UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

LETÍCIA VIEIRA OLIVEIRA COSTA

**Números Reais no Ensino Fundamental:
Alguns Obstáculos Epistemológicos**

São Paulo

2009

LETÍCIA VIEIRA OLIVEIRA COSTA

Números Reais no Ensino Fundamental: Alguns Obstáculos Epistemológicos

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Dissertação apresentada como exigência parcial para
a obtenção do Título de mestre em Educação – Área
de Ensino de Ciências e Matemática sob a
orientação da Prof.^a Dr.^a Maria Cristina Bonomi
Barufi

São Paulo

2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catálogo na Publicação

Serviço de Biblioteca e Documentação

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3	Costa, Letícia Vieira Oliveira
C837n	Números reais no ensino fundamental: alguns obstáculos epistemológicos/ Letícia Vieira Oliveira Costa; orientação Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: s.n., 2009. 377p. ; tab.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Epistemologia 2. Matemática – Estudo e ensino 3. Ensino e aprendizagem 4. Ensino fundamental 5. Números reais I. Barufi, Maria Cristina Bonomi, orient.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Carlos e Sylvia,
pela dedicação e renúncia de suas vontades em prol das minhas;
À meu amigo e namorado Carlos,
pela paciência e pelo conforto nas horas necessárias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

À professora Maria Cristina, pela dedicação e paciência na realização desse trabalho.

Aos membros da douta Banca de Qualificação, pelas valiosas sugestões e contribuições. À professora Iole de Freitas Duck em especial pela ajuda e atenção dada à elaboração dos novos questionários. Ao professor Nilson José Machado por ter me inspirado a entrar no “mundo” da Epistemologia.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da FEUSP pela hospitalidade, pelo ensinamento de seus conhecimentos e por terem me dado a oportunidade de crescimento.

Aos meus familiares e amigos pelo carinho especial, pelas palavras de incentivo e por acreditarem que esse trabalho era possível.

*Face à realidade, o que julgamos saber
claramente ofusca o que deveríamos saber.*

Gaston Bachelard

RESUMO

Resultados em avaliações nacionais como Prova Brasil e Saeb dão indícios de que o ensino/aprendizagem de Matemática na Escola Básica tem sido deficiente. Na tentativa de entender como o aluno aprende para que o ensino ocorra de forma adequada a esse modo de construir o conhecimento, vários estudos têm sido realizados a respeito da Epistemologia do conhecimento. A Epistemologia de Gaston Bachelard afirma que a construção do conhecimento se dá com um movimento de ruptura frente ao conhecimento previamente estabelecido, com uma resistência à racionalização desse conhecimento denominado obstáculo epistemológico. O didata francês Brousseau traz a idéia de obstáculo epistemológico em Matemática como um obstáculo ligado à resistência de um saber mal adaptado e o vê como um meio de interpretar determinados dos erros recorrentes e não aleatórios cometidos pelos estudantes quando lhes são ensinados alguns conceitos matemáticos. A presente pesquisa teve por objetivo identificar obstáculos epistemológicos no ensino/aprendizagem de números reais por meio de questionários aplicados a alunos de 4ª série (ou 5º ano) a 8ª série (ou 9º ano) do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Epistemologia; obstáculo; obstáculo epistemológico; ensino/aprendizagem de Matemática; Números Reais.

ABSTRACT

Results in national evaluations as *Prova Brasil* and Saeb give indications of that education/learning of Mathematics in the Basic School has been deficient. In the attempt to understand how the students learn so that education occurs of adequate form to this way to construct the knowledge, some studies have been carried through regarding the knowledge's Epistemology. The Gaston Bachelard's Epistemology affirms that the construction of the knowledge occurs through a movement of rupture front to the knowledge previously established, with a resistance to the rationalization of this knowledge called epistemological obstacle. The French didata Brousseau brings the idea of epistemological obstacle to Mathematics as an obstacle to the resistance of one to a badly suitable knowledge and sees it as a way to interpret some of the recurrent and not random errors committed by the students when some mathematical concepts are taught to them. The present research had for objective to identify to epistemological obstacles in education/learning of real numbers by means of applied questionnaires the students of 4th to 8th grade.

Key-words: Epistemology; obstacle; epistemological obstacle; education/learning in Mathematics; Real Numbers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
OBJETO E PROBLEMA DA PESQUISA.....	13
OBJETIVOS	20
METODOLOGIA	21
CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
1.1 A EPISTEMOLOGIA DA CIÊNCIA DE BACHELARD	23
1.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO	28
1.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA HISTÓRIA DA CIÊNCIA	32
1.4 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA EDUCAÇÃO	32
CAPÍTULO 2 - ALGUNS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA MATEMÁTICA	36
2.1 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	37
2.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E A MATEMÁTICA.....	38
2.3 ALGUNS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS IDENTIFICADOS NA MATEMÁTICA	43
CAPÍTULO 3 - O FOCO DA PESQUISA	47
3.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	48
3.2 A NATUREZA DO INSTRUMENTO DE PESQUISA	56
3.3 SUJEITOS DA PESQUISA E SUAS CONDIÇÕES	59
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	60
4.1. NÚMEROS NATURAIS	61
4.2. NÚMEROS RACIONAIS.....	83
4.3. NÚMEROS INTEIROS.....	115
4.4. NÚMEROS IRRACIONAIS	130
4.5. NÚMEROS REAIS	138
4.6. SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS	144
CAPÍTULO 5 - OUTRA INTERPRETAÇÃO PARA OS RESULTADOS OBTIDOS.....	148

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	155
--	------------

ANEXOS.....	162
--------------------	------------

ANEXO 1 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL	163
ANEXO 2 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL	166
ANEXO 3 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO	170
ANEXO 4 – ESCALA DE MATEMÁTICA DA PROVA BRASIL	174
ANEXO 5 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO	183
ANEXO 6 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS I – 5ª SÉRIE OU 6º ANO.....	191
ANEXO 7 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS II – 5ª SÉRIE OU 6º ANO	197
ANEXO 8 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS INTEIROS – 6ª SÉRIE OU 7º ANO	201
ANEXO 9 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO	205
ANEXO 10 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO	209
ANEXO 11 – DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES COMPLETAS DOS QUESTIONÁRIOS	217
ANEXO 12 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS NATURAIS	218
ANEXO 13 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS I	261
ANEXO 14 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS II	286
ANEXO 15 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS INTEIROS	302
ANEXO 16 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS	319
ANEXO 17 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS REAIS	338

INTRODUÇÃO

OBJETO E PROBLEMA DA PESQUISA

Aprender uma disciplina como a Matemática é encontrar o seu sentido, quais são as questões que propõe a respeito do mundo, seus métodos, teorias e como seus conceitos ajudam o ser humano a compreender melhor a si próprio no mundo onde vive (Develay, 1996 apud Micotti, 1999). Para isso, algoritmos e técnicas não são suficientes. A apropriação dos números, e dos conteúdos matemáticos de modo geral se processou devido às necessidades, interesses e características de cada sociedade. Entretanto, o ensino da Matemática tem se tornado desinteressante e problemático. Os alunos desconhecem como o homem chegou a determinado conhecimento, como esse conhecimento foi desenvolvido pelos povos, que problemas levaram-nos a criá-lo, que transformações sofreu ao longo do tempo e assim, sem a concepção dos conceitos em sua essência, aprender Matemática tem se tornado complicado.

Na tentativa de contornar a dificuldade que os alunos apresentam em Matemática, têm surgido inúmeras pesquisas e debates sobre o assunto. A História da Matemática vem sendo inserida na sala de aula como um instrumento metodológico para motivar o desenvolvimento do conteúdo, introduzi-lo e exemplificá-lo, o que tem se tornado semente para diversos trabalhos científicos. Num contexto mais amplo, a História da Matemática, além da história como ciência, engloba a história das instituições, das propostas pedagógicas, dos processos pedagógicos adotados, das publicações, das pessoas significativas, de disciplinas e dos conteúdos, sendo essa última de maior potencial pedagógico.

Miguel & Miorim (2004) categorizaram as diferentes perspectivas teóricas no campo da investigação em História na Educação Matemática. São elas: perspectiva evolucionista linear, perspectiva estrutural-construtivista operatória, perspectiva evolutiva descontínua, perspectiva sociocultural e perspectiva dos jogos de vozes e ecos.

Vejamos o que significam essas perspectivas:

A perspectiva evolucionista linear tem sua origem nas idéias do Positivismo. Comte (1976), fundador dessa escola desenvolveu a *Lei dos Três Estados* na tentativa de explicar a construção do conhecimento, que Motta (2006) sintetiza em seu trabalho:

Para Comte, o progresso do conhecimento humano se realizaria por meio de três estados: o estado teológico, no qual o homem explica as coisas e os acontecimentos através de seres ou forças sobrenaturais; o estado metafísico, quando há o recurso a entidades abstratas e idéias que expliquem os fatos; e o estado positivo, quando o homem explica as relações entre as coisas e os acontecimentos pela formulação de leis, renunciando conhecer as causas e a natureza íntima das coisas. A sucessão dos três estados se daria em termos individuais, em que o homem seria teólogo na infância, metafísico na juventude e positivo na virilidade, e em termos da História das Ciências, sendo que a Matemática teria sido a primeira ciência a se libertar do pensamento teológico e metafísico para se tornar positiva.

(Motta, 2006, p.31)

Ainda para Motta (2006), temos que:

Como uma extensão da Lei dos Três Estados, Comte postula uma similaridade entre o modo de investigar e explicar os fenômenos naturais e sociais pelo indivíduo em sua história pessoal e o modo como a humanidade o faz na História, de maneira semelhante ao que seria defendido mais tarde pelos defensores do “princípio genético”. (...) Para Comte, ao expor a ciência pelo caminho histórico teríamos condições de refazer a ciência por meio do estudo sucessivo e em ordem cronológica da constituição dos diversos sistemas de idéias, sem a exigência de conhecimentos prévios e mantendo uma visão conjunta do progresso da ciência.

(Motta, 2006, p.38-39)

A perspectiva estrutural-construtivista operatória tem como principais representantes os trabalhos de Piaget & Garcia (1987), que defendem um caminho fixo de funcionamento dos mecanismos cognitivos. Examinando pesquisas realizadas nas últimas décadas,

encontramos a epistemologia genética de Piaget fundamentando grande parte dos estudos sobre o ensino e a aprendizagem da Ciência, principalmente ao longo dos anos 70 e 80.

Nessa perspectiva, a construção do conhecimento se dá a partir das interações entre sujeito-sujeito e/ou sujeito-objeto que, por meio de processos como seleção, transformação, adaptação e incorporação de elementos fornecidos pelas interações, possibilitam a construção de estruturas mentais. Piaget (1971) desenvolveu a *Teoria Cognitiva* onde defende que todo ser humano passa por várias etapas de desenvolvimento intelectual ao longo de sua vida e, por meio de diversos experimentos, concluiu que existem quatro estágios de desenvolvimento cognitivo no ser humano: *sensório-motor*, *pré-operacional*, *operatório concreto* e *operatório formal*. Para Piaget, o sujeito constrói o conhecimento a partir de sua ação sobre o meio externo. Trata-se de uma interação, na medida em que estruturas mentais vão se constituindo e se modificando ao longo desse processo. O desenvolvimento da inteligência é visto como um processo de *adaptação* do organismo ao meio (adaptação cognitiva). Piaget compreende essa adaptação como resultado de um equilíbrio dinâmico entre dois pólos: a *assimilação*, que corresponde basicamente à incorporação de algo exterior aos esquemas do sujeito, e a *acomodação*, que representa a necessidade que os *esquemas de assimilação* têm de levar em conta as particularidades dos elementos a assimilar. Desde a mais tenra idade, o indivíduo constrói *esquemas de ação* com os quais busca assimilar objetos. Os *esquemas de assimilação* desenvolvem-se e modificam-se na interação com o mundo – em um movimento de *acomodação* – coordenando-se progressivamente. Para Piaget, o desenvolvimento do equilíbrio resulta do fato que sistemas mais complexos exigem novas regulações. Esse processo de *equilibração progressiva*, ou seja, uma passagem contínua de um estado de menos equilíbrio para um estado de equilíbrio superior, segundo o autor, leva à formação de estruturas de conhecimentos cada vez mais complexas.

Essa visão rompe com a idéia positivista de que o conhecimento é acumulado e defende que ele é construído por meio de uma reorganização dos conhecimentos previamente adquiridos. De acordo com as possibilidades de entendimento construídas pelo sujeito, ele tende a assimilar idéias, entretanto, caso essas estruturas não estejam presentes, ocorre um esforço contrário ao da assimilação. Por meio de modificações das hipóteses iniciais e concepções anteriores do sujeito as estruturas cognitivas vão ajustando-se àquilo que não foi possível assimilar. O desequilíbrio é, portanto, fundamental, pois, o sujeito buscará novamente o equilíbrio, com a satisfação da necessidade, daquilo que ocasionou o desequilíbrio. Para essa concepção, o conhecimento se constrói na medida em que novos patamares de *equilíbrio* são alcançados. Piaget e Garcia escreveram um livro intitulado “*Psicogênese e História das Ciências*”, segundo Motta(2006), neste livro os autores:

(...) se posicionavam contra uma recapitulação simplista da filogênese pela ontogênese e procuravam investigar se os mecanismos de passagem de um período históricos da evolução do pensamento matemático-físico ao seguinte são análogos aos da passagem de um estado genético aos seus sucessores. Piaget & Garcia defendem a tese de que a construção do conhecimento se dá da mesma maneira nos plano psicogenéticos e filogenéticos, através de mecanismos que denominam abstração reflexiva e generalização completiva. Com tais mecanismos de passagem, o aprendiz adaptaria o saber constituído aos seus conhecimentos prévios para construir conhecimentos novos (...) Assim, para aprender Matemática o sujeito teria que reconstruir as mesmas operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos, que abstraídos de suas situações concretas se tornariam exclusivamente objetos formais.

(Motta, 2006, p.51-52)

Nessa concepção, a perspectiva estrutural-construtivista recorre à História como fonte para a busca de conflitos cognitivos que permitam a passagem de uma etapa da construção do pensamento para outra mais avançada.

A Epistemologia de Bachelard (1999)¹ é a base da perspectiva evolutiva descontínua. Na tentativa de definir as condições de formação do espírito científico, o autor visualiza a ciência como um trabalho de ruptura frente ao conhecimento previamente estabelecido, uma resistência à racionalização, denominado por ele de obstáculo epistemológico e caracterizado da seguinte maneira:

Lentidões e conflitos, que aparecem no âmago do próprio ato de conhecer, que causam inércia, estagnação e regressão [...]. E não se trata de considerar obstáculos externos como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano.

(Bachelard, 1999, p. 17)

Para Bachelard, os obstáculos epistemológicos propiciam as análises das condições psicológicas do progresso científico.

É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas da inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (...) o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização.

(Bachelard, 2001, p.166)

A perspectiva evolutiva descontínua, portanto, recorre à História para identificar os obstáculos epistemológicos presentes na construção histórica de um conhecimento científico e sugerir situações-problema em sala de aula que auxiliem a superá-los. Sob essa concepção, a ontogenia seguiria a filogenia.

A perspectiva sociocultural se apóia nas idéias de Vygotsky (1988) e concebe o conhecimento de forma contextualizada, como resultante da negociação social de significados. Dessa forma, essa perspectiva recorre à História como uma fonte de experiências.

¹ O livro *A formação do espírito científico* foi publicada, pela primeira vez, em 1938. A edição utilizada como referência foi a publicada em 1999 pela Editora Contraponto, Rio de Janeiro/RJ.

A perspectiva dos *jogos de vozes e ecos*, usando, como a anterior, o referencial teórico de Vygotsky (1988), busca na História da contradições entre as vozes históricas produzidas na sistematização do discurso teórico da matemática e as vozes dos estudantes (Motta, 2006). Essa última perspectiva procura retratar as características próprias do conhecimento matemático em cada contexto social e não recorrer à História na formulação de situações-problemas por acreditar que as condições da época em que nossos alunos estão imersos são distintas das condições de épocas anteriores.

Na descrição de Miguel & Miorim (2004) as três primeiras perspectivas descritas por Miguel & Miorim (2004) privilegiam o caráter internalista e indutivista da História da Matemática, enxergam a Matemática como uma Ciência pronta e acabada. As demais perspectivas, por sua vez, possuem um caráter externalista e sociocultural e concebem o conhecimento matemático como uma manifestação de várias culturas. Motta (2006) utiliza metáforas e afirma que o primeiro grupo de perspectivas enxerga a História da Matemática na educação como um espelho, como um reflexo direto do que foi realizado na história da humanidade, uma imitação. Segundo a autora, o segundo grupo a enxerga como uma pintura no sentido que, a partir da observação do que ocorreu na História da Matemática, a educação pinta a sua própria obra, constrói a sua própria Matemática levando em consideração aspectos culturais. Alguns autores, enquadrando-se nas perspectivas que visualizam a História da Matemática como espelho, acreditam que *as dificuldades históricas podem bem assemelhar-se com as dificuldades dos alunos* (Grabiner, 1975 apud Prado, 1990). Mais uma vez temos presente a idéia de que a ontogênese segue a filogênese.

A presente pesquisa se posiciona na perspectiva evolutiva descontínua de Bachelard ao transpor sua idéia de obstáculo epistemológico nas Ciências à Matemática.

A noção de obstáculo epistemológico aplicada à Matemática é por demais polêmica. Bachelard, elaborador de tal noção no âmbito das ciências, questiona a existência de

obstáculos epistemológicos na história da Matemática por acreditar que esse campo do conhecimento não sofreu uma ruptura, um tempo de estagnação considerável. Para ele, a História da Matemática *é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro.* (Bachelard, 1996, p.28).

Aparentemente, a Matemática apresenta uma regularidade, parece não apresentar erros ou rupturas, ter sido construída linearmente. Essa pelo menos é a idéia que nos dão a maioria dos registros históricos. As conjecturas, dúvidas e erros normalmente não são retratados nos textos científicos. Entretanto, parece mais correto acreditar que essa regularidade só existe na fase final da formulação do texto matemático; é razoável refutar a idéia de que na fase inicial da construção do conhecimento há linearidade e sim conflitos intensos na sua criação. Os obstáculos aparecem na criação/construção do conhecimento, e podem, por isso, ser identificados no ambiente escolar na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento.

A noção de obstáculo epistemológico tem sido utilizada principalmente pelos didatas franceses. Dentre eles, Brousseau, que em 1976 trouxe para a Didática da Matemática a idéia de obstáculo epistemológico descrita com o intuito de desenvolver uma teoria que facilitasse estudar e explicar erros dos alunos como estratégias particulares. Brousseau podia *sentir sua adaptação confirmada por uma convergência ou mesmo uma ressonância entre a epistemologia filosófico-histórica de Bachelard e a epistemologia genética de Jean Piaget* (Schubring, p.24, 2002).

Brousseau, em 1976, no XXVIII Encontro do CIAEM, expôs pela primeira vez, inspirado nas idéias de Bachelard, a conferência intitulada *Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática*, conferência que resultou em um artigo do mesmo título em 1983. Segundo ele, durante a aprendizagem, ao iniciar o contato com um conceito novo, pode ocorrer uma revolução interna entre o equilíbrio aparente do conhecimento anterior e aquele que se encontra em fase de elaboração. Brousseau introduz a noção de obstáculo

epistemológico como sendo aquele obstáculo ligado à resistência de um *saber*² mal adaptado e o vê como um meio de interpretar alguns dos **erros recorrentes e não aleatórios**, cometidos pelos estudantes quando lhes são ensinados alguns conceitos matemáticos. O que é característico desse tipo de erro é a sua ligação a uma maneira de conhecer, a uma concepção característica, coerente e mesmo correta, a um conhecimento antigo que teve sucesso em todo um domínio de ação. (Igliori, 1999)

Brousseau (1983), em um de seus estudos, afirma que um obstáculo epistemológico verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e, portanto, podemos, em princípio, encontrá-lo na história do conceito. Entretanto, alguns pesquisadores em Educação Matemática indagam sobre a necessidade de referência histórica para determinar os obstáculos. Artigue, por exemplo, faz o seguinte questionamento: *para se conferir o estatuto de obstáculo epistemológico em didática é essencial fornecer a ele o atestado histórico das dificuldades análogas?* (Artigue, 1990, p. 246). Ela se posiciona para além da identificação dos obstáculos na história, preocupando-se também com a busca de identificação de processos produtores de obstáculos epistemológicos na aprendizagem.

É com base no ponto de vista de Artigue, sem se ater aos obstáculos na história, que a presente pesquisa pretende identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos relacionados à concepção dos Conjuntos Numéricos no ensino/aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental.

OBJETIVOS

Objetivo geral

² Por *saber* entende-se todo um conjunto de conhecimentos metodicamente adquiridos, mais ou menos sistematicamente organizados e susceptíveis de serem transmitidos por um processo pedagógico de ensino.

Identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos nas salas de aula do Ensino Fundamental no ensino/aprendizagem dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais a fim de ampliar a discussão visando a concepção dos números reais.

Objetivos específicos

- ❖ Realizar reflexões sobre o conceito de obstáculo epistemológico;
- ❖ Identificar os obstáculos epistemológicos encontrados em sala de aula do Ensino Fundamental por meio de questionário elaborado envolvendo habilidades em trabalhar com os números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

METODOLOGIA

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de compreender, em sua essência, a noção de obstáculo epistemológico de Bachelard (1999) e o estudo realizado por Brousseau na linha da Didática Francesa na Educação Matemática. Procuramos discutir sua origem e pressupostos de modo a facilitar trabalho de identificação de obstáculos epistemológicos em sala de aula.

Bibliografias especializadas em História da Matemática, como Boyer (1996) e Eves (2004), assim como pesquisas realizadas sobre o assunto, foram consultadas com o objetivo de conhecer o desenvolvimento dos subconjuntos numéricos dos números reais na construção dos conceitos.

Em seguida, questionários semi-estruturados, elaborados após o estudo de metodologias de pesquisas educacionais como as de Bogdan & Biklen (1991), foram aplicados, em novembro de 2008, a alunos de uma escola particular localizada em São Vicente, litoral sul do Estado de São Paulo.

Por fim, realizou-se uma análise dos resultados apresentados pelos alunos na tentativa de identificar obstáculos epistemológicos no ensino dos conjuntos numéricos trabalhados no Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 A EPISTEMOLOGIA DA CIÊNCIA DE BACHELARD

Gaston Bachelard, que ocupa uma posição de destaque na conjuntura filosófica francesa, nasceu na França, na região de Champagne, Bar-sur-Aube, em 27 de junho de 1884. Químico de formação apresentou duas fases, foi filósofo e poeta, *homem diurno da ciência e o homem noturno da poesia* (Japiassú, 1976, p.69). Seus estudos focaram-se principalmente em assuntos referentes à filosofia da Ciência; toda a sua obra está marcada por uma reflexão sobre a filosofia implícita nas práticas efetivas dos cientistas. Em suas palavras, seu projeto consistia em *dar às ciências a filosofia que elas merecem*. Bachelard morreu em Paris em 16 de outubro de 1962.

Como lembra Japiassú:

Diria que uma das funções essenciais da filosofia, hoje em dia, é a de construir uma epistemologia. (...) O próprio Bachelard costumava dizer, em seus cursos na Sorbonne, que a epistemologia consistia, no fundo, na história da ciência como ela deveria ser feita. Queria dizer, com isso, que toda reflexão efetiva, capaz de estabelecer o verdadeiro estatuto das ciências formais (lógica e matemática) e das ciências empírico-formais (ciências físicas, biológicas e sociais), deve ser necessariamente histórica.

(Japiassú, 1976, p.65)

Tendo como referência as profundas transformações sofridas pela Ciência no início do século XX, decorrentes principalmente do surgimento da teoria da relatividade e da mecânica quântica, Bachelard tenta estabelecer as bases filosóficas desse novo *espírito científico*. Ele se propõe a construir uma epistemologia da ciência visando a produção dos conhecimentos científicos sob os aspectos lógico, ideológico e histórico. Estabelece a epistemologia como um estudo da natureza do conhecimento científico e das circunstâncias de sua produção, não se baseando em pressupostos de natureza biológica. Como, para ele, as Ciências nascem e evoluem em circunstâncias históricas bem determinadas, a epistemologia deveria questionar

as possíveis relações entre a Ciência e a sociedade e entre as diversas Ciências. O primordial em seu trabalho sobre epistemologia é descobrir a gênese, a estrutura e o funcionamento dos conhecimentos científicos. Surge, assim, uma epistemologia como produto da ciência criticando-se a si mesma.

Num primeiro momento, poderíamos caracterizar a epistemologia da Ciência de Bachelard como histórica e racionalista-empírica. Histórica por não abdicar do uso da história da ciência em sua fundamentação, aprender com o material histórico e buscar nele elementos que ilustram, justificam e alicerçam as principais teses dessa epistemologia. Sua epistemologia recorre à história com os olhos do presente, julgando-a ao evidenciar o progresso científico a partir da constatação dos erros do passado. Bachelard denomina a história como recorrente, uma história *que se esclarece pela finalidade do presente, uma história que parte das certezas do presente e descobre, no passado, as formações progressivas da verdade* (Bachelard, 2001, p.207). A epistemologia de Bachelard é racionalista-empirista porque se opõe a epistemologias do tipo contemplativa, coloca-se contra a idéia de que a simples observação dos fatos leva ao conhecimento. Não significa dizer que ele acredite que o conhecimento nasça da razão. Seu posicionamento encontra-se em um ponto intermediário entre o racionalismo e o empirismo, embora mais próximo do primeiro. Para ele, não podemos mais falar de um realismo ou racionalismo absolutos. A prova científica afirma-se na experiência e no raciocínio, no contato com a realidade e numa referência à razão. *Se a atividade científica experimental, é preciso raciocinar; se ela raciocina, é preciso experimentar* (Bachelard, 1999, p.13). O real científico coloca-se em relação dialética com a razão científica.

A Ciência não é construída a partir da contemplação do que nos cerca, e sim nas ações de construção, criação, produção e retificação das idéias que temos a seu respeito. É por críticas, polêmicas e negações que descobrimos e construímos a verdade. Assim sendo, a

filosofia de Bachelard considera a verdade como um produto humano, apegado não apenas a um modelo absoluto de verdade, mas que se volta incessantemente para o seu construtor levando-o a perceber suas idéias como obstáculos à compreensão e forçando-o a reconstruir seus enunciados para chegar ao pensamento científico. Um pensamento científico não é um sistema acabado, e sim *uma incerteza generalizada, uma dúvida em despertar* (Japiassú, 1976, p.69). Percebemos, então, que na visão de Bachelard, o conhecimento deixa de ser contemplativo e se torna operativo. A Ciência cria seus objetos a partir da destruição dos objetos da percepção comum, dos conhecimentos imediatos. O progresso do *espírito científico* se faz por rupturas com o senso comum, com as primeiras impressões ou os pré-conceitos que possuímos.

É preciso reconhecer que nos fatos pode sempre existir Ciência coexistindo com ideologias. Assim, a epistemologia científica de Bachelard possui um novo papel, o de neutralizar os discursos ideológicos e impedir, quando possível, o aparecimento dos obstáculos provenientes desses discursos misturados à Ciência. A epistemologia deve, portanto, tentar descobrir os valores ideológicos que intervêm na prática científica.

Bachelard também foi um revolucionário na consideração do erro por afirmar que este é necessário à Ciência, pois o conhecimento científico é construído a partir da retificação desses erros. A maioria dos filósofos até então, concebiam o erro como heresia, uma anomalia que deveria ser combatida. Bachelard fundamenta sua opinião afirmando que o real não é o que pensamos ser, o que nos é apresentado pelos sentidos, ressaltando a importância de romper com este conhecimento comum para possibilitar o avanço. Desse modo, argumenta que o conhecimento científico desenvolve-se a partir da ruptura com a cultura primeira, com o conhecimento popular. Para ele:

O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é 'o que se

poderia achar' mas é sempre o que se deveria ter pensado. O pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização.

(Bachelard, 1996, p. 17)

Desse modo, o filósofo assegura que o primeiro obstáculo a ser superado é o conhecimento do senso comum, que definiu como sendo o obstáculo da opinião, já que esta pode ser enganosa. O autor é taxativo ao afirmar que:

A opinião pensa mal; não pensa: traduz necessidades em conhecimentos. Ao designar os objetos pela utilidade, ela se impede de conhecê-los. Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la. (...) Não basta, por exemplo, corrigi-la em determinados pontos, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com clareza.

(Bachelard, 1996, p.18)

Segundo Bachelard é o sentido de problema que caracteriza o espírito científico. Se não há problema, se não há questionamentos, perguntas, não pode haver conhecimento científico. Por outro lado, hábitos intelectuais que foram úteis e sadios podem, com o tempo, entravar a pesquisa, uma vez que nosso espírito tem a tendência irresistível de considerar como mais clara a idéia que costuma utilizar com frequência. (Bergson apud Bachelard, 1996, p.19).

Nesse sentido, Bachelard argumenta que a tarefa do professor de ciências não é transmitir uma nova cultura, mas contribuir para a mudança da cultura, ou seja, auxiliar na superação de obstáculos sedimentados pelo dia-a-dia. Essa mudança ocorre através da

psicanálise dos erros iniciais, da recorrência histórica, enfim, pelo que Bachelard definiu como:

(...) catarse intelectual e afetiva, que implica colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim, à razão, razões para evoluir.

(Bachelard, 1996, p. 24)

Nesse contexto, Bachelard discute também a necessidade de se instaurar uma nova epistemologia que, segundo o filósofo Japiassú, definiu como sendo:

(...) uma filosofia das ciências que, em matéria de teoria do conhecimento, não propõe mais soluções filosóficas para problemas científicos já superados. Trata-se de uma filosofia aberta, que não encontra mais em si mesma as ‘verdades primeiras’, nem tampouco vê na identidade do espírito a certeza que garante um método permanente e definitivo. O que deve ser abandonado é uma filosofia que coloca seus princípios como intangíveis e que afirma suas verdades primeiras como totais e acabadas.

(Japiassú, 1976, p.73-74)

Segundo Canguilhem (apud Japiassú, 1976, p.79), Bachelard revolucionou a epistemologia não somente por ter introduzido conceitos importantes como o de obstáculo epistemológico, mas por ter reconhecido que *a ciência não é o pleonasmo da experiência*, ela se faz contra a experiência, contra a percepção. Sua epistemologia contribuiu para que se destruísse a crença na “*imortalidade científica dos fatos*” e em sua “*imaculada concepção*” (Nietzsche, apud Japiassú, 1976, p.81).

1.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

Por obstáculo, entende-se “o limite de uma atividade”, definição encontrada no Dicionário de Filosofia de Nicola Abbagnano³ ou ainda “embaraço, impedimento, estorno, empecilho” na definição do Dicionário Aurélio⁴ ou ainda “algo que impede ou atrapalha o movimento, a progressão de alguém ou alguma coisa” na definição do Dicionário Houaiss⁵. Acredita-se que esse termo foi escolhido por Bachelard pela idéia de falta de movimento que a palavra encerra, que só é superada quando algo é transposto, superado, mostrando que a concepção do conhecimento não é estático.

Segundo o Dicionário Houaiss encontramos como definição de epistemologia “reflexão geral em torno da natureza, etapas e limites do conhecimento humano, (...) teoria do conhecimento, (...) estudo dos postulados, conclusões e métodos dos diferentes ramos do saber científico, ou das teorias e práticas em geral, avaliadas em sua validade cognitiva, ou descritas em suas trajetórias evolutivas, seus paradigmas estruturais ou suas relações com a sociedade e a história”. Para o Dicionário de Filosofia de José Ferrater Mora⁶ o termo “epistemologia foi introduzido para designar teoria do conhecimento científico ou para elucidar problemas relativos ao conhecimento cujos principais exemplos eram extraídos das Ciências”.

O obstáculo aparece no momento da constituição do conhecimento sob a forma de um contrapensamento, todas as vezes que uma organização do pensamento preexistente encontra-se ameaçada. Gaston Bachelard, em seu livro *A Epistemologia* define a noção de obstáculo epistemológico:

Quando se procuram as condições psicológicas dos progressos da ciência, em breve chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do

³ Editora Martins Fontes, edição 5, 2007.

⁴ Aurélio Buarque de Holanda, Editora Objetiva, 2001.

⁵ Dicionário online: www.dicionarioonlinehouaiss.com.br acessado em 04/08/2007 às 20h42.

⁶ Editora Martins Fontes, 1994.

conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e fugacidade dos fenômenos, nem tão pouco de incriminar a fraqueza dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem por uma espécie de necessidade funcional, lentidões, e conflitos. É aqui que residem causas de estagnação e mesmo de regressão, é aqui que iremos descobrir causas de inércia a que chamaremos obstáculos epistemológicos.

(Bachelard, 2001, p.165)

A partir dessa definição, podemos dizer que *obstáculo epistemológico* foi o termo criado por Bachelard para referir-se a tudo aquilo que impede, impossibilita ou obstrui o progresso da ciência. Como exemplos, podemos citar como obstáculos o pré-conceito (no sentido de senso comum), a ideologia, a idolatria, o senso comum e a opinião, assunto que será aprofundado ainda no presente trabalho.

Bachelard indica que *a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação* (Bachelard, 1996, pp. 21); ressalta, entretanto, que em ambos os casos, esse estudo não é fácil. Isto porque a história é, inicialmente, hostil a qualquer juízo normativo, da alçada das regras, o que exige atenção do epistemólogo ao escolher os documentos pelos quais pretende realizar seu estudo e a clareza de que esta escolha pode ser fundamental para o avanço da ciência ou não, pois muito do que se encontra na história da ciência está longe de representar, de fato, a evolução de um pensamento científico. Ainda em seus estudos, sente a necessidade de diferenciar o historiador da ciência do epistemólogo:

O historiador da ciência deve tomar as idéias como se fossem fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como se fossem idéias, inserindo-as num sistema de pensamento. Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um fato. Para o epistemólogo, é um obstáculo, um contra-pensamento.

(Bachelard, 1996, p 22)

Em sua obra *A Formação do Espírito Científico*, Bachelard busca analisar exaustivamente a natureza desses obstáculos epistemológicos, tomando exemplos principalmente da história da Ciência do século XVIII. Nessa obra ele divide a história da Ciência em três grandes períodos, o *estado pré-científico* (da Antiguidade ao século XVIII), o *estado científico* (fins do século XVIII ao início do século XX), e a era do *novo espírito científico* (a partir de 1905 com o surgimento da teoria da relatividade).

A evolução de conhecimentos passa pela rejeição de conhecimentos anteriores e o aparecimento de obstáculos ocorre a partir da existência de conhecimentos, e não por sua ausência. Bachelard insiste no fato de que ninguém pode ser possuidor de um espírito científico enquanto não estiver seguro do pensamento, em qualquer momento da vida, de reconstruir todo o próprio saber:

Na obra da ciência só se pode amar o que se destrói, pode-se continuar o passado negando-o, pode-se venerar o mestre contradizendo-o. Aí, sim, a Escola prossegue ao longo da vida. Uma cultura presa ao momento escolar é a negação da cultura científica. Só há ciência se a Escola for permanente. É essa escola que a ciência deve fundar. Então, os interesses sociais estarão definitivamente invertidos: a Sociedade será feita para a Escola e não a Escola para a Sociedade .

(Bachelard, 1996, p. 98)

Bachelard lembra ainda que a noção de obstáculo didático é desconhecida na educação, e julga surpreendente o fato dos professores das ciências não compreenderem que alguém não compreenda, e de imaginar que o espírito científico nasce como uma aula começa, que é possível construí-lo pela repetição da lição, não levando em conta o conhecimento empírico que seus alunos já vivenciaram. Em seus estudos, o epistemólogo insiste na importância da abordagem dada pelo professor de uma ciência em determinados

assuntos e ressalta que o modo de tratá-los pode resultar em avanço no desenvolvimento do pensamento científico ou na sedimentação de um obstáculo epistemológico.

Outro ponto importante no trabalho de Bachelard é a percepção de que há uma permanência das idéias filosóficas no desenvolvimento intelectual de cada indivíduo, ou seja, a superação de obstáculos e a construção de outras fases de conhecimento não implica o desaparecimento automático de concepções anteriores. As condutas realistas tendem a permanecer latentes mesmo nos espíritos que já as superam.

Como já salientamos, o processo da construção do conhecimento é marcado por rupturas. O conhecimento que se pretende objetivo deve opor-se ao senso comum, à opinião, ao conhecimento sensível que carrega valores. O caminho dessa objetivação não é evitar sistematicamente o erro, mas conscientizar-se do erro. Sob esse ângulo, o erro adquire uma conotação positiva, útil. Ele não é um acidente de percurso ou uma prova de limitação, é apenas uma etapa a atravessar, um *elemento motor do conhecimento*. Esse é um ponto fundamental pois, ao afirmar a inevitabilidade dos erros, vinculando-os ao próprio ato de conhecer, Bachelard dialética a noção de erro, que passa a ter um duplo aspecto: negativo, enquanto reflexo de um obstáculo a superar; positivo na medida em que se torna quase que um pré-requisito à aquisição de novos conhecimentos ou de conhecimentos mais elaborados. Bachelard faz surgir, então, o espírito científico como um conjunto de erros retificados, aproximando-se cada vez mais da verdade.

A dialética da Epistemologia da Ciência de Bachelard é uma *dialética do não*. A negação identifica-se com o movimento de generalização reorganizador do saber. Para ele, a verdade não é uma qualidade que pertenceria a uma opinião particular, mas o resultado da negação mútua das opiniões num conflito entre os produtores de idéias. O espírito científico só pode constituir-se destruindo o espírito não científico, os erros, valores e preconceitos acumulados.

1.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA HISTÓRIA DA CIÊNCIA

Outra discussão gerada pelas concepções de Bachelard é a existência de paralelos com concepções presentes na História da Ciência. Para o autor, a História da Ciência é constitutiva da sua epistemologia. Ao analisar a pré-ciência dos séculos anteriores, Bachelard encontra obstáculos que também podem ser percebidos na prática educativa contemporânea e defende que, por meio do estudo histórico, procuremos as origens e razões da resistência dos obstáculos epistemológicos. Sua *história recorrente* tem um objetivo pedagógico claro: compreender a psicologia da descoberta para informar o presente e ajudar o espírito a vencer obstáculos. A validade de tal processo permite afirmar que a existência de um paralelismo entre as concepções manifestadas pelos alunos e aquelas presentes ao longo do desenvolvimento histórico da Ciência encontra-se implicitamente presente na epistemologia de Bachelard. Entretanto, seria injusto uma leitura simplista dessa relação, reduzindo o desenvolvimento intelectual do aluno a um conjunto de etapas oriundas de uma análise histórica.

1.4 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA EDUCAÇÃO

A noção de ruptura na formação do espírito científico parte do pressuposto de que é preciso romper com a concepção de Ciência como um corpo de conhecimentos fechado, pré-estabelecido, a ser absorvido pelos estudantes. A idéia de que a aprendizagem ocorre a partir da ruptura, nos faz inferir que o aluno constrói seu conhecimento à medida que sente necessidade, que identifica razões que o obriguem a mudar sua concepção, propiciando, então uma substituição de um saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico. Por isso Bachelard (1996) afirma que a aprendizagem se dá contra um conhecimento anterior, a partir da desconstrução deste. Para o filósofo, a aprendizagem não tem início, é contínua e nunca se esgota, sempre destrói um conhecimento para construir outro.

A formação do espírito científico pode ser ameaçada ou até mesmo obstruída por concepções que predominam no imaginário cognitivo. O conhecimento já construído atua como uma força contrária à realização de uma nova aprendizagem. A evolução do conhecimento encontra-se, então, estagnada até o momento que ocorrer uma ruptura epistemológica com os saberes que predominaram por um certo período. Num caso extremo, a obstrução do conhecimento antigo pode até provocar uma regressão do nível de compreensão.

Bachelard chamava de psicanálise do conhecimento objetivo, o levantamento dos fatores que impedem a evolução do conhecimento. Essa idéia ganha consistência quando se trata da análise de um conceito específico. Entretanto, muitos educadores criticam a utilização da idéia de obstáculo epistemológico no estudo da aprendizagem escolar por acreditar que ela é transferida de forma precipitada do contexto histórico da Filosofia da Ciência ao contexto pedagógico.

Trindade (1996), em sua dissertação de mestrado, assegura que é por meio do diálogo que o educador tem a oportunidade de apreender a subjetividade do educando e utilizá-la de modo que o conhecimento científico (cultura elaborada) seja visto por ele não como uma imposição, mas como um conhecimento que possa nascer da superação das suas representações alternativas (cultura primeira). Para que ocorra esta superação, assinala que é preciso:

(...) problematizar esse conhecimento já construído pelo aluno, estabelecer a dúvida, o conflito; aguçar as contradições, localizar as limitações desse conhecimento, quando confrontado com o conhecimento científico, com a finalidade de propiciar um distanciamento crítico do educando ao se defrontar com o conhecimento que ele possui e, ao mesmo tempo, propiciar a alternativa de apreensão do conhecimento científico.

(Trindade, 1996, p.70)

Para Bachelard, que viveu num período de construções revolucionárias na Ciência, o conhecimento científico não pode ser concebido como o aperfeiçoamento, como um refinamento do conhecimento comum, ele afirma, como já foi salientado, que a formação do espírito científico só é possível a partir da ruptura do senso comum. Nesse sentido, diz-se que Bachelard foi um filósofo do descontinuísmo.

O progresso do conhecimento científico, entendido como progresso epistemológico no sentido de um racionalismo crescente, permite a Bachelard cunhar a expressão *Filosofia do Não* para designar essa nova filosofia das Ciências. Isso porque o avanço do conhecimento dá-se contra um conhecimento anterior, negando-o. Um *não*, porém, que não é definitivo, porque o reconhecimento e afastamento dos erros, que a psicanálise do conhecimento objetivo representa, permite alargar esse mesmo conhecimento e recuperá-lo sob nova ótica.

