UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ROBINSON NELSON DOS SANTOS

Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes

SÃO PAULO

2011

ROBINSON NELSON DOS SANTOS

Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Educação

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Bonomi – IME/USP

SÃO PAULO

2011

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3
S237s

Santos, Robinson Nelson dos
Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes / Robinson Nelson dos Santos; orientação Maria Cristina Bonomi. São Paulo: s.n., 2011.
125 p. il.; grafs.; apêndices

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Educação matemática 2. Semiótica 3. Matrizes 4. Livro didático
I. Bonomi, Maria Cristina, orient.

Nome: SANTOS, Robinson Nelson dos

Título: Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Educação

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. ______________________________Instituição: ____________________________

Julgamento: _____________________________________ Assinatura: _________________

Prof. Dr. ______________________________Instituição: ____________________________

Julgamento: _____________________________________ Assinatura: _________________

Prof. Dr. ______________________________Instituição: ____________________________

Julgamento: _____________________________________ Assinatura: _________________

À pequena Mariana,

um raio de sol

que acaba de chegar

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Maria Cristina Bonomi, por sua compreensão, colaboração, incentivo e orientação ao longo deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que forneceu as bases para o desenvolvimento deste estudo.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de participação no Programa de Mestrado.

Ao João Fábio, pelo inestimável apoio nesta jornada.

E a todos que, direta ou indiretamente, tornaram possível a realização desta pesquisa.

RESUMO

SANTOS, R.N. **Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes**. 2011. 125 f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Este trabalho procura contribuir para uma melhor compreensão dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática, tendo como foco a exploração e apreensão de um objeto matemático por meio de suas diversas representações semióticas. Em nossa pesquisa exploratória, nos apoiamos nos estudos do psicólogo francês Raymond Duval, que trata do uso dos registros de representação semiótica na Matemática, para compreender o contexto e as variáveis envolvidas em tais fenômenos. Buscamos estender o alcance das observações de Duval com um estudo prévio das teorias relacionadas à Semiótica, na forma concebida por Charles Sanders Peirce, e com estudos filosóficos que buscaram entender como o homem percebe a realidade que o cerca, principalmente por meio dos escritos de Ernst Cassirer. Utilizamos, nesse trabalho, a teoria das matrizes – introduzida aqui com alguns detalhes de sua intricada evolução histórica – como exemplo para mostrar a variedade de representações que um objeto matemático pode carregar, e avaliamos, sob este aspecto, uma amostra de livros didáticos representativa das décadas de 1980, 1990 e 2000.

Palavras-chave: Educação Matemática; Semiótica; Matrizes.

ABSTRACT

SANTOS, R.N. **Semiotics and Mathematics Education: representation registries applied to the Theory of Matrices**, 2011. 125p. Dissertation (Mastership) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

This study is aimed to make a contribution for a better understanding of the phenomena related to teaching and learning of Mathematics. Its focus is the exploration and apprehension of a mathematical object by way of its several semiotic representations. In our exploratory research, we got support from the studies of the French psychologist Raymond Duval, which has dealt with the use of semiotics representations in Mathematics to understand the context and aspects related to such phenomena. We aimed to reinforce Duval's observations by adding a study on the theories that surround the field of Semiotics, from the first concepts of Charles Sanders Peirce and including several philosophical studies, like Ernst Cassirer's works, that have offered different understandings on the perception of reality that surrounds the Man. In this work we will find the Theory of Matrices as field of application; we included some historical background on this subject and we also showed the variety of representations that such Mathematical object can support – and we evaluated, on such aspect, a representative sample of textbooks published on 1980, 1990 and 2000 decades.

Keywords: Mathematics Education; Semiotics; Matrices.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática ocupa uma “posição singular” no currículo do Ensino Básico por conta de sua “universalidade de quantificação e expressão”, afirma o Ministério da Educação na Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, p.9). Dos três eixos de competências valorizados pelo PCNEM – a saber, comunicar e representar; investigar e compreender; contextualizar social ou historicamente os conhecimentos –, não há um que não possa receber contribuição dos conteúdos da Matemática ou estabelecer articulações com os mesmos. “A Matemática, com seu ostensivo caráter de linguagem que se soma ao seu caráter científico, facilita essa integração com as demais linguagens” (BRASIL, 2002, p.18).

Curiosamente, é essa mesma Matemática que mais parece desafiar a capacidade de compreensão dos alunos do Ensino Básico. Além disso, seu universo de símbolos – que, historicamente, tem ajudado a Matemática a evoluir de forma acelerada – multiplica os desafios de sua aprendizagem. Entendemos que, se enxergássemos a Matemática exclusivamente como ciência ou como linguagem, estaríamos sendo imprecisos. O PCNEM, por exemplo, reconhece que não é só como linguagem que a Matemática se destaca, e aponta que “não há uma única atividade da vida contemporânea” em que o conteúdo matemático não apareça “de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar” dados (BRASIL, 2000, p.9).

Mas todas estas atividades – codificação, ordenação, quantificação e interpretação – ocorrem, dentro da Matemática, mediante a manipulação de símbolos. De forma análoga ao que ocorre nas línguas, que também se apoiam em símbolos para exprimir significados, os objetos de interesse da Matemática costumam ser acessados e manipulados por meio de uma simbologia própria. E, embora o uso de símbolos seja comum tanto na Matemática como na língua materna, é a natureza e variedade destes símbolos que distanciam os dois campos. Uma das características que distinguem língua materna e Matemática é a possibilidade que esta última tem de empregar diferentes formas (ou registros) de representação. Seu campo de expressão compreende não apenas os números e as notações próprias da álgebra, mas também os gráficos e as geometrias. Isso tudo sem descartar a língua com que nos comunicamos.

A dificuldade de compreensão da Matemática por alunos do Ensino Básico tem sido alvo de diversos estudos nas últimas décadas. Nosso interesse recai sobre um deles: as pesquisas conduzidas com estudantes franceses pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, da Université du Littoral Côte d´Opale, na França, e que o levaram a observar que a efetiva compreensão dos objetos matemáticos passa necessariamente pelo domínio da representação desses objetos nos diferentes tipos de registros oferecidos pela disciplina.

A proposta deste trabalho é trazer os elementos realçados por Duval em seus estudos sobre a dificuldade de aprendizado em Matemática, estendendo-os a objetos e documentos matemáticos que não fizeram parte do elenco inicial de alvos do pesquisador. Tratamos aqui de matrizes e suas associações com outros registros de representação na Matemática – um tema escolhido justamente pela variedade de significação que comportam – e de sua abordagem por livros didáticos editados no Brasil em diferentes décadas, desde 1980. Buscamos, com isso, colaborar para um melhor entendimento das dificuldades de aprendizagem que guardam relação com a compreensão e manipulação de símbolos na Matemática em geral (e com a Matemática do Ensino Médio em particular) e oferecer um panorama conciso, porém significativo, da evolução da exploração dos registros de representação semiótica em livros didáticos de Matemática.

2 PROBLEMA DE PESQUISA

A escolha das matrizes como tema é muito oportuna, justamente pela variedade de representações que estão envolvidas. Uma matriz pode servir como uma notação mais prática para um sistema de equações lineares, em que os coeficientes das equações se tornam seus elementos; como uma forma conveniente de operar em uma tabela de dupla entrada; para apontar a movimentação de pontos e figuras no plano ou no espaço, uma operação que leva o nome de transformação; para abrigar códigos que darão origem a figuras geométricas no plano cartesiano; e para sintetizar problemas descritos em linguagem natural.

A falta de ênfase no significado em relação ao ensino e à aprendizagem de matrizes e determinantes vem de há muito tempo – e os livros didáticos que serviram para formar muitos dos professores de Matemática que atuam nas escolas do Ensino Básico trazem fortes indicadores dos primórdios do divórcio entre currículo e significação. Há quase 30 anos, por exemplo, a então Escola Técnica Federal de São Paulo – que, à época, oferecia exclusivamente cursos de Ensino Médio Profissionalizante – utilizava como livro-texto de Matemática a coleção *Matemática*, da Atual Editora[1]. Nesta coleção, as matrizes e suas operações eram formalizadas em capítulo próprio, no segundo volume, como pré-condição para o estudo de resolução de sistemas lineares. O determinante de uma matriz descolava-se do capítulo sobre matrizes, surgindo apenas no final do capítulo sobre sistemas lineares; mesmo assim, apenas como condição para o emprego da Regra de Cramer (IEZZI, 1980).

Em contraste, quase três décadas depois, podemos observar que o caderno do aluno da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, em uso pela rede estadual desde 2008, convida à investigação, por meio de situações de aprendizagem, dos vários significados que se pode atribuir a uma matriz. Na apresentação, a coordenadora do Projeto São Paulo Faz Escola, Maria Inês Fini, afirma que "o objetivo dos cadernos [é] apoiar os professores em suas práticas de sala de aula" (SÃO PAULO, 2009, p.6).

Cada vez mais, textos didáticos recentes, como o da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, reconhecem uma diferença entre a Matemática e outras disciplinas que, segundo Raymond Duval, é fundamental. Ele afirma que a possibilidade, na Matemática, de usar vários tipos de registros – gráficos, algébricos, geométricos e outros – interfere de modo

[1] Foi o que utilizei enquanto estudante e aluno daquela instituição, de 1983 a 1986.

decisivo no aprendizado. A qualquer momento pode ser exigida uma troca de registro, ou a mobilização simultânea de pelo menos dois tipos de registros (DUVAL, 2003, p.14).

Pode ocorrer de o professor carecer, contudo, de uma compreensão mais profunda de como os registros de representação operam na Matemática. Sem essa compreensão, as situações de aprendizagem como as propostas pelo material didático em uso pela rede pública do Estado de São Paulo correm o risco de ser subaproveitadas e seus objetivos, menos claros. Por outro lado, um professor que tenha apreendido os mecanismos intrínsecos das operações entre registros poderá selecionar melhor seu material de referência e os textos que oferecerá a seus alunos, bem como produzir material original e avaliações de forma a estimular o trabalho criativo e o desenvolvimento de competências em seus alunos.

A movimentação entre os vários tipos de registros proporcionada pelas matrizes pode ser explorada de forma mais cativante e ilustrada à luz dos recursos tecnológicos disponíveis. Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, encontramos que:

> (...) caso se pretendesse caracterizar um novo Trivium (grupo de disciplinas constituído por Lógica, Gramática e Retórica), mais consentâneo com as características da sociedade contemporânea, certamente pareceria mais justo incluir a Língua, a Matemática e a Informática. (SÃO PAULO, 2008, p.39).

Mais que facilitadoras, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) são instrumentos mediadores necessários, tanto pelo seu poder de atrair o interesse dos alunos como pela possibilidade de mobilização de competências para o trabalho, item valorizado explicitamente pelas propostas curriculares atuais.

3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivos:

- Relacionar o referencial teórico oferecido pela Semiótica com os diversos usos de registros de representação da Matemática;

- Descrever quais são e como operam os diversos registros de representação associados a matrizes;

- Avaliar um quadro representativo de livros didáticos de Matemática no que diz respeito à exploração desses diversos registros de representação;

- Apontar as diferentes estratégias de abordagem desses livros no que diz respeito ao objeto matemático Matriz e a articulação da representação deste objeto com outras representações equivalentes.

4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Em seu livro *Sémiosis et Pensée Humaine*, Raymond Duval conta que elegeu a Matemática como campo de estudo porque é nela que as questões de diversidade de registros semióticos se manifestam de forma mais evidente (DUVAL, 1995, p.1).

Isto impôs desde o princípio um enigma: de que forma Duval se apropriou da Semiótica – uma ciência originada do pensamento de filósofos e linguistas – para efetuar sua análise de símbolos matemáticos? Para responder a esta pergunta, nossa fundação teórica parte de investigações sobre o que se entende por Semiótica. Para tanto, visitamos na seção 4.1 autores como o norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914), tido como o "pai da Semiótica", e destacamos aspectos do uso de símbolos na Matemática através da História.

A seção 4.2, por sua vez, apresenta algumas contribuições ao estudo de objetos e suas representações fornecidas pelo filósofo medieval francês Pedro Abelardo (1079-1142) e pelos filósofos alemães Immanuel Kant (1724-1804) e Ernst Cassirer (1874-1945). Destacamos em especial a abordagem que Cassirer faz da natureza dos símbolos na Matemática.

A seção 4.3 tem como tema o símbolo e o ícone na Semiótica e, com base na teoria semiótica apresentada na seção 4.1, procura esclarecer as formas que Duval utiliza para associar Semiótica e Matemática.

Como este trabalho explora as possíveis representações dos conceitos de matrizes e determinantes, trazemos na seção 4.4 conceituações sobre estes temas. Na mesma seção, oferecemos uma perspectiva de evolução histórica dos conceitos de matriz e determinante e exploramos algumas possibilidades de representação gráfica de sistemas de equações lineares.

4.1 Em busca de uma noção de Semiótica

Não nos serve de imediato, no estudo das representações semióticas e de sua exploração na Educação Matemática, a definição verdadeira, porém simples, de que Semiótica é a "ciência dos signos" (SANTAELLA, 1990, p.7) – esta definição será resgatada mais adiante, em seu devido contexto. Mais útil é lembrar, também de acordo com Santaella, que Semiótica pode ser descrita como a "ciência de todas as linguagens". Ela nos dá uma pista mais precisa de onde queremos chegar: por essa redefinição, compreendemos que a Semiótica se ocupa de *todas as linguagens*, sejam elas verbais – como é a língua materna – ou não verbais, como são a Fotografia, a Pintura, a Arquitetura e, respeitadas algumas condições, a Matemática[2].

Conexões entre Matemática e língua materna já foram mapeadas por outros trabalhos, como os de Nílson José Machado. Nele encontramos a argumentação de que a língua, em particular a lingua escrita, é um sistema de representação da realidade, e que a Matemática surge "desde os primórdios como um sistema de representação original; apreendê-lo tem o significado de um mapeamento da realidade, como no caso da Língua". Daí a concepção da Matemática como "um sistema de representação da realidade, construído de forma gradativa, ao longo da história, tal como o são as línguas" (MACHADO, 2001, p.96).

Quanto aos signos, a Semiótica – conforme estruturada por Peirce –, os classifica como ícone, índice ou símbolo (PEIRCE, 2008, p.52). Peirce afirma que cada classe define o signo de acordo com a relação que guarda com o objeto a que se refere. Por exemplo: um signo é um *ícone* quando guarda semelhança ou analogia com seu referente – por exemplo, a fotografia do Cristo Redentor em relação ao próprio monumento, no Rio de Janeiro. Se ele não é análogo, mas mantém relação direta com seu referente, então é um *índice* – o chão molhado é um índice (ou indício) de que choveu. Já o *símbolo* guarda uma relação arbitrária com seu referente. É o caso das palavras e das notações matemáticas.

4.1.1 O início do uso de símbolos na Matemática

A Matemática é atualmente elaborada e expressada por meio de uma linguagem simbólica que foi sendo construída socialmente através dos tempos. O uso de símbolos na Matemática não é, de forma alguma, novidade. Mas a universalização de seus significados, tal como os conhecemos hoje, é fenômeno relativamente jovem, que data do Renascimento. O historiador Howard Eves observa que o uso de símbolos na Álgebra – mais especificamente, dos símbolos que usamos atualmente – teve início em meados do século XVI, com as notações empregadas nos trabalhos de Robert Recorde (c.1510-1558) e de Michael Stifel (1486-1567) (EVES, 2004, p.301).

Foi em um texto de Recorde, *The Whetstone of Witte*, que Eves nota o primeiro uso do sinal de igualdade. Já Stifel, que é tido como "o maior algebrista alemão do século XVI", teria apresentado em primeira mão, em seu *Arithmetica integra*, "os símbolos +, – e de raiz quadrada, além de letras representando incógnitas".

---

[2] Em *Matemática e Língua Materna*, Nílson J. Machado explica que "enquanto concebida como linguagem formal, a Matemática não comporta a oralidade" (p.105). Sua dimensão oral seria emprestada pela língua.

Eves também ressalta o trabalho do francês François Viète (1540-1603) que, com seu livro *In artem* introduziu "a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes" (EVES, 2004, p. 309). O hábito de utilizar as primeiras letras do alfabeto para constantes e as últimas para incógnitas, como fazemos atualmente, teria surgido mais tarde, por volta de 1637, com René Descartes (1596-1650).

Houve ainda diversas outras notações que, apesar de terem sido aprimoradas depois, não perderam sua essência, como o uso das expressões latinas "a cubus" (para representar a^3) e "a quadratus" (para a^2). Pelas inovações que trouxe, Viète é apresentado por outro historiador, Charles Boyer, como "a figura central e mais magnificente da transição" rumo à Matemática dos tempos modernos (BOYER, 1985, p.333).

As relações que se estabeleceram entre diferentes tipos de registro, como o algébrico e o geométrico, são antigas. "Noções primitivas relacionadas aos conceitos de número, magnitude e forma podem ser encontradas em registros que datam dos primeiros dias de existência da raça humana", afirma BOYER (1985, p.1, em tradução nossa). Referências de comprimento, área e volume puderam ser encontrados em textos cuneiformes e em papiros da era pré-helênica. Boyer lembra que, na Antiguidade, as civilizações egípcia e babilônica já tinham bastante familiaridade com esses conceitos. Esses povos também podiam comparar medidas de curvas e de segmentos de retas e, no caso dos egípcios, puderam chegar a uma medida surpreendentemente precisa, para a época, da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro – um resultado aproximado para o que conhecemos hoje como o número irracional π .[3]

A aproximação racional de π obtida pelos egípcios surgiu de um problema, atribuído ao escriba Ahmes, que igualava a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades à área de um quadrado cujo lado mede 8 unidades. Encontramos em BRUMBAUGH; ROCK (2006, p.172) a seguinte versão do enunciado deste problema: "Tomemos um campo circular de diâmetro 9 khet. Qual é sua área? Pegue 1/9 do diâmetro; ele será igual a 1 e o resto será 8.Multiplique 8 vezes 8; o resultado será 64. Consequentemente, a área será 64 setat de terra."

Algebricamente, o problema pode ser escrito como

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

[3] A primeira utilização da letra grega π para identificar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro ocorreu em 1706, num trabalho do escritor inglês William Jones (EVES, 2004, p.144).

Se compararmos esta afirmação com a fórmula moderna $A = \pi r^2$, veremos que a regra egípcia equivale a atribuir a π o valor de aproximadamente $3\frac{1}{6}$ (BOYER, 1985; p.18):

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

$$\pi = \frac{\left(\frac{8}{9}d\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2}{\frac{1}{4}d^2} = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$$

Os matemáticos da Babilônia eram capazes de reduzir problemas geométricos a equações quadráticas que resolviam numericamente, usando simbologia algébrica (BOYER, 2004, p.8). Mas os geômetras da Grécia não faziam uma transição fácil entre um campo e outro, aponta Boyer: “A ‘álgebra’ grega era uma geometria de linhas em vez de um algoritmo de números; e os problemas clássicos exigiam a construção de linhas (...) por não terem fórmulas algébricas independentes” (BOYER, 2004, p.8, em tradução nossa). Boyer não deixa passar a ironia de que uma das principais causas de os gregos não terem desenvolvido uma “álgebra geométrica” é que eles estavam profundamente ligados a uma “geometria algébrica” (BOYER, 2004, p.9).

Na Renascença, uma das primeiras tentativas de estabelecer uma relação entre Álgebra e Geometria está associada ao trabalho *De triangulis*, do alemão Johann Müller (1436-1476) (BOYER, 1985, p.301). Natural de Nuremberg, Müller decidiu, como muitos em sua época, adotar o nome de sua região de origem, em latim – daí ser conhecido como Regiomontanus (“montanha do rei”). Em seu *De triangulis omnimodis*, Regiomontanus resgatou alguns problemas envolvendo a construção de triângulos que tinham sido apresentados por Euclides em seus *Elementos*. Um desses problemas, e que foi citado por BOYER (1985, p. 303), consistia em construir um triângulo dado um dos lados, a altura desde a base até o extremo deste lado, e a razão da medida dos outros dois lados.

Para resolvê-lo, Regiomontanus atribuiu valores numéricos aos segmentos, combinando a representação geométrica de Euclides com métodos algorítmicos que foram desenvolvidos pelos árabes e que chegaram à Europa em traduções do século XII (BOYER, 1985, p. 303).

4.1.2 Símbolos matemáticos e Educação Matemática

Se por um lado a universalização de símbolos ajudou a Matemática a se desenvolver de forma acelerada nos últimos cinco séculos, a compreensão dos conceitos matemáticos por meio dessa simbologia tem sido um desafio para os alunos da Educação Básica da atualidade. Foi este fenômeno que motivou Duval a estudar o fenômeno da compreensão em Matemática sob uma “abordagem cognitiva”.

Para o pesquisador, muitos estudos sobre a dificuldade de compreensão em Matemática propuseram o emprego da História de suas descobertas como estratégia de superação – uma abordagem que, segundo ele, “não é suficiente” para caracterizar a originalidade do pensamento matemático, ao contrário do que ocorre em outras áreas de conhecimento, como a Biologia ou a Astronomia (DUVAL, 2003, p.13). Tal posição é justificada, pois, segundo DUVAL (2003, p.11, em tradução nossa):

> [...] o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

O pesquisador sustenta que sua abordagem é original porque procura descrever o “funcionamento cognitivo” que permite ao aluno “compreender, efetuar e controlar” a diversidade de processos matemáticos a que é desafiado e submetido nas situações de ensino (DUVAL, 2003, p.12). Duval espera, assim, colaborar para o desenvolvimento, no aluno, das capacidades de raciocínio, análise e visualização. Sua investigação parte de duas questões fundamentais, a saber:

- Quais sistemas cognitivos são mobilizados para a compreensão dos objetos matemáticos estudados e para efetuar as transformações necessárias ao tratamento matemático desses objetos?
- Esses sistemas cognitivos são específicos da atividade matemática?

Há três atividades cognitivas ligadas à semiose, aponta Duval. A primeira é a formação de representação dentro de um registro semiótico particular, seja pela expressão de uma representação mental, seja pela evocação de um objeto real. As outras duas atividades cognitivas relacionam-se à capacidade de transformar essa representação em outras que possam preservar o conteúdo da representação inicial. Essa transformação pode ocorrer dentro do mesmo registro, ou de um registro para outro. Ao primeiro caso, Duval chama de tratamento; ao segundo, de conversão. “Formação, tratamento e conversão são as atividades cognitivas fundamentais da semiose” (DUVAL, 1995, p.36, em tradução nossa).

Para Duval, a separação das atividades de tratamento e de conversão é fundamental para uma análise da aprendizagem intelectual. Para ele, só quando separamos as atividades de tratamento e de conversão podemos perceber quão persistentes são as dificuldades relacionadas às atividades de conversão (DUVAL, 1995, p.23). A distinção das atividades ligadas à semiose é essencial tanto para a análise cognitiva das tarefas quanto para a das condições de uma aprendizagem conceitual. No entanto, a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos. Duval ressalta que a conversão de representações é, para a aprendizagem, uma atividade tão fundamental quanto as atividades de formação e de tratamento porque ela, sozinha, pode favorecer a coordenação dos registros de representações (DUVAL, 1995, p.44).

Há, segundo Duval, uma diferença importante entre as atividades cognitivas mobilizadas pela Matemática e as que são exigidas pelas outras disciplinas, e que pode ser definida por duas características. A primeira delas consiste na importância que teve, para o desenvolvimento da Matemática, o desenvolvimento das representações semióticas. Já a segunda reside na “grande variedade de representações semióticas” existentes na Matemática. Os sistemas de numeração, as figuras geométricas, a notação algébrica, e mesmo a língua natural – quando utilizada de modo diferente da língua corrente – são todos componentes dessa singularidade. A “originalidade da atividade matemática” estaria evidenciada pela “mobilização simultânea de pelo menos dois desses tipos de registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p.14).

Entre os tratamentos e as conversões de registros, estas últimas chamaram a atenção de Duval de modo especial porque, quando exigida nos experimentos que conduziu, acabou revelando que muitos estudantes não eram capazes de reconhecer um mesmo objeto por meio de representações diferentes (DUVAL, 2003, p.15). Isto o levou a reconhecer que

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro nos quais os tratamentos são mais econômicos, mais potentes (...). Mas (...) é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes da compreensão (DUVAL, 2003, p.16, em tradução nossa).

Em DUVAL (1995, p.27) encontramos uma classificação das representações em termos de tipos e de funções, e que são resumidas no Quadro 4.1 mostrado a seguir. Para compreender o quadro, precisamos nos apoiar na definição de Duval de que “a objetivação corresponde à descoberta, pelo sujeito, de algo que até então ele nem suspeitava, mesmo que alguém já o tivesse explicado”. A diferença entre consciente e inconsciente está entre “aquilo que lhe parece um assunto e que ele sabe, de um lado, e aquilo que lhe escapa completamente e que não pode perceber, de outro”. Já a diferença entre externo e interno está na “oposição entre o que é diretamente visível e observável a partir de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema, e o que não o é”. (DUVAL, 1995, p.25).

Quadro 4.1 – Tipos e funções de representações

Tipos e Funções de Representações

Tipos / Funções	Interna	Externa
Consciente	*Mental* Função de objetivação	*Semiótica* Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
Inconsciente	*Computacional* Função de tratamento automático ou quase instantâneo	Não há

As representações semióticas, continua Duval, são aquelas que ao mesmo tempo são conscientes (perceptíveis) e externas (observáveis). Elas permitem uma “visão do objeto por meio da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons...) que possuem valor de ‘significado’ ” (DUVAL, 1995, p.27, em tradução nossa). Essas representações semióticas podem ter formas variadas, de figuras, esquemas, gráficos e expressões simbólicas ou linguísticas, por exemplo, e são comumente classificadas em dois grandes grupos: o de representações analógicas (que guardam relação de semelhança com aquilo que representam – imagens, por exemplo) e de não analógicas (que não têm qualquer relação de semelhança com o objeto, mas que podem representar operações ou mudanças no modelo – as línguas estão nessa categoria).

4.1.3 Representações semióticas e dificuldades de aprendizado

Ao analisar situações de fracasso e de bloqueio de alunos em diversos níveis de ensino, Duval constatou que elas aumentam “cada vez que uma mudança de registro é necessária, ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida”. Como corolário, o sucesso dos alunos é diretamente proporcional à exigência de operações dentro de um único registro. DUVAL (2003, p.21) ressalta que

> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Ora, na Matemática, (...) os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente (...). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas.

Duval notou ainda que as atividades de conversão trazem um desafio adicional, relacionado à escolha dos registros de entrada e de saída para a operação, constatando que algumas conversões são “mais simples e mais imediatas” que outras. Encontramos em DUVAL (1995, p.45), como exemplo, a conversão da frase em linguagem natural “o conjunto dos pontos em que a ordenada é maior que a abscissa[4]” para o registro algébrico “$y > x$”. Dada a simplicidade e clareza (ausência de ambiguidade) da frase em questão, podemos considerar que ela indica, de forma mais transparente, como deve ser o registro de saída – e temos aqui um exemplo de congruência de representações.

Em outra conversão, da frase “o conjunto dos pontos em que abscissa e ordenada são de mesmo sinal[5]” para o registro algébrico “$xy > 0$”, teríamos uma dificuldade maior para compreender o significado de “abscissa e ordenada com mesmo sinal”, levando em conta que a multiplicação da abscissa e da ordenada com sinais negativos resulta em um número positivo. Se esse registro de saída não transparece com facilidade, temos uma situação de não-congruência (DUVAL, 2003, p.19).

O sentido dessa conversão também interfere no índice de acertos. Como exemplo, citamos o resultado de um dos experimentos de Duval, que consistiu em pedir aos alunos a conversão entre os registros “a soma do produto de um inteiro com outros dois inteiros[6]” (A) e “$ab + ac$” (B). O índice de acerto na conversão de A para B foi de 48%, enquanto que a de B para A alcançou 87% (DUVAL, 1995, p.53).

Diante dos resultados, Duval constatou que a troca dos registros de saída e de entrada resulta na alteração do índice de acerto de um problema. “É a articulação de registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática” (DUVAL, 2003, p.22, em tradução nossa).

4.1.4 Um caso: a teoria das matrizes

Neste trabalho, elegemos como objeto de estudo a Teoria das Matrizes, pelo fato de ela ser rica em significações nos registros algébrico, gráfico e geométrico.

---

[4] No original em francês, “L’ensemble des points dont l’ordonée est supérieure à l’abscisse.”
[5] No original, “L’ensemble des points dont l’abscisse et l’ordonée sont de même signe.”
[6] No original, “La somme des produits d’un entier avec deux autres entiers.”

A teoria das matrizes é resultado de uma longa evolução através da História – para BOURBAKI (1999, p.57), o tema é, paradoxalmente, “um dos mais antigos e um dos mais novos da Matemática”. Traços de sua origem podem ser identificados em registros babilônicos e chineses da Antiguidade. Um refinamento do conceito foi tentado, sem muito resultado, por Gottfried W. Leibniz (1646-1716) (BASHMAKOVA; SMIRNOVA, 2000, p.149). Carl F. Gauss (1777-1855) foi mais além, chegando a estabelecer os passos da operação de multiplicação de matrizes antes mesmo de sua “invenção” por Arthur Cayley (1821-1895), no século XIX (DORIER, 1995, p.239).

