes do problema, que poderão dar uma idéia de sua resolução, é estabelecido um plano. Em seguida, na terceira fase, o plano estabelecido é executado e, finalmente, na quarta fase, o procedimento executado é revisto, fazendo-se uma análise e discussão da resolução apresentada (Filho, 2004, p. 155).

Com isso, embasados nos exemplos de problemas matemáticos apresentados por Polya, os quais devem ter por base a indução de atitudes e hábitos que tornem possível o desenvolvimento do raciocínio heurístico, e que valorizem, além do resultado correto, os caminhos que foram seguidos para a obtenção da sua resposta. Aplicamos em cada turma dois problemas similares, o primeiro para ser resolvido orientando-se nas quatro fases apresentadas por Polya, tentando encontrar uma fórmula que permitisse solucionar o segundo exercício de modo mais ágil, já que se tratavam do mesmo conteúdo e, portanto, poderia ser resolvido de modo análogo.

4.4.1 Resultados da aplicação feita na turma do 1° ano do Ensino Médio

Nessa classe, que estava composta por 16 alunos, selecionamos dois problemas que envolviam o cálculo dos valores máximos e mínimos de uma função quadrática. Isto é, pretendíamos que eles compreendessem como se chega à fórmula das coordenadas do vértice de uma parábola. Para tanto, disponibilizamos os seguintes problemas:

1° problema: Com base em experiências feitas em um laboratório, constatou-se que a concentração de certo tipo de antibiótico, quando ingerido por camundongos, varia de acordo com a função $y = -3x^2 + 6x$, onde o x é o tempo decorrido em horas, a partir do momento da ingestão e y é o valor da concentração. Com base nessas informações, qual será o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue desses animais?

2° problema: Sabendo que uma bola, a partir de um impulso, sai do repouso e descreve uma curva semelhante a uma parábola, cuja função é dada em metros,

por $y = -x^2 + 49$, onde y é altura da bola e x é o espaço horizontal percorrido por ela, e que varia de -7 até 7 metros. Sendo assim, encontre qual foi a altura máxima atingida pela bola?

Diante dessas duas questões, para verificarmos a validade da importância dos processos heurísticos envolvidos na resolução de problemas, disponibilizamos a primeira delas para os alunos e pedimos que eles tentassem encontrar a resposta, e em seguida, investigassem se há algum padrão ou alguma fórmula que permitisse encontrar uma solução para outros problemas similares ao proposto. Assim, buscamos ensinar o conteúdo de máximos e mínimos de funções do segundo grau, dando-os a autonomia para a partir dos problemas, procurar estratégias (com base em seus conhecimentos) que tornem possíveis a elucidação de exercícios futuros, que envolvam o mesmo tema.

É importante destacar, que por se tratar de uma turma de primeiro ano do ensino médio, e analisando o material didático adotado pelo professor, o conteúdo que envolvem esses dois problemas ainda não tinha sido trabalhado em sala de aula. Portanto tratou-se de um assunto novo para os alunos, os quais ainda não possuíam uma estratégia de solução algorítmica para o problema.

Diante disso, com base no livro "A arte de resolver problemas de George Polya", e no intuito de auxiliar os alunos na procura de estratégias para resolver o primeiro problema, dispomos para eles um guia composto por quatro fases, as quais se resumiam em:

Compreensão do problema

- Você entendeu o que o problema está pedindo? Explique.
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x.

Estabelecendo um plano

- Quais incógnitas dependem das outras?
- Se necessário, desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema.
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?
- Existe alguma lógica para responder o problema mais rapidamente?

Execução do plano

- Calcule a altura máxima da parábola.
- Encontre o tempo necessário.
- Retrospecto

- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema

Salientamos que nesse processo de procurar solucionar o problema, o professor foi um agente mediador, intervindo na validação de algumas etapas e incitando os alunos a verificar possíveis padrões. Nessa etapa, após eles terminarem de responder o primeiro problema, os indagamos sobre a possibilidade de existir uma regra que os permitissem encontrar os máximos ou mínimos de outras funções quadráticas.

Dessa forma, verificando as respostas apresentadas pelos alunos no primeiro problema, constatamos que, dos 16 que participaram dessa pesquisa, 12 deles, o que representa 75%, conseguiram chegar à solução correta, que era: "a concentração máxima no organismo é atingida em uma hora, após a ingestão do antibiótico".

Quando analisamos as estratégias utilizadas por eles para encontrar tal solução, observamos que todos montaram uma tabela com os possíveis valores para x (0; 1; 2; 3...) e com isso iam encontrando os correspondentes valores para y. Desse modo, observaram para qual valor do x obtiveram o valor máximo em y, e assim concluíram a solução do problema.

Abaixo segue imagens das respostas apresentadas por alguns alunos nesse primeiro problema:

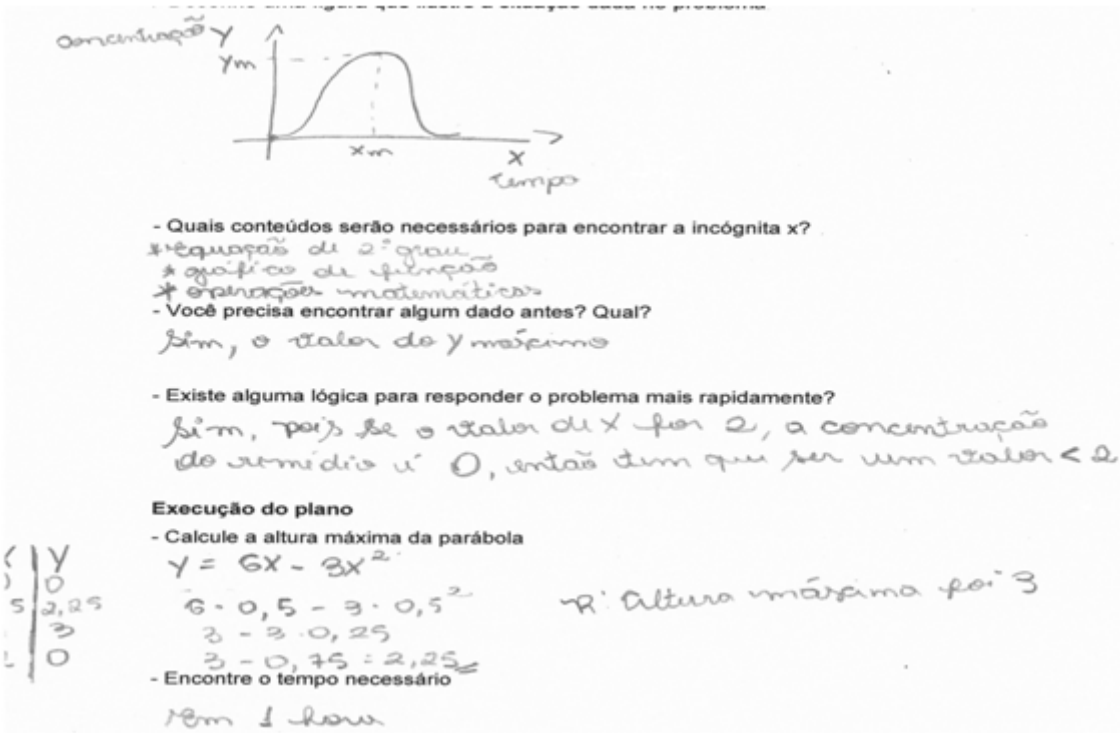


Figura 4.1: Resposta apresentada por um aluno do 1° Médio para o primeiro problema

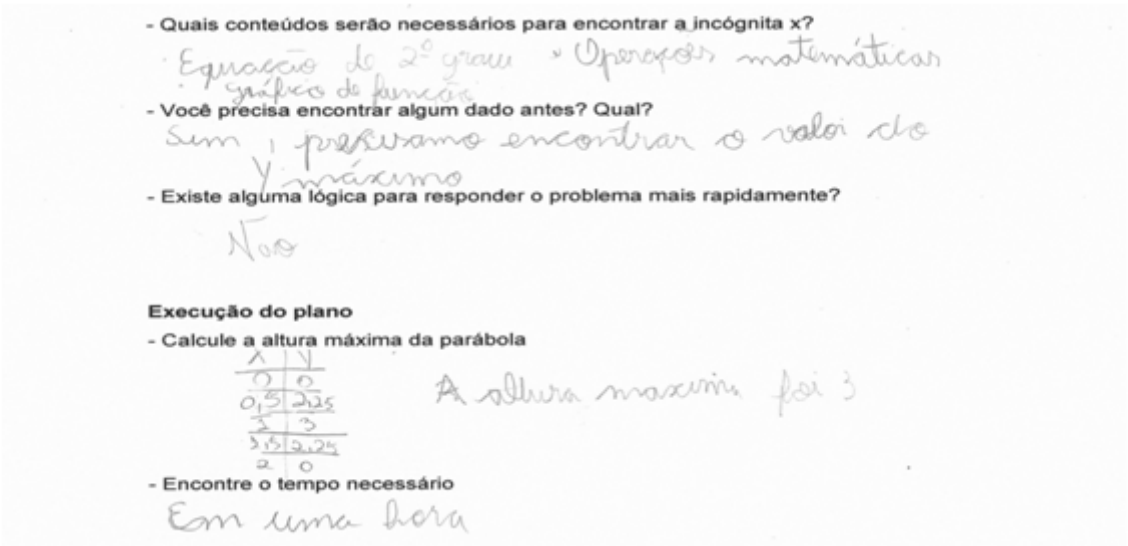


Figura 4.2: Resposta apresentada para o primeiro problema por um aluno do 1° Médio

Assim, inferimos que em relação à solução desse primeiro problema, as quatro fases apresentado por George Polya aparenta ser um auxílio eficiente. No entanto, constatamos que a maior parte dos alunos não percebeu a necessidade de utilizar

outros valores para a variável x, como por exemplo, $0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ ou outros valores no conjunto dos números racionais, que poderiam dá como resultado um maior valor para y.

Em relação a elaboração de uma fórmula que torna possível a solução de exercícios similares ao primeiro, alguns alunos perceberam que nesse caso estávamos tentando encontrar o valor de x, que resultava em um máximo valor para o y. Após uma série de tentativas e erros, e com a orientação do professor, 5 alunos conseguiram concluir que o valor do x (eixo horizontal) é o ponto médio das raízes da equação e pode ser encontrado usando a fórmula $\frac{-b}{2.a}$, onde a e b são os coeficientes da equação quadrática. Da mesma forma, obtiveram que quando esse x é o valor médio das raízes obteremos um máximo valor para y (eixo vertical), que será dado por $\frac{-b^2+4.a.c}{4.a}$.

Em seguida, temos uma imagem dessas fórmulas encontradas por um aluno, após a tentativa de resolver o primeiro problema.