É necessário frisar que para Bachelard esse alargamento não se caracteriza como uma continuidade entre o que se conhecia e o novo. Não se trata de manter uma estrutura e fazê-la crescer de modo contínuo até que se atinja o novo conhecimento mais amplo. O processo é *descontínuo*, envolve rupturas. Embora o novo conhecimento seja uma *generalização* do anterior, os conceitos já não têm os mesmos significados, foram transformados ao longo do processo. Dessa maneira, caracteriza-se também o pensamento epistemológico de Bachelard como *descontinuísta*, porque assume a existência de rupturas no desenrolar do desenvolvimento científico.

Em seu livro *Filosofia do Não* ele propõe a *reorganização do saber numa base alargada*, não representando uma negação absoluta de saberes anteriores. A *generalização pelo não* inclui aquilo que nega, operando de modo dialético ao considerar visões opostas como complementares para uma síntese.

Ainda é importante ressaltar que, para Bachelard, a educação é um meio possível de estudar e utilizar idéias sobre epistemologia; é por meio do ensino que o autor acredita ser

possível formar o novo espírito científico. Dessa forma a sua *Filosofia do Não* fundamenta uma pedagogia da racionalização progressiva, de caráter essencialmente descontínuista e dialético, que tem sido chamada de *Pedagogia do Não*. Da mesma forma que para o sujeito coletivo da Ciência, para alunos e professores, o progresso do conhecimento acontece pela superação de conhecimentos anteriores, dizendo-se *não* aos erros fundados nos pensamentos primeiros e subjetivos. Trata-se de retificar erros e vencer obstáculos epistemológicos. Para cada conceito deve-se repensar o que se conquistou.

Como vimos, o conhecimento para Bachelard é visto como uma evolução do espírito, que se dá pela superação de obstáculos epistemológicos, no sentido de uma maior coerência racional. A dificuldade desse caminhar em direção à objetivação faz com que a superação dos obstáculos nunca seja total.

CAPÍTULO 2

ALGUNS OBSTÁCULOS

EPISTEMOLÓGICOS NA MATEMÁTICA

2.1 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Embora Bachelard tenha tratado dos obstáculos das Ciências como Física e Química, ele afirma que a formação do espírito científico matemático é bem diferente do espírito científico e ainda que:

(...) a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro.

(Bachelard, 1996, p.28)

Entretanto, a Matemática apenas aparenta uma certa regularidade, parece não ter erros ou rupturas, apresenta linearidade no registro histórico. Essa regularidade só existe na fase final da formulação do texto matemático. Os historiadores afirmam que na fase inicial da produção do conhecimento matemático não há linearidade e sim conflitos intensos na construção do conhecimento. Os obstáculos aparecem na fase de criação, descoberta e síntese, não estão expostos na formalização e, portanto, não aparecem no registro histórico. Todos os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos ao estabelecer conjecturas, não aparecem no texto científico final.

Desse modo, a concepção da Matemática como uma Ciência dogmática e infalível deveria ser substituída por uma concepção mais aberta, falível e dinâmica, em que o erro, ao invés de ser concebido como “heresia”, fosse encarado como parte do processo de construção do conhecimento.

No entanto, a noção de obstáculo epistemológico em Matemática ainda é discutida entre os estudiosos e, por este motivo, é importante não generalizar, mas fazer estudos de caso. Cada erro deve ser objeto de análise não por ser casual, mas sim por estar ligado a um conhecimento anterior que apresentava um significado, que fazia sentido.

2.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E A MATEMÁTICA

O termo epistemologia passou a fazer parte da didática da matemática nos anos 60.

Como lembra o didata Bruno D'Amore:

No nosso campo de pesquisa: uma concepção epistemológica é um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então ensiná-los e aprendê-los; a epistemologia é uma tentativa de identificar e de unificar concepções epistemológicas diferentes relativas a determinadas ciências, a movimentos intelectuais, a grupos de pessoas, a instituições ou a culturas.

(D'AMORE, 2007, p.102)

Para Gert Schubring o interesse da Didática da Matemática com relação aos obstáculos epistemológicos surgiu com a mudança de “estatuto” da Didática, antes considerada uma técnica, para uma Ciência própria e independente, em meados dos anos 60. Ele salienta que:

Como uma das conseqüências essenciais da transformação experimental e cognitiva da Didática, os erros dos alunos conseguiriam obter um novo papel: com efeito, entretanto, os erros não são mais considerados possíveis de ser eliminados por uma simples repetição, ou por atenção disciplinar por parte do professor. Pelo contrário, os erros não têm mais um papel marginal na Didática, somente relevante para a prática do professor na sala de aula: eles passaram para o centro de reflexão teórica da Didática e da sua prática experimental. (...) os erros são considerados como indicadores dos processos cognitivos na aprendizagem da Matemática nas salas de aula.

(Schubring, 2002, p. 22-23)

O primeiro autor a fundamentar a noção de obstáculo epistemológico na Matemática foi Guy Brousseau, garantindo, ao contrário de Bachelard, que é possível encontrar obstáculos

na Matemática. Brousseau retoma a idéia de que o conhecimento surge a partir da ruptura de um conhecimento anterior ao afirmar que:

O sentido de um conhecimento matemático se define não apenas pelo conjunto de situações onde este conhecimento é realizado como teoria matemática, não somente pelo conjunto de situações onde o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto das concepções, das escolhas anteriores que ele rejeita, dos erros que ele evita, pelas economias que ele proporciona, as formulações que ele retoma, etc.

(Brousseau, 1983, p.170, apud Motta, 2006)

Em 1981, George Glaeser publicou um estudo intitulado *Epistemologia dos números relativos*⁷ detalhando trabalhos de alguns matemáticos – como Diofante, Euler, e D’Alembert – com o objetivo de observar alguns obstáculos que se opunham à aquisição da noção dos números negativos, e, como consequência, à conhecida *regra de sinais*. Como uma possível continuação de seu trabalho, o autor sugere que experimentos viessem a ser feitos para examinar se as dificuldades ocorridas aos grandes matemáticos ocorria com estudantes.

Existe um registro de um debate entre Brousseau e Glaeser ocorrido em 1984 a respeito da noção de obstáculo epistemológico (Igliori, 1999, p.103). Glaeser não utilizou em seu primeiro estudo sobre o tema o termo obstáculo segundo a interpretação de obstáculo epistemológico de Bachelard. Ele utilizava o termo obstáculo como sinônimo de dificuldade, barreira e sintoma. De modo ingênuo, seu objetivo era determinar obstáculos que se opusessem à compreensão e à aprendizagem de Matemática. Vale ressaltar, entretanto, que a discussão do tema era prematura, não havia sido realizada ainda a formalização de tal noção.

Duroux (apud Igliori, 1999) também apresentou estudos sobre a noção de obstáculo epistemológico.

⁷ Título original: *Epistemologie des Nombres Relatifs in Recherches em Didactique des Mathématiques*, vol. 2, n°3 (p. 303-346), 1981.

Para Duroux (1982), um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimentos. Esse conhecimento produz repostas adaptadas num certo contexto freqüentemente reencontrado.

(Iglori, 1999, p.101-102)

Brousseau, segue essa linha de raciocínio. Para ele um obstáculo se manifesta por meio de um conjunto de dificuldades comuns a diversas pessoas que partilham uma concepção equivocada de uma determinada noção ou conceito matemático, a partir de erros que são persistentes e recorrentes. Desse modo, esses erros estão ligados uma fonte comum: um modo de conhecer, uma concepção coerente, correta em um contexto anterior, um conhecimento antigo e que obteve êxito em todo domínio de ações anteriores. Esses erros não são explícitos e não costumam desaparecer radicalmente, persistem num momento, ressurgem em outros, se manifestam muito tempo depois do sujeito ter rejeitado o modelo defeituoso de seu sistema cognitivo. (Brousseau, 1983).

Assim, esses erros recorrentes e não aleatórios não são necessariamente frutos da ignorância, da incerteza ou do acaso, mas fruto de um conhecimento anterior que tinha sentido, era significativo e que então se revela falso, inadequado ao novo contexto. Estes erros podem se constituir obstáculos tanto para o professor quanto para o aluno. Brousseau concebe, portanto, o erro como uma manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas que se tornam obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos. A superação dos obstáculos deve integrar o projeto de ensino e o erro constituir em passagem obrigatória, uma vez que ele é necessário para desencadear o processo de aprendizagem do aluno e contribuir para o professor situar as concepções deste aluno, compreendendo os obstáculos subjacentes e, assim, poder agir.

Brousseau ainda nos alerta sobre o fato de que um obstáculo epistemológico não se manifesta apenas por meio de erros recorrentes, mas também pela impossibilidade de enfrentar certas questões ou por uma resolução insatisfatória.

De acordo com Perrin Glorian (1995), Brousseau retoma as idéias de Duroux ao caracterizar o obstáculo da seguinte maneira:

- ❖ um obstáculo será um conhecimento, uma concepção; não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento;
- ❖ este conhecimento produz respostas adaptadas num certo contexto, freqüentemente encontrado;
- ❖ entretanto, ele produz respostas falsas fora desse contexto. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente;
- ❖ além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento melhor; não basta possuir um conhecimento melhor para que o precedente desapareça; é então indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber;
- ❖ depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado. (Perrin Glorian, 1995)

Brousseau, em seus estudos, inspirado pela Epistemologia de Bachelard, diferencia as origens dos obstáculos encontrados na Matemática. São elas:

- ❖ obstáculos didáticos de origem epistemológica: inerentes ao conhecimento matemático e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para os superar na história. Exemplo: a associação do número zero com o “nada”;
- ❖ obstáculos didáticos de origem didática: resultantes de uma transposição didática que aparentemente depende de uma escolha do professor ou de um

projeto pedagógico. São conhecimentos mal elaborados, incompletos que tendem a ser transmitidos pelos professores. Exemplo: concepção dos números decimais como dois números inteiros separados por uma vírgula;

- ❖ obstáculos didáticos de origem ontogênica: resultantes da limitação (neurofisiológica entre outras) do aluno em um determinado momento de seu desenvolvimento. Exemplo: a construção do conceito de volume não é possível antes dos 10 anos de idade aproximadamente, segundo a teoria piagetiana;
- ❖ obstáculos didáticos de origem cultural: fruto de concepções errôneas, equivalem a certas maneiras de pensar, mas que não correspondem a conhecimentos científicos reconhecidos. Por exemplo, a idéia da multiplicação como uma sucessão de adições; no conceito de probabilidade a idéia de sorte como determinante para se ganhar ou perder um jogo, ou seja, a crença do acaso como determinante do destino.

Ao defender a tese da diversidade de origens para os obstáculos epistemológicos, Brousseau ampliou a concepção subjetivista de Bachelard da atribuição dos erros no processo de construção do conhecimento exclusivamente aos sujeitos que o constroem e amenizou o pressuposto da existência do paralelismo ontofilogenético. Entretanto, ao preservar a tese do obstáculo epistemológico como algo que se manifesta tanto no processo de construção do conhecimento como no processo de ensino-aprendizagem, não chega a negar completamente o argumento recapitulacionista presente no “princípio genético”.

(Motta, 2006, p.67)

Para Brousseau o aluno só atribui sentido aos conteúdos, na interação constante com situações problemáticas, na interação dialética, uma vez que o sujeito antecipa e finaliza suas ações; ele indica ainda, o caminho necessário para que o professor cuide dos obstáculos epistemológicos que aparecem em sala de aula:

Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se queira ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas – entre aquelas às quais se opõem – para obter um resultado no qual o aluno se dedicou.

(Brousseau, 1983, p.179, apud Motta, 2006)

Como ressalta Brousseau, particularmente na Matemática é preciso prestar atenção à generalização excessiva que muitas vezes aparece no ensino dessa disciplina e identificar quando essa generalização passa a ser uma obstrução ao conhecimento objetivo. Trata-se de uma precipitação do pensamento lógico indutivo, onde a observação de uma caso particular, às vezes, já é suficiente para induzir afirmações gerais. Entretanto, essa não é a generalização existente no saber matemático, onde a observação de casos particulares não garante a validade no caso geral, no máximo, pode sugerir hipóteses ou conjecturas. A generalização proposta por um teorema matemático só faz sentido como síntese da regularidade existente em uma infinidade de casos particulares e mais ainda na existência de regularidade em um caso qualquer. Mas, se o ensino de um assunto matemático for iniciado pelo aspecto de sua generalização, a chance de ocorrer um conhecimento vago é grande. A ordem da construção epistemológica da generalização não se inicia pelo fato geral em si; ela deve ser conjecturada a partir de casos particulares e por meio de um lento processo que envolve indagações, reflexões, avanços e retrocessos, culminando em uma demonstração como síntese de elaboração do saber.

2.3 ALGUNS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS IDENTIFICADOS NA MATEMÁTICA

Brousseau (1983), em seus estudos, identificou alguns obstáculos epistemológicos presentes no ensino/aprendizagem de Matemática. São eles:

- ❖ dificuldade em aceitar que se possa obter um aumento por uma divisão e uma diminuição por uma multiplicação;
- ❖ dificuldade de achar um número inteiro decimal entre dois outros para renunciar a encontrar um sucessor de um decimal (por exemplo, o aluno afirma que 3,25 é sucessor de 3,24);
- ❖ dificuldade de aceitar a dupla escrita dos decimais (por exemplo, 1,5 e 1,4999...);
- ❖ dificuldade de conceber o produto de dois números decimais

Glaeser (1981) organizou uma lista provisória de obstáculos que provavelmente marcaram a constituição do conceito de número relativo; são eles:

- ❖ (1) inaptidão para manipular quantidades negativas isoladas;
- ❖ (2) dificuldades de dar sentido às quantidades negativas isoladas;
- ❖ (3) dificuldade de homogeneização da reta numérica;
- ❖ (4) ambigüidade dos dois zeros (zero absoluto e zero origem);
- ❖ (5) a estagnação no estágio das operações concretas;
- ❖ (6) o desejo de fazer funcionar um *bom* modelo aditivo para o domínio multiplicativo.

Após estudar a história do desenvolvimento dos números relativos no trabalho de alguns matemáticos, Glaeser organizou uma tabela mostrando os possíveis obstáculos com os quais eles se depararam. Em sua notação, o símbolo “+” significa que já ocorreu a ruptura de tal obstáculo, o “-” indica que o matemático não transpôs o obstáculo e o “?” destina-se a casos em que ele não se julgou capaz de responder.

Obstáculos ⁸ Autores	1	2	3	4	5	6
Diofante	—					
Simon Stevin	+	—	—	—	—	—
René Descartes	+	?	—	?		
Colin Mc Laurin	+	+	—	—	+	+
Léonard Euler	+	+	+	?	—	—
Jean d'Alembert	+	—	—	—	—	—
Lazare Carnot	+	—	—	—	—	—
Pierre de Laplace	+	+	+	?	—	?
Augustin Cauchy	+	+	—	—	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Fonte: Glaeser, 1981, p.309

Artigue em um artigo intitulado *Epistemologia e Didática*, publicado em 1990, detalha o trabalho de Bernard Cornu, realizado em 1983, no qual estão identificados obstáculos epistemológicos relativos à noção de limites como por exemplo no conceito de função, na representação geométrica ou no simbolismo específico do conceito de limite.

Perrin Glorain (1995) destacou em alguns dos seus estudos que os conhecimentos sobre relações entre números naturais constituem um obstáculo para a aprendizagem dos decimais. Ela discutiu, por exemplo, a dificuldade de conceber o produto de dois números decimais. Para ilustrar essas dificuldades, a autora cita o exemplo de uma aluna de sexta série que não conseguia compreender porque é correto multiplicar 46 por 1,35 para calcular o preço de 1,35kg de carne a 46 francos o quilo. E atribuiu essa dificuldade ao fato de que a idéia da multiplicação como uma sucessão de adições normalmente difundida para os números inteiros não faz sentido nesta situação. Outra situação citada pela autora foi a idéia bastante difundida de que o quadrado de um número é sempre maior do que ele próprio, o que gera um grande

⁸ Índices referentes à lista de Glaeser: (1) inaptidão para manipular quantidades negativas isoladas; (2) dificuldades de dar sentido às quantidades negativas isoladas; (3) dificuldade de homogeneização da reta numérica; (4) ambigüidade dos dois zeros (zero absoluto e zero origem); (5) a estagnação no estágio das operações concretas; (6) o desejo de fazer funcionar um bom modelo aditivo para o domínio multiplicativo.

conflito quando os alunos se deparam com situações do tipo $(0,5)^2 = 0,25$. Ou seja, a idéia anterior provoca um desequilíbrio e, como consequência, há a instauração de um obstáculo, pois a tendência é de que esse aluno mantenha sua idéia anterior.

Trindade (1996), em sua dissertação de mestrado realizada na Universidade Federal de Santa Catarina, estudou a noção de obstáculo epistemológico no campo das funções e identificou com dificuldades recorrentes presentes na inabilidade em: construir associações entre as diferentes representações de funções; diferenciar entre gráficos de funções contínuas e discretas; reconhecer funções não lineares; compreender o conceito de variável; ser capaz de perceber que uma mesma função pode ser representada por duas fórmulas que se diferenciam apenas pelo nome de suas variáveis; interpretar gráficos; manipular símbolos específicos de função ($f(x)$, $x \rightarrow y$). A seguir, expõe implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de funções apoiando-se, principalmente, no uso de modelagem no ensino.

Borges (s/d) realizou em sua dissertação de mestrado na FEUSP o trabalho intitulado *Obstáculos Epistemológicos apresentados pelos alunos na aprendizagem de Álgebra Linear*, estudando obstáculos relativos às noções de espaço vetorial, abstração, demonstrações em nível universitário.

CAPÍTULO 3

O FOCO DA PESQUISA

3.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Atualmente, o currículo de Matemática do Ensino Fundamental está organizado em Eixos que, apesar de terem características singulares, estão interligados. São eles: Números e Operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), Espaço e Forma (no campo da Geometria), Grandezas e Medidas (que permite ligações entre os campos da Aritmética, Álgebra e Geometria) e Tratamento da Informação. O trabalho com esses eixos deveria ser realizado de forma articulada, entretanto, o eixo Números e Operações tem sido o de maior destaque na Matemática do Ensino Fundamental das escolas brasileiras.

Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram construídos.

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

(BRASIL, 1998, p.50)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), o desenvolvimento do eixo Números e Operações deve se basear em situações em que o aluno construa o significado de números e os significados das operações. Nos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental o objeto principal de estudo do eixo Números e Operações é o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais (positivos) é introduzido na 4ª série ou 5º ano.

O primeiro ciclo, referente às 1ª e 2ª séries (ou 2º e 3º anos) deve desenvolver no Eixo Números e Operações: a observação de critérios que definem uma classificação de números

(maior que, menor que, estar entre); contagens crescentes e decrescentes; identificação de regularidades em uma série numérica; a leitura e a escrita de números; a análise, interpretação, resolução e formulação de situações-problema, compreendendo alguns dos significados das operações, em especial da adição e da subtração; a utilização de sinais convencionais (+, -, $\times$, $\div$, =) na escrita das operações; a organização dos fatos básicos das operações pela identificação de regularidades e propriedades; a utilização da idéia de decomposição de escritas numéricas para a realização de cálculos mentais exatos e aproximados; cálculos de adição e subtração por meio de estratégias pessoais e técnicas convencionais.

No Eixo Números e Operações o segundo ciclo do Ensino Fundamental, formado pelas 3ª e 4ª séries (ou 4º e 5º anos) deve desenvolver: a ampliação do significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades; a compreensão e utilização das regras do sistema de numeração decimal, para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de qualquer ordem de grandeza; a consolidação dos significados das operações fundamentais a partir da resolução de problemas; a construção do significado do número racional (positivo) e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social; a interpretação e produção de escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais (positivos) na forma decimal; a localização na reta numérica, de números racionais (positivos) a fim de compará-los e ordená-los; identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas; exploração dos diferentes significados das frações (parte/todo, quociente e razão); observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária; e a relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional (positivo).

Ainda no Eixo Números e operações o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, formado pelas 5ª e 6ª séries (ou 6º e 7º anos) amplia e constrói novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de situações de: reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como “ser múltiplo de”, “ser divisor de”; compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão de regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal; reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação e deslocamento entre dois pontos; localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações; análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais; cálculos envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais; compreensão da potência com expoente inteiro positivo como produto reiterado de fatores iguais, identificando e fazendo uso das propriedades da potenciação em situações-problema; atribuição de significado à potência de expoente nulo e negativo pela observação de regularidades com expoente positivo; compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número (natural ou racional positivo); cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas; resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo.

O quarto e último ciclo do Ensino Fundamental que é formado pelas 7ª e 8ª séries (ou 8º e 9º anos) deve desenvolver: a ampliação e consolidação dos significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais; identificação de um número irracional como um

número de representação decimal infinita e não periódica e a localização de alguns deles na reta numérica; a resolução de situações-problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; e a seleção e a utilização de diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), foi criado em 1988 e aplicado a cada dois anos a partir de 1990 até o ano de 2005. Avaliava por amostragem a qualidade, a equidade e a eficiência do ensino e da aprendizagem nos Ensinos Fundamental e Médio. O SAEB foi desenvolvido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) na sua Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB). Alunos de 4ª e 8ª séries (5º e 9º anos) do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas e particulares em todo o Brasil realizavam provas de Português e de Matemática com ênfase em leitura, compreensão de textos e resolução de problemas. O principal objetivo do SAEB era oferecer subsídios para a formulação, reformulação e monitoramento de políticas públicas, contribuindo, dessa maneira, para a melhoria da qualidade do ensino brasileiro e diminuição da diferença no sistema educacional nas diferentes Regiões e Estados da Federação. A partir dos resultados obtidos, o MEC e as Secretarias Estaduais e Municipais de Educação poderiam definir ações voltadas para a correção de distorções e deficiências identificadas e direcionar seus recursos para áreas prioritárias.

O SAEB utilizava dois formatos de instrumentos: testes e questionários. Os testes visavam, a partir de questões específicas, medir o desempenho dos alunos nas disciplinas de Língua Portuguesa – ênfase na leitura e interpretação de texto – e Matemática – ênfase na resolução de problemas. Os questionários visavam coletar informações sobre os contextos sócio-econômico e cultural dos alunos, professores e diretores e conhecer a formação

profissional dos docentes e diretores. Informações sobre a infra-estrutura da escola também eram coletadas. O recurso metodológico para a avaliação dos resultados se baseavam na utilização de uma metodologia de comparação de resultados, denominada Equalização que permitia comparar os resultados do SAEB, ao longo dos anos e entre as séries, por meio da inserção de um conjunto de itens comuns aos testes aplicados no final dos ciclos dos Ensino Fundamental e Médio e inserção de itens comuns a mais de uma série. Além disso, o site do INEP descreve ainda o uso da Teoria de Resposta ao Item (TRI), que pode ser definido como um conjunto de modelos matemáticos que relacionam um ou mais traços latentes de um indivíduo e permite, segundo ele, estimar as habilidades dos alunos independentemente do conjunto específico de itens respondidos

Os resultados da avaliação da educação básica do SAEB são apresentados em uma escala de desempenho específica das disciplinas capaz de descrever⁹, em cada nível, as competências e as habilidades que os alunos são capazes de demonstrar. A escala do SAEB, como já citado, permite apresentar em uma mesma métrica os resultados de desempenhos dos estudantes de todas as séries avaliadas nos anos de aplicação dos testes (1990, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001 e 2003). A escala nos mostra o percentual dos alunos que já construiu as habilidades desejáveis para a sua série e os que estão abaixo ou acima do esperado.

Em 2005 o SAEB sofreu uma ligeira alteração e foi dividido em dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC). A ANEB é realizada por amostragem em cada Estado da Federação e tem como objetivo avaliar as gestões dos sistemas educacionais, a ANEB recebe o nome do SAEB em suas divulgações. A ANRESC é mais extensa e detalhada e tem como objetivo avaliar cada escola. Pela sua universalidade, a ANRESC recebe o nome de Prova Brasil em

⁹fonte: www.inep.gov.br acessado em 06/05/2008 às 14h09

suas divulgações sendo aplicada a todos os estudantes de 4ª e 8ª séries (5º e 9º anos), de todas as escolas públicas urbanas do Brasil com mais de 20 alunos na série.

Nos testes de Matemática são avaliadas habilidades e competências definidas nas matrizes de referência que estabelecem o domínio esperado de alunos de 4ª série ou 5º ano (ANEXO 1), 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental (ANEXO 2) e de alunos do 3º ano do Ensino Médio (ANEXO 3) recomendados pelos PCNs. É utilizada uma mesma matriz de referência em Matemática no SAEB e na Prova Brasil. As questões são elaboradas a partir de situações que requerem a resolução de problemas nos eixos *Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações* e *Tratamento da Informação*.

Os resultados de ambas as avaliações são apresentados em uma escala de desempenho por disciplina, designado por níveis. A escala de Matemática é composta por dez níveis que vão do 125 ao 375, portanto, os níveis variam de 25 em 25 pontos. Os níveis da escala são cumulativos, ou seja, o que os alunos demonstram saber em um nível está incorporado nos níveis posteriores da escala, ou seja, cada nível é constituído pelas habilidades descritas somadas às habilidades dos níveis anteriores. Os números indicam apenas uma posição na escala, por isso, faz-se necessária uma interpretação pedagógica dos resultados (ANEXO 4).

O gráfico abaixo apresenta as médias de proficiência em Matemática obtidas pelos alunos nas avaliações do SAEB realizadas entre 1995 e 2005.

Fonte: www.inep.gov.br acessado em 06/05/2008 às 14h09

Resultados como os verificados no gráfico anterior e o dia a dia em sala de aula mostram que o Ensino de Matemática no Brasil apresenta problemas. Os alunos demonstram dificuldades básicas de aprendizagem. Esse déficit básico dificulta o ensino de conceitos mais avançados que deveriam ser ensinados nas séries seguintes. Dessa forma, todo o ensino-aprendizagem durante a vida escolar do aluno fica comprometido e prejudicado.

Na experiência profissional de sala de aula e em aulas particulares verifiquei que muitos dos erros apresentados em Matemática são cometidos por vários alunos, bem como são semelhantes as dificuldades em realizar algumas operações e conceber determinados conteúdos são semelhantes em vários indivíduos. Alunos que concluíram o Ensino Fundamental se atrapalham, por exemplo, com operações básicas envolvendo frações, com números irracionais e até com divisão entre números naturais, apesar de saberem resolver questões de geometria e trabalhar com álgebra, conteúdos considerados mais complexos. Em divisões como $1236 \div 12$, que resulta 103, freqüentemente aparece como resultado o número 13, pois os alunos se atrapalham com o algoritmo e não se preocupam com o valor posicional dos números, como também não têm noção da ordem de grandeza dos números envolvidos

sem do resultado esperado. Esse erro pode ser encontrado ainda em estudantes dos Ensinos Médio e Superior.

<p>① 1 "não dá" pra dividir por 12, temos que "pegar" o 12</p> $\begin{array}{r} \widehat{1236} \quad 12 \\ \hline \end{array}$	<p>② 1 x 12 = 12 para 12 nada</p> $\begin{array}{r} \widehat{1236} \quad 12 \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$
<p>③ o 3 "não dá" pra dividir por 12, temos que pegar o 36</p> $\begin{array}{r} \widehat{1236} \quad 12 \\ \hline 0 \ 36 \quad 1 \end{array}$	<p>④ 3 x 12 = 36 para 36 nada</p> $\begin{array}{r} \widehat{1236} \quad 12 \\ \hline 0 \ 36 \quad 13 \\ 0 \end{array}$

O significado de cada passo do algoritmo quase nunca é justificado, o que leva a problemas como o evidenciado na seqüência de cálculo anterior.

Outras questões semelhantes, verificadas no dia a dia de um professor de Matemática, suscitaram a hipótese de que a concepção errônea dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais surge como obstáculo a muitos dos problemas que os alunos apresentam no decorrer de sua vida escolar. Muitos professores reclamam de que seus alunos não sabem a tabuada e atribuem a essa deficiência a “culpa” pela maioria dos erros cometidos, mas muitas vezes o problema se encontra na concepção dos números, como, por exemplo, na equivalência entre as ordens¹⁰ numéricas.

A presente pesquisa tem por objetivo identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos na sala de aula do Ensino Fundamental, no ensino/aprendizagem dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais a fim de ampliar a discussão visando a concepção dos números reais.

¹⁰ O lugar ocupado por um algarismo, na escrita de um número, indica a ordem do agrupamento; essas ordens são numeradas da direita para a esquerda, têm nomes específicos e são agrupadas em classes a cada três ordens. Como classes podemos citar a das unidades simples, formada pelas ordens unidades, dezenas e centenas; a classe dos milhares, formada pelas ordens unidades, dezenas e centenas de milhar; e a classe dos milhões, formada pelas ordens unidades, dezenas e centenas de milhão.

3.2 A NATUREZA DO INSTRUMENTO DE PESQUISA

A pesquisa se concentrou em questionários elaborados com o objetivo de verificar a concepção que os alunos possuem dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Foram elaborados questionários para serem aplicados em todas as séries do Ensino Fundamental, a partir da 4ª série ou 5º ano na tentativa de tornar possível a visualização a ampliação da concepção dos diferentes subconjuntos numéricos e, por fim, analisar a idéia que os alunos possuem dos números reais e identificar *erros recorrentes e não aleatórios* apresentados pelos alunos que podem se constituir em obstáculos (no sentido de Brousseau) ao ensino desse conteúdo da Matemática. As questões foram elaboradas tendo como base os descritores do tema Números e Operações da Prova Brasil para cada série, ou seja, houve uma tentativa de contemplar as habilidades e competências esperadas para o eixo Números e Operações nas séries em questão.

O questionário da 4ª série ou 5º ano (ANEXO 5) apresenta como foco os números naturais. As questões têm objetivos específicos a fim de, nesse universo, verificar a concepção dos alunos de número natural e sobre o significado das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Os descritores¹¹ do SAEB e da Prova Brasil contemplados nesse questionário foram: o reconhecimento e a utilização das características do Sistema de Numeração Decimal (D13 - 4ª série), tais como agrupamentos, trocas na base 10 e Sobre o princípio do valor posicional e da decomposição de números naturais nas suas diversas ordens (D15 - 4ª série); identificação da localização de números naturais na reta numérica (D14 - 4ª série); cálculo do resultado de uma adição ou subtração de números naturais (D17 - 4ª série); cálculo do resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais (D18 - 4ª série); resolução de problemas com números naturais envolvendo diferentes significados na adição e subtração (juntar, alteração de um estado inicial e comparação) (D19 - 4ª série); resolução de

¹¹ Os descritores estão melhor explicitados no Capítulo 4

problemas com números naturais envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão (multiplicação comparativa, configuração retangular e combinatória) (D20 - 4ª série). Além disso, o questionário da 4ª série ou 5º ano trouxe a resolução de expressões numéricas envolvendo as quatro operações e o uso dos parênteses.

O questionário da 5ª série ou 6º ano apresenta como foco os números racionais (positivos) e foi dividido em duas partes devido ao grande conteúdo que o assunto compreende. O questionário I (ANEXO 6) trouxe questões relacionadas aos números racionais (positivos) escritos na forma de fração, enquanto o questionário II (ANEXO 7) abordou questões mais ligadas aos racionais (positivos) escritos na forma de número decimal, além de relações entre as escritas. Os descritores¹² do SAEB e da Prova Brasil contemplados neste questionário e melhor explicitados na análise dos questionários foram: identificar diferentes representações de um mesmo número racional (positivo) (D21 – 4ª série); identificar a localização de números racionais (positivos) representados na forma decimal na reta numérica (D22 – 4ª série); identificar fração como representação que pode estar associado a diferentes significados (D24 – 4ª série); resolver problemas com números racionais (positivos) expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração (D25 – 4ª série); identificar a localização de números racionais na reta numérica (D17 – 8ª série); reconhecer as diferentes representações de um número racional (D21 – 8ª série); identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados (D22 – 8ª série); identificar frações equivalente (D23 – 8ª série); reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos (D24 – 8ª série); efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração,

¹² Os descritores estão melhor explicitados no Capítulo 4

multiplicação e divisão) (D25 – 8ª série); resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) (D26 – 8ª série).

O questionário da 6ª série ou 7º ano (ANEXO 8) apresenta como foco os números inteiros. As questões têm como principais objetivos verificar a concepção dos alunos a respeito dos números inteiros e se os alunos realizam as quatro operações básicas nesse universo. Os descritores¹³ do SAEB e da Prova Brasil contemplados neste questionário e melhor explicitados na análise dos questionários foram: identificar a localização de números inteiros na reta numérica (D16 – 8ª série); efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (D18 – 8ª série); resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (D20 – 8ª série). Além dos descritores mencionados, o questionário trouxe exercícios relacionados ao reconhecimento e à utilização de algumas características dos números inteiros, como módulo e a idéia de sucessor e antecessor.

O questionário da 7ª série ou 8º ano (ANEXO 9) apresenta como foco os números irracionais. As questões têm como principais objetivos verificar a concepção dos alunos sobre os números irracionais, ou seja, se reconhecem e sabem reconhecer um número irracional. O descritor¹⁴ do SAEB e da Prova Brasil contemplado neste questionário foi: efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais (D27 – 8ª série). Além do descritor apresentado, o questionário contemplou a concepção de um número irracional em algumas questões.

O questionário da 8ª série ou 9º ano (ANEXO 10) teve como foco os números reais, reunindo questões de outras séries juntamente com algumas questões mais gerais. Dessa forma, esse questionário contemplou todos os descritores apresentados nos questionários dos demais assuntos.

¹³ Os descritores estão melhor explicitados no Capítulo 4

¹⁴ O descritor está melhor explicitado no Capítulo 4

3.3 SUJEITOS DA PESQUISA E SUAS CONDIÇÕES

Os questionários foram aplicados na última semana letiva do ano de 2008 a 121 alunos do Ensino Fundamental de uma escola particular localizada em São Vicente, litoral sul de São Paulo, distribuídos da seguinte maneira:

- ❖ Números Naturais: 36 alunos de 4ª série ou 5º ano;
- ❖ Números Racionais (positivos): 23 alunos de 5ª série ou 6º ano, sendo 10 (números fracionários) e 13 (números decimais);
- ❖ Números Inteiros: 23 alunos de 6ª série ou 7º ano;
- ❖ Números Irracionais: 20 alunos de 7ª série ou 8º ano;
- ❖ Números Reais: 19 alunos de 8ª série ou 9º ano;

Segundo o site institucional da escola, há cerca de quarenta anos a escola tem como linha mestra das atividades curriculares a educação para a paz por meio do “Projeto Vivendo Valores” que tem como principal objetivo sensibilizar a comunidade a fim de superar o individualismo, vivenciar a solidariedade, contribuindo na construção de uma cultura de paz. Há três anos a escola adotou o sistema de ensino da rede Dom Bosco, desenvolvido em escolas de Curitiba e “distribuídos” para várias escolas associadas. No ano de 2007, a escola obteve o melhor desempenho no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) da cidade de São Vicente.

Na aplicação dos questionários não houve interferência por parte da pesquisadora que apenas orientou os professores quanto às condições da pesquisa. Foi solicitado que os alunos utilizassem apenas caneta preta ou azul a fim de facilitar a leitura e reprodução das respostas, que eles deixassem as questões em branco se não conseguissem fazer ou que assinalassem as opções “não entendi a pergunta” quando fosse necessário. Além disso, não foi determinado um tempo limite para a resolução das questões.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentaremos uma análise sobre as respostas obtidas nos questionários, organizadas a partir dos descritores do Saeb e da Prova Brasil de Matemática das 4ª série (ou 5º ano) e 8ª série (ou 9º ano) (ANEXO 1).

A descrição completa das respostas aos questionários, encontram-se em anexo (ANEXOS de 11 a 17).

4.1. NÚMEROS NATURAIS

4.1.1 SOBRE O RECONHECIMENTO E A UTILIZAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL (D13 – 4ª SÉRIE) E SOBRE O PRINCÍPIO DO VALOR POSICIONAL E DA DECOMPOSIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS NAS SUAS DIVERSAS ORDENS (D15 - 4ª SÉRIE)

A primeira questão do questionário sobre números naturais, ao trabalhar a relação de inclusão entre as ordens, traz à tona duas características fundamentais do Sistema de Numeração Decimal. São elas: o agrupamento de 10 em 10 e a troca na base 10. Os alunos não apresentaram dificuldade em relacionar uma quantidade de unidades com quantidades de demais ordens (dezenas, centenas e unidades de milhar). Entretanto, ao se depararem com uma comparação entre outras ordens os alunos mostraram que não dominam a relação de inclusão entre elas. Por exemplo: apenas 13 alunos (de um total de 36) explicitaram a relação de igualdade entre 8 centenas e 80 dezenas; somente 6 alunos identificaram a equivalência entre 6 milhares e 60 centenas; ou ainda 16 alunos perceberam que 30 dezenas correspondem a 3 centenas. Essa falta de familiarização com a relação de inclusão entre as ordens pode comprometer o cálculo de operações que envolvam reserva (o conhecido “vai 1” em adições e multiplicações), transformações entre as ordens (nos casos de “empréstimo” na subtração) e situações em que é necessário agrupar na divisão. O texto dos PCNs ressalta que:

É provável que ele (o aluno) não tenha desenvolvido plenamente essas noções (sobre o sistema de numeração decimal), tendo em vista a complexidade do

conteúdo, como saber quantos agrupamentos de centenas são necessários para construir uma dezena de milhar – relações de inclusão

(BRASIL, 1998, p.66)

OBSERVAÇÃO: os alunos não reconhecem as relações de inclusão entre dezenas e centenas ou entre dezenas e milhares ou ainda entre centenas e milhares; é possível que os alunos sempre se atenham às unidades ao comparar as ordens e que esse conhecimento se torne um obstáculo à ampliação da relação de inclusão entre as demais ordens; esse obstáculo pode ter origem didática caso o aluno não seja colocado em contato com situações em que seja necessária a comparação entre ordens que não envolva a ordem das unidades.

O reconhecimento da escrita de números naturais e a composição/decomposição em milhares, centenas, dezenas e unidades, considerando seu valor posicional na base decimal foi abordado na questão de número 2. O número “quatro centenas + cinco dezenas + oito unidades” foi escrito corretamente por 26 alunos dos 36. Entretanto, apareceram algumas respostas que evidenciam existirem alunos que não sabem escrever os números.

400.50.8

4000.500.80

Ainda nessa questão, apenas 17 alunos, em um total de 36, escreveram corretamente o número “sete unidades de milhar + quatro centenas + uma dezena + cinco unidades”. Da mesma maneira que no item anterior, muitos alunos deram indícios de que podem não ter compreendido o princípio do valor posicional ou da característica aditiva do Sistema de Numeração Decimal.

70415

7000.400.10.5

7.400.015

51470000

74105

Os PCNs de Matemática de 1ª a 4ª série antecipam que a justaposição das partes dos números pode ocorrer:

Para produzir escritas numéricas, alguns alunos recorrem à justaposição de escritas que já conhecem, organizando-as de acordo com a fala. Assim, por exemplo, para representar o 128, podem escrever 100208 (cem/vinte/oito)

(BRASIL, 1997, p.97)

OBSERVAÇÃO: os alunos apresentaram dificuldade em escrever números a partir da sua decomposição por extenso; pode ser que a língua natural atrapalhe a compreensão das regras relacionadas à característica aditiva do Sistema de Numeração Decimal.

A questão 2 trouxe ainda outra possível dificuldade dos alunos na escrita dos números que ocorre na ausência de uma das ordens na decomposição dos mesmos. Por exemplo, apenas 18 alunos, de um total de 36, escreveram de forma correta o número “uma unidade de milhar + sete unidades”. Neste item apareceram diversas escritas que evidenciam não só o problema da justaposição como outro problema dos alunos em escrever números com essas características.

10007	1. 000. 007	
710000	10007	77

Um outro item da mesma questão mostrou que apenas 15 alunos, dos 36, escreveram o número “nove centenas + sete dezenas” corretamente. Apareceram respostas como:

9000 700	900.70	9.070
907	79	97

Podemos afirmar, então, que os alunos podem não conhecer o significado do algarismo 0 na escrita de um número e, dessa forma, não dominam o princípio do valor posicional.

OBSERVAÇÃO: além da questão da justaposição observada anteriormente, os alunos não sabem escrever números cuja decomposição apresenta ausência de alguma ordem; pode ser que os alunos acreditem que os algarismos de um número devam aparecer na sua decomposição em ordens; esse obstáculo pode ter origem epistemológica já que a idéia de que o número 0 não possui valor pode interferir na sua interpretação como um algarismo utilizado para indicar a ausência de alguma ordem inteira no número.

4.1.2 SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS NA RETA NUMÉRICA (D14 – 4ª SÉRIE)

A questão 3 apresentou uma reta numérica e perguntas sobre os números naturais que podem ser resolvidas com o auxílio da reta.

A maioria dos alunos, 25 dos 36, soube reconhecer que se um número está à direita de outro, ele é maior que esse número. 30 alunos identificaram o 0 como sendo o menor número natural.

Ao serem questionados sobre qual é o maior número natural que existe, 19 alunos apontaram o número 13, que era o maior indicado na reta do enunciado da questão. 13 alunos explicitaram que não é possível determinar o maior número ou que o conjunto dos naturais é infinito, que não tem fim etc. 6 alunos deixaram a questão em branco.

As idéias de sucessor e antecessor de um número são de conhecimento dos alunos. Dos 36 alunos, 33 indicaram o número 5 como antecessor de 6 e 31 indicaram o número

14 como sucessor de 13. Ao serem questionados sobre o antecessor de 0, 13 alunos, dos 36, responderam que não existe.

Alguns indicaram números “pequenos” como 0,1 ou 0,5. Outros 13 alunos responderam que o antecessor de 0 é ele mesmo, o 0.

Outro item dessa questão abordou a característica que entre dois números naturais consecutivos não existe outro número natural. 14 dos 36 alunos indicaram que não existe outro número natural entre 0 e 1. Entretanto, a análise dessa questão ficou prejudicada porque não era possível saber se os alunos responderam a quantidade de números que acreditavam existir entre 0 e 1 ou se indicaram o número que acreditavam existir nesse intervalo.