Dentro da Teoria das Matrizes, há um campo ainda mais específico, que é o das transformações. Ela abre a possibilidade de exploração da representação das transformações em computadores, por meio das TIC, e sua aplicação nos fundamentos da Computação Gráfica. Isto porque “fundamentalmente, as figuras representadas graficamente em um computador podem ser consideradas como uma coleção de linhas, pontos e material textual” (ROGERS; ADAMS, 1976, p.3). As linhas são representadas pelas coordenadas de seus pontos extremos; os pontos, por suas coordenadas no espaço bi ou tridimensional; e o material textual, por um conjunto de linhas ou pontos.

Os elementos de uma matriz estão sujeitos a várias representações. Eles podem ser os coeficientes de um conjunto de equações, por exemplo, ou as coordenadas de um ponto no plano ou no espaço. As transformações estendem a possibilidade de interpretação do significado de uma matriz – o que, para nosso propósito, é bastante conveniente. Algumas operações com tipos especiais de matrizes podem significar a aplicação de transformações geométricas em figuras representadas por conjuntos de pontos. “A interpretação da multiplicação de matrizes como um operador geométrico é a base das transformações matemáticas úteis em Computação Gráfica” (ROGERS; ADAMS, 1976, p.25).

O interesse nas TIC se justifica de várias formas. O filósofo francês Pierre Lévy, por exemplo, reconhece a emergência de um “conhecimento por simulação” dentro de um campo de “novas tecnologias intelectuais”. No livro *As Tecnologias da Inteligência*, Lévy busca mostrar que não há uma informática pura e simples e sim um campo de tecnologias intelectuais. A informática insere-se assim, afirma o autor, em uma continuidade histórica das tecnologias intelectuais. A primeira dessas tecnologias seria a oralidade, tida como suporte da memória social. A segunda foi a escrita – quando, pela primeira vez, os “discursos puderam ser separados das circunstâncias particulares em que foram produzidos” (LÉVY, 2006, p.89).

A informática traz novas possibilidades de organização do conhecimento e de acesso a ele. Também altera a percepção do que é memória, ao fornecer dispositivos de apoio como os grandes buscadores de informações na Internet. Sobre a recepção que este novo campo de tecnologia da inteligência pode ter, Lévy pondera: “É grande a tentação de condenar ou ignorar aquilo que nos é estranho. É mesmo possível que não nos apercebamos da existência de novos estilos de saber, simplesmente porque eles não correspondem aos critérios e definições que nos constituíram e que herdamos da tradição.” (LÉVY, 2006, p.117).

O computador, de acordo com Lévy, tornou-se “um destes dispositivos técnicos pelos quais percebemos o mundo” (LÉVY, 2006, p.15). Para o pesquisador, esta máquina não é um dispositivo que tenha de ser lido ou interpretado, mas explorado de forma interativa, por simulação. O autor ressalta que esse conhecimento por simulação é justamente um dos novos gêneros do saber que foram possíveis graças às TIC. Esses dispositivos, segundo o filósofo, formam “redes de interfaces abertas a novas conexões, imprevisíveis, que podem mudar radicalmente seu significado e uso” (LÉVY, 2006, p.102).

O surgimento do computador em rede – e a emergência de sua utilidade como ferramenta de comunicação – fez cair por terra muitas das críticas feitas no passado recente ao uso dessas máquinas em processos de ensino e de aprendizagem. ROSZAK (1988), por exemplo, preocupava-se com o “pensamento processivo” induzido pelo ensino da linguagem Logo às crianças. Dizia que a linguagem – resultado mais visível de uma “filosofia de educação” concebida nos laboratórios do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT-EUA) e que teve Seymour Papert como seu maior divulgador – “é bem adequada a jogos geométricos, mas não à fantasia que ultrapassa esses limites estreitos” (ROSZAK, 1988, p.123). Encontramos outra advertência em ALMEIDA (2005) que, tendo em mente as práticas educacionais da década de 1980, alertava para o fato de que “tende-se a confundir informatização da educação com a utilização da linguagem Basic, que acima de dar rigor ao pensamento estimula a rigidez do pensar” (ALMEIDA, 2005, p.72).

4.2 Realidade e percepção

> *Dos pássaros, sei que podem voar – é o que os distingue. Os peixes, sei, podem nadar; os quadrúpedes, galopar. Mas sei também que posso pegar, com armadilhas, o que galopa; com redes, o que nada; com flechas, o que voa. Quanto aos dragões, ignoro se voam nas tempestades ou cavalgam as nuvens na imensa pureza do céu.*

> *Vi Lao Tsé como quem contempla um dragão. O queixo caiu-me e não pude respirar. Meu espírito, extraviado, não sabia onde repousar.*
>
> (Palavras atribuídas a Confúcio, após encontro com Lao Tsé.)[7]

Como descrever um dragão? O escritor argentino Jorge Luis Borges, em *O Livro dos Seres Imaginários*, conta que este ser "possui a faculdade de assumir muitas formas, mas essas formas são inescrutáveis" (2008, p.76). O dragão chinês, nota o escritor argentino, tem divindade: associado às nuvens, é um dos quatro animais mágicos, ao lado do unicórnio, da fênix e da tartaruga. É diferente do ocidental, que é mais comumente representado como uma "serpente grossa e alta com garras e asas [...]; se costuma exigir que exale baforadas de fogo e fumaça" (BORGES, 2008, p.82).

A imagem do dragão veio à tona, de forma provocativa, depois de refletir sobre as imbricações entre a língua materna e a Matemática conforme relatadas por MACHADO (2001). Nos referimos ao paralelismo evidenciado por Machado entre as funções dessas duas entidades, "enquanto sistemas de representação da realidade" (MACHADO, 2001, p.91). Se podemos, com a linguagem de que dispomos, descrever um dragão em detalhes, ele se torna real? Se dragões não existem, como é possível representá-los?

Se fosse possível adicionar mais um elemento a essa discussão, este seria a *percepção*. Dessa forma, poderíamos redefinir a língua, temporariamente, como um sistema de representação da *percepção* da realidade. Com tal ajuste, nossa discussão se amplia. Podemos observar a consideração da percepção da realidade em Immanuel Kant (1724-1804), quando afirma, na introdução de sua *Crítica da Razão Pura*, que "todo conhecimento começa com a experiência" (KANT, 1974, p.23).

Antes dele, na Idade Média, o filósofo Pedro Abelardo (1079-1142) apoiou-se na percepção para validar a noção de universal – nome que deu a significantes que não designam coisas, mas sim categorias – afirmando que "o significado dos universais se obtém por meio da abstração" e que a abstração, por sua vez, é resultado do poder da razão de, diante de uma coisa com matéria e forma, "ora considerar a matéria [...], ora dirigir a atenção só para a forma". (ABELARDO, 1973, p. 236).

Mas o filósofo Ernst Cassirer (1874-1945), por sua vez, lembra (logo de início) ser impossível atravessar a "capa" do simbólico e do significativo para apreender a realidade

[7] Texto da contracapa de *Tao Te King – O Livro do Tao e sua Virtude* (Trad. Marcos Martinho dos Santos. São Paulo: Attar Editorial, 1988).

imediata, pois o conhecimento do mundo das coisas está condicionado e mediado por um "processo lógico". Para Cassirer, o que buscamos como percepção imediata do mundo não pode ser encontrado "senão em nós mesmos" (CASSIRER, 2003b, p.36). Que impacto tem esta afirmação no que entendemos sobre a compreensão dos símbolos em Matemática? Onde, afinal, está o dragão que queremos conhecer?

Admitamos, licensiosamente, substituir percepção por cognição e poderemos incluir neste debate Raymond Duval. Será, pergunta ele na introdução de seu *Sémiosis et Pensée Humaine*, que a natureza das atividades mentais de apreensão de conceitos é baseada apenas na razão ou na compreensão de enunciados? Ela é ou não é independente de uma variedade de registros de representação? Para o pesquisador, tais questões dizem respeito às atividades cognitivas da mente humana, e a Matemática é apenas um campo em que elas se revelam de modo especialmente evidente.

Será que todos os sistemas de representação que estão à disposição da Matemática – símbolos, gráficos, tabelas, formas geométricas – são mesmo o que há de mais importante? Ou, ao contrário, eles são "apenas um meio conveniente, porém secundário, para o exercício e o desenvolvimento de atividades cognitivas básicas?" (DUVAL, 1995, p.1). Como advertência, o autor observa que "toda confusão entre o objeto e sua representação leva, em mais ou menos tempo, a uma perda de compreensão" (DUVAL, 1995, p.2).

Sistemas de representação são um conceito caro também a Machado, pois é por meio dele que Matemática e língua materna – entendida como a primeira língua que se aprende – se relacionam. Na interpretação de Machado, um sistema de representação deve ser entendido não como uma prototipação, mas como um "mapeamento da realidade". (MACHADO, 2001, p.94). Nesse sentido, o aprendizado da língua oral e da escrita marcariam a construção de um sistema de representação da realidade. A Matemática, sustenta Machado, também se ergueu como um sistema original de representação da realidade, e sua função é a de mapear essa realidade, "muito mais do que a aprendizagem de técnicas para operar com símbolos" (MACHADO, 2001, p. 96).

4.2.1 Símbolos e Matemática: a abordagem de Cassirer

Mas operar com símbolos é fundamental para que o homem possa agir no mundo, ensina o filósofo alemão Ernst Cassirer (1874-1945). Nos três volumes de *Filosofia das Formas Simbólicas*, que foram escritos na década de 1920, Cassirer afirma que a compreensão do mundo pelo homem deve ser necessariamente mediada por símbolos, e que estes são construídos justamente para que o homem possa efetuar operações com eles no nível do pensamento e, assim, agir no mundo. “Somente esmiuçando o mundo pode o homem atuar sobre ele, decompondo-o em esferas de ação e de objetos” (CASSIRER, 2003b, p.51).

Embora Cassirer demonstre levar em conta a Semiótica quando afirma que o signo não é apenas uma “envoltura eventual do pensamento, senão seu órgão essencial e necessário” (CASSIRER, 2003a, p.27), sua concepção de símbolo leva em conta outras possibilidades de origem, estas mais ligadas à epistemologia da ciência. Por exemplo, no volume I de sua *Filosofia* encontramos uma menção ao físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894) e de como este entendia o símbolo, na Física, como a representação de um conceito “fictício”, criado para que pudesse ser usado em operações. Cassirer buscava demonstrar que o símbolo, aqui, não funcionava apenas como a representação de uma realidade sensorial (ou um mapeamento dessa realidade), mas também como uma ficção criada pelo homem para materializar aquilo que não poderia ser medido diretamente a partir da observação da natureza.

Cassirer enxergou em Hertz o surgimento de um novo ideal de conhecimento. Em vez de simplesmente observar a natureza para aprender com ela e prever seu comportamento, Hertz propôs a formação de “imagens virtuais internas, ou símbolos”, que remeteriam aos objetos com tal semelhança e precisão que as consequências lógicas da operação com esses objetos corresponderiam naturalmente às consequências dos objetos que os símbolos reproduzem. O valor do símbolo de Hertz está não na capacidade de semelhança com uma coisa, mas em seu vínculo com uma capacidade lógica de relação e na capacidade de representação das relações que esse objeto têm com outros objetos (CASSIRER, 2003a, p.15).

Força e massa, por exemplo, seriam dois exemplos de grandezas fictícias, pois, de todas as grandezas envolvidas na 2.ª Lei de Newton, conhecida como Princípio Fundamental da Mecânica: $F = ma$, apenas a aceleração a poderia ser medida por observação natural, enquanto a força F e a massa m seriam meras imagens, ou ficções, criadas pela lógica de conhecimento da natureza. “Os conceitos com que opera o físico, de espaço e tempo, massa e força, ponto material e energia, átomo e éter, são meras ficções idealizadas pelo conhecimento para dominar o mundo da experiência sensível e considerá-lo como um mundo legalmente ordenado” (CASSIRER, 2003a, p.26, em tradução nossa).

Cassirer afirma oferecer uma visão crítica e ampliada das ideias de Kant, que em *Crítica da Razão Pura* investigou os limites da própria razão humana, questionando as crenças dos adeptos do empiricismo[8], para os quais o conhecimento viria da experiência. Sobre Kant, escreve Cassirer:

> Ali, onde a metafísica anterior à crítica pensou ter encontrado uma resposta definitiva, descobre Kant a tarefa nova e talvez mais difícil de todo o conhecimento filosófico. Para ele, trata-se não apenas de efetuar a ação significatória, tal como aparece na ciência e na filosofia, mas também de compreendê-la como ela é. (...) A chave que está destinada a abrir as portas do conhecimento deve ser compreendida também em sua estutura; o saber teórico deve ser compreendido em sua 'estrutura significativa' (CASSIRER, 2003b, p.17, em tradução nossa).

Cassirer estuda os símbolos em diversos aspectos, de acordo com sua utilização na linguagem, na ciência e no mito, baseando-se num retrospecto histórico da evolução de seu entendimento e de sua aplicação. Em relação aos números, por exemplo, o filósofo nota como a associação destes com formas tangíveis, como a contagem de coisas, foi sendo gradualmente enfraquecida através dos séculos, até chegarmos a uma definição que permite e justifica sua existência de forma independente do real.

Podemos obter os números a partir da contagem das coisas, lembra o filósofo, mas a partir daí iremos querer estabelecer relações entre os números, e essas relações terão origem no próprio pensamento. Ele também demonstra não subestimar a impregnação entre língua e Matemática ao lembrar que, por mais que o número

> renuncie a todo apoio e auxílio da sensação ou da intuição sensível, no entanto parece seguir preso dentro da esfera da linguagem e da formação linguística do conceito. (...) Só mediante a configuração do número em um signo verbal se abre o caminho para sua compreensão de sua pura natureza conceitual (CASSIRER, 2003a, p.196).

Ainda sobre língua e Matemática, Cassirer indica reconhecer que, embora a linguagem prepare o caminho para chegar ao conceito de número, ela "não pode prosseguir o caminho até o final". Para ele, o passo decisivo rumo à emancipação do pensamento matemático em relação aos números não pode ser dado pela linguagem. Para ilustrar a evolução do conceito de número, o filósofo remete a Pitágoras e sua época: "os primeiros descobridores do número, os pitagóricos, encontram-se totalmente sob a influência de uma concepção básica mítico-mágica do número". Ao lado desta concepção, havia ainda outra, de raiz intuitiva. Os números apareciam sempre como "quantidade de um conjunto concreto" ou ligado a "determinadas configurações espaciais" – com natureza ora geométrica, ora aritmética.

[8] Empiricismo: teoria epistemológica cujas versões coincidem na ideia básica de que a experiência tem primazia no conhecimento humano e na opinião justificada. (cf. Diccionario Akal de Filosofía, Robert Audi (org.), 1999).

O distanciamento do conceito mental de número em relação à sua natureza intuitiva impôs novos problemas ao pensamento, sustenta Cassirer. A conceituação passa pela percepção do que existe em comum entre diversos objetos observados na natureza (os "fenômenos sensíveis"). E esse objeto resultante, ao que chamamos conceito, não existirá senão no pensamento. Se definirmos "mundo" como a totalidade dos objetos (sensíveis ou lógicos, reais ou ideais), então esse mundo só se tornará possível se ele se submeter a certos princípios de articulação e formação. "O conceito não faz senão extrair esses momentos de formação e fixá-los no pensamento" (CASSIRER, 2003b, p.350).

Isso leva a outra questão: como se dá a representação desses conceitos? É onde entram os símbolos. "O mundo do puro 'significado' não acrescenta nada, por princípio, que seja alheio ao mundo da 'representação'; ele apenas desenvolve o que já se encontrava contido no segundo, como 'possibilidade' " (CASSIRER, 2003b, p.352). O conceito é, portanto, uma condição de possibilidade desse objeto. Como disse Kant: "Se não podemos conhecer estes objetos como coisas em si mesmas, devemos pelo menos poder pensá-los", ou seja, provar sua possibilidade (KANT, 1974, p.16). É por isso que podemos pensar em dragões, mesmo que nunca tenhamos visto um.

No caminho rumo ao conhecimento, o trânsito da "potência" ao "ato" (da possibilidade à existência) é o passo mais difícil, pois trata de liberar sua função semiótica de indicação de uma forma que represente também suas formas de "validade funcional" – e essas formas se acham fechadas dentro da realidade intuitiva. Isso faz com que precisemos de uma teoria para essa validade, isto é, de "uma morfologia que, por uma parte, isole os diversos tipos de relação que operam já com o intuitivo e que é possível exibir aqui em concreto e, por outra parte, que as compreenda em suas interdeterminabilidade e interdependência mútuas" (CASSIRER, 2003b, p.352).

Cassirer nota que uma linguagem formal como a da lógica pode auxiliar na análise da validade desse significado. Por exemplo, se tomarmos $\varphi(X)$ como o símbolo de uma função qualquer com uma variável, a fórmula geral da função – identificada pela letra φ – se distingue dos valores de X que a função pode admitir como válidos ou verdadeiros. A função determina a relação entre esses valores, mas ela mesma não é um deles. Dessa forma, não faria sentido operar com φ como uma entidade separada. "Se isso fosse verdade, então teríamos um enunciado afirmando algo sobre φ, como $\varphi(\varphi)$, e também um 'não-$\varphi(\varphi)$' negando $\varphi(\varphi)$" (CASSIRER, 2003b, p.353).

Em outros casos, contudo, a representação de um conceito pode se apoiar em um conceito universal que guarda uma relação pouco evidente com aquilo que representa. Cassirer usa como exemplo a sequência $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\}$ que pode ser representada pela expressão geral $\frac{n}{n+1}$. Mas este $\frac{n}{n+1}$ não tem nenhuma magnitude por si, e só representa a totalidade da série "na medida em que essa totalidade não seja considerada como mera soma de partes e sim como um complexo relacional característico" (CASSIRER, 2003b, p.365).

A ideia se aplica, segundo o filósofo, a todos os "conceitos intuitivos", já que o conceito universal não resulta da justaposição de todos os membros tomados um a um, e sim de uma forma de articulação dos mesmos, retendo sua conexão em função de algum "fator vinculatório" (CASSIRER, 2003b, p.365).

A conceitualização não viria, portanto, apenas da justaposição de imagens, tal qual uma fotografia obtida com o efeito de exposições múltiplas a diferentes objetos, mas também da capacidade de separar essas diferentes fotografias, resgatando as imagens individuais. "Toda função de 'representação' implica um ato de identificação e um ato de diferenciação", afirma Cassirer, "e ambos os atos devem ser entendidos não como justaposição, mas como autêntica inter-relação", e nenhuma analogia tomada do mundo das coisas pode ajudar em sua compreensão.

Por outro lado, o ato da "representação", ou de significar algo universal por meio de algo individual, nunca poderá ser entendido como sua desarticulação, ou como a quebra desse universal em pedaços. "Fazendo assim, saímos do âmbito de seu significado para entrar em uma existência oca, na qual nenhum caminho nos fará voltar à esfera do significado" (CASSIRER, 2003b, p.367).

4.3 Símbolo e ícone na Semiótica; a apropriação de Duval

Em *Sémiosis et Pensée Humaine*, Duval descreve a representação semiótica como aquela produção feita com o uso de signos, por meio dos quais uma pessoa exterioriza suas representações mentais (DUVAL, 1995, p.2). São signos, por exemplo, a linguagem natural, fórmulas algébricas, gráficos e figuras geométricas. Duas definições são caras a Duval: semiose, tida como "apreensão ou produção de uma representação semiótica", e noese – o "ato cognitivo", como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Para ele, em princípio pareceu óbvio supor que a noese (apreensão de um objeto) é independente da semiose (apreensão ou produção da representação desse objeto) – “ou, pelo menos, a comanda” (DUVAL, 1995, p.3). Mas a análise que fez dos obstáculos de aprendizagem da Matemática mostrou que uma hipótese contrária poderia ser válida: a de que “não existe noese sem semiose e é a semiose que determina as condições de possibilidade e prática da noese” (DUVAL, 1995, p.4).

Para compreender melhor a forma pela qual Duval se apropriou da Semiótica em seus estudos, será útil apresentarmos, de forma sucinta, algumas das principais ideias que foram elaboradas sobre esta área do conhecimento. A começar pela Semiótica que, numa definição simples, trata do estudo dos signos – mas o termo signo, por conta de sua riqueza, é bastante ambíguo, como lembra Roland Barthes (2006, p.39). Citando Santo Agostinho, ele afirma que “um signo é uma coisa que, além da espécie ingerida pelos sentidos, faz vir ao pensamento, por si mesma, qualquer outra coisa”.

Barthes nota que existem muitas contradições terminológicas entre os autores de estudos sobre Semiótica, mas ele justifica a situação alegando que, nos estudos, os termos só adquirem sentido em oposição a outros dentro do mesmo estudo, e que se levarmos em conta essas oposições as ambiguidades desaparecem. Em Linguística, por exemplo, Saussure deixou a palavra “símbolo” de lado e preferiu “signo” para definir a união de significante e significado (2006, p.42). Objetos, gestos e imagens podem compor sistemas semiológicos, lembra Barthes. Coisas que servem primariamente para satisfazer necessidades humanas, como casa, roupa e comida, também podem comunicar, isto é, ser carregadas de significado.

Esse significado não é uma coisa, mas a representação psíquica da coisa (BARTHES, 2006, p.46). Barthes lembra que Saussure demonstrou ter compreendido a natureza psíquica do significado quando o chamou de conceito: “o significado da palavra boi não é o animal boi, mas sua imagem psíquica”. Barthes prefere evitar a psicologia e adotar uma definição funcional, em que significado e significante são dois *relata* do signo, e diferem apenas pelo fato de que o significante tem papel mediador. A significação (semiosis) é o processo que une significante e significado, e que tem como produto o signo. “A significação não une seres unilaterais, não aproxima dois termos, pela simples razão de que significante e significado são, cada um por seu turno, termo e relação” (BARTHES, 2006, p.51).

Igualmente simples é o conceito de signo elaborado por Charles S. Peirce, considerado o fundador da Semiótica. Para ele, signo é simplemente “aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém” (PEIRCE, 2008, p.46). Sua classificação, no entanto, está longe de ser trivial. Em *Semiótica*, Peirce propõe nada menos que três tricotomias e dez classes de signos, com inúmeras subdivisões; sua intenção foi descrever as variedades fundamentais de cada semiose possível. O símbolo subordina-se à Segunda Tricotomia, que também abriga as classes ícone e índice. Peirce afirma que “a mais importante divisão dos signos faz-se em ícones, índices e símbolos (PEIRCE, 2008, p.64).

Pela definição de Peirce, um ícone é “um signo que se refere ao objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, quer o objeto exista realmente ou não”. Qualquer coisa é ícone de qualquer coisa, na medida em que for semelhante a essa coisa. Já um índice é “um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por esse objeto”. O índice se assemelha ao objeto – ou seja, tem alguma qualidade comum com ele – na medida em que é afetado por esse objeto. Um símbolo, por sua vez, é “um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de uma lei”. Essa lei é, normalmente, “uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto” (PEIRCE, 2008, p.52).

A palavra símbolo permite tantos significados, reconhece Peirce, que não seria conveniente adicionar mais um. Em vez disso, ele atrela o conceito à sua significação original, como uma coisa que “corre junto com”, tal como êmbolo é uma coisa que “corre dentro de algo”. Peirce diz ter encontrado a palavra símbolo, em grego antigo, como sinônimo de contrato ou convenção, entre muitos outros significados.

4.3.1 Semiótica e Matemática em Raymond Duval

É interessante identificar, nos estudos relatados por Duval em *Sémiosis et Pensée Humaine*, a forma como ele concebe a Semiótica e se apropria dela para analisar as atividades cognitivas relacionadas ao aprendizado de Matemática. Os termos de tal apropriação não são dados de forma explícita. A julgar pelo texto, o núcleo de seu trabalho, e em torno do qual gravitam todos os outros temas, é o estudo dessas atividades cognitivas. Uma dica surge quando Duval comenta que Peirce, ao elaborar uma classificação dos signos, deixou em segundo plano aquilo que, para o pesquisador, produz a fecundidade dessa variedade: “as relações possíveis entre sistemas semióticos e a possibilidade de converter uma representação formada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema” (DUVAL, 1995, p.20). Dentro desse contexto, a Matemática serve a Duval como um “campo de estudo privilegiado para a análise das atividades cognitivas fundamentais” (DUVAL, 1995, p.1).

Esse privilégio seria explicado pelo fato de que a Matemática exige, para sua aprendizagem, a mobilização de “outros sistemas de expressão e de representação, diferentes da linguagem natural e das imagens” (DUVAL, 1995, p.1). Sua lista de sistemas de representação inclui a notação algébrica, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos, entre outros. Cada possibilidade de representação dentro da Matemática é chamada, por Duval, de “sistema semiótico de representação” – representação semiótica, aqui, deverá ser entendida como “qualquer produção constituída pelo emprego de signos” (DUVAL, 1995, p.2). Esta expressão aparece logo no início de seu trabalho, quando o autor pergunta se a utilização desses sistemas semióticos é essencial para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais – ou se, por outro lado, elas seriam apenas um meio conveniente, porém secundário, para atingir o mesmo fim.

É interessante notar que, para Duval, a Matemática surge como objeto de estudo porque é nela que a questão anteriormente apresentada se manifesta “de forma mais aguda do que em outros domínios” (DUVAL, 1995, p.1). O autor sustenta que não poderá haver compreensão em Matemática se não houver uma distinção entre os objetos e suas representações. Para essas representações, a Matemática utiliza diversos registros semióticos, e esse registros não seriam mais que meios para o indivíduo compartilhar com o mundo suas representações mentais – imagens e conceitos elaborados pelo indivíduo sobre objetos, situações e as associações entre eles.

Rechaçando a ideia de que as representações mentais e semióticas não guardam relação entre si, Duval (1995, p.4, em tradução nossa) aponta que

> As representações mentais e as representações semióticas não podem ser colocadas como dois domínios totalmente diferentes. O desenvolvimento das representações mentais se efetua como uma interiorização das representações semióticas, da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções.

Ao definir semiose como a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e noese como o ato cognitivo de apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, Duval prepara o caminho para excluir a hipótese de que a noese seja independente da semiose, ou mesmo que a comande. Na verdade, afirma o autor, ocorre o contrário: as representações semióticas são não apenas indispensáveis mas necessárias ao próprio desenvolvimento da atividade matemática. A formação do pensamento científico, sustenta Duval, é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e as relações entre eles (DUVAL, 1995, p.3).

Em seus estudos, Duval observou a persistência, em diferentes níveis de ensino da Matemática, de obstáculos entre as representações que não compartilham do mesmo sistema semiótico. Atividades que exigem a passagem de um sistema a outro, ou que solicitam a mobilização de múltiplos sistemas dentro de um mesmo problema, “não são nem evidentes, nem ocorrem de forma espontânea entre os estudantes” (DUVAL, 1995, p.5). Sob este aspecto, duas representações podem ou não ser congruentes, de acordo com a espontaneidade com que ocorre a passagem de uma para outra.

De fato, boa parte dos estudos de campo efetuados por Duval consistem em avaliar fenômenos de congruência e não congruência entre registros semióticos, mapeando as fronteiras entre os registros. Entre os sistemas semióticos estudados por Duval está a língua materna. Nesse campo, Duval evidencia “as diferentes funções discursivas que um sistema semiótico deve contemplar para ser uma língua”, levando em conta que “as funções discursivas não podem ser separadas das funções cognitivas” (DUVAL, 1995, p.9).

De domínio dessas funções discursivas, o autor analisa a passagem entre a língua materna (ou língua natural, que é como ele a chama) e as “linguagens formais”. Essa passagem levanta “problemas consideráveis de não congruência”, o que leva a colocar a língua natural e a linguagem formal em campos opostos. Para Duval, analisar a articulação entre essas duas linguagens torna-se importante porque permite abordar questões de interpretação de enunciados de problemas em Matemática, escritos na língua materna.

4.4 Matrizes e Transformações: Um pouco da história

Embora tenham sido resultado de diversos estudos feitos ao longo de séculos, reconhece-se que as matrizes foram introduzidas pela primeira vez pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895).

Em *A Memoir on the Theory of Matrices*, que foi publicado em 1858 como artigo da *Philosophical Transactions,* da Royal Society of London, Cayley reconhece que o termo matriz pode ser usado em um sentido mais amplo, mas para este trabalho ele definiu o termo matriz como “um conjunto de quantidades dispostas em forma de quadrado” (CAYLEY, 1889, p. 475), ou seja, com números iguais de linhas e colunas. O texto também abrange a matriz cujo número de linhas é diferente do número de colunas, mas nesse caso ela deve ser chamada de matriz retangular.