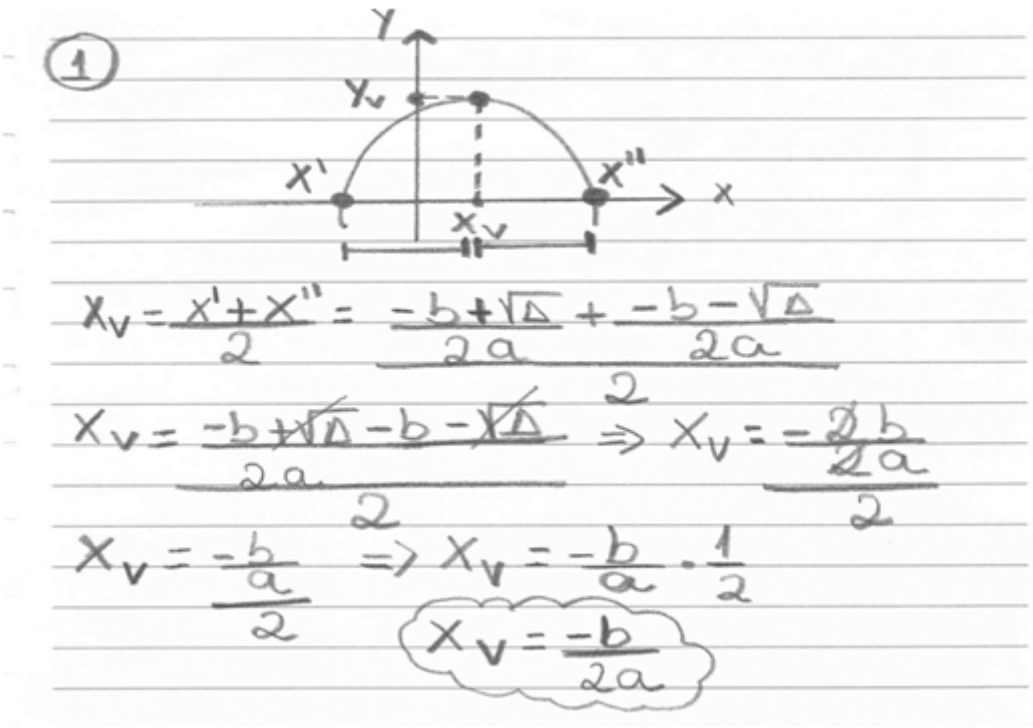


Figura 4.3: Dedução da fórmula do x do vértice de uma parábola feita por um aluno do 1° Médio.

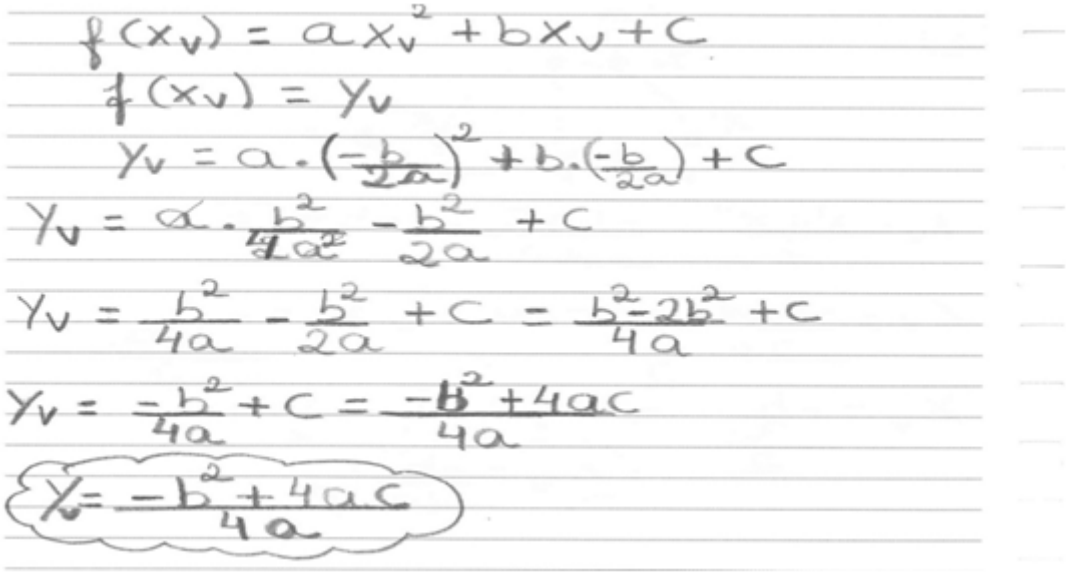


Figura 4.4: Dedução da fórmula do y do vértice de uma parábola feita por um aluno do 1° Médio.

Assim, com base na constatação feita por esses cinco alunos, explicamos para o restante da turma como foi possível chegar a essas fórmulas. Além do mais, tentamos enfatizar que a partir do entendimento do primeiro problema, elas poderiam ser induzidas a partir da solução deste, tornando-se mais palpável. Portanto, após essa compreensão, os explicamos que na resolução de exercícios análogos (não considerados mais como problemas já que os alunos agora possuíam um algoritmo para calculá-los) poderiam usar a técnica encontrada.

Dessa forma, quando disponibilizamos o segundo exercício, 10 alunos o resolveu usando a fórmula manipulada no primeiro problema, já que perceberam que eram semelhantes, enquanto que 6 deles ainda elucidaram montando novamente uma tabela com os possíveis valores para x e obtendo com isso os valores para y. No entanto, é válido deixar registrado que todos eles conseguiram encontrar a resposta correta, e com propriedade sobre todos os passos que estavam executando.

Esse resultado nos mostra a necessidade de possibilitar, antes mesmo de ensinar a teoria, a investigação de caminhos que conduzam a teoremas e fórmulas que ajudem na elucidação de problemas. Consequentemente, os alunos poderão visualizar de maneira mais abrangente o modo como se dá a construção do conhecimento matemático.

4.4.2 Resultados da intervenção feita com a turma do 2° ano do Ensino Médio

Na turma do segundo ano, que estava composta por 10 alunos, apresentamos dois problemas, cujo conteúdo versava sobre Progressão Aritmética (P.A). Assim, objetivávamos que eles compreendessem os fundamentos desse tema, e que a partir da procura de solucionar o primeiro destes dois, elaborassem estratégias (fórmulas) que possibilitassem a resolução de exercícios análogos. Com esse intuito, as questões que disponibilizamos foram:

1° problema: Cientistas observaram que determinado tipo de árvore, quando plantada e cuidada sob certas condições, cresce 4 cm a cada dia. Uma muda dessa espécie foi plantada em um laboratório, e como era esperado, ao final do 1° dia a árvore alcançou os 4 cm de altura. Sendo assim, considerando que esse padrão de crescimento se mantenha, então qual será a altura atingida pela planta ao final do 82° dia?

2° problema: Na construção de uma escada o primeiro degrau ficou a 30 cm do chão. Daí em diante, o pedreiro construiu cada degrau 20 cm acima do anterior. Com base nessas informações, a que altura do chão ficou o décimo segundo degrau?

Assim, do mesmo modo como fizemos com a turma anterior, apresentamos o primeiro problema para os alunos e com o auxílio do método de resolução de problemas apresentadas por George Polya, pedimos para que eles procurassem encontrar uma forma de resolver a questão e logo após, tentassem investigar a possibilidade de existir um método que permitisse resolver exercícios semelhantes por intermédio de uma fórmula geral.

É importante salientar que os alunos ainda não tinham estudado esse conteúdo e, portanto não dispunham de técnicas (fórmulas) para resolver o primeiro problema de um modo mais rápido.

Com essa perspectiva, disponibilizamos para eles um conjunto de quatro passos, como sugerido por esse ultimo autor, que os ajudavam a encontrar uma resposta e a desenvolver uma fórmula para resolver o segundo problema, de modo mais ágil e prático. Com isso, o guia apresentado tratrava-se de:

Compreensão do problema

- Você entendeu o que o problema está pedindo? Explique
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x

Estabelecendo um plano

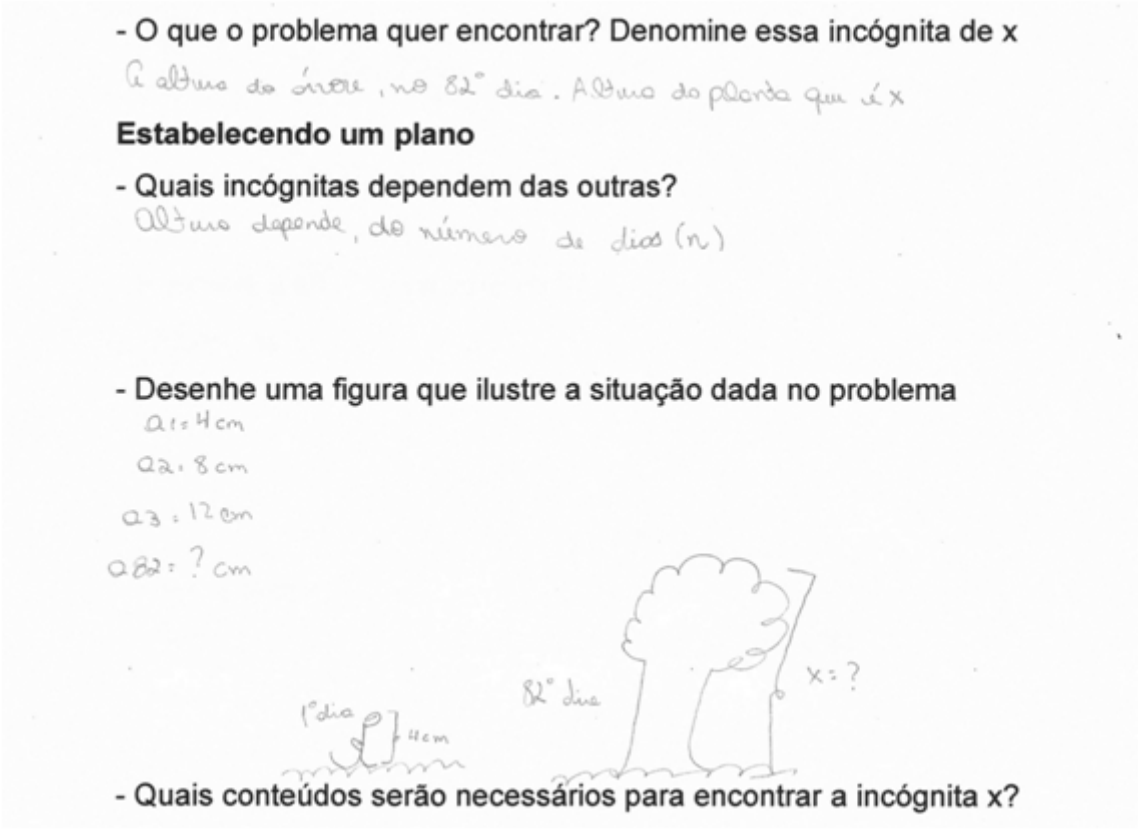
- Quais incógnitas dependem das outras?
- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?
- Existe alguma lógica para responder o problema mais rapidamente?