A questão 5 trouxe a ampliação das características do conjunto dos números naturais abordadas na questão 3.

Dos 36 alunos, 22 alunos classificaram como verdadeira a sentença que diz que todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

(V) Todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

Successor é o número que vem depois do outro.
O sucessor de 0 é 1.

(V) Todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

Porque depois do zero é o um.

(V) Todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

De 0, 100 tem um número natural depois dele o zero também tem o um.

22 alunos indicaram que a sentença “todo número natural possui um antecessor, inclusive o zero” é falsa e justificaram de forma coerente.

(F) Todo número natural tem um antecessor, inclusive o zero.

Porque não tem número antes do zero.

(F) Todo número natural tem um antecessor, inclusive o zero.

Porque antes do zero não tem nada.

(F) Todo número natural tem um antecessor, inclusive o zero.

Os zeros não tem antes de todos os números então não tem números antes para ser seu antecessor.

31 alunos afirmaram que o conjunto dos naturais é infinito. Algumas das justificativas apresentadas foram:

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque não existe fim nos números.

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque os números naturais não acabam mais.

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Sim, começa do zero e vai até infinito.

4.1.3 SOBRE O CÁLCULO DO RESULTADO DE UMA ADIÇÃO OU SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS (D17 – 4ª SÉRIE)

A questão 12 apresentou cálculos de adição e subtração de diversos tipos.

Os alunos não tiveram dificuldades em efetuar uma adição sem reserva com 3 algarismos em cada parcela. 35 alunos, de um total de 36, o fizeram corretamente. Uma adição com procedimento de reserva foi resolvida de forma correta por 32 alunos, assim como outra adição que exigia duas trocas entre ordens. Os alunos parecem não apresentar dificuldade em efetuar adições.

O cálculo do resultado de subtrações parece ter sido mais difícil para os alunos. Apesar de 33 dos 36 alunos resolverem uma subtração sem “empréstimo” corretamente, os cálculos que envolviam reserva apresentaram altos índices de erro. Apenas 25 alunos conseguiram calcular o resultado de uma subtração com números de até 3 algarismos com reservas. Alguns alunos tiraram sempre o menor algarismo do maior, independentemente da posição dos números a que os algarismos considerados pertenciam.

$$\begin{array}{r} \text{e) } 1922 - 976 \\ 976 \\ 1922 \\ \hline 1054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{e) } 1922 - 976 \\ 1922 \\ -976 \\ \hline 1054 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO: a idéia de que, no conjunto dos números naturais, só podemos subtrair o menor número do maior pode se constituir um obstáculo para o aluno induzindo-o a retirar sempre o menor algarismo do maior, independentemente do número ao qual cada um pertence; esse obstáculo pode ter origem didática caso o professor enfatize que em uma subtração deve-se fazer sempre “o maior menos o menor” levando o aluno a generalizar essa “estratégia” para cada uma das ordens ao efetuar uma subtração entre números de mais de um algarismo.

A subtração mais complexa com números naturais de quatro algarismos e com reserva foi de grande dificuldade para alguns alunos. 21 alunos a resolveram corretamente. Mais uma vez a dificuldade anterior apareceu.

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ 4000 \\ 1986 \\ \hline 3986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ -1986 \\ 4000 \\ \hline 3986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ 4000 \\ -1986 \\ \hline 3986 \end{array}$$

Além disso, outros alunos se atrapalharam com o procedimento de reserva.

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ 1010 \\ 1986 \\ \hline 0124 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ 4.000 \\ -1986 \\ \hline 3.000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 = 2114 \\ 3400 \\ -1986 \\ \hline 2114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 4000 - 1986 \\ 4000 \\ -1986 \\ \hline 3124 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO: os alunos mostraram em questões anteriores não reconhecerem igualdades do tipo 1 milhar = 10 centenas ou 1 centena = 10 dezenas; isso traz dificuldade nas operações de subtração com reserva porque eles podem não compreender o significado do termo “emprestar” usado pelo professor.

4.1.4 SOBRE O CÁLCULO DO RESULTADO DE UMA MULTIPLICAÇÃO OU DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS (D18 – 4ª SÉRIE)

Ainda na questão 12 os alunos se depararam com cálculos de resultados de multiplicações e divisões de números naturais.

A multiplicação sem reserva, tendo como multiplicador um número de um algarismo, foi resolvida corretamente por 34 alunos, de 36. Já a multiplicação com reserva, ainda com multiplicador de um algarismo, foi resolvida de forma correta por 27 alunos.

Uma multiplicação cujos fatores são números de dois algarismos foi resolvida sem erros por 21 alunos. Algumas resoluções nos mostram a possibilidade de confusão realizada pelos alunos.

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ + 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{i) } 16 \times 35 \\ 16 \\ \times 35 \\ \hline 80 \\ 480 \\ \hline 560 \end{array}$$

A multiplicação cujos fatores eram números de dois algarismos, sendo um deles um número inteiro em dezenas (40) foi resolvida corretamente por apenas 18 dos 36 alunos, sendo que destes, 7 alunos multiplicaram 23 por 4 e depois acrescentaram o 0, 6 indicaram no algoritmo a multiplicação de 23 por 0 e 5 alunos inverteram os fatores multiplicando 40 por 23.

5 dos alunos que fizeram essa questão sumiram com o zero e deram como resposta o número 92.

$$\begin{array}{r} \text{j) } 23 \times 40 \\ 23 \\ \times 40 \\ \hline 92 \end{array}$$

Outros resultados foram apresentados pelos alunos:

$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 40 \\ \times 23 \\ \hline 00 \\ 80+ \\ \hline 800 \end{array}$	$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times 40 \\ \hline 23 \\ 92+ \\ \hline 943 \end{array}$	$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times 40 \\ \hline 100 \\ 132+ \\ \hline 1320 \end{array}$
$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times 40 \\ \hline 00 \\ 82+ \\ \hline 820 \end{array}$	$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times 40 \\ \hline 00 \\ 82+ \\ \hline 820 \end{array}$	$j) 23 \times 40$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times 40 \\ \hline 8200 \end{array}$

A multiplicação em que um dos fatores possui 3 algarismos, sendo o algarismo da dezena igual a 0, foi resolvida corretamente por 20 de 36 alunos, sendo que 18 deles inverteram os fatores e os outros 2 indicaram a multiplicação por 0.

Muitos alunos apresentaram dificuldade em lidar com o 0 da dezena do multiplicador.

$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 51 \\ \times 102 \\ \hline 102 \\ 510+ \\ \hline 5202 \end{array}$	$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 51 \\ \times 102 \\ \hline 102 \\ + 051 \\ \hline 113 \end{array}$	$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 51 \\ \times 102 \\ \hline 1002 \\ 510+ \\ \hline 6102 \end{array}$	$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 102 \\ \times 51 \\ \hline 102 \\ 510+ \\ \hline 5202 \end{array}$
$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 102 \\ \times 51 \\ \hline 102 \\ 510+ \\ \hline 5202 \end{array}$	$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 51 \\ \times 102 \\ \hline 5102 \end{array}$	$k) 51 \times 102$ $\begin{array}{r} 51 \\ \times 102 \\ \hline 5102 \end{array}$	

OBSERVAÇÃO – alguns alunos não sabem realizar multiplicações quando há o algarismo zero em alguns dos fatores.

A divisão exata por um número de um algarismo apresentada foi resolvida de forma correta por 24 dos 36 alunos. Já uma divisão não exata, com resto, foi feita sem erros por 31 alunos¹⁵.

Uma divisão exata por um número de 2 algarismos foi resolvida sem erros por 20 alunos. Vários problemas apareceram nesse item, possivelmente motivados pelo fato dos alunos não saberem o porquê dos passos do algoritmo da divisão.

n) $312 \div 13$
 $\overline{) 312} \begin{array}{r} 24 \\ 262 \\ \hline 119 \end{array}$

n) $312 \div 13$
 $\overline{) 312} \begin{array}{r} 24 \\ 262 \\ \hline 119 \end{array}$

n) $312 \div 13$
 $\overline{) 312} \begin{array}{r} 24 \\ 262 \\ \hline 119 \end{array}$

n) $312 \div 13$
 $\overline{) 312} \begin{array}{r} 24 \\ 262 \\ \hline 119 \end{array}$

A questão 12 apresentou, ainda, cálculos em que o quociente apresenta o algarismo zero em uma posição central. Como antecipado no capítulo 3, vários alunos tiveram dificuldade em efetuar essas operações.

Apenas 8 alunos fizeram o cálculo $1428 \div 7$ corretamente.

o) $1428 \div 7$
 $\overline{) 1428} \begin{array}{r} 204 \\ 028 \\ \hline 0204 \end{array}$

Dentre outros resultados, o mais presente foi o número 24, apresentada por 15 alunos que parecem não dar significado à representação do zero na ordem das dezenas.

o) $1428 \div 7$
 $\overline{) 1428} \begin{array}{r} 24 \\ 28 \\ \hline 0 \end{array}$

o) $1428 \div 7$
 $\overline{) 1428} \begin{array}{r} 24 \\ 28 \\ \hline 0 \end{array}$

¹⁵ Essa discrepância no índice de acertos entre essas divisões talvez se deva ao fato de que o cálculo exato $96 \div 6$ apresente um nível maior de dificuldade do que a divisão com resto $19 \div 5$.

Um dos alunos apresentou como resposta o número 240. Pode ser que ele tenha achado o resultado 24 “pequeno” e tentado aumentá-lo colocando um 0 no final.

o) $1428 \div 7$

1428 17

00 240

✓

Os outros alunos se atrapalharam e 7 deles não fizeram o cálculo.

O último item apresentou resultado semelhante. Apenas 7 alunos chegaram ao resultado 101 para o cálculo $2222 \div 22$.

p) $2222 \div 22$

2222 122

022 101

✓

O resultado 11 foi encontrado por 16 alunos.

p) $2222 \div 22$

2222 122

00 11

✓

OBSERVAÇÃO – os alunos não dão significado aos passos do algoritmo da divisão, eles parecem ter interiorizado a idéia de que “quando não dá abaixa o próximo” e continuam fazendo a divisão; esse obstáculo pode ter origem didática caso o professor enfatize apenas as “regras” do algoritmo da divisão como “quando não dá abaixa o próximo” sem levar em consideração o valor posicional dos algarismos ou ainda caso o professor não apresente aos alunos operações que recaiam nesse tipo de situação.

4.1.5 SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS NATURAIS ENVOLVENDO DIFERENTES SIGNIFICADOS NA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO (D19 – 4ª SÉRIE)

Para o estudo dos conteúdos apresentados no bloco Números e Operações é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações.

(BRASIL, 1998, p. 66)

Na elaboração do questionário sobre os números naturais, questionou-se sobre a necessidade de incluir problemas. A dúvida consistia em garantir que problemas de interpretação de texto não sobressaíssem à análise das respostas relativas ao significado das operações. Por acreditar que a resolução de problemas auxilia na compreensão do significado das operações, optou-se por apresentar problemas e indicar um espaço para o aluno assinalar caso não tivesse entendido o enunciado do exercício.

Pelo aspecto do cálculo, adição e subtração estão intimamente relacionadas. Para calcular mentalmente $40 - 26$, alguns alunos recorrem ao procedimento subtrativo de decompor o número 26 e subtrair primeiro o 20 e depois 6; outros pensam em um número que devem juntar a 26 para se obter 40, recorrendo neste caso a um procedimento aditivo.

(BRASIL, 1997, p. 69)

Tanto a adição quanto a subtração possuem diferentes significados com níveis variados de complexidade. Dentre as situações que envolvem adição e subtração, os PCNs trazem quatro grupos (BRASIL, 1997):

- ❖ **Situações associadas à idéia de combinar dois estados para obter um terceiro, mais comumente identificado como ação de “juntar”**

Exemplo: “Em uma cesta há 5 laranjas e 8 maçãs. Quantas frutas há nessa cesta?”

Na subtração, essa idéia aparece em ações de “separar/tirar”

Exemplo: “Em uma cesta de 13 frutas, 5 são laranjas. Quantas são as maçãs?”

“Em uma cesta há algumas maçãs e 5 laranjas, no total de 13 frutas. Quantas maçãs há nessa cesta?”

❖ **Situações ligadas à idéia de transformação, ou seja, de alteração de um estado inicial, que pode ser positivo ou negativo**

Exemplo: “Joana tinha 4 canetas coloridas. Ela ganhou mais 7. Quantas canetas ela tem agora?” (transformação positiva)

“Joana tinha 7 canetas coloridas e deu 3 delas para sua irmã. Quantas canetas ela tem agora?” (transformação negativa)

❖ **Situações ligadas à idéia de comparação**

Exemplo: “Joana tem 12 canetas coloridas, Júlia tem 7. Quantas canetas Joana tem a mais que Júlia?”

“Joana tinha 12 canetas, Júlia tem 7. Quantas canetas Júlia tem a menos que Joana?”

❖ **Situações que supõem a compreensão de mais de uma transformação (positiva ou negativa)**

Exemplo: “Joana tinha 4 canetas, ganhou mais 7 e deu 3 para a sua irmã. Quantas canetas ela tem agora?”

Na presente pesquisa optou-se por considerar dois significados para a adição – juntar e acrescentar – e três significados para a subtração – retirar, comparar e definir “quanto falta para”.

A questão 6 trouxe os três significados da subtração de forma contextualizada. 30 dos 36 alunos conseguiram resolver a situação de retirada “De 12, tiro 8, restam 4

unidades”. 35 alunos resolveram corretamente a situação de “8 para chegar ao 12, faltam 4 unidades”. Entretanto, não é possível afirmar que os alunos associaram a idéia de “quanto falta” à subtração, já que eles podem ter usado a estratégia da contagem. 27 alunos completaram de forma correta a sentença “12 é maior que 8 em 4 unidades” que traz a idéia de comparação.

A questão 7 abordou ainda o significados das subtrações de forma contextualizada. Aos alunos foi perguntado que “conta” resolvia cada uma das situações apresentadas.

A primeira – “Lara ganhou uma caixa com 48 chocolates. Até agora ela já comeu 6. O que ela pode fazer para saber quantos chocolates ainda restam sem contar um a um?” – trazia a idéia de retirada. 32 alunos responderam que Lara tinha que fazer uma subtração para resolver esse problema. Eis algumas repostas obtidas:

$48 - 6 = 42$ chocolates ainda resta para Lara comer

Fazer a conta de menos - $48 - 6 = 42$ chocolates.

Para saber quantos chocolates ainda restam sem contar um a um:
Pegar o número de chocolate e diminuir pelo o que ela já comeu.

Ela pode subtrair 6 de 48.

Exemplo: $48 - 6 = 42$

Fazer uma conta de subtração: $48 - 6 = 42$.

A segunda situação – “Pedro está viajando com sua família para uma cidade do interior. Seu pai falou que a cidade fica no quilômetro 200 da estrada. Pedro está no quilômetro 120. O que ele pode fazer para saber a distância que o separa do destino?” – apresentava o significado de “quanto falta para” da subtração. 22 dos 36 alunos relacionaram a operação da subtração a essa situação.

$$200 - 120 = 180$$

A distância que o separa do destino é de 180 km

Pegar 200 e diminuir por 120

Ele tem que subtrair 120 da número 200.

Exemplo: $200 - 120 = 80$.

Fazer uma conta de subtração: $200 - 120 = 180$

A terceira e última situação – “Flávia tem 18 canetas coloridas, enquanto Milena tem 25. O que Milena pode fazer para saber quantas canetas tem a mais que Flávia?” – que trazia a idéia de comparação foi relacionada à subtração por apenas 19 alunos de um total de 36.

$25 - 18 = 07$ Ela tem a mais que Flávia 07

Subtrair 18 de 25.

Exemplo: $25 - 18 = 7$

Fazer uma conta de subtração: $25 - 18 = 7$

OBSERVAÇÃO: não são todos os alunos que dominam os três significados da subtração, principalmente a idéia de comparação; esse obstáculo pode ter origem didática caso ao aluno sejam apresentados com mais freqüência problemas que envolvam o significado de retirar e de “quanto falta para”.

4.1.6 SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS NATURAIS ENVOLVENDO DIFERENTES SIGNIFICADOS DA MULTIPLICAÇÃO OU DIVISÃO (D20 – 4ª SÉRIE)

O texto dos PCNs afirma que:

Uma abordagem freqüente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais.

(BRASIL, 1997 – p. 71)

Entretanto, apenas essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação. Da mesma forma que ocorre com a adição e a subtração, entre a multiplicação e a divisão existem estreitas conexões. Os PCNs de Matemática, assim como o fizeram para a adição e subtração, caracterizam quatro grupos que envolvem situações relacionadas à multiplicação e à divisão: (BRASIL, 1997)

❖ Situações associadas ao que se poderia denominar multiplicação comparativa

Exemplo: “Carlos tem R\$10 e Livia tem o triplo de Carlos. Quanto tem Livia?”

Na divisão, essa idéia também está presente:

Exemplo: “Livia tem R\$30. Sabendo que ela tem o triplo da quantidade de

Carlos, quanto tem Carlos?”

❖ **Situações associadas à comparação entre razões, que, portanto, envolvem a idéia de proporcionalidade**

Exemplo: “Uma caneta custa R\$1,50. Ana vai comprar 4 dessas canetas. Quanto ela vai pagar por elas?”

Na divisão, essa idéia aparece em situação de “repartir igualmente” e de “determinar quanto cabe”

Exemplo: “Ana pagou R\$6,00 por 4 canetas. Quanto custava cada caneta?”

“Ana pagou R\$6,00 na compra de canetas, sendo que cada uma custava R\$1,50. Quantas canetas ela comprou?”

❖ **Situações associadas à configuração retangular**

Exemplo: “Numa sala há carteiras dispostas em 8 fileiras e 6 colunas. Quantas carteiras há na sala?”

“Há 48 carteiras na sala dispostas em colunas e fileiras. Se temos 8 fileiras, quantas são as colunas?”

❖ **Situações associadas à idéia de combinatória**

Exemplo: “Levei 3 bermudas e 5 camisetas em uma viagem. De quantas maneiras diferentes posso me vestir?”

A presente pesquisa considera três significados da multiplicação – soma de parcelas iguais, combinatória e configurações retangulares. Para a divisão há 3 significados: repartição igualitária, a idéia de “quantos cabem” e de quantos grupos é possível formar.

A questão 4 envolveu o significado de combinação da multiplicação em “Marcus tem 6 camisetas e 2 bermudas em seu armário. A operação que permite calcular de quantas maneiras diferentes ele pode combinar as peças usando uma camiseta e uma bermuda é:

$$(\quad) 6 + 2 \qquad (\quad) 6 - 2 \qquad (\quad) 6 \times 2 \qquad (\quad) 6 \div 2$$

Apenas 6 alunos relacionaram essa situação de combinação à multiplicação. Na mesma questão, o significado de “quantos cabem” da situação “Camila vai fazer laços para enfeitar os presentes de natal e cortou 80 centímetros de fita colorida em pedaços de 10 centímetros. Para determinar quantos pedaços de fita Camila obteve, precisamos efetuar a operação:

$$(\quad) 80 + 10 \qquad (\quad) 80 - 10 \qquad (\quad) 80 \times 10 \qquad (\quad) 80 \div 10$$

foi associada à divisão por apenas 15 alunos.

A questão 8 apresentou os três significados da multiplicação em situações que envolvem essa operação:

- a) Um atleta corre no calçadão da praia todos os dias, percorrendo 4 quilômetros todos os dias. Quantos quilômetros ele corre toda semana?
- b) O teatro de uma escola tem 20 fileiras com 30 cadeiras cada uma. Quantas pessoas cabem no máximo sentadas nesse teatro?
- c) Uma lanchonete vende churros com três tipos de recheio: côco, doce de leite e chocolate. As opções de cobertura são: chocolate com granulado e leite condensado. Joana quer comer um churros com recheio e cobertura. Quantas opções de churros com cobertura ela tem para escolher?

Ao serem questionados sobre quais dessas situações poderiam ser resolvidas por uma multiplicação, somente 18 alunos, de um total de 36, indicaram as três situações; 6 alunos disseram que o terceiro item, que traz a idéia de combinação, não poderia ser resolvido pela multiplicação. A seguir, algumas respostas nesse sentido:

Não porque por exemplo a operação é não é necessário nem fazer
uma conta

Eu acho que não porque pra mim a
última conta não é de vezes.

Não, eu acho que a questão (C) não
pode ser resolvida com multiplicação

A partir da análise dessas questões, podemos afirmar que os alunos dão significado à multiplicação como soma de parcelas iguais e como composição retangular. Entretanto, poucos alunos parecem conhecer o significado de combinação que a multiplicação apresenta.

A questão 9 possuía situações que apresentavam os três significados da divisão, além de uma questão de combinação que envolvia multiplicação.

- () Preciso repartir 400 litros de tinta em latas de 50 litros. Quantas latas serão necessárias?
- () Uma fábrica faz bonés nas cores azul, preta e branca, com nove tipos de estampa. Quantos modelos de boné essa fábrica produz?
- () Janaína irá doar balas para um orfanato. Para isso comprou 400 balas para repartir igualmente entre as 80 crianças que moram lá. Quantas balas cada criança receberá?
- () Uma sala de cinema possui 50 fileiras. Sabemos que no total o teatro possui 450 poltronas. Quantas poltronas têm em cada fileira?

Foi solicitado que os alunos assinalassem as situações que podem ser resolvidas por uma divisão. 24 alunos, de um total de 36, associaram a primeira situação à divisão que trazia o significado “quantos cabem”; 33 alunos associaram a terceira situação à divisão com significado de repartição igualitária e 16 reconheceram a divisão na última situação que traz o significado de grupos que se pode formar.

OBSERVAÇÃO: temos pistas de que nem todos os significados das operações são freqüentemente abordados em sala de aula; a maioria parecem associar as situações à operação de divisão apenas quando aparecem palavras como “repartir”.

4.1.7 SOBRE O CÁLCULO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO AS QUATRO OPERAÇÕES BÁSICAS E O USO DOS PARÊNTESSES

Duas questões do questionário referente aos números naturais visavam o cálculo de expressões numéricas. A décima questão trouxe situações-problemas para serem associados às expressões numéricas correspondentes.

a) Fui em uma papelaria e comprei um monte de adesivos! Comprei 4 para cada um dos meus 3 primos. Outros 6 comprei para o meu irmão. Não esqueci de mim! Comprei 6 adesivos para cada um dos meus 4 cadernos. Quantos adesivos comprei?	() $6 + 4 \times 3 + 4 \times 6$
b) Fiz muita lição hoje! 6 exercícios de Português, 4 páginas de Matemática com 3 exercícios cada e 4 páginas de Ciências com 6 exercícios cada. Quantos exercícios resolvi ao todo hoje?	() $4 \times 3 + 6 + 6 \times 4$
c) Gastei 4 reais em cada um dos 6 cadernos que comprei para Fabíola; 3 reais em cada uma das 4 cartelas de adesivos e 4 reais em uma caneta colorida. Quanto gastei?	() $4 \times 6 + 3 \times 4 + 4$

22 alunos associaram corretamente a linguagem escrita à linguagem aritmética, entretanto o número de alunos que não respondeu a questão, 10 alunos, pode retratar que os alunos apresentam dificuldade em escrever expressões decorrentes de situações problema que envolvam as operações básicas.

A questão 11 trouxe quatro expressões numéricas que possuíam os mesmos números e operações; elas se diferenciavam pela presença ou não dos parênteses. Foi dito aos alunos que um estudante resolveu as quatro expressões em uma prova e acertado todas, pedindo para explicar esse fato.

Em uma prova, Felipe resolveu as expressões abaixo da seguinte maneira:

a) $12 \times 6 - 4 \div 2$	b) $12 \times (6 - 4) \div 2$	c) $(12 \times 6 - 4) \div 2$	d) $12 \times (6 - 4 \div 2)$
$= 72 - 2$	$= 12 \times 2 \div 2$	$= (72 - 4) \div 2$	$= 12 \times (6 - 2)$
$= 70$	$= 24 \div 2$	$= 68 \div 2$	$= 12 \times 4$
	$= 12$	$= 34$	$= 48$

Felipe acertou todas as expressões! Como isso pode acontecer?

Dentre os 36 alunos que responderam ao questionário, apenas 2 justificaram o acerto de Felipe de forma coerente, percebendo que a presença dos parênteses alterava a expressão e a ordem das operações a serem efetuadas. Um dos alunos disse que “Os começos das contas são diferentes, por isso contêm resultados diferentes”, outro justificou da seguinte maneira: “Sim, pois Felipe, com as contas que tinham parênteses, ele começou pelos parênteses, e somou tudo certo”. O resultado obtido constitui um indício de que talvez os alunos da 4ª série ou 5º ano não conheçam o significado do uso dos parênteses.

Outra evidência que esta questão trouxe está relacionada às regras de resolução de expressões numéricas. Alguns alunos fornecem pistas de talvez não conhecerem a ordem das operações em uma expressão. Por exemplo, um aluno respondeu que Felipe havia errado a letra a) porque “ele esqueceu do 4”. Pode ser que esse aluno não tenha percebido que as operações realizadas entre a primeira e a segunda linha da resolução a) foi a de multiplicar e a

de dividir e acredite que o número 2 da segunda linha era referente ao número 2 da primeira linha e não ao resultado da divisão de 4 por 2.

Outro aluno pareceu seguir a mesma linha de raciocínio ao dar a seguinte resposta: “Não, a d ele errou, porque o cálculo de $6 - 4 = 6$ é um absurdo!”

Com base nas respostas e no fato de que os alunos não validaram as resoluções parece razoável afirmar que os alunos que responderam a esse questionário mostram não conhecer a ordem das operações na resolução de expressões numéricas.

4.2. NÚMEROS RACIONAIS

4.2.1 SOBRE O RECONHECIMENTO DAS REPRESENTAÇÕES DECIMAIS DOS NÚMEROS RACIONAIS COMO UMA EXTENSÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL (D24 – 8ª SÉRIE)

Segundo os PCNs referentes ao Ensino Fundamental, os alunos desse nível de Ensino devem entrar em contato com situações de aprendizagem em que os números naturais, já conhecidos por eles, não sejam suficientes para resolvê-las. Ainda no texto dos Parâmetros encontramos como objetivos do Ensino da Matemática desenvolver habilidades para que o aluno seja capaz de ampliar o significado do número natural pelo reconhecimento de relações e regularidades além de interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal (Brasil, 1997).

Os PCNs levantam hipóteses de que a aprendizagem dos números racionais supõe ruptura com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais e exemplifica:

Se a seqüência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais

quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87.

(Brasil, 1997, p.67)

A questão 4 do questionário II sobre números racionais perguntou aos alunos quantos números racionais existem entre 1 e 2. O objetivo da questão era verificar se os alunos reconhecem a impossibilidade de determinar quantos números racionais existem entre outros dois racionais. 10 alunos, de um total de 13, responderam que nesse intervalo existem 9 números racionais, talvez esses alunos possam ter considerado os números racionais 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8 e 1,9. Outra questão desse mesmo questionário, a sétima, pediu que os alunos escrevessem um número racional entre 0 e 0,2. 9 alunos deram como exemplo o número 0,1. Apesar dessa ser uma resposta, podemos questionar porque não apareceram números como 0,05 ou 0,1999. Ainda no questionário II sobre números racionais, solicitamos que os alunos escrevessem um número racional maior que 3,11 e menor que 3,12. Nenhum aluno conseguiu escrever um número com essas características; 10 alunos assinalaram a opção “não consigo”, 1 aluno escreveu “não existe” e outros 2 deixaram a questão em branco.

Os resultados obtidos nessas três questões nos dão indícios de que para os alunos que responderam o questionário os números racionais podem se resumir aos que apresentam apenas um algarismo depois da vírgula.

OBSERVAÇÃO: o fato dos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros serem um conjunto discreto pode aparecer como obstáculo para a compreensão de que entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais; esse obstáculo pode ter origem epistemológica

A idéia de sucessor e antecessor foi explorada no questionário II sobre Números Racionais. Foi feita a seguinte pergunta aos alunos: Dado o número 1,5, qual é o próximo? O objetivo da questão era verificar se os alunos validam algum número como sucessor de 1,5, ou seja, se transferem a idéia de antecessor e sucessor dos números naturais aos números racionais. A maioria dos alunos, 8, apontou como próximo número o 1,6. Nenhum aluno da 4ª série ou 5º ano percebeu que não é possível dizer qual é o próximo número racional depois de 1,5.

OBSERVAÇÃO: as idéias de sucessor e antecessor presentes nos números inteiros pode aparecer como obstáculo epistemológico na concepção dos números racionais, e futuramente nos reais, no que diz respeito à impossibilidade de definir o número racional ou real que vem “logo a seguir” de outro número.

4.2.2. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS REPRESENTADOS NA FORMA DECIMAL NA RETA NUMÉRICA

Um dos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Fundamental, segundo os PCNs é desenvolver no aluno habilidade de comparação e ordenação de números racionais na forma decimal. (Brasil, 1997)

A questão 6 do questionário II sobre números racionais (positivos) apresentou alguns números racionais para serem representados na reta numerada com marcação de décimos; 6 deles estavam escritos na forma decimal¹⁶.

¹⁶ A representação das frações será analisada mais adiante.

Represente os seguintes números racionais na reta numerada:

Os alunos mostraram bastante dificuldade em representar os números decimais. Apenas 4 alunos representaram o número 7,1 no local correto; apenas 1 alunos representou o número 7,50 no local certo. Somente 1 aluno representou o decimal 7,07 no intervalo entre 7 e 7,1; assim como apenas 1 aluno representou o 7,05 nesse intervalo. Não foi possível verificar a hipótese dos alunos sobre qual número é maior, o 7,05 ou o 7,07 porque as duas representações não apareceram em um mesmo questionário. O decimal 6,9 foi representado de forma correta por apenas 2 alunos, entretanto, o decimal 6,99 não foi representado corretamente por nenhum aluno.

Cabe ressaltar, ainda que 2 alunos localizaram o 7,07 na posição do 7,7 e 1 aluno posicionou o 7,05 no local do 7,5. 2 alunos fizeram a representação do número 6,99 na posição do 6,9. Talvez essas interpretações sejam indícios de que o aluno não se atém ao valor posicional do algarismo que aparece depois da vírgula, ou seja, os alunos podem não conhecer o significado e o valor das ordens decimais.

A partir da análise dessa questão, talvez possamos afirmar que os alunos da 4ª série ou 5º ano que responderam a esse questionário mostram indícios de não serem capazes de localizar números racionais escritos na forma decimal na reta numérica.

4.2.3. SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS RACIONAIS EXPRESSOS NA FORMA DECIMAL ENVOLVENDO DIFERENTES SIGNIFICADOS DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO (D25 – 4ª SÉRIE)

As operações de adição e subtração com números racionais costumam ser apresentadas aos alunos no contexto do sistema monetário, motivadas pelo uso cotidiano dos números decimais ao se falar de valores em dinheiro. Entretanto, optou-se por não incluir esse tipo de abordagem no questionário sobre números racionais, uma vez que situações envolvendo valores em dinheiro poderiam ser resolvidas por estratégias pessoais que talvez não evidenciassem a concepção dos números racionais escritos na forma decimal.

Sobre os significados das operações de adição e subtração o texto dos PCNs afirma que:

Muitos dos significados das operações, analisadas em situações que envolvem números naturais, podem ser estendidos às situações com números racionais. Assim, a adição e a subtração são exploradas em situações de transformação, de combinação e de comparação.

(Brasil, 1997, p. 80)

A questão 3 do questionário II sobre números racionais apresentou seqüências de números racionais escritos na forma de números decimais e solicitou que os alunos descobrissem a regra e continuassem a seqüência. O objetivo dessa questão era verificar se os alunos percebem a regularidade na escrita dos números decimais e se efetuam adições e subtrações de números decimais. O significado de adição e subtração abordado estava relacionado às situações de transformação dos números. As seqüências apresentadas foram:

- a) $1,3 - 1,2 - 1,1 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$
 b) $7,5 - 7,0 - 6,5 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$
 c) $0,5 - 0,7 - 0,9 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$
 d) $37,9 - 37,5 - 37,1 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

A maioria dos alunos, 11 dentre 13, completou de forma correta a sequência “1,3 – 1,2 – 1,1 – ...”. A sequência “6,0 – 5,5 – 5,0 – ...” foi completada corretamente por 12 alunos. Estes resultados mostram que possivelmente os alunos desenvolveram habilidades para adicionar ou subtrair décimos e/ou cinco décimos e assim escrever seqüências que variam de 0,1 em 0,1 ou de “meio” em “meio”. Já nos itens que apresentavam seqüências que variavam em dois décimos e quatro décimos, os alunos mostraram dificuldade. Apenas 6 alunos completou a sequência “0,5 – 0,7 – 0,9 – ...” corretamente, assim como 5 alunos o fizeram para a sequência “37,9 – 37,5 – 37,1 – ...”.

OBSERVAÇÃO: os alunos não desenvolveram habilidades para comparar os valores dos números por meio de adições e subtrações de números racionais na forma decimal; eles são capazes de fazê-lo apenas com valores mais usuais como 0,1 e 0,5; esse obstáculo pode ter origem didática no caso dos alunos não serem estimulados a comparar números racionais escritos na forma decimal com quantidades diferentes de algarismos depois da vírgula.

4.2.4. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE UM MESMO NÚMERO RACIONAL (D21 – 4ª SÉRIE/D21 – 8ª SÉRIE)

Um dos objetivos apontados pelos PCNs para o Ensino da Matemática é desenvolver no aluno a habilidade de reconhecer que os números racionais admitem diferentes representações na forma fracionária. Como já salientado, o próprio texto dos PCNs adianta que os alunos devem encontrar alguns obstáculos (sic) na construção dos números racionais. Um deles está relacionado ao objetivo descrito acima. (Brasil, 1997)

Ao afirmar que um número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias, estamos lidando não somente com a idéia de fração equivalente como com a escrita dos números mistos e com a idéia de que um número inteiro pode ser escrito como fração.

A questão 3 do questionário I sobre Números Racionais trabalhou a escrita de um mesmo número racional em forma de fração imprópria e número misto com o auxílio de uma situação problema ilustrado.

Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira? Qual das escritas matemáticas abaixo pode representar essa situação?

Dos 10 alunos da 4ª série ou 5º ano que responderam o questionário I sobre Números Racionais, nenhum percebeu a equivalência das duas escritas. 3 alunos escolheram a primeira escrita enquanto 6 alunos optaram pela segunda; tivemos ainda 1 aluno que não respondeu a questão. Talvez possamos afirmar que os alunos não reconhecem as diferentes representações de um mesmo número racional escritos na forma de fração imprópria e número misto.

A questão 2 do questionário II sobre Números Racionais apresentou números racionais escritos na forma de fração decimal e de números decimais e solicitou que os alunos associassem as escritas equivalentes.

Associe as frações à sua representação decimal:

a) $\frac{5}{10}$	() 0,005
b) $\frac{50}{10}$	() 50,0
c) $\frac{5}{100}$	() 0,05
d) $\frac{5}{1000}$	() 5,0
e) $\frac{500}{10}$	() 0,5

Em um total de 13 alunos, 12 alunos associaram corretamente a escrita fracionária $\frac{5}{10}$ ao número decimal 0,5. 10 alunos relacionaram corretamente os pares de escritas $\frac{5}{100}$ e 0,05 e $\frac{5}{1000}$ e 0,005. Entretanto, apenas 5 alunos identificaram que a escrita fracionária $\frac{50}{10}$ equivale à escrita decimal 5,0; 6 alunos associaram a esse racional o decimal 50,0. Somente 6 alunos associaram a fração $\frac{500}{10}$ ao número decimal 50,0.

A partir desses resultados, podemos dizer, então, que os alunos que responderam ao questionário reconhecem as diferentes representações de um mesmo número racional se elas estiverem na forma de fração decimal própria e de números decimais menores que 1. Entretanto, o mesmo não podemos afirmar sobre a escrita de números naturais escritos na forma de fração imprópria, ou seja, de frações aparentes.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não reconhecer que um número natural (e posteriormente um inteiro) possa ser escrito na forma fracionária; os alunos podem não conhecer o significado de divisão da fração e esse obstáculo pode ter origem epistemológica devido ao fato de que os números naturais (e inteiros) apresentam-se sempre “prontos”.

4.2.5. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE FRAÇÕES COMO REPRESENTAÇÃO QUE PODE ESTAR ASSOCIADA A DIFERENTES SIGNIFICADOS

Os PCNs orientam os professores a apresentar situações-problema cujas soluções não se encontram no campo por números naturais a fim de possibilitar a aproximação da noção de número racional pela compreensão de alguns de seus significados: quociente, parte/todo e razão.

A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de pizza, em partes iguais.

A relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elemento). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes

Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro ($a:b = a/b$; $b \neq 0$). Para o aluno ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: $2/3$.

Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”.

(Brasil, 1997, p.68)

A presente pesquisa optou por tratar apenas dos dois primeiros significados de fração pelo fato do currículo de algumas escolas apresentar o conteúdo de razão apenas na 6ª série ou 7º ano.

A primeira questão do questionário I sobre Números Racionais que foi respondido por 10 alunos pretendeu verificar se eles sabem representar a parte pintada da figura por meio de uma fração que expresse a relação parte/todo em uma superfície. Já a segunda questão trabalhou a mesma habilidade de forma invertida, ou seja, os alunos tinham que representar com figura as frações pedidas.

A primeira figura se tratava de uma fração própria:

9 alunos representaram a parte pintada da figura com a fração “ $\frac{5}{6}$ ”; 1 aluno escreveu a fração “ $\frac{1}{6}$ ” como representação da figura.

Da mesma forma, os alunos não tiveram problema em representar a fração $\frac{2}{5}$ por meio de uma figura. Todos o fizeram corretamente e utilizaram diferentes tipos de figura.

A figura do segundo item da primeira questão trazia uma figura que representa a idéia de fração imprópria.

Diferentemente do primeiro item, os alunos mostraram bastante dificuldade em representar a parte pintada dessa figura. Apenas 1 aluno a representou com a fração “ $\frac{5}{4}$ ”; 3 alunos consideraram o inteiro como sendo as 8 partes e escreveram a fração “ $\frac{5}{8}$ ”; outros 3

alunos tentaram representar a parte pintada da figura por meio de um número misto, mas não o fizeram de forma correta, um aluno apresentou a escrita “ $2\frac{4}{1}$ ” e os demais “ $4\frac{1}{4}$ ”.

O item c) da segunda questão que apresentou a fração $\frac{4}{3}$ para ser representada por meio de uma figura não foi realizada de forma correta por nenhum aluno. 6 alunos representaram uma figura que equivalia à fração $\frac{3}{4}$ e 4 alunos não representaram qualquer figura.

O item d) dessa mesma questão solicitou que os alunos representasse por meio de uma figura o número misto $2\frac{1}{2}$. Diferentemente do resultado do item anterior, 5 alunos representaram o número de forma correta.

Entretanto, alguns alunos cometeram erros nas representações.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem estar familiarizados apenas com frações próprias e não validam as frações impróprias talvez por não aceitarem que a “parte possa ser maior que o todo”; esse obstáculo pode ter origem didática caso ao aluno não seja solicitado associar números racionais escritos na forma de fração imprópria e de números mistos à representação em figuras.

Ainda na primeira questão do questionário I sobre números racionais foi apresentada uma figura referente a um inteiro.

Todos os alunos representaram a figura com a fração “ $\frac{4}{4}$ ”, entretanto apenas 3 alunos associaram a unidade à representação.

O item b) da questão 2 solicitou que os alunos representassem a fração $\frac{3}{3}$ por meio de uma figura. Todos os alunos representaram o inteiro de forma correta

A questão 10 do questionário I sobre Números Racionais apresentou ainda o significado de fração com parte/todo, entretanto, o todo envolvido era contínuo e representado por um segmento de reta.

A questão 10 trouxe um segmento que representava uma estrada de 200 km e a respeito da situação foram feitas algumas perguntas.

Imagine que o segmento abaixo represente uma estrada de 200km:

- a) Quando o carro estiver no ponto B, que fração da estrada terá percorrido?
- b) Se ele tiver percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada, em que ponto estará?
- c) Quando o carro estiver no ponto D, que fração do percurso terá feito?
- d) Quantos quilômetros terá percorrido até A?
- e) E até C?

Apenas 2 dos 13 alunos conseguiram indicar que se o carro estivesse no ponto B do segmento ele teria percorrido $\frac{2}{5}$ da estrada. 4 alunos perceberam que se o carro tivesse percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada estaria no ponto C do segmento. Somente 3 alunos reconheceram que se o carro estivesse no ponto D, teria percorrido $\frac{4}{5}$ do percurso.

Nos itens d) e e), ao serem questionados sobre quantos quilômetros o carro terá percorrido até o ponto A ou até o ponto C, os alunos mostraram dificuldade e não conseguiram responder; somente 1 aluno percebeu que o ponto A equivalia a “40 km” e o ponto C a “120 km”.

A análise dos resultados obtidos nessa questão permite afirmar que possivelmente os alunos não desenvolveram a idéia de fração como parte de um todo contínuo e linear ou ainda que podem não associar a escrita fracionária a uma representação em segmento de reta.

OBSERVAÇÃO: os alunos não dão significado a frações que representam parte de um todo contínuo representado como um segmento de reta; pode ser que a predominância de frações como parte de um todo de superfície (como as barras do exercício 1) em livros didáticos e salas de aula se constitua como origem didática desse obstáculo.

A questão 11 do mesmo questionário apresentou o significado de fração como parte de um todo discreto. Aos alunos foi solicitado que calculassem frações de uma dada quantidade.