No artigo, que foi republicado no segundo volume do livro *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley,* de 1889, a notação utilizada foi semelhante à seguinte (é possível que os traços seccionados que delimitam a matriz sejam resultado da tecnologia tipográfica utilizada na época):

$$\begin{array}{ccccc} (& a, & b, & c &) \\ | & a', & b', & c', & | \\ | & a'', & b'', & c'' & | \end{array}$$

Cayley explica, no artigo, que a noção da matriz “emerge naturalmente” da notação abreviada de um “conjunto de equações lineares” – ou, como chamamos hoje, um sistema linear. Para ilustrar sua definição, Cayley deu como exemplo as equações:

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a"x + b"y + c"z$$

Elas, por sua vez, podem ser representadas pela expressão que mostra X, Y e Z como “quantidades” da matriz retangular que resulta da multiplicação de uma matriz (dos coeficientes) por uma matriz retangular (das variáveis x, y e z), da seguinte forma (já usando a notação atual):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nesse ponto, Cayley chama a atenção para “uma das noções fundamentais da teoria das matrizes”: a de que as matrizes se comportam, elas mesmas, como “quantidades simples”. “Elas podem ser somadas, multiplicadas etc.” (CAYLEY, 1889, p.476).

A consistência dessa álgebra das matrizes e seu paralelo com a “aritmética das quantidades” é reforçada pelo matemático inglês, que define a matriz nula (elemento neutro da adição) e a matriz identidade (elemento neutro da multiplicação), bem como a regra para multiplicação de matrizes e para a obtenção da inversa de uma matriz (usando, para isso, a matriz identidade).

Vemos que o registro de representação da matriz nasce, portanto, como uma forma alternativa de representar um conjunto de equações lineares. Mas a conveniência de representar um sistema de equações lineares por meio de uma tabela de coeficientes é antiga.

Verificamos em MARTZLOFF (1987) que, na China dos séculos II AC e I AC, uma representação semelhante a das matrizes de Cayley já era utilizada, conforme mostra um algoritmo para resolução de sistemas lineares encontrado em documentos da época[9].

4.4.1 O determinante de Leibniz

O estudo de sistemas de equações lineares teve início em 1678, com Gottfried W. Leibniz (1646-1716). O historiador Morris Kline conta que, em 1693, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas, x e y. Ele reescreveu as equações eliminando as incógnitas e obteve uma regra para obter o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares (KLINE, 1972, p.606).

O primeiro registro dessa notação foi encontrado em uma carta que Leibniz enviou a Guillaume François Antoine (1661-1704), o Marquês de L'Hospital (BASHMAKOVA; SMIRNOVA, 2000, p.149). Na correspondência, datada de 28 de abril de 1693, Leibniz explicou que, para resolver o sistema com três equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \\ g + hx + ky = 0 \end{cases}$$

ele as reescreveu na forma

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

sendo o primeiro número o índice da linha da posição do coeficiente no sistema e o segundo, indicador do termo constante ou da incógnita. Esta notação é tida como a primeira vez em que foram usados pares de números para identificar coeficientes. Como forma de avaliar se o sistema teria solução, Leibniz estabeleceu como condição necessária a igualdade

$$\begin{aligned} &10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 \\ &\qquad = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30 \end{aligned}$$

Bashmakova e Smirnova salientam que, se este sistema for tornado homogêneo (com a adição de uma terceira incógnita aos termos constantes), esta igualdade será uma condição

---

[9] A esse respeito, ver Apêndice A.

necessária e suficiente para que o sistema homogêneo tenha uma solução não trivial (BASHMAKOVA; SMIRNOVA, 2000, p.160).

Este marco é considerado por MUIR (1890) o primeiro do desenvolvimento da teoria dos determinantes.

Muir, que compilou "todos os livros, panfletos, memórias, artigos de revista" que sabia existirem sobre o tema até a data, sustenta que uma das principais contribuições de Leibniz foi justamente a notação, que combinava dois números, tal como no sistema cartesiano, dando a posição, nas equações, do número ao qual se referia.

Este trabalho, no entanto, teve pouca influência em seu tempo e só foi amplamente conhecido quando da publicação de suas cartas a L'Hospital, em 1850.

Uma aplicação mais precisa e abrangente do que seria conhecido como determinante seria proposta quase 60 anos depois pelo matemático Gabriel Cramer (1704-1752). O trabalho, que foi bastante divulgado à época, representa um avanço no estudo de álgebra linear e levaria ao que conhecemos hoje como Regra de Cramer.

4.4.2 A contribuição da geometria analítica

A história do surgimento da representação geométrica de equações algébricas não é menos intrincada do que a da construção do conceito de matriz. No entanto, a invenção da geometria analítica – uma forma de geometria nas quais retas e curvas são representadas por equações, usando-se um sistema de coordenadas – é atribuída a dois franceses, Pierre de Fermat (1608-1665) e René Descartes (1596-1650).

Coube a Fermat explorar o conceito de locus, ou local geométrico (BOYER, 2004, p.74). Descartes, por sua vez, apostou na significação geométrica das soluções de equações algébricas (BOYER, 2004, p.82).

Boyer conta que Fermat produziu apenas um pequeno tratado sobre geometrica analítica, chamado *Ad Locos Planos et Solidos Isagogue*. Mas o historiador destaca a precisão e a clareza com que Fermat apresenta o que diz ser o "princípio fundamental da geometria analítica": "Sempre que numa equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, nós temos um *locus*, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva" (BOYER, 2004, p.75).

A importância da definição de Fermat vem, segundo Boyer, da forma como ele relaciona a equação algébrica e sua representação geométrica. "A partir de uma equação algébrica", descreve Boyer, "ele mostrou como essa equação poderia ser interpretada como a definição de um local de pontos – uma curva – em relação a um dado sistema de coordenadas" (BOYER, 2004, p.75).

Nem Fermat nem Descartes usaram o termo "sistema de coordenadas"[10], aponta Boyer, tampouco conceberam a ideia de dois eixos (x e y). Fermat elegeu uma linha para servir como eixo x, e um ponto era escolhido para ser a "extremidade" (com função equivalente ao da origem dos eixos x e y). A geometria analítica de Fermat organiza os *loci* em três tipos – linear, plano e sólido – e daí determina que se as potências dos termos de uma equação não excedem o quadrado, então o *locus* é plano ou sólido (BOYER, 2004, p.76).

A primeira edição impressa de *Isagogue* surgiu 14 anos depois da morte de Fermat, em 1679. Já o surgimento da geometria analítica de René Descartes é indicado como 1628, por uma carta escrita a Isaac Beekmann. Boyer destaca que a preocupação de Descartes, em termos de geometria analítica, era construir problemas em geometria por meio da solução geométrica de equações. "O procedimento era basicamente algébrico, mas sua significação era puramente geométrica", ressalta.

O tratado sobre geometria de Descartes, intitulado *La Géometrie*, surgiu em 1637 como apêndice de seu trabalho filosófico *Discours de la Méthode pour Bien Conduire Sa Raison, et Chercher la Verité dans les Sciences*.

A geometria cartesiana é hoje considerada como sinônimo de geometria analítica, o que Boyer considera um equívoco. O historiador destaca, em *La Géometrie*, o que considera o resumo das intenções de Descartes: "Qualquer problema em geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que um conhecimento dos comprimentos de certas linhas é suficiente para sua construção". Ou seja, Descartes não abandonara a ênfase da matemática grega na elaboração de construções geométricas.

Uma diferença fundamental entre as concepções de Descartes e de Fermat sobre geometria analítica, segundo Boyer, é que "um admitia curvas em geometria *se* fosse possível descobrir suas equações, e o outro estudava curvas *definidas* por equações" (BOYER, 2004,

---

[10] Segundo o historiador Howard Eves, as palavras "coordenadas", "abscissa" e "ordenada", no sentido técnico que têm atualmente, foram contribuições do alemão Gottfried Leibniz em 1692 (EVES, 2004, p.388).

p.102). Sobre os termos utilizados na geometria analítica, Boyer destaca que eles representaram contribuições de diversos matemáticos, e que até o fim do século XVII os principais termos – origem, eixo, abscissa (o eixo *x*), coordenadas e ordenada (o eixo *y*) – já eram utilizados com o significado que conhecemos hoje.

4.4.3 A solução de Cramer

Embora a solução de equações lineares simultâneas em duas, três e quatro incógnitas tenha sido apresentada por Colin Maclaurin em seu trabalho póstumo *Treatise of Algebra*, publicado em 1748, foi por meio de Gabriel Cramer que tais técnicas ganharam fama, principalmente por causa do uso de uma notação mais clara (KLINE, 1972, p.606).

Foi pelas ideias de matemáticos como Cramer, Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813) que a geometria analítica nascida no século XVII ganhou força no século XVIII, aponta BOURBAKI (1999, p.58).

O caráter linear das fórmulas para transformação de coordenadas no plano e no espaço, algo que já havia sido notado por Fermat, é posto em evidência, por exemplo, por Euler. Mais tarde, com Lagrange, Cramer e Etienne Bézout (1730-1783), a geometria analítica foi posta em conexão com problemas típicos da álgebra linear, como os que consistiam em descobrir curvas planas que passassem por cinco pontos dados, e foi percorrendo tal caminho que a noção de determinante ganhou forma.

Em seu trabalho *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, de 1750, Cramer procurava determinar os coeficientes da cônica

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$$

que passa por cinco pontos dados (KLINE, 1972, p.606).

Até o começo do século XVIII pensava-se que (i) duas curvas algébricas distintas de graus m e n tinham $m \times n$ pontos em comum. Além disso, (ii) eram necessários e suficientes $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos para determinar de forma única uma curva de ordem n. Uma cônica, por exemplo, exigiria $\frac{2\times(2+3)}{2} = 5$ pontos. No entanto, Maclaurin percebeu que duas curvas de graus n intersectam-se em n^2 pontos; assim, duas curvas cúbicas intersectam-se em 9 pontos, já que $\frac{3\times(3+3)}{2} = 9$. Isso significa que $\frac{n(n+3)}{2}$ nem sempre determina de forma única uma curva de grau n. Maclaurin foi o primeiro a identificar o paradoxo, em 1720, e Cramer o reformulou em seu trabalho de 1750 (DORIER,1995, p.228).

Como mostra MUIR (1890, p.9), a Regra de Cramer, como hoje a conhecemos, foi apresentada como um apêndice de sua *Introduction à l'analyse* e visava simplificar o tratamento algébrico necessário para a solução do sistema de *n* equações lineares com n incógnitas (ao qual foi reduzido o problema das cônicas).

Cramer as escreveu como

$$A_n = Z_n z + Y_n y + X_n x + V_n v + \cdots$$

Resolveu, então, os casos para uma, duas e três incógnitas e, a partir desses casos, notou que havia uma "regra geral": as incógnitas podiam ser expressas como frações de mesmo denominador, e esse denominador era o resultado da soma de parcelas positivas e negativas – que, por sua vez, eram o resultado do produto dos coeficientes das equações, tomado um único coeficiente por linha e por coluna.

"Assim", escreveu Cramer, "um sistema com três incógnitas terá 1 x 2 x 3 = 6 termos, que serão combinações dos coeficientes *Z, Y* e *X*, que receberão sucessivamente os índices 123, 132, 213, 231, 312, 321. Cada termo receberá sinal positivo ou negativo de acordo com a seguinte regra: quando um índice for seguido de outro menor que ele, imediatamente ou não, eu chamarei isso uma 'desordem' (*dérangement*); se o número de desordens for par ou nulo, o termo leva sinal positivo; se for ímpar, leva sinal negativo" (MUIR,1890, p.10).

Para entender como Cramer chegou à regra geral, vamos resolver um sistema 2 x 2 como o abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Multiplicamos a equação 1 por b_2 e a equação 2 por b_1:

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1 \\ b_1a_2x + b_1b_2y = b_1c_2 \end{cases}$$

Subtraindo a equação 2 da equação 1, eliminaremos *y* e teremos:

$$b_2a_1x - b_1a_2x = b_2c_1 - b_1c_2$$

Colocando x em evidência e repetindo a técnica para y (multiplicando, desta vez, as equações 1 e 2 por a_2 e a_1, respectivamente), obteremos:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2} \text{ e } y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$$

O denominador único $a_1b_2 - a_2b_1$ que definirá x e y será, segundo a Regra de Cramer, a combinação de a_nb_n, com n=1 ou n=2:

$+a_1b_2 \rightarrow$ parcela positiva, pois 1 < 2 e, logo, não há desordem;

$-a_2b_1 \rightarrow$ parcela negativa, pois 2 > 1 e, portanto, há uma desordem.

Muir ressalta que a contribuição de Cramer consistiu justamente na criação de (i) uma regra clara para a obtenção do denominador comum das frações que expressam as incógnitas, (ii) de uma regra que determina o sinal das parcelas desse denominador e (iii) uma regra para obtenção dos numeradores dessas frações. Segundo Muir, a popularidade da Regra de Cramer deveu-se principalmente à rápida adoção pelas escolas da época, como base da teoria para solução de sistemas de equações lineares.

Em 1764, a partir das idéias de Cramer, Bézout sistematizou o processo de determinar os sinais dos termos de um determinante. Em seu texto, conforme conta MUIR (1890, p.13), Bézout considerou os seguintes grupos de coeficientes:

$$a, b, c$$

$$a', b', c'$$

$$a'', b'', c''$$

Ele pede, em seguida, que formulemos as combinações de a e b, dessa forma:

$$ab - ba$$

O próximo passo será combinar a forma anterior com o coeficiente c, tomando o cuidado de trocar o sinal toda vez que c mudar de posição:

$$\begin{array}{ll} +ab\boldsymbol{c} & -ba\boldsymbol{c} \\ -a\boldsymbol{c}b & +b\boldsymbol{c}a \\ +\boldsymbol{c}ab & -\boldsymbol{c}ba \end{array}$$

A expressão resultante da soma das parcelas será

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba$$

Por último, deve-se manter a primeira letra de cada combinação como está, para indicar que ela pertence à primeira equação; marca-se a segunda letra com o sinal da segunda equação, e a terceira letra com o sinal da terceira equação, assim:

$$ab'c" - ac'b" + ca'b" - ba'c" + bc'a" - cb'a"$$

Bézout mostrou ainda que, dadas n equações lineares homogêneas em n incógnitas, a eliminação da determinante dos coeficientes é a condição para que soluções não nulas existam (KLINE, 1972, p.606). No caso acima, a “equação de condição” seria

$$ab'c" - ac'b" + ca'b" - ba'c" + bc'a" - cb'a" = 0$$

4.4.4 Os arranjos de Vandermonde

Foi Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), no entanto, o primeiro a apresentar de forma lógica uma teoria dos determinantes. KLINE (1972, p.606) o considera o fundador desta teoria, pois foi o “primeiro dar uma exposição lógica e coesa dessa teoria” e a tratá-las de forma separada da solução de equações lineares (embora tivesse em consideração também essa utilidade).

Vandermonde teve seu artigo *Mémoir sur l'élimination* publicado em 1772 pelo anuário da Academia Francesa de Ciências; o mesmo volume traz um artigo de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) sobre o tema. Há, no entanto, indícios de que Vandermonde tenha lido seu artigo aos membros da Academia um ano antes (MUIR,1890, p.16).

Como Leibniz, Vandermonde sugeriu o uso de uma notação posicional. Essa notação deixa de lado as incógnitas e se concentra na combinação dos coeficientes. Na notação de Vandermonde, a representação das diferentes *quantités générales* (os coeficientes) é dada pelo arranjo

$$\begin{matrix} \propto \\ a \end{matrix}$$

onde α identifica a equação na qual se encontra aquele coeficiente, e a identifica a posição do coeficiente dentro dessa equação. Desse modo,

$$\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$$

identifica o coeficiente do quinto termo da terceira equação – ou, na notação corrente, o elemento a_{35} do arranjo.

Baseado nessa notação, Vandermonde representou os coeficientes de duas equações com duas incógnitas usando a forma compacta

$$\begin{array}{c|c} \propto & \beta \\ \hline a & b \\ & \end{array}$$

A notação pressupõe o uso do que Vandermonde chamou de Lei das Permutações; no caso, a forma compacta do caso anterior denota as combinações possíveis de uma das linhas:

$$\begin{matrix} \propto & \beta \\ a & b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \propto & \beta \\ b & a \end{matrix}$$

O cálculo do determinante é, então, expresso como

$$\begin{array}{c|c} \propto & \beta \\ \hline & \\ a & b \end{array} = \begin{matrix} \propto & \beta \\ & \\ \mathrm{a} & \mathrm{b} \end{matrix} - \begin{matrix} \propto & \beta \\ & \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{matrix}$$

Vandermonde notou que o número de parcelas equivalia ao número de permutações, e que metade dos termos era positiva e a outra metade, negativa. Percebeu também que a soma das parcelas positivas era igual à soma das parcelas negativas.

A regra de atribuição de sinais às parcelas, criada por Vandermonde, era a seguinte: a cada permutação feita em uma linha, o sinal mudava de valor – uma regra compatível com o conceito de desordem de Cramer, já que um número par ou zero de permutações leva a um sinal positivo e, caso esse número seja ímpar, o sinal é negativo. De acordo com essa regra, temos que *abc* é positivo; *acb* é negativo; *bca* é positivo.

MUIR (1890, p.22) mostra como, em notação moderna, Vandermonde encontra solução para um sistema com duas equações e duas incógnitas.

Seja $|a_1b_2|$ uma notação simplificada para o cálculo de $a_1b_2 - b_1a_2$.

Usando essa notação simplificada, sabemos que

$$a_1|b_1c_2| + b_1|c_1a_2| + c_1|a_1b_2| = |a_1b_1c_2| = 0$$
$$a_2|b_1c_2| + b_2|c_1a_2| + c_2|a_1b_2| = |a_2b_1c_2| = 0$$

Dividindo cada parcela por $|a_1b_2|$, temos:

$$a_1\frac{|b_1c_2|}{|a_1b_2|} + b_1\frac{|c_1a_2|}{|a_1b_2|} + c_1 = 0$$
$$a_2\frac{|b_1c_2|}{|a_1b_2|} + b_2\frac{|c_1a_2|}{|a_1b_2|} + c_2 = 0$$

Portanto, se tomarmos o sistemas de duas equações com duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

a solução desse sistema será

$$x = \frac{|b_1c_2|}{|a_1b_2|} \text{ e } y = \frac{|c_1a_2|}{|a_1b_2|}$$

o que, ao abandonarmos a notação simplificada, torna-se

$$x = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \text{ e } y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2},$$

que é o resultado obtido por Cramer.

Assim como concluiria Kline décadas mais tarde, Muir notou que Vandermonde foi o primeiro a dar uma exposição coesa da teoria:

> [Vandermonde] definiu as funções independentemente das ligações que elas mantinham com outros objetos de estudo, deu-lhe uma notação, e definiu suas propriedades de forma lógica. (...) Dos matemáticos cujos trabalhos foram revisitados até aqui, o único que pode ser visto como fundador da teoria dos determinantes é Vandermonde (MUIR,1890, p.23).

4.4.5 Laplace

Laplace, por sua vez, referiu-se aos trabalhos de Cramer e de Bézout em seu texto *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*, de 1772. Nele, Laplace provou algumas das regras de Vandermonde e mostrou, na forma de um teorema que hoje leva seu nome, um processo alternativo para o cálculo da resultante que, em resumo, afirma: dada uma expressão de determinante envolvendo certa quantidade de termos, cada um desses termos pode ser escrito na forma de um produto de determinantes de menor grau (MUIR, 1890, p.33).

Na sua demonstração, exposta e comentada por Muir, Laplace tomou n equações lineares homogêneas, com os coeficientes

$1a, 1b, 1c, ...$

$2a, 2b, 2c...$

....

Usando a Regra de Cramer, Laplace obteve o determinante, adotando o termo variação em vez de ‘desordem’ (*dérangement*).

Laplace explica que, combinando as letras a, b, c, d, e, ..., teremos um número de parcelas igual ao número de permutações. Cada quantidade obtida com a permutação dessas letras foi chamada de resultante; todas as resultantes têm o mesmo número de termos e o sinal de cada uma depende do número de variações de cada termo, conforme a Regra de Cramer.

Laplace, então, expõe três equações (μ, μ' e μ'' representam as três incógnitas):

$$0 = 1a\mu + 1b\mu' + 1c\mu''$$

$$0 = 2a\mu + 2b\mu' + 2c\mu''$$

$$0 = 3a\mu + 3b\mu' + 3c\mu''$$

Com os coeficientes *a*, *b* e *c*, ele compõe as resultantes

abc *acb* *cab* *bac* *bca* *cba*

+1a2b3c –1a2c3b +1c2a3b –1b2a3c +1b2c3a –1c2b3a

Colocando *1a*, *2a* e *3a* em evidência, obtém-se

1a[2b3c – 2c3b] + 2a[1c3b – 1b3c] + 3a[1b2c – 1c2b]

Laplace estabelece, assim, um processo simples para cálculo da "equação de condição" e pode ser enunciado da seguinte forma: quando se faz a expansão de uma resultante obtém-se um agregado de termos, e cada um dos quais pode ser escrito como um produto de resultantes de menor grau.

Em notação atual, o que Laplace propõe é, dada uma matriz

$$\begin{matrix} 1a & 1b & 1c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{matrix}$$

seu determinante será a somatória de cada elemento da linha ou coluna escolhida multiplicado pelo determinante de menor grau formado pelos elementos das linhas e colunas restantes. Tomando-se a primeira coluna, teremos, em notação moderna

$$1a \times \begin{vmatrix} 2b & 2c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} - 2a \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 3a \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 2b & 2c \end{vmatrix}$$

Que, usando notação baseada na construção de cofatores[11], resulta em

$$1a \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2b & 2c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 2a \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 3a \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 2b & 2c \end{vmatrix}$$

Percorrendo agora o caminho inverso, temos que, para duas equações

$$0 = 1am + 1bm'$$

$$0 = 2am + 2bm'$$

[11] O cofator determina o sinal do determinante de menor grau por meio da expressão $(-1)^{i+j}$. A notação original de Laplace leva em conta a regra de Cramer, baseada no conceito de 'desordem' (*dérangement*).

combinamos a e b, obtendo ab e ba; adicionando-se a identificação da linha, como propõe Vandermonde, temos *1a2b* e *1b2a*; pela regra dos sinais de Cramer, baseada no conceito de 'desordem' (*dérangement*), a "equação de condição" será $+1a2b - 1b2a = 0$.

Suponha agora que tenhamos três equações com três incógnitas. Combinamos *ab* com a letra *c* (da terceira incógnita) e obtemos as parcelas:

$$abc \quad acb \quad cab$$

$$+1a2b3c - 1a2c3b + 1c2a3b$$

Aplicamos então a Regra de Cramer para encontrar a resultante de menor grau com os coeficientes *a* e *b*:

$$+(1a2b - 1b2a)3c - (1a3b - 1b3a)2c + (2a3b - 2b3a)1c$$

Para tornar seus escritos mais legíveis, Laplace criou a notação *(abc)* para a quantidade $abc - acb + cab - bac + bca - cba$. Da mesma forma, *(ab)* equivale à quantidade $(ab - ba)$. Assim a equação de condição para três equações será $(1a2b3c) = 0$.

Muir enumera alguns argumentos que, diz, poderiam ser levantados para justificar por que o teorema não mereceria o nome de Laplace. Cita, por exemplo, que Vandermonde já havia chegado a resultado parecido com determinantes de grau 2, e que Laplace não teria dado à regra uma forma pronta para uso em todos os casos.

Apesar disso, sustenta Muir, "não há dúvida de que, se algum nome tem de ser ligado ao teorema, esse nome é o de Laplace" (MUIR, 1890, p.33).

4.4.6 Lagrange

Lagrange, ao contrário dos matemáticos que o antecederam, não lidava explicitamente com o problema da eliminação (MUIR,1890, p.33). Kline ressalta que o trabalho de Lagrange, embora tenha sido rico e variado no campo da matemática, tinha como foco o estudo da aplicação da lei da gravidade à trajetória de planetas (KLINE,1972, p.493).

Em um trabalho publicado em 1772, Lagrange explorava o problema do movimento de três corpos celestes, e um dos casos situava o centro de massa de tais corpos nos vértices de um triângulo equilátero.

Não espanta, portanto, que ao se deparar com determinantes sua preocupação era o estudo do tetraedro (poliedro regular cujas faces são triângulos equiláteros) e, no caminho, encontrou algumas identidades algébricas que serviriam, no futuro, para estabelecer um teorema para multiplicação de determinantes.

Para Lagrange, *x, y, z; x', y', z'; x", y", z"* eram coordenadas de pontos no espaço e não coeficientes de equações. Assim, em módulo, cada parcela da soma

$$xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''$$

representava seis vezes o volume de uma tetraedro. Como à época a discussão em torno de dimensões maiores que três não era comum, a solução de Lagrange não previa a combinação de quatro ou mais letras.

As identidades encontradas por Lagrange em seu processo de pesquisa sugerem técnicas para multiplicação de matrizes (MUIR,1890, p.35) e abriram caminho para que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) enunciasse, em 1812, seu teorema da multiplicação de determinantes (MUIR,1890, p.37).

Em linguagem atual, este teorema define a multiplicação de determinantes como equivalente ao determinante do resultado da multiplicação de matrizes.

4.4.7 O pioneirismo de Gauss

Os eventos que contribuíram para o desenvolvimento do conceito de matriz ocorreram de forma linear. Cayley pode ter sido o primeiro a apresentar a álgebra das matrizes, mas coube a uma das maiores personalidades da Matemática, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o mérito de, pela primeira vez, ter descrito uma transformação linear como uma tabela de coeficientes (BASHMAKOVA; SMIRNOVA, 2000, p.151).

Essa descrição foi publicada em um livro de Gauss, chamado *Disquisitiones generales cerca superficies curvas*, de 1827. Escrito em latim, este trabalho foi resultado dos estudos realizados por Gauss para diversos governos da região que hoje forma a Alemanha.

À época, Gauss tinha sido comissionado para supervisionar uma medição precisa do meridiano entre as cidades de Göttingen e Alton, e confeccionar um mapa geodésico[12] do

[12] Geodésia é um ramo da Matemática aplicada que se ocupa em medir distâncias, determinar a forma de uma superfície ou localizar um ponto na Terra. Uma geodésica é um arco na superfície que representa a menor curva entre dois pontos.

Ducado de Hannover. Tarefas deste tipo levaram este matemático a fundar os princípios de um novo campo – a geodésia avançada – e a conduzir medidas geodésicas de campo que consumiram 15 anos de trabalho (KOLMOGOROV,1981, p.7).

Em seu *Disquisitiones generales*, Gauss definiu o que seriam as representações paramétricas de uma superfície e expressões para o cálculo de distâncias. Foi nesse contexto que ganharam utilidade as descrições abreviadas de transformações lineares, baseadas em uma notação que se assemelha a que seria usada futuramente para matrizes (BASHMAKOVA; SMIRNOVA,2000, p.151).

Os primeiros escritos com a notação abreviada para transformações lineares tornaram-se públicos bem antes. Em seu *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801, Gauss toma uma função do tipo

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz$$

com coeficientes inteiros. Ele aplica então uma substituição S

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + b_1y' + c_1z' \\ y &= a_2x' + b_2y' + c_2z' \\ z &= a_3x' + b_3y' + c_3z' \end{aligned}$$

também com coeficientes inteiros. Então, para ser mais direto, Gauss ignora as variáveis e diz que *f* é transformada em *f'* e esta em *f''*, respectivamente, pelas substituições

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{matrix}$$

Gauss conclui em seguida que *f* é transformada em *f''* pela substituição

$$\begin{matrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 & a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3 & a_1f_1 + b_1f_2 + c_1f_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 & a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3 & a_2f_1 + b_2f_2 + c_2f_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 & a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3 & a_3f_1 + b_3f_2 + c_3f_3 \end{matrix}$$

BASHMAKOVA (2000, p.152) nota que foi com base nessa regra que, em 1812, Cauchy apresentou seu teorema sobre multiplicação de determinantes.

4.4.8 O Método da Eliminação de Gauss

Sob muitos aspectos, Gauss foi pioneiro no trabalho com matrizes. O Método da Eliminação, que leva seu nome, é um exemplo.

O roteiro de uso do Método da Eliminação foi encontrado em um livro de Gauss publicado em 1810, *Disquisitio de Elementis Ellipticis Palladis*. Nesta obra, Gauss queria determinar detalhes sobre a órbita de Pallas, um dos maiores asteróides do Sistema Solar.

No caminho, ele se deparou com um sistema de equações lineares em seis incógnitas, em que nem todas as equações poderiam ser satisfeitas ao mesmo tempo.

Isso fez com que fosse preciso determinar valores para as incógnitas que minimizassem o erro quadrático total. Em vez de tentar solucionar o problema diretamente, Gauss introduziu um método para lidar com sistemas de equações lineares em geral.

O Método da Eliminação consiste em uma seqüência de operações aplicadas linha a linha de uma matriz, com a intenção de mudar os coeficientes da matriz e reduzi-la a uma matriz triangular superior (em que os coeficientes abaixo da diagonal são nulos).

A solução do sistema linear representado por esta matriz é então obtida por substituição reversa, começando pela última equação do sistema reduzido.