Execução do plano

- Calcule quantos centímetros a planta cresceu no período determinado
- Encontre a altura da arvore no 82° dia
- Retrospecto
- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema

Sendo assim, diante das respostas obtidas nesse problema, pudemos verificar que 9 alunos, isto é, 90%, chegou a solução correta. Já quando se refere às estratégias utilizadas observamos que alguns deles montaram uma sequência com as alturas da planta durante todos os 82 dias, enquanto que outros foram mais habilidosos e multiplicaram 4 por 82, chegando a altura da planta no 82° dia que, foi de 328 cm.

As imagens a seguir retratam as soluções apresentadas por dois alunos:



- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x

A altura da árvore, no 82° dia. Altura da planta que é x

Estabelecendo um plano

- Quais incógnitas dependem das outras?

Altura depende, do número de dias (n)

- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema

a1 = 4cm

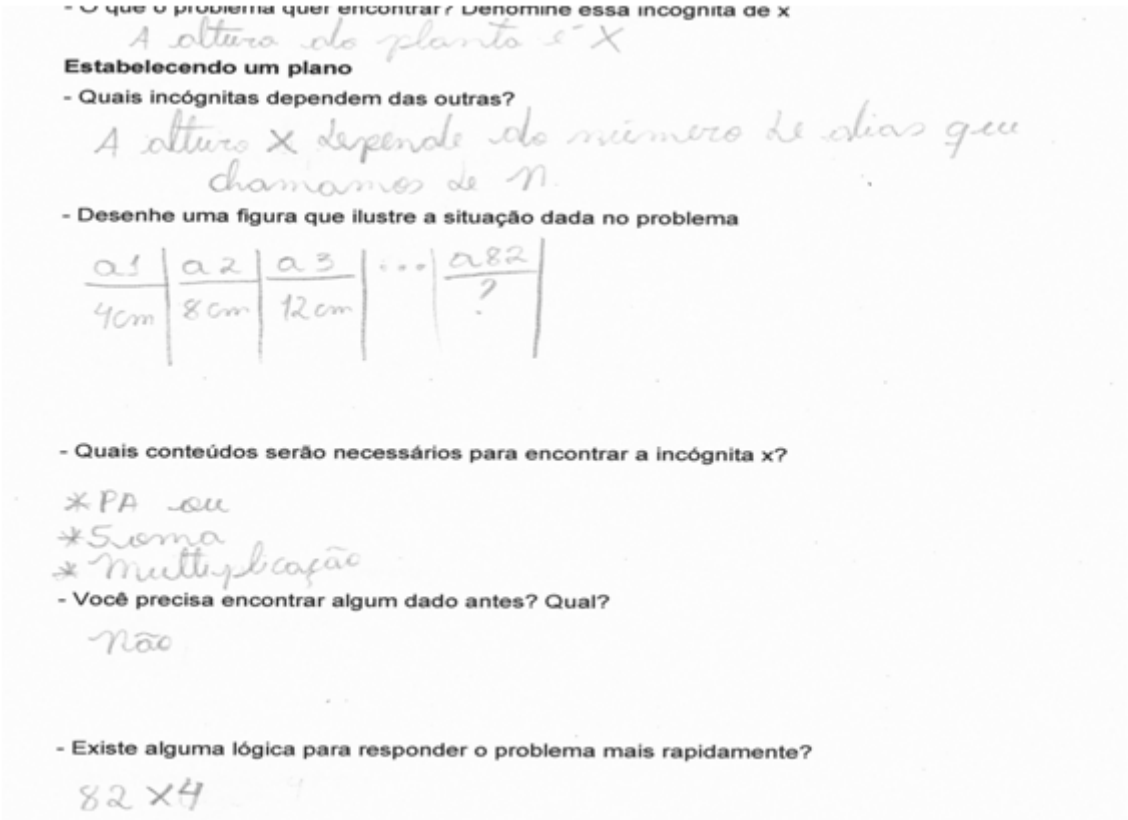
a2 = 8cm

a3 = 12cm

a82 = ? cm

- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?

Figura 4.5: Resposta apresentada por um aluno do 2° Médio para o primeiro problema


- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x

A altura da planta é X

Estabelecendo um plano

- Quais incógnitas dependem das outras?

A altura X depende do número de dias que chamamos de n.

- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema

a1	a2	a3	...	a82
4cm	8cm	12cm		?

- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?

*PA ou
*Soma
*Multiplicação

- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?

Não

- Existe alguma lógica para responder o problema mais rapidamente?

82 x 4

Figura 4.6: Resposta feita por um aluno do 2° Médio para o primeiro problema

Em relação a uma fórmula geral, que permitiria calcular o tamanho da árvore, ou resolver qualquer outro exercício similar, 8 alunos da turma concluíram que para determinar tal altura em cada dia bastava multiplicar o valor do número do dia pelo crescimento da planta a cada dia. No entanto, ao serem indagados sobre "e se o crescimento da planta no primeiro dia fosse diferente dos demais (considerando o crescimento constante a cada dia, logo após o primeiro)?". Com isso, após algumas discussões entre os alunos e o professor, 6 deles chegaram a conclusão de que para descobrir o comprimento da planta, deveriam somar o valor do primeiro dia de crescimento, com o valor do número de dias menos um, multiplicado pelo valor do crescimento a cada dia.

Desse modo, eles chegaram à dedução da fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, que é dada por $a_n = a_1 + (n-1).r$, onde a_1 é o primeiro termo, n é o numero de termos, a_n é o termo geral e r é a razão, ou seja, é a constante que é somada a cada termo anterior.

A seguir temos uma ilustração das estratégias usadas por um aluno para conceber a fórmula que serve para encontrar o termo geral de uma P.A:

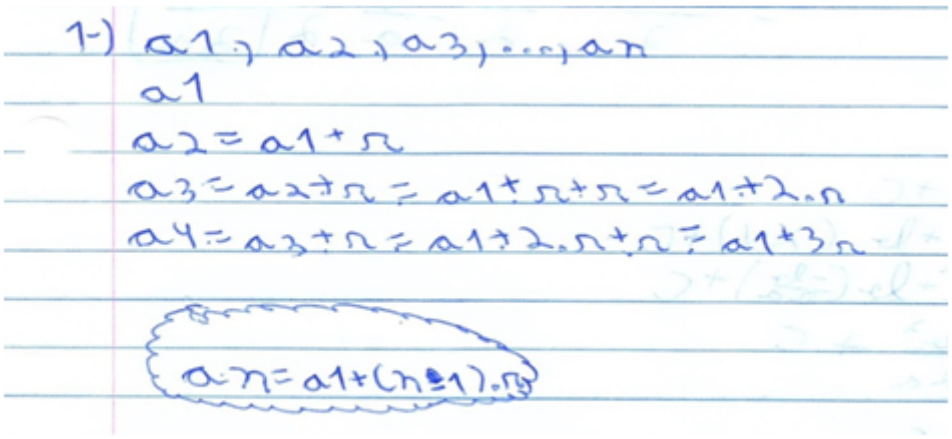


Figura 4.7: Dedução da fórmula do termo geral de uma P.A feita por um aluno do 2° Médio.

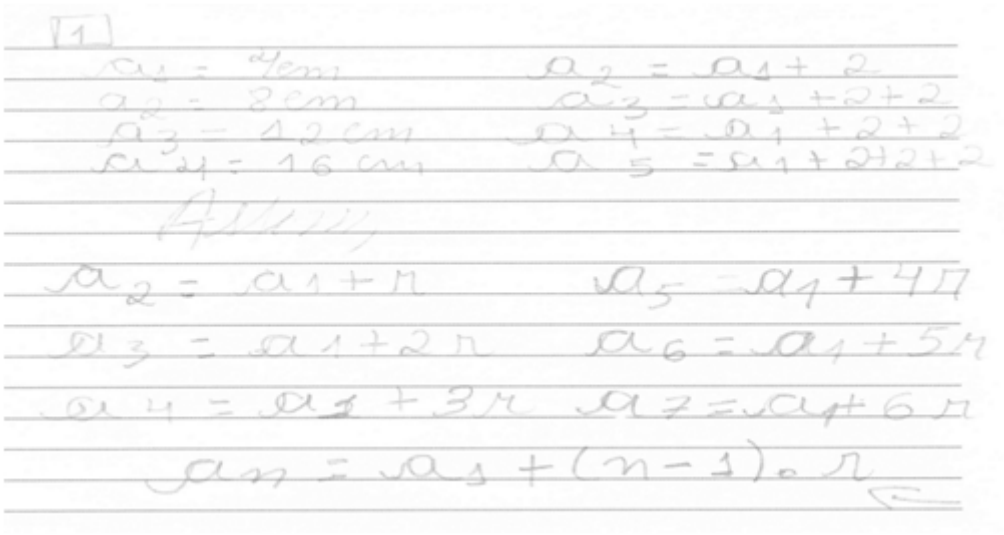


Figura 4.8: Dedução da fórmula do termo geral de uma P.A apresentada por um aluno do 2° Médio.

Assim, diante dessa construção feita por alguns alunos, explicamos para os demais da turma como proceder para chegar a tal fórmula. Logo em seguida, após fazer esse adendo partimos para a solução do segundo exercício, que servia de base para verificar a aplicação do algoritmo criado para resolver exercícios análogos ao primeiro. Com isso, obtivemos que dos 10 pesquisados, todos conseguiram chegar a resposta correta, a qual foi 250 cm. No entanto, três deles ainda preferiram calcular o valor de cada termo dessa progressão, de um por um, até chegar no 12° degrau, enquanto que os outros 7 utilizaram a fórmula para encontrar o resultado.

4.4.3 Resultados da intervenção feita com a turma do 3° ano do Ensino Médio

Do mesmo modo que no 1° e 2° ano, no 3° disponibilizamos aos seis alunos da turma, dois problemas que versavam sobre aplicações do teorema de Pitágoras, utilizados como ferramenta para encontrar a diagonal de um cubo e de um paralelepípedo. Assim, os problemas que os apresentamos foram:

1° problema: Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo, do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

2° problema: Calcule a diagonal x de um cubo qualquer de aresta y.

Com o objetivo de auxiliá-los na busca da resposta para o primeiro problema os entregamos um guia composto por quatro fases as quais foram propostas por George Polya e consistia em:

Compreensão do problema

- Você entendeu o que o problema está pedindo?Explique
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x

Estabelecendo um plano

- Quais as letras você escolheria para representar o comprimento, a largura e a altura?
- Quais incógnitas dependem das outras?
- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?

Execução do plano

- Encontre a diagonal do retângulo da base do paralelepípedo
- Usando essa primeira diagonal, encontre a diagonal do paralelepípedo

Retrospecto

- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema

Seguindo estas sugestões apresentadas e com o auxilio do professor, quatro alunos, $66,7\%$, conseguiram chegar à solução correta utilizando o teorema de Pitágoras duas vezes consecutivas. Estes deduziram que a diagonal de um paralelepípedo é dada pela fórmula $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, onde d é a diagonal, a é

comprimento, b é a largura e c é altura do paralelepípedo. Já os dois que erram, observamos que eles aplicaram uma única vez tal teorema.