Uma escola com 500 alunos resolveu fazer uma festa para comemorar o Final do Ano. A organização sugeriu que os alunos trouxessem os comes e bebes da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}$ dos alunos deveria trazer doces

$\frac{2}{5}$ dos alunos trariam salgados

$\frac{1}{10}$ dos alunos traria refrigerantes

Calcule a quantidade de alunos que levaram para a festa:

a) Doces

b) Salgados

c) Refrigerantes

O item a) foi resolvido de forma correta por apenas 6 dos 10 alunos que responderam ao questionário. Este resultado surpreende, pois a idéia da metade geralmente parece ser intuitiva. Apenas 3 alunos conseguiram calcular $\frac{2}{5}$ de 500 e $\frac{1}{10}$ de 500. Este resultado também surpreende, pois este tipo de questão costuma aparecer com frequência nos livros didáticos.

A questão seguinte, a de número 12, trouxe o significado de fração como parte de um todo discreto de forma diferente de exercícios que tradicionalmente aparecem nos livros didáticos.

Acompanhe o diálogo a seguir e depois responda à questão:

Andréia: - Comi $\frac{1}{4}$ dos bombons de uma caixa, ou seja, 6 bombons

Cláudio: - Também comi $\frac{1}{4}$ dos doces de uma caixa. Ao todo comi 8 doces.

É possível acontecer um diálogo semelhante a esse? Por que?

O objetivo desta questão era verificar se os alunos reconhecem que o “resultado” de uma fração depende do todo do qual estamos tratando, além de verificar se os alunos calculam o valor de uma fração de um todo discreto. Nenhum aluno escreveu que era possível pelo fato do “tamanho” do todo ser diferente. Este resultado pode mostrar que os alunos não percebem que a fração é a representação da parte de um todo e que este todo “interfere” no resultado. Talvez a dificuldade nesta questão possa residir no fato de que os alunos talvez não aceitem que o mesmo “número” (no caso a fração) possa ter valores diferentes. Não podemos descartar, entretanto, a hipótese dos alunos terem interpretado que Andréia e Cláudia falavam da mesma caixa.

Este resultado pode evidenciar ainda, uma falha na concepção de frações que poderá interferir num outro significado de fração que aparece no Ensino da Matemática além dos outros três já discutidos, o de operador.

Trata-se do significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

(Brasil, 1997, p.68)

OBSERVAÇÃO: os alunos não conseguem calcular parte de um todo discreto; talvez eles acreditem que uma fração representa sempre o mesmo valor, não percebendo que o “tamanho” do todo “interfere” no resultado da fração.

O questionário I sobre Números Racionais apresentou na questão 4 a idéia de fração como quociente entre inteiros. Foi solicitado que os alunos classificassem algumas frações quanto ao valores que elas representam.

Veja o quadro e escreva o que se pede:

$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{12}{12}$
---------------	---------------	----------------	---------------	---------------	-----------------

- a) Quais dessas frações podem representar um inteiro?
- b) Quais dessas frações representam quantidades menores que um inteiro?
- c) Quais dessas frações representam quantidades maiores que um inteiro?

O objetivo desta questão foi verificar se os alunos reconhecem a fração como uma quantidade. Todos os alunos associaram corretamente as frações $\frac{8}{8}$ e $\frac{12}{12}$ a um inteiro. Entretanto, 7 alunos classificaram a fração $\frac{4}{9}$ como uma quantidade menor que um inteiro e 8 colocaram a fração $\frac{1}{5}$ nesta categoria. O que chama atenção neste segundo item é o fato de 6 alunos escreverem também a fração $\frac{7}{6}$. Talvez não possamos afirmar que os alunos associam à idéia de fração a uma parte de uma unidade ou se reconhecem uma fração própria, já que outras frações apareceram classificadas como representação de quantidades menores que um inteiro.

Como representação de quantidades maiores que um inteiro, 7 alunos identificaram a fração $\frac{10}{5}$ e apenas 3 alunos escreveram a fração $\frac{7}{6}$. Parece que os alunos não estão familiarizados com o significado de fração imprópria como um quociente entre números inteiros que representa um número maior que um inteiro.

4.2.6. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES (D23 – 8ª SÉRIE)

O conceito de frações equivalentes é fundamental para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais escritos na forma de fração e para efetuar cálculos com esses números. (Brasil, 1998, p.103)

Os PCNs prevêm que os alunos saibam identificar e produzir frações equivalentes pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas. (Brasil, 1997, p.59)

O questionário I sobre Números Racionais solicitou que os alunos definissem o conceito de frações equivalentes apoiados na representação gráfica de frações que representavam a mesma parte do todo.

a) Represente na figura ao lado a fração $\frac{2}{3}$
b) Represente na figura ao lado a fração $\frac{4}{6}$
c) Represente na figura ao lado a fração $\frac{6}{9}$
d) As frações representadas são chamadas de <i>frações equivalentes</i> . Explique esse conceito com suas palavras.	

Nenhum aluno conseguiu explicar o conceito de frações equivalentes. Essa dificuldade em conceber este conceito pode acarretar problemas em situações que necessitam dessa idéia como em comparação de frações e operações com frações, como adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

4.2.7. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA RETA NUMÉRICA (D17 – 8ª SÉRIE)

Os PCNs referentes ao segundo ciclo do Ensino Fundamental trazem como uma das habilidades a ser desenvolvida pelos alunos a localização na reta numérica de números racionais. (Brasil, 1998)

A questão 9 do questionário II sobre números racionais apresentou um segmento de reta com pontos representados em sua extensão. A idéia de comparação apareceu implícita nessa questão.

Observe o segmento de reta numerado entre 0 e 1 e os pontos indicados por letras maiúsculas que estão assinaladas nele:

Quais das frações abaixo correspondem às letras marcadas na reta?

() $\frac{1}{2}$ () $\frac{1}{6}$ () $\frac{1}{4}$ () $\frac{1}{5}$ () $\frac{1}{3}$ () $\frac{1}{10}$

Apenas 1 aluno associou corretamente os pontos às frações; 3 alunos associaram os números de forma errada e 6 alunos deixaram a questão em branco. Provavelmente os alunos não identificam a localização de números racionais na reta numerada.

A questão 6 do questionário II sobre Números Reais já foi apresentada ao tratarmos da localização de Números Racionais escritos na forma decimal na reta numérica. Dentre os números solicitados para serem representados, havia 3 números racionais escritos na forma fracionária, sendo que um deles apresentava a escrita de número misto.

Represente os seguintes números racionais na reta numerada:

$7,1$ $7\frac{1}{2}$ $7,07$ $\frac{50}{7}$ $7,05$ $7,50$ $6,99$ $6,9$ $\frac{73}{10}$

Nenhum aluno, de um total de 13, conseguiu identificar a localização do número racional $7\frac{1}{2}$ ou da fração $\frac{50}{7}$ ou ainda de $\frac{73}{10}$.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não identificar a localização de números racionais escritos na forma de fração (imprópria) ou em número misto na reta numérica; talvez esse obstáculo possa ter origem didática caso o professor solicite com maior frequência a representação de números racionais na forma decimal; ou origem epistemológica caso o aluno não aceite que um número racional tenha mais de uma representação, diferentemente do que ocorre com os números naturais (ou inteiros) que normalmente, utilizando apenas algarismos, são escritos de uma única maneira.

4.2.8. SOBRE A COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

A formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional é um dos objetivos do Ensino de Matemática dentre os estabelecidos pelos PCNs. (Brasil, 1997)

Os Parâmetros ressaltam que o aluno pode se deparar com um obstáculo (sic) ao comparar números racionais escritos na forma decimal.

Se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais ($8345 > 41$) a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério

(Brasil, 1997, p.67)

A questão 1 do questionário II sobre Números Racionais apresentou algumas opções com números decimais e solicitou que o aluno assinalasse o número mais próximo de 1. O objetivo da questão era verificar se os alunos conhecem o sistema posicional dos algarismos depois da vírgula e se atribuem significados e valores às “ordens” décimos e centésimos. Segue-se a questão:

Dentre os números abaixo, assinale o que está mais próximo do número 1.

☐ 1,1 ☐ 1,5 ☐ 1,10 ☐ 1,05 ☐ 1,01 ☐ 0,9

A maioria dos alunos, 11 em um total de 13, assinalou o número 0,9 como sendo o mais próximo do número 1 dentre as opções; 1 aluno assinalou o número 1,1; outro aluno assinalou mais de uma opção. Podemos concluir que os alunos apresentam dificuldade em comparar números racionais escritos na forma decimal que apresentem ordens diferentes.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não dar significado aos valores posicionais dos algarismos depois da vírgula e, por isso, talvez não são capazes de comparar números racionais escritos na forma decimal; pode ser que esse obstáculo tenha origem epistemológica caso o aluno tente transferir a estratégia de comparação entre naturais, com base na quantidade de algarismos que o número apresenta, aos números racionais escritos na forma decimal.

Os PCNs afirmam ainda que os alunos devem ser capazes de comparar e ordenar representações fracionárias. (Brasil, 1997, p.59). Entretanto, o próprio texto aponta um outro obstáculo (sic) na dificuldade na comparação de frações: *acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$* . (Brasil, 1997, p.67)

A questão 5 do questionário I sobre Números Racionais solicitou que os alunos comparassem dois pares de números racionais fracionários.

Que número é maior?

a) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? _____

b) $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$? _____

Mais do que a comparação entre frações, o item a) pretendia verificar se o aluno era capaz de reconhecer que ao dividirmos um inteiro em 5 partes iguais, teremos uma quantidade maior do que ao dividi-lo em 7 partes iguais. 6 dos 10 alunos apontaram a fração $\frac{2}{5}$ como a maior do primeiro item, enquanto 4 alunos indicaram a fração $\frac{2}{7}$. Aparentemente cerca de metade dos alunos reconhece a idéia descrita no objetivo do item; entretanto, 4 deles podem ter comparado os algarismos sem perceber o seu significado nas frações.

A segunda comparação foi feita de forma mais tranqüila pelos alunos. 8 alunos, de um total de 10, indicaram que a maior fração entre o par era a $\frac{7}{11}$, enquanto 2 alunos indicaram a fração $\frac{3}{11}$.

OBSERVAÇÃO: os alunos apresentaram dificuldade em comparar frações que apresentavam o mesmo numerador e denominadores diferentes; pode ser que esse obstáculo tenha origem epistemológica já que a comparação entre os naturais como $7 > 5$ podem levar os alunos a não aceitar que, por exemplo, $2/7 < 2/5$.

4.2.9. SOBRE EFETUAR CÁLCULOS QUE ENVOLVAM OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS (D25 – 8ª SÉRIE)

Dentre as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos está a de ser capaz de calcular adições e subtrações de números racionais na forma decimal por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais. (Brasil, 1997, p.59)

A questão 5 do questionário II sobre Números Racionais, respondido por 13 alunos, solicitou que os alunos resolvessem algumas adições e subtrações com números decimais.

Efetue:

a) $6,32 + 2,9$ b) $4,6 - 1,4$ c) $2,15 - 1,8$ d) $13,4 - 11,2$ e) $7,45 - 0,68$ f) $1 - 0,73$

Os itens b), d) e e) pretendiam verificar se os alunos efetuam subtrações entre decimais utilizando estratégias pessoais ou técnicas operatórias. No item b) $4,6 - 1,4$, 10 alunos efetuaram a subtração de forma correta; 1 aluno encontrou 0,32 como resposta, talvez ele tenha contado o número de casas depois da vírgula das parcelas para ajustar a resposta, como se faz com a multiplicação. Já no item d) $13,4 - 11,2$, 9 alunos apresentaram a resposta correta; foi interessante notar que todos os alunos que resolveram corretamente a subtração representaram o 0 antes do 2,2, ou seja, encontraram como resposta o 02,2; 2 alunos parecem ter contado o número de casas decimais dos minuendo e subtraendo e ajustado a resposta

como fazemos na multiplicação, dando como resultado 0,22. No item e) $7,45 - 0,68$, 8 alunos efetuaram corretamente a subtração; 1 aluno tirou o menor algarismo do maior em cada ordem; outros 2 se atrapalharam com os “empréstimos”.

O itens a), c) e f) tinham como objetivo verificar se os alunos sabem “alinhar” os números decimais com diferentes quantidade de ordens antes de efetuar a adição ou a subtração. No item a) $6,32 + 2,9$, 8 alunos efetuaram a adição de forma correta, 2 alunos não respeitaram a posição dos algarismos ao efetuar a adição e chegaram ao resultado 6,61. Quanto ao item c) $2,15 - 1,8$, 6 alunos efetuaram a subtração corretamente; 3 alunos, ao efetuar a subtração, tiraram o menor algarismo do menor em cada ordem; 1 aluno não alinhou os números respeitando as ordens dos algarismos antes de efetuar a subtração. O item f) $1 - 0,73$ pretendia verificar ainda se os alunos resolviam esta subtração em que é necessário interpretar o número 1 como 1,00 para efetuar o cálculo além de exigir transformações sucessivas entre ordens decimais. Apenas 3 alunos efetuaram este cálculo de forma correta; a maioria dos alunos apresentou dificuldade em efetuar esta subtração; 4 alunos não alinharam os números respeitando o valor posicional dos algarismos; outros 4 alunos, além de não alinhar os números, tiraram o menor algarismo do maior em cada ordem.

Além das adições e subtrações, a questão 5 havia ainda operações de multiplicação para serem realizadas pelos alunos.

g) $3 \times 0,5$ h) $1,3 \times 9$ i) $1,3 \times 7,2$ j) $2,2 \times 101$ k) $7 \times 4,13$ l) $18,24 \times 1,2$

Os itens g), h), k) e j) trouxeram multiplicações entre números naturais e decimais. No item g) $3 \times 0,5$, a maioria dos alunos, 10 dentre 13, acertou o cálculo, apesar de alguns preferirem efetuar o cálculo $0,5 \times 3$, talvez motivados pelo costume de colocar o maior número na posição de multiplicando. O item h) $1,3 \times 9$ foi respondido de forma correta por

apenas 7 alunos; alguns alunos apresentaram alguma dificuldade neste item, talvez o problema estivesse nas transformações entre as ordens. Já no item k) $7 \times 4,13$ alguns alunos tiveram dificuldade em resolver a operação; somente 8 alunos chegaram ao resultado correto invertendo os fatores para encontrar o produto. No item j) $2,2 \times 101$ os alunos apresentaram grande dificuldade em efetuar a multiplicação deste item, apenas 3 alunos o fizeram de forma correta.

Os itens i) e l) trabalharam a multiplicação entre decimais. Apenas 7 alunos conseguiram efetuar o cálculo do item i) $1,3 \times 7,2$; 2 alunos parecem ter multiplicado décimos por décimos e unidades por unidades, chegando ao resultado 7,6. O item l) $18,24 \times 1,2$ foi resolvido corretamente por 7 alunos; outros 3 alunos alinharam os números respeitando as ordens como se faz em uma adição e parecem ter multiplicado décimo por décimo e unidade por unidade, chegando ao resultado 18,44.

l) $18,24 \times 1,2$

$$\begin{array}{r} 18,24 \\ \times 1,2 \\ \hline 18,44 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO: a transferência da estratégia de alinhamento, necessária na adição, para a multiplicação, pode evidenciar um obstáculo enfrentado pelos alunos que talvez possua origem didática, caso aos alunos sejam apresentadas regras sem significação, gerando confusão e dúvida sobre qual regra aplicar a cada caso.

A questão 7 do questionário I sobre Números Racionais apresentou aos alunos quatro cálculos com frações resolvidos incorretamente. A solicitação era de identificarem os erros presentes.

O item a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ apresentou um erro que pode ser cometido por alunos na soma de

frações com denominadores diferentes; o objetivo era verificar se os alunos reconheciam o erro de somar os numeradores e os denominadores das frações para obter a soma. A maioria dos alunos, 6 num total de 10, justificou este item recorrendo à necessidade de “tirar o m.m.c.”, embora não tenham mostrado, em outras questões, conhecer o conceito de fração equivalente.

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ *apoiar com os 10 abaixo e soma o de cima*

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ *Porque tem que tirar o m m c*

Na multiplicação do item b) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ o número natural foi multiplicado pelo numerador e pelo denominador. A maioria dos alunos, 7, não reconheceu o erro neste item; apenas 3 alunos o fizeram.

por que não multiplica a fração inteira e um o número de cima

b) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ *Porque tem que igualar os casos*

O resultado obtido nos permite afirmar que talvez os alunos não sabem proceder em um cálculo de multiplicação deste tipo.

A subtração incorreta no item c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ foi realizada a partir da subtração dos numeradores e dos denominadores das frações entre si. Metade dos alunos reconheceu o erro deste item, justificando o fato com a necessidade de calcular o m.m.c. dos denominadores, o

significado parece não existir, pois em outras questões eles mostraram não conhecer o conceito de frações equivalentes.

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ *foi mm e dividi pelo de baixo e multipliei pelo de cima*

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ *tem que tirar o mm e*

O último item dessa questão, d) $8 \div \frac{1}{2} = 4$, pretendeu verificar se os alunos reconheciam o erro cometido neste item, de dividir o número 8 por 2; além disso, pretendeu-se verificar se os alunos conhecem o algoritmo da divisão de “inverter a segunda fração e realizar uma multiplicação”. Os alunos se atrapalharam na resolução dessa questão; os 3 alunos que identificaram o erro, se apoiaram no algoritmo da divisão entre frações, algoritmo este que parece confundir alguns alunos, como aquele que efetuou o cálculo $8 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

d) $\frac{8}{1} \div \frac{1}{2} = 4$ *igual a fração e inverte o sinal e o fração*

d) $\frac{8}{1} \div \frac{1}{2} = 4$ *porque tem que inverter após o sinal*

d) $8 \div \frac{1}{2} = 4$ *Resolva o 1º e inverte o 2º*

A 14ª questão desse mesmo questionário foi respondida por 10 alunos e solicitou que os alunos resolvessem alguns cálculos envolvendo operações com números racionais escritos na forma de fração.

O item a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ pretendeu verificar se os alunos realizavam a adição de frações com mesmo denominador; a maioria dos alunos, 6 em um total de 10, efetuou o cálculo corretamente. Entretanto, 3 alunos realizaram a adição dos numeradores e dos denominadores entre si e encontraram como resposta a fração $\frac{3}{10}$.

Os itens b) e c) apresentaram operações de adição e subtração com frações de denominadores diferentes. No item b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, apenas 1 aluno conseguiu somar as frações com denominadores diferentes de forma correta; 2 alunos deram como resposta a fração $\frac{2}{6}$ talvez obtida pela soma dos numeradores e dos denominadores entre si. O item c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$ apresentou apenas 1 solução correta. Mais uma vez apareceu como resposta a fração decorrente da estratégia de operar com os numeradores e denominadores entre si.

Os itens d) e e) trouxe multiplicações entre frações e números naturais. No item d) $3 \times \frac{2}{5}$ apenas 3 alunos o fizeram de forma correta; 2 alunos multiplicaram o numerador e o denominador por 3; outros 2 alunos confundiram a multiplicação dada com o número misto $3\frac{2}{5}$. A multiplicação do item e) $\frac{1}{2} \times 8$ foi resolvida corretamente por apenas 2 alunos que, apesar de encontrarem a fração $\frac{8}{2}$ como resposta, nenhum deles mostrou ter percebido que a operação deste item consistia em encontrar a metade do número 8.

O item f) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$ apresentou uma multiplicação entre frações que foi resolvida de forma correta por metade dos alunos. Pode ser que o fato do algoritmo que diz deve-se “multiplicar

o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo” funcionar sem maiores ajustes neste caso justifique a diferença dos resultados entre este item e os anteriores.

O item g) $6 \div \frac{1}{3}$ objetivou verificar se os alunos realizavam a divisão entre um número natural e uma fração. Apenas 3 alunos efetuaram de forma correta a operação deste item, dois alunos talvez tenham dividido o número 6 pelo numerador 1 e pelo denominador 3, chegando à fração $\frac{6}{2}$.

O item h) $\frac{3}{8} \div 2$ tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam realizar a divisão de uma fração por um número natural. Somente 3 alunos conseguiram efetuar a operação corretamente; um dos alunos dividiu apenas o denominador por 2 e chegou ao resultado $\frac{3}{4}$, outro aluno dividiu o numerador e o denominador por 2 tendo como resultado $\frac{1,5}{4}$.

O último item da questão 14 trouxe uma divisão entre frações i) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$. Poucos alunos, 3 em um total de 10, conseguiram efetuar este cálculo de forma correta.

A partir dos resultados dos itens referentes à divisão, temos indícios de que os alunos da 4ª série ou 5º ano que responderam ao questionário sobre Números Racionais não se apropriaram da idéia de divisão entre frações nem da técnica operatória desta operação.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não compreender o algoritmo da divisão entre frações ou da divisão de naturais por frações ou de frações por naturais; esse obstáculo pode ter origem didática caso o professor ensine os “passos” do algoritmo sem se preocupar com o significado de cada um deles.

A questão 11 do questionário II sobre Números Racionais teve como objetivo verificar se os alunos davam significado aos algoritmos usados para realizar operações com frações. Foram apresentadas algumas sentenças com lacunas e solicitado que os alunos as preenchessem com as palavras “sempre”, “nunca” ou “às vezes”.

A primeira sentença “Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes _____ é necessário usar o conceito de frações equivalentes e calcular o m.m.c.” foi preenchida com a palavra “sempre” por 9 alunos em um total de 13. A segunda sentença, “O denominador de uma fração _____ é igual a zero.” foi preenchida com a palavra “nunca” por 7 alunos. A afirmação “O numerador de uma fração _____ é maior que o denominador.” foi completada com a expressão “às vezes” por apenas 5 alunos; 6 alunos completaram a sentença com a palavra “nunca”. Já a sentença “Numa adição de frações, o total é _____ maior que 1.” foi completada de forma correta com “às vezes” por apenas 3 alunos. A maioria dos alunos, 9 entre 13, preencheu a lacuna com a palavra “sempre”.

OBSERVAÇÃO: As respostas obtidas nesta questão podem mostrar que nem sempre os alunos dão significado aos “passos” dados nos algoritmos de operações com frações; esse obstáculo pode ter origem didática caso o ensino de algoritmos seja realizado sem a preocupação com o significado das estratégias utilizadas.

A 8ª questão do questionário I sobre Números Racionais apresentou a resolução de uma expressão realizada incorretamente. Aos alunos foi solicitado que identificassem os erros e os corrigissem. O primeiro erro consistiu em transformar o decimal 1,5 na fração $\frac{1}{5}$, o segundo erro foi transformar o número misto $3\frac{1}{4}$ na fração $\frac{3}{4}$ por meio da multiplicação. Nenhum aluno identificou os erros cometidos nesta questão; entretanto, não podemos afirmar

que os alunos cometam esses erros, pois a questão pode ter sido de difícil compreensão para eles, além disso podem nunca terem se defrontado com a necessidade de criticar a resolução de uma questão.

A 12ª questão do questionário II sobre Números Racionais apresentou quatro resoluções de uma adição de frações com denominadores diferentes e solicitou que os alunos as analisassem para verificar quais delas estavam corretas.

$$(A) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= 0,5 + 0,4$$

$$= 0,9$$

$$(B) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$$(C) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{7}$$

$$(D) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5+4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

O objetivo da questão era verificar se, além de saber resolver essa operação, os alunos percebem que existe mais de uma forma de resolver uma expressão com números racionais, que é possível efetuar as operações lidando com números fracionários ou com números decimais, ou seja, que as escritas são equivalentes. Apenas 5 alunos conseguiram analisar as resoluções e identificar erro apenas na letra c).

não porque ele somou antes de dividir

só a (c) que está errada porque ele não fez o M.M.C ele só somou

A conta C está incorreta pois os denominadores somam e os numeradores dividem

U A, B e D acertaram mas o C não porque 10 não divide 5 e 2

A análise dos resultados obtidos nesta questão pode nos mostrar que os alunos não se sentem à vontade em lidar com números racionais fracionários e decimais ao mesmo tempo, além de talvez evidenciar uma possível dificuldade em analisar e validar resoluções de exercícios.

Os resultados obtidos nas questões referentes às operações com números racionais corroborou uma passagem do texto dos PCNs.

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimento de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal.

(Brasil, 1998, p.100-101)

4.2.10. SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS RACIONAIS QUE ENVOLVAM OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS (D26 – 8ª SÉRIE)

Já discutimos que os significados das operações de adição e subtração de números racionais se aproximam as significados dessas operações no universo dos números naturais. A multiplicação e a divisão também são exploradas em diferentes situações no conjunto dos números naturais e dos racionais como razão, comparação e configuração retangular. Somente o significado da multiplicação como procedimento combinatório não é estendido aos números racionais não inteiros. (Brasil, 1997)

Entretanto, algumas variações na interpretação da multiplicação e divisão entre racionais devem ser consideradas.

A compreensão da multiplicação com fração pode ser pensada como “parte de partes do total”. Assim, $2/5 \times 3/4$ pode ser interpretada como 2/5 dos 3/4 de um todo. (...) No caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como

“partes que cabem em partes”. Assim $1/2 \div 1/3$ pode ser interpretado como quantas partes de $1/3$ cabem em $1/2$.

(Brasil, 1998, p. 105)

A questão 13 do questionário I sobre números racionais pretendeu verificar se os alunos dão significado às operações com frações. Foram apresentadas 4 situações em que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ estavam presentes e solicitado que os alunos associassem essas situações às operações que poderiam ser usadas para encontrar sua solução.

a) Helena comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza, enquanto Gabriel comeu $\frac{1}{2}$ dessa mesma pizza. Quanto da pizza foi comido?	() $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$
b) Na situação da letra a), quanto Gabriel comeu a mais que Helena?	
c) José e Nair tiveram 4 filhos. José morreu de uma doença rara e a sua herança foi dividida da seguinte maneira: à sua esposa, Nair, coube metade dos bens; a cada um dos seus filhos coube a quarta parte da metade dos bens. Quanto cada filho recebeu	() $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$
d) Leandro foi à uma mercearia comprar $\frac{1}{2}$ quilo de farinha. O vendedor, entretanto, disse que só tinha embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Quantas embalagens de $\frac{1}{4}$ o vendedor utilizou para embalar o $\frac{1}{2}$ kg de farinha?	() $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Apenas 1 aluno associou a situação da letra a) à operação de adição. Da mesma forma, somente 1 aluno associou a situação b) à subtração. O mesmo resultado foi obtido para a associação da letra c) à multiplicação. 2 alunos associaram a última situação à

divisão. A maioria dos alunos, 6 em um total de 10, não respondeu a questão, a deixou em branco.

OBSERVAÇÃO: os alunos não conhecem o significado das operações com frações, principalmente no caso da multiplicação e da divisão; esse obstáculo pode ter origem didática caso o professor esteja mais preocupado em ensinar as técnicas operatórias e não se atenha ao significado das operações.

4.3. NÚMEROS INTEIROS

4.3.1 SOBRE A LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS NA RETA NUMÉRICA (D16 – 8ª SÉRIE) E SOBRE O RECONHECIMENTO E A UTILIZAÇÃO DE ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS.

O Ensino dos Números Inteiros costuma estar cercado de dificuldades. Existem registros de que na história da construção do conhecimento algumas incompreensões também estiveram presentes.

Além das situações do cotidiano os números negativos também surgiam no interior da Matemática na resolução de equação algébrica. No entanto, sua aceitação seguiu longa e demorada trajetória. Só no século XIX os negativos foram interpretados como uma ampliação dos naturais e incorporam as leis da Aritmética. Passaram então a integrar a hierarquia dos sistemas numéricos como números inteiros.

(Brasil, 1998, p.97)

Na escola, os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diversas situações em que os números negativos estejam presentes. Os números inteiros podem representar diferença, “falta”, orientação e posições relativas. (Brasil, 1998).

Os PCNs salientam que os alunos podem enfrentar alguns obstáculos na concepção dos números inteiros. São eles:

- ❖ Conferir significado às quantidades negativas;
- ❖ Reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- ❖ Reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
- ❖ Perceber a lógica dos números negativos que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado” como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”. (Brasil, 1998)

O questionário sobre números inteiros trouxe várias questões que abordavam algumas características desses números e foi respondido por 23 alunos da 6ª série ou 7º ano.

Logo no início, foi solicitado que os alunos representassem na reta numerada impressa os números inteiros entre -8 e 8. Todos os alunos realizaram essa representação corretamente.

A questão 1 teve por objetivo verificar se o aluno, apoiado na reta numérica representada, sabia decidir qual era o maior número dentre um par de números inteiros.

Qual número é maior?			
a) 5 ou 0?	b) -4 ou 0?	c) -5 ou 5?	d) 3 ou -7?

Os alunos não tiveram dificuldade em indicar o maior número entre os pares. 22 alunos indicaram o número 5 como maior no item a); a mesma quantidade de alunos indicou que 0 era o maior número do item b); 20 alunos responderam que o maior

número no item c) era o 5; e o mesmo número de alunos apontou o número 3 como maior número no item d) ; neste último item, entretanto, 3 alunos indicaram o número -7 como maior entre o par por talvez terem se atido apenas ao algarismo ao comparar os números 3 e -7. Podemos perceber, então, que a maioria dos alunos não teve problema em identificar o maior número entre pares que apareciam na reta numerada

A segunda questão perguntava aos alunos quantos números inteiros existem entre dois números inteiros dados.

Quanto números inteiros existem entre:		
a) 1 e 8	b) 4 e 0	c) -2 e 0
d) -5 e -7	e) -3 e 1	f) 8 e -8

Grande parte dos alunos conseguiu determinar a quantidade de números inteiros nos intervalos dados. 13 alunos responderam que existem 6 números inteiros entre 1 e 8; 15 alunos disseram existir 3 números entre 4 e 0; 16 alunos afirmaram que entre -2 e 0 existe apenas 1 inteiro assim como o fizeram 14 alunos a respeito do intervalo -5 e -7; 14 alunos informaram que entre -3 e 1 existem 3 números inteiros; e 15 alunos indicaram que entre 8 e -8 existem 15 números inteiros.

Um número considerável de alunos parece ter registrado a diferença entre os números de cada item. No item a) 7 alunos escreveram o resultado 7; no item b) 4 alunos responderam que no intervalo dado existem 4 números; no item c) 2 alunos indicaram que existem 2 números entre -2 e 0, assim como o fizeram 8 alunos no item d) para o intervalo -5 e -7; no item e) 5 alunos disseram existir 4 números entre -3 e 1; e no item d) 4 alunos afirmaram existir 16 números entre 8 e -8.

A adoção do zero teve um papel-chave na construção dos inteiros, possibilitando operar com grandezas negativas, mudando o caráter de “zero-nada” para “zero-origem”, favorecendo, assim, a idéia de grandezas opostas ou simétricas

A questão 3 visou verificar se os alunos possuíam intuitivamente a idéia de módulo, sem tratar formalmente o conceito; esta é uma questão que pode introduzir a idéia de oposto de um número; além disso, pretendeu-se verificar se os alunos reconheciam o significado do zero posicional ao estabelecê-lo como referência.

Com base numa reta numerada, responda as questões a seguir:

- a) 5 ou 20? Qual deles está mais distante do ponto zero?
- b) -4 ou -8? Qual deles está mais próximo do ponto zero?
- c) -20 ou 13? Qual deles está mais distante do ponto zero?
- d) -7 ou +7? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

A maioria dos alunos não apresentou dificuldade em resolver essa questão. 18 em 23 alunos responderam que o número 20 está mais distante do ponto zero do que o 5; a mesma quantidade de alunos reconheceu que o número -4 está mais próximo do ponto zero do que o número -8; 19 alunos disseram que o número -20 está mais distante do ponto zero do que o 13; somente 13 alunos perceberam que os números -7 e + 7 estão a uma mesma distância do ponto 0.

A questão 4 pretendia verificar se os alunos conseguiam determinar sucessores e antecessores de números inteiros.

Escreva:

a) O sucessor de 5	b) O antecessor de 5
c) O sucessor de -6	d) O antecessor de -6
e) O sucessor de 0	f) O antecessor de 0

O antecessor e o sucessor do número 5 foram identificados corretamente por todos os alunos que responderam ao questionário sobre números inteiros. O antecessor e o sucessor do número -6 foram apontados corretamente por 9 alunos. A maioria dos alunos indicou como antecessor de -6 o número -5 e como sucessor desse número o -7; pode ser que os alunos tenham confundido ao se ater apenas ao algarismo do número. O sucessor do número 0 foi indicado corretamente por todos os alunos; entretanto, 21 alunos identificaram o antecessor desse mesmo número.

OBSERVAÇÃO: alguns alunos mostram não conseguir determinar o antecessor e o sucessor de um número inteiro negativo; esse obstáculo pode ter origem epistemológica já que, talvez motivados pelo fato de no conjunto dos números naturais o sucessor apresentar sempre uma unidade a mais e conseqüentemente validarem idéias como “6 é antecessor de 7”, os alunos não aceitam escritas do tipo “-7 é antecessor de -6”;

Utilizando os símbolos $<$, $>$ ou $=$ os alunos compararam números inteiros na questão 5.

Complete com $>$, $<$ ou $=$.

a) 0 ____ 1	b) 17 ____ -17	c) -1 ____ 20	d) -61 ____ -14
e) 6 ____ -3	f) -8 ____ 0	g) +30 ____ 30	h) -26 ____ -95

Os alunos não apresentaram dificuldade em comparar os números inteiros. Os itens que apresentaram menor índice de acerto foram os que envolviam a comparação entre os números 17 e -17 e entre -8 e 0. De forma geral, podemos afirmar que os alunos que responderam ao questionário são capazes de comparar números inteiros.

A questão 9, como ampliação da questão 5, teve como objetivo verificar se os alunos reconheciam as estratégias de comparação de números inteiros já solicitadas em

outras questões. Os alunos deveriam classificar em verdadeira ou falsa algumas sentenças sobre a comparação de inteiros.

Responda (V) para verdadeiro, (F) para falso ou (X) se não souber decidir.

- () Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo
- () O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo
- () Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero
- () Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero

Os alunos que responderam ao questionário sobre Números Inteiros mostraram conhecer a estratégia de comparação de números inteiros e generalizam as comparações realizadas em questões anteriores. Todos os alunos classificaram como verdadeira a sentença “Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo”; 18 alunos classificaram como verdadeira a sentença “O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo”; todos os 23 alunos classificaram como verdadeira a afirmação “Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero”; e 21 alunos disseram ser falsa a sentença “Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero”.

A questão 6 pretendeu verificar se os alunos estavam familiarizados com os números inteiros negativos reconhecendo que o 0 não é o menor número inteiro que existe; além disso existia a pretensão de verificar se os alunos percebiam que não é possível determinar o menor número inteiro. O enunciado trazia uma questão e uma resposta fictícia sobre o menor número inteiro que existe e questionava se essa resposta estava correta.

Veja como Joana respondeu à seguinte questão na prova:

Qual é o menor número inteiro que existe?

O menor número inteiro é o 0 porque não existe nenhum número antes dele.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Os alunos mostraram estar bastante familiarizados com os números negativos e levantaram hipóteses coerentes para justificar suas respostas. As justificativas se dividiram em dois grupos. 11 alunos se apoiaram na existência dos números negativos:

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não, pois existem números antes do zero 1, -1, -2, -3 ...

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não, porque existe número antes do zero, os negativos.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Está errado porque depois do 0 existe os números negativos.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não, pois existe os números negativos.

10 alunos, justificaram o erro de Joana na impossibilidade de definir o menor número inteiro.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não, porque não existe menor número inteiro.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não pois números inteiros nunca acabam por isso não existe menor número inteiro.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não, porque os números são infinitos

A resposta de Joana está correta? Por que?

Não porque os números são infinitos antes e depois da zero.

Apenas um aluno mostrou reconhecer o 0 como o menor número inteiro:

A resposta de Joana está correta? Por que?

Sim pois não existe nenhum número inteiro antes do menor

Outro aluno não justificou de forma coerente a sua resposta.

A resposta de Joana está correta? Por que?

O menor número inteiro é o 0, porque ele não! Todo o número multiplicado por 0 dá 0

Ainda no mesmo contexto, uma questão de uma prova, a questão 7 trouxe a localização de números inteiros na reta numérica.

Na mesma prova, Joana desenhou a seguinte reta numerada:

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

21 alunos perceberam o erro cometido por Joana na identificação da localização dos números inteiros na reta numérica.

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Mandaria ela inverter, colocar o -um no lugar do -8, o -2 no lugar do -7, o -3 no lugar do -6, o -4 no lugar do menos cinco, e os números que ele mudou $(-7, -2)$ $(-8, -7, -6, -5, -4, -3)$

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Os números negativos comecem pelo outro lado exc: -1, -2, -3... assim por diante

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Que para ela realizar o exercício ela sequencie antes do zero a mesma ordem numérica. (1, 2, 3, 4...)

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

O -1 é o maior número negativo, quanto mais perto da reta maior ele é, o contrário dos positivos.

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

mudando a sequência dos números negativos

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Os números anteriores ao zero estão em ordem crescente (1, 2...) para a esquerda, embora estejam diminuindo.

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Que a ordem dos números negativos estava errada a ordem é de -8 ao -1

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Que os números negativos estão ao contrário.

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Quando o ~~ne~~ é negativo o menor é sempre o maior, e o maior é menor

O número negativo que vem antes do zero é o -1 e não o -8

Apesar dos alunos saberem “consertar” a reta, parece ficar claro que a maioria deles não sabe efetivamente porque antes do 0 vem o -1, parece não reconhecer o “movimento” de voltar 1 unidade, voltar 2 unidades e assim sucessivamente.

4.3.2. SOBRE EFETUAR CÁLCULOS COM NÚMEROS INTEIROS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES (D18 – 8ª SÉRIE)

Um dos obstáculos de aprendizagem que o texto dos PCNs apresenta sobre os Números Inteiros está a operação neste universo. No conjunto dos números naturais, adicionar um número ao outro, significa acrescentar unidades a esse número, dessa forma, a soma sempre é maior que as parcelas. No conjunto dos números inteiros o significado de acréscimo na adição também está presente, mas para o aluno não é intuitivo pensar que se adicionamos 5 unidades a um número podemos obter o número 2 no resultado, ou seja, que a soma possa ser menor do que uma das parcelas. O mesmo ocorre com a subtração. Até então, subtrair um número de outro significava retirar dele

algumas unidades, resultando sempre em um número menor do que o subtraendo. Entretanto, no universo dos números inteiros, podemos subtrair um número de 3 unidades e obter como resposta o número 6, ou seja, a diferença obtida é maior que o minuendo.

Para que os alunos consigam operar nesse novo universo, alguns professores recorrem a regras para cálculos com inteiros.

Quanto ao tratamento pedagógico dado a esse conteúdo (números inteiros), a ênfase na memorização de regras para efetuar cálculo, geralmente descontextualizados, costuma ser a tônica da abordagem dada aos números inteiros (...) Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem ampliar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro.

(Brasil, 1998, p.98)

A regra de sinais parece resolver os problemas dos alunos em resolver cálculos com números negativos. Para as operações de adição e subtração, por exemplo, a regra orienta que se os números tiverem sinais diferentes, os alunos devem subtraí-los e manter o sinal do maior. Se os números tiverem o mesmo sinal, deve-se somá-los e manter esse sinal.

Por exemplo: $-2 + 5 \rightarrow$ como os números possuem sinais diferentes, precisamos subtraí-los ($5 - 2 = 3$) e manter o sinal do maior (5 tem o sinal positivo); portanto, o resultado é $+3$

$-3 - 4 \rightarrow$ como os números possuem sinais iguais, precisamos somá-los ($3 + 4 = 7$) e manter esse sinal (negativo); portanto, o resultado é -7

Para as divisão e multiplicação os alunos devem proceder como se os números não tivessem sinal e ajustar o sinal do resultado da seguinte maneira: se os sinais dos

números forem iguais, o resultado terá sinal positivo; se os sinais dos números forem diferentes, o resultado terá sinal negativo.

Por exemplo: $(-3) \times (+4) \rightarrow$ faz-se $3 \times 4 = 12$ e ajusta-se o sinal (menos com mais dá menos); portanto, o resultado é -12

$(-15) \div (-5) \rightarrow$ faz-se $15 \div 5$ e ajusta-se o sinal (menos com menos dá mais); com isso, o resultado é $+3$.

Em operações com inteiros, costumam-se apresentar os números entre parênteses. Quando isso ocorre, antes de efetuar o cálculo, os alunos costumam ser orientados a tirar os parênteses. Para fazê-lo, costuma-se utilizar a regra de sinais da multiplicação e da divisão.

Por exemplo: $(-2) + (-3) \rightarrow$ os parênteses do primeiro termo (-2) é retirado, para retirar os parênteses do (-3) , entretanto, faz-se a regra de sinais (mais com menos dá menos); com isso a operação a ser realizada é $-2 - 3$.

Pode ser que as regras de sinais que são apresentadas para os alunos se tornem mais “atraentes” do que a compreensão dos significados das operações com números inteiros e acabem por dificultar os cálculos nesse universo numérico. Não é difícil encontrar alunos que tentam, por exemplo, usar a regra de sinais da multiplicação e divisão em adições e subtrações.

A questão 10 teve por objetivo verificar, a partir de operações consideradas simples que apresentavam parênteses, se os alunos conseguem realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões no universo dos números inteiros.

a) $(+5) + (+3) =$	b) $(+5) + (-3) =$	c) $(-5) + (+3) =$	d) $(-5) + (-3) =$
e) $(-7) - (+4) =$	f) $(-7) - (-4) =$	g) $(+7) - (+4) =$	h) $(+7) - (-4) =$
i) $(-3) \times (+5) =$	j) $(-3) \times (-2) =$	k) $(+4) \times (+1) =$	l) $(+2) \times (-3) =$
m) $(-12) \div (+4) =$	n) $(+6) \div (-3) =$	o) $(-9) \div (-3) =$	p) $(+4) \div (+2) =$

Dos 23 alunos que responderam ao questionário sobre números inteiros, 22 resolveram o item a) $(+5) + (+3)$ corretamente; 19 alunos chegaram ao resultado correto na soma apresentada no item b) $(+5) + (-3)$, 2 alunos que chegaram ao resultado -8 podem ter somado os números e usado a regra de sinais da multiplicação (mais com menos dá menos); o item c) $(-5) + (+3)$ foi resolvido de forma correta por 18 alunos, os 5 alunos que encontraram como resposta o número -8 podem ter somado os números e aplicado a regra de sinais da multiplicação (menos com mais dá menos). 16 alunos resolveram o item d) $(-5) + (-3)$ corretamente; 4 alunos deram como resposta o número $+8$, que pode ser resultado da regra de sinais da multiplicação (menos com menos dá mais). A partir dos resultados apresentados, podemos concluir que, apesar da maioria dos alunos ter apresentado resultados corretos nas adições com números inteiros, alguns alunos parecem não ter se apropriado da habilidade de resolver essas operações.