Como exemplo, tomemos o seguinte sistema linear:

$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ que pode ser representado pela matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Tal como o conhecemos hoje, o Método da Eliminação de Gauss permite escolher um multiplicador m_{ki}, que multiplica a_{1i}. Esse resultado, somado aos coeficientes da linha k (k=2,...,m), deverá zerar o primeiro coeficiente (a_{k1}) e alterar os outros, para criar uma matriz equivalente. No caso da matriz A, basta uma aplicação do algoritmo, com

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{3}$$

para que obtenhamos a matriz triangular equivalente

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

de onde concluímos que

$$\frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 1$$

$$3x + 4 \times 1 = 7 \Rightarrow x = \frac{7-4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Encontramos em ALTHOEN; McLAUGHLIN (1987, p.132) a informação de que o Método da Eliminação de Gauss foi concebido como uma ferramenta para se chegar ao Método dos Mínimos Quadrados, que por sua vez foi concebido para encontrar a melhor função linear afim que se aproximava de dados coletados em campo. Por causa disso, o Método dos Mínimos Quadrados despertou interesse dos cientistas e engenheiros ligados à geodésia, e o próprio Método da Eliminação foi lembrado por muito tempo apenas como um instrumento geodésico.

O Método da Eliminação seria aperfeiçoado mais tarde pelo matemático Wilhelm Jordan (1842-1899). Em seu livro *Handbuch der Vermessungskeunde*, publicado em 1888, Jordan apresenta seu método, batizado de Gauss-Jordan, que resulta em uma matriz diagonal equivalente (com coeficientes nulos acima e abaixo da diagonal) e fornece o valor das incógnitas de forma imediata (ALTHOEN; McLAUGHLIN,1987, p.130).

Ainda em relação a Gauss, MUIR (1890, p.64) aponta que ele foi o primeiro a usar o termo determinante, em um texto de 1801, só que em outro contexto.

O termo determinante foi posteriormente resgatado por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), desta vez com o significado que conhecemos hoje.

4.4.9 Representação gráfica de sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas

Tomamos a definição que Anton e Rorres (2001) utilizam no primeiro capítulo de seu livro didático *Álgebra Linear e Aplicações*, para uso no ensino superior:

> Qualquer linha reta no plano xy pode ser representada algebricamente por uma equação da forma
>
> $$a_1x + a_2y = b$$
>
> onde a_1, a_2 e b são constantes reais e a_1 e a_2 não são ambas nulas. Uma equação desta forma é chamada uma equação linear nas variáveis x e y. (ANTON; RORRES, 2001, p. 28)

Embora a definição nos sirva para o propósito deste estudo, ela também sugere uma certa subordinação entre as representações algébrica e gráfica. Isso nos faz lembrar do antagonismo entre as concepções de Descartes e Fermat – este último tinha como objeto de estudo curvas definidas por equações, como lembramos na seção anterior, e parece ser esta a concepção dos autores.

Generalizando, Anton e Rorres completam sua definição, afirmando que

> Mais geralmente, nós definimos uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$
>
> onde $a_1, a_2, \ldots a_n$ e b são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são, muitas vezes, chamadas incógnitas.

Uma equação linear, portanto, é uma equação cuja representação gráfica no plano terá a forma de uma reta. Podemos então definir um sistema de equações lineares (ou sistema linear) como "um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$" (ANTON; RORRES, 2001, p. 28). Para os mesmos autores, uma sequência de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ será uma solução do sistema se $x_1 = s_1, x_2 = s_2 \ldots, x_n = s_n$ for uma solução de cada equação do sistema.

Anton e Rorres chama de *inconsistente* um sistema que não tenha solução, e de *consistente* caso pelo menos uma solução exista. Nesse último caso, podem haver ou uma, ou infinitas soluções (ANTON; RORRES,2001,p.28). Outra forma de classificação consiste em chamar os sistemas sem solução de *incompatíveis* (ou *impossíveis*) e os solucionáveis, de *compatíveis* (ou *possíveis*). Neste caso, sistemas que admitem uma solução única recebem o nome de *compatível (possível)* e *determinado*, enquanto que os que admitem infinitas soluções são *compatíveis (possíveis)* e *indeterminados*.

No caso de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas – e também no de três equações e três incógnitas –, essas três possibilidades (sem solução, uma solução ou infinitas soluções) podem ser ilustradas por meio da representação gráfica das equações do sistema. Pelo fato de as equações serem representações algébricas de retas, a existência de uma solução comum para as equações (e, consequentemente, uma solução para o sistema) implica na existência de um ponto de interseção entre suas representações no plano.

Utilizando o software WinPlot[13], construímos representações gráficas para cada uma dessas possibilidades. Para a primeira – a existência de solução única – tomamos como

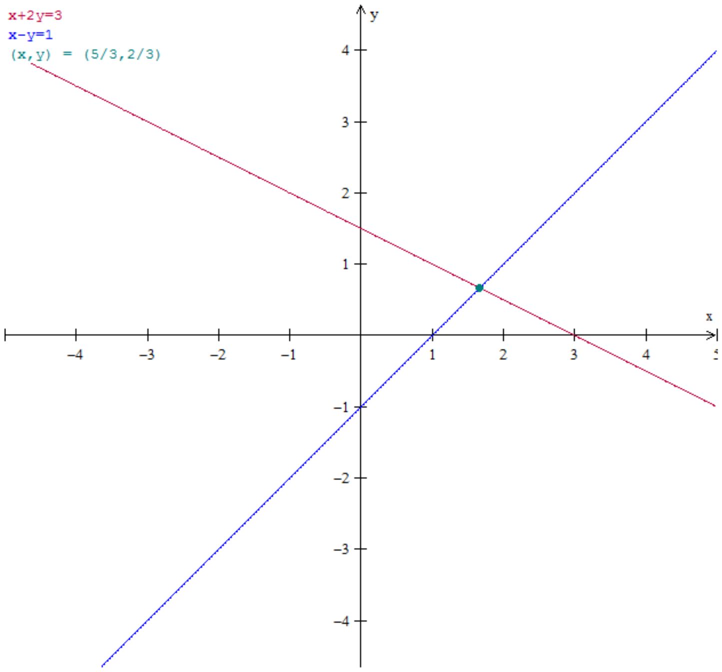
[13] O WinPlot é um software para desenho de gráficos 2D e 3D desenvolvido por Richard Parris, da Phillps Exeter Academy (Estados Unidos), disponível gratuitamente em http://math.exeter.edu/rparris.

exemplo o seguinte sistema, que sabemos ser compatível e determinado, com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

A partir dele, teríamos a representação a seguir (gráfico 4.1):

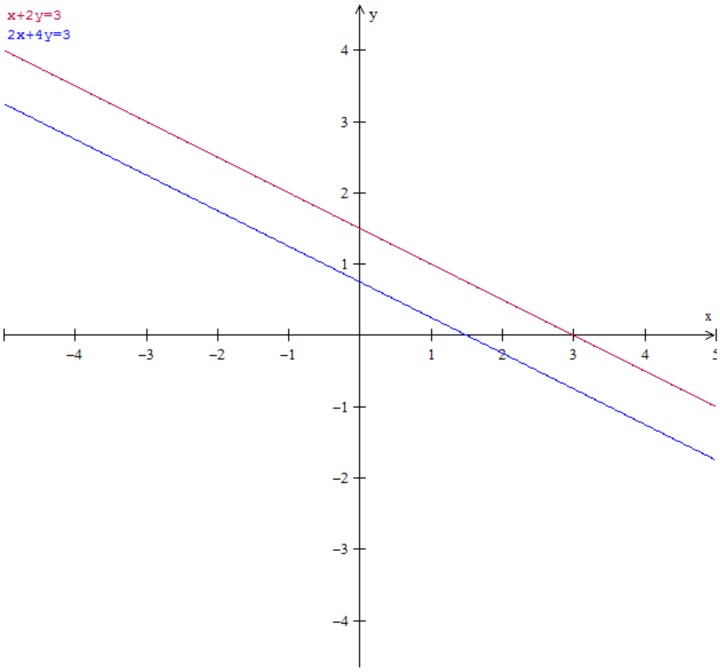
Gráfico 4.1 – Sistema compatível determinado de duas equações e duas incógnitas



O que indica a existência de uma solução para o sistema, pois há uma interseção entre as retas que representam as duas equações e que corresponde ao ponto P = $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$. De fato, resolvendo o sistema, encontramos como solução $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$, que correspondem às coordenadas do ponto de interseção das retas que representam as equações.

Da mesma forma, ao tomarmos como exemplo o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ encontraríamos a representação gráfica mostrada a seguir.

Gráfico 4.2 – Sistema incompatível de duas equações e duas incógnitas



que indica a inexistência de solução para o sistema, pois as retas são paralelas e não há pontos de interseção. De fato, ao resolvermos o sistema por meio do escalonamento da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

associada ao sistema descrito anteriormente, obtemos a matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que nos leva à igualdade absurda $0x = 1$. Logo, o sistema não tem solução.

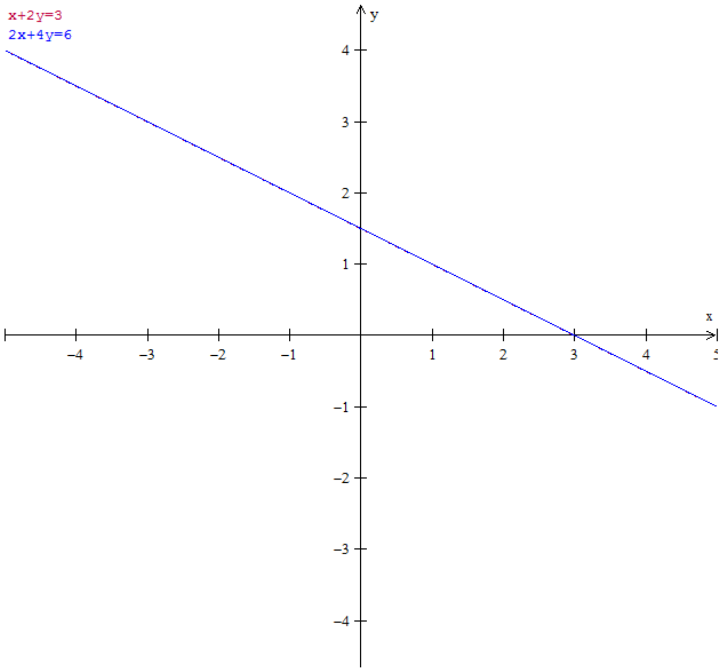
Podemos ainda constatar o pararelismo calculando as inclinações m_1 e m_2 das retas $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 3$ e $2\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 3$, respectivamente, com base em conjuntos de dois pontos pelos quais cada reta passa. No caso, escolhemos calcular m_1 com os pontos $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ e $(1,1)$, enquanto m_2 foi obtido a partir dos pontos $(4, -\frac{5}{4})$ e $(1, \frac{1}{4})$:

$$m_1 = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{4 - 1} = \frac{-\frac{6}{4}}{3} = -\frac{1}{2}$$

Por fim, no sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ temos, como representação gráfica, uma sobreposição do traçado das representações gráficas das duas equações, como mostrado pelo gráfico a seguir:

Gráfico 4.3 – Sistema de duas equações e duas incógnitas com infinitas soluções



O traçado sobreposto é indicador da existência de infinitas soluções para o sistema, já que há infinitos pontos de interseção entre as duas retas. Todo ponto (x, y) desta reta será uma solução para o sistema.

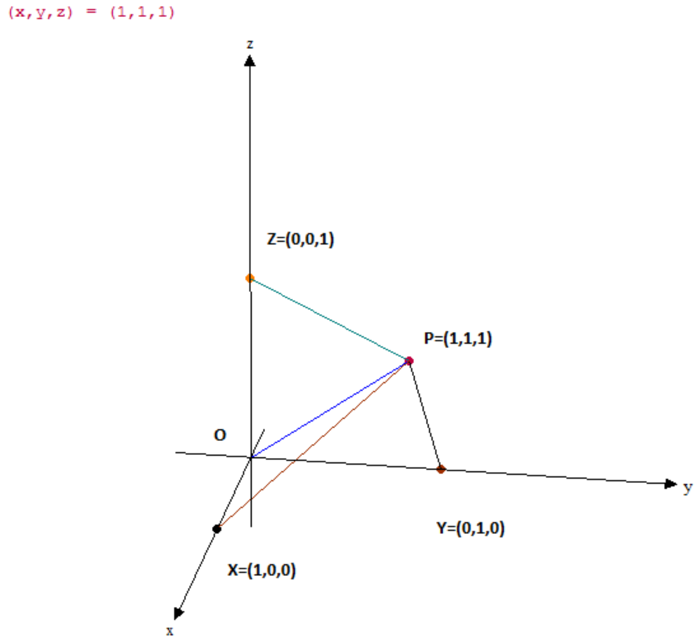
4.4.10 Representação gráfica de sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas

Já vimos que os sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas podem ser representados graficamente, onde cada equação representa (e pode ser representada por) uma reta no plano, e que esses sistemas têm uma matriz associada. No caso dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas, que também têm uma matriz associada, cada equação representa (e pode ser representada por) um plano no espaço tridimensional.

No ensino superior, essa representação gráfica é viabilizada por meio de vetores. Os vetores são representados geometricamente por meio de segmentos de reta orientados. Vetores têm direção e sentido, indicados pela direção e pelo sentido da flecha que o representa. A cauda da flecha é chamada de ponto inicial e a ponta da flecha, de ponto final (ANTON; RORRES,2001, p.102).

Os vetores no espaço tridimensional podem ser representados por meio de um sistema de coordenadas retangulares. Um sistema desse tipo pode ser construído a partir de um ponto origem O, pelo qual passam três retas perpendiculares entre si. Por convenção, essas retas, chamadas eixos, são denominadas x, y, z. Um ponto P neste espaço tridimensional pode ser localizado por meio de um terno de valores (x, y, z), ao qual chamamos coordenadas de P.

Gráfico 4.4 – O ponto P no espaço tridimensional e suas projeções nos eixos



As coordenadas de P são dadas pelos comprimentos $\overline{OX}, \overline{OY}\ e\ \overline{OZ}$. Os números x, y, z equivalem aos valores desses comprimentos. Os pontos X, Y e Z marcam a interseção entre os eixos x, y, z com os planos aos quais o ponto P pertence e que são paralelos aos planos coordenados formados pelos pares de eixos $x, y; y, z; x, z$. Tal como uma reta no plano, que pode ser definida por sua inclinação e um de seus pontos, um plano pode ser definido por sua inclinação e um de seus pontos (ANTON; RORRES,2001,p.121).

Para medir a inclinação desse plano, será preciso uma referência. Esta é dada por um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular ao plano. Assim, para encontrarmos a equação do plano que compreende o ponto $P = (x, y, z)$ e para o qual o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal, ou perpendicular, a $\vec{n}$, se $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, podemos escrever o produto escalar $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ (condição que implica a ortogonalidade) como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Em ANTON; RORRES (2003,p.121) esta expressão é chamada *forma ponto-normal* da equação de uma reta no espaço tridimensional. Nesse momento, faz-se necessário enunciar o seguinte teorema:

Se a, b, c, d são constantes e a, b, c não são todos nulos, então o gráfico da equação $ax + by + cz + d = 0$ é um plano com um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Encontramos, em ANTON; RORRES (2003,p.121), a seguinte prova para este teorema:

> Por hipótese, os coeficientes a, b e c não são todos nulos. Suponha, por enquanto, que $a \neq 0$. Então a equação $ax + by + cz + d = 0$ pode ser reescrita na forma $a\left(x + \left(\frac{d}{a}\right)\right) + by + cz = 0$. Mas isto é uma forma ponto-normal do plano passando pelo ponto $(-\frac{d}{a}, 0{,}0)$ e tendo $\vec{n} = (a, b, c)$ como normal.
>
> Se $a = 0$, então ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Uma simples modificação do argumento acima dá conta desses casos.

Dessa forma, a solução de um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas do tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz = k_1 \\ dx + ey + fz = k_2 \\ gx + hy + iz = k_3 \end{cases}$$

Determinam o conjunto de pontos de interseção dos três planos identificados pelas equações. Analogamente aos sistemas com duas equações e duas incógnitas, podemos representar as situações de existência de solução única, inexistência de solução e infinitas soluções da seguinte forma:

Seja o sistema possível e determinado

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = 9 \\ -x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Cuja matriz associada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Que, aplicando as propriedades de transformações, resulta na seguinte matriz equivalente

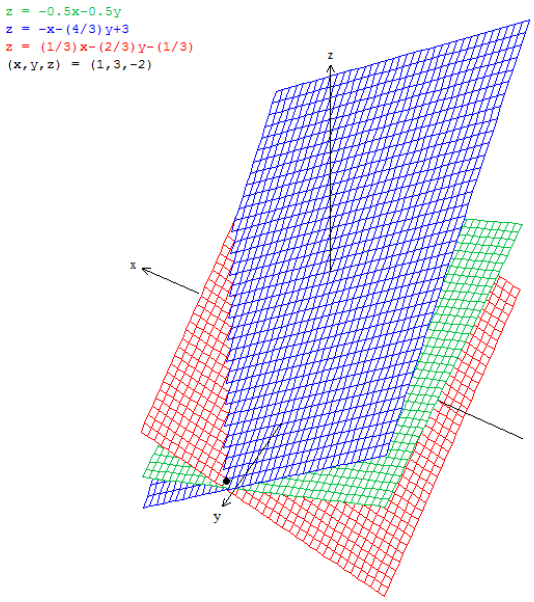
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \end{pmatrix}$$

E que, mediante substituições sucessivas, fornece a solução

$$x = 1 \quad y = 3 \quad z = -2$$

Com o software Winplot, podemos obter a representação gráfica dos três planos no espaço tridimensional e observar o ponto (1,3,-2) onde os planos se intersectam.

Gráfico 4.5 – Representação no espaço tridimensional de sistema possível determinado com três equações e três incógnitas



Vamos agora tomar como exemplo o caso de um sistema possível e indeterminado, como

$$\begin{cases} x + 2y - 8z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Cuja matriz associada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & 9 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais uma vez, aplicando-se as propriedades, obtemos a matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

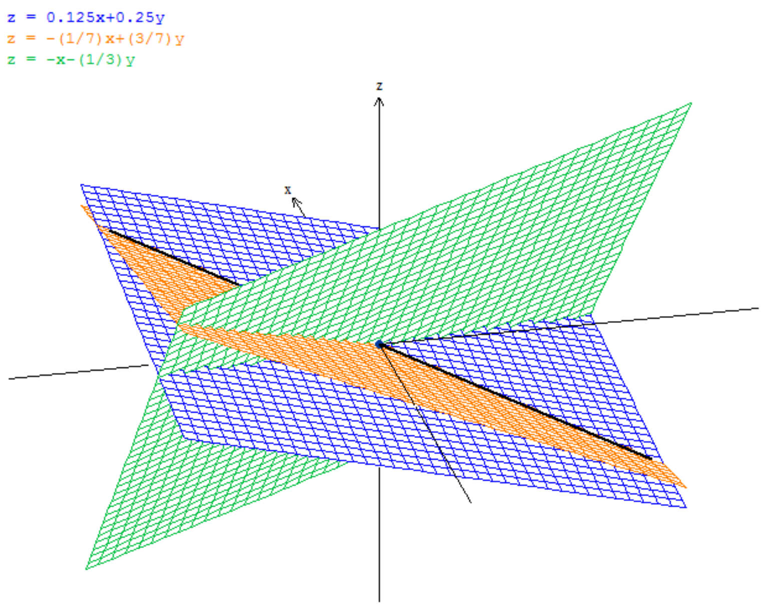
Que resulta em indeterminação já que, para $0z = 0$, a solução será qualquer $z = a$. Como consequência, teremos $y = 3a$ e $x = 2a$. A solução do sistema será, portanto, o conjunto de pontos $(2a, 3a, a)$.

De fato, o sistema só admite a solução trivial (0,0,0) e soluções próprias, pois trata-se de um sistema linear homogêneo e o determinante da matriz incompleta é nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 1 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando o Winplot, obtemos a representação gráfica a seguir, que mostra, na forma de um segmento de reta, os pontos de interseção entre os planos que representam a primeira e a segunda equações.

Gráfico 4.6 – Representação no espaço tridimensional de sistema possível indeterminado com três equações e três incógnitas



Um terceiro caso é o de sistemas classificados como incompatíveis (ou impossíveis), que não admitem nenhuma solução. Para exemplificá-los, tomemos o sistema

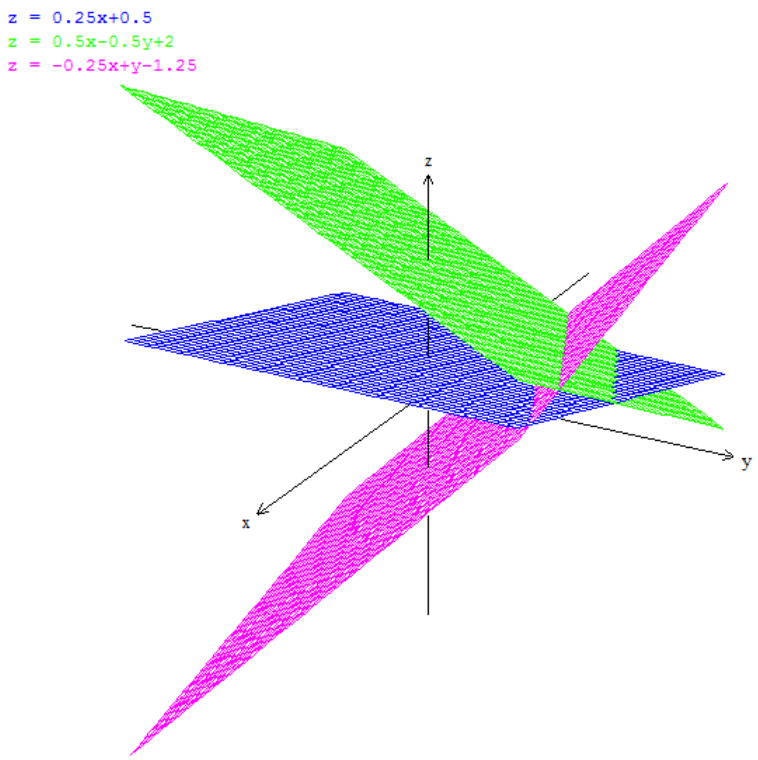
$$\begin{cases} x - 4y - 0z = -2 \\ x - y - 2z = -4 \\ x - 4y - 4z = -5 \end{cases}$$

cuja matriz associada é

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

No software Winplot, o sistema é representado pelo gráfico a seguir. Note a ausência de interseções entre os três planos de forma simultânea.

Gráfico 4.7 – Representação no espaço tridimensional de sistema impossível com três equações e três incógnitas



4.4.11 Representação gráfica e sistemas com n equações e n incógnitas

Vimos que a definição de equação linear com incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, conforme descrita por Anton e Rorres, é uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = b$$

Dessa forma, podemos conceber sistemas lineares de n equações e n incógnitas, com $n < 3$. Jean Dieudonné aponta que após a invenção das coordenadas cartesianas os matemáticos sabiam como interpretar geometricamente cálculos de sistemas com 2 ou 3 incógnitas, e muitos imaginavam a possibilidade de interpretações semelhantes em cálculos de sistemas de qualquer número n de incógnitas. De fato, o autor observa que por volta de 1830 os matemáticos já lidavam com sistemas de n equações e n incógnitas, no conjunto dos números reais ou dos complexos. Esses sistemas, no entanto, seriam desprovidas de "realidade" por não estarem mais relacionados às três dimensões do espaço físico (DIEUDONNÉ, 1981, p.72). Nos espaços de n dimensões, continuamos a trabalhar com as propriedades numéricas e algébricas dos pontos, mas sem as propriedades geométricas. Perdemos, assim, a possibilidade de representar tais sistemas em forma gráfica, mas em nível superior as dimensões maiores são fundamentais.

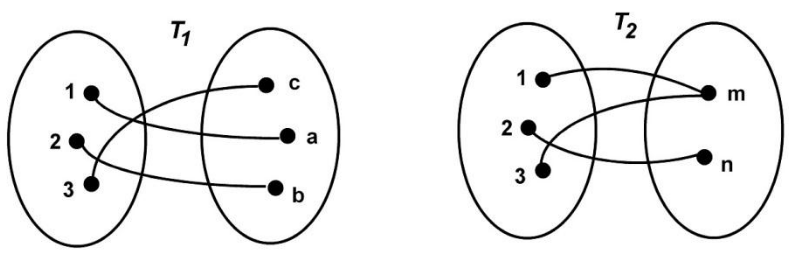
4.4.12 Matriz de uma transformação linear

Já vimos como um sistema de equações lineares e uma matriz podem ser representações de um mesmo objeto matemático. As operações de transformações do plano atribuem mais significado às matrizes. Para compreendê-las, precisaremos introduzir a noção de função, que se relaciona com algumas das ideias fundamentais da matemática, como a correspondência e a interdependência.

Vamos nos apoiar inicialmente na explicação simplificada de Anthony Pettofrezzo, que define função como "uma regra que associa cada elemento de um conjunto A a um elemento de um conjunto B" (PETTOFREZZO, 1978, p.51, em tradução nossa). Reconhecemos na álgebra a notação *f*(x) como indicador da regra de associação. No entanto, como para preparar o leitor ao estudo das transformações no plano, Pettofrezzo chama essa regra de *T*, e a função passa a se chamar, aqui, mapeamento.

Dessa forma, este autor define um mapeamento de valor único (*single-valued mapping*, no original em inglês[14]) de um conjunto A em um conjunto B como uma regra que associa cada elemento *a* pertencente a A a um único elemento *b* pertencente a B. Este elemento *b*, aponta Pettofrezzo, será a imagem de *a* sob o mapeamento *T* e será indicado por *b* = T(*a*). Mais: se *T* é um mapeamento de valor único de A em B tal que cada elemento de B é a imagem de algum elemento de A, então *T* estabelece uma correspondência biunívoca entre A e B (PETTOFREZZO, 1978, p.52). Dois exemplos de mapeamento, reproduzidos do livro do autor, são dados abaixo.

Figura 4.1 – Exemplos de mapeamento de valor único



[14] A definição atual de função já pressupõe que o elemento no contradomínio é único.

Ambos os mapeamentos são considerados do tipo valor único, mas há algo que os distingue, aponta Pettofrezzo. O da esquerda é um mapeamento um-para-um (correspondência biunívoca). E conclui: se *T* é um mapeamento do tipo um-para-um, então será possível definir um mapeamento inverso de B em A, que será indicado por T^{-1}. Ou seja, para Petrofrezzo, uma correspondência biunívoca é bijetora, logo é inversível. O mapeamento inverso associa cada elemento *b* pertencente a B a cada elemento *a* pertencente a A, que continuará tendo *b* como sua imagem sob *T*. Ou seja, $T^{-1}(T(a)) = a$, para qualquer $a \in A$.

Algumas vezes, continua Pettofrezzo, pode ser desejável ou útil aplicar as noções de mapeamento de pontos entre conjuntos para problemas que envolvem o estudo de planos. Nesses casos, tais mapeamentos são chamados de transformações do plano. Uma transformação do plano é, portanto, uma regra pela qual cada ponto *P* do plano é transformado em (ou mapeado a) outro ponto do plano, que chamaremos de *P'*. Se esses mapeamentos forem definidos por equações lineares, então estas transformações serão chamadas de transformações lineares (ANTON; RORRES, 2003, p. 138).

De modo geral, uma transformação linear T que mapeia conjuntos de pontos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ é definida por um sistema de equações lineares, como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = v_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = v_m \end{cases}$$

que, na escrita matricial, pode ser expressa como

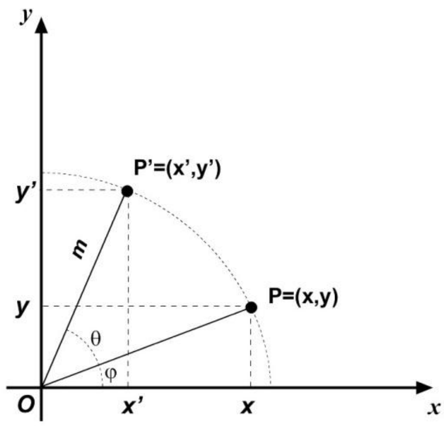
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

No nosso caso, vamos ilustrar este tipo de representação com transformações lineares no plano, com sistemas de duas equações e duas incógnitas e suas matrizes associadas 2x2.