A seguir, temos duas imagens de respostas apresentadas por dois alunos.

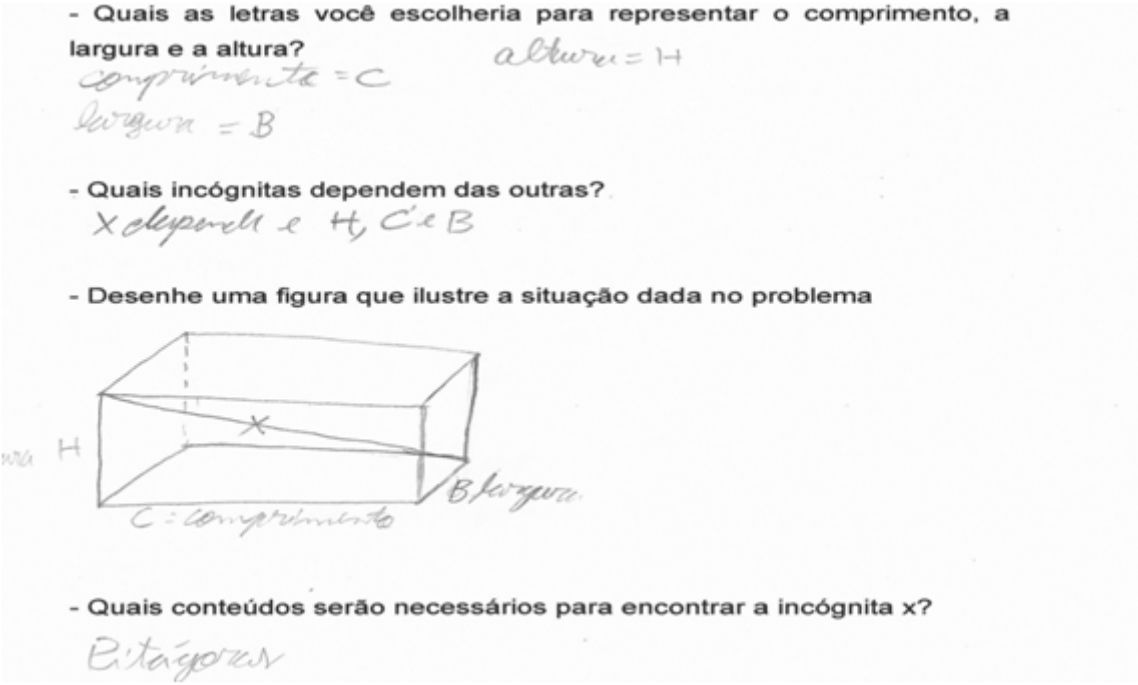


Figura 4.9: Resposta apresentada por um aluno do 3° Médio para o primeiro problema

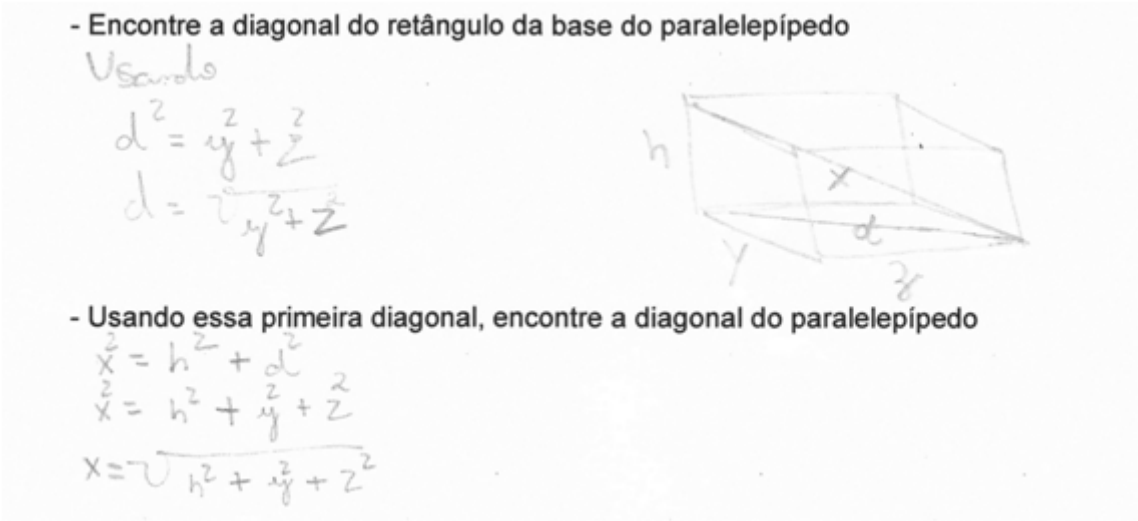


Figura 4.10: Resposta execultada por um aluno do 3° Médio para o primeiro problema

Assim, fizemos uma discussão geral a respeito das soluções apresentadas e

verificando a validade de cada uma. Com isso, logo após a dedução da fórmula que permite calcular a diagonal de um paralelepípedo, os solicitamos que procurassem encontrar uma resposta para o segundo exercício, agora tomando como base os apontamentos e resultados encontrados no primeiro problema.

Os dados dessa pesquisa mostraram que todos os seis alunos chegaram na reposta correta, de que a diagonal de um cubo é dado por $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3.a^2}$, no entanto, apenas dois deles simplificou esse resultado e finalizou que $d = a\sqrt{3}$, onde d é a diagonal e a é o tamanho da aresta do cubo.

Diante desses resultados alcançados pela intervenção pedagógica aplicada nas três turmas, acreditamos que o pensamento heurístico, quando atrelado à resolução de problemas matemáticos, aparenta ser uma abordagem educacional eficiente para desenvolver nos alunos um conhecimento mais fundamentado. Portanto, tomar como ponto de partida um problema é crucial para florescer toda uma teoria a respeito de um conteúdo matemático. Além disso, pode os ajudar a compreender melhor essa ciência, evitar a defasagem e melhorar o interesse por essa disciplina.

4.5 A Heurística Matemática: uma ferramenta que pode auxiliar a reduzir a rejeição dos alunos a esse componente curricular

Na terceira e última etapa da pesquisa de campo, aplicamos um questionário não estruturado para os 32 alunos que participaram da segunda fase. Como já os especificamos, 16 deles eram da turma do 1°, 10 do 2° e 6 do 3° ano, todos do ensino médio de uma escola da rede particular do município de São Paulo – SP, os quais também participaram da primeira etapa da pesquisa. O objetivo aqui foi analisar e discutir o que os sujeitos investigados captaram da intervenção pedagógica aplicada (por intermédio do método de resolução de problemas sugeridos por Polya), quais suas principais inferências e se consideram esse método relevante para a aprendizagem. Para tanto, o questionário apresentado dispunha de quatro questões subjetivas.

Sendo assim, esboçaremos a seguir os resultados encontrados nessa última parte da nossa investigação. Dessa forma, a primeira pergunta os interrogava sobre: "O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES TE AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?"

Diante dessa questão, os resultados que obtivemos foram os seguintes: a grande maioria dos alunos, 27 deles, alegou que os problemas propostos foram relevantes na compreensão dos conteúdos envolvidos nestes, isso porque entre outros fatores, facilitou o aprendizado e tornou-o mais real. No entanto, 5 pesquisados responderam que não aprenderam conteúdos matemáticos a partir de tais problemas. Esses dados são deduzidos de algumas respostas apresentadas por eles, entre as quais destacamos:

> *Achei os problemas propostos colaborativos, tanto no conteúdo de PA, quanto nas operações básicas (Resposta extraída do questionário do aluno 1).*
>
> *Eu achei fácil a resolução dos problemas, as sugestões de como resolvê-lo foram muito importantes para aprender como calcular a altura máxima de uma parábola (Resposta extraída do questionário do aluno 2).*
>
> *Achei esse método muito eficaz quando se refere a aprendizagem matemática, principalmente para resolver problemas (Resposta extraída do questionário do aluno 3).*
>
> *Achei que é só mais um problema matemático que aprendi como resolver. No entanto, me ajudou a entender um pouco mais sobre equações do 2° grau (Resposta extraída do questionário do aluno 4).*
>
> *Achei os problemas muito importante, principalmente o primeiro que me ajudou a criar uma formula matemática. Deixando a solução do segundo bem mais fácil (Resposta extraída do questionário do aluno 5).*
>
> *Ajudaram a entender como começar a resolver um problema e consequentemente aprender um conteúdo novo (Resposta extraída do questionário do aluno 6).*
>
> *Esse método até que ajuda a entender algum conteúdo matemático, mas às vezes o achei um pouco cansativo (Resposta extraída do questionário do aluno 7).*

Já em relação à segunda questão, os indagamos sobre o seguinte: "VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, NAS AULAS DE MATEMÁTICA?"

Nesse item constatamos que 26 alunos consideraram que esses recursos foram importantes para a aprendizagem, porque simplifica a solução, torna as fórmulas mais embasadas, é uma maneira mais eficaz de aprender os conteúdos e minimiza a possibilidade do erro. Entretanto, 4 alunos julgaram que esse método não é tão significativo pelo fato de ser mais demorado e que por ter vários passos tornam a solução mais cansativa, ou seja para eles esse método seria mais trabalhoso. Já 2

alunos destacaram que essa metodologia é um pouco confusa, mas quando se entende parece ser eficaz, um deles falou inclusive que dependendo do problema o método heurístico é necessário enquanto que em outros é dispensável.

A seguir temos algumas dessas respostas de onde abstraímos o que elencamos anteriormente:

> *Sim, é muito importante saber como se constrói uma fórmula matemática (Resposta extraída do questionário do aluno 8).*

> *Sim, esses recursos heurísticos possuem considerável significado para um melhor aprendizado (Resposta extraída do questionário do aluno 9).*

> *Ajuda a raciocinar melhor e compreender as fórmulas matemáticas (Resposta extraída do questionário do aluno 10).*

> *Sim, com bases nesses procedimentos você tem uma melhor base para responder problemas matemáticos (Resposta extraída do questionário do aluno 11).*

> *Não achei muito significativo. São necessários muitos passos, o que acaba sendo trabalhoso. Prefiro ter uma forma que resolve rápido o problema (Resposta extraída do questionário do aluno 12).*

> *Sim, como devemos ir por partes nesse método, então facilita a nossa compreensão de como resolver o problema (Resposta extraída do questionário do aluno 13).*

> *Não, eu prefiro as soluções mais diretas (Resposta extraída do questionário do aluno 14).*

Na terceira questão, a pegunta que os apresentamos versava sobre: "EM SUA OPINIÃO, QUAIS SÃO OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVOS DOS RECURSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR GEORGE POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?"