As subtrações apresentaram um índice menor de acertos. A operação do item e) $(-7) - (+4)$ foi resolvida corretamente por apenas 8 alunos; 9 alunos que encontraram como resultado o número -3 podem não ter percebido que se tratava de uma subtração e efetuado a adição $(-7) + (+4)$; 3 alunos encontraram como resposta o número 11. O item f) $(-7) - (-4)$ foi resolvido corretamente por 11 alunos; 4 alunos encontraram como resposta o número $+3$; 6 alunos deram como resposta o número -11 , que pode ter sido motivado pela regra de sinais da multiplicação (menos com menos dá mais – mais com menos dá menos). Apenas 13 alunos encontraram 3 como resposta para o item g) $(+7) - (+4)$; 6 alunos encontraram como resposta o número $+11$. A última subtração, o item h) $(+7) - (-4)$, foi realizada de forma correta por 11 alunos; 6 alunos encontraram como resposta o número 3, que pode ter resultado da operação $(+7) + (-4)$. Como

podemos ver nos resultados obtidos, os alunos apresentaram grande dificuldade em realizar subtrações com números inteiros.

A multiplicação entre inteiros parece não consistir em uma dificuldade para os alunos. 20 alunos resolveram corretamente todos os itens com essa operação i) $(-3) \times (+5)$, j) $(-3) \times (-2)$, k) $(+4) \times (+1)$ e l) $(+2) \times (-3)$; 1 aluno efetuou adição entre esses números e outros 2 alunos não resolveram as operações apresentadas. Podemos concluir que os alunos não apresentam dificuldade em resolver multiplicação entre inteiros. Talvez a regra de sinais facilite a resolução desta operação.

A divisão entre inteiros foi abordada nos itens m) $(-12) \div (+4)$, em que 18 alunos apresentaram o resultado correto, nos itens n) $(+6) \div (-3)$ e o) $(-9) \div (-3)$ que foram resolvidos corretamente por 15 alunos cada um; o item p) $(+4) \div (+2)$ foi realizado de forma correta por 19 alunos. Cabe ressaltar que 3 alunos não resolveram as divisões.

Podemos perceber que o índice de acertos nas multiplicações e divisões foi maior do que nas adições e subtrações. Isso pode ter ocorrido pela interiorização da regra de sinais usada na multiplicação e divisão, que é mais fácil de ser memorizada e pode ter sido transferida para a adição e subtração por alguns alunos. Os resultados obtidos nos dão pistas de que é provável que os alunos não conheçam o significado das operações no universo dos números inteiros.

4.3.3. SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS INTEIROS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES (D20 – 8ª SÉRIE)

Ao apresentar os números negativos muitos livros didáticos recorrem a situações do cotidiano em que estes números aparecem, como em temperaturas abaixo de zero, dívidas ou saldos de gol.

Os PCNs indicam que o ensino dos números inteiros deve contemplar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo nesse universo pela observação de regularidades. (Brasil, 1998).

A questão 8 apresentou duas seqüências de número naturais que deveriam ser completadas pelos alunos.

Quais são os próximos números das seqüências?

a) 12, 9, 6, _____, _____, _____, _____

b) -14, -10, -6, _____, _____, _____, _____

A primeira seqüência foi completada de forma correta por 22 alunos, em um total de 23. Apenas um aluno completou a seqüência com os números “3, 0, -7, -4”. Entretanto, apenas 14 alunos completaram corretamente a segunda seqüência; 2 alunos parecem ter “batido” no zero e voltado para os números negativos ao completar com os números “-2, -2, -6, -10”; 3 alunos escreveram a seqüência “-2, 0, 6, 10” que demonstram, talvez, uma necessidade de “parar” no zero antes de continuar a seqüência; 1 aluno somou 3 unidades a cada termo e escreveu “-3, 0, 3, 6”, outro aluno parece ter reconhecido que entre os termos deve-se somar 4 unidades, mas pode ter “pulado” o número zero ao escrever “-2, 3, 7, 11”; um outro aluno escreveu a seqüência “-2, 8, 4, 0”. 2 alunos não responderam essa questão.

A diferença de resultados obtidos nos dois itens pode ter sido motivada pela presença do número 0 na primeira seqüência que “marca” a passagem entre os números positivos e negativos. De qualquer forma, parece que os alunos não reconhecem o significado de transformação das operações de adição e subtração nos números inteiros.

4.4. NÚMEROS IRRACIONAIS

4.4.1 SOBRE A CONCEPÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A origem dos números irracionais parece estar associada à descoberta de grandezas incomensuráveis, ou seja, à impossibilidade de expressar algumas medidas com os números que eram conhecidos até então, como a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Os registros históricos contam que a aceitação da existência dos números irracionais não foi imediata.

Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados.

(Brasil, 1998, p.106)

Os números irracionais costumam ser apresentados aos alunos na 7ª série ou 8º ano do Ensino Fundamental. Como objetivo do Ensino de Matemática, os PCNs apontam o reconhecimento de que existem números que não são racionais.

Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente. (...) O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas “casas” decimais não-periódicas, identifique esse número como um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça os números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso.

Com o objetivo de verificar qual a concepção dos alunos sobre os números irracionais, a questão 2 pediu que os alunos explicassem, com suas palavras, o que é um número irracional. Dos 20 alunos da 7ª série ou 8º ano que responderam ao questionário sobre números irracionais, 9 deixaram essa questão em branco. Os outros 11 alunos definiram os números racionais.

São números fracionários e decimais.

São números que contêm frações.

números racionais são os números decimais

nada mais, nada menos que números fracionários

São números que representam fração

números representados como fração

São números fracionários

números racionais são números fracionários, ou seja, números quíntos.

é menos que uma divisão como
ex: $-\frac{3}{5}$ ou $-\frac{5}{12}$ ou fracionários

Pode ser que os alunos da 7ª série ou 8º ano que responderam ao questionário não conheça o “nome” dos Números Irracionais.

OBSERVAÇÃO: o resultado obtido nessa questão fornece indícios de que os alunos da 7ª série ou 8º ano não possuem nenhuma idéia sobre os Números Irracionais; como nenhum aluno apresentou uma resposta próxima à idéia desse tipo de número, não foi possível conhecer a concepção dos alunos sobre o tema.

Essa mesma questão estava presente no questionário sobre Números Reais que os alunos da 8ª série ou 9º ano responderam. A maioria dos alunos mostrou não ter a concepção de números irracional do mesmo modo que os alunos da série anterior. Nos questionários de 6 alunos notam-se indícios de que de algum modo esse assunto foi tratado, deixando algumas “lembranças”.

Números com raízes

O número irracional, que o número decimal é igual não tem fim.

Irracional são os números, com raízes, vírgulas

Números quebrados.

A questão 3 pretendia verificar se os alunos reconheciam os números irracionais dentre um conjunto de números reais.

Quais destes números são irracionais?

() 3,2121...

() $-\frac{3}{5}$

() $-\sqrt{6}$

() 2,15

() 1,310310031000...

() $\sqrt{7}$

() $\sqrt{2}$

() π

6 alunos apontaram o número 3,2121...¹⁷ como sendo um número irracional. O número racional fracionário $-\frac{3}{5}$ foi classificado como número irracional por 9 alunos. O decimal 2,15 foi selecionado por 3 alunos. Sendo 20 o número de alunos que responderam ao questionários, podemos observar que grande parte dos alunos parece acreditar que os números irracionais são frações ou números decimais.

O número $-\sqrt{6}$ foi selecionado como número irracional por apenas 1 aluno; somente 2 alunos apontaram o número $\sqrt{7}$ como irracional; assim como o fizeram 2 alunos sobre o número $\sqrt{2}$; 4 alunos reconheceram como irracional o número 1,310310031000...; o número π foi indicado por somente 3 alunos.

O resultado obtido nessa questão mostrou que os alunos não sabem identificar números irracionais dentre um grupo de números reais. Pode ser que a concepção errônea sobre números irracionais demonstradas na questão 2 tenha influenciado na seleção desses números nessa questão.

OBSERVAÇÃO: os alunos não reconhecem números irracionais obtidos por raízes quadradas nem como números com infinitas “casas” decimais não-periódicas.

¹⁷ Apesar da ambigüidade da notação “...” ela foi utilizada uma vez que os alunos estão habituados a ela.

4.4.2 SOBRE EFETUAR CÁLCULOS SIMPLES COM VALORES APROXIMADOS DE RADICAIS (D27 – 8ª SÉRIE)

Um dos objetivos da Matemática no Ensino Fundamental apresentado pelos PCNs é desenvolver no aluno a capacidade de efetuar cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas. Entretanto, a necessidade de estimar o valor de um irracional traz à tona a discussão sobre aproximações.

Sabe-se (...) que os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que sua representação decimal é necessariamente infinita, e não periódica. No caso das representações infinitas surge o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número.

(Brasil, 1998, p.84)

A questão 1 solicitou que os alunos encontrassem valores de algumas raízes quadradas indicadas e que em seguida representassem os resultados na reta numérica.

Encontre os seguintes valores e em seguida represente-os na reta numerada:

a) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{16}$

c) $\sqrt{20}$

d) $\sqrt{25}$

e) $\sqrt{30}$

f) $\sqrt{40}$

Os alunos, em geral, não apresentaram dificuldade em encontrar as raízes exatas nos itens b) e d). 18 dos 20 alunos indicaram o 4 como raiz quadrada de 16; 1 aluno

escreveu 8 como raiz de 16, outro aluno não respondeu esse item; 18 alunos responderam que 5 era o resultado de $\sqrt{25}$.

A maioria dos alunos encontrou valores aproximados para as raízes quadradas nos demais itens. 6 alunos indicaram como valor de $\sqrt{10}$ o decimal 3,16; 7 alunos escreveram o decimal 3,1; 2 alunos responderam que $\sqrt{10}$ era igual a 5, apenas 2 alunos deram como resposta o número 3,16... indicando, talvez terem percebido que não era possível indicar exatamente o valor de $\sqrt{10}$. No item b), 4 alunos aproximaram a $\sqrt{20}$ para 4,47; 8 alunos disseram que $\sqrt{20}$ valia 4,4; 1 aluno arredondou o valor para 4,5; apenas 2 alunos talvez tenham percebido que não era possível encontrar o valor exato de $\sqrt{20}$ e deram como resposta o valor 4,47.... O valor 5,47 foi encontrado por 6 alunos para $\sqrt{30}$; 9 alunos arredondaram o valor para 5,4; 2 alunos indicaram como valor de $\sqrt{30}$ o número 5,47.... No último item, 4 alunos escreveram que o valor de $\sqrt{40}$ era 6,32; 9 alunos indicaram para esse valor o decimal 6,3; 2 alunos escreveram como valor de $\sqrt{40}$ o número 6,32...

A maioria dos alunos não demonstrou dificuldade em encontrar um número próximo aos valores indicados. Cabe ressaltar, entretanto, que não há cálculos na folha e que muitos deles não arredondam as casas, apenas “cortam” ou truncam as casas decimais; apenas 2 alunos mostraram reconhecer que os números irracionais que apareceram não podiam ser representados corretamente e ao indicar usaram a notação da reticência¹⁸ para indicar que o número continuava. A representação na reta numérica não foi analisada, pois na impressão do questionário ocorreu uma falha no alinhamento entre as marcações na reta e os números, o que prejudicou a interpretação das respostas.

¹⁸ Ambígua como já observamos.

A questão 11 apresentou números reais para serem representados na reta numérica. Vamos nos ater à representação do irracional que aparecia no enunciado. Apenas 1 aluno representou o número $\sqrt{2}$ no intervalo entre os números 1 e 2; 2 alunos o fizeram na posição do número 1; 1 aluno o fez na posição do número 2; e 16 alunos não representaram o número $\sqrt{2}$ na reta numérica.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não saber localizar o número irracional $\sqrt{2}$ na reta numérica.

A questão 8 perguntou aos alunos que número era maior entre 3 e $2\sqrt{2}$. Apenas 4 alunos escreveram que o número 3 era o maior dentre os dois valores. A seguir, algumas de suas justificativas.

3. porque $2\sqrt{2} = 2,8$

3, porque o 2 está na raiz

5 alunos disseram que o número $2\sqrt{2}$ era o maior entre os dois. Dentre as justificativas, podemos apresentar as seguintes:

$2\sqrt{2}$ é maior, pois o 2 está multiplicando o que está dentro da raiz

O maior é o $2\sqrt{2}$, pois ele tem o número dentro da raiz, portanto, aumentando o valor do conteúdo

10 $2\sqrt{2}$, pois é preciso ter a raiz quadrada de 2 e depois somar por mais 2, e assim deu 3,4, maior que 3

4 alunos disseram que os dois números eram iguais, mas apenas 1 apresentou uma justificativa.

Iguais. Porque o resultado de $2\sqrt{2}$ seria $2+1=3$.

7 alunos não responderam a questão.

Na questão 7 foi solicitado que os alunos assinalassem o resultado mais próximo de uma soma de dois irracionais.

Assinale o resultado mais próximo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

() 2,8

() 3,0

() 3,9

() 4,0

Apenas 2 alunos assinalaram o número 4,0 como melhor aproximação para $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; 4 alunos assinalaram o valor 3,9; 2 alunos assinalaram o número 3,0 e outros 4 assinalaram 2,8. 8 alunos não responderam essa questão.

OBSERVAÇÃO: os alunos parecem não recorrer à aproximação dos números irracionais quando se deparam com situações em que estes aparecem com radicais; quando foi solicitado explicitamente que os alunos encontrassem o valor dos radicais, eles não apresentaram dificuldade; entretanto, parecem não utilizar essa estratégia em cálculos onde não aparece a solicitação explícita para encontrar uma aproximação.

Apesar da aproximação de raízes quadradas ser o único descritor do SAEB e da prova Brasil relacionado ao conjunto dos números irracionais, o cálculo com radicais continua ocupando um espaço razoável no ensino de Matemática, principalmente na 7ª série ou 8º ano. Talvez, a busca pela fluência com procedimentos de cálculos com números irracionais representados com radicais tenha deixado de lado a discussão sobre a concepção dos números irracionais. Como salientam os PCNs:

De modo geral, as formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. Apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo (...) o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.

(Brasil, 1990, p.106)

4.5. NÚMEROS REAIS

Ao final do Ensino Fundamental os alunos já passaram por todos tipos de números que constituem o conjunto dos Números Reais. Entretanto, os alunos ainda costumam apresentar dificuldades referentes a números.

Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações.

(Brasil, 1998, p.95)

Segundo os PCNs, a Matemática nesse nível de ensino deve apresentar os diferentes conjuntos numéricos e suas principais características.

Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como

instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos.

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

(Brasil, 1998, p.50)

A questão 2 do questionário sobre Números Reais aplicado a 19 alunos da 8ª série ou 9º ano, abordou a inter-relação entre os conjuntos numéricos. Foi solicitado que os alunos dessem 2 exemplos de números com certas características.

Dê dois exemplos de números que sejam:

- a) Naturais: _____
- b) Inteiros, mas que não seja natural: _____
- c) Racionais, mas que não seja inteiro: _____
- d) Reais, mas que não seja racional: _____

O objetivo da questão era verificar se os alunos sabem dar exemplos de elementos dos tipos de números que são abordados no Ensino Fundamental.

As respostas dadas nessa questão mostram que os alunos conhecem os números naturais e sabem exemplificá-los. Os números inteiros e não naturais, ou seja, os números negativos, foram exemplificados por 15 dos 19 alunos. Apenas 10 alunos souberam exemplificar números racionais que não fossem inteiros, 2 alunos escreveram números inteiros neste item e 7 alunos deram como exemplos números irracionais, o que pode

demonstrar que os alunos confundem a expressão “números racionais” com “números irracionais”. Como exemplo de números reais que não fossem racionais, 11 alunos escreveram números inteiros, 4 escreveram números decimais e 3 representaram dízimas periódicas. Podemos dizer, a partir dos resultados obtidos, que os alunos não conhecem a definição de número irracional e não o reconhecem como um número real que não é racional; além disso, pode ser que os alunos confundam os números racionais com os irracionais.

As questões 1, 3 e 12 abordaram algumas características do conjunto dos Números Reais.

Na questão 1, os alunos deveriam analisar duas sentenças e classificá-las em verdadeiras ou falsas.

Tomando como conjunto universo os números reais, complete com V (verdadeiro) ou F (falso):

() 2 é sucessor de 1

() 3,9 é antecessor de 4

O objetivo dessa questão foi verificar se os alunos reconhecem que características específicas dos números inteiros não podem ser generalizadas ao conjunto dos reais, como a idéia de sucessor e antecessor de um número. A primeira sentença foi classificada como falsa por apenas 3 alunos, a maioria dos alunos, 16 em um total de 19, afirmou que o número 2 é sucessor de 1 no universo dos números reais. Já a segunda sentença foi classificada como falsa por somente 4 alunos; 14 alunos disseram ser verdadeira a sentença e 1 aluno não respondeu a questão. Como já havíamos constatado com o conjunto dos números racionais, a maioria dos alunos parece transferir os conceitos de sucessor e antecessor do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números reais.

A questão 12 tinha como objetivo verificar se os alunos reconhecem a impossibilidade em definir qual número vem a seguir de outro.

Dado o número 1,5, qual é o próximo?

Apenas 2 alunos reconheceram ser impossível escrever o número que vem logo depois de 1,5.

depende do conjunto numérico, como vale para 1,5 e 1,6 ou 2,0?

depende do conjunto pedido.

A maioria dos alunos tentou encontrar uma resposta; apareceram dois valores com grande frequência, os números 1,6 e o 2. Um dos alunos escreveu que o próximo número é o 9, ele pode ter pensado na sequência 1-5, com razão 4 e encontrado o seu terceiro termo.

A questão 3 teve como objetivo verificar se os alunos conhecem o fato de que entre dois números reais distintos existem infinitos números reais. 17 alunos mostraram reconhecer que não é possível indicar quantos números existem nesse intervalo.

∞

Infinitos

É impossível demonstrar todos os números.

é impossível demonstrar todos os números.

impossível contar todas as casas

Sobre efetuar cálculos com números reais, os PCNs ressaltam que:

O importante é superar a mera memorização de regras e algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam de forma desastrosa, o ensino tradicional de cálculo.

(Brasil, 1998, p.67)

A questão 4 do questionário sobre Números Reais apresentou alguns cálculos com números reais que deveriam ser efetuados pelos alunos.

Efetue os cálculos

a) $(-4) + (-0,5)$

b) $1,75 - 2$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$

d) $1 : \left(-\frac{5}{2}\right)$

O item a) apresentou uma soma de dívidas. Apenas 9 alunos acertaram esse cálculo. 8 alunos talvez tenham usado a regra de sinais da multiplicação para encontrar como resposta o +4,5, ou seja, os alunos podem ter somado os valores absolutos e adequado o resultado com a regra “menos com menos dá mais”, chegando ao resultado +4,5.

O item b) trouxe uma subtração entre números racionais escritos em forma decimal; 14 alunos, de um total de 19, encontraram a resposta correta -0,25; 4 alunos deram como resposta o número 0,25; um aluno encontrou como resposta o número 0,28.

No item c) os alunos deveriam efetuar uma multiplicação de frações. Eles mostraram bastante dificuldade em efetuar essa operação; apenas 6 deles encontraram a resposta correta nesse item.

Apenas 1 aluno conseguiu efetuar a divisão entre números racionais do item d); 5 alunos parecem ter efetuado a multiplicação e encontrado como resposta a fração $-\frac{5}{2}$; 1 aluno deu como resposta a fração $\frac{5}{2}$; 1 aluno encontrou o resultado 0,4; outro aluno escreveu o valor 2,5; 10 alunos não efetuaram o cálculo.

Esses resultados mostram que os alunos apresentam dificuldades em efetuar cálculos com números reais no final do Ensino Médio. Os PCNs orientam que:

É importante salientar que no quarto ciclo (7ª série ou 8º ano e 8ª série ou 9º ano) não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. (...) é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções “aritméticas”.

(Brasil, 1998, p.83)

4.6. SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS

NÚMEROS REAIS		
NÚMEROS NATURAIS	<p>SOBRE O RECONHECIMENTO E A UTILIZAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E SOBRE O PRINCÍPIO DO VALOR POSICIONAL E DA DECOMPOSIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS NAS SUAS DIVERSAS ORDENS</p>	<p>A idéia de que o zero não possui valor pode interferir na sua interpretação como algarismo utilizado para indicar a ausência de uma ordem inteira no número e se constituir um obstáculo epistemológico para a escrita de números cuja decomposição apresenta ausência de alguma ordem.</p>
NÚMEROS INTEIROS	<p>SOBRE A LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS NA RETA NUMÉRICA E SOBRE O RECONHECIMENTO E A UTILIZAÇÃO DE ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS.</p>	<p>A idéia de que o antecessor e o sucessor de um número natural sempre apresenta uma unidade a menos e a mais, respectivamente, pode se constituir um obstáculo epistemológico na identificação de antecessor e sucessor de números inteiros negativos.</p>
NÚMEROS RACIONAIS	<p>SOBRE O RECONHECIMENTO DAS REPRESENTAÇÕES DECIMAIS DOS NÚMEROS RACIONAIS COMO UMA EXTENSÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL</p>	<p>O fato dos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros serem conjuntos discretos pode aparecer como obstáculo epistemológico para a compreensão de que entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais.</p>

		<p>As idéias de sucessor e antecessor no conjunto dos números naturais (e inteiros) podem aparecer como obstáculo epistemológico na concepção dos números racionais, e futuramente nos reais, no que diz respeito à impossibilidade de definir o número racional ou real que vem “logo a seguir” de outro número.</p>
	<p>SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE UM MESMO NÚMERO RACIONAL</p>	<p>O fato do número natural (e de um inteiro) se apresentarem “prontos” pode ser um obstáculo epistemológico na apropriação de números que possuem símbolo em sua representação, como no caso a divisão em uma fração.</p>
	<p>SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA RETA NUMÉRICA</p>	<p>O fato de um natural (e um inteiro) normalmente, utilizando apenas algarismos, ser escrito de uma única maneira pode ser um obstáculo epistemológico para a aceitação de que um número racional pode admitir mais de uma representação</p>
	<p>SOBRE A COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS</p>	<p>A idéia de que podemos comparar dois números naturais pela quantidade de algarismos que eles possuem pode se constituir um obstáculo epistemológico na comparação de números racionais escritos na forma decimal que apresente diferentes algarismos após a vírgula.</p>

		<p>A idéia de que a comparação entre números naturais é realizada levando-se em consideração apenas o seu valor absoluto pode se constituir em um obstáculo epistemológico na comparação entre frações que apresentam o mesmo numerador e denominadores diferentes.</p>
<p>NÚMEROS IRRACIONAIS</p>	<p>SOBRE A CONCEPÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS</p>	<p>O fato de um número inteiro se apresentar “pronto” pode ser um obstáculo epistemológico na apropriação de números que possuem algum símbolo em sua representação, como no caso dos irracionais obtidos por raízes quadradas.</p>

CAPÍTULO 5

OUTRA INTERPRETAÇÃO PARA OS

RESULTADOS OBTIDOS

Walderley Moura Rezende, em 2003, escreveu sua tese de doutorado intitulada “O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica” tendo como estímulo resultados de pesquisas realizadas a respeito da grande dificuldade que os alunos apresentam na disciplina inicial de Cálculo ao ingressar no Ensino Superior. Em sua dissertação de mestrado o autor havia constatado, por exemplo, que algumas dificuldades de aprendizagem relacionadas às operações de limite estão muito mais associadas às dificuldades em manipulação algébrica do que em sua interpretação analítica e decidiu dar continuidade ao estudo, mapeando as dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo.

Apesar do assunto tratado por Rezende não ser o conjunto dos números reais, o autor traz contribuições no que diz respeito às concepções de certos conteúdos matemáticos que podem ser aproximadas ao nosso objeto de estudo. A principal delas é a explicitação de cinco macro-espacos de dificuldades de aprendizagem epistemológica. Esses macro-espacos podem ser interpretados como eixos de dualidades essenciais do Cálculo tanto na escala histórica quanto na pedagógica. São eles: eixo discreto/contínuo; eixo variabilidade/permanência; eixo finito/infinito; eixo local/global e o eixo sistematização/construção. Podemos aproximar alguns desses eixos à construção dos conjuntos numéricos abordados na Escola Básica, especialmente no nível Fundamental.

O macro-espaço discreto/contínuo tem origem na história nas discussões em torno de problemas relacionados às medidas das grandezas geométricas, como, por exemplo, a incomensurabilidade de certos segmentos geométricos. Na escala pedagógica, a falta de conexão nesse eixo traz como consequência um preocupante hiato estabelecido entre a aritmética e a geometria. E com esse *hiato* a noção fundamental de número fica prejudicada. Tanto que o autor assinala que o cenário pedagógico que temos nas nossas escolas a respeito dos números irracionais se assemelha àquele que se tinha no Renascimento (aproximadamente de 1495 à 1520).

Poucos alunos que responderam ao questionário da 7ª série ou 8º ano mostraram ser capazes de identificar os irracionais, quando escritos na forma decimal, como números com infinitos algarismos depois da vírgula que não possuem um padrão de repetição na sua formação. Apenas 4 alunos, de um total de 20, indicaram que o número 1,310310031000...¹⁹ como um número irracional.

Além disso, a grande maioria dos alunos não consegue identificar os números irracionais na reta numerada. Aos 20 alunos da 7ª série ou 8º ano que responderam ao questionário foi solicitado que eles representassem na reta numérica o número irracional $\sqrt{2}$. Apenas 1 aluno o representou no intervalo [1,2].

Excetuando os números naturais, que são construídos a partir do problema histórico da contagem, os demais (inteiros, racionais e irracionais) estão associados à “construção da reta numérica”. Os números reais são dessa forma uma “medida” da reta numérica, e as suas representações decimais ou são finitas ou são “aproximadas”: $\pi=3,14$; $\sqrt{2}=1,4$ etc. Assim, os números irracionais continuam no processo pedagógico, tal como em seus outros tempos de outrora, “nebulosos”, “surdos”, números que “não dizem nada” e que não possuem uma posição na reta numérica – “estão sempre andando na reta”. Sua existência é assumida apenas potencialmente no universo da “matemática abstrata” (como se pudesse haver uma matemática não-abstrata

(Rezende, 2003, p. 329)

Em sua dissertação de mestrado, Rezende identificou duas definições de número irracional que coexistem na escola: *número irracional é aquele que não pode ser escrito na forma de uma fração irredutível entre números inteiros; número irracional é um número decimal (sic) infinito que não possui parte periódica* (Rezende, 2003, p.332). Essas definições aparecem nas falas dos alunos ao dizerem que os números irracionais são os *reais menos os*

¹⁹Apesar da ambigüidade da notação

racionais, são números que não são racionais, ou ainda o traduzem como uma seqüência de termos indefinidos.

Nos questionários aplicados na presente pesquisa, a 39 alunos foi solicitado que explicassem com suas palavras o que era um número irracional. Desse total, obtivemos apenas 6 respostas que indicam “idéias vagas”, “nebulosas” características desse tipo de número.

Números com raízes

Irracional são os números, com raízes, vírgulas

número irracional é aquele número decimal, que não é igual e não tem fim.

Números quebrados.

Os alunos que responderam à questão relacionada aos números irracionais não mostraram ter alguma idéia sobre os números irracionais. Dentre os alunos que apresentaram alguma resposta, nenhum recorreu à definição de que é um número que não pode ser escrito em forma de fração ou como sendo um número não racional. A ausência dessas idéias gera dificuldades em construir o conceito de número real que na escola é definido como sendo aquele número que é racional ou irracional.

(...) o domínio numérico da totalidade de nossos alunos se restringe aos racionais.

Já com respeito aos números reais (irracionais), podemos dizer, com certas restrições, que apenas a “técnica operatória” é dominada por eles. Não sabem

responder o que um número real é, efetivamente. Isto ocorre, como diria Caraça (1989), porque não conhecem o reagente básico (o conceito de continuidade) que motiva o processo de extensão do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

(Rezende, 2003, p.338)

O autor ressalta ainda que não é por falta de oportunidade que o trabalho no macro-espaço discreto/contínuo não é realizado, e cita como exemplo de lugar para essa discussão o estudo das dízimas periódicas e progressões aritméticas e geométricas. Rezende assinala, ainda, que escondemos dos alunos os problemas motivadores e as dificuldades intrínsecas à construção do significado de número e com isso, o hiato entre o discreto e o contínuo torna-se inevitável no campo pedagógico (Rezende, 2003). Ele não pretende que haja uma antecipação das discussões de continuidade que garantiriam a superação desse obstáculo e sim propiciar situações em que os alunos identifiquem as dificuldades intrínsecas de certos conceitos.

O macro-espaço finito/infinito nasce com o início da noção do infinito há aproximadamente 25 séculos, segundo Morris (1997, apud Rezende), quando Zenão de Eléia propõe com seus paradoxos o problema de como definir o infinito. Entretanto, a idéia do infinito na Matemática se consolida somente na Idade Média (séculos X ao XV). Na escala pedagógica, Rezende traz alguns resultados obtidos em sua dissertação de mestrado, quando identificou certas concepções de infinito dos estudantes. Segundo o autor, podemos encontrar quatro posições definidas: infinito como “algo que não tem fim”, como “algo incontável”, como “algo ilimitado” e como “forma indeterminada”.

Algumas dessas posições podem ser encontradas em respostas dadas a diversas questões sobre os conjuntos numéricos apresentadas aos alunos. Ao serem questionados sobre a veracidade da sentença “O conjunto dos números naturais é infinito”, 31 alunos da 4ª série ou 5º ano, em um total de 36, a classificaram como verdadeira. As justificativas dadas

caminham ao encontro de algumas das posições relacionadas ao infinito encontradas por Rezende.

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque não existe fim nos números

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque os números não acabam

(N) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque os números naturais não acabam mais.

(X) O conjunto dos números naturais é infinito.

Sim, começa de zero e vai até infinito.

(V) O conjunto dos números naturais é infinito.

Porque se juntar todos os números naturais vai chegar até o infinito.

Segundo Rezende (2003) essas posições sobre a idéia do infinito não são excludentes e trazem à tona a possível dificuldade dos alunos em ampliar os conjuntos numéricos.

O macro-espço local/global tem sua origem com a introdução do cálculo infinitesimal quando aparecem os primeiros teoremas gerais sobre as curvas algébricas e a “solidariedade” que existe entre a sua estrutura local e global (Petitot, 1985, apud Rezende p.375). Na escala pedagógica da escola básica, excetuando os tópicos referentes a “conjuntos” e “noções de lógica”, a oposição local/global passa despercebida pelos alunos e pelos seus professores de matemática dos ensinos médio e fundamental (Rezende, 2003). Entretanto, os livros didáticos

atuais e os currículos escolares não incluem mais esses tópicos dentre os conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental.

Em sua tese, o autor identificou que a dificuldade de aprendizagem de natureza epistemológica no que diz respeito ao Cálculo é a *omissão/evitação* das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.

Podemos incorporar sua conclusão à nossa pesquisa e questionar se o Ensino de Matemática tem omitido ou evitado algumas noções básicas a respeito dos números e, com isso, cooperado para o aumento e não superação das dificuldades dos nossos alunos.

(...) no Ensino Médio e Fundamental de Matemática consegue-se, em geral, dissimular as dificuldades de aprendizagem através da assimilação das “regras do jogo” pelo aluno. (...) o estudante desenvolve sua aprendizagem em Matemática nos níveis fundamental e médio ignorando completamente aquilo que ficou escondido.

(Rezende, 2003, p. 323)

Na pesquisa realizada, observamos que, infelizmente, muitos alunos têm apenas vagas lembranças das “regras” da Matemática. Muitos deles até tentam reproduzi-las e quando não conseguem acabam mesmo criando outras “inspirados” pelas que lhes foram apresentadas, a fim de encontrar uma resposta. Entretanto, essas regras, cujo significado provavelmente tenha ficado “escondido” acabam se constituindo em grande dificuldade na construção do conhecimento dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ❖ ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique** in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, nº3 (p. 281-308), 1988.
- ❖ ARTIGUE, M. **Épistémologie et Didactique** in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10, nº2.3 (p. 241-286), 1990
- ❖ BACHELARD, G. **A filosofia do não – Filosofia do novo espírito científico** in Os Pensadores, tradução de Joaquim José Moura Ramos. São Paulo,SP: Editora Abril, 1974 (p. 159-245)
- ❖ BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto, 1996.
- ❖ BACHELARD, G. **O Novo espírito científico**. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto, 1999.
- ❖ BACHELARD, G. **A epistemologia** – Coleção: O saber da Filosofia. Trad. de: L'épistémologie por Fátima Lourenço Godinho e Mário Cármino Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2001.
- ❖ BIANCHINI, E. **Matemática** – 8ª – 4ª Edição. São Paulo, SP: Editora Moderna, 1996.
- ❖ BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em educação**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1991.
- ❖ BORGES, M. F. **Obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem da álgebra linear**. FEUSP (s/d)
- ❖ BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomi. São Paulo,SP: Editora Blucjer, 1996.
- ❖ BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques** in Recherches en Didatiques des Mathématiques, 4/2, 1983.

- ❖ BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Editado e traduzido por Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland e Virginia Warfield. Londres: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- ❖ COMTE, A. **Discurso sobre o espírito positivo: ordem e progresso**. Tradução Renato B. R. Pereira, revista por Ivan Lins. Porto Alegre, Globo; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1976.
- ❖ D'AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo, SP: Escrituras, 2005.
- ❖ D'AMORE, B. **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino** In: BOLEMA, Boletim de Educação Matemática, vol. 20, nº28, 2007.
- ❖ DELIZOICOV, Demétrio. **Problemas e problematizações**. In: PIETROCOLA, Maurício (org.). Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora. Florianópolis: Editora UFSC, 2001.
- ❖ DRUCK, I. de F. **Frações: Uma análise de dificuldades conceituais**. Trabalhos do Departamento de Matemática. Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo, SP: 2006.
- ❖ EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.
- ❖ FAZENDA, Ivani. (Org). **Metodologia da Pesquisa Educacional**. São Paulo: Cortez, 1989.
- ❖ GLAESER, G. **Epistemologie des Nombres Relatifs**. Recherches em Didactique des Mathématiques, vol. 2, nº3 (p. 303-346), 1981.
- ❖ GÓMEZ-GRANELL, D. **Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática**. In: ARNAY, J. e RODRIGO, M. J. (org) Domínios

do Conhecimento, prática educativa e formação de professores. Tradução Cláudia Schilling. São Paulo: Editora Ática, 2002.

- ❖ HOGBEN, L. T. **Maravilhas da matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. Tradução de Paulo Moreira da Silva. Rio de Janeiro, RJ: Globo, 1952.
- ❖ IGLIORI, S. **A noção de obstáculo epistemológico e a Educação Matemática** in Educação Matemática – uma introdução. Machado, S. (org.). São Paulo, SP: Ed. PUC-SP, 1999.
- ❖ JAPIASSÚ, H. **Para ler Bachelard**. Rio de Janeiro, RJ: Livraria Francisco Alves Editora, 1976.
- ❖ JAPIASSÚ, H. **A Epistemologia histórica de G. Bachelard** in Introdução ao pensamento epistemológico. Rio de Janeiro, RJ: Editora Francisco Alves, 1975 (p. 63–81).
- ❖ MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**. As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente – 5ª edição – São Paulo: Cortez, 2002.
- ❖ MICOTTI, M. C. de O. **O ensino e as propostas pedagógicas** in BICUDO, M. A. V. (org). Pesquisa da em educação matemática: concepções e perceptivas – seminário e debates. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999. (p. 153-167)
- ❖ MIGUEL, A. , MIORIM, M. A. **O ensino de matemática no primeiro grau**. São Paulo, SP: Atual, 1997.
- ❖ MIGUEL, A. & MIORIM, M. A., **História na Educação Matemática – Propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- ❖ MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual Editora, 1998.

- ❖ MORI, I., ONAGA, D. **Matemática: Idéias e desafios** – 5ª – 9ª edição – São Paulo, SP: Editora Saraiva, 2000.
- ❖ MOTTA, C. D. V. B. **História da Matemática na Educação Matemática: espelho ou pintura?** Santos, SP: Comunnicar, 2006.
- ❖ PERRIN GLORIAN, Marie Jeanne. **Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática.** Trad. Vincenzo Bongiovanni e Saddo Ag Almouloud. Caderno de Educação Matemática. v.2. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. PUC-SP, 1995.
- ❖ PIAGET, J. **A Epistemologia Genética.** Trad. Nathanael C. Caixeira. Petrópolis: Vozes, 1971.
- ❖ PIAGET, J. & GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.
- ❖ PRADO, E. L. B. **História da matemática: um estudo de seus significados na educação matemática.** Dissertação de mestrado. Rio Claro, SP: [s.n], 1990.
- ❖ REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese de doutorado. São Paulo, 2003.
- ❖ SCHUBRING, G. **Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculo, transposição)** in Zetetiké, v.6, nº10 (p. 9-34). Campinas, SP: CEMPEM, 1998.
- ❖ SCHUBRING, G. **A noção de multiplicação: um “obstáculo” desconhecido na História da Matemática** in Bolema – Boletim de Educação Matemática – ano 15, nº 18 (p. 22-44), 2002
- ❖ SIERPINSKA, A. **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite** in **Recherches en Didatiques des Mathématiques**, v. 6. 1. (p. 5-67), 1985.

- ❖ SOUZA, A. C. C. de. **O reencantamento da razão pelos caminhos da teoria histórico-cultural** in BICUDO, M. A. V. (org). Pesquisa da em educação matemática: concepções e perceptivas – seminário e debates. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999. (p. 129-136)
- ❖ STRUIK, D. J. **A concise history of mathematics**. 4ª edição.
- ❖ TRINDADE, J. A. **Os obstáculos Epistemológicos e a Educação**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.
- ❖ VYGOTSKY, L. L. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. SP, Icone, 1988.

Coleções didáticas consultadas para a elaboração dos questionários:

- ❖ ANDRINI, A. & VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**. Editora do Brasil, 2002.
- ❖ BIGODE, A. J. L. **Matemática Atual**. Editora Atual, 1994.
- ❖ BOURDEAUX, A. L., RUBINSTEIN C. & FRANCA, E. **Matemática: Na vida e na escola**. Editora do Brasil, 1999.
- ❖ GIOVANNI, J. J, JUNIOR J. R. G & CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. Editora FTD, 2007.
- ❖ GIOVANNI J. R. & JUNIOR, J. R. G. **Pensar & Descobrir**. Editora FTD, 2005.
- ❖ GUELLI, O. **Matemática em Construção**. Editora Ática, 2004.
- ❖ IEZZI, G., DOLCE, O. & MACHADO, A. **Matemática e Realidade: Ensino Fundamental**. Editora Atual, 2005.
- ❖ MORI, I & ONAGA, D. S. **Matemática: Idéias e Desafios**. Editora Saraiva, 2000.
- ❖ NETTO, S. di P. **Matemática: Conceitos e Histórias**. Editora Scipione, 1997.
- ❖ PARENTE, E. & GIOVANNI J. R. **Aprendendo Matemática**. Editora FTD, 1999.
- ❖ SPINELLI W. & PATTO, M. H. S. **Matemática**. Editora Ática, 2000.

Sites consultados:

- ❖ http://www.inep.gov.br/basica/saeb/perguntas_frequentes.htm - acessado em 05/05/08 às 21h13
- ❖ www.inep.gov.br/download/saeb/1999/resultados/escalas_saeb.DOC - acessado em 06/05/2008 às 13h54
- ❖ www.educacao.rs.gov.br/pse/html/arquivos/material_informativo_3.doc - acessado em 06/05/2008 às 13h55
- ❖ http://www.inep.gov.br/basica/saeb/prova_brasil/aval_mat.htm - acessado em 06/05/2008 às 14h09

ANEXOS

ANEXO 1 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Em Matemática (com foco na resolução de problemas) são avaliadas habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina.

As matrizes de Matemática da Prova Brasil e do Saeb estão estruturadas em duas dimensões. Na primeira dimensão, que é “*objeto do conhecimento*”, foram elencados seis tópicos, relacionados a habilidades desenvolvidas pelos estudantes. A segunda dimensão da matriz de Matemática refere-se às “competências” desenvolvidas pelos estudantes. E dentro desta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos quatro tópicos descritos.

Para a 4ª série do ensino fundamental, a Matriz de Referência completa, em Matemática, é composta pelos seguintes descritores:

Descritores do Tema I. Espaço e Forma

D1 – Identificar a localização /movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.

D3 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.

D4 – Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e /ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

Descritores do Tema II. Grandezas e Medidas

D6 – Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não.

D7 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, l/ml.

D8 – Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.

D9 – Estabelecer relações entre o horário de início e término e /ou o intervalo da duração de um evento ou acontecimento.

D10 – Num problema, estabelecer trocas entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro, em função de seus valores.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.

Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D13 – Reconhecer e utilizar características do sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional.

D14 – Identificar a localização de números naturais na reta numérica.

D15 – Reconhecer a decomposição de números naturais nas suas diversas ordens.

D16 – Reconhecer a composição e a decomposição de números naturais em sua forma polinomial.

D17 – Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais.

D18 – Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.

D19 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa).

D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, idéia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.

D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

D22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.

D23 – Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

D24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D25 – Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração.

D26 – Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).

Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação

D27 – Ler informações e dados apresentados em tabelas.

D28 – Ler informações e dados apresentados em gráficos (particularmente em gráficos de colunas).