Rotação no plano

Para ilustrar o que diz, Pettofrezzo utiliza-se de um exemplo: a rotação no plano de um ponto *P* por um ângulo θ, tendo como eixo a origem (0,0) do plano cartesiano formado pela abscissa *x* e pela ordenada *y*, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 4.8 – Rotação de um ponto no plano



Por meio dessa rotação, cada ponto P do plano é mapeado a um ponto P' do mesmo plano. Chamamos de m o comprimento do segmento de reta OP, que tem o mesmo comprimento de OP'. Dessa forma, podemos dizer, com base nas relações trigonométricas no triângulo retângulo aplicadas ao triângulo ΔOPX, que

$$x = m\cos\varphi \quad \text{(I)}$$

$$y = m\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \text{(II)}$$

Analogamente, para o triângulo $\Delta OP'X'$,

$$x' = m\cos(\theta + \varphi)$$

$$y' = m\,\mathrm{sen}(\theta + \varphi)$$

Desenvolvendo o cosseno da soma e o seno da soma nas duas equações, temos

$$x' = m\,(\cos\varphi\cos\theta - \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$y' = m\,(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta)$$

Distribuindo m, obtemos

$$x' = m\cos\varphi\cos\theta - m\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y' = m\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta + m\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta$$

Substituindo por (I) e (II), podemos escrever que

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

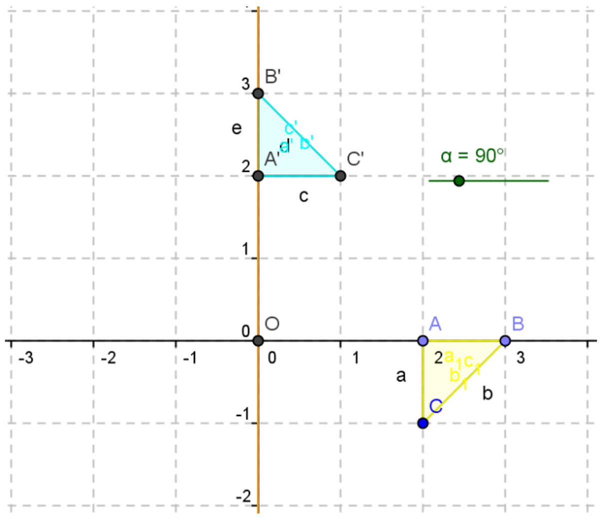
$$y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$$

As duas equações formam um sistema que pode ser escrito, por meio da representação matricial, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vemos, portanto, que *P'=(x',y')* é o ponto de imagem de *P(x,y)* quando rotacionado por um ângulo θ com centro na origem. A matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é chamada de matriz de rotação; ela atua como um operador que mapeia cada ponto *(x,y)* à sua imagem *(x',y')*. No exemplo a seguir, mostramos, no software Geogebra[15], a rotação do triângulo retângulo ΔABC em 90 graus no sentido anti-horário, em relação à origem *O*.

Gráfico 4.9 – Rotação do ΔABC em 90 graus em torno da origem *O*

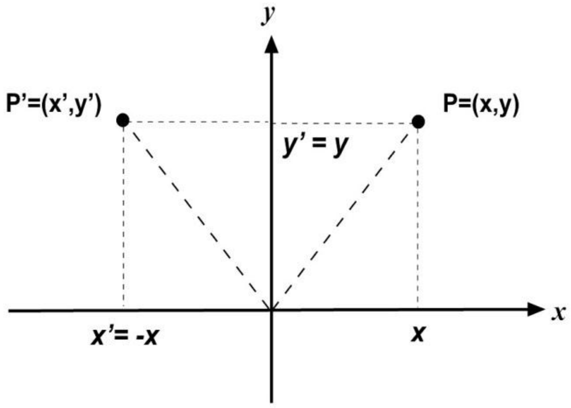


Reflexões no plano

Um outro tipo de transformação linear é a reflexão no plano. Ela associa um ponto *P=(x,y)* do plano a um ponto *P'=(x',y')* que é a reflexão de *P* em relação ao eixo *x*, ao eixo *y* ou a ambos. Considere o gráfico 4.10.

[15] Software de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter. Disponível gratuitamente em http:// www.geogebra.org.

Gráfico 4.10 – Reflexão em relação ao eixo *y*



Neste exemplo, a transformação *T* mapeia um ponto *P=(x,y)* do plano a um ponto *P'=(-x,y)* do mesmo plano. O ponto *P'* é a reflexão do ponto *P* em relação ao eixo *y*. No caso, os valores de *x'* e *y'* são fornecidos pelas equações

$$x' = (-1)x + 0y$$

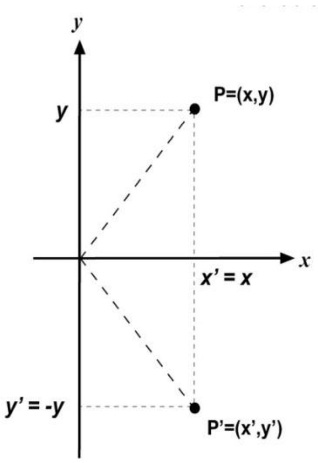
$$y' = 0x + y$$

Que podem ser representadas, em notação matricial, como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é chamada matriz de reflexão em relação ao eixo *y*. Analogamente, podemos considerar o exemplo do gráfico 4.11 para reflexão em relação ao eixo *x*.

Gráfico 4.11 – Reflexão em relação ao eixo *x*



Neste caso, os valores de *x'* e *y'* são fornecidos pelas equações

$$x' = x + 0y$$

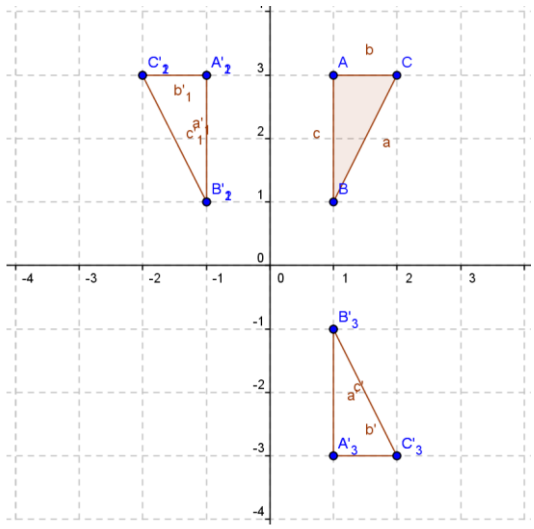
$$y' = 0x + (-1)y$$

Que podem ser representadas, em notação matricial, como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

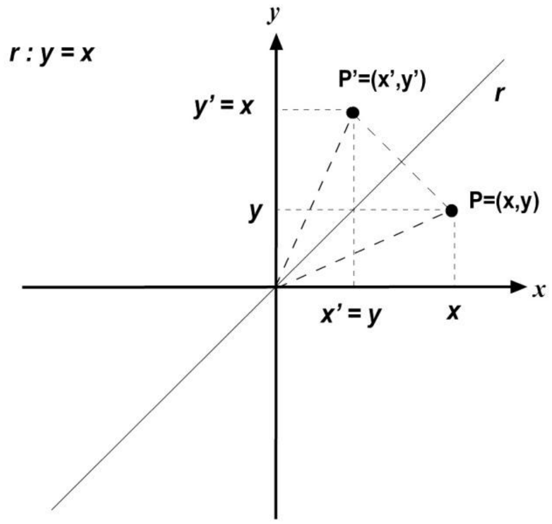
A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é chamada de matriz de reflexão em relação ao eixo *x*. Mostramos a seguir como as reflexões de um triângulo ΔABC podem ser representadas no Geogebra.

Gráfico 4.12 – Reflexão do ΔABC em relação aos eixos *x* e *y*



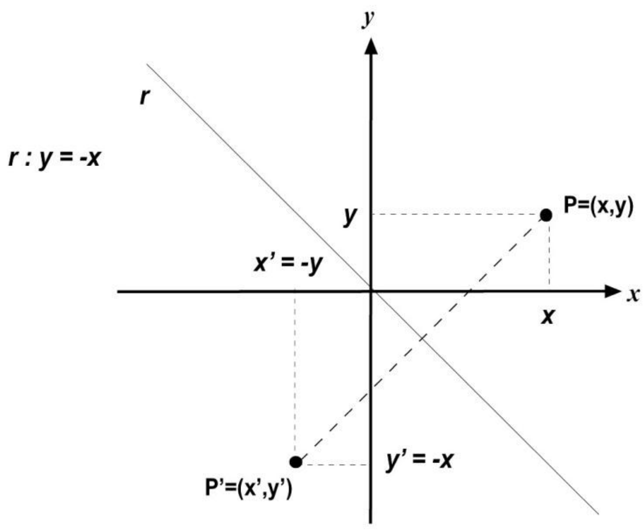
PETTOFREZZO (2001, p.58) destaca outras duas matrizes de reflexão no plano. A primeira é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que mapeia os pontos *P=(x,y)* aos pontos *P'=(y,x)* – trata-se no caso, de uma reflexão em relação à reta *y* = *x*, como mostra o gráfico 4.13.

Gráfico 4.13 – Reflexão em relação à reta $y = x$



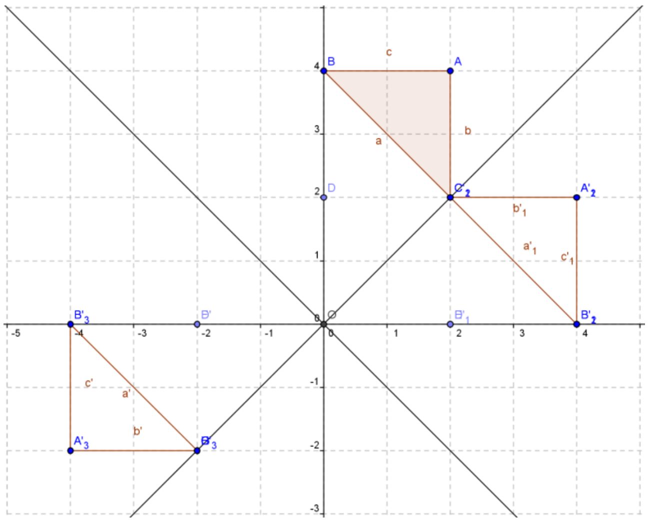
A segunda matriz de reflexão apresentada pelo autor é $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que mapeia os pontos *P=(x,y)* do plano aos pontos *P'=(-y,-x)* e promove a reflexão em relação à reta *y = –x* (gráfico 4.14).

Gráfico 4.14 – Reflexão em relação à reta $y = -x$



No software Geogebra, as reflexões em relação à reta $y = x$ e $y = -x$ podem ser representadas na figura a seguir.

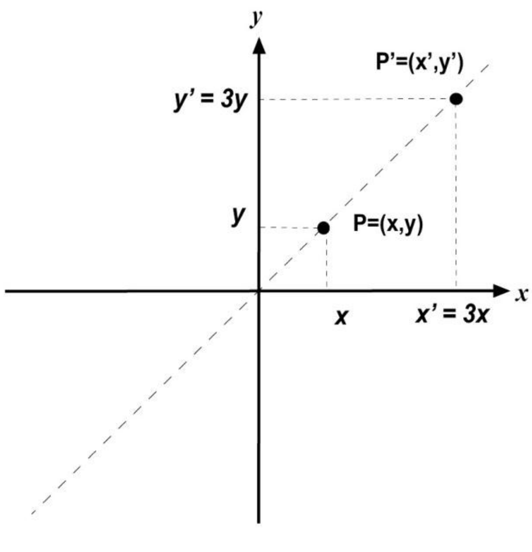
Gráfico 4.15 – Reflexão do $\triangle ABC$ em relação às retas $y = x$ e $y = -x$



Dilatação e distorção

Outra transformação de interesse é a representada por uma matriz de ordem 2x2 do tipo $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, destaca PETTOFREZZO (2001, p. 61). Esta matriz de transformação mapeia um ponto *P=(x,y)* do plano a um ponto *P'=(x',y')* de forma que *OP* = *kOP*. A ampliação ou redução da distância entre pontos em relação a um ponto fixo é conhecida como *homotetia* e a matriz deste tipo é chamada de matriz de dilatação. No exemplo abaixo (gráfico 4.16), o ponto *P=(x,y)* foi mapeado ao ponto *P'=(x',y')* por meio da matriz de transformação $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

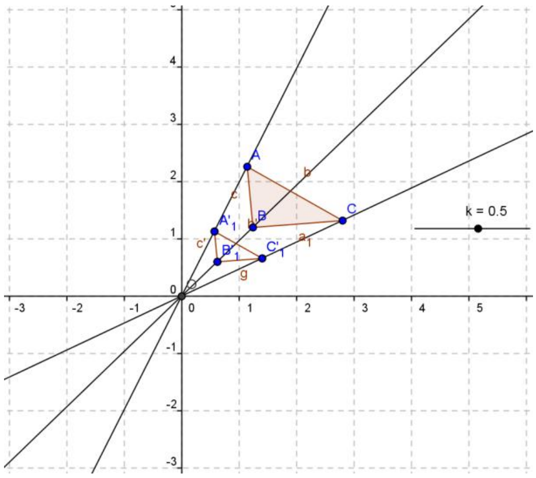
Gráfico 4.16 – Dilatação do plano



Na escrita matricial, a transformação pode ser representada como $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

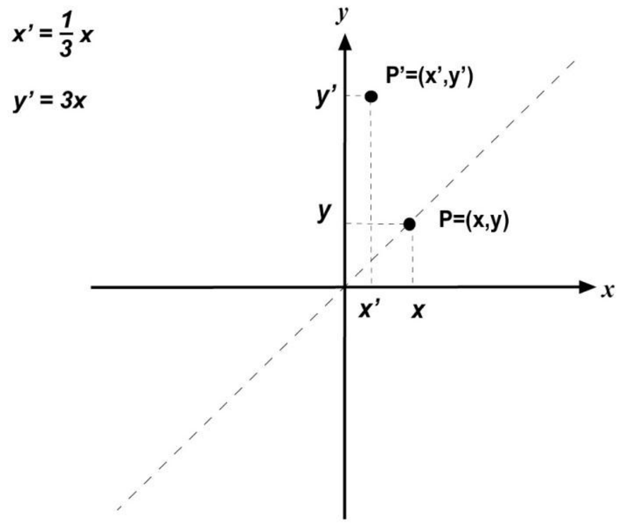
Note que, para $k > 1$, o que ocorre é um esticamento uniforme do plano. No caso de k estar no intervalo entre zero e 1 ($0 < k < 1$), haverá uma compressão uniforme do plano. O gráfico seguinte, obtido por meio do Geogebra, ilustra a compressão do triângulo retângulo $\triangle ABC$ para $k = 0{,}5$.

Gráfico 4.17 – Compressão do $\triangle ABC$ em relação à origem O com $k = 0{,}5$



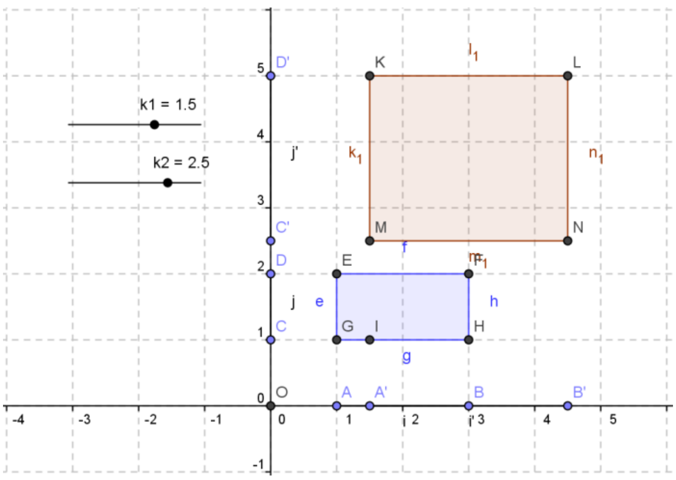
E se, em vez de k, tivermos k_1 e k_2, $k_1 \neq k_2$? Neste caso, em vez de uma ampliação teremos uma distorção do plano. É fácil ver que o conjunto de matrizes de dilatação está contido no conjunto de distorções do plano, sendo apenas um caso especial deste (quando $k_1 = k_2$). No exemplo abaixo (gráfico 4.18), o ponto $P=(x,y)$ foi mapeado a outro ponto $P'=(x',y')$ do plano, por meio da matriz de transformação $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Gráfico 4.18 – Distorção do plano



E, neste, caso, a escrita matricial da transformação será $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. No Geogebra, a distorção do quadrilátero $ABCD$ no plano é mostrada no gráfico a seguir.

Gráfico 4.19 – Distorção do quadrilátero $ABCD$ com $k_1 = 1{,}5$ e $k_2 = 2{,}5$



Transformações não biunívocas

Há algumas tranformações no plano que não proporcionam o mapeamento de pontos um a um (correspondência biunívoca). PETTOFREZZO (2001, p.64) dá como exemplo a transformação representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que provoca um esticamento alinhado ao eixo x.

A representação matricial da transformação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

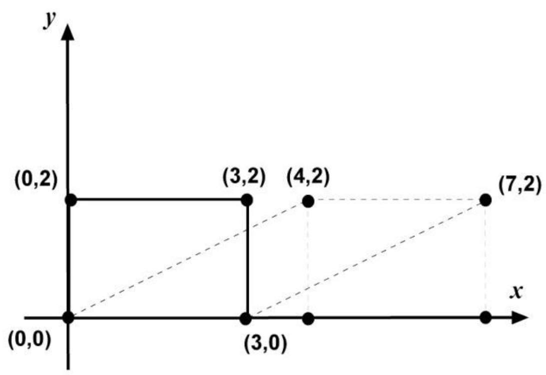
Mostra que

$$x' = x + ky$$

$$y' = y$$

Os pontos que coincidem com o eixo *x* (e que, naturalmente, têm *y*=0) serão mapeados para eles mesmos. Todos os outros serão mapeados para pontos cada vez mais distantes do eixo *y*, à medida que o valor de *y* varia (gráfico 4.18).

Gráfico 4.20 – Esticamento em relação ao eixo *x*



De forma análoga, a matriz de transformação do tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ provocará o esticamento em relação ao eixo *y*.

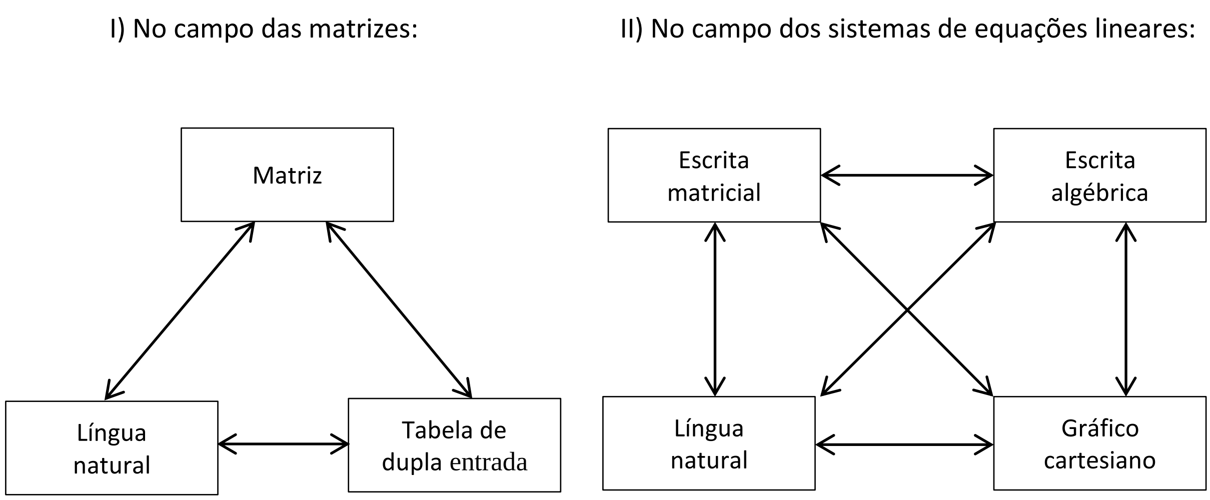
5 METODOLOGIA

Este estudo adotou como metodologia a pesquisa bibliográfica, que permitiu reunir subsídios na composição do referencial teórico, principalmente nos campos da Semiótica e da Filosofia. Tais fontes permitiram um estudo mais profundo das imbricações entre os registros de representação semiótica, a natureza da ciência semiótica e a representação do mundo sensível pelo homem.

Como complemento a esta pesquisa, ressaltamos o acesso a outras fontes importantes, como o trabalho de historiadores – em especial, da História da Matemática –, para reconstituir a formação e a origem dos conceitos de matriz e determinante, bem como o surgimento das técnicas mais populares relacionadas à resolução de sistemas lineares e que são abordadas até hoje em livros didáticos.

A partir do referencial teórico estabelecido, construímos um modelo, composto por dois diagramas, que procura respeitar a utilização dos diferentes registros de representação para o desenvolvimento do assunto matrizes no Ensino Médio. No esquema abaixo, representamos as interações possíveis (conversões) entre os diferentes registros de representação que podem ser utilizados na construção dos conceitos que concernem o estudo das matrizes nessa etapa da escolarização.

Figura 5.1 – Possibilidades de conversões entre registros de representação



Com esse modelo, envolvendo as conversões possíveis, examinamos um conjunto de livros didáticos, cada um bastante representativo da década em que foi editado – 1980, 1990 e 2000 –, além do material didático produzido a partir de 2008 pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, como parte de sua Proposta Curricular, a fim de verificar o quanto esses materiais respeitam o modelo construído.

6 LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA

Historicamente, o desenvolvimento da teoria das matrizes envolveu – como pudemos observar – a utilização de diferentes registros de representação. Nosso interesse agora tem como foco a maneira como os livros didáticos para o Ensino Médio tratam esse assunto. Para esta análise, elegemos três obras representativas de épocas distintas:

- *Matemática – 2.º grau – 2.ª série*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nílson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antonio dos Santos Machado (Atual Editora, 1980)
- *Matemática – Volume 2 – 2.º grau*, de Scipione di Pierro Netto (Scipione Autores Editores, 1993)
- *Matemática no Ensino Médio – 2.º ano*, de Márcio Cintra Goulart (Editora Scipione, 2009)

Esses livros são cuidadosos com o desenvolvimento dos conteúdos e têm forte compromisso com o ensino e a aprendizagem da Matemática; são, por isso, considerados "bons" por seus usuários, que os têm em alto conceito.

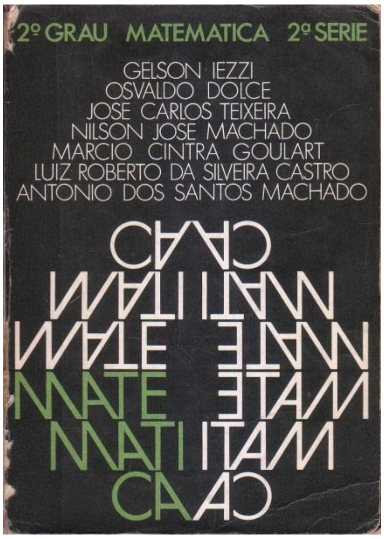
Uma vez que compreendemos como operam as manipulações de registros na Matemática, faz-se necessário um confronto entre a teoria que serve de suporte à representação de registros semióticos e os registros observados em livros didáticos. Nossa intenção é colher observações que permitam avaliar como essa teoria transparece (ou não) nesses livros didáticos.

Nesta análise, consideramos que a ideia de matriz está contida e pode ser expressa por meio dos seguintes registros de representação semiótica: tabelas de dupla entrada, matrizes e língua natural (no campo das matrizes); e sistemas de equações lineares (escrita algébrica), equações matriciais (escrita matricial), gráficos cartesianos e a língua natural (no campo dos sistemas de equações lineares). Também interessa averiguar em que medida os textos exploram situações de tratamento e de conversão de registros – e nesse último caso, o sentido dessa conversão. Podemos admitir, em princípio, que qualquer registro de representação semiótica pode ser convertido para qualquer outro registro dentro de seu campo, como foi mostrado na figura 5.1.

6.1 O livro *Matemática – 2.º grau – 2.ª série* (Atual Editora, 1980)

Editada entre as décadas de 1970 e 1980, a coleção *Matemática* da Atual Editora era formada por três volumes, um para cada série do 2.º grau. O exemplar em análise pertence à sétima edição, de 1980.

Figura 6.2 – Capa do livro *Matemática – 2.º grau – 2.ª série* (Atual Editora, 1980)



No Prefácio, os autores demonstravam preocupação com a simplificação e a contextualização do conteúdo:

> Procuramos manter (...) linguagem acessível, formalização reduzida ao mínimo necessário, exemplos introdutórios antes de cada conceito novo, vinculação da Matemática com outras Ciências e com a realidade vivida pelo aluno, teoria dividida em pequenas doses acompanhadas de exercícios que devem ser considerados parte integrante do texto (IEZZI, 1980).

O conteúdo Matrizes e Sistemas Lineares foi incluído no segundo volume. Foram destinados a ele os capítulos “3 – Matrizes” e “4 – Sistemas Lineares”.

Em “3 – Matrizes”, encontramos os tópicos Noção de Matriz; Representação; Igualdade de matrizes; Operações: Adição de matrizes, multiplicação de número por matriz, multiplicação de matrizes; Matriz inversa.

Em “4 – Sistemas Lineares”, temos os tópicos principais Conceitos Introdutórios; Resolução de Sistemas Lineares; Classificação de Sistemas quanto ao número de soluções; Discussão de sistemas lineares; e Regra de Cramer.

6.1.1 A noção de matriz

Em *Matemática – 2.º grau – 2.ª série*, a noção de matriz é apresentada no capítulo "3 – Matrizes" por meio de uma tabela de dupla entrada, contendo notas de provas, em que as linhas são identificadas por nomes de alunos e as colunas, por disciplinas. A tabela, publicada na página 41 do livro didático, é reproduzida abaixo:

	PORT.	MAT.	FÍS.	QUIM.
ALUNO X	8	3	6	5
ALUNO Y	7	5	4	3
ALUNO Z	5	7	8	2

O conceito de matriz é assim apresentado:

> Notemos que estamos chamando de linhas as filas horizontais e colunas as filas verticais. Assim, a tabela consta de 3 linhas e 4 colunas. Uma tabela deste tipo é exemplo de uma matriz 3x4 (lê-se: três por quatro) (IEZZI, 1980, p.41).

O exemplo da tabela de dupla entrada será resgatado, no capítulo 3, em mais dois momentos: na apresentação de operações com matrizes e no exemplo da multiplicação entre matrizes. Sobre operações com matrizes, os autores utilizam as tabelas

	PORT.	MAT.	FÍS.
ALUNO X	7	6	6
ALUNO Y	6	4	5

	PORT.	MAT.	FÍS.
ALUNO X	6	3	4
ALUNO Y	5	5	6

para mostrar que, por meio de duas operações – adição de matrizes e multiplicação de número por matriz – é possível calcular as médias aritméticas das provas dos alunos listados. O texto considera as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \ e \ B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

como correspondentes, cada uma, às notas dos alunos em determinado mês. Em seguida, calcula a matriz $A + B$ e, depois, a matriz

$$\frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 6{,}5 & 4{,}5 & 5{,}0 \\ 5{,}5 & 4{,}5 & 5{,}5 \end{pmatrix}$$

A multiplicação de matrizes, por sua vez, é apresentada por meio de uma aplicação: o cálculo do total de pontos de cada aluno, tendo por base o peso das notas das provas. A tabela de pesos das provas é apresentada como

	Peso
1.º bimestre	1
2.º bimestre	2
3.º bimestre	2
4.º bimestre	2
Exame final	3

e as notas de um aluno qualquer, como

	1.º bimestre	2.º bimestre	3.º bimestre	4.º bimestre	Exame
PORTUGUÊS	4	4	5	5	6
MATEMÁTICA	7	7	6	5	4
FÍSICA	9	8	5	3	3

O texto chama de A a matriz de notas, B a matriz de pesos e AB a matriz de total de pontos:

$$AB = \begin{pmatrix} 50 \\ 55 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Esses são, por todo o capítulo 3, os únicos exemplos introdutórios que tentam empregar situações vinculadas à "realidade vivida pelo aluno", como afirmavam os autores no Prefácio. No restante do texto deste capítulo o aluno encontraria sequências compostas por formalizações, exemplos, exercício resolvido e exercícios propostos.

Por exemplo, embora as operações com matrizes tenham sido apresentadas com uma aplicação – o cálculo da média das notas de alunos –, a lista de exercícios propostos inclui exercícios como o seguinte (IEZZI, 1980, p.51):

$$Sendo\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$calcule\ a\ matriz\ X\ tal\ que\ X - A - B = 0$$

6.1.2 Matrizes e Sistemas lineares

O capítulo "4 – Sistemas Lineares" inicia com uma conceitualização de equação linear, que reproduzimos a seguir (IEZZI, 1980, p.73):

> De modo geral, equação linear é toda equação da forma
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$
>
> onde a_1, a_2, a_3, ..., a_n são números denominados coeficientes das incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n e b é chamado termo constante (ou independente) da equação.

Em seguida, o capítulo apresenta os sistemas de equações lineares como um "conjunto de equações lineares simultâneas", em que uma solução comum às equações do conjunto será a solução do sistema linear. "Em S, uma n-upla (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é uma solução (solução particular) se satisfaz cada uma das equações de S. Resolver um sistema linear significa obter todas as n-uplas que verificam as equações do sistema" (IEZZI, 1980, p.75).

É na resolução de sistemas lineares que ressurge a matriz, desta vez como "matriz associada a um sistema". Em seguida, o capítulo apresenta a equivalência entre sistemas e matrizes – "Dois sistemas são equivalentes se toda solução do primeiro é também solução do segundo e reciprocamente" e "Se S_1 e S_2 são equivalentes, então as matrizes M_1 e M_2 associadas a S_1 e S_2 são equivalentes e reciprocamente" (IEZZI, 1980, p.79).