Os dados desse quesito nos mostraram que no geral eles elencam os pontos negativos, a exigência de mais tempo para resolver os problemas, que por esse motivo pode ser prejudicial no vestibular e a necessidade de conhecimentos prévios, que talvez eles não tenham. Já nos pontos positivos eles elencaram o aumento do conhecimento matemático; que o método facilita o aprendizado; possibilita estudar com mais os detalhes, evitando assim possíveis erros; que viabilizam a criação de novas estratégias; que serve para estruturar as respostas; que desenvolve o raciocínio lógico e evita a memorização desnecessária de fórmulas.

A seguir temos algumas dessas respostas que os alunos apresentaram em seus questionários.

O ponto positivo é que nos processos heurísticos não precisamos de fórmulas, más apenas da imaginação e criatividade. Já o ponto negativo é que às vezes pode ser que não saibamos como resolver o problema (Resposta extraída do questionário do aluno 15).

Os pontos positivos é que ir por partes na resolução de um problema é fundamental para entender determinados conteúdos. O negativo é que às vezes gastamos muito tempo pensando e não encontramos a solução correta (Resposta extraída do questionário do aluno 16).

O ponto positivo é que você mesmo criando a fórmula, você não esquecerá. Já o negativo é que mesmo resolvendo o problema por tentativas, em alguns casos não encontramos uma fórmula que sirva para resolver outros problemas parecidos (Resposta extraída do questionário do aluno 17).

Não há pontos negativos, sinto que aprendi de verdade (Resposta extraída do questionário do aluno 18).

O ponto positivo é que temos um melhor aprendizado já que criamos as fórmulas. Os negativos e que se fomos aprender todo conteúdo assim, não dará tempo para estudar todo o conteúdo do ano (Resposta extraída do questionário do aluno 19).

No último item, os questionamos sobre: "ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA?"

Assim, obtivemos como resultados as seguintes informações: 25 alunos expuseram que a heurística como metodologia de ensino, desenvolvidas na resolução de problemas, os proporcionou um novo olhar a respeito da aprendizagem matemática, porque para eles, esse método facilita a compreensão dos conteúdos e disponibiliza várias formas de se chegar a resposta de um problema. Os mesmos argumentaram também que a heurística é uma ferramenta facilitadora, que a matemática pode ser mais atraente, que ela é muito mais que fórmulas e que está diretamente ligada com a realidade, fatos estes desconhecidos pela maioria deles antes da intervenção. Já os outros 7 alunos afirmaram que essas atividades não modificaram as suas percepções a respeito da matemática, pois mesmo com esse método ainda continuavam com dificuldades na matéria.

A seguir exibiremos algumas respostas apresentas pelos alunos, em relação a esse questionamento:

Sim, aprendi que nós também podemos criar fórmulas matemáticas (Resposta extraída do questionário do aluno 20).

> *Sim, a partir desses exercícios, pude observar uma nova maneira de aprender a matemática, de forma mais duradoura e racional (Resposta extraída do questionário do aluno 21).*
>
> *Sim, percebi que as coisas da matemática são extraídas de problemas (Resposta extraída do questionário do aluno 22).*
>
> *Não, pois mesmo resolvendo corretamente esses exercícios ainda possuo muitas dificuldades com matemática (Resposta extraída do questionário do aluno 23).*
>
> *Sim, percebi que o conhecimento da matemática vem da realidade e não de coisas abstratas (Resposta extraída do questionário do aluno 24).*

Finalizando esse capítulo, nos embasando agora na pesquisa de campo e bibliográfica, inferimos que a heurística matemática é uma atividade colaboradora para ser implantada nas aulas. Como verificamos, muitos pesquisadores da área de Educação Matemática concordam com essa nossa afirmação e, além disso, os dados obtidos na última fase da pesquisa de campo, servem para realçar essa conjectura. E, como ficou registrado, a grande maioria dos alunos investigados delega a esse novo método um papel importante no processo educacional.

Nesse contexto, possibilitar uma relação bilateral de confiança entre professores e alunos, mediados pelas atividades heurísticas, pode ter um relevante potencial para promover mudanças significativas nas problemáticas existentes na educação básica, em relação ao aprendizado dessa disciplina. E, para que essa mudança venha a ocorrer, a postura do professor, frente às situações adversas na sala de aula, tem um impacto significado, pois, conforme alega Reis (2005):

> O professor, se por um lado contribui para a rejeição, também é o principal agente para que essa intervenção ocorra. É necessário que haja, uma mudança na forma de educar, uma mudança que faça com que desperte nos alunos o interesse e a motivação em aprender Matemática e despertar o gosto pela mesma. O professor deve ser orientador, mediador e organizador das construções dos alunos, respeitando sua bagagem cultural, levando em consideração que para uma única situação problema podem existir diversas maneiras de resolução (REIS, 2005, p. 11).

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As informações obtidas no decorrer dessa tese nos subsidiam a conjecturar que uma alternativa plausível para dissipar a problemática do fracasso e o consequente desinteresse dos alunos, é promover nas aulas de Matemática o pensamento heurístico por intermédio da resolução de problemas, pois quando aqueles encontram por suas próprias estratégias uma teoria dessa disciplina o seu senso de confiança aumenta, passam a perceber que a Matemática é factível e que eles mesmos podem produzir nessa área do conhecimento. Assim, alegamos que os processos heurísticos, ao serem incorporados nas metodologias de ensino dos professores, aparentam ser um instrumento amenizador das situações educacionais adversas, existentes no ensino-aprendizagem da Matemática.

Em relação aos resultados do primeiro capítulo, quando apresentamos o desenvolvimento da heurística, destacando os principais pesquisadores que versaram sobre o tema, pudemos identificar que esta é uma capacidade humana que já vem sendo retratada há certo tempo, com prestigio e admiração. Todos os autores que citamos, dos mais antigos como Arquimedes aos mais atuais como Polya, delegam àquela uma enorme responsabilidade no que concerne a evolução das ciências e o progresso humano. Mais que isso, com base nas considerações de cada autor e observamos que quando ela é de fato estabelecida e aplicada corretamente, seus frutos são potencialmente eficazes para a sociedade como um todo.

No que tange o segundo capítulo, as pesquisas bibliográficas realizadas nos possibilitaram enxergar com maior clareza e profundidade, a função determinante dos processos heurísticos nas propulsões da criatividade e consequentemente na viabilização das descobertas científicas. Dessa forma, os resultados encontrados

nessa parte da tese serviram para nos estimular a procurar implantar tais processos nas metodologias dos professores. Objetivando com isso, tornar o ensino dessa matéria mais alinhado com os propósitos dos autores exibidos no primeiro capítulo, e conectando com as alegações apresentadas a respeito da inventividade e instrução escolar, tentar estabelecer uma Educação Matemática básica de qualidade, que fomenta o verdadeiro conhecimento científico, que torna o aluno um cidadão ciente das suas atitudes, que sabe pensar e agir matematicamente.

Em referência ao terceiro capítulo, os resultados obtidos foram promissores, no sentido de tentar amenizar as rupturas existentes entre a instrução matemática e os métodos de ensino. Os dados coletados com a primeira parte da pesquisa de campo nos permitiram ampliar o nosso campo de visão em relação aos aspectos ligados às dificuldades existentes na aprendizagem escolar, às aversões e às considerações dos alunos e professores a respeito dessa disciplina.

Diante das inferências de alguns pesquisadores, apresentados no início do capítulo três, e com base nas informações extraídas do SAEB, podemos afirmar que o fracasso escolar nessa matéria é um fato inquestionável. No entanto, os dados obtidos indicam que a enorme aversão apontada por muitos, não é tão alarmante. Na verdade, trazendo para essa discussão final as considerações de Prediger *et al.* (2009, p. 29), concluímos que realmente o desinteresse existe. No entanto, ele não é um dos principais agravantes no que tange o insucesso tão evidente nessa ciência. Ou seja, para estas autoras, "a maioria dos alunos tem interesse pela disciplina. O que acontece muitas vezes é que, quando não conseguem sucesso na realização das atividades, acabam criando uma aversão à disciplina".

Ainda com relação ao terceiro capítulo, averiguamos que vários aspectos têm conduzido os alunos a tal desinteresse. Essa problemática perpassa por vários segmentos, como, por exemplo, a ausência da família, professores e metodologias inadequadas e propagação de mitos. Desse modo, com base no que obtivemos, reconhecemos que todos estes fatores contribuem, em certa medida, para a implantação de uma barreira de aprendizagem matemática quase intransponível.

Sobre esse mesmo capítulo, verificamos também que os apontamentos dos professores estão de acordo com as observações dos alunos. Aqueles até conhecem e consideram a importância dos métodos inovadores de ensino, como por exemplo, estratégias de resolução de problemas, no entanto, falta-lhes apoio para a concretização de uma aprendizagem significativa. Além do mais, os dados evidenciam que para os educadores a falta de reconhecimento, a desmotivação de muitos estudantes e o sistema educacional, são elementos preponderantes nos

impasses que tem se instalado nas aulas de Matemática em muitas escolas.

Em relação ao quarto capítulo, verificamos que diversos pesquisadores da Educação Matemática indicam a necessidade emergencial de reconfiguração do modo como tem se organizado o ensino. Para tanto, eles acreditam que o método de resolução de problemas (precedidos pelo pensamento heurístico) é uma alternativa viável. Porém, destacamos que existem fatores prejudiciais que precisam ser desconstruídos, para que assim tal método se torne de fato aplicável.

A segunda parte da pesquisa de campo, cujos resultados foram apresentados nesse último capítulo, nos mostrou que o método heurístico pode ser visto como um importante contribuinte no processo de construção do conhecimento matemático. No entanto, para que tal abordagem seja satisfatória, torna-se necessário uma reestruturação do modelo tradicional de escola que ainda temos hoje. Para isto, devemos começar pelo sistema de ensino, que por sua complexidade, tem induzindo muitos professores a cada vez mais evitarem atividades diferenciadas, que promovam o verdadeiro conhecimento científico (como destacado por Bachelard), em detrimento do conhecimento mecânico. Este último quase não agrega saberes para o progresso do estudante.

É válido ressaltarmos também que os resultados do capítulo quatro nos levam a acreditar que é fundamental envolver os alunos com conteúdos que façam sentido em suas vidas. Caso isso não ocorra, o aprendizado será perfunctório, reforçando ainda mais as barreiras de aprendizagem, e por consequência, os levarão a obter relações negativas com esta disciplina. Ao contrário disso, quando se enfatiza questões que entornam a realidade do aluno, ele pode aprender com maior propriedade e ter um melhor interesse.

Assim, acreditamos que o ensino convencional tem se tornado insustentável. Nesse contexto, julgamos que o sistema educacional, a família, o aluno, a escola e o próprio professor, possuem uma parcela de culpa no reforço dessa situação. Porém, como verificamos, algumas mudanças educacionais já estão disponíveis. Desse modo, precisamos que cada um desses integrantes contribua positivamente, cabendo ao professor desenvolver métodos mais atrativos, entre os quais apostamos na heurística como alternativa.