ANEXO 2 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Em Matemática (com foco na resolução de problemas) são avaliadas habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina.

As matrizes de Matemática da Prova Brasil e do Saeb estão estruturadas em duas dimensões. Na primeira dimensão, que é “*objeto do conhecimento*”, foram elencados seis tópicos, relacionados a habilidades desenvolvidas pelos estudantes. A segunda dimensão da matriz de Matemática refere-se às “competências” desenvolvidas pelos estudantes. E dentro desta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos quatro tópicos. Para a 8ª série do ensino fundamental, a Matriz de Referência completa, em Matemática, é formada pelos seguintes descritores:

Descritores do Tema I. Espaço e Forma

- D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto, em mapas, croquis e outras representações gráficas.
- D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.
- D3 – Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.
- D4 – Identificar relação entre quadriláteros, por meio de suas propriedades.
- D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.
- D6 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.

D7 – Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.

D8 – Resolver problema utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).

D9 – Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

D10 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

D11 – Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Descritores do Tema II. Grandezas e Medidas

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D14 – Resolver problema envolvendo noções de volume.

D15 – Resolver problema envolvendo relações entre diferentes unidades de medida.

Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D16 – Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.

D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.

D18 – Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D19 – Resolver problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D20 – Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D21 – Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

D22 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D23 – Identificar frações equivalentes.

D24 – Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos.

D25 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D26 – Resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D27 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

D28 – Resolver problema que envolva porcentagem.

D29 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

D30 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

D31 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

D32 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).

D33 – Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.

D34 – Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.

D35 – Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.

Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação

D36 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D37 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

ANEXO 3 – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

O 3º ano do ensino médio é avaliado apenas no Saeb. Em Matemática (com foco na resolução de problemas) são avaliadas habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina.

As matrizes de Matemática do Saeb estão estruturadas em duas dimensões. Na primeira dimensão, que é “*objeto do conhecimento*”, foram elencados quatro tópicos, relacionados a habilidades desenvolvidas pelos estudantes. A segunda dimensão da matriz de Matemática refere-se às “competências” desenvolvidas pelos estudantes. E dentro desta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos quatro tópicos descritos anteriormente, diferentes para cada uma das séries avaliadas.

Para o 3º ano do ensino médio, a Matriz de Referência completa, em Matemática, é formada pelos seguintes descritores:

Descritores do Tema I. Espaço e Forma

D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D7 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D8 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D9 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 – Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

Descritores do Tema II. Grandezas e Medidas

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D14 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.

D15 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

D16 – Resolver problema que envolva porcentagem.

D17 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

D18 – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

D19 – Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau.

D20 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

D21 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

D22 – Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.

D23 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.

D24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.

D25 – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.

D26 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.

D27 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

D28 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo a como inversa da função exponencial.

D29 – Resolver problema que envolva função exponencial.

D30 – Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, co-seno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

D31 – Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.

D32 – Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

D33 – Calcular a probabilidade de um evento.

Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação

D34 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D35 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

ANEXO 4 – ESCALA DE MATEMÁTICA DA PROVA BRASIL**Nível Descrição dos Níveis da Escala**

125

Neste nível, os alunos da 4ª e da 8ª séries resolvem problemas de cálculo de área com base na contagem das unidades de uma malha quadriculada e, apoiados em representações gráficas, reconhecem a quarta parte de um todo.

150

Os alunos da 4ª e da 8ª séries são capazes de:

- resolver problemas envolvendo adição ou subtração, estabelecendo relação entre diferentes unidades monetárias (representando um mesmo valor ou numa situação de troca, incluindo a representação dos valores por numerais decimais);
- calcular adição com números naturais de três algarismos, com reserva;
- reconhecer o valor posicional dos algarismos em números naturais;
- localizar números naturais (informados) na reta numérica;
- ler informações em tabela de coluna única; e
- identificar quadriláteros.

175

Os alunos das duas séries, neste nível:

- identificam a localização (lateralidade) ou a movimentação de objeto, tomando como referência a própria posição;
- identificam figuras planas pelos lados e pelo ângulo reto;
- lêem horas e minutos em relógio digital e calculam operações envolvendo intervalos de tempo;
- calculam o resultado de uma subtração com números de até três algarismos, com reserva;

- reconhecem a representação decimal de medida de comprimento (cm) e identificam sua localização na reta numérica;
- reconhecem a escrita por extenso de números naturais e a sua composição e decomposição em dezenas e unidades, considerando o seu valor posicional na base decimal;
- efetuam multiplicação com reserva, tendo por multiplicador um número com um algarismo;
- lêem informações em tabelas de dupla entrada;
- resolvem problemas: relacionando diferentes unidades de uma mesma medida para cálculo de intervalos (dias e semanas, horas e minutos) e de comprimento (m e cm); e envolvendo soma de números naturais ou racionais na forma decimal, constituídos pelo mesmo número de casas decimais e por até três algarismos.

200

Além das habilidades descritas anteriormente, os alunos das duas séries:

- identificam localização ou movimentação de objetos em representações gráficas, com base em referencial diferente da própria posição;
- estimam medida de comprimento usando unidades convencionais e não convencionais;
- interpretam dados num gráfico de colunas por meio da leitura de valores no eixo vertical;
- estabelecem relações entre medidas de tempo (horas, dias, semanas), e, efetuam cálculos utilizando as operações a partir delas;
- lêem horas em relógios de ponteiros, em situação simples;
- calculam resultado de subtrações mais complexas com números naturais de quatro algarismos e com reserva; e
- efetuam multiplicações com números de dois algarismos e divisões exatas por números de um algarismo.

Os alunos da 8ª série ainda são capazes de:

- localizar pontos usando coordenadas em um referencial quadriculado;
- identificar dados em uma lista de alternativas, utilizando-os na resolução de problemas, relacionando informações apresentadas em gráfico e tabela; e
- resolvem problemas simples envolvendo as operações, usando dados apresentados em gráficos ou tabelas, inclusive com duas entradas.

225

Os alunos da 4ª e da 8ª séries:

- calculam divisão com divisor de duas ordens;
- identificam os lados e, conhecendo suas medidas, calculam a extensão do contorno de uma figura poligonal dada em uma malha quadriculada;
- identificam propriedades comuns e diferenças entre sólidos geométricos (número de faces);
- comparam e calculam áreas de figuras poligonais em malhas quadriculadas;
- resolvem uma divisão exata por número de dois algarismos e uma multiplicação cujos fatores são números de dois algarismos;
- reconhecem a representação numérica de uma fração com o apoio de representação gráfica;
- localizam informações em gráficos de colunas duplas;
- conseguem ler gráficos de setores;
- resolvem problemas: envolvendo conversão de kg para g ou relacionando diferentes unidades de medida de tempo (mês/trimestre/ano); de trocas de unidades monetárias, envolvendo número maior de cédulas e em situações menos familiares; utilizando a multiplicação e reconhecendo que um número não se altera ao multiplicá-lo por um; e envolvendo mais de uma operação.

Os alunos da 8ª série, ainda:

- identificam quadriláteros pelas características de seus lados e ângulos;
- calculam o perímetro de figuras sem o apoio de malhas quadriculadas;
- identificam gráfico de colunas que corresponde a uma tabela com números positivos e negativos; e
- conseguem localizar dados em tabelas de múltiplas entradas.

250

Os alunos das duas séries:

- calculam expressão numérica (soma e subtração), envolvendo o uso de parênteses e colchetes;
- identificam algumas características de quadriláteros relativas aos lados e ângulos;
- reconhecem a modificação sofrida no valor de um número quando um algarismo é alterado e resolvem problemas de composição ou decomposição mais complexos do que nos níveis anteriores;
- reconhecem a invariância da diferença em situação-problema;
- comparam números racionais na forma decimal, no caso de terem diferentes partes inteiras, e calculam porcentagens simples;
- localizam números racionais na forma decimal na reta numérica;
- reconhecem o gráfico de colunas correspondente a dados apresentados de forma textual;
- identificam o gráfico de colunas correspondente a um gráfico de setores; e
- resolvem problemas: realizando cálculo de conversão de medidas: de tempo (dias/anos), de temperatura (identificando sua representação numérica na forma decimal); comprimento (m/km) e de capacidade (ml/L); e de soma, envolvendo combinações, e de multiplicação, envolvendo configuração retangular em situações contextualizadas.

Os alunos da 8ª série ainda:

- associam uma trajetória representada em um mapa à sua descrição textual;
- localizam números inteiros e números racionais, positivos e negativos, na forma decimal, na reta numérica;
- resolvem problemas de contagem em uma disposição retangular envolvendo mais de uma operação;
- identificam a planificação de um cubo em situação contextualizada;
- reconhecem e aplicam em situações simples o conceito de porcentagem; e
- reconhecem e efetuam cálculos com ângulos retos e não-retos.

275

Os alunos das duas séries:

- identificam as posições dos lados de quadriláteros (paralelismo);
- estabelecem relação entre frações próprias e impróprias e as suas representações na forma decimal, assim como localizam-nas na reta numérica;
- identificam poliedros e corpos redondos, relacionando-os às suas planificações;
- resolvem problemas: utilizando multiplicação e divisão, em situação combinatória; de soma e subtração de números racionais (decimais) na forma do sistema monetário brasileiro, em situações complexas; estimando medidas de grandezas, utilizando unidades convencionais (L).

Na 8ª série:

- efetuam cálculos de números inteiros positivos que requerem o reconhecimento do algoritmo da divisão inexata;
- identificam fração como parte de um todo, sem apoio da figura;
- calculam o valor numérico de uma expressão algébrica, incluindo potenciação;

- identificam a localização aproximada de números inteiros não ordenados, em uma reta onde a escala não é unitária; e
- solucionam problemas de cálculo de área com base em informações sobre os ângulos de uma figura.

300

Os alunos da 4ª e da 8ª séries resolvem problemas:

- identificando a localização (requerendo o uso das definições relacionadas ao conceito de lateralidade) de um objeto, tendo por referência pontos com posição oposta à sua e envolvendo combinações;
- realizando conversão e soma de medidas de comprimento e massa (m/km e g/kg);
- identificando mais de uma forma de representar numericamente uma mesma fração e reconhecem frações equivalentes;
- identificando um número natural (não informado), relacionando-o a uma demarcação na reta numérica;
- reconhecendo um quadrado fora da posição usual; e
- identificando elementos de figuras tridimensionais.

Na 8ª série, os alunos ainda:

- avaliam distâncias horizontais e verticais em um croqui, usando uma escala gráfica dada por uma malha quadriculada, reconhecendo o paralelismo entre retas;
- são capazes de contar blocos em um empilhamento representado graficamente e sabem que, em figuras obtidas por ampliação ou redução, os ângulos não se alteram.
- calculam o volume de sólidos a partir da medida de suas arestas;
- ordenam e comparam números inteiros negativos e localizam números decimais negativos com o apoio da reta numérica;
- conseguem transformar fração em porcentagem e vice-versa;

- identificam a equação do primeiro grau adequada para a solução de um problema;
- solucionam problemas: envolvendo propriedades dos polígonos regulares inscritos (hexágono), para calcular o seu perímetro; envolvendo porcentagens diversas e suas representações na forma decimal; e envolvendo o cálculo de grandezas diretamente proporcionais e a soma de números inteiros.

325

Neste nível, os alunos da 8ª série resolvem problemas:

- calculando ampliação, redução ou conservação da medida (informada inicialmente) de ângulos, lados e área de figuras planas;
- localizando pontos em um referencial cartesiano;
- de cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fracionária;
- envolvendo variação proporcional entre mais de duas grandezas;
- envolvendo porcentagens diversas e suas representações na forma fracionária (incluindo noção de juros simples e lucro); e
- de adição e multiplicação, envolvendo a identificação de um sistema de equações do primeiro grau com duas variáveis.

Além disso:

- classificam ângulos em agudos, retos ou obtusos de acordo com suas medidas em graus;
- realizam operações, estabelecendo relações e utilizando os elementos de um círculo ou circunferência (raio, diâmetro, corda);
- reconhecem as diferentes representações decimais de um número fracionário, identificando suas ordens (décimos, centésimos, milésimos);
- identificam a inequação do primeiro grau adequada para a solução de um problema;
- calculam expressões numéricas com números inteiros e decimais positivos e negativos;

- solucionam problemas em que a razão de semelhança entre polígonos é dada, por exemplo, em representações gráficas envolvendo o uso de escalas;
- efetuam cálculos de raízes quadradas e identificam o intervalo numérico em que se encontra uma raiz quadrada não-exata;
- efetuam arredondamento de decimais;
- lêem informações fornecidas em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano; e
- analisam gráficos de colunas representando diversas variáveis, comparando seu crescimento.

350

Além das habilidades demonstradas nos níveis anteriores, neste nível, os alunos da 8ª série:

- resolvem problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales e aplicando o Teorema de Pitágoras;
- identificam propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando as últimas às suas planificações;
- calculam volume de paralelepípedo;
- calculam o perímetro de polígonos sem o apoio de malhas quadriculadas;
- calculam ângulos centrais em uma circunferência dividida em partes iguais;
- calculam o resultado de expressões envolvendo, além das quatro operações, números decimais (positivos e negativos, potências e raízes exatas);
- efetuam cálculos de divisão com números racionais (forma fracionária e decimal simultaneamente);
- calculam expressões com numerais na forma decimal com quantidades de casas diferentes;
- conseguem obter a média aritmética de um conjunto de valores;
- analisam um gráfico de linhas com sequência de valores;

- estimam quantidades baseadas em gráficos de diversas formas;
- resolvem problemas: utilizando propriedades dos polígonos (número de diagonais, soma de ângulos internos, valor de cada ângulo interno ou externo), inclusive por meio de equação do 1º grau; envolvendo a conversão de m³ em litro; que recaem em equação do 2º grau; de juros simples; e usando sistema de equações do primeiro grau.

ANEXO 5 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

1) Complete com = ou $\neq$:

a) 10 unidades ____ 1 dezena	b) 8 centenas ____ 80 dezenas
c) 3 centenas ____ 300 unidades	d) 6 milhares ____ 60 dezenas
e) 6 milhares ____ 60 centenas	f) 30 dezenas ____ 3 centenas

2) Escreva o número formado por:

- a) Quatro centenas + cinco dezenas + oito unidades
- b) Uma unidade de milhar + sete unidades
- c) Sete unidades de milhar + quatro centenas + uma dezena + cinco unidades
- d) Nove centenas + sete dezenas

3) Observe a reta numerada e responda as questões:

- a) Se um número está à direita de outro, ele é maior ou menor que esse número?
- b) Qual é o menor número natural que existe?
- c) Qual é o maior número natural que existe?
- d) Qual é o antecessor do número 6?

e) Qual é o sucessor do número 13?

f) Qual é o antecessor do número 0?

g) Quantos números naturais existem entre 0 e 1?

4) Que conta resolve? Assinale uma alternativa para cada uma das situações abaixo:

a) Márcia recebeu uma de 300 salgadinhos para uma festa. Já fritou 190. Para saber quantos salgadinhos faltam fritar para essa encomenda deve-se fazer a operação:

☐ $300 + 150$

☐ $300 - 150$

☐ 300×50

☐ $300 \div 150$

☐ não entendi o que o problema pediu

b) Marcus tem 6 camisas e 2 bermudas em seu armário. A operação que permite calcular de quantas maneiras diferentes ele pode combinar as peças usando uma camisa e uma bermuda é:

☐ $6 + 2$

☐ $6 - 2$

☐ 6×2

☐ $6 \div 2$

☐ não entendi o que o problema pediu

c) Camila vai fazer laços para enfeitar os presentes de natal e cortou 80 centímetros de fita colorida em pedaços de 10 centímetros. Para determinar quantos pedaços de fita Camila obteve, precisamos efetuar a operação:

☐ $80 + 10$

☐ $80 - 10$

☐ 80×10

☐ $80 \div 10$

☐ não entendi o que o problema pediu

- 5) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F). Se não souber decidir, assinale com (X). Justifique suas respostas.

() Todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

() Todo número natural tem um antecessor, inclusive o zero.

() O conjunto dos números naturais é infinito.

- 6) Complete:

De 12, tiro 8, restam ____ unidades

8 para chegar ao 12 faltam ____ unidades

12 é maior que 8 em ____ unidades

- 7) O que fazer para resolver cada situação?

- a) Lara ganhou uma caixa com 48 chocolates. Até agora ela já comeu 6. O que ela pode fazer para saber quantos chocolates ainda restam sem contar um a um?

() Não entendi o que o problemas quis dizer

- b) Pedro está viajando com sua família para uma cidade do interior. Seu pai falou que a cidade fica no quilômetro 200 da estrada. Pedro está no quilômetro 120. O que ele pode fazer para saber a distância que o separa do destino?

() Não entendi o que o problemas quis dizer

- c) Flávia tem 18 canetas coloridas, enquanto Milena tem 25. O que Milena pode fazer para saber quantas canetas tem a mais que Flávia?

() Não entendi o que o problemas quis dizer

- 8) Gilberto é aluno da 5ª série e ao ler os problemas que a professora passou na lousa comenta com seu colega Bernardo que todos poderão ser resolvidos pela multiplicação. Leia os problemas:

- d) Um atleta corre no calçadão da praia todos os dias, percorrendo 4 quilômetros todos os dias. Quantos quilômetros ele corre toda semana?
- e) O teatro de uma escola tem 20 fileiras com 30 cadeiras cada uma. Quantas pessoas cabem no máximo sentadas nesse teatro?
- f) Uma lanchonete vende churros com três tipos de recheio: côco, doce de leite e chocolate. As opções de cobertura são: chocolate com granulado e leite condensado. Joana quer comer um churros com recheio e cobertura. Quantas opções de churros com cobertura ela tem para escolher?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Gilberto estava certo? Justifique sua resposta:

9) Assinale os problemas que podem ser resolvidos pela divisão.

- () Preciso repartir 400 litros de tinta em latas de 50 litros. Quantas latas serão necessárias?

() Uma fábrica faz bonés nas cores azul, preta e branca, com nove tipos de estampa. Quantos modelos de boné essa fábrica produz?

() Janaína irá doar balas para um orfanato. Para isso comprou 400 balas para repartir igualmente entre as 80 crianças que moram lá. Quantas balas cada criança receberá?

() Uma sala de cinema possui 50 fileiras. Sabemos que no total o teatro possui 450 poltronas. Quantas poltronas têm em cada fileira?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Justifique suas escolhas:

- 10) Associe as situações com as expressões aritméticas, colocando as letras nos parênteses antes das expressões:

- d) Fui em uma papelaria e comprei um monte de adesivos! Comprei 4 para cada um dos meus 3 primos. Outros 6 comprei para o meu irmão. Não esqueci de mim! Comprei 6 adesivos para cada um dos meus 4 cadernos. Quantos adesivos comprei? () $6 + 4 \times 3 + 4 \times 6$
- e) Fiz muita lição hoje! 6 exercícios de Português, 4 páginas de Matemática com 3 exercícios cada e 4 páginas de Ciências com 6 exercícios cada. Quantos exercícios resolvi ao todo hoje? () $4 \times 6 + 3 \times 4 + 4$
- f) Gastei 4 reais em cada um dos 6 cadernos que comprei para Fabíola; 3 reais em cada uma das 4 cartelas de adesivos e 4 reais em uma caneta colorida. Quanto gastei?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

11) Em uma prova, Felipe resolveu as expressões abaixo da seguinte maneira:

e) $12 \times 6 - 4 \div 2$	f) $12 \times (6 - 4) \div 2 =$	g) $(12 \times 6 - 4) \div 2 =$	h) $12 \times (6 - 4 \div 2)$
$= 72 - 2$	$12 \times 2 \div 2$	$(72 - 4) \div 2$	$= 12 \times (6 - 2)$
$= 70$	$= 24 \div 2$	$= 68 \div 2$	$= 12 \times 4$
	$= 12$	$= 34$	$= 48$

Felipe acertou todas as expressões! Como isso pode acontecer?

12) Resolva as operações abaixo. Deixe os cálculos na folha!

a) $123 + 876$

b) $567 + 929$

c) $176 + 924$

d) $497 - 154$

e) $1922 - 976$

f) $4000 - 1986$

g) 23×2

h) 71×7

i) 16×35

j) 23×40

k) 51×102

l) $96 \div 6$

m) $19 \div 5$

n) $312 \div 13$

o) $1428 \div 7$

p) $2222 \div 22$

ANEXO 6 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS I – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

1) Escreva a fração que representa a parte pintada das figuras:

a)

b)

c)

2) Represente com figuras as seguintes frações:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $2\frac{1}{2}$

3) Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira?

Qual das escritas matemáticas abaixo podem representar essa situação?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
---	---

4) Veja o quadro e escreva o que se pede:

$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{12}{12}$
---------------	---------------	----------------	---------------	---------------	-----------------

- Quais dessas frações podem representar um inteiro?
- Quais dessas frações representam quantidades menores que um inteiro?
- Quais dessas frações representam quantidades maiores que um inteiro?

5) Que número é maior?

- $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? _____
- $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$? _____

6) Faça o que se pede:

- Represente na figura ao lado a fração $\frac{2}{3}$

- Represente na figura ao lado a fração $\frac{4}{6}$

- Represente na figura ao lado a fração $\frac{6}{9}$

- As frações representadas são chamadas de *frações equivalentes*. Explique esse conceito com suas palavras.

7) Por que as operações foram resolvidas incorretamente?

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ _____

b) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ _____

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ _____

d) $8 \div \frac{1}{2} = 4$ _____

8) Agora, observe esses cálculos feitos por um aluno e procure identificar os erros cometidos, corrigindo-os:

$$1,5 - \frac{1}{5} + 3\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$$

$$= 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Correção:

9) Observe o segmento de reta numerado entre 0 e 1 e os pontos indicados por letras maiúsculas que estão assinaladas nele:

Quais das frações abaixo correspondem às letras marcadas na reta?

() $\frac{1}{2}$ () $\frac{1}{6}$ () $\frac{1}{4}$ () $\frac{1}{5}$ () $\frac{1}{3}$ () $\frac{1}{10}$

10) Imagine que o segmento abaixo represente uma estrada de 200km:

- f) Quando o carro estiver no ponto B, que fração da estrada terá percorrido?
- g) Se ele tiver percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada, em que ponto estará?
- h) Quando o carro estiver no ponto D, que fração do percurso terá feito?
- i) Quantos quilômetros terá percorrido até A?
- j) E até C?

11) Uma escola com 500 alunos resolveu fazer uma festa para comemorar o Final do Ano. A organização sugeriu que os alunos trouxessem os comes e bebes da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}$ dos alunos deveria trazer doces

$\frac{2}{5}$ dos alunos trariam salgados

$\frac{1}{10}$ dos alunos traria refrigerantes

Calcule a quantidade de alunos que levaram para a festa:

d) Doces

e) Salgados

f) Refrigerantes

12) Acompanhe o diálogo a seguir e depois responda à questão:

Andréia: - Comi $\frac{1}{4}$ dos bombons de uma caixa, ou seja, 6 bombons

Cláudio: - Também comi $\frac{1}{4}$ dos doces de uma caixa. Ao todo comi 8 doces.

É possível acontecer um diálogo semelhante a esse? Por que?

13) Que conta resolve? Associe os problemas às operações que podemos fazer para achar sua solução.

a) Helena comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza, enquanto Gabriel comeu $\frac{1}{2}$ dessa mesma pizza. Quanto da pizza foi comido? $(\quad) \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

b) Na situação da letra a), quanto Gabriel comeu a mais que

Helena?

$$\left(\quad \right) \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$$

- c) José e Nair tiveram 4 filhos. José morreu de uma doença rara e a sua herança foi dividida da seguinte maneira: à sua esposa, Nair, coube metade dos bens; a cada um dos seus filhos coube a quarta parte da metade dos bens. Quanto cada filho recebeu?

$$\left(\quad \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

- d) Leandro foi à uma mercearia comprar $\frac{1}{2}$ quilo de farinha. O vendedor, entretanto, disse que só tinha embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Quantas embalagens de $\frac{1}{4}$ o vendedor utilizou para embalar o $\frac{1}{2}$ kg de farinha?

$$\left(\quad \right) \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

14) Resolva as seguintes operações:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

d) $3 \times \frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{2} \times 8$

f) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

g) $6 \div \frac{1}{3}$

h) $\frac{3}{8} \div 2$

i) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

ANEXO 7 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS II – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

1) Dentre os números abaixo, assinale o que está mais próximo do número 1.

☐ 1,1 ☐ 1,5 ☐ 1,10 ☐ 1,05 ☐ 1,01 ☐ 0,9

2) Associe as frações à sua representação decimal:

f) $\frac{5}{10}$ ☐ 0,005

g) $\frac{50}{10}$ ☐ 50,0

h) $\frac{5}{100}$ ☐ 0,05

i) $\frac{5}{1000}$ ☐ 5,0

j) $\frac{500}{10}$ ☐ 0,5

3) Descubra a regra e continue a sequência:

e) 1,3 – 1,2 – 1,1 – ____ - ____ - ____

f) 7,5 – 7,0 – 6,5 – ____ - ____ - ____

g) 0,5 – 0,7 – 0,9 – ____ - ____ - ____

h) 37,9 – 37,5 – 37,1 – ____ - ____ - ____

4) Quantos números racionais existem entre 1 e 2?

☐ Não entendi a questão

5) Efetue:

a) $6,32 + 2,9$ b) $4,6 - 1,4$ c) $2,15 - 1,8$ d) $13,4 - 11,2$ e) $7,45 - 0,68$ f) $1 - 0,73$

g) $3 \times 0,5$ h) $1,3 \times 9$ i) $1,3 \times 7,2$ j) $2,2 \times 101$ k) $7 \times 4,13$ l) $18,24 \times 1,2$

6) Represente os seguintes números racionais na reta numerada:

$7,1$ $7\frac{1}{2}$ $7,07$ $\frac{50}{7}$ $7,05$ $7,50$ $6,99$ $6,9$ $\frac{73}{10}$

7) Escreva um número racional entre 0 e 0,2?

() não consigo

8) Você consegue escrever um número racional maior que 3,11 e menor 3,12.

() não consigo

9) Dado o número 1,5, qual é o próximo?

10) Associe os problemas às seguintes situações:

a) Carmem quer distribuir igualmente 40 bolachas em 2 potes que possui. Quantas bolachas ficarão em cada pote?	() A divisão foi exata e foi possível dar apenas uma quantidade inteira
b) Tereza ganhou 5 tabletes de chocolate e dividiu-o igualmente entre si e seus 3 primos. Quanto cada um recebeu?	() A divisão não foi exata e o resto não pode ser subdividido
c) A professora quer organizar a classe em grupos de 4 alunos para fazer um trabalho. Somos 26 alunos. Quantos grupos serão formados?	() A divisão não foi exata, mas deu pra ser resolvida porque o resto pode ser subdividido

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

11) Preencha os espaços em branco com as palavras SEMPRE, NUNCA ou ÀS VEZES.

- a) Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes _____ é necessário usar o conceito de frações equivalentes e calcular o m.m.c.
- b) O denominador de uma fração _____ é igual a zero.
- c) O numerador de uma fração _____ é maior que o denominador.
- d) Uma fração _____ representa um número natural.
- e) Numa adição de frações, o total é _____ maior que 1.

12) Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

$$(A) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= 0,5 + 0,4$$

$$= 0,9$$

$$(B) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$$(C) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{7}$$

$$(D) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5+4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

Analise cada uma dessas formas e verifique se os alunos acertaram ou não. Justifique:

ANEXO 8 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS INTEIROS – 6ª SÉRIE OU 7º ANO

Represente na reta numerada todos os números inteiros entre -8 e 8:

Utilizando a reta numerada acima, responda às questões de número 1 e 2:

1) Qual número é maior?

- a) 5 ou 0? b) -4 ou 0? c) -5 ou 5? d) 3 ou -7?

2) Quantos números inteiros existem entre:

- a) 1 e 8 b) 4 e 0 c) -2 e 0
- d) -5 e -7 e) -3 e 1 f) 8 e -8

3) Com base numa reta numerada, responda as questões a seguir:

- a) 5 ou 20? Qual deles está mais distante do ponto zero?
- b) -4 ou -8? Qual deles está mais próximo do ponto zero?
- c) -20 ou 13? Qual deles está mais distante do ponto zero?
- d) -7 ou +7? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

4) Escreva:

a) O sucessor de 5

b) O antecessor de 5

c) O sucessor de -6

d) O antecessor de -6

e) O sucessor de 0

f) O antecessor de 0

5) Complete com $>$, $<$ ou $=$.

a) $0 \underline{\hspace{1cm}} 1$

b) $17 \underline{\hspace{1cm}} -17$

c) $-1 \underline{\hspace{1cm}} 20$

d) $-61 \underline{\hspace{1cm}} -14$

e) $6 \underline{\hspace{1cm}} -3$

f) $-8 \underline{\hspace{1cm}} 0$

g) $+30 \underline{\hspace{1cm}} 30$

h) $-26 \underline{\hspace{1cm}} -95$

6) Veja como Joana respondeu à seguinte questão na prova:

Qual é o menor número inteiro que existe?

O menor número inteiro é o 0 porque não existe nenhum número antes dele.

A resposta de Joana está correta? Por que?

7) Na mesma prova, Joana desenhou a seguinte reta numerada:

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

8) Quais são os próximos números das seqüências?

a) 12, 9, 6, _____, _____, _____, _____

b) -14, -10, -6, _____, _____, _____, _____

9) Responda (V) para verdadeiro, (F) para falso ou (X) se não souber decidir.

() Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo

() O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo

() Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero

() Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero

10) Resolva as seguintes operações

a) $(+5) + (+3) =$

b) $(+5) + (-3) =$

c) $(-5) + (+3) =$

d) $(-5) + (-3) =$

e) $(-7) - (+4) =$

f) $(-7) - (-4) =$

g) $(+7) - (+4) =$

h) $(+7) - (-4) =$

i) $(-3) \times (+5) =$

j) $(-3) \times (-2) =$

k) $(+4) \times (+1) =$

l) $(+2) \times (-3) =$

m) $(-12) \div (+4) =$

n) $(+6) \div (-3) =$

o) $(-9) \div (-3) =$

p) $(+4) \div (+2) =$

ANEXO 9 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º**ANO**

1) Encontre os seguintes valores e em seguida represente-os na reta numerada:

a) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{16}$

c) $\sqrt{20}$

d) $\sqrt{25}$

e) $\sqrt{30}$

f) $\sqrt{40}$

2) As aulas de Matemática da 7ª série trouxeram uma novidade, os números irracionais.

Explique, com suas palavras, o que é um número irracional.

3) Quais destes números são irracionais?

() 3,2121...

() $-\frac{3}{5}$ () $-\sqrt{6}$

() 2,15

() 1,310310031000...

() $\sqrt{7}$ () $\sqrt{2}$ () π

4) Complete com = ou $\neq$.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ _____ $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ _____ 5

c) $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ _____ $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ _____ $\sqrt{6}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$ _____ 6

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ _____ 3

g) $\sqrt{3^2}$ _____ 3

h) $\sqrt{10} - \sqrt{1}$ _____ 3

i) $\sqrt{5^2 + 4^2}$ _____ $5 + 4$

j) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ _____ 2

k) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ _____ $\sqrt{6}$

l) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ _____ 2

m) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ _____ $2\sqrt{2}$

n) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ _____ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

o) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ _____ 0

p) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ _____ $\frac{3}{2}$

5) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\sqrt{9} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{1}$

b) $\sqrt[3]{27} + \sqrt{0} - \sqrt{1} + \sqrt{36}$

c) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt{8} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32}$

e) $5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2}$

f) $-7\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

6) Calcule:

a) $(\sqrt{2})^2 =$

b) $(3\sqrt{2})^2 =$

c) $(2\sqrt{3})^2 =$

d) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} =$

7) Assinale o resultado mais próximo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

() 2,8

() 3,0

() 3,9

() 4,0

8) O que é maior? 3 ou $2\sqrt{2}$? Justifique:

9) Oswaldo estava estudando Matemática e viu a seguinte frase em uma página: “o π é um número irracional”. O que será que o livro quis dizer com isso?

10) Indique o número racional:

() $\sqrt{15}$

() $\sqrt{25}$

() $\sqrt{8}$

() $\sqrt{18}$

11) Represente os números abaixo na reta real:

$A = -4$

$B = -2,5$

$C = 4,3$

$D = -\frac{7}{4}$

$E = \sqrt{2}$

12) Calcule, fazendo tentativas:

a) $\sqrt{196} =$

b) $\sqrt[3]{-343} =$

c) $\sqrt{0,64} =$

d) $\sqrt{\frac{36}{121}} =$

ANEXO 10 – QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

1) Tomando como conjunto universo os números reais, complete com V (verdadeiro) ou

F (falso):

() 2 é sucessor de 1

() 3,9 é antecessor de 4

2) Dê dois exemplos de números que sejam:

a) Naturais: _____

b) Inteiros, mas que não seja natural: _____

c) Racionais, mas que não seja inteiro: _____

d) Reais, mas que não seja racional: _____

3) Quantos números reais existem entre 7 e 10?

4) Efetue os cálculos

a) $(-4) + (-0,5)$

b) $1,75 - 2$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$

d) $1 : \left(-\frac{5}{2}\right)$

5) Qual é maior:

- a) 7^3 ou 7×3 ? _____
- b) 0^1 ou 5^0 ? _____
- c) $4^3 + 2^3$ ou $(4 + 2)^3$? _____
- d) $3 \times 5 \times 0$ ou $1 \times 5 \times 3$? _____
- e) $4048 \div 8$ ou $448 \div 8$? _____
- f) $3000 - 1238$ ou $3238 - 1000$? _____

6) Preencha os espaços em branco com as palavras SEMPRE, NUNCA ou ÀS VEZES.

- a) Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes _____ é necessário usar o conceito de frações equivalentes e calcular o m.m.c.
- b) O denominador de uma fração _____ é igual a zero.
- c) O numerador de uma fração _____ é maior que o denominador.
- d) Uma fração _____ representa um número natural.
- e) Numa adição de frações, o total é _____ maior que 1.

7) Em uma prova, Felipe resolveu as expressões abaixo da seguinte maneira:

a) $12 \times 6 - 4 \div 2$	b) $12 \times (6 - 4) \div 2$	c) $(12 \times 6 - 4) \div 2$	d) $12 \times (6 - 4 \div 2)$
$= 72 - 2$	$= 12 \times 2 \div 2$	$= (72 - 4) \div 2$	$= 12 \times (6 - 2)$
$= 70$	$= 24 \div 2$	$= 68 \div 2$	$= 12 \times 4$
	$= 12$	$= 39$	$= 48$

Felipe acertou todas as expressões! Como isso pode acontecer?

- 8) Associe as situações com as expressões aritméticas, colocando as letras nos parênteses antes das expressões:

a) Fui em uma papelaria e comprei um monte de adesivos! Comprei 4 para cada um dos meus 3 primos. Outros 6 comprei para o meu irmão. Não esqueci de mim! Comprei 6 adesivos para cada um dos meus 4 cadernos. Quantos adesivos comprei?	() $6 + 4 \times 3 + 4 \times 6$
b) Fiz muita lição hoje! 6 exercícios de Português, 4 páginas de Matemática com 3 exercícios cada e 4 páginas de Ciências com 6 exercícios cada. Quantos exercícios resolvi ao todo hoje?	() $4 \times 3 + 6 + 6 \times 4$
c) Gastei 4 reais em cada um dos 6 cadernos que comprei para Fabíola; 3 reais em cada cartela uma das 4 cartelas de adesivos e 4 reais em uma caneta colorida. Quanto gastei?	() $4 \times 6 + 3 \times 4 + 4$

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

- 9) Resolva as operações abaixo:

a) $567 + 929$

b) $4000 - 1986$

c) 51×102

d) $1428 \div 7$

10) Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira? Qual das escritas matemáticas abaixo podem representar essa situação?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
---	---

11) Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

(A) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

$= 0,5 + 0,4$

$= 0,9$

(B) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$

$= \frac{9}{10}$

(C) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

$= \frac{3}{7}$

(D) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

$= \frac{5+4}{10}$

$= \frac{9}{10}$

Analise cada uma dessas formas e verifique se os alunos acertaram ou não. Justifique:

12) Dado o número 1,5, qual é o próximo?

13) Observe a reta numerada e os pontos indicados por letras maiúsculas que estão assinaladas nela:

Quais das frações abaixo correspondem às letras marcadas na reta?

$(\) \frac{1}{2}$

$(\) \frac{1}{6}$

$(\) \frac{1}{4}$

$(\) \frac{1}{5}$

$(\) \frac{1}{3}$

$(\) \frac{1}{10}$

14) Que número é maior?

a) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? _____

b) $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$? _____

15) Uma escola com 500 alunos resolveu fazer uma festa para comemorar o Final do Ano.

A organização sugeriu que os alunos trouxessem os comes e bebes da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}$ dos alunos deveria trazer doces

$\frac{2}{5}$ dos alunos trariam salgados

$\frac{1}{10}$ dos alunos traria refrigerantes

Calcule a quantidade de alunos que levaram para a festa:

a) Doces

b) Salgados

c) Refrigerantes

16) Responda (V) para verdadeiro, (F) para falso ou (X) se não souber decidir.

() Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo

() O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo

() Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero

() Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero

17) Resolva as seguintes operações

a) $(+5) + (+3) =$

b) $(+5) + (-3) =$

c) $(-5) + (+3) =$

d) $(-5) + (-3) =$

e) $(-7) - (+4) =$ f) $(-7) - (-4) =$ g) $(+7) - (+4) =$ h) $(+7) - (-4) =$

i) $(-3) \times (+5) =$ j) $(-3) \times (-2) =$ k) $(+4) \times (+1) =$ l) $(+2) \times (-3) =$

18) Explique, com suas palavras, o que é um número irracional.

19) Assinale o resultado mais próximo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

() 2,8 () 3,0 () 3,9 () 4,0

20) O que é maior? 3 ou $2\sqrt{2}$? Justifique:

21) Calcule, fazendo tentativas:

a) $\sqrt{196} =$

b) $\sqrt[3]{-343} =$

c) $\sqrt{0,64} =$

d) $\sqrt{\frac{36}{121}} =$

ANEXO 11 – DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES COMPLETAS DOS QUESTIONÁRIOS

A análise completa dos questionários foi realizada da seguinte maneira:

- ❖ logo após o enunciado da questão, trazemos o seu objetivo e levantamos hipóteses a respeito das respostas que podemos obter; cabe ressaltar que todas essas informações foram levantadas antes da análise das respostas.
- ❖ é apresentado o resultado obtido em forma de contagem das respostas apresentadas.
- ❖ faz-se uma pequena conclusão a respeito dos resultados obtidos em cada questão.

Obs.: Quando necessário, o levantamento de hipóteses e a análise da questão será realizada por itens.

A notação escolhida para representar os resultados foi realizada da seguinte maneira:

- ❖ as respostas apresentadas pelos alunos estão entre aspas
- ❖ entre parênteses temos a quantidade de alunos que deram a resposta que segue

Ex.: Questão 1 – Questionário sobre números naturais – 4ª série ou 5º ano

Complete com = ou ≠:

a) 10 unidades _____ 1 dezena

(30) “=” significa que 30 alunos completaram o espaço com “=”

(4) “≠” significa que 4 alunos completaram o espaço com “≠”

(2) “ou” significa que 2 alunos completaram o espaço com a palavra “ou”

ANEXO 12 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS NATURAIS

Total de alunos que responderam o questionário: 36 alunos

QUESTÃO 1: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

1) Complete com = ou $\neq$:

a) 10 unidades _____ 1 dezena

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem a equivalência entre uma dezena e unidades. Espera-se que os alunos não tenham dificuldade neste item, pois a relação entre unidades e dezenas é bastante trabalhada nas salas de aula.

Respostas obtidas:

(30) “=”

(4) “ $\neq$ ”

(2) “ou”

Análise das respostas obtidas: Como previsto, a maioria dos alunos reconheceu a equivalência entre 10 unidades e 1 dezena. 30 alunos, de um total de 36, responderam que 10 unidades é igual a 1 dezena. A resposta de outros 2 alunos que completaram o espaço com “ou” pode nos indicar a compreensão da equivalência.

b) 8 centenas _____ 80 dezenas

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem a relação entre centenas e dezenas. Pode ser que os alunos tenham alguma dificuldade, pois é mais comum a discussão de equivalência entre unidades e outras ordens, ou seja, entre unidades e centenas.

Respostas obtidas:

(13) “=”

(19) “ $\neq$ ”

(4) “ou”

Análise das respostas obtidas: Os alunos que não reconheceram a equivalência entre os números deste item podem apresentar dificuldade em relacionar dezenas e centenas. Talvez isso ocorra devido ao fato de que é mais comum compararmos as ordens com unidades.

c) 3 centenas _____ 300 unidades

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem a equivalência entre centena e unidade. Espera-se que os alunos não tenham dificuldade neste item, pois a relação entre centenas e unidades aparece bastante nos livros didáticos

Respostas obtidas:

(22) “=”

(10) “≠”

(4) “ou”

Análise das respostas obtidas: Diferente do previsto, apesar dos alunos terem se saído bem no item a), alguns apresentaram problema neste item. Talvez o fato da questão ter trazido mais que uma centena possa ter sido um fator de dificuldade para os alunos.

d) 6 milhares _____ 60 dezenas

Objetivo da questão: verificar se os alunos relacionam milhares e dezenas e ainda se enxergam a regularidade de uma ordem ser 10, 100, 1000, etc. vezes maior que outra.

Respostas obtidas:

(8) “=”

(27) “≠”

(1) “ou”

Análise das respostas obtidas: Aparentemente a maioria dos alunos demonstrou reconhecer que a igualdade não procede. Entretanto, o resultado pode mostrar que os

alunos não validam relações entre ordens diferentes, que sentem a necessidade de sempre compará-las a unidades.

- e) 6 milhares _____ 60 centenas

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem a equivalência entre milhares e centenas. Essa relação é bastante importante quando existe a necessidade de efetuar cálculos com “empréstimos” e trocas entre as ordens. Entretanto, provavelmente os alunos não saberão reconhecer que 1 milhar é igual a 10 centenas e ampliar essa igualdade para 6 milhares e 60 centenas.