Vem então os métodos para "resolver sistemas". O primeiro método, da eliminação, é demonstrado primeiro usando-se o registro algébrico sem matrizes e, depois, com o emprego da matriz associada ao sistema. Para preparar os alunos no uso desta técnica, o texto enumera as transformações que podem ser aplicadas às matrizes para a obtenção de matrizes equivalentes. Essas transformações são apresentadas como propriedades P, da seguinte forma (IEZZI, 1980, p.83):

Quadro 6.2 – Propriedades aplicáveis a transformações em matrizes

P1: Permutar entre si as posições de duas linhas

P2: Permutar entre si as posições de duas colunas relativas às incógnitas

P3: Multiplicar uma linha por um número $k \neq 0$

P4: Multiplicar uma linha por um número $k \neq 0$ e adicionar o resultado a outra linha

O objetivo das transformações, segundo o texto, é "obter uma matriz M que apresenta no seu 'canto superior à direita' a matriz identidade. Este procedimento, além de facilitar e padronizar a resolução de sistemas mais complicados, simplifica bastante o estudo do assunto 'discussão de sistemas lineares' " (IEZZI, 1980, p.84).

Como exemplo do método da eliminação, o texto traz a resolução do sistema

$$\text{S}\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Oferece-se duas formas de solução. A primeira, sem o uso de matrizes, é resolvida em três passos:

1- Substitui-se a segunda equação por outra, resultante da multiplicação da primeira equação por -2 e da adição desse resultado com a segunda equação (aplicação da propriedade P4):

$$\text{S}_1\begin{cases} x + y = 4 \\ \quad - y = -3 \end{cases}$$

2- Em S_1, multiplica-se a segunda equação por -1 (propriedade P3):

$$\text{S}_2\begin{cases} x + y = 4 \\ \quad\quad y = 3 \end{cases}$$

3- Em S_2, substitui-se a primeira equação por outra, resultado da multiplicação da segunda por -1 e da adição desse resultado com a primeira equação (P4):

$$\text{S}_3\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Na resolução com matrizes, o texto sugere trabalhar com a matriz associada ao sistema

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Assim, bastaria repetir as operações. Primeiro, multiplicando a primeira linha por -2 e somando o resultado à segunda linha, substituindo-a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Em seguida, multiplicando a segunda linha por -1:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por último, multiplicando a segunda linha por -1 e somando o resultado com a primeira linha, substituindo-a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

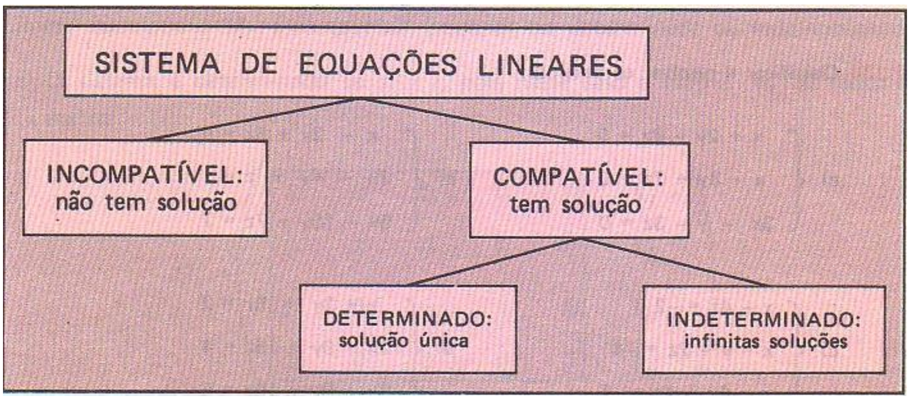
6.1.3 Classificação de sistemas, determinante e Regra de Cramer

O capítulo 4 de *Matemática – 2.o grau – 2.a série* continua a abordagem de Sistemas Lineares tratando da classificação dos sistemas em relação ao número de soluções.

“Se um sistema apresentar uma única solução diremos que o sistema é compatível (tem solução) e determinado (a solução é única), afirma o texto. “Para ser determinado um sistema não precisa ter necessariamente número de equações igual ao número de incógnitas.”

Por outro lado, prossegue o texto, “quando um sistema apresenta infinitas soluções dizemos que o sistema é compatível (possui solução) e indeterminado (infinitas soluções)”. Um sistema é considerado incompatível quando não tem solução. A seguinte figura, reproduzida do livro, reúne os casos que considera possíveis (IEZZI, 1980, p.87):

Figura 6.3 – Classificação de sistemas lineares quanto à sua solução



A Regra de Cramer é introduzida, então, como mais um método para obter a solução de sistemas de equações. Aplicada, no exemplo, inicialmente a matrizes 2×2 – ou seja, a sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas – ela pode ser estendida, como mostra o texto, a sistemas $n \times n$.

Mas a Regra de Cramer se fundamenta num conceito associado à Teoria das Matrizes, que é o de Determinante. Em IEZZI (1980, p.97), a conceituação de Determinante surge como resultado da resolução do sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Resulta que as incógnitas são

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ associada ao sistema 2x2 – chamada de matriz incompleta por deixar de fora os termos independentes c_1 e c_2, o denominador $a_1b_2 - b_1a_2$ é, segundo o texto, "precisamente o produto dos elementos da diagonal principal, menos o produto dos elementos da diagonal secundária da matriz A. Este número é chamado determinante da matriz A e é indicado por det A ou por

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Logo, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$".

O texto chama então o número $a_1b_2 - b_1a_2$ de D e afirma que o sistema S será "compatível e determinado se, e somente se, D for diferente de zero" (IEZZI, 1980, p.99). Levada a sistemas lineares homogêneos S – que admitem, ao menos, a solução trivial (0,0,0,...,0) – a conclusão é interpretada da seguinte forma: se D ≠ 0, então S é compatível determinado (admite apenas a solução trivial); se, por outro lado, D = 0, então S é compatível indeterminado (admite a solução trivial e soluções próprias).

6.2 O livro *Matemática – Volume 2 – 2.º grau* (Scipione Autores Editores, 1993)

Também composta de três volumes, a coleção *Matemática – 2.º grau*, de Scipione di Pierro Netto, foi produzida originalmente em meados da década de 1980. O exemplar sob análise, de 1993, pertence à sexta edição da obra.

No Prefácio, o autor explica que "a parte teórica está exposta de modo simples e coloca, sempre que possível, situações e problemas práticos para a partir deles formular os conceitos e a construção das questões básicas que devem ser estudadas" (PIERRO NETTO, 1993).

Os temas Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares receberam, cada um, um capítulo. De forma geral, o autor alerta, no Prefácio, que "os exercícios propostos são muito numerosos". No entanto, para os alunos em geral, os primeiros exercícios de cada grupo seriam suficientes "para assegurar o conhecimento básico do assunto tratado".

Os capítulos foram distribuídos de forma sequencial, na seguinte ordem: "3 – Matrizes", "4 – Determinantes" e "5 – Sistemas lineares".

Figura 6.4 – Capa do livro *Matemática – Volume 2 – 2.o grau* (Scipione Autores Editores, 1993)

6.2.1 Matrizes

No livro de Scipione di Pierro Netto, a noção de matriz é introduzida com uma tabela de dupla entrada – no caso, com informações dos jogos finais da Copa do Mundo de 1978:

	Vitórias	Empates	Derrotas
Argentina	5	1	1
Holanda	3	2	2
Brasil	4	3	0
Itália	4	1	2

A tabela é utilizada, pelo livro, para apresentar linhas e colunas e mostrar como se localiza um elemento, e também para definir matriz. Afirma PIERRO NETTO (1993, p.65):

“A tabela países x resultados é o que se chama de *matriz formada por 4 linhas e 3 colunas*, ou seja, uma matriz 4 x 3, e pode ser representada por qualquer uma das seguintes formas”:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} ou \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} ou \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

A introdução também apresenta os conceitos de matriz quadrada de ordem *n* (quando possui o mesmo número de linhas *m* e de colunas *n*) e de matriz linha (quando possui apenas uma linha) e matriz coluna (quando tem apenas uma coluna).

O texto ocupa-se também de mostrar como se representa uma matriz genérica (usando-se, para identificar cada elemento da matriz, uma letra minúscula com dois índices, do tipo $a_{i,j}$); como identificar as diagonais principal (formada pelos elementos em que i=j) e secundária na matriz quadrada; o que é matriz transposta B de A (quando as linhas da matriz A são reescritas, na matriz B, como colunas); e igualdade de matrizes.

As operações com matrizes vêm em seguida, começando pela adição e suas propriedades (comutativa, associativa, elemento neutro da adição e elemento oposto). O aluno encontrará também a multiplicação de uma matriz por um número real e, por fim, a multiplicação de matrizes e suas propriedades.

Para emprestar significado à multiplicação de matrizes, o livro de Scipione usa o seguinte exemplo:

> Uma indústria fabrica uma certa máquina em dois modelos diferentes, A e B.
>
> O modelo A utiliza 4 condensadores, 3 interruptores e 7 válvulas. O modelo B utiliza 3 condensadores, 2 interruptores e 9 válvulas.
>
> Em novembro, foram encomendadas 3 máquinas do modelo A e 2 do modelo B; e em dezembro 2 máquinas do modelo A e 1 do modelo B.
>
> Qual será o número necessário de condensadores, interruptores e válvulas em cada um dos meses para fabricar estas encomendas? (PIERRO NETTO, 1993, p,82)

Os dados sobre peças necessárias para cada modelo de máquina e sobre encomendas por mês foram pré-arranjados em tabela, como as reproduzidas abaixo:

	Modelo A	Modelo B
Condensadores	4	3
Interruptores	3	2
Válvulas	7	9

	Novembro	Dezembro
Modelo A	3	2
Modelo B	2	1

As tabelas são então representadas na forma de matrizes, assumindo as formas

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A quantidade necessária de cada peça para entregar as encomendas é apresentada, então, como resultado da multiplicação das duas matrizes

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 13 & 8 \\ 39 & 23 \end{pmatrix}$$

O resultado indica que serão necessários 18 condensadores para cumprir os pedidos de novembro e 11, para os de dezembro; 13 interruptores para novembro e 8 para dezembro; e 39 válvulas para novembro e 23 para dezembro.

Segue-se daí a definição da operação de multiplicação de matrizes:

> Dada uma matriz A = (aij)m×n e uma matriz B=(bjk)n×p, o produto da matriz A pela matriz B é a matriz AB=(cik)m×p, tal que cik é calculado multiplicando-se cada elemento da linha i da matriz A pelo seu correspondente na coluna k da matriz B e somando-se os produtos obtidos. (PIERRO NETTO, 1993, p.83)

Propostas semelhantes de utilização de multiplicação de matrizes a situações práticas aparecem nas páginas seguintes. Um dos exercícios resolvidos traz a seguinte questão:

> Duas senhoras X e Y foram à feira e compraram respectivamente 3 e 2 dúzias de bananas, 4 e 8 dúzias de laranjas, 3 e 0 abacaxis. Sabendo-se que os preços eram: Cz$ 15,00, Cz$ 12,00 e Cz$ 20,00 para a dúzia de banana, a dúzia de laranja e um abacaxi respectivamente, calcular matricialmente as despesas. (PIERRO NETTO, 1993, p.84)

O capítulo encerra com a apresentação das definições de matriz identidade I_n (matriz quadrada de ordem *n* que tem elementos da diagonal principal iguais a 1, e todos os outros iguais a zero) e matriz inversa (uma matriz B tal que AB = BA = I_n).

6.2.2 Determinantes

O livro *Matemática – Volume 2 – 2.º grau* dedica 38 páginas ao estudo do determinante – que é apresentado, pelo livro, como um número real associado a toda matriz quadrada, segundo uma determinada lei (PIERRO NETTO, 1993, p.103).

A partir desse ponto, o capítulo mostra, de forma recorrente, como calcular o determinante, começando pelo determinante de matriz de ordem 1 e aprofundando-se com o determinante de matriz de ordem 2 (incluindo, aqui, a definição de cofator – "número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo elemento de A quando se elimina a linha i e a coluna j"). O determinante de matriz de ordem 2 é definido, então, como "a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores" (PIERRO NETTO, 1993, p.104).

O resto do capítulo apresenta as técnicas para cálculo de determinante de matrizes de ordem 3; de ordem *n*; propriedades dos determinantes; cálculo do determinante para uma matriz de Vandermonde; e uma aplicação da teoria dos determinantes para estimar se uma matriz admite ou não inversa.

6.2.3 Sistemas lineares

Os capítulos "3 – Matrizes" e "4 – Determinantes" servem de preparação para o capítulo 5 – Sistemas Lineares. Aqui, Pierro Netto apresenta as equações lineares, os sistemas formados por equações deste tipo e a resolução de sistemas com o uso de matrizes.

As equações lineares são definidas pelo livro *Matemática – Volume 2 – 2.º grau* como "toda equação na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são incógnitas, $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados coeficientes e b é o termo independente" (PIERRO NETTO, 1993, p.143).

Os sistemas de equações lineares, por sua vez, são apresentados em termos de sua solução. Como exemplo, o texto fornece duas equações lineares:

$$2x + y = 5$$
$$x - y = -2$$

Lembrando que cada uma dessas equações possui infinitas soluções, o texto nota que uma solução satisfaz ambas equações: o par (1,3). "Podemos dizer então que o par (1,3) é solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

formado por duas equações e duas incógnitas" (PIERRO NETTO, 1993, p.145).

Tal como IEZZI (1980, p.87), Pierro Netto apresenta a classificação dos sistemas lineares em termos de compatíveis e incompatíveis. No caso de sistemas compatíveis, eles podem ser determinados (com solução única) ou indeterminados (com mais de uma solução). E, no caso de sistemas homogêneos – quando o termo independente é sempre nulo –, pode ocorrer de ele ser determinado (admite só a solução trivial) ou indeterminado (admite a solução trivial e outras).

Pierro Netto mostra também que, “para facilitar a resolução de sistemas lineares”, pode-se associar um sistema de equações lineares a quatro tipos de matrizes: a matriz completa – formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes –; a matriz incompleta, que só traz os coeficientes; a matriz das incógnitas (formada pelas incógnitas do sistema); e a matriz dos termos independentes, formada – como o nome sugere – pelos termos independentes.

Assim, o sistema de equações apresentado teria como matrizes associadas a matriz completa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; a matriz incompleta $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; a matriz das incógnitas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e a matriz dos termos independentes $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

“Observe”, explica o autor, “que escrever $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ é o mesmo que escrever $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, que é a forma matricial do sistema”.

6.2.4 Resolução de sistemas lineares

Para resolver um sistema de equações lineares S, Pierro Netto descreve o Método de Gauss, ou método das eliminações sucessivas (que foi construído com base em transformações elementares aplicadas às equações de S, que equivalem às já citadas propriedades de transformação P1, P3 e P4 apresentadas por IEZZI (1980, p.84). A finalidade da operação, explica o autor, é “tornar o sistema dado em outro equivalente de resolução imediata” (PIERRO NETTO, 1993, p.153).

Outro método de resolução apresentado pelo livro é a Regra de Cramer, que se baseia em determinantes. Inicialmente – e beneficiando-se de já ter discutido o conceito de determinante em capítulo anterior –, o autor apresenta o determinante D como o calculado com base na matriz incompleta (e que, para aplicação da Regra de Cramer, deve ser diferente de zero), e o determinante $D(x_j)$ como "o determinante que se obtém de D substituindo-se a coluna j pelos elementos conhecidos do sistema".

Assim, continua, dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$ obtém-se os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}, D(x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$D(x_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ e } D(x_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

Pierro Netto enuncia então o Teorema de Cramer, pelo qual "um sistema quadrado de *n* equações lineares a *n* incógnitas é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 \times D = D(x_1) \\ x_2 \times D = D(x_2) \\ \qquad \vdots \\ x_n \times D = D(x_n) \end{cases}$$

Por fim, na discussão de sistemas lineares por meio da Regra de Cramer, Pierro Netto ressalta que, se D ≠ 0, o sistema admitirá uma solução única e será, portanto, compatível e determinado. Se, no entanto, D = 0, então a solução do sistema dependerá do valor de $D(x_i)$. "Se $D(x_i) = 0$, poderão ocorrer dois casos: ou o sistema é compatível e indeterminado [mais de uma solução], ou é impossível [não há solução]. (...) Se $D(x_i) \neq 0$, temos $x_i \times 0 = D(x_i)$, que é absurdo. Isto significa que o sistema não admite nenhuma solução, isto é, o sistema é impossível" (PIERRO NETTO, 1993, p.173).

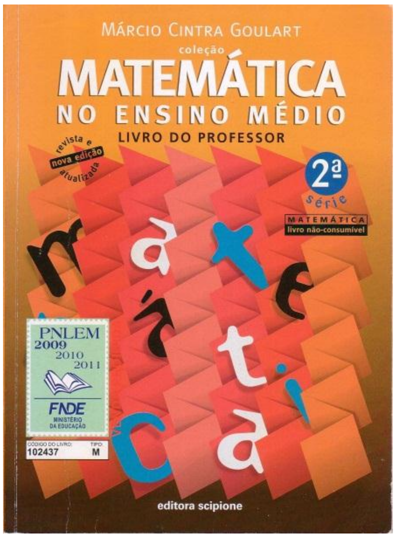
6.3 O livro *Matemática no Ensino Médio – 2.ª série* (Editora Scipione, 2009)

A coleção *Matemática no Ensino Médio*, de Márcio Cintra Goulart, foi elaborada na década de 2000 tendo em conta as exigências do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), do Ministério da Educação. É composta de três volumes, sendo que o conteúdo relativo a Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes vem incluído no livro da 2.ª série.

Na apresentação, Goulart – que também participou da elaboração de *Matemática – 2.º grau – 2.ª série*, incluído neste estudo – afirma que "a ideia é levar os alunos a pensar para resolver problemas que não são apenas os da Matemática; é garantir que possam solucionar questões diversificadas e até mesmo desafiadoras" (GOULART, 2009, p.3).

Para proporcionar situações que reflitam tal diversidade de propósito, o autor diz ter incluído, no livro, atividades com origens em exames vestibulares e concursos públicos; no Exame Nacional para o Ensino Médio (ENEM); e outros de autoria própria. Foram incluídos ainda textos que, segundo Goulart, "ampliam horizontes, revelam oportunidades, apresentam contextos históricos".

Figura 6.5 – Capa do livro *Matemática no Ensino Médio – 2.a série* (Editora Scipione, 2009)



O livro organiza o tema em estudo em dois capítulos: "2 – Matrizes" e "3 – Sistemas lineares e Determinantes". Em Matrizes, Goulart apresenta os tipos de matrizes e as operações permitidas; as propriedades das matrizes; e a inversão de matriz. Já o capítulo 3 começa com a apresentação de sistema linear, a resolução por escalonamento e a discussão de sistemas lineares, para depois abordar determinantes e a Regra de Cramer.

6.3.1 Matrizes

Em seu livro, Goulart introduz as matrizes com a ajuda de tabelas de dupla entrada. O exemplo utilizado é o de uma tabela de produtos, que reproduzimos a seguir:

	A	B	C
Massa (kg)	2	3	5
Volume (litros)	2	5	4
Preço (R$)	4	8	10

Em seguida, o autor dispara: “Como você faria para calcular os totais de massa, volume e preço, no caso de um pedido de 100 unidades do produto A, 200 unidades de B e 50 de C?” (GOULART, 2009, p.106).

A resposta, no caso da massa, será 100 × 2 + 200 × 3 + 50 × 5, completa o autor, que em seguida faz referência à conveniência da automação de cálculos como esse:

> No dia-a-dia, quem precisa fazer muitas vezes cálculos como esses vai preferir programar, automatizar. Vai-se perceber a conveniência de pensar ainda em mais uma tabela, das quantidades pedidas, e que poderá ser com os números em coluna (vertical).
>
> Desse modo, basta fornecer à máquina os dados na ordem, ou seja, as tabelas, que os cálculos estarão programados, sintetizados numa operação entre duas tabelas (que serão matrizes, e a operação, a multiplicação de matrizes).
>
> Com essa idéia de matrizes, faz-se uma teoria, que se presta muito bem à informatização, pela facilidade em programar suas operações para computação, o que faz aumentar sua importância, digamos, teórico-prática. (GOULART, 2009, p.106)

Na introdução, a matriz é apresentada como uma “tabela formada por m × n números, colocados em m linhas e n colunas”. São apresentadas também a matriz quadrada (“Se forem iguais o número de linhas e o número de colunas, dizemos matriz quadrada”), ordem de uma matriz, diagonais principal (“elementos a_{ij} nos quais i = j”) e secundária (“elementos a_{ij} em que i+j = n+1”) e igualdade entre matrizes.

Em relação às operações com matrizes, Goulart expõe de forma conjunta a adição e a subtração de matrizes, a multiplicação de número por matriz e a matriz oposta de A (como –A = –1 × A). A multiplicação de matrizes, que já tinha sido citada na apresentação do capítulo, é definida em seção específica, “para atender às aplicações, visando em geral à automatização, de cálculos sequenciais ou repetitivos” (GOULART, 2009, p.113).

Como exemplo de multiplicação, o autor retoma a situação de “cálculo de média ao final dos quatro bimestres” apresentada em IEZZI (1980, p.51). Reproduzimos a situação, apresentada no livro, de um aluno e suas notas de Matemática ao longo do ano:

Bimestre	1.º	2.º	3.º	4.º
Média	4,0	6,0	5,0	7,5

Com os pesos 1, 2, 2, 2 atribuídos às notas do 1.º, 2.º, 3.º e 4.º bimestres, respectivamente, o autor esquematiza o cálculo do número de pontos obtidos, com o uso de notação matricial (não sem antes destacar que tais cálculos, estendidos a todos os alunos e todas as matérias, serão feitos por computador):

$$\begin{bmatrix} 4{,}0 & 6{,}0 & 5{,}0 & 7{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \end{bmatrix}$$

O capítulo é completado com as definições de matriz identidade e de matriz invertível.

6.3.2 Sistemas lineares e determinantes

Goulart apresenta, de forma sintética, as noções de sistema linear (com a identificação de seus coeficientes, termos conhecidos e incógnitas); solução do sistema ("uma sequência α_1, α_2, ..., α_n que seja solução de todas as equações de um sistema linear"); e a classificação de sistemas de acordo com sua solução – possível (ou compatível) e determinado, possível e indeterminado, e impossível (ou incompatível) – sem, no entanto, utilizar diagramas.

O primeiro método de resolução de sistemas lineares apresentada pelo autor é o do escalonamento (eliminação de incógnitas). Este método "consiste em transformar o sistema em sistemas equivalentes (no sentido de que têm a mesma solução geral), até chegar ao sistema "em escadas" ou escalonado" (GOULART, 2009, p.135). É neste momento que o autor apresenta a matriz completa associada ao sistema – nela, ele reproduz as transformações aplicadas ao sistema de equações.

Ao contrário dos outros livros abordados neste trabalho, o livro de Goulart não apresenta as transformações de forma sistemática – como uma lista de propriedades, por exemplo – e sim por meio de exemplos, que incluem a multiplicação de uma equação (ou de uma linha da matriz) por um número e a soma, a uma equação (ou uma linha da matriz), de uma outra equação (ou linha) multiplicada por um número.

Mais tarde, essas possibilidades de transformação serão abordadas, mas na condição de propriedades do determinante de uma matriz.

O conceito de determinante é apresentado de maneira gradual. Inicialmente, Goulart afirma que "o que chamamos de determinante de uma matriz quadrada é um número associado à matriz, mediante uma definição" (GOULART, 2009, p.144). Usando a Regra de

Cramer – mas sem, por enquanto, citar o nome – o autor explica como calcular o determinante da matriz A (chamado de det A), como a diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Aplicando o método do escalonamento a um sistema linear de duas equações com duas incógnitas, Goulart mostra que o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

pode ser transformado por meio de sua matriz associada

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Primeiro, o autor dividiu a 1.ª linha por a_1, obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Depois, ele multiplicou a 1.ª linha por $-a_2$ e somou o resultado à 2.ª linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1} & c_2 - a_2\frac{c_1}{a_1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz equivale ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \\ \left(b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\right)y = c_2 - a_2\frac{c_1}{a_1} \end{cases}$$

Se $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, chega-se à seguinte solução:

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Os valores de x e y, assim obtidos, correspondem a

$$x = \frac{D_x}{D} \; e \; y = \frac{D_y}{D}$$

que é no que consiste a aplicação da Regra de Cramer.

Mais à frente, Goulart reapresenta a definição de determinante, desta vez estendido a matrizes quadradas de ordem maior ou igual a 2. Finalmente, ele anuncia a Regra de Cramer, repetindo parte dos cálculos apresentados na introdução.

6.3.3 Propriedades dos determinantes

O livro traz ainda algumas propriedades dos determinantes, sob a justificativa de que seu conhecimento “pode facilitar seu cálculo, principalmente para determinantes de ordem superior a 3” (GOULART, 2009, p.165).

A primeira propriedade diz que “multiplicando-se todos os elementos de uma fila da matriz quadrada por um número k, o determinante inicial também fica multiplicado pelo mesmo número k”.

A segunda propriedade afirma que “trocando entre si as posições de duas filas paralelas na matriz quadrada, de ordem 2 ou maior que 2, o determinante associado à nova matriz é o oposto do anterior”.

A terceira propriedade diz que “não se altera o determinante quando adicionamos a uma dada fila da matriz uma outra fila paralela (a ela), multiplicada por uma constante”.

O autor inclui ainda a informação de que o determinante do produto de matrizes quadradas equivale ao produto dos determinantes dessas matrizes.

6.4 Evolução do uso de registros semióticos nos livros didáticos

Embora, dentre os livros avaliados neste trabalho, quase três décadas separem o livro mais antigo (1980) do mais recente (2009), nota-se poucas mudanças nas dinâmicas de utilização dos registros de representações semióticas associados ao objeto matemático matriz, independentemente das diferenças no mapeamento do tema ou na profundidade da abordagem.

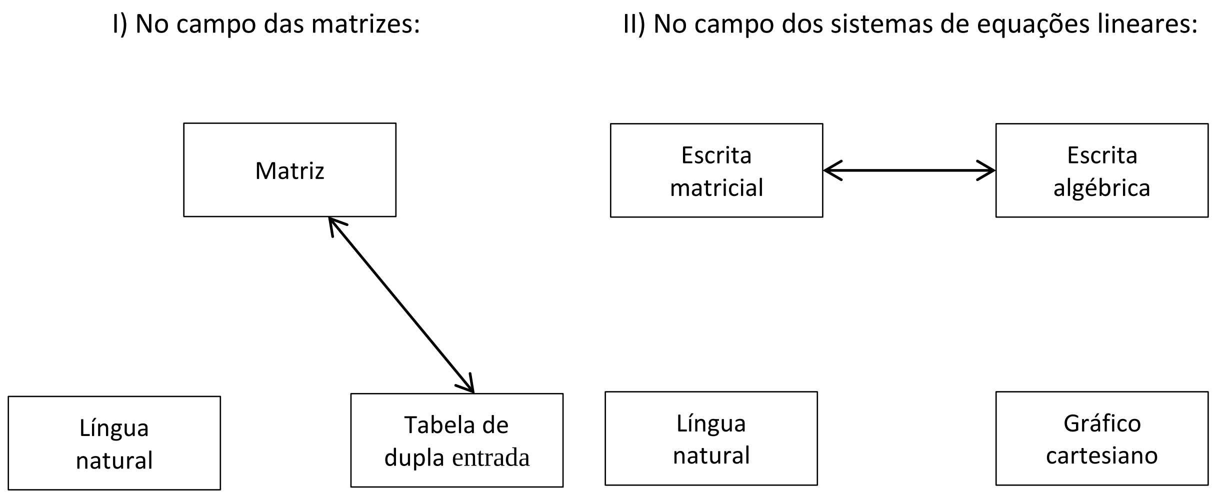
O livro de IEZZI (1980), por exemplo, usa a representação de tabela de dupla entrada quatro vezes, ora como introdução, ora como dado fornecido – mas nunca como resultado final da operação com matrizes. Em três dessas vezes, a tabela ilustra uma exposição teórica – primeiro, para apresentar a noção de matriz; depois, para dar sentido às operações de adição e de multiplicação de matrizes.

Podemos dizer que a abordagem proporcionada por IEZZI enfatiza a apropriação, pelo aluno, de habilidades procedimentais em relação ao objeto matriz. Dos 42 problemas propostos no capítulo “3 – Matrizes” deste livro, só um – o problema 112 – explora uma situação cotidiana para aplicação de operações com matrizes.

Por outro lado, um exercício resolvido – o 40 – prepara o aluno para o capítulo seguinte (sobre sistemas lineares) ao pedir a transformação de um sistema de três equações e três incógnitas numa equação matricial do tipo AX = B (IEZZI, 1980, p.62).