Com isso, verificamos que é fundamental reorganizarmos as estratégias de ensino, pois o método convencional não tem funcionado. Tal fato é validado pelas pesquisas que mostraram as defasagens nas habilidades e competências matemáticas dos discentes. Além disso, as avaliações existentes, como já apresentadas, nos colocam em uma posição desoladora, onde ocupamos as últimas posições em quase todos os

ranks que verificam a aprendizagem nesse componente curricular. Por isso, com base nos aparentes benefícios trazidos pelas intervenções pedagógicas feitas nas aulas, elegemos a heurística matemática como uma ferramenta eficiente, porque ela aparenta possuir um potencial para atenuar esses problemas apresentados.

Por último, com base no gráfico apresentado no capítulo três, e nas alegações de alguns autores, é importante frisarmos que as aversões e dificuldades na Matemática vão se agravando acentuadamente com o passar dos anos escolares. Assim, essa observação precisa ser investigada com maiores detalhes a fim de encontrar os fatores agravantes dessa situação.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa foi planejada e desenvolvida com a pretensão de mostrar e discutir algumas problemáticas existentes na Educação Matemática (como o fracasso e a aversão) e apresentar as atividades heurísticas como amenizadoras de tais problemas. Como pudemos constatar, esse método, quando atrelado as aulas, vislumbra uma melhor relação entre alunos e professores e, portanto, conduz o ensino e aprendizagem a novos patamares de concepções e paradigmas.

As investigações realizadas nos proporcionaram aperfeiçoar conhecimentos e perspectivas a respeito desse tema. Além disso, consideramos que a pesquisa é uma atividade desafiadora e complexa, principalmente nessa área do conhecimento. No entanto, as implicações salutares que ela possibilita, especialmente para o investigador, são preeminentes.

Dessa forma, para estabelecer relações entre a heurística, a matemática e o fracasso educacional, tornou-se necessário uma investigação aprofundada, nos proporcionando uma percepção mais fundamentada em relação aos aspectos que permeiam à Educação Matemática. Possibilitando-nos adquirir um arsenal de conhecimentos, que poderão ser usados no intuito de reduzir a fragilidade na aprendizagem.

Com isso, as nossas considerações finais apontam para conjecturarmos que, de fato, a heurística matemática pode ser compreendida como um instrumento facilitador e promotor de novos conhecimentos nessa área de estudo. Concluímos também que revelar os artifícios por trás de cada conhecimento pode ajudar a desconstruir a falsa impressão que muitos têm a respeito dessa ciência, a qual teria sido construída de modo linear e infalível, e que portanto, somente gênios a aprenderão.

Outra alegação nossa é que apesar da heurística matemática já ter sido teorizada e considerada como um instrumento mental de destacável valia para o progresso humano, mesmo assim ela ainda sofre muita resistência para ingressar de vez no sistema educacional. Grande parte dessa objeção se dá pelo fato dela estar relacionada com a indução e que, portanto tem ligações diretas com o empirismo e se baseia muitas vezes em experimentos particulares. Fatos estes que levam alguns cientistas a considerá-la como sendo de pouco valor.

Ainda constatamos que os alunos vão aumento o nível de rejeição pela Matemática na medida em que o nível de escolaridade também aumenta. Uma das possíveis causas disso seria o ensino que se dá majoritariamente (muitas vezes unicamente), com o passar dos anos escolares, de modo totalmente propedêutico, mecanizado e sem relações com a realidade concreta. O que tem extraído das aulas todo o pensamento heurístico que poderia estar sendo desenvolvido.

Por fim, acreditamos que a Educação Matemática precisa urgentemente de novos paradigmas que subsidiem o processo de ensino e aprendizagem. Visto que quase totalidade das pesquisas realizadas indica a fragilidade existente nos processos atuais. Além disso, almejamos que esse produto do nosso curso de doutorado auxilie em futuras pesquisas nessa área do conhecimento, primordialmente as que anseiam melhorar a educação básica. Assim, desejamos que outras possíveis reflexões acerca dessa temática abordada sejam futuramente efetivadas e discutidas, tomando com base os resultados aqui apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABONYI, O. S.; UMEH, V. O. *Efeitos do método heurístico de ensino na conquista dos alunos em álgebra.* Revista Internacional de Pesquisa Científica e de Engenharia, volume 5, edição 2, Fevereiro de 2014, 1735.

[2] ABRANTES, P. *Um (bom) problema (não) é (só)...* Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática. Número 8, p. 7-10, 35, 1989.

[3] ALBUQUERQUE, Carla Maria Marques Soares. *Alguns problemas geométricos de Papo de Alexandria.* Universidade do Porto - Faculdade de Ciências, Dissertação de Mestrado. Porto, 2014.

[4] ARAUJO, T. *Criatividade na educação.* São Paulo: Imprensa Oficial, 2009.

[5] ASSIS, André Koch Torres. *Arquimedes, o Centrode Gravidade e a Leida Alavanca.* Apeíron Montreal. Primeira Edição, Publicado por C. Roy Keys Inc. 2008.

[6] BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento.* Tradução Estela dos Santos Abreu, 5° reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto. 1996.

[7] BACHELARD, Gaston. *A atualidade da história das Ciências.* Revista Tempo Brasileiro, vol. 28, 1972.

[8] BAZARIAN, Jacob. *Intuição Heurística: uma análise heurística da intuição criadora.* 3° Ed. São Paulo: Editora Alfa - Omega, 1986.

[9] BESSA, K. P. *Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental.* Universidade Católica de Brasília, 2007.

[10] BOYER, Carl. *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. Editora Edgard Blucher. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

[11] BRAGG, W. L. *The Natural History of Creativity.* Cambridge University Press, 1995.

[12] BRASIL, Ministério da Educação. *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília, 1997.

[13] BRETAS, S. N. R; FERREIRA, A. N. *A percepção da matemática escolar pelos alunos de 8ª série do ensino fundamental de escolas de cachoeira do campo.* Universidade Federal de Ouro Preto. UFOP, Ouro Preto, 2007.

[14] BRUM, W. P. *Crise no ensino de matemática: amplificadores que potencializam o fracasso da aprendizagem.* São Paulo: Clube dos Autores, 2013.

[15] BURIASCO, R. L. C; FERREIRA, P. E. A. *Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016.

[16] CASCALHO, J. M.; TEIXEIRA, R.; MEIRELES, R. F. *Da Resolução de Problemas à Explicitação do Raciocínio Matemático: Uma Experiência em Contexto de Estágio.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.2, pp.232-256, 2015.

[17] CHAVES, V. D. *As Contribuições da História da Matemática na Compreensão dos Conceitos e das Aplicações da Derivada: Uma Abordagem Heurística.* Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, 2011.

[18] CHAVES, Valteni Douglas; NEVES, Marcos Rogério. *Heurística e matemática: Possibilidades para o ensino.* Jundiaí, Paco Editorial: 2016.

[19] COLL, César. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, terceiro volume

[20] CONCEIÇÃO, D. B.; MENDES, A. A.; BORGES, L. H. F. *Análise dos fatores que desmotivam/desinteressam os alunos com relação à matemática.*

I Seminário Científico da FACIG: Sociedade, Ciência e Tecnologia – 29, 30 e 31 de Outubro de 2015.

[21] D'AMBRÓSIO, Ubiratan; MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M. e IGLIORI, S. B. C. *A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização.* Revista brasileira de educação, Anped: Rio de Janeiro, v. 27, 2004.

[22] DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas.* São Paulo: Ática, 1996.

[23] DISPERATI, J. A. *George Polya e ensino de matemática através da resolução de problemas nas diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores de matemática.* IFSP - São Paulo, 2015.

[24] FERREIRA, A. C. *O desafio de ensinar - aprender matemática no noturno: um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte.* Campinas - SP, 1998.

[25] FERREIRA, A. C.; NEPOMUCENO, M. M. B.; MAPA, T. F. M.; CUNHA, V. M. *Os alunos são realmente desinteressados quando se trata de aprender Matemática?.* XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática-CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

[26] FERREIRA, A. B. H. *Novo Aurélio – O dicionário da língua portuguesa.* Editora: Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2004.

[27] FETZER, F.; BRANDALISE, M. A. T. *Processo de ensino-aprendizagem de matemática: o que dizem os alunos?.* XVI EREMATSUL da Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS. Porto Alegre, 2010.

[28] FILHO, Inocêncio Fernandes Balieiro. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista- Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro-SP, 2004.

[29] FRENCH, Steven. *Ciência: conceitos-chave em filosofia.* Tradução de André Klaudat – Porto Alegre: Artmed, 2009.

[30] FREUDENTHAL, H. *Why to Teach Mathematics so as to Be Useful.* Educational Studies in Mathematics, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

[31] GARCIA, Afrânio da Silva. *Retórica: a função heurística da linguagem.* I Simpósio de Estudos Filológicos e Linguísticos. CiFEFiL, FFP(UERJ). Rio de Janeiro, 2008.

[32] GERVÁZIO, Suemilton Nunes. *O potencial heurístico dos três problemas clássicos da matemática grega.* Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo, 2015.

[33] GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K.; MORA C. D. *Perspectivas em Educação Matemática: Perspectives in Mathematics Education.* ACTASCIENTIAE, Vol. 6, número 1. Canoas, jan./jun. 2004.

[34] GUÉRIOS, Ettiène; JUNIOR, Roberto José Medeiros. *Problemas e Ação Didática em Matemática no Ensino Fundamental.* Universidade Federal do Paraná, VII CIBEM. Motevideo - Uruguay, 2013.

[35] HOUAISS, A; VILLAR, M. S. *Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa.* Elaborado pelo Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

[36] INEP. *Relatório técnico do sistema nacional de avaliação básica – SAEB, 2018.* Ministério da educação - INEP. Brasília, 2018.

[37] JÚNIOR, Manoel Luiz de Souza; BARBOZA, Pedro Lucio. *Percursos na prática pedagógica de matemática.* Fórum internacional de pedagogia. Campina Grande, Realize Editora, 2012.

[38] KILPATRICK, Jeremy. *Investigación em educación matemática: su história y algunos temas de actualidad.* En J. Kilpatrick, P. Gómez, L. Rico. (Ed.) Errores y dificultades de los estudiantes. Bogotá: Universidad de los Andes, 1998.

[39] LAKATOS, I; MUSGRAVE, A. *A Crítica e o Desenvolvimento do Conhecimento.* São Paulo: Cultrix, EDUSP. 1976.

[40] LAKATOS I. *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações.* Tradução de Nathanael C. Caixeiro, Rio de janeiro, Zahar Editores, 1978.

[41] LEITE, Paulo Ferreira. *Motivação, Heurística e Rigor no Ensino da Matemática.* Instituto de Matemática e Estatística – IME/USP. São Paulo, 2010.

[42] LLERA, Atocha Aliseda. *Heurística, Hipótesis y Demostraciónen Matemáticas.* Centro de Investigaciones Interdisciplinarias em Ciencias y Humanidades. Colección Aprender a Aprender, Série Heurística. Universidad Nacional Autónoma de México, Primera edición. México, 2000.