Respostas obtidas:

(6) “=” (29) “≠” (1) “ou”

Análise das respostas obtidas: Contrariando o resultado do item d), os alunos mostraram não conhecer a equivalência entre ordens diferentes de unidades.

- f) 30 dezenas _____ 3 centenas

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem a equivalência entre dezena e centena. Essa é outra relação importante por ser largamente utilizada nas quatro operações básicas. Pode ser que os alunos não apresentem grande dificuldade nesse item pois é comum que se construa a relação entre dezenas e centenas.

Respostas obtidas:

(16) “=” (19) “≠” (1) “ou”

Análise das respostas obtidas: Mais uma vez os alunos mostraram que podem não dominar a relação entre dezenas e centenas que é tão importante em cálculos considerados simples.

Conclusão:

A questão de número 1 trouxe o conceito de equivalência entre as ordens de forma descontextualizada. O resultado surpreende, já que muitos alunos mostraram não conhecer essas relações de equivalência. Cabe ressaltar que aparentemente os alunos conhecem o valor em unidades de uma dezena, centena ou milhar. Entretanto, se essas ordens são comparadas sem o auxílio de unidades, eles apresentam dificuldades. Isso pode se tornar um problema ao efetuar cálculos simples, já que freqüentemente é necessário que se faça transformações entre as ordens (como o “vai 1” na adição, o “empresta 1” na subtração ou ainda o agrupamento de ordens em uma divisão).

QUESTÃO 2: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

2) Escreva o número formado por:

a) Quatro centenas + cinco dezenas + oito unidades

Objetivo da questão: o objetivo é verificar se os alunos estão familiarizados com o valor posicional dos algarismos e com o nome das ordens. Este item provavelmente não se constituirá um problema para os alunos porque para formar o número em questão o aluno pode escrever os algarismos que aparecem.

Respostas obtidas:

(22) “458”

(4) “quatrocentos e cinqüenta e oito”

(1) “854”

(3) “17” – provavelmente esses alunos somaram os algarismos que apareceram

(1) “413”

(1) “400050080”

(1) “400 + 5 + 8”

(1) “400508”

(1) “tiseseta centenas”

Análise das respostas obtidas: Apesar de ser considerado um item fácil, uma quantidade grande de alunos não conseguiu chegar ao número. O mais preocupante foi observar que 2 alunos não avançaram nas hipóteses da escrita dos números e o escreveram com justaposição dos algarismos. Cabe ressaltar que 4 dos 22 alunos que chegaram ao número 458 se apoiaram na soma das partes para encontrá-lo. (fizeram $400+50+8=458$)

b) Uma unidade de milhar + sete unidades

Objetivo da questão: verificar se o aluno conhece a posição dos algarismos no número segundo sua ordem e, principalmente, se sentem a necessidade do algarismo 0 para representar a ausência de uma ordem. Pode ser que apareça como resposta o número 17.

Respostas obtidas:

(15) ”1007”

(3) “mil e sete”

(1) “710000”

(4) “17”

(2) “1000.7”

(2) “7007”

(3) “8” – esses alunos podem ter somado os algarismos

(1) “oito unidades”

(1) “100000 + 7”

(1) “um milhão e sete”

(1) “10000.70”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: Como esperado, muitos alunos apresentaram dificuldade em representar este número. 4 alunos mostraram que podem não conhecer a idéia de valor posicional dos algarismos. Podemos, ainda, encontrar a justaposição de algarismos na hipótese de alguns alunos. Cabe ressaltar que 3 dos 15 alunos que chegaram ao número 1007 se apoiaram na soma das partes para encontrá-lo. (fizeram $1000+7=1007$)

c) Sete unidades de milhar + quatro centenas + uma dezena + cinco unidades

Objetivo da questão: o número deste item é “completo”, para encontrá-lo basta escrever os algarismos na ordem em que aparecem. Provavelmente os alunos não terão dificuldade em chegar ao número.

Respostas obtidas:

(17) “7415”

(2) “sete mil quatrocentos e quinze”

(1) “51470000”

(1) “7.400.015”

(1) “74105”

(1) “7000 + 400 + 1 + 5”

(1) “7000 + 4 + 1 + 5”

(2) “7000.400.10.5”

(1) “sete milhões, quatrocentos e quinze”

(1) “sete mil quatrocentos setenta e cinco”

(1) “11017”

(1) “7000 + 400 + 100 + 5 = 7505”

(1) “70415”

(1) “6415”

(1) “700000 + 400 + 10 + 5”

(1) “700 + 400 + 10 + 5”

(1) “tíseis unidades”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: Aproximadamente metade dos alunos conseguiu representar o número solicitado. Alguns alunos apresentam dificuldade em reconhecer a posição das ordens e seus valores em unidades, pode ser que vejam o número desmembrado em várias parcelas. Outros parecem não compreender a propriedade aditiva do sistema de numeração decimal e colocam os algarismos em justaposição. Alguns alunos mostram avanços em relação aos anteriores nas hipóteses, mas confundem o valor das ordens como em “74105” (parece que a dezena se apresentou mais “forte”) ou em “70415).

d) Nove centenas + sete dezenas

Objetivo da questão: verificar se os alunos compreendem a posição das ordens e a necessidade do algarismo 0 no final do número para indicar que não há unidades. Pode ser que os alunos apresentem grande dificuldade neste item e dêem como resposta o número 97.

Respostas obtidas:

(12) “970”

(3) “novecentos e setenta”

(2) “900 + 70”

(1) “79”

(1) “9070”

(1) “90 + 7”

(1) “900.7”

(1) “9 + 7”

(1) “9000 + 700”

(1) “190”

(2) “907”

(5) não responderam

Análise das respostas obtidas: Aproximadamente metade dos alunos reconheceu o número, sendo que 2 deles apresentou apenas as somas das partes dos números. 5 alunos deram como resposta o número 97, mostrando que talvez não reconhecem o significado do algarismo 0. Outros 2 alunos que responderam “907” podem ter sentido a necessidade do 0 para chegar a um número na ordem da centena. Este tem foi o que apresentou maior ausência de resposta.

Conclusão:

A questão de número 2 trouxe à tona o problema que os alunos têm com o valor posicional dos algarismos e, principalmente, o significado do algarismo 0 em um número. Esse problema poderá refletir em cálculos, como por exemplo, em uma multiplicação como 201×7 ou uma divisão como $1212 \div 12$, já que esses alunos parecem não se ater às posições dos algarismos devido a sua ordem.

3) Observe a reta numerada e responda as questões:

a) Se um número está à direita de outro, ele é maior ou menor que esse número?

Objetivo da questão: verificar se os alunos associam a reta numerada à posição dos números, habilidade extremamente importante para o trabalho com medição e para o estudo de outros conjuntos numéricos.

Respostas obtidas:

(25) “maior”

(3) “menor”

(2) “sim”

(1) “não existe, porque se o 6 está na frente do 7, ele, o 7 é o maior mas o 8 é o maior e assim segue”

(5) não responderam

Análise das respostas obtidas: Os alunos mostraram que sabem reconhecer quando um número é maior que outro na reta numerada.

b) Qual é o menor número natural que existe?

Objetivo da questão: verificar se os alunos ampliam o que responderam no item a) para indicar o menor natural (o menos à direita). Além disso, podemos verificar se o aluno reconhece o 0 como elemento do conjunto dos naturais.

Respostas obtidas:

(30) “0” ou “zero”

(4) “1”

(1) “5”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: A grande maioria dos alunos não mostrou dificuldade em indicar o menor número natural e a incluir o 0 no conjunto dos números naturais. Apenas 4 alunos não validaram a inclusão do 0 em $\mathbb{N}$.

c) Qual é o maior número natural que existe?

Objetivo da questão: verificar se os alunos percebem que não é possível indicar o maior número natural. A intenção não é que eles respondam que $\mathbb{N}$ é infinito e sim que percebam que sempre há um número maior que outro. Essa é uma idéia complexa e pode ser que os alunos indiquem o número 13 como o maior, pois é o último que aparece na reta representada.

Respostas obtidas:

(3) “Infinito”

(1) “O maior número é infinito”

(1) “Os números são infinitos”

(1) “Não existe número maior, os números não têm fim”

(1) “É infinito, mas na reta é 13”

(1) “Não existe, os números nunca acabam, mas nesta reta é o 13”

(19) “13”

(1) “9”

(1) “10”

(1) “100”

(6) não responderam

Análise das respostas obtidas: Grande parte dos alunos se ateve apenas à reta representada e indicou o número 13 como maior número natural. Foi interessante verificar que 8 alunos mostraram alguma familiaridade com a idéia e o termo “infinito”. Podemos interpretar que os 6 alunos que não responderam sentiram a dificuldade não indicar o maior número, o que pode indicar que reconheceram a impossibilidade.

d) Qual é o antecessor do número 6?

Objetivo da questão: verificar se os alunos estão familiarizados com a idéia de antecessor para validar outros itens dessa questão e de questões de questionários de outras séries.

Respostas obtidas:

(33) “5”

(1) “7”

(1) “3” – essa resposta pode representar a metade do número

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: A grande maioria dos alunos acertou este item, mostrando conhecer o significado do termo antecessor.

e) Qual é o sucessor do número 13?

Objetivo da questão: verificar se os alunos estão familiarizados com a idéia de sucessor para validar outros itens dessa questão e de questões de questionários

Respostas obtidas:

(31) “14”

(12) “2”

(1) “26” (esta resposta pode representar o dobro do número)

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: Quase todos os alunos indicaram corretamente o número 14 como sucessor de 13. Um deles ainda ressaltou que o número não aparecia na reta.

f) Qual é o antecessor do número 0?

Objetivo da questão: conhecer a hipótese dos alunos de 5º ano quanto à existência de números menores que 0.

Respostas obtidas:

(13) “não tem”, ou “nenhum”, ou “não existe”, ou “não há”, ou “o zero não tem antecessor (não que eu saiba)” ou “o número 0 não existe antecessor, pois ele é o menor número

(13) “0”

(1) “0,5”

(1) “0,1”

(1) “1”

(1) “sim, existe”

(6) não responderam

Análise das respostas obtidas: Foi interessante notar que 13 alunos reconheceram e/ou justificaram a não existência do antecessor de 0 no conjuntos dos naturais. Podemos perceber, entretanto, que a mesma quantidade de alunos recorreu ao 0 talvez por este ser o menor número que conhecem. 2 alunos indicaram decimais possivelmente por ter sido os menores números que conhecem. Talvez os 6 alunos

que não responderam a questão não tenham conseguido chegar a uma conclusão ou perceberam que não conseguiam indicar o antecessor de 0.

g) Quantos números naturais existem entre 0 e 1?

Objetivo da questão: verificar se os alunos têm alguma idéia sobre os números racionais.

Respostas obtidas:

(14) “nenhum”, ou “não existe”, ou “zero”

(10) “1”

(1) “o número 1”

(1) “o 0,5”

(1) “o número 0”

(1) “0 e 1”

(6) não responderam

Análise das respostas obtidas: Este item apresentou dificuldade na análise, pois em alguns casos não é possível afirmar se os alunos colocaram a quantidade de números entre os dois ou o número que achavam que existia. Entretanto, menos da metade dos alunos identificou que não existe número natural entre 0 e 1.

QUESTÃO 4: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

4) Que conta resolve? Assinale uma alternativa para cada uma das situações abaixo:

a) Márcia recebeu uma de 300 salgadinhos para uma festa. Já fritou 190. Para saber quantos salgadinhos faltam fritar para essa encomenda deve-se fazer a operação:

() $300 + 150$

() $300 - 150$

() 300×50

() $300 \div 150$

() não entendi o que o problema pediu

Este item foi anulado, pois devido a um erro de digitação, não existe resposta correta para ser assinalada.

- b) Marcus tem 6 camisas e 2 bermudas em seu armário. A operação que permite calcular de quantas maneiras diferentes ele pode combinar as peças usando uma camisa e uma bermuda é:

☐ $6 + 2$

☐ $6 - 2$

☐ 6×2

☐ $6 \div 2$

☐ não entendi o que o problema pediu

Objetivo da questão: verificar se os alunos dão significado à operação de multiplicação e se a associam ao cálculo de possibilidades de combinação. Pode ser que os alunos mostrem dificuldade neste item porque é uma abordagem não convencional da multiplicação

Respostas obtidas:

☐ $6 + 2$

☐ $6 - 2$

☐ 6×2

☐ $6 \div 2$

☐ não entendi o que o problema pediu

Análise das respostas obtidas: Como esperado, poucos alunos não reconheceram a combinação como um significado da multiplicação. A opção em que aparece a multiplicação foi a menos assinalada. Talvez, se tivesse sido solicitado que os alunos resolvessem este item, eles utilizariam estratégias pessoais e chegariam à resposta esperada mesmo não conseguindo associar uma operação à situação.

- c) Camila vai fazer laços para enfeitar os presentes de natal e cortou 80 centímetros de fita colorida em pedaços de 10 centímetros. Para determinar quantos pedaços de fita Camila obteve, precisamos efetuar a operação:

☐ $80 + 10$

☐ $80 - 10$

☐ 80×10

☐ $80 \div 10$

☐ não entendi o que o problema pediu

Objetivo da questão: verificar se os alunos associam a idéia de “quantos cabem” ou quantos subgrupos conseguimos formar de um total à operação de divisão. É possível que os alunos não apresentem dificuldade neste item.

Respostas obtidas:

(4) $80 + 10$ (10) $80 - 10$ (7) 80×10 (15) $80 \div 10$
 (0) não entendi o que o problema pediu

Análise das respostas obtidas: Apesar da opção da divisão ter sido a mais assinalada pelos alunos, muitos não conseguiram identificar o significado de divisão de um todo em partes iguais. 10 alunos assinalaram a subtração talvez por não terem compreendido corretamente a questão e pensado em quanto sobrou. Provavelmente a análise deste item seria mais fiel se tivesse sido feita a seguinte pergunta: “Quantas fitas de 10cm ela conseguirá cortar?”

QUESTÃO 5: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

- 5) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F). Se não souber decidir, assinale com (X). Justifique suas respostas.

() Todo número natural tem um sucessor, inclusive o zero.

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem ampliar as características principais dos números naturais.

Respostas obtidas:

(22) Verdadeiro

Justificativas: “Sim. Porque no próximo número de zero vem 1”

“Porque o zero é o primeiro número”

“Porque o sucessor do zero é 1”

“Porque depois do zero vem o um”

“Sucessor é o número que vem depois do outro. O sucessor do 0 é o 1”

“Porque ele está vindo depois”

“Sim, porque o sucessor do zero é o “um””

“Todo número tem um sucessor, o do zero é o 1”

“Se o 100 tem um número natural depois dele, o zero também tem e é o um”

“Porque sim, o sucessor é o 2”

“Porque o zero é o primeiro número”

(9) não justificaram

(8) Falso

Justificativas: “Não porque pode ser outro número”

“Porque eu esqueci o que é número natural”

“Para falar a verdade eu não sei o que é número natural, se eu estudei, que eu acho que estudei eu já esqueci, por isto eu estou chutando”

“O zero também tem porque é para frente é sucessor”

“Porque infinito é o último e isso significa que o último nunca tem um sucessor”

(3) não justificaram

(6) Não soube decidir “X”

Análise das respostas obtidas: As justificativas dadas pelos alunos foram bastante interessantes. Mesmo um aluno que classificou a sentença como falsa ressalta que

o conjunto é infinito. A análise deste item traz evidências de que a maioria dos alunos conhece o significado do termo sucessor e reconhece que sempre há um número natural depois de um outro natural.

() Todo número natural tem um antecessor, inclusive o zero.

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem que o zero não possui um antecessor, como no item f) da questão 3.

Respostas obtidas:

(22) Falso

Justificativas: “Só o 1 que o antecessor é o zero”

“Porque o zero é o primeiro número natural que existe”

“Não existe número antes do zero”

“Não, porque o número 0 não tem antecessor”

“Porque não existe um número que venha antes do que o número 0”

“Todo número tem um antecessor, mas o zero não”

“Porque antes do zero não tem nada”

“Porque o zero não tem um antecessor”

“O zero não tem antecessor porque ele é o menor número”

“Porque não dá para o número natural ter o antecessor de zero”

“Porque o zero vem primeiro”

“Antes do zero não há nenhum número”

“Porque não tem número antes do zero”

“Porque não vem nenhum número antes do zero”

“O zero vem antes de todos os números então não tem número

antes para ser seu antecessor”

“O zero é o primeiro número, sendo assim não pode ter um número antes dele”

“Não. Porque o zero é o menor de todos”

(5) não justificaram

(8) Verdadeiro

Justificativas: “Porque o zero é o primeiro número”

“Porque o antecessor de zero é o 0,1”

(6) não justificaram

(6) Não soube decidir “X”

Análise das respostas obtidas: A análise deste item nos permite afirmar que é de conhecimento dos alunos que o zero é o primeiro número natural e que, por isso, ele não possui antecessor.

() O conjunto dos números naturais é infinito.

Objetivo da questão: verificar se os alunos sabem que o conjunto dos números naturais é infinito, ou seja, se possui infinitos elementos. Outro objetivo é verificar se eles se apóiam na idéia de que sempre há um sucessor para um número natural na justificativa de suas respostas. Provavelmente eles irão classificar essa questão como verdadeira, mas terão problemas em justificar a classificação.

Respostas obtidas:

(31) Verdadeiro

Justificativas: “Sim porque os números nunca acabam”

“Sim porque os números são infinitos”

“Porque não existe fim nos números”

“Sim, começa do zero e vai até o infinito”

“Sim, porque depois do zero é o infinito mas o infinito não tem número!

“Porque se juntar todos os números naturais vai chegar até o infinito”

(2) “Sim, eles são infinitos

(2) “Porque os números naturais não acabam mais”

(2) “Os números naturais não tem fim”

(19) não justificaram

(2) Falso

Justificativas: (2) não justificaram

(3) Não soube decidir “X”

Análise das respostas obtidas: este item nos permite concluir que a maioria dos alunos possuem a idéia de que o conjunto dos naturais “nunca acaba”. A impressão podemos ter dessas respostas é de que eles sabem que os números crescem sempre, que sempre há um sucessor, mas eles não se apropriaram da idéia de que o conjunto dos naturais possui infinitos elementos.

QUESTÃO 6: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

6) Complete:

De 12, tiro 8, restam ____ unidades

8 para chegar ao 12 faltam ____ unidades

12 é maior que 8 em ____ unidades

Objetivo da questão: verificar se os alunos estão familiarizados com os três significados da operação de subtração. São elas: retirar, comparar, e a idéia de “quanto falta para”. É possível que os alunos não apresentem dificuldade nessa questão

Respostas obtidas:

De 12, tiro 8, restam _____ unidades

(30) “4”

(1) “0”

(1) “1”

(1) “16”

(1) “8”

(2) não responderam

8 para chegar ao 12 faltam _____ unidades

(35) “4”

(1) não respondeu

12 é maior que 8 em _____ unidades

(27) “4”

(2) “12”

(1) “6”

(1) “11, 10, 9”

(1) “sim”

(4) não responderam

Análise das respostas obtidas: essa questão nos mostrou que os alunos estão familiarizados com os significados da subtração como retirar uma parte do todo.

A idéia de “quanto falta para chegar a” parece fazer parte da hipótese dos alunos,

mas não é possível afirmar que os alunos associaram esse significado à operação de subtração, eles podem ter usado estratégias pessoais ou contagem. O terceiro item apresentou mais respostas erradas. Talvez isso tenha ocorrido porque o significado de quanto excede não é tão comum nos livros didáticos.

QUESTÃO 7: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

7) O que fazer para resolver cada situação?

- a) Lara ganhou uma caixa com 48 chocolates. Até agora ela já comeu 6. O que ela pode fazer para saber quantos chocolates ainda restam sem contar um a um?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o significado da subtração como uma retirada. Provavelmente os alunos não terão problema neste item.

Respostas obtidas:

(32) $48 - 6$

Algumas

“Ela pode fazer uma conta de $-$. $48 - 6$ ”

respostas:

“Ela pode fazer quarenta e oito menos seis”

“Lara faz 48 menos 6. E saberá quantos chocolates ainda restam”

“Lara tem que diminuir 48 por 6”

“Ela pode fazer a operação $48 - 6$ que dá 42”

“Ela pode subtrair 48 menos 6 que é igual a 42”

“Ela pode subtrair 6 de 48. Exemplo: $48 - 6 = 42$ ”

“Fazendo uma conta de menos”

“Pegar o número de chocolate e diminuir pelo que ela já comeu”

“Basta fazer a conta de menos e você saberá o resultado,
como: $48 - 6 = 42$ ”

(2) $48 \div 6$

(1) “Restam 23 chocolates”

(1) “Conta em 2 em 2”

- b) Pedro está viajando com sua família para uma cidade do interior. Seu pai falou que a cidade fica no quilômetro 200 da estrada. Pedro está no quilômetro 120. O que ele pode fazer para saber a distância que o separa do destino?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem na situação de “quanto falta para” a operação de subtração. Talvez alguns alunos tenham problema neste item.

Respostas obtidas:

(22) $200 - 120$

Algumas

“Uma conta de menos $200 - 120 = 80$ ”

respostas:

“Ela terá que calcular $200 - 120$ ”

“Ela tem que diminuir 200 por 120”

“É só ele pegar e subtrair $200 - 120 = 80$ então ele pega o total e faz $120 + 80 = 200$ então o que falta para ele completar o destino é 80 quilômetros”

“Ele tem que subtrair 120 do número 200”

“Pegar 200 e diminuir por 120”

(4) $200 + 120$

(1) $200 \div 120$

(2) ir de 10 em 10

Algumas respostas: “Ele pode contar de dez em dez como: 120 130 140 150 160 170 180 190 200 que faltam 80 quilômetros para chegar na cidade com sua família”

“É só ir contando de 10 em 10 que chega ao resultado 80”

(1) “Ele pode fazer a conta que dá 100”

(1) “A distância é 210”

(3) assinalaram a opção “Não entendi o que o problemas quis dizer”

(2) não resolveram a questão

- c) Flávia tem 18 canetas coloridas, enquanto Milena tem 25. O que Milena pode fazer para saber quantas canetas tem a mais que Flávia?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem na situação de comparação a operação de subtração. É possível que os alunos demonstrem mas dificuldade neste item.

Respostas obtidas:

(19) $25 - 18$

Algumas respostas: “Fazer a conta $25 - 18$ ”

“Ele terá que calcular $25 - 18$ ”

“Ele terá que diminuir 25 por 18”

“Subtrair 18 de 25. Exemplo: $25 - 18 = 7$ ”

“Fazer uma conta de subtração”

“Ela pode fazer a seguinte operação: “ $25 - 18 = 07$ ”

(2) $18 - 25$

Algumas respostas: “Fazendo uma conta de menos $18 - 25 = 7$ ”

$$“18 - 25 = 13”$$

$$(2) 18 \div 25$$

$$(1) 18 + 25$$

(7) contando de 18 até 25

Algumas respostas: “Contar desde o número 18 até chegar ao 25”

“Ela pode ir contando de um em um”

“Milena conta de 25 até 18”

“18 para chegar no 25 = 7”

(1) “Fazendo a conta que dá 6”

(1) “Contando para ver se ela não tem repetido”

Análise das respostas obtidas: Essa questão nos permite afirmar que os alunos estão mais familiarizados com o significado de retirada da subtração. O significado de quanto falta para chegar associado subtração apareceu na resposta de apenas 22 alunos. A idéia de comparação foi a menos associada à subtração.

QUESTÃO 8: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

- 8) Gilberto é aluno da 5ª série e ao ler os problemas que a professora passou na lousa comenta com seu colega Bernardo que todos poderão ser resolvidos pela multiplicação.

Leia os problemas:

- a) Um atleta corre no calçadão da praia todos os dias, percorrendo 4 quilômetros todos os dias. Quantos quilômetros ele corre toda semana?
- b) O teatro de uma escola tem 20 fileiras com 30 cadeiras cada uma. Quantas pessoas cabem no máximo sentadas nesse teatro?

- c) Uma lanchonete vende churros com três tipos de recheio: côco, doce de leite e chocolate. As opções de cobertura são: chocolate com granulado e leite condensado. Joana quer comer um churros com recheio e cobertura. Quantas opções de churros com cobertura ela tem para escolher?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Gilberto estava certo? Justifique sua resposta:

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o significado da multiplicação como: soma de parcelas iguais, como combinações e como arranjos retangulares. Provavelmente os alunos não reconhecerão a multiplicação na situação de combinação.

Respostas obtidas:

(18) Sim

Algumas justificativas: “Sim, se ele corre 4 quilômetros por semana você pode descobrir mais rápido multiplicando em vez de contar $4 + 4$ ”

“Sim, porque a a é de vezes a b também e a c também”

“Sim, todas as contas se pode multiplicar a primeira tem que fazer 4×7 , na segunda é 20×30 e na terceira é 3×3 ”

(14) não justificaram

(4) Não – sem justificativa

(1) Não – o item b) não resolve com uma multiplicação

Justificativas: “Não, porque o 1º exercício é de vezes e o 2º é de dividir”

“Não porque por exemplo o exercício c) não é necessário fazer conta”

“Não, porque a última é de menos”

(6) Não – o item c) não resolve com uma multiplicação

Algumas justificativas: “Não, eu acho que a questão c) não pode ser resolvida com multiplicação”

(5) assinalaram a opção “não entendi o que os problemas quiseram dizer”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: Como previsto e observado no item b) da questão 4 a multiplicação em um problema de cominação não é validada. Mesmo os alunos que responderam “sim” não estavam totalmente convencidos que a letra c) poderia ser resolvida por uma multiplicação. Os significados mais comumente trabalhados para a multiplicação são a soma de parcelas iguais e a composição de arranjos retangulares.

QUESTÃO 9: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

9) Assinale os problemas que podem ser resolvidos pela divisão.

- () Preciso repartir 400 litros de tinta em latas de 50 litros. Quantas latas serão necessárias?
- () Uma fábrica faz bonés nas cores azul, preta e branca, com nove tipos de estampa. Quantos modelos de boné essa fábrica produz?

- () Janaína irá doar balas para um orfanato. Para isso comprou 400 balas para repartir igualmente entre as 80 crianças que moram lá. Quantas balas cada criança receberá?
- () Uma sala de cinema possui 50 fileiras. Sabemos que no total o teatro possui 450 poltronas. Quantas poltronas têm em cada fileira?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem os três significados da divisão: repartição equitativa, idéia de quantos grupos posso formar e de quantos cabem. Provavelmente os alunos terão dificuldade de reconhecer que a divisão resolve a 4ª situação.

Respostas obtidas:

(1) Só a primeira situação

Algumas justificativas: “Eu escolhi a a) porque eu acho que só essa questão dá pra resolver por divisão”

(7) Só a terceira situação

Algumas justificativas: “A 3ª porque ela está falando de repartir e a conta certa para isso é a divisão”

(10) As primeira e terceira situações

Algumas justificativas: “Dois têm que multiplicar e dois dividir”

“Eu escolhi a primeira e a terceira porque elas falam em repartir as outras contas são de vezes”

“Porque só pode usar a divisão quando o problema for de repartir”

“Porque nas duas perguntas (a e c) está escrito

repartir”

(1) As terceira e quarta situações

(13) As primeira, a terceira e a quarta situações

Algumas justificativas: “A segunda alternativa eu acho que está errada, pois a conta pode ser feita 3×9 ”

“A questão a) quase já fala que é de divisão pela palavra REPARTIR, igual a questão c)”

“Escolhi a primeira porque estava falando em repartir e observei os números e também estava falando em repartir. A última fiz a conta para ter uma idéia e então escolhi ela”

“Todas menos a segunda que tem que multiplicar”

“Porque as que eu assinalei têm um número maior que precisa ser dividido por um número menor”.

(2) Todas as situações

(2) Assinalaram a opção “não entendi o que os problemas quiseram dizer”

Análise das respostas obtidas: Os alunos relacionaram a divisão às situações em que existia a palavra repartir. Pode ser que, se um problema de divisão não trazer a idéia de divisão como a de repartição, os alunos apresentam dificuldade em associá-lo a essa operação.

- 10) Associe as situações com as expressões aritméticas, colocando as letras nos parênteses antes das expressões:

a) Fui em uma papelaria e comprei um monte de adesivos! Comprei 4 para cada um dos meus 3 primos. Outros 6 comprei para o meu irmão. Não esqueci de mim! Comprei 6 adesivos para cada um dos meus 4 cadernos. Quantos adesivos comprei?	() $6 + 4 \times 3 + 4 \times 6$
b) Fiz muita lição hoje! 6 exercícios de Português, 4 páginas de Matemática com 3 exercícios cada e 4 páginas de Ciências com 6 exercícios cada. Quantos exercícios resolvi ao todo hoje?	() $4 \times 6 + 3 \times 4 + 4$
c) Gastei 4 reais em cada um dos 6 cadernos que comprei para Fabíola; 3 reais em cada uma das 4 cartelas de adesivos e 4 reais em uma caneta colorida. Quanto gastei?	

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem associar a linguagem escrita à linguagem aritmética. Possivelmente os alunos não terão problema nessa questão, pois as expressões apresentam as operações na ordem em que os fatos se sucedem no texto.

Respostas obtidas:

(22) “B – C – A”

(1) “C – B – A”

(1) “A – C – B”

(2) “A – B – C”

(5) assinalaram a opção “não entendi o que os problemas quiseram dizer”

(5) não responderam

Análise das respostas obtidas: Podemos perceber que a maioria dos alunos relacionou corretamente as situações às expressões numéricas. Entretanto, uma quantidade considerável de alunos, 14, não reconheceu as operações.

QUESTÃO 11: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

11) Em uma prova, Felipe resolveu as expressões abaixo da seguinte maneira:

a) $12 \times 6 - 4 \div 2$	b) $12 \times (6 - 4) \div 2 =$	c) $(12 \times 6 - 4) \div 2 =$	d) $12 \times (6 - 4 \div 2)$
$= 72 - 2$	$12 \times 2 \div 2$	$(72 - 4) \div 2$	$= 12 \times (6 - 2)$
$= 70$	$= 24 \div 2$	$= 68 \div 2$	$= 12 \times 4$
	$= 12$	$= 34$	$= 48$

Felipe acertou todas as expressões! Como isso pode acontecer?

Objetivo da questão: observar se os alunos estão familiarizados com o significado dos parênteses em expressões numéricas e se respeitam a ordem das operações em uma expressão. Pode ser que os alunos tenham problema essa questão porque não é natural aceitar que as “mesmas” expressões possam resultar em números diferentes.

Respostas obtidas:

(2) Ele acertou

Algumas justificativas: “Os começos das contas são diferentes, por isso contêm resultados diferentes”

“Sim, pois Felipe, com as contas que tinham parênteses, ele começou pelos parênteses e somou tudo certo”

(12) Ele errou alguma expressão

Algumas justificativas: “Não, ele só acertou a c) e a d)”

“Não, ele não começou pelos parênteses”

“Não a a) ele errou, ele esqueceu do 4. Ele acertou a b), errou a d) porque fez a conta do parênteses primeiro e se ele não fez deu o número errado”

“Não, ele deve ter se confundido em alguma expressão”

“Não, só a b) e a d) que estão certas”

“Não, acho que ele só acertou a primeira expressão”

“Não sei explicar o porquê”

“Ele resolveu as expressões, mas sem seguir as regras”

“Ele errou uma conta”

“Não, a d) ele errou porque calculou $6 - 4 = 6$ é um absurdo”

“Não porque ele pôs que $4 + 2$ é 2 e a a) se você errar um número você erra a conta inteira”

(14) Ele acertou (justificativas desconexas com o objetivo)

Algumas justificativas: “Sim, ele acertou porque ele prestou atenção na prova”
“Sim, ele multiplicou os de cima e depois dividiu os de baixo”
“Sim, porque ele sabe fazer todas as contas e elas (as contas) estão fáceis”
“Ele acertou pela inteligência e porque ele estudou para a prova”
“Ele era esperto demais, e em algumas ele usou o dobro das expressões”.
“Ele fez da forma mais fácil”

(8) não responderam

Análise das respostas obtidas: Essa questão permite afirmar que os alunos não estão familiarizados com o uso e significado dos parênteses em expressões. Apenas 1 aluno explicitou o significado dos parênteses nas expressões.

QUESTÃO 12: NÚMEROS NATURAIS – 4ª SÉRIE OU 5º ANO

12) Resolva as operações abaixo. Deixe os cálculos na folha!

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam as quatro operações no contexto dos números naturais

a) $123 + 876$

Característica do item: essa adição é pode ser considerada simples porque não há necessidade de troca entre as ordens numéricas, os alunos devem resolvê-la sem problemas

Respostas obtidas:

(35) “999”

(1) “998”

Análise das respostas obtidas: Os alunos não mostraram dificuldade nesse cálculo.

b) $567 + 929$

Característica do item: essa adição exige transformação entre ordens, ou seja, o famoso “vai um”. Apesar disso, os alunos devem resolvê-la sem dificuldade.

Respostas obtidas:

(32) “1496”

(1) “1486” (não somou 1 na dezena)

(1) “362” (efetuou uma subtração)

(1) “1497”

(1) “1296”

Análise das respostas obtidas: os alunos resolveram essa adição com certa tranquilidade.

c) $176 + 924$

Característica do item: nessa adição ocorrem duas transformações entre as ordens.

É provável que os alunos não tenham problemas nesse cálculo.

Respostas obtidas:

(32) “1100”

(3) “1090” (não fizeram o “vai 1”)

(1) “748” (realizou uma subtração entre os números)

Análise das respostas obtidas: apesar de terem cometido alguns erros, a maioria dos alunos mostrou não ter dificuldade em efetuar adições, sabem alinhar os números e fazer as transformações entre ordens necessárias.

d) 497 – 154

Característica do item: esta subtração entre números de mesma ordem não necessita de “empréstimos” e não deve se constituir em um problema para os alunos.

Respostas obtidas:

(33) “343”

(2) “651” (efetuaram a adição)

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: Como previsto, os alunos não demonstraram dificuldade em efetuar essa subtração. Apenas 2 alunos se confundiram e somaram os número. 1 aluno não efetuou o cálculo.

e) 1922 – 976

Característica do item: esta subtração, além de envolver “empréstimos” entre as ordens, possui elementos de ordem diferentes e exige que os alunos alinhem as unidades à direita. Pode ser que alguns alunos se atrapalhem.

Respostas obtidas:

(25) “946”

(3) “1054” (subtraíram sempre o menor algarismo do maior)

(1) “1016” (efetuou $1922 - 976$)

(1) “956”

(1) “945”

(1) “56”

(1) “1146”

(1) “2898” (efetuou a adição)

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: Apenas 25 alunos acertaram o cálculo. 3 alunos subtraíram sempre o menor algarismo do maior. A análise deste item nos mostra que a transformação entre ordens na subtração não é de domínio completo dos alunos.

f) 4000 – 1986

Característica do item: esta subtração pode ser considerada complexa, pois é preciso várias transformações sucessivas entre as ordens para efetuá-las. É possível que poucos alunos acertem este cálculo.

Respostas obtidas:

(21) “2014”

(1) “124” (emprestou tudo do algarismo 4)

(2) “2114” (o algarismo da centena não virou 9, continuou valendo 10)

(3) “2124” (os algarismos da centena e da dezena não viraram 9)

(3) “3000”

(1) “3124” (o algarismo da unidade de milhar continuou sendo 4)

(4) “3986” (subtraíram o menor algarismo do menor em todas as ordens)

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: Os alunos mostraram bastante dificuldade neste item, a transformação entre as ordens parece não ser de total domínio dos alunos.

g) 23×2

Característica do item: esta multiplicação é bastante simples, pois não envolve transformações entre as ordens e traz apenas um algarismo no multiplicador.

Respostas obtidas:

(34) “64”

(1) “69”

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: Os alunos não apresentaram dificuldade neste item.

h) 71×7

Característica do item: esta multiplicação é bastante simples, pois não envolve transformações entre as ordens e traz apenas um algarismo no multiplicador. Pode haver alguma dificuldade ao efetuar 7×70 e não saber como colocar o resultado 49 que na verdade significa 49 dezenas.

Respostas obtidas:

(29) “497”

(1) “141” (alinhou os números à esquerda e somou $71 + 70$)

(1) “487”

(2) “491” (fizeram $7 \times 1 = 7$)

(1) “417” (fez $7 \times 1 = 7$)

(1) “557”

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: diferente do previsto os alunos apresentaram um pouco de dificuldade neste item. O mais surpreendente foi 3 alunos terem calculado $7 \times 1 = 7$.

i) 16×35

Característica do item: esta é uma multiplicação um pouco complexa, pois envolve transformações e multiplicador de 2 algarismos.

Respostas obtidas:

(21) “560”

(1) “128” (fez $80 + 48$, não deslocou as parcelas)

(1) “ 260” (fez $3 \times 16 = 18$)

(1) “430” (fez $3 \times 16 = 38$)

(1) “500” (fez $3 \times 16 = 42$)

(1) “540”

(1) “565” (fez $5 \times 16 = 85$)

(2) “620” (fizeram $6 \times 35 + 1 \times 35$)

(1) “700” (fez $80 + 380 = 3160$)

(1) “3260” (fez $3 \times 16 = 318$)

(1) “4155” (fez $75 + 480 = 4155$)

(1) “9290” (fez $3 \times 16 = 921$)

(1) “31880” (colocou os resultados da multiplicação em uma linha só)

Análise das respostas obtidas: os alunos demonstraram mais dificuldade neste item. Parece que quantos mais “detalhes” ou regras são necessárias em um cálculo, mais erros aparecem.

j) 23×40

Característica do item: o problema deste cálculo está no fato do multiplicador ser 40. Os alunos podem apresentar dificuldade em lidar com o zero à esquerda. Pode-se que alguns alunos invertam a conta para facilitar o cálculo ou multipliquem o 0 e o coloquem na parcela

Respostas obtidas:

(18) “920 “

Desses: (7) “desceram” o zero

(6) multiplicaram o zero

(5) inverteram os números

(5) “92” (desapareceram com o zero)

(1) “720”

(1) “800” (fez $3 \times 40 = 00$)

(1) “820” (fez $4 \times 23 = 82$)

(1) “890”

(2) “943” (fizeram $0 \times 23 = 23$)

(2) “960”

(1) “1020” (fez $4 \times 23 = 102$)

(1) “1320” (fez $4 \times 23 = 132$)

(1) “8120” (fez $4 \times 23 = 812$)

(1) “8200”

(1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: como esperado, os alunos apresentaram dificuldade em lidar com o zero no multiplicados. Alguns alunos sumiram com o zero, outros não aceitam que 0×23 possa resultar em zero e registram 23. O que mais

surpreendeu foi a quantidade de alunos que registram o 0 na parcela, 12 alunos no total, e quantos somem com o zero, 5 alunos.

k) 51×102

Característica do item: o problema nesta multiplicação está no zero na posição da dezena. As parcelas terão que ser deslocadas em duas casas se os números não forem invertidos.

Respostas obtidas:

(20) “5202”

Desses: (18) inverteram os números

(2) mantiveram a ordem e multiplicaram 51 por 0

(1) “113” (fez $102 + 00 + 11$)

(2) “612” (inverteram o cálculo e fizeram 2×51 e 1×51 , resultando $102 + 510$)

(1) “663” (fez $0 \times 51 = 51$, resultando em $102 + 52 + 510$)

(1) “702” (fez $5 \times 102 = 60$)

(1) “2002” (fez as multiplicações dos algarismos na mesma linha)

(4) “5102” (fizeram $5 \times 102 = 500$)

(1) “5200” (fez $102 + 5100 = 5200$)

(1) “15302”

(1) “50202” (fez $5 \times 102 = 5010$)

(1) “51102” (fez as multiplicações dos algarismos na mesma linha 51/102)

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: como esperado, grande parte dos alunos apresentou dificuldade neste item. O número 0 na multiplicação traz incompreensões por parte dos alunos.

l) $96 \div 6$

Característica do item: esta é uma divisão simples, com um algarismo na chave, sem resto e sem transformações entre as ordens. É possível que a maioria dos alunos acertem o cálculo, mostrando domínio do algoritmo. As falas de “não deu, abaixa o próximo” não resulta em “furo” no algoritmo para esse cálculo.

Respostas obtidas:

(24) “16”

(2) “1”

(1) “2” (com resto 3)

(1) “8”

(1) “10” (com resto 36)

(2) “11” (com resto 3 – não “emprestou” as 3 dezenas que sobraram para as unidades e continuar a divisão. Fizeram: $9 \div 6 = 1$ e $6 \div 6 = 1$)

(1) “12” (com resto 13)

(1) “13”

(1) “14”

(1) “1” (com resto 4)

Análise das respostas obtidas: diferente do imaginado, muitos alunos não conseguiram efetuar esse cálculo que pode ser considerado simples pela maioria dos professores.

m) $19 \div 5$

Característica do item: divisão simples com apenas um algarismo na chave e resto.

O objetivo aqui é verificar se algum aluno se arrisca a continuar a conta e dar o resultado em número decimal.

Respostas obtidas:

(31) “3” (com resto 4)

(1) “2” (com resto 4)

(2) “4” (com resto 19)

(1) “15”

(1) não fez

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos resolveu corretamente o cálculo, entretanto, nenhum aluno entrou na casa decimal para continuar o cálculo.

n) $312 \div 13$

Característica do item: esta divisão apresenta um número com dois algarismos na chave, o que pode ser um problema para o aluno. Talvez alguns alunos apresentem problema em agrupar os algarismos do dividendo antes de dividir.

Respostas obtidas:

(20) “24”

(1) “2”

(1) “8”

(1) “10”

(1) “21

(1) “22”

(2) “23” (com resto 3)

(1) “30” (com resto 3)

(1) “104” (com resto 1)

(1) “109” (com resto 119)

(1) “140”

(1) “293” (com resto 7)

Análise das respostas obtidas: 16 alunos não conseguiram efetuar esse cálculo.

o) $1428 \div 7$

Característica do item: este é uma divisão aparentemente simples, pois 14 e 28 são divisíveis por 7. Entretanto, o algoritmo tão treinado confunde os alunos porque pode ser que eles interiorizem que sempre “quando não dá abaixa o próximo”, não sintam a necessidade de colocar o 0 no meio do número. Muito provavelmente o resultado mais presente nas respostas será 24.