Resulta, portanto, que no capítulo “3 – Matrizes” do livro “Matemática – 2.º Grau – 2.ª série”, de 1980, tenhamos identificado apenas as seguintes conversões:

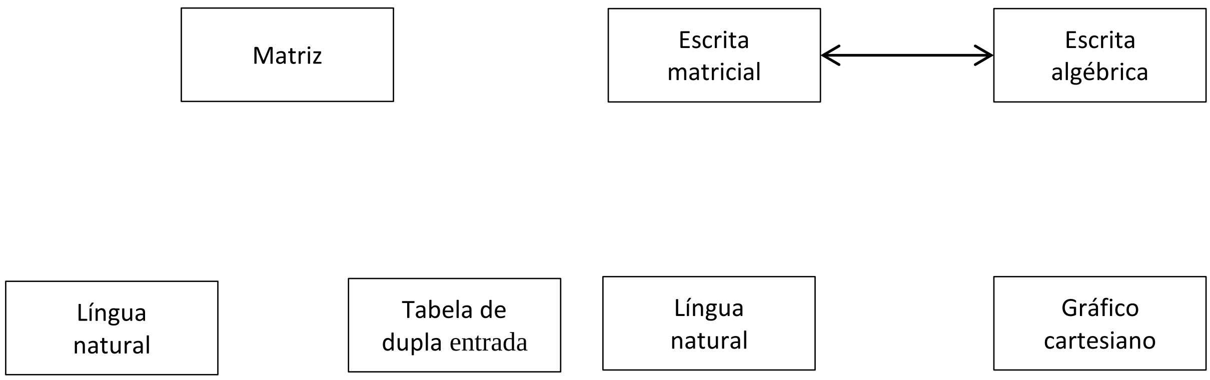
Figura 6.1 – Conversões de registro em IEZZI (1980), cap. 3 - Matrizes



O capítulo “4 – Sistemas lineares”, do mesmo livro, apresenta matrizes e sistemas de forma associada. A solução de sistemas aparece vinculada a escrita matricial, e é comum que se solicite a conversão de registros, de sistemas lineares para a escrita matricial e vice-versa. Neste capítulo a matriz passa a existir *em função* dos sistemas lineares. Da mesma forma, o cálculo do determinante surge como ferramenta para resolução desses sistemas e como exigência para aplicação da Regra de Cramer. Além disso, dos 41 problemas propostos no capítulo, nenhum traz vínculo com uma situação de aplicação que seja externa à Matemática. Em relação à exploração de conversões, temos:

Figura 6.2 – Conversões de registro em IEZZI (1980), cap. 4 – Sistemas lineares

I) No campo das matrizes: II) No campo dos sistemas de equações lineares:

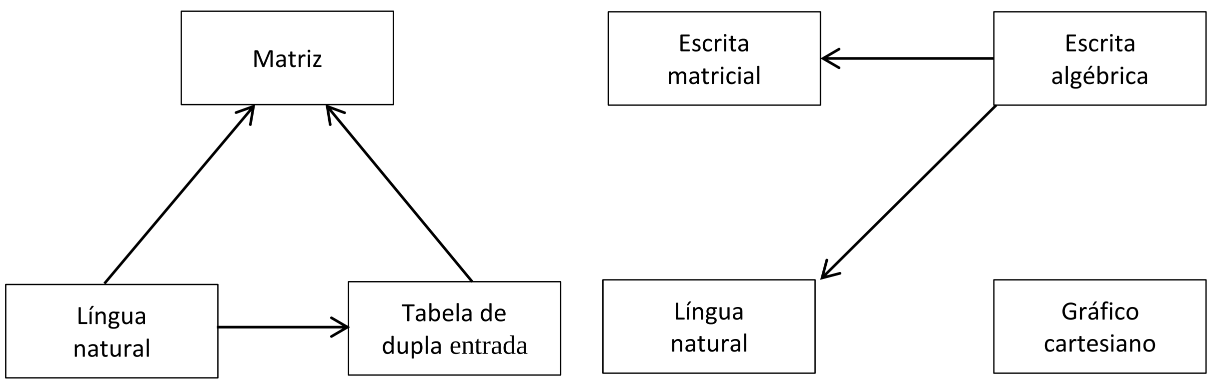


Em termos de matrizes e suas representações, o livro de Pierro Netto (1993) traz uma abordagem semelhante ao de Iezzi e Dolce (1980). O capítulo "3 – Matrizes" utiliza o registro de tabela de dupla entrada em duas ocasiões: quando apresenta a noção de matriz e quando mostra a operação de multiplicação de matrizes.

O capítulo tem 98 exercícios propostos; destes, 17 são testes extraídos de vestibulares da época e 14 são oferecidos a título de atividade complementar. Um destaque é a exigência, em dois problemas, da conversão de registro de linguagem natural para a representação matricial. Mesmo nos casos em que a tabela de dupla entrada é utilizada, ela aparece como resultado da conversão de uma descrição do problema em língua natural. A conversão entre registros de matriz e de sistemas lineares também aparece neste capítulo, como parte da explicação sobre matriz inversa – seu aprofundamento, contudo, se dará mais tarde. Neste capítulo, portanto, observamos as seguintes conversões:

Figura 6.3 – Conversões de registro em PIERRO NETTO (1993), cap.3 - Matrizes

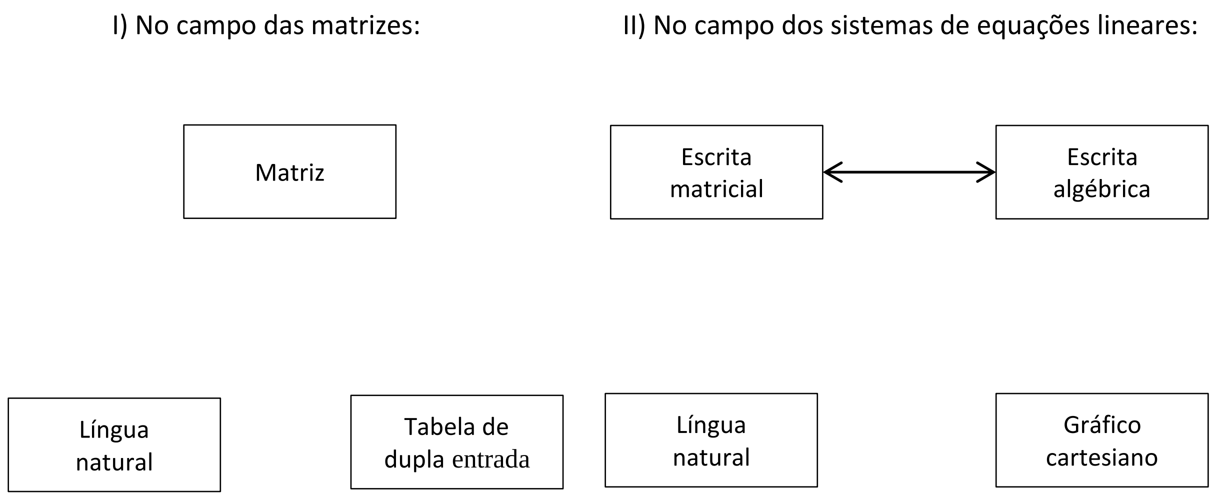
I) No campo das matrizes: II) No campo dos sistemas de equações lineares:



Dos três livros avaliados, o de Pierro Netto é o único a trazer um capítulo dedicado ao estudo de determinantes. Além de apresentar, de forma prática, os algoritmos envolvidos no cálculo de determinantes para matrizes 2×2, 3×3 e $n \times n$, o capítulo "4 – Determinantes" apresenta nove propriedades dos determinantes. Como capítulo de apoio, no entanto, ele é fechado dentro do registro de representação semiótica de matrizes e não traz – nem exige – conversão para outros tipos de registro.

O capítulo "5 – Sistemas lineares", por sua vez, explora a matriz associada a um sistema para permitir sua resolução com as operações que caracterizam as matrizes. Nesse capítulo, ao contrário do que pudemos observar no de matrizes, não há, entre os 81 exercícios propostos, nenhum que exija outras conversões de registros que não as entre a escrita matricial e o sistema de equações lineares. Em relação às conversões, houve um recuo:

Figura 6.4 – Conversões de registro identificadas em PIERRO NETTO (1993) – Cap. 5 – Sistemas lineares



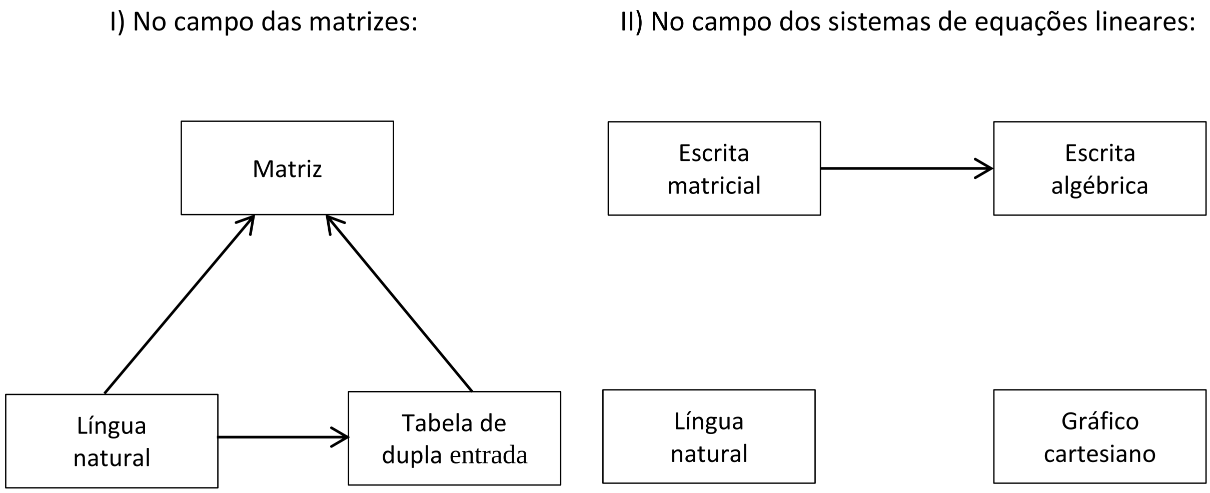
De produção mais recente – 2009 –, o livro "Matemática no Ensino Médio – 2.ª série", de Goulart, também explora, para conceituação de matriz, as tabelas de dupla entrada. Como nos outros dois livros estudados, este também utiliza as tabelas para apresentar sentido à multiplicação de matrizes.

O uso de linguagem natural é limitado aos textos explicativos e se estendem aos problemas propostos em quatro problemas. Em dois deles, ela é combinada com o registro de tabela de dupla entrada; nos outros dois, ela aparece vinculada à escreita matricial.

Comparado com o total de exercícios, é um número bastante reduzido - o capítulo traz 92 problemas e mais 25 testes de vestibulares e concursos.

Em relação às possibilidades de conversão possíveis, temos o seguinte quadro:

Figura 6.5 – Conversões de registro identificadas em GOULART (2009), cap. 2 – Matrizes



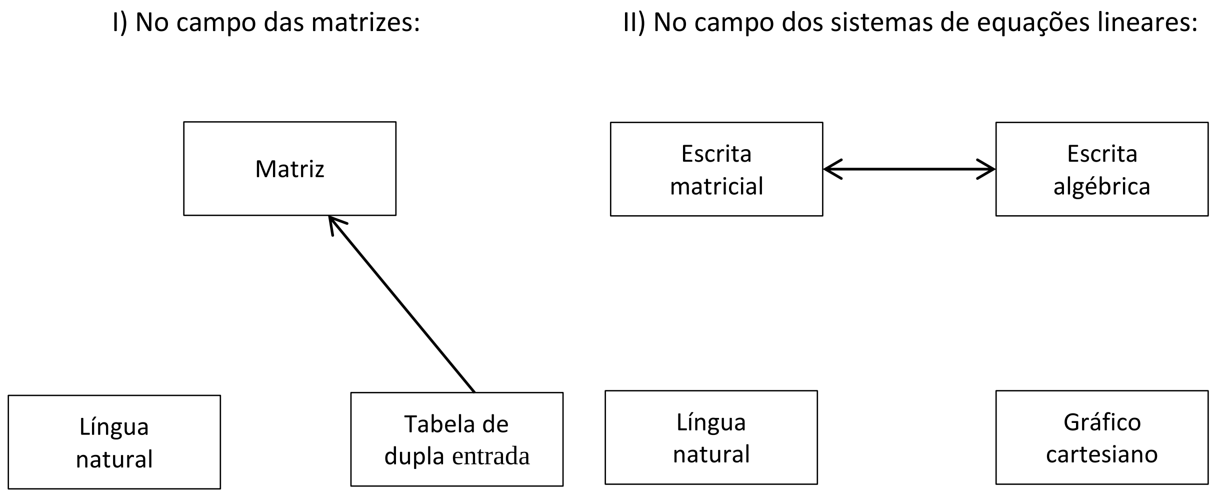
Já em relação ao capítulo "3 – Sistemas lineares e determinantes", o livro de Goulart inicia explorando situações de conversão de linguagem natural para sistemas de equações lineares. Em seguida, ao apresentar as técnicas de resolução de sistemas, o autor vincula o registro de representação semiótica de sistema linear ao de matriz. No mesmo capítulo, podemos observar problemas que, a partir de uma tabela de dupla entrada fornecida, exigem a construção e a resolução de sistemas de equações lineares.

No texto de Goulart, o determinante também é apresentado como ferramenta para a resolução de sistemas de equações lineares e vincula-se em particular ao uso da Regra de Cramer.

O capítulo 3 do livro de Goulart traz 172 exercícios propostos, mais 30 testes de exames e concursos. Destes, dois utilizam tabela de dupla entrada; outros dois exigem a conversão de registros em linguagem natural para o de sistemas lineares.

O balanço do capítulo, em termos de exploração de conversões de registro, é mostrado a seguir.

Figura 6.6 – Conversões de registro identificadas em GOULART (2009), cap. 3 – Sistemas lineares e determinantes



De forma geral, os três livros avaliados, de três épocas distintas, mostraram explorar de forma tímida as possibilidades oferecidas pela conversão de registros de representação semiótica no trato com o objeto matemático matriz. É particularmente notável que nenhum dos três tenha se aproveitado da possibilidade de apresentar o sistema de equações lineares por meio de sua representação gráfica.

Quanto à exploração de recursos tecnológicos de informática e comunicação (TIC), o único livro que faz referência é o de Goulart – algo esperado, já que os outros são anteriores à popularização dos computadores pessoais e da Internet. No entanto, o texto carece de atividades de desenvolvimento das habilidades de uso da tecnologia.

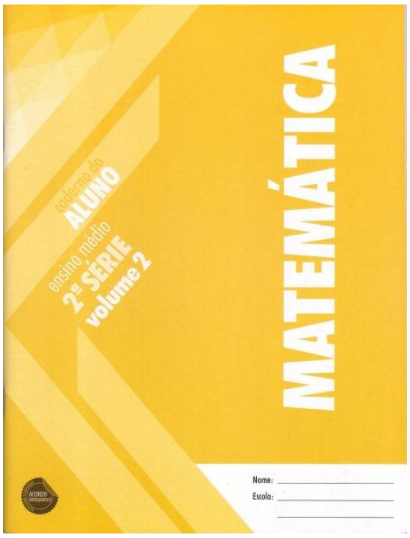
6.4.1 Uma abordagem complementar: Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Desde 2008, a rede pública de ensino básico do Estado de São Paulo têm recebido material de estudo complementar, na forma de cadernos do tipo brochura. Eles integram o Projeto São Paulo faz Escola, criado em 2007 como instrumento para criar uma base curricular comum para o Ciclo II do Ensino Fundamental (5.ª a 8.ª séries) e o Ensino Médio.

Tendo como autores Nílson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo e Walter Spinelli, os cadernos – um para o professor e outro para o aluno, por bimestre e por disciplina – trazem “sequências didáticas e sugestões de trabalho, nas quais o professor pode se basear para que desenvolva o conteúdo previsto” (SÃO PAULO, 2011).

Os cadernos do professor foram entregues em 2008; no ano seguinte, uma versão revisada foi distribuída. Os cadernos do aluno, por sua vez, começaram a ser distribuídos em 2009, e uma nova edição revisada tem previsão de entrega para o início do ano letivo de 2011.

Figura 6.6 – Projeto São Paulo Faz Escola – Caderno do Aluno – Ensino Médio – 2.a série – Volume 2 (2010)



Nesta avaliação, utilizamos o caderno do professor em sua edição revisada de 2009 e o caderno do aluno distribuído em 2010 – em especial, os cadernos do Ensino Médio para a 2.ª série, volume 2, que tratam do conteúdo matrizes e sistemas lineares, e os do Ensino Fundamental – 7.ª série/8.º ano – Volume 3, que apresenta os sistemas de equações lineares.

Cadernos diferentes

A primeira observação sobre os cadernos do professor e do aluno é que são diferentes. O caderno do professor não é uma cópia do caderno do aluno, acrescido das respostas aos exercícios propostos, como é o caso dos livros didáticos em geral.

O caderno do professor do Projeto São Paulo faz Escola para o 2.º bimestre da 2.ª série do Ensino Médio aborda os seguintes conteúdos: Matrizes – tabelas com significados; Matrizes: recursos para codificar; Sistemas lineares em situações-problema; e Resolução e discussão de sistemas lineares.

Em sua "Orientação geral sobre os cadernos", este caderno do professor traz a mensagem de que "as inovações pretendidas" com este material

> referem-se à forma de enfoque destes temas (...). Em cada abordagem, busca-se evidenciar os princípios norteadores do presente currículo, destacando-se a contextualização dos conteúdos, as competências pessoais envolvidas, especialmente as relacionadas à leitura e à escrita matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática (SÃO PAULO, 2009b, p.8).

Os temas contemplados pelo caderno do professor são apresentados na forma de situações de aprendizagem. Cada situação de aprendizagem traz uma relação de atividades e, para cada atividades, problemas correlatos. Além de listar os conteúdos e os temas abordados, cada situação de atividade indica, para o professor, as competências e as habilidades que se quer desenvolver nos alunos.

O primeiro tópico, "Matrizes: diferentes significados", aborda diferentes registros de representação semiótica das matrizes, como forma de ilustrar suas operações. Em uma atividade, a adição de matrizes é apresentada por meio de translações de polígonos no plano cartesiano. Para a resolução dos problemas, as coordenadas dos pontos que formam os polígonos devem ser representadas na forma de matriz. As operações de translação dão origem a problemas do tipo "Escreva uma matriz Q, tal que M + Q = N", em que M é a matriz das coordenadas da posição original de um triângulo e N, a matriz da posição final.

Outros problemas introduzem exigências como a conversão de registros de representação semiótica, de tabela de dupla entrada para matriz (para, depois, introduzir a multiplicação entre matrizes); a conversão simultânea de texto e de tabela de dupla entrada para a notação matricial; e exemplos de aplicação de matrizes, como na fotografia digital (por meio dos *pixels* – pontos que formam a imagem) e na tomografia.

A situação de aprendizagem 2, do mesmo caderno, explora a "produção de desenhos a partir da união de pontos no plano". No caso, o caderno associa os índices dos elementos de uma matriz à atividade de ligar pontos numerados num plano – por exemplo, se o elemento a_{ij} de uma matriz M for igual a 1, então devemos ligar, com um segmento de reta, os pontos i e j.

Os sistemas lineares começam a ser abordados na situação de aprendizagem 3. Alguns problemas partem de um texto descritivo, o que implica na conversão de registro de representação, de linguagem natural para o algébrico (na forma de um sistema de equações lineares). Outros fornecem como subsídio uma tabela de dupla entrada. A resolução se faz por meio dos métodos de adição, substituição ou comparação, ou por escalonamento.

O uso de matrizes para resolução de sistemas lineares aparece na quarta e última situação de aprendizagem. Nela, o caderno confronta dois métodos de resolução de sistemas lineares – escalonamento e Regra de Cramer – e não esconde a preferência pelo primeiro:

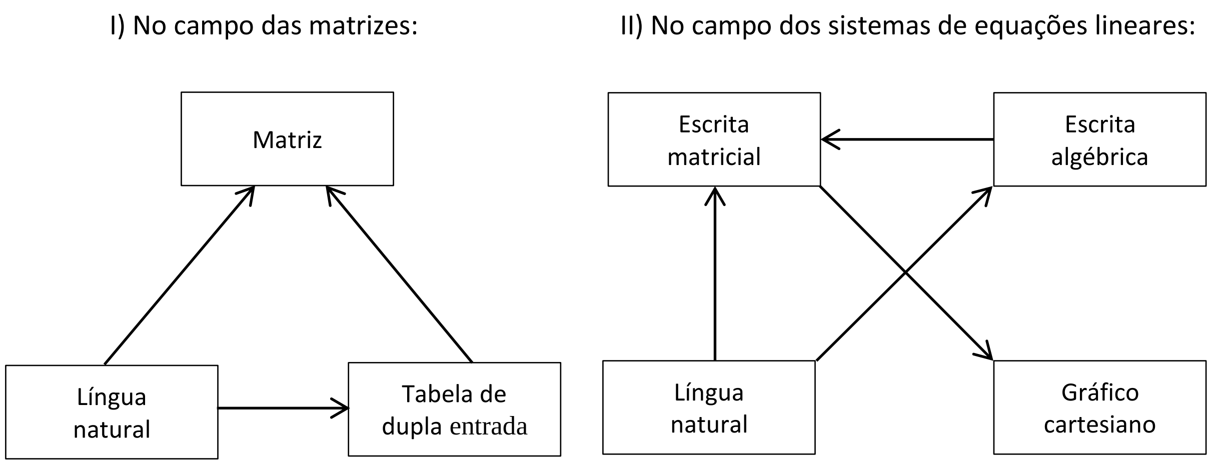
> Enquanto no método de Cramer o aluno segue uma rotina determinada – montagem e cálculo dos determinantes, e divisão entre eles – no método do escalonamento o aluno se vê envolvido em avaliar possibilidades e escolher estratégias, adotando, dessa forma, uma postura que o remete à mobilização de habilidades mais elaboradas e valorizadas na aprendizagem matemática (SÃO PAULO, 2009b, p. 37).

O texto continua, afirmando que "entre os métodos estudados, apenas o método do escalonamento permite a discussão de qualquer sistema, sem restrições".

Apresentado simplesmente como um número associado a uma matriz, o determinante surge no caderno do professor como um instrumento necessário para o emprego da Regra de Cramer na resolução de sistemas lineares. Mas o material traz também uma outra utilização do determinante, para cálculo de área de polígonos representados no plano cartesiano – uma variação da técnica de cálculo de área por composição e decomposição.

No que diz respeito às conversões de registros de representação, o caderno do professor explora diversas possibilidades, algumas utilitárias, outras lúdicas (como a atividade de ligar pontos). A utilização de matrizes para produzir figuras geométricas no plano cartesiano também abre uma possibilidade inédita nas outras obras avaliadas; por outro lado, o material não faz uso, na discussão de sistemas lineares, da representação gráfica desses sistemas no plano cartesiano. O caderno apresenta a seguinte configuração:

Figura 6.7 – Conversões de registro identificadas em SÃO PAULO (2009b), vol. 2



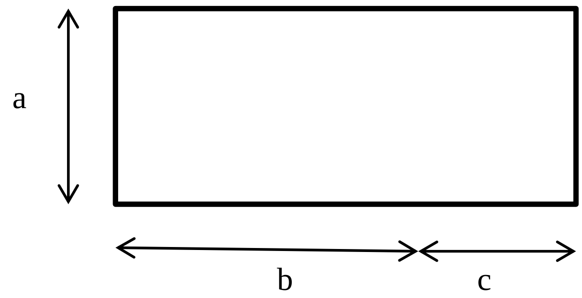
O caderno do aluno contém as questões discutidas no caderno do professor. Ao todo, são 38 problemas – 33 ao longo do texto, quatro oferecidos como “lição de casa” e um desafio. A proporção entre problemas contextualizados e descontextualizados também chama atenção: dos 15 problemas da situação de aprendizagem 1, todos estão inseridos em uma contextualização, seja interna ou externa à Matemática; na situação de aprendizagem 2, todos os quatro problemas são contextualizados; na situação 3, há oito problemas, todos contextualizados; e, dos 10 problemas apresentados na situação 4, cinco são inseridos em contextos – os que não são contextualizados pedem a resolução de sistemas lineares.

No Ensino Fundamental

O tema dos sistemas de equações lineares são apresentados aos alunos do Ensino Fundamental nos cadernos da 7.ª série/8.º ano, volume 3. Eles tratam dos conteúdos relacionados à equação do 1.ºgrau por meio de quatro situações de aprendizagem. O objetivo manifesto dos autores, de acordo com a introdução, é dar ao aluno “(...) a oportunidade de ampliar o repertório de transposição entre linguagens, da língua escrita para a álgebra e vice-versa, e de definir estratégias de resolução para equações mais complexas” (SÃO PAULO, 2010a, p.3).

Na primeira situação, o aluno é apresentado a atividades que buscam relacionar grandezas com as letras comumente utilizadas na representação algébrica. Os primeiros problemas buscam levar o aluno a associar diferentes registros de representação, como a geometria, a língua natural e a álgebra, em problemas como os seguintes:

1. Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase: “X reais a menos que Y reais é igual a 40 reais”.
2. Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão X= 5Y fornece.
3. Escreva uma expressão, com as letras indicadas na figura, para a área do retângulo



Ao fim desta situação de aprendizagem são apresentados diversas equações de 1.º grau, para que o aluno resolva por meio da heurística, sem utilizar as técnicas algébricas aprendidas na 6.ª série (que se baseia na "estratégia da balança" para ilustrar a equivalência dos lados de uma equação). Alguns problemas também exigem que o aluno converta a informação de uma tabela de dupla entrada para um registro de representação algébrico.

A situação de aprendizagem 2 apresenta as formas de utilização de coordenadas cartesianas por meio de exemplos como o guia de ruas, o jogo de batalha naval e as transformações no plano (translação e reflexão). Ela fornecerá alguns dos subsídios para a situação de aprendizagem 3, que trata especificamente dos sistemas de equações lineares.

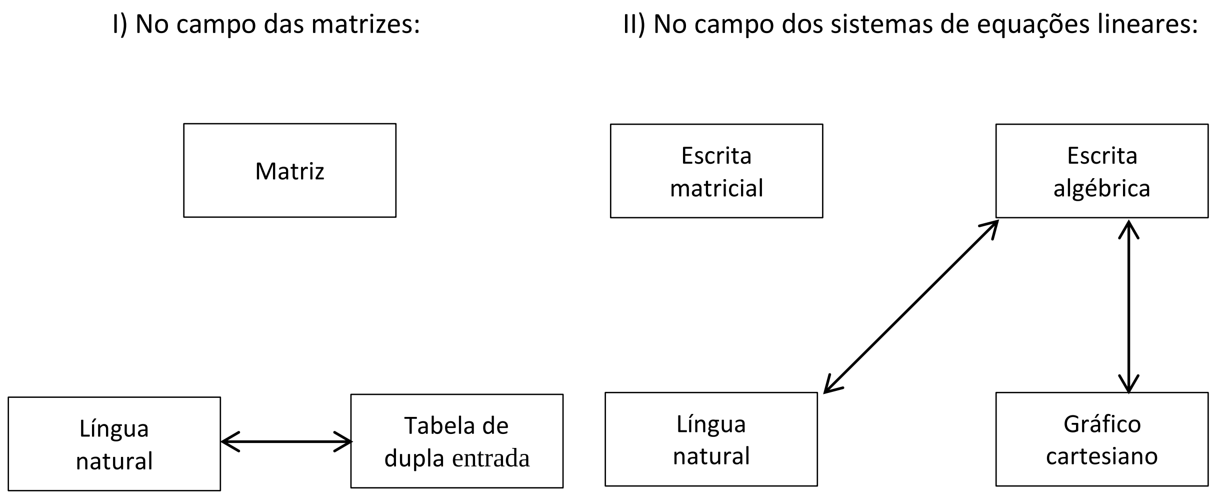
A situação de aprendizagem 3 dá início à abordagem dos sistemas de equações lineares solicitando que o aluno trabalhe com conversões entre registros de representação. Por exemplo, a partir do enunciado em língua natural "A soma das idades de João e Maria é 28 anos. Qual é a idade de cada um deles?", o primeiro problema pede que o aluno escreva uma equação para o problema, construa uma tabela de dupla entrada com as possíveis soluções e repita os passos para enunciados alternativos, derivado do primeiro.

Para resolução de equações, a "estratégia da balança" é resgatada também na 7.ª série. No entanto, ela serve aqui para apresentar os métodos utilizados na resolução de sistemas de equações – a saber, o método de substituição e o método da adição. (Essas duas técnicas são limitadas, nos cadernos do Ensino Fundamental, à resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.)

Nas últimas atividades da situação de aprendizagem 3, o aluno é levado a construir tabelas com os resultados das equações do sistema e a representá-los num gráfico cartesiano. De acordo com os autores, "a construção do gráfico das equações de um sistema vai ajudar o aluno a compreender melhor quando o sistema é possível e determinado ou intederminado e impossível" (SÃO PAULO, 2009a, p.38).

No contexto da representação gráfica das soluções de equações lineares, a questão sobre a união dos pontos no gráfico é apresentada na forma de problema. Uma vez que os pontos que representam as respostas parecem estar alinhados no gráfico, os autores admitem que eles podem ser representados por uma reta, desde que o problema não esteja restrito ao domínio dos números inteiros. Dessa forma, a interseção entre as retas que representam as possíveis soluções de cada equação do sistema indicará a solução do sistema. Nas duas últimas atividades da situação de aprendizagem 3, o aluno é levado a classificar sistemas lineares com base nos gráficos de suas equações, e a resolver sistemas para, depois, construir a tabela e o gráfico das equações de cada sistema. As conversões identificadas nos cadernos do Ensino Fundamental que tratam de sistemas de equações lineares são as seguintes:

Figura 6.8 – Conversões de registro identificadas em SÃO PAULO (2009a), vol. 3



Note que, no caso do conteúdo para o Ensino Fundamental, o registro de matriz não aparece. Além disso, admitimos que a conversão de gráfico cartesiano para sistema de equações lineares se dá quando um problema fornece o gráfico e solicita a classificação, com base no tipo de solução, do sistema de equações lineares que representa.