[43] LORENZATO, S. *Para aprender matemática.* Terceira edição. Campinas: Autores Associados, 2010.

[44] LIMA, T. A; FILHO, J. P. P. *A etnomatemática e o multiculturalismo no ensino da matemática.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.11, n.2, pg.393-409, 2009.

[45] MENDES, Iran Abreu. *Cognição e Criatividade na Investigação em História da Matemática: contribuições para a Educação Matemática.* Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, volume 6, númro 1, p. 185-204. Abril, 2013.

[46] MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática.* Universidade federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[47] MOLES, A. A. *A criação científica.* São Paulo: perspectiva, 2010.

[48] OLDENBURG, K. R.; FREIBURG, A. R. *Ações pedagógicas para a resolução de problemas.* In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. 5º reimpressão. Maria Ap. V. Bicudo (Org). Editora Unesp: Rio Claro, 1999.

[49] ONUCHIC, L. R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.* In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

[50] PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da silva Lorenzzetti. *Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio.* Revista principia: divulgação científica e tecnológica do IFPB. João Pessoa, 2018.

[51] PEREZ, Pablo Calixto Cocinero. *Método heurístico y su incidência em el aprendizaje del álgebra.* Tesis de grado, Universidad Rafael Landívar, Facultad de Humanidades. Quetzaltenango, enero de 2015.

[52] POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Editora interciência. Rio de Janeiro, 1994.

[53] POLYA, George. *How to Solve It.* New York, 2 th edición, Doubleday, 1957.

[54] POLYA, George. *How to Solve It: A new aspect of mathematical method.* New Jersey: Princeton, University Press, 1945.

[55] POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton, University Press, 1973.

[56] POPPER, Karl. *The Logic of Scientific Discovery.* Routledge classics, New York, 2002.

[57] POZO, J. I. *A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

[58] PREDIGER Juliane; BERWANGER, Luana; MORS, Marlete Finke. *Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina.* Revista Destaques Acadêmicos, ano 1, número 4, 2009 - CETEC/Univates.

[59] PUCKIN, V. N. *Heurística: a ciência do pensamento criador.* Rio de Janeiro, Zahar editores, 1969.

[60] REIS, L. R. *Rejeição à matemática: causas e formas de intervenção.* Monografia (Graduação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

[61] RESENDE, G.; MESQUITA, M. G. B. F. *Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG.* Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 3 - número 3 - 2012.

[62] RODRIGUES, Ronaldo Nogueira. *Relação com o saber: um estudo sobre o sentido da matemática em uma escola pública.* São Paulo: PUC, 2001.

[63] RODRIGUES, N. A. F. *Heuristics in problem solving for the teaching and learning of mathematics.* Faculty of psychology and educational sciences. University of Coimbra, 2015.

[64] ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Editora Zahar. 2° reimpressão, Rio de Janeiro – 2012.

[65] ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. *De Pappus a Polya: da heurística grega à resolução de problemas.* Plures Humanidades: Revista do Programa de Pós-graduação em Educação. Centro Universitário Moura Lacerda - mestrado, ano 10, n° 11, pg.12-27. Ribeirão Preto, jan. - jun. 2009.

[66] SALE, Dennis. *Creative Teaching: An Evidence-Based Approach.* Cognitive Science and Technology. Springer Science+Business Media. Singapore, 2015.

[67] SCOLARI, A.;BERNARDI, G.; CORDENONSI, A.; *O desenvolvimento do raciocínio lógico através de objetos de aprendizagem.* Centro Universitário Franciscano – UNIFRA; Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, 2007.

[68] SCHOENFELD, A. *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?.* In P. Abrantes, L. C. Leal, e J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996.

[69] SILVA, R. S.; MARTINEZ, M. L. S. *Dificuldades na matemática básica: o processo de ensino-aprendizagem para a vida.* IV seminário internacional de representações sociais, subjetividade e educação – SIRSSE. Formação de professores: contextos, sentidos e práticas. EDUCERE - XIII congresso nacional de educação, 2017.

[70] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

[71] SOARES, F. G. E. P. *As atitudes de alunos do ensino básico em relação à matemática e o papel do professor.* Ucdb. GT: Educação Matemática. N° 19, ANPED, 1999.

[72] STEIN, M. I. *Stimulating creativity.* Group procedures. Nova York: Academic Press, 1974.

[73] STERNBERG, Robert J. *Inteligência para o Sucesso Pessoal.* Rio de Janeiro: Campus, 2000.

[74] TATTO, F; SCAPIN, I. J. *Matemática: por que o nível elevado de rejeição?.* Revista de Ciências Humanas, v. 5, n. 5, p. 1-14, 2004.

[75] TORRANCE, Ellis Paul. *Criatividade: medidas, testes e avaliações.* São Paulo: IBRASA, 1976.

[76] TREVISAN, Eberson Paulo. *Contribuições da lógica do desenvolvimento matemático de Imre Lakatos ao trabalho com provas e demonstrações no ensino de matemática*. Revista educação, cultura e sociedade. Sinop/MT, v. 3, nº 1, p.136-148, jan./jun. 2013.

[77] VARIZO, Z. C. M. *A Heurística e o ensino de resolução de problemas*. Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM, UFRJ, ano XI, 1°. Sem. 1986.

[78] VELASCO, L. M.; JOUCOSKI, E. E. *As ações pedagógicas para a resolução de problemas*. Programa de Desenvolvimento Educacional –PDE. Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2007.

[79] EECKE, P. *Pappus de Alexandrie: La Collection Mathématique*. Albert Blanchard, Paris, 1982.

[80] WORRALL.*Imre Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science*. Z. Allgemeine Wissen schafts theorie 5 (2), 211-217. 1974.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIOS USADOS NA PRIMEIRA FASE DA PESQUISA DE CAMPO

Os questionários a seguir tiveram como base as questões investigadas nas pesquisas de Fetzer e Brandalise (2010) e Prediger *et al.* (2009).

A.1 Questionário para os alunos

1- O QUE É A MATEMÁTICA PARAVOCÊ?
(a) Apenas mais uma disciplina
(b) Uma matéria de extrema importância, por ter aplicabilidades no dia a dia
(c) Uma matéria extremamente difícil por exigir a memorização de muitas fórmulas
(d) Uma matéria que só dificulta a nossa vida escolar
(e) Resume-se a cálculo
2- VOCÊ GOSTA DE ESTUDAR MATEMÁTICA?
(a) Sim
(b) Não
(c) Um pouco
(d) Às vezes
3- O QUE TE LEVA A NÃO SE INTERESSAR PELA MATEMÁTICA?
(a) A maneira como ela é ensinada, de maneira quase totalmente expositiva

(b) A sua abstração, exigindo um elevado domínio da lógica
(c) A falta de relação com o cotidiano, tendo poucas aplicações
(d) O professor que dificulta muito os conteúdos
(e) Tenho um bom interesse pela matemática
4- COMO VOCÊ SE SENTE ESTUDANDO MATEMÁTICA?
(a) Gosto da matéria e vou bem
(b) Não gosto da matéria e vou bem
(c) Gosto da matéria e vou mal
(d) Não consigo aprender a matéria
(e) Não gosto da matéria e vou mal
5- QUAIS ASSUNTOS VOCÊ MAIS GOSTA DE ESTUDAR EM MATEMÁTICA?
(a) Álgebra
(b) Geometria
(c) Conteúdos que se relacionam com problemas do dia a dia
(d) Todos os conteúdos
(e) Nenhum conteúdo
6- COMO SÃO AS AULAS DE MATEMÁTICA NA SUA ESCOLA?
(a) Repetitivas e sem aplicações práticas
(b) Repetitivas mas com aplicações práticas
(c) Inovadoras, participativas e prazerosas
(d) Apenas expositivas
(e) Interessantes
7- SE VOCÊ PUDESSE MUDAR ALGUMA COISA NAS AULAS DE MATEMÁTICA, O QUE MUDARIA?
(a) A forma como os conteúdos são apresentados
(b) O professor
(c) A quantidade de aulas
(d) Não mudaria nada
(e) O livro didático
8- POR QUE VOCÊ ACHA QUE SE DEVE APRENDER MATEMÁTICA?
(a) Porque ela é extremante importante no nosso dia a dia
(b) Porque serve para passar no vestibular e/ou em outro concurso
(c) Porque é uma matéria obrigatória na escola
(d) Não acho importante aprender matemática

9- EM SUA OPINIÃO, QUAL É A MELHOR MANEIRA DE APRENDER MATEMÁTICA?
(a) Por meio de jogos e resolução de problemas
(b) Por meio de exercícios em grupos
(c) Por meio de exercícios individuais
(d) Por meio da explicação do professor
(e) Outra maneira
10- VOCÊ SE DEDICA AO ESTUDO DA MATEMÁTICA?
(a) Sim. Faço as tarefas de casa e procuro revisar o conteúdo estudado em aula
(b) Um pouco. Estudo só poucos dias antes da avaliação.
(c) Sempre que tenho tempo estudo
(d) Não estudo
11- DURANTE SUA VIDA ESCOLAR:
(a) O interesse pela matemática aumentou com o passar dos anos.
(b) Nos primeiros anos escolares sentia-me mais motivado pela Matemática do que hoje, já que os conteúdos passaram a ser mais abstratos.
(c) Sinto o mesmo interesse pela Matemática do início da caminhada escolar até hoje.
(d) Achava muito mais fácil antes do que hoje
(e) Acha agora os conteúdos mais interessantes do que antes por terem se tornado mais desafiadores
12- QUAL A SUA MAIOR DIFICULDADE PARA APRENDER MATEMÁTICA
(a) A falta base de conteúdos anteriores
(b) Fazer cálculos e operações
(c) Interpretar o enunciado dos exercícios
(d) Decorar fórmulas e teoremas
(e) Relacionar a teoria com a prática

A.2 Questionário para os professores

1- COMO VOCÊ VÊ O INTERESSE DOS ALUNOS POR MATEMÁTICA?
(a) Estão a cada dia menos interessados
(b) Tem demonstrado certo aumento no interesse com o passar das séries escolares
(c) Tem demonstrado certa diminuição no interesse com o passar das séries escolares
(d) A grande maioria está desinteressada

(e) É razoável o numero de alunos que se interessam pela matéria

2- QUAIS AS PRINCIPAIS DIFICULDADES QUE VOCÊ ENCONTRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA?

(a) A falta de materiais de apoio

(b) O grande desinteresse dos alunos

(c) O sistema educacional que nos limita muito

(d) O exaustivo número de conteúdos a cumprir

(e) Não encontro dificuldades para ensinar

3- O QUE MAIS TE DESMOTIVA COMO PROFESSOR?

(a) O salário

(b) Os alunos

(c) As exigências da escola

(d) A falta de reconhecimento

(e) Outras

4- SUA ESCOLA TE DÁ LIBERDADE DE ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO A ADOTAR?

(a) Sim, são bem flexíveis

(b) Sim, mas devo seguir e cumprir fielmente todo o conteúdo do livro escolhido

(c) Não, os livros são escolhidos pela coordenação, mas tenho a liberdade de como usá-los

(d) Não, os livros são escolhidos pela coordenação e devo cumprir todo o conteúdo

5- VOCÊ USA PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS (ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS) COMO METODOLOGIA DE ENSINO?

(a) Sim, sempre uso

(b) Não

(c) Às vezes

(d) Não conheço essas metodologias

(e) Não as considero importante

6- O QUE TE IMPEDE DE USAR FERRAMENTAS DE ENSINO DIFERENTES/INOVADORAS?

(a) Nada, sempre que possível as uso

(b) É inviável devido ao excessivo número de conteúdos a cumprir

(c) Os alunos pouco se interessam

(d) A escola onde trabalho é muito tradicional e prefere evitar essas atividades

(e) Não conheço atividades diferentes e inovadoras

7- O QUE DEVE MUDAR NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA?

(a) Diminuir a quantidade de conteúdos por série ou aumentar a carga horária da matéria

(b) Contextualizar os conteúdos por meio de problemas cotidianos

(c) Um acompanhamento mais individualizado com alunos com mais dificuldades

(d) Os alunos devem buscar por si só se interessar mais

(e) Não há necessidade de mudanças

8- POR QUE MUITOS ALUNOS NÃO GOSTAM DE MATEMÁTICA?

(a) Porque é uma matéria difícil e são poucos os que aprendem

(b) Porque não se dedicam a estudar o quanto deviam

(c) Porque a maioria das aulas são tradicionais e descontextualizadas

(d) Porque possuem bases de conteúdos defasadas

(e) Outros fatores

APÊNDICE B

PROBLEMAS USADOS NA SEGUNDA FASE DA PESQUISA DE CAMPO

Turma do 3° ano do ensino médio:
1° problema: Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo, do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.
2° problema: Calcule a diagonal x de um cubo qualquer de aresta y.
Com o objetivo de auxiliá-los na busca da resposta para o primeiro problema os entregamos um guia composto por quatro fases as quais foram propostas por George Polya e consistia em:
Compreensão do problema
- Você entendeu o que o problema está pedindo? Explique
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x
Estabelecendo um plano
- Quais as letras você escolheria para representar o comprimento, a largura e a altura?
- Quais incógnitas dependem das outras?
- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?
Execução do plano
- Encontre a diagonal do retângulo da base do paralelepípedo

- Usando essa primeira diagonal, encontre a diagonal do paralelepípedo
Retrospecto
- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema
Turma do 2° ano do ensino médio:
1° problema: Cientistas observaram que determinado tipo de árvore, quando plantada e cuidada sob certas condições, cresce 4 cm a cada dia. Uma muda dessa espécie foi plantada em um laboratório, e como era esperado, ao final do 1° dia a árvore alcançou os 4 cm de altura. Sendo assim, considerando que esse padrão de crescimento se mantenha, então qual será a altura atingida pela planta ao final do 82° dia?
2° problema: Na construção de uma escada o primeiro degrau ficou a 30 cm do chão. Daí em diante, o pedreiro construiu cada degrau 20 cm acima do anterior. Com base nessas informações, a que altura do chão ficou o décimo segundo degrau?
Compreensão do problema
- Você entendeu o que o problema está pedindo? Explique
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x
Estabelecendo um plano
- Quais incógnitas dependem das outras?
- Desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?
- Existe alguma lógica para responder o problema mais rapidamente? Execução do plano
- Calcule quantos centímetros a planta cresceu no período determinado
- Encontre a altura da arvore no 82° dia
- Retrospecto
- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema
Turma do 1° ano do ensino médio:
1° problema: Com base em experiências feitas em um laboratório, constatou-se que a concentração de certo tipo de antibiótico, quando ingerido por camundongos,

varia de acordo com a função $y = -3x^2 + 6x$, onde o x é o tempo decorrido em horas, a partir do momento da ingestão e y é o valor da concentração. Com base nessas informações, qual será o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue desses animais?

2° problema: Sabendo que uma bola, a partir de um impulso, sai do repouso e descreve uma curva semelhante a uma parábola, cuja função é dada em metros, por $y = -x^2 + 49$, onde y é altura da bola e x é o espaço horizontal percorrido por ela, e que varia de -7 até 7 metros. Sendo assim, encontre qual foi a altura máxima atingida pela bola?

Compreensão do problema

- Você entendeu o que o problema está pedindo? Explique.
- Quais são as incógnitas do problema?
- Quais são os dados do problema?
- O que o problema quer encontrar? Denomine essa incógnita de x.

Estabelecendo um plano

- Quais incógnitas dependem das outras?
- Se necessário, desenhe uma figura que ilustre a situação dada no problema.
- Quais conteúdos serão necessários para encontrar a incógnita x?
- Você precisa encontrar algum dado antes? Qual?
- Existe alguma lógica para responder o problema mais rapidamente?

Execução do plano

- Calcule a altura máxima da parábola.
- Encontre o tempo necessário.
- Retrospecto
- Verifique se todas as contas efetuadas estão corretas
- Analise se a solução encontrada faz sentido
- Dê a resposta do problema

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO FINAL USADO NA TERCEIRA FASE DA PESQUISA DE CAMPO

1- O que você achou dos problemas propostos? eles te ajudaram na aprendizagem de alguns conteúdos específicos da matemática?
2- Você considera significativo para o seu aprendizado utilizar esses recursos heurísticos, por meio da resolução de problemas, nas aulas de matemática?
3- Em sua opinião quais os pontos positivos e negativos dos recursos heurísticos sugeridos por Polya na resolução de problemas matemáticos?
4- Essas atividades te possibilitaram uma nova visão sobre a aprendizagem da matemática?

C.1 Respostas apresentadas por alguns alunos no questionário final

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: 2º EM

Escola (opcional): MZ [illegible]

Natureza da escola: a) pública (b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Achei os problemas propostos colaborativos, tanto no conteúdo de PA, quanto nas operações básicas.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Não, pois é necessário um processo de etapas sistemáticas.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

Positivos: É possível enxergar o problema matemático em um todo.

Negativos: causa dependência em resoluções por etapas e a existência de um processo de etapas longo.

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim, pois foi mostrado uma nova forma de aprendizagem, a qual pode ser eficaz para outras pessoas.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: 2EM

Escola (opcional): MZS

Natureza da escola: a) pública ☒ particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Sim, que nem o primeiro sobre PA

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Alguns sim, pelo fato de eu fazer alguma compra ou medir algo.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim, aprender mais sobre a matemática e ter mais recursos de contas que posso fazer para saber tal resultado.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Geryázio

Aluno (opcional): P[illegible] D[illegible] Série: 1º EM

Escola (opcional): Mz S[illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Eu achei facil, a resolução dos problemas não erem dificeis de se fazer. Eles ajudaram sim

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

não, pois eu prefiro quando tem resoluções mais concretas

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

Positivos: Eles são fáceis de se fazer

Negativos: Eles não são muitos concretos, eles são feitos por possibilidades

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim, a matemática possibilita várias formas de resolver problemas matematicos

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): K... H... Série: 1º EM

Escola (opcional): MZ S...

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Achei que é só mais um problema matemático que aprendi.

Sim, visto que é uma equação de segundo grau que vai a usar operações matemáticas e funções.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Sim, como vamos em parte, facilita o nosso compreendimento de como o exercício funciona.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

positivo: ir em partes, entender o que cada coisa significa.

negativo: o tempo que gastamos.

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Acho que o foco é ir por partes e separar "algo assim loucinha", o que eu já faço, portanto, acho.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): M[illegible] Série: 1º EM

Escola (opcional): Mz S[illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Eu achei fácil os problemas propostos. Ajudaram.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Não achei significativo porque você tem que fazer vários ~~Rousas~~ passos para encontrar a resolução do problema.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

- Pontos positivos: modo mais facil de resolver, modo diferente
- Pontos negativos: se você errar no primeiro, você acaba errando tudo, tem que fazer vários passos

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Não, porque eu sempre gostei de matemática e eu tenho muita facilidade com essa matéria. ~~(eu acho que todos)~~

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: 1EM

Escola (opcional): [illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Sim, principalmente o segundo pois você tem que fazer todas as partes.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Sim, pois a sua base seria melhor pois você sabe fazer parte por parte então a sua base ficaria bem melhor.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

negativos: você perde muito tempo além de fazer somente uma equação.

positivo: você aprende melhor, você observa melhor.

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Não, pois mesmo fazendo esses exercícios ainda possuo muita dificuldade nessa matéria.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: 3°EM

Escola (opcional): [illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?** Sim

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?** Sim

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?** Positivo: Você aprende a descobrir a fórmula e como chegar nela. Negativo: Você precisa pensar muito e fazer vários processos para chegar na fórmula.

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE** Sim, porque é interessante a maneira que se faz para chegar na fórmula.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): M[illegible] Série: 3EM

Escola (opcional): M. S[illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Sim, ajuda pra entender como chego pra solucionar o problema

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Sim, fica mais fácil de aprender e raciocinar mais rápido.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

Os pontos positivos que ajuda a compreender e o negativo não usam muito esse metodo

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim, faz com que o aluno entenda e goste de matemática

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: 3ºE.M

Escola (opcional): [illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Achei que este método ajudou na aprendizagem e resolução dos problemas.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Sim, estes recursos heurísticos possuem considerável significado para o aprendizado.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

Como pontos positivos temos o maior aprendizado e desenvolvimento do raciocínio lógico, e como pontos negativos temos o maior tempo para o ensino da matéria.

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim, a partir destes exercícios, pude observar uma nova maneira de aprender matemática, de forma mais duradoura e racional.

FEUSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Pesquisa de campo

Doutorando: Suemilton Nunes Gervázio

Aluno (opcional): [illegible] Série: .....

Escola (opcional): [illegible]

Natureza da escola: a) pública b) particular

QUESTIONÁRIO FINAL

1- **O QUE VOCÊ ACHOU DOS PROBLEMAS PROPOSTOS? ELES AJUDARAM NA APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONTEÚDOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA?**

Achei um pouco complicado. Eles ajudaram a entender melhor como resolver esse tipo de problema.

2- **VOCÊ CONSIDERA SIGNIFICATIVO PARA O SEU APRENDIZADO UTILIZAR ESSES RECURSOS HEURÍSTICOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?**

Sim. Pois é importante saber como chegar naquele resultado.

3- **EM SUA OPINIÃO QUAIS OS PONTOS POSITIVOS E NEGATIVAS DOS PROCESSOS HEURÍSTICOS SUGERIDOS POR POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?**

Positivos: Ter certeza de como faz o exercício e ter certeza da resposta.

Negativo: demora mais para achar a resposta

4- **ESSAS ATIVIDADES TE POSSIBILITARAM UMA NOVA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA? EXPLIQUE**

Sim. Que as vezes é melhor você entender o exercício e fazer as contas por partes para ter menos chances de errar na resolução