7 CONCLUSÕES

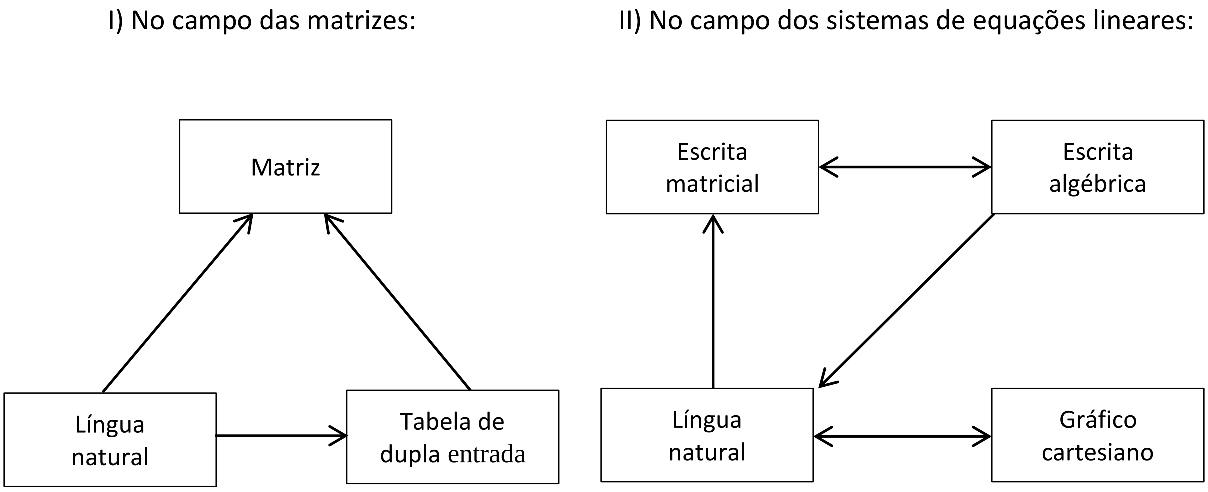
Como foi visto na seção 4.3, Duval define semiose como “apreensão ou produção de uma representação semiótica”, e noese como o “ato cognitivo”, tal como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Sua conclusão é de que “não existe noese sem semiose e é a semiose que determina as condições de possibilidade e prática da noese” (DUVAL, 1995, p.4).

Mais significativa é a constatação de que a noese “está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes” (DUVAL, 2003, p.22). Isto porque, como constatou o pesquisador, “passar de um registro ao outro não é somente mudar de modo de tratamento; é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto”. É a articulação dos registros, salienta ele, que dá a condição de acesso para a compreensão em matemática. Duval afirma que a conversão costuma não chamar a atenção, como se fosse uma atividade lateral, mas é ela que aparece como a atividade de transformação representacional fundamental. “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro” (DUVAL, 2003, p.21).

Se a representação semiótica determina as condições de possibilidade da apreensão conceitual de um objeto, pode-se afirmar, com base nas observações realizadas, que os meios pelos quais tem-se dado a apreensão do objeto matriz sofreu poucas mudanças ao longo de quase 30 anos de ensino e aprendizagem de Matemática. No entanto, a abordagem proposta pelos cadernos da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo pode indicar o surgimento de um ponto de inflexão.

De forma geral, pode-se afirmar, com base nos livros didáticos examinados, que muitas possibilidades de exploração das conversões entre registros de representação semiótica – conversões essas que abririam caminhos para uma interpretação mais completa e diversificada do objeto estudado – têm sido minimizadas ou ignoradas. A figura a seguir mostra, de forma condensada, os tipos e sentidos de conversão encontrados nos três livros didáticos avaliados neste estudo, tanto no campo das matrizes quando no dos sistemas de equações lineares.

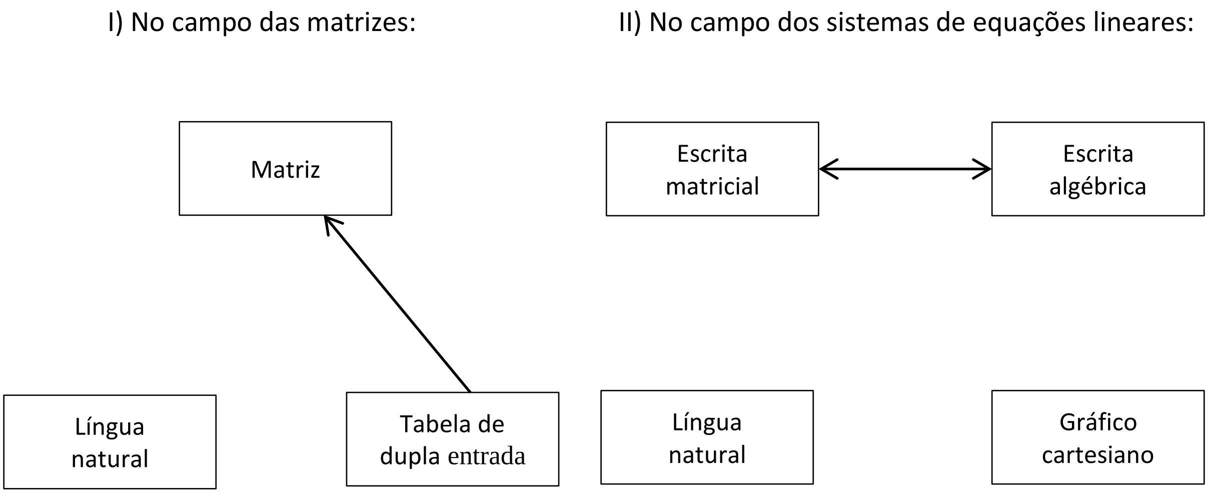
Figura 7.1 – Conversões de registro encontradas nos livros didáticos – cap. Matrizes



Observando o sentido das conversões de registro propostas pelos livros didáticos, nota-se, no campo das matrizes, a preferência pelo sentido único que parte dos registros de tabela de dupla entrada e da lígua natural em direção ao registro de matriz. Mais raro, contudo, é perceber nos livros didáticos conversões no sentido inverso, que partem da matriz. Por outro lado, como muitas vezes as matrizes são apresentadas em associação com sistemas de equações lineares, as conexões entre as representações são mais evidentes.

Nos capítulos que tratam exclusivamente de sistemas lineares, a exploração de conversões entre registros pelos livros avaliados mostrou-se ainda mais restrita. São abordados três tipos de representação: tabela de dupla entrada, sistema de equações lineares e escrita matricial. Destes, apenas os dois últimos aparecem em conversões de mão dupla.

Figura 7.2 – Conversões de registro encontradas nos livros didáticos – cap. Sistemas lineares



Podemos observar que, neste caso, a abordagem do objeto matriz, em relação a suas possíveis representações, torna-se ainda mais pobre. As representações em gráfico cartesiano e língua natural aparecem isoladas no diagrama, ou seja, não foram verificadas nos capítulos avaliados. O isolamento da representação em linguagem natural pode indicar a falta de exploração de uma possível e desejável articulação entre leitura e interpretação de textos e a escrita matemática. Nesse aspecto, é preciso incluir na discussão desses resultados a matriz de competências do Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, do Ministério da Educação, em seu Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Conforme BRASIL (2011), a matriz de referência do Enem é organizada em cinco “eixos cognitivos”, comuns a todas as áreas de conhecimento:

I. Dominar linguagens
II. Compreender fenômenos
III. Enfrentar situações-problema
IV. Construir argumentação
V. Elaborar propostas

Dentro da matriz de referência construída para a área de Matemática e suas Tecnologias, o Enem prevê 30 habilidades, identificadas de H1 a H30. Essas habilidades são distribuidas por sete áreas de competência, a saber:

1. Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais
2. Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela
3. Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano
4. Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano
5. Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
6. Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsões de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

7. Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Em termos de habilidades e competências, há um enfraquecimento nos instrumentos que permitiriam o desenvolvimento de competências como as de domínio de linguagens e enfrentamento de situações-problema, ao passo a manupulação de tabelas – uma habilidade associada à area 6 – sai fortalecida.

Os cadernos do Projeto São Paulo faz Escola foram elaborados com base na matriz de competências do Enem. Segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio, de 2008, com prioridade para a competência da leitura e da escrita. "A ampliação das capacidades de representação, comunicação e expressão está articulada ao domínio não apenas da língua mas de todas as outras linguagens" (SÃO PAULO, 2008, p.16).

No que diz respeito ao objeto matriz, os cadernos do projeto exploram formas variadas de representação, que se articulam por meio da associação de diversos registros. Tal como os livros didáticos, o material produzido pelo projeto preserva, em suas situações de aprendizagem, problemas que exigem a conversão de registros entre sistemas de equações lineares e a escrita matricial. A descrição de problemas em linguagem natural ganha destaque, pois é o ponto inicial de conversões que levam a tabelas de dupla entrada, matrizes e sistemas de equações lineares.

Um diferencial deste material – e que talvez indique novas possibilidades de exploração da conversão de registros associados ao conceito de matriz – é a inclusão, pelos autores, de figuras geométricas que podem ser desenhadas no plano a partir das informações contidas em matrizes. No entanto, a representação de sistemas de equações em gráficos cartesianos – que permitiria análises mais ricas desses sistemas – não foi incluída.

Com isso, apesar de a abordagem proposta pelo Projeto São Paulo faz Escola se distinguir por aspectos originais – notadamente, o da inclusão de figuras geométricas –, ela não se diferencia substancialmente da oferecida pelos livros didáticos em seus capítulos sobre matrizes. Ambas exploram seis possibilidades de conversão de registros de representação, e ambas deixam de fora os gráficos cartesianos. Nos livros, a linguagem natural conserva uma relação de duas vias com o registro de tabelas de dupla entrada.

Curiosamente, na comparação dos conteúdos do Projeto São Paulo faz Escola que encontramos na 7.ª série do Ensino Fundamental e na 2.ª série do Ensino Médio, notamos que não só o registro de representação do gráfico cartesiano é utilizado de forma efetiva, como – à exceção das conversões de e para o registro de matriz, e entre língua natural e gráfico cartesiano – todas as possibilidades de conversão são cobertas, como mostra a figura 6.8.

Por que o conteúdo apresentado na 7.ª série/8.º ano pelo material do Projeto São Paulo faz Escola explora de modo mais completo as possibilidades de conversão de registro de representação, enquanto o conteúdo do Ensino Médio reproduz as deficiências de conversão que encontramos na amostra de livros didáticos de três décadas? Nossa conclusão é que, no Ensino Médio, tanto os livros didáticos como os cadernos da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo evitam tratar da representação gráfica de sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

As razões para isso podem estar nos pré-requisitos matemáticos necessários para essa representação. Enquanto um sistema com duas equações e duas incógnitas pode ser representado no plano cartesiano, um sistema com três equações e três incógnitas exige, para sua representação, o espaço. Não apenas isso: é preciso que, do plano definido por ordenada e abscissa, emerja um terceiro eixo, o eixo z, perpendicular ao plano. O teorema que mostra que esse eixo é perpendicular tem como base a Geometria Analítica. No entanto, uma prova pode ser elaborada com base no conteúdo apresentado no Ensino Médio, como mostra o Apêndice C. Dessa forma, a representação gráfica de sistemas de equações lineares com três equações e três incógnitas poderia ser apresentada como conteúdo do Ensino Médio, favorecendo a compreensão do conteúdo relacionado a matrizes.

Apêndice A – Algoritmo chinês para resolução de sistemas

Em *A History of Chinese Mathematics*, o historiador Jean-Claude Martzloff encontra nos escritos da China antiga um surpreendente algoritmo para resolução simultânea de equações. Conhecido como Método Fangcheng, este algoritmo toma um capítulo inteiro do livro "Jiuzhang Suanshu", ou "Nove capítulos da arte matemática" (MARTZLOFF, 1987;p.249).

O "Jiuzhang Suanshu" é um dos principais registros históricos de como os chineses da Antigüidade praticavam a matemática e julga-se ter sido escrito entre 208 AC e 8 DC. Martzloff explica que o termo "fangcheng" não tem tradução precisa: desde o século XIX, a palavra é entendida como "equação"; em geral, contudo, "fang" significa "quadrado", e as técnicas Fangcheng teriam esse nome por exigirem o arranjo de números na forma de um quadrado (ou retângulo, já que "fang" quer dizer tanto "quadrado" como "retângulo").

Os problemas práticos de que tratam o Método Fangcheng podem ser resumidos no seguinte problema encontrado no "Nove capítulos":

> Supõe-se que temos 3 pacotes de cereal de alta qualidade, 2 pacotes de cereal de qualidade média e 1 pacote de cereal de baixa qualidade, totalizando 39 dou de grãos. Também se supõe termos 2 pacotes de cereal de alta qualidade, 3 de qualidade média e 1 de baixa qualidade, totalizando 34 dou; 1 pacote de alta qualidade, 2 de qualidade média e 3 de baixa qualidade, totalizando 26 dou de grãos. Pergunta-se: quantos dou de grãos há em 1 pacote de cereais de alta, média e baixa qualidade, respectivamente?

O problema, que algebricamente pode ser transcrito como

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

deve ser representado, segundo o método chinês, como

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Em seguida, deve-se multiplicar todos os termos da coluna central (2, 3, 1, 34) pelo primeiro termo da coluna direita (3), obtendo-se (6, 9, 3, 102) (passo A). Então, subtrai-se o número à direita de cada um dos números do centro (passo B), obtendo-se, no centro, (6 – 3 = 3, 9 – 2 = 7, 3 – 1 = 2, 102 – 39 = 63); repete-se o passo B sucessivamente até que o primeiro número da coluna central seja eliminado. Repete-se os passos A e B, agora entre as colunas 1 e 3, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 1. Por último, repete-se os passos A e B entre as colunas 1 e 2, eliminando-se assim o segundo número da coluna 1.

O resultado será facilmente reconhecido como uma matriz na forma triangular:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

onde a primeira incógnita pode ser facilmente determinada pela divisão z = 99/36. As outras incógnitas são determinadas por substituições sucessivas.

Martzloff nota que este é, essencialmente, o método desenvolvido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ainda que este último dificilmente tivesse tido contato com os documentos chineses. Afinal, o problema que levaria Gauss ao algoritmo chinês era de natureza bastante diferente – a saber, a teoria do movimento de corpos celestes e o uso do método dos mínimos quadrados.

Apêndice B – Demonstração de que ax + by = c é uma reta

Para mostrar que a expressão algébrica ax + by = c é uma reta no plano cartesiano, vamos estudar os seguintes casos:

Valor de a	Valor de b	Valor de c	Caso
a≠0	b≠0	c = 0	1
		c≠0	2
	b=0	c = 0	3
		c≠0	4
a=0	b≠0	c = 0	5
		c≠0	6
	b=0	c = 0	7
		c≠0	8

Caso 1: a ≠ 0, b ≠ 0, c = 0

Tomemos a expressão alegébrica $ax + by = 0$. É fácil constatar que a origem O = (0,0) pertence ao gráfico de ax + by = 0. Como uma reta é definida por dois pontos no plano, podemos obter um segundo ponto A pertencente ao gráfico da seguinte forma:

Dividimos a expressão $ax + by = O$ por b, obtendo

$$\frac{a}{b}x + y = 0$$

Em seguida, isolamos y:

$$y = -\frac{a}{b}x$$

Quando $x = 1, y = -\frac{a}{b}$. Temos, portanto, que

$$A = (1, -\frac{a}{b}) \in Graf$$

Qualquer ponto $P = (x_P, y_P)$ que satisfaça $ax + by = 0$ (e, portanto, pertença ao gráfico) estará alinhado com O e A. Vamos usar um gráfico para ilustrar a situação, chamando de M o ponto (0,1) e de N o ponto $(0, x_P)$.

Queremos mostrar que, dado um ponto $P = (x_P, y_P) \in Graf$,

$$\Delta OMA \sim \Delta ONP$$

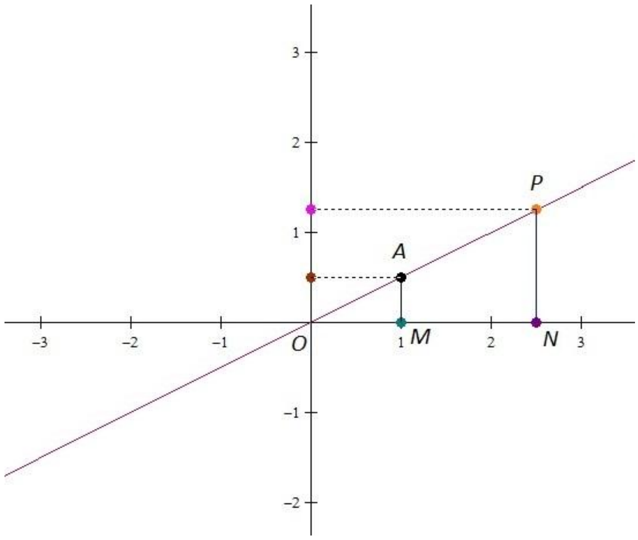


Figura XX – Gráfico da função $ax + by = O$

Como P satisfaz a equação, então

$$\frac{a}{b}x_P + y_P = 0$$

Isolando y_P, temos

$$y_P = -\frac{a}{b}x_P$$

Assim, vale a proporção

$$\frac{1}{x_P} = \frac{-\frac{a}{b}}{y_P}$$

E podemos concluir daí que

$$\Delta OMA \sim \Delta ONP$$

Caso 2: a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0

Como b ≠ 0, podemos dividir escrever $ax + by = c$ dividindo cada parcela por b:

$$\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$$

Isolando-se y, temos

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Quando x = 0, temos que $y = \frac{c}{b}$. Logo, o ponto $N = \left(0, \frac{c}{b}\right) \in Graf.$

Como a ≠ 0, também podemos dividir $ax + by = c$ por a:

$$x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$$

Quando y = 0, teremos $x = \frac{c}{a}$. Portanto, o ponto $Q = (\frac{c}{a}, 0) \in Graf.$

Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto qualquer do gráfico, e $M = (x_P, 0)$ um ponto no eixo x. Queremos mostrar que

$$\Delta PQM \sim \Delta NQO$$

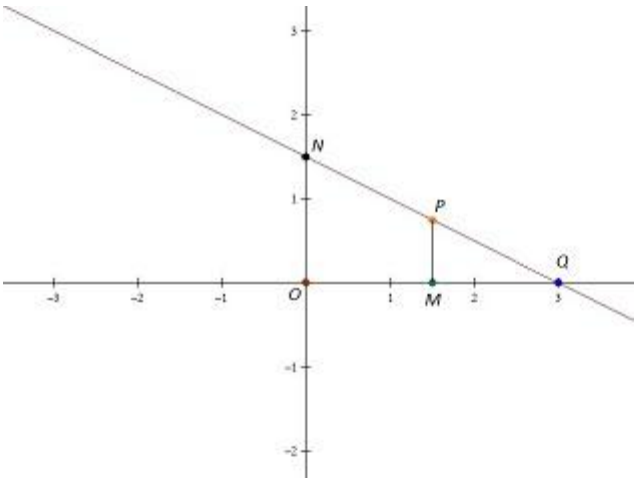


Figura XX – Gráfico da função $ax + by = c$

Como P ∈ $Graf$, então podemos escrever

$$ax_P + by_P = c$$

Isolando y, temos

$$by_P = c - ax_P$$

Dividindo as parcelas da equação por c, temos

$$\frac{b}{c}y_P = 1 - \frac{a}{c}x_P$$

Mas

$$\frac{b}{c}y_P = \frac{a}{c}(\frac{c}{a} - x_P)$$

E, portanto,

$$\frac{y_P}{\frac{c}{b}} = \frac{\frac{c}{a} - x_P}{\frac{c}{a}}$$

Logo,

$$\Delta PQM \sim \Delta NQO$$

Caso 3: a ≠ 0, b = 0, c = 0

Temos que $ax + by = c$. Neste caso,

$$ax = 0, \forall x$$

O gráfico será uma reta perpendicular ao eixo x, coincidente com o eixo y.

Caso 4: a ≠ 0, b = 0, c ≠ 0

Neste caso,

$$ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

Análogo ao caso 3, o gráfico será uma reta perpendicular ao eixo x, passando pelo ponto ($\frac{c}{a}$, 0).

Caso 5: a = 0, b ≠ 0, c = 0

Neste caso, temos que

$$by = 0 \Rightarrow y = 0$$

O gráfico será uma reta perpendicular ao eixo y, coincidente com o eixo x.

Caso 6: a = 0, b ≠ 0, c ≠ 0

Neste caso, temos que

$$by = c \Rightarrow y = \frac{c}{b}$$

O gráfico será uma reta, perpendicular ao eixo y e que passa pelo ponto $(0, \frac{c}{b})$.

Caso 7: a = 0, b = 0, c = 0

De fato, pois, como temos

$$ax + by = c$$

Substituindo a, b e c, obtemos

$$0 + 0 = 0$$

Caso 8: a = 0, b = 0, c ≠ 0

Não ocorre, pois, conforme mostra o caso 7, se a = 0 e b = 0,

$$0x + 0y = 0 + 0 = 0$$

E, portanto, c = 0.

Apêndice C - Prova da equação do plano α em $\mathbb{R}^3$

Queremos provar que a equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

com as constantes

$$\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (a \neq 0) \wedge (b \neq 0) \wedge (c \neq 0) = V$$

é a equação de um plano α em $\mathbb{R}^3$.

Prova

Seja α um plano em $\mathbb{R}^3$ e seja $B \in \alpha$ e $A \notin \alpha$ tais que $\overline{AB} \perp \alpha$, isto é, $\overline{AB} \perp \overline{BP}$, qualquer que seja $P \in \alpha$, $P \neq B$.

Sejam

$$B = (x_0, y_0, z_0)$$

$$A = (x_1, y_1, z_1)$$

$$P = (x, y, z)$$

Então temos que

$$\overline{AB} \perp \overline{BP} \iff \triangle ABP \text{ (retângulo em B)} \iff (AP)^2 = (AB)^2 + (BP)^2.$$

Mas

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (BP)^2$$

$$\begin{aligned}\iff (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &+ (z - z_0)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff x^2 - 2x\,x_1 + x_1^2 + y^2 - 2y\,y_1 + y_1^2 + z^2 - 2z\,z_1 + z_1^2 \\ &= x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2 + z_1^2 - 2z_0z_1 + z_0^2 + x^2 - 2x_0x \\ &+ x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 + z^2 - 2z_0z + z_0^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2x\,x_1 - 2y\,y_1 - 2z\,z_1$$
$$= -2x_0x_1 - 2y_0y_1 - 2z_0z_1 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 + zz_1 - x_0x_1 - y_0y_1 - z_0z_1 - x_0x - y_0y - z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x_1 - x_0) + y(y_1 - y_0) + z(z_1 - z_0) - x_0(x_1 - x_0) - y_0(y_1 - y_0) - z_0(z_1 - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x_1 - x_0) + y(y_1 - y_0) + z(z_1 - z_0) - x_0(x_1 - x_0) - y_0(y_1 - y_0) - z_0(z_1 - z_0) = 0$$

Fazemos

$$(x_1 - x_0) = a$$

$$(y_1 - y_0) = b$$

$$(z_1 - z_0) = c$$

$$y_0(y_1 - y_0) - z_0(z_1 - z_0) = -d$$

Assim, chegamos à conclusão que

$$x(x_1 - x_0) + y(y_1 - y_0) + z(z_1 - z_0) - x_0(x_1 - x_0) - y_0(y_1 - y_0) - z_0(z_1 - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \ \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA[16]

ABELARDO, Pedro. *Lógica para Principiantes*. São Paulo: Abril, 1973. (Coleção Os Pensadores – 7).

ALMEIDA, Fernando J. *Educação e Informática: os computadores na escola*. 3.a edição revista e ampliada. São Paulo: Cortez Editora, 2005.

ALTHOEN, Steven C., McLAUGHLIN Renate. Gauss-Jordan Reduction: A Brief History. The American Mathematical Monthly, Vol. 94, No. 2 (Fevereiro de 1987), págs. 130-142.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8.ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BARTHES, Roland. *Elementos de Semiologia*. 17.a edição. São Paulo: Cultrix, 2006.

BASHMAKOVA, Isabella, SMIRNOVA, Galina. *The beginnings and evolution of algebra*. Nova York (EUA): Cambridge University Press, 2000. (Dolciani Mathematical Expositions; n.º 23)

BORGES, Jorge L. *O Livro dos Seres Imaginários*. 1.ª reimpressão. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the history of mathematics*. Nova York (EUA): Springer-Verlag, 1999.

BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*. 1.a impressão em Paperback. Princeton (EUA): Princeton University Press, 1985.

________. *History of Analytic Geometry*. New York (EUA): Dover, 2004.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Ensino Médio. Brasília: MEC; SEMTEC, 2000.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN + Ensino Médio*: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

[16] De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas em Educação Anísio Teixeira. Matriz de Referência para o Enem 2009. Em <http:// www.enem.inep.gov.br/pdf/Enem2009_matriz.pdf>. Site acessado em 19.jan 2011. Brasília: MEC, 2011.

BRUMBAUGH, Douglas K., ROCK, David. *Teaching Secondary Mathematics*. 3.a edição. Nova Jersey (EUA): Lawrence Erlbaum Associates, 2006.

CASSIRER, Ernst. *Filosofía de las Formas Simbólicas – I*. 2.a edição (1.a reimpressão). México: Fondo de Cultura Económica, 2003a.

________. *Filosofía de las Formas Simbólicas – III*. 2.a edição (1.a reimpressão). México: Fondo de Cultura Económica, 2003b.

CAYLEY, Arthur. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley* (vol. II). Cambridge: University Press, 1889.

DIEUDONNÉ, Jean. *History of Functional Analysis*. New York (EUA): North-Holland,1981.

DORIER, Jean-Luc. *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory*. Historia Mathematica, n. 22, p.227-261, ago. 1995.

DUVAL, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus, 2003.

________. *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna (Suíça): Peter Lang, 1995.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 1.a reimpressão. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GOULART, Márcio Cintra. *Matemática no Ensino Médio*: 2.a série. 3.a edição. São Paulo: Scipione, 2009.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: 2.a série, 2.o grau. 7.a edição. São Paulo: Atual, 1980.

KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura e outros textos filosóficos*. São Paulo: Abril, 1974. (Coleção Os Pensadores – 25).

KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.

KOLMOGOROV, A.N.; YUSHKEVICH, A.P. (editores). *Mathematics of the 19th Century*. Biekhäuser Verlag, 1981.

LÉVY, Pierre. *A Inteligência Coletiva: Por uma antropologia do ciberespaço*. 5.ª edição. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

________. *As tecnologias da inteligência: o futuro da inteligência na era da informática*. 14.ª reimpressão. Rio de Janeiro: Editora 34, 2006.

MACHADO, Nílson J. *Matemática e Língua Materna: Análise de uma impregnação mútua*. 5.a ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MARTZLOFF, Jean-Claude. *A History of Chinese Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1987.

MUIR, Thomas. The theory of determinants in the historical order of development. London: McMillan and Co. Ltd., 1890. Versão digitalizada obtida na Universidade de Michigan (http://name.umdl.umich.edu/acm9341.0001.001)

PEIRCE, Charles S. *Semiótica*. 4.ª edição. São Paulo: Perspectiva, 2008.

PETTOFREZZO, Anthony J. *Matrices and Transformations*. EUA: Dover, 1978.

PIERRO NETTO, Scipione di. *Matemática*: Volume 2, 2.o grau. 6.a edição. São Paulo: Scipione, 1993.

ROGERS, David F., ADAMS, J.Alan. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. EUA: McGraw-Hill, 1976.

ROSZAK, Theodore. *O Culto da Informação: o folclore dos computadores e a verdadeira arte de pensar*. São Paulo: Brasiliense, 1988.

SANTAELLA, Lúcia. *O Que é Semiótica*. 9.a ed. São Paulo: Brasiliense, 1990.

SÃO PAULO. Projeto São Paulo faz Escola: Caderno do Professor – Ensino Fundamental – 7.ª série – volume 3. São Paulo: Secretaria da Educação, 2009a.

SÃO PAULO. Projeto São Paulo faz Escola: Caderno do Professor – Ensino Médio – 2.ª série – volume 2. São Paulo: Secretaria da Educação, 2009b.

SÃO PAULO. Projeto São Paulo faz Escola: Caderno do Aluno – Ensino Fundamental – 7.ª série – volume 3. São Paulo: Secretaria da Educação, 2010a.

SÃO PAULO. Projeto São Paulo faz Escola: Caderno do Aluno – Ensino Médio – 2.ª série – volume 2. São Paulo: Secretaria da Educação, 2010b.

SÃO PAULO. Site do Projeto São Paulo faz Escola. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2011. Em <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/spfe2009>. Acessado em 19.jan 2011.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. São Paulo: SEE, 2008. Disponivel em <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>. Acessado em: 19.jan.2011.