Respostas obtidas:

(8) “204”

(15) “24” (fizeram $14 \div 7$ e $28 \div 7$)

(1) “240” (pode ser que tenha sentido que 24 era pouco e tenha colocado o 0 para aumentar o resultado)

(2) “2,29” (quando não deu pra dividir abaixando o próximo algarismo, o aluno colocou o 0 e a vírgula antes de continuar dividindo e abaixando os algarismos)

(1) “20”

(1) “74”

(1) “7777”

(7) não resolveram

Análise das respostas obtidas: defronte aos resultados, podemos afirmar que esta foi uma questão desafiadora. De todas as operações, esta foi a que apresentou a

maior quantidade de respostas em branco e na maioria desses questionários é possível verificar que cálculos foram feitos e apagados. Talvez aqui o algoritmo da divisão seja o motivador dos erros, pois pode causar a sensação de que às vezes “abaixa o próximo” e às vezes “coloca o zero” ou ainda “coloca o zero e a vírgula”.

p) $2222 \div 22$

Característica do item: essa questão é similar à anterior. Provavelmente teremos 11 como resposta predominante

Respostas obtidas:

(7) “101”

(16) “11” (fizeram $22 \div 22$ e $22 \div 22$)

(1) “48” (com resto 22)

(1) “110” (pode ser que tenha sentido que 11 era pouco e tenha colocado o 0 para aumentar o resultado)

(1) “112”

(1) “1002”

(1) “1010”

(3) “1111”

(1) “22000”

(4) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 7 alunos conseguiram realizar este cálculo.

ANEXO 13 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS I

Total de alunos que responderam o questionário: 10 alunos

QUESTÃO 1: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

1) Escreva a fração que representa a parte pintada das figuras:

Objetivo da questão: verificar se o aluno sabe representar por meio de uma fração a relação entre parte e todo; além disso, pretende-se verificar se reconhecem o significado do numerador e do denominador. Pode ser que os alunos não apresentem dificuldade em escrever a fração que representa a parte pintada.

Respostas obtidas:

$$(9) \text{ "}\frac{5}{6}\text{"} \qquad (1) \text{ "}\frac{1}{6}\text{"}$$

Análise das respostas obtidas: Como esperado, os alunos não apresentaram dificuldade em escrever a fração correspondente à figura apresentada.

b)

Objetivo da questão: conhecer a idéia que os alunos possuem a respeito de frações impróprias, ou seja, frações em que o denominador é menor que o numerador; além disso, pretende-se verificar se os alunos estão familiarizados com a linguagem do número misto. Pode ser que os alunos apresentem problemas neste item por não aceitarem que o “número de cima da fração possa ser maior do que o de baixo”.

Possivelmente aparecerá como resposta a fração $\frac{5}{8}$ como interpretação do todo como as duas barras de quatro unidades.

Respostas obtidas:

$$(1) \frac{5}{4} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (1) \frac{5}{5} \quad (2) \frac{4}{4} \frac{1}{4} \quad (1) 2\frac{4}{1} \quad (2) 4\frac{1}{4}$$

Análise das respostas obtidas: Apenas um aluno escreveu a parte pintada da figura como a fração imprópria correspondente. A escrita mais freqüente foi a $\frac{5}{8}$, muito provavelmente representando o todo das duas barras. Alguns alunos associaram o número misto à figura maior que um inteiro, mas se atrapalharam com as partes da representação e não o fizeram corretamente.

Objetivo da questão: verificar se o aluno reconhece o inteiro em uma fração. Os alunos devem escrever a fração $\frac{4}{4}$ como resposta, mas acredita-se que poucos perceberão que ela equivale a 1 inteiro.

Respostas obtidas:

$$(3) \frac{4}{4} = 1 \quad (7) \frac{4}{4}$$

Análise das respostas obtidas: Todos os alunos escreveram a fração correspondente à parte pintada da figura representada. Entretanto, apenas 3 alunos explicitaram a equivalência da figura a um inteiro.

2) Represente com figuras as seguintes frações:

a) $\frac{2}{5}$

Objetivo da questão: verificar se o aluno representa com figuras as frações que representam a parte de um todo contínuo; esta fração não deve trazer dificuldades para os alunos.

Respostas obtidas:

Análise das respostas obtidas: Este item foi realizado de forma tranqüila pelos alunos que, inclusive, representaram a fração de diferentes formas.

b) $\frac{3}{3}$

Objetivo da questão: verificar se o aluno representa com figuras as frações que representam a parte de um todo contínuo; a fração deste item equivale a um inteiro e possivelmente será representada pelos alunos sem maiores problemas.

Respostas obtidas:

Análise das respostas obtidas: Os alunos representaram de forma correta a fração deste item; entretanto, na podemos afirmar que os alunos reconhecem nessa representação o inteiro.

c) $\frac{4}{3}$

Objetivo da questão: verificar se o aluno representa com figuras as frações que representam a parte de um todo contínuo e, principalmente se conseguem representar por meio de figura uma fração imprópria. Pode ser que os alunos representem a fração $\frac{3}{4}$ por se sentirem mais confortável com o numerador ser menor que o denominador

Respostas obtidas:

(6) (4) não representaram a fração

Análise das respostas obtidas: Nenhum aluno conseguiu representar a fração deste item corretamente; é interessante notar como os alunos lidam com uma fração imprópria, eles parecem não aceitar que o numerador possa ser menor que o denominador e invertem as funções dos números para que consigam resolver o exercício. Um aluno que não representou a fração escreveu ao lado dela “fração imprópria” e outro aluno desenhou um X sobre a fração e não a representou. Essas atitudes podem ser indícios da não aceitação da fração imprópria pelos alunos.

d) $2\frac{1}{2}$

Objetivo da questão: verificar se o aluno representa com figuras as frações que representam a parte de um todo contínuo e, principalmente se conseguem representar por meio de figura uma fração imprópria escrita com número misto; possivelmente os alunos terão menos dificuldade em representar esse número do que em representar as frações impróprias.

Respostas obtidas:

(5) (1) (1) (1)

(2) não representaram a fração

Análise das respostas obtidas: 5 alunos mostraram conhecer o significado do número misto; o mais interessante, entretanto, foi a resposta dada por um dos alunos que lembrou da “regra” do número misto em que faz-se “ $2 \times 2 + 1$ ” e chega-se a fração $\frac{5}{2}$ mas representou a fração $\frac{2}{5}$.

QUESTÃO 3: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

3) Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira?

Qual das escritas matemáticas abaixo podem representar essa situação?

Objetivo da questão: verificar se o aluno reconhece que nos dois exemplos recebe-se a mesma parte da folha, ou seja, se frações diferentes representam a mesma parte; além disso, esta questão apresenta a idéia de adição de frações com denominadores iguais; pode ser que os alunos optem por uma das representações como correta e interprete a outra como incorreta.

Respostas obtidas:

(3) apontou a primeira situação

(6) apontou a segunda situação

Justificativas apresentadas: “1,5”

“uma folha irá sobrar e cada pessoa ficará com metade de uma folha”

(1) não respondeu a questão

Análise das respostas obtidas: nenhum aluno reconheceu as duas situações como soluções do mesmo problema; esse resultado pode mostrar que os alunos não aceitam que uma parte de um todo pode ser representada por diferentes frações.

QUESTÃO 4: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

4) Veja o quadro e escreva o que se pede:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{12}{12}$$

d) Quais dessas frações podem representar um inteiro?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem um inteiro em uma fração e se a associam a uma “quantidade”

Respostas obtidas:

$$(10) \text{ " } \frac{8}{8} \text{ " } \quad (10) \text{ " } \frac{12}{12} \text{ " }$$

Análise das respostas obtidas: os alunos indicaram corretamente as frações que representam um inteiro, apesar de não terem realizado essa equivalência nos exercícios que trazem figuras que representam frações.

e) Quais dessas frações representam quantidades menores que um inteiro?

Objetivo da questão: verificar se os alunos identificam uma fração menor do que um inteiro observando as características do numerador e do denominador; além de verificar se reconhecem uma fração como sendo parte de uma unidade.

Respostas obtidas:

(8) " $\frac{1}{5}$ " (7) " $\frac{4}{9}$ " (6) " $\frac{7}{6}$ " (1) " $\frac{10}{5}$ " (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: a partir das respostas obtidas, não é possível afirmar que os alunos associam à idéia de fração a uma parte de uma unidade nem se reconhecem uma fração própria.

- f) Quais dessas frações representam quantidades maiores que um inteiro?

Objetivo da questão: verificar se os alunos associam as frações impróprias à idéia de quantidades maiores do que um inteiro e, no caso, maiores do que uma unidade.

Respostas obtidas:

(7) " $\frac{10}{5}$ " (3) " $\frac{7}{6}$ " (2) " $\frac{4}{9}$ " (1) " $\frac{12}{12}$ " (1) " $\frac{1}{5}$ " (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: podemos perceber que os alunos não estão familiarizados com o significado de fração imprópria, o resultado nos dá indícios de que os alunos sintam dificuldade em aceitar que “a parte seja maior que o todo”.

QUESTÃO 5: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

- 5) Que número é maior?

c) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos comparam frações com numeradores iguais; as duas frações apresentadas possuem o mesmo numerador e denominadores

diferentes; a idéia central dessa comparação está em reconhecer que ao dividirmos um inteiro em 5 partes iguais, teremos uma quantidade maior do que ao dividi-lo em 7 partes iguais; pode ser que os alunos apresentem alguma dificuldade nessa comparação caso se atenham aos valores dos algarismos e não percebam o significado que possuem nas frações apresentadas.

Respostas obtidas:

$$(6) \text{ "}\frac{2}{5}\text{"} \quad (4) \text{ "}\frac{2}{7}\text{"}$$

Análise das respostas obtidas: parece que a maioria dos alunos reconhece a idéia descrita no objetivo do item; entretanto, 4 deles podem ter comparado os algarismos sem perceber o seu significado nas frações.

d) $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$? _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos comparam frações com denominadores iguais; a comparação com frações de mesmo denominador costuma ser de fácil compreensão porque para realizá-la, basta comparar os numeradores; dessa forma, imagina-se que os alunos não terão dificuldade em indicar a maior fração dentre as opções dadas.

Respostas obtidas:

$$(8) \text{ "}\frac{7}{11}\text{"} \quad (2) \text{ "}\frac{7}{11}\text{"}$$

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos indicou a maior fração dentre as opções corretamente; entretanto, 2 alunos o fizeram de forma errônea.

QUESTÃO 6: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

6) Faça o que se pede:

Objetivo da questão: o objetivo desta questão não é verificar se os alunos representam as frações nas figuras corretamente e sim se conhecem o conceito de frações equivalentes; a representação das frações por meio de figuras é um meio de auxiliar os alunos na justificativa de sua resposta; entretanto, acredito que os alunos terão dificuldade em reconhecer que frações equivalentes são aquelas que representam a mesma parte de um mesmo todo.

- e) Represente na figura ao lado a fração $\frac{2}{3}$

- f) Represente na figura ao lado a fração $\frac{4}{6}$

- g) Represente na figura ao lado a fração $\frac{6}{9}$

- h) As frações representadas são chamadas de *frações equivalentes*. Explique esse conceito com suas palavras.

Respostas obtidas:

“É que elas são equivalentes a um pedaço ou uma parte de alguma coisa”

“Sei lá.”

“Não sei explicar”

“Fração equivalente é um número que equivale ao número de quadrados”

(6) não justificaram

Análise das respostas obtidas: esta questão nos permite afirmar que os alunos não conhecem a idéia de fração equivalente; vale destacar, ainda, que os alunos parecem não ter associado os itens a), b) e c) ao enunciado do item d)

QUESTÃO 7: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

- 7) Por que as operações foram resolvidas incorretamente?

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ _____

Objetivo da questão: este item traz um erro que pode ser cometido por alunos na soma de frações com denominadores diferentes; o objetivo é verificar se os alunos reconhecem o erro de somar os numeradores e os denominadores da fração para dar a soma.

Respostas obtidas:

(6) identificaram o erro

Justificativas: “Porque tem que tirar o m.m.c.”

“Tem que fazer o m.m.c.”

$$\text{“} \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15} \text{”}$$

“Pois primeiro precisa fazer o m.m.c.”

“Faz m.m.c. com os números debaixo e soma o de cima”

(1) “não”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos justificou este item recorrendo à necessidade de “tirar o m.m.c.”, apesar de não terem mostrado, em outras questões, conhecer o conceito de fração equivalente.

b) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ _____

Objetivo da questão: verificar se o aluno reconhece o erro cometido neste item, o de multiplicar o número natural pelo numerador e pelo denominador; nas escolas é comum que o aluno aprenda a “igualar” as casas antes de realizar operações com frações, estratégia que pode não garantir que o aluno se aproprie do significado da multiplicação de frações.

Respostas obtidas:

(3) identificaram o erro

Justificativas: “Porque tem que igualar as casas $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2}$ ”

“Iguala a fração e multiplica as frações $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2}$ ”

“Porque não multiplica a fração inteiro e sim o número de cima”

(4) respostas diversas

Justificativas: “Tem que tirar o MMC”

“ $3 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$ ”

“A conta está errada”

“não”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos não reconheceu o erro neste item; este resultado não nos permite afirmar que os alunos não sabem proceder em um cálculo de multiplicação deste tipo, talvez eles consigam realizar essa conta, mas não estão habituados a analisar resoluções.

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ _____

Objetivo da questão: este item traz um erro que pode ser cometido por alunos na subtração de frações com denominadores diferentes; o objetivo é verificar se os alunos reconhecem o erro de subtrair os numeradores e os denominadores das frações entre si para dar a diferença.

Respostas obtidas:

(5) identificaram o erro

Justificativas: “ $\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$ ”

“Porque o m.m.c. está incorreto”

“Tem que tirar o m.m.c”

“Faz o m.m.c e divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”

“Pois primeiro tem que fazer o m.m.c.”

(2) respostas diversas

Justificativas: “Não”

“Fazer +”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: metade dos alunos reconheceu o erro deste item, justificando a análise com a necessidade de calcular o m.m.c. dos denominadores, escrever as frações equivalentes e realizar as operações; não podemos afirmar que os alunos reconhecem o significado de tirar m.m.c., pois em outras questões eles mostraram não conhecer o conceito de fração equivalente.

d) $8 \div \frac{1}{2} = 4$ _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o erro cometido neste item, de dividir o número 8 por 4; além disso, pode-se verificar se os alunos conhecem o algoritmo da divisão de “inverter a segunda fração e realizar uma multiplicação”

Respostas obtidas:

(3) identificaram o erro

Justificativas: “Igualar a fração e inverter o sinal e a fração”

“Conserva o primeiro e inverte os demais”

“Porque tem que inverter após o sinal”

(4) respostas diversas

Justificativas: “Não”

$$“8 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{16}”$$

“Igualar”

“Tem que tirar o m.m.c.”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: os alunos se atrapalharam na resolução dessa questão; os 3 alunos que identificaram o erro, se apoiaram no algoritmo da divisão entre frações, algoritmo este que parece confundir alguns alunos, como aquele que efetuou o cálculo da seguinte maneira: $8 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{16}$.

QUESTÃO 8: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

8) Agora, observe esses cálculos feitos por um aluno e procure identificar os erros cometidos, corrigindo-os:

$$\begin{aligned} &1,5 - \frac{1}{5} + 3\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \\ &= 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Correção:

Objetivo da questão: verificar se os alunos identificam dois erros que podem ser cometidos por alunos em operações com frações; o primeiro erro consiste em

transformar o decimal 1,5 na fração $\frac{1}{5}$, o segundo erro é transformar o número

misto $3\frac{1}{4}$ em $\frac{3}{4}$ por meio da multiplicação; é possível que poucos alunos

reconheçam os erros, pois eles parecem mais “naturais” do que o correto.

Respostas obtidas:

(9) não identificaram os erros, deixaram a questão em branco

(1) “ $\frac{3}{1} \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$ ”

Análise das respostas obtidas: os alunos não identificaram os erros cometidos nesta questão; entretanto, não podemos afirmar que os alunos cometam esses erros, pois a questão pode ter sido de difícil compreensão, ela poderia ter sido elaborada de forma mais simples.

QUESTÃO 9: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

- 9) Observe o segmento de reta numerado entre 0 e 1 e os pontos indicados por letras maiúsculas que estão assinaladas nele:

Quais das frações abaixo correspondem às letras marcadas na reta?

() $\frac{1}{2}$ () $\frac{1}{6}$ () $\frac{1}{4}$ () $\frac{1}{5}$ () $\frac{1}{3}$ () $\frac{1}{10}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos transportam os números à reta numerada e se, principalmente, conseguem comparar o “tamanho” dos números; os alunos podem apresentar certa dificuldade com a idéia de representar frações em uma reta numerada.

Respostas obtidas:

(1) “F – B – D – C – E – A”

(1) “E – A – C – B – D – F”

(1) “B – F – D – E – C – F”

(1) “C ao D – E ao F – D ao E – 0 ao A – A ao B – F ao 1”

(6) deixaram a questão em branco

Análise das respostas obtidas: apenas 1 aluno conseguiu associar as frações aos pontos representados na reta numerada; a maioria dos alunos pode não conhecer a relação de fração como parte de um inteiro, um número ou ainda uma divisão, idéias que apóiam a resolução desta questão; pode ser ainda, que os alunos não percebam que $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{5}$, por exemplo.

QUESTÃO 10: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

10) Imagine que o segmento abaixo represente uma estrada de 200km:

Objetivo da questão: verificar se os alunos desenvolvem a idéia de fração como parte de um todo contínuo linear; este exercício foge do típico exercício das barrinhas, como a questão 1, apesar de trabalhar a mesma relação de fração; pode ser que os alunos tenham dificuldade em resolver esta questão.

a) Quando o carro estiver no ponto B, que fração da estrada terá percorrido?

Respostas obtidas:

(2) " $\frac{2}{5}$ " (2) " $\frac{1}{2}$ " (1) " $\frac{1}{3}$ " (1) “80 km” (4) não responderam

b) Se ele tiver percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada, em que ponto estará?

Respostas obtidas:

(4) “C” (2) “0,6” (1) “0” (3) não responderam

c) Quando o carro estiver no ponto D, que fração do percurso terá feito?

Respostas obtidas:

(3) " $\frac{4}{5}$ " (1) “1000 km” (1) " $\frac{5}{1}$ " (1) " $\frac{1}{4}$ " (1) " $\frac{1}{3}$ " (3) não responderam

d) Quantos quilômetros terá percorrido até A?

Respostas obtidas:

(1) “40 km” (1) “70 km” (1) “2 km” (1) " $\frac{1}{3}$ " (6) não responderam

e) E até C?

Respostas obtidas:

(1) “120 km” (1) “400 km” (1) “3 km” (1) " $\frac{3}{5}$ " (1) " $\frac{1}{3}$ " (1) " $\frac{1}{2}$ "

(4) não responderam

Análise das respostas obtidas: os alunos apresentaram grande dificuldade em lidar com a representação a parte de um todo contínuo; esta é uma abordagem pouco trabalhada nos livros didáticos e a ausência do trabalho sobre este tipo de noção da fração pode trazer dificuldades em conceitos mais avançados; na escola parece que apenas algumas noções de fração são trabalhadas.

QUESTÃO 11: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

11) Uma escola com 500 alunos resolveu fazer uma festa para comemorar o Final do Ano. A organização sugeriu que os alunos trouxessem os comes e bebes da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}$ dos alunos deveria trazer doces

$\frac{2}{5}$ dos alunos trariam salgados

$\frac{1}{10}$ dos alunos traria refrigerantes

Calcule a quantidade de alunos que levaram para a festa:

Objetivo da questão: verificar se os alunos têm a idéia de fração como parte de um todo discreto e se sabem lidar com ela em problemas; este tipo de questão aparece com frequência nos livros didáticos com a estratégia de “dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima”; pode ser que os alunos não tenham dificuldade em resolvê-la.

a) Doces

Respostas obtidas:

(6) “250” (1) “ $\frac{500}{1000}$ ” (3) não responderam

Análise das respostas obtidas: apesar da metade de uma quantidade ser uma idéia simples, apenas 6 alunos conseguiram “encontrar” a metade de 500; um dos alunos multiplicou o numerador e o denominador por 500 e se atrapalhou com a resposta.

b) Salgados

Respostas obtidas:

(3) “200” (1) “ $\frac{1000}{2500}$ ” (1) “121” (1) “25” (3) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 3 alunos conseguiram calcular $\frac{2}{5}$ de 500.

c) Refrigerante

Respostas obtidas:

(3) “50” (1) “ $\frac{500}{5000}$ ” (1) “100” (5) não responderam

Análise das respostas obtidas: mais uma vez apenas 3 alunos calcularam a parte de um todo discreto; este resultado surpreende, pois os alunos são freqüentemente submetidos a exercícios semelhantes a este.

QUESTÃO 12: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

12) Acompanhe o diálogo a seguir e depois responda à questão:

Andréia: - Comi $\frac{1}{4}$ dos bombons de uma caixa, ou seja, 6 bombons

Cláudio: - Também comi $\frac{1}{4}$ dos doces de uma caixa. Ao todo comi 8 doces.

É possível acontecer um diálogo semelhante a esse? Por que?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem que o “resultado” de uma fração depende do todo do qual estamos tratando; possivelmente os alunos não ficarão a vontade com esta questão, pois dificilmente a idéia do todo “interferir” no resultado de uma fração é pouco trabalhada em livros didáticos.

Respostas obtidas:

(1) “Sim, pelas frações”

(1) “Sim, pois frações existem no dia-dia”

(1) “Sim mas não é comum, porque as pessoas não costumam falar com frações”

(1) “Não, porque os dois comeram a mesma quantidade, então, não tem como o Cláudio comer mais que Andréia”

(6) deixaram a questão em branco

Análise das respostas obtidas: alguns alunos se ativeram a idéia do uso de frações no cotidiano e não perceberam a idéia de fração envolvida; um aluno disse que não era possível que o Cláudio tivesse comido mais que Andréia porque eles comeram

“a mesma quantidade”, ou seja, $\frac{1}{4}$, que pode evidenciar que ele não relacionou a fração ao todo ao qual ela se refere; é preocupante que os alunos não tenham demonstrado perceber que a fração é a representação da parte de um todo e que este todo “interfere” no resultado; além disso, os alunos podem não aceitar que o mesmo “número” (no caso a fração) possa ter valores diferentes dependendo do todo do qual se fala.

QUESTÃO 13: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

13) Que conta resolve? Associe os problemas às operações que podemos fazer para achar sua solução.

e) Helena comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza, enquanto Gabriel comeu $\frac{1}{2}$ dessa mesma pizza. Quanto da pizza foi comido?	() $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$
f) Na situação da letra a), quanto Gabriel comeu a mais que Helena?	() $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$
g) José e Nair tiveram 4 filhos. José morreu de uma doença rara e a sua herança foi dividida da seguinte maneira: à sua esposa, Nair, coube metade dos bens; a cada um dos seus filhos coube a quarta parte da metade dos bens. Quanto cada filho recebeu	() $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
h) Leandro foi à uma mercearia comprar $\frac{1}{2}$ quilo de farinha. O vendedor, entretanto, disse que só tinha embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Quantas embalagens de $\frac{1}{4}$ o	() $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

vendedor utilizou para embalar o $\frac{1}{2}$ kg de farinha?

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem o significado das operações com frações.

Respostas obtidas:

a) (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ (6) não responderam

b) (1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (1) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (6) não responderam

c) (1) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (6) não responderam

d) (2) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ (1) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (6) não responderam

Análise das respostas obtidas: os alunos apresentaram dificuldade nesta questão, pode ser que eles não associam as operações com frações aos seus significados.

QUESTÃO 14: NÚMEROS RACIONAIS (I) – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

14) Resolva as seguintes operações:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam a adição de frações com mesmo denominador; os alunos devem resolver esta adição com tranquilidade, o erro que pode ocorrer é a adição dos numeradores e dos denominadores entre si.

Respostas obtidas:

(6) " $\frac{3}{5}$ " (3) " $\frac{3}{10}$ " (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos efetuou o cálculo corretamente, entretanto, 3 alunos cometeram o erro previsto.

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Objetivo da questão: verificar a adição de frações com denominadores diferentes; pode ser apareça a fração $\frac{2}{6}$ como resposta, se o aluno somar os numeradores e denominadores entre si; entretanto, pode ser que a maioria dos alunos realize a operação sem dificuldade.

Respostas obtidas:

(1) " $\frac{3}{4}$ " (2) " $\frac{2}{6}$ " (1) " $\frac{1}{4}$ " (2) " $\frac{2}{4}$ " (1) " $\frac{5}{3}$ "

(3) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 1 aluno conseguiu somar as frações com denominadores diferentes de forma correta; 2 alunos deram como resposta a fração $\frac{2}{6}$ diferente do previsto, os alunos não conseguiram efetuar o cálculo com denominadores diferentes múltiplos entre si.

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam a subtração de frações com denominadores diferentes primos entre si; possivelmente os alunos não mostrarão dificuldade com este item.

Respostas obtidas:

$$(1) \text{ “ } \frac{7}{15} \text{ ” } \quad (2) \text{ “ } \frac{1}{2} \text{ ” } \quad (1) \text{ “ } \frac{3}{3} \text{ ” } \quad (1) \text{ “ } \frac{3}{8} \text{ ” } \quad (5) \text{ não resolveram}$$

Análise das respostas obtidas: assim como na adição, os alunos mostraram não saber resolver subtração de frações com denominadores diferentes; mais uma vez apareceu como resposta a fração decorrente da estratégia de operar os numeradores e denominadores entre si.

d) $3 \times \frac{2}{5}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem efetuar a multiplicação entre um número natural e uma fração; possivelmente os alunos não apresentarão problema com esta operação e se apoiarão na estratégia de escrever o número 3 como uma fração antes de multiplicar os fatores.

Respostas obtidas:

$$(3) \text{ “ } \frac{6}{5} \text{ ” } \quad (2) \text{ “ } \frac{17}{5} \text{ ” (lidou como um número misto)} \quad (2) \text{ “ } \frac{6}{15} \text{ ”}$$

$$(1) \text{ “ } \frac{10}{5} \text{ ” } \quad (2) \text{ não resolveram}$$

Análise das respostas obtidas: diferente do previsto, os alunos tiveram grande dificuldade em efetuar esta multiplicação; 2 alunos multiplicaram o numerador e o denominador por 2, outros 2 alunos confundiram a multiplicação em questão ao número misto $3\frac{2}{5}$.

e) $\frac{1}{2} \times 8$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam multiplicação de uma fração por um número natural; os alunos devem resolver esta operação sem maiores problemas, escrevendo o número 8 como uma fração antes de efetuar a multiplicação.

Respostas obtidas:

(2) " $\frac{8}{2}$ " (2) " $\frac{8}{16}$ " (1) " $\frac{17}{2}$ " (5) não resolveram

Análise das respostas obtidas: mais uma vez os alunos mostraram não dominar a operação de multiplicação de frações; apesar de dois alunos encontrarem a fração $\frac{8}{2}$ como resposta, nenhum aluno mostrou ter percebido que a operação deste item consistia em encontrar a metade do número 8.

f) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam a multiplicação entre frações; possivelmente os alunos não terão dificuldade em efetuar este cálculo.

Respostas obtidas:

(5) " $\frac{10}{12}$ " (1) " $\frac{23}{12}$ " (1) " $\frac{15}{8}$ " (3) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apesar dos alunos não terem se saído bem nas outras multiplicações, metade dos alunos resolveu de forma correta este cálculo, pode ser que o fato do algoritmo que diz que deve-se “multiplicar o de cima pelo de cima e o debaixo pelo debaixo” funciona sem maiores ajustes neste caso.

g) $6 \div \frac{1}{3}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam a divisão entre um número natural e uma fração; possivelmente os alunos usarão o algoritmo da divisão entre

frações que consiste em “manter a primeira fração e inverter a segunda efetuando a multiplicação”.

Respostas obtidas:

(3) “18” (2) " $\frac{6}{2}$ " (1) " $\frac{1}{2}$ " (1) " $\frac{1}{3}$ " (3) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 3 alunos efetuaram de forma correta a operação deste item, dois alunos multiplicaram o número 6 pelo denominador e dividiram-no por 3, chegando à fração $\frac{6}{2}$.

h) $\frac{3}{8} \div 2$

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem realizar a divisão de uma fração por um número natural; pode ser que os alunos não apresentem dificuldade ao se apoiar no algoritmo da divisão de frações que consiste em “manter a primeira fração e inverter a segunda efetuando a multiplicação”.

Respostas obtidas:

(3) " $\frac{3}{16}$ " (1) " $\frac{3}{4}$ " (1) " $\frac{1,5}{4}$ " (1) " $\frac{1}{4}$ " (4) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 3 alunos conseguiram efetuar a operação corretamente; um dos alunos dividiu apenas o denominador por 2 e chegou ao resultado $\frac{3}{4}$, outro aluno dividiu o numerador e o denominador por 3 tendo como resultado $\frac{1,5}{4}$.

i) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem realizar a divisão entre frações; possivelmente os alunos realizarão esta operação sem maiores dificuldades.

Respostas obtidas:

(3) " $\frac{2}{3}$ " (2) " $\frac{3}{2}$ " (1) " $\frac{1}{4}$ " (4) não resolveram

Análise das respostas obtidas: diferente do previsto, poucos alunos conseguiram efetuar este cálculo de forma correta; a partir dos resultados dos itens referentes à divisão, temos indícios de que os alunos não se apropriaram da idéia de divisão entre frações.

ANEXO 14 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS II

Total de alunos que responderam ao questionário: 13 alunos

1) Dentre os números abaixo, assinale o que está mais próximo do número 1.

() 1,1 () 1,5 () 1,10 () 1,05 () 1,01 () 0,9

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o valor posicional dos números depois da vírgula; pode ser que o valor mais assinalado seja o 0,9 porque alguns alunos podem interpretar que ele é o número que vem imediatamente antes de 1.

Respostas obtidas:

(11) 0,9

(1) 1,1

(1) assinalou mais de uma opção

Análise das repostas obtidas: corroborando a hipótese, a maioria dos alunos assinalou o 0,9 como sendo o número mais próximo de 1; pode ser que os alunos não conheçam o valor de cada ordem da parte decimal de um número.

2) Associe as frações à sua representação decimal:

a) $\frac{5}{10}$ () 0,005

b) $\frac{50}{10}$ () 50,0

c) $\frac{5}{100}$ () 0,05

d) $\frac{5}{1000}$ () 5,0

e) $\frac{500}{10}$ () 0,5

Objetivo da questão: verificar se os alunos associam frações decimais a se equivalente na escrita decimal.

Respostas obtidas:

a) $\frac{5}{10}$

(12) 0,5 (1) 5,0

b) $\frac{50}{10}$

(5) 5,0 (6) 50,0 (1) 0,05 (1) não associou nenhum valor

c) $\frac{5}{100}$

(10) 0,05 (1) 0,005 (1) 0,5 (1) não associou nenhum valor

d) $\frac{5}{1000}$

(10) 0,005 (1) 50,0 (1) 5,0 (1) não associou nenhum valor

e) $\frac{500}{10}$

(6) 50,0 (5) 5,0 (1) 0,005 (1) 0,05

Análise das respostas obtidas: os alunos não tiveram dificuldade em associar frações com numeradores de 1 algarismo, o problema parece ocorrer quando o numerador é um número mais alto; isso pode ocorrer pelo fato de não se ter a idéia de fração como divisão entre inteiros.

3) Descubra a regra e continue a seqüência:

a) $1,3 - 1,2 - 1,1 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

b) $7,5 - 7,0 - 6,5 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

c) $0,5 - 0,7 - 0,9 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

d) $37,9 - 37,5 - 37,1 - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem a regularidade entre números decimais e se efetuam cálculo mental de subtração ou adição de décimos para completar as seqüências.

Respostas obtidas:

a) (11) “ $1,0 - 0,9 - 0,8$ ”

(1) “ $1,0 - 0,3 - 0,2$ ”

(1) “ $1,0 - 0,5 - 0,0$ ”

b) (12) “ $6,0 - 5,5 - 5,0$ ”

(1) “ $6,5 - 5,0 - 5,5$ ”

c) (6) “ $1,1 - 1,3 - 1,5$ ”

(1) “ $1,1 - 1,3 - 1,4$ ”

(1) “ $1,1 - 1,3 - 0,15$ ”

(1) “ $0,0 - 1,2 - 1,5$ ”

(1) “ $10,0 - 12,0 - 14,0$ ”

(1) “ $0,11 - 1,02 - 1,04$ ”

(2) “ $0,11 - 0,13 - 0,15$ ”

d) (5) “ $36,7 - 36,3 - 35,9$ ”

(1) “ $36,7 - 36,5$ ”

(1) “ $3,67 - 3,63 - 3,59$ ”

(1) “ $36,5$ ”

(1) “ $36,5 - 36,0 - 35,5$ ”

(1) “ $34,0 - 30,0 - 26,0$ ” (subtraiu 4 unidades)

Análise das respostas obtidas: os alunos não apresentaram dificuldade em identificar a regularidade e completar as seqüências soa itens a) e b) que lidavam com adições ou

subtrações de 1 ou 5 décimos; as seqüências dos itens c) e d) foram completadas de forma correta por poucos alunos, a maioria parece ter se atrapalhado em subtrair ou adicionar 2 ou 4 décimos.

4) Quantos números racionais existem entre 1 e 2?

Objetivo da questão: a questão traz a idéia de que entre dois números racionais existem infinitos números racionais; o objetivo é verificar se os alunos percebem a impossibilidade de determinar quantos números racionais existem entre 1 e 2; pode ser que alguns alunos apresentem 9 como resposta por considerar os décimos.

Respostas obtidas:

(10) “9”

(1) “2”

(1) “o 1,5”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: esta questão nos deu indícios para concluir que, talvez, para os alunos entrevistados os números decimais se resumem ao que apresentam apenas um algarismo depois da vírgula; nenhum aluno percebeu a impossibilidade de contar quantos números racionais existem entre 1 e 2.

5) Efetue:

a) $6,32 + 2,9$

Objetivo da questão: verificar se os alunos sabem “alinhar” os números antes de efetuar a adição; possivelmente os alunos não apresentarão dificuldade com esse cálculo.

Respostas obtidas:

(8) “9,22”

(2) “6,61” (alinham os dois números à direita)

(1) “0,922”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: 8 alunos efetuaram a adição de forma correta, 2 alunos não respeitaram a posição dos algarismos ao efetuar a adição e chegaram ao resultado 6,61.

b) $4,6 - 1,4$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a subtração entre decimais; possivelmente os alunos não apresentarão dificuldade no cálculo deste item.

Resposta obtidas:

(10) “3,2”

(1) “0,32”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: 10 alunos efetuaram a subtração de forma correta; 1 aluno encontrou 0,32 como resposta, talvez ele tenha contado o número de casas depois da vírgula das parcelas para ajustar a resposta, como se faz com a multiplicação.

c) $2,15 - 1,8$

Objetivo da questão: verificar se os alunos sabem “alinhar” os números antes de efetuar a subtração; possivelmente os alunos não apresentarão dificuldade com esse cálculo.

Respostas obtidas:

(6) “0,35”

(3) “1,75”

(1) “0,015”

(1) “1,97”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: 6 alunos efetuaram a subtração corretamente; 3 alunos, ao efetuar a subtração, tirou o menor algarismo do menor em cada ordem; 1 aluno não alinhou os números respeitando as ordens dos algarismos antes de efetuar a subtração.

d) $13,4 - 11,2$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a subtração; provavelmente os alunos não terão dificuldade em efetuar esta subtração.

Respostas obtidas:

(9) “2,2”

(2) “0,22”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: foi interessante notar que todos os alunos que resolveram corretamente a subtração representaram o 0 antes do 2,2, ou seja, encontraram como resposta o 02,2; 2 alunos parecem ter contado o número de casas decimais dos minuendo e subtraendo e ajustado a resposta, dando como resultado 0,22.

e) $7,45 - 0,68$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam essa subtração que necessita de transformação entre as ordens, ou seja, de “empréstimos”

Resposta obtidas:

(8) “6,77”

(1) “0,677”

(1) “7,23”

(1) “6,37”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: 8 alunos efetuaram corretamente a subtração; 1 alunos tirou o menor algarismo do maior em cada ordem; outros 2 se atrapalharam com os “empréstimos”.

f) $1 - 0,73$

Objetivo da questão: verificar se os alunos resolvem esta subtração em que é necessário interpretar o número 1 como 1,00 para efetuar o cálculo; além disso, este item exige transformações entre ordens decimais.

Respostas obtidas:

(3) “0,27”

(4) “0,72” (fizeram $0,73 - 1$ ou $1 - 0,73$ sem alinhar e tirando o maior do menor)

(4) “1,73” (tiraram o menor do maior)

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 3 alunos efetuaram este cálculo de forma correta; a maioria dos alunos apresentaram dificuldade em efetuar esta subtração; 4 alunos não alinharam os números respeitando o valor posicional dos algarismos; outros 4 alunos, além de não alinhar os números, tiraram o menor algarismo do maior em cada ordem.

g) $3 \times 0,5$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a multiplicação de um inteiro por um decimal; os alunos devem resolver esta operação sem problemas.

Respostas obtidas:

(10) “1,5” (dentre eles, 7 alunos inverteram a operação e efetuaram $0,5 \times 3$)

(1) “0,0”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos acertou o cálculo, apesar de alguns preferirem efetuar o cálculo $0,5 \times 3$, talvez motivados pelo costume de colocar o maior número na posição de multiplicando.

h) $1,3 \times 9$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam corretamente a multiplicação; os alunos não devem apresentar problema no cálculo deste item.

Resposta obtidas:

(7) “11,7”

(1) “1,17”

(1) “9,0”

(1) “9,3”

(1) “3,7”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: diferente do previsto, os alunos apresentaram alguma dificuldade neste item, talvez o problema esteja nas transformações entre as ordens.

i) $1,3 \times 7,2$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a multiplicação de decimais ajustando as casas decimais na resposta.

Respostas obtidas:

(7) “9,36”

(2) “7,6”

(1) “9,316”

(1) “723,6”

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 7 alunos conseguiram efetuar o cálculo; 2 alunos parecem ter multiplicado décimos por décimos e unidades por unidades, chegando ao resultado 7,6.

j) $2,2 \times 101$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a multiplicação de decimais ajustando as casas decimais na resposta; o problema pode aparecer no 0 do multiplicador na casa decimal.

Respostas obtidas:

(3) “222,2” (2 deles inverteram os fatores e efetuaram $101 \times 2,2$)

(1) “22,22”

(1) “2220,2”

(1) “2,222”

(1) “2,2”

(1) “2,02”

(1) “102,0”

(1) “66”

(3) não resolveram

Análise das respostas obtidas: os alunos apresentaram grande dificuldade em efetuar a multiplicação deste item, apenas 3 alunos o fizeram de forma correta.

k) $7 \times 4,13$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a multiplicação de decimais ajustando as casas decimais na resposta.

Respostas obtidas:

(8) “28,91” (todos inverteram e efetuaram $4,13 \times 7$)

(1) “4,30”

(1) “22,13”

(1) “28,00” (multiplicaram centésimo por centésimo, décimo por décimo e unidade por unidade)

(2) não resolveram

Análise das respostas obtidas: alguns alunos tiveram dificuldade em resolver esta operação; 8 alunos chegaram ao resultado correto invertendo os fatores para encontrar o produto.

I) $18,24 \times 1,2$

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam a multiplicação de decimais ajustando as casas decimais na resposta.

Respostas obtidas:

(7) “21,888”

(3) “18,44”

(3) não resolveram

Análise das respostas obtidas: apenas 7 alunos conseguiram resolver de forma correta este item; 3 alunos alinharam os números respeitando as ordens como se faz em uma adição e parecem ter multiplicado décimo por décimo e unidade por unidade, chegando ao resultado 18,44.

6) Represente os seguintes números racionais na reta numerada:

7,1 $7\frac{1}{2}$ 7,07 $\frac{50}{7}$ 7,05 7,50 6,99 6,9 $\frac{73}{10}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos representam os números racionais escritos na forma de fração e de números decimais na reta numerada.

Respostas obtidas:

7,1 - (4) no 7,1 (1) no 7,4 (1) entre 7 e 7,1 (7) não representaram

$7\frac{1}{2}$ - (1) no 7,1 (1) entre 6,9 e 7 (11) não representaram

7,07 - (1) entre 7 e 7,1 (1) no 7,3 (2) no 7,7 (9) não representaram

$\frac{50}{7}$ - (1) no 7,5 (12) não representaram

7,05 - (1) entre 7 e 7,1 (1) no 7,2 (1) no 7,5 (10) não representaram

7,50 - (1) no 7,5 (1) no 7,1 (1) no 7,5 (10) não representaram

6,99 - (2) no 6,9 (1) no 7,5 (10) não representaram

6,9 - (1) no 6,9 (2) no 6,8 (1) o 7,4 (9) não representaram

$\frac{73}{10}$ - (1) no 7,6 (12) não representaram

Análise das respostas obtidas: as respostas obtidas nesta questão nos dão indícios para afirmar que os alunos não sabem representar os números racionais na reta numerada; pode ser que a dificuldade desta questão está no fato dos alunos não reconhecerem a fração como um número, ou seja, não terem construído a idéia de fração como uma divisão entre inteiros.

7) Escreva um número racional entre 0 e 0,2?

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem encontrar um número entre 0 e 0,2; provavelmente aparecerá como resposta o número 0,1, apesar de existir infinitas respostas.

Respostas obtidas:

(9) “0,1” (1) “1” (1) “0” (1) não respondeu (1) não consigo

Análise das respostas obtidas: como previsto, a maioria dos alunos escreveu o 0,1 como um número racional entre 0 e 0,2.

- 8) Você consegue escrever um número racional maior que 3,11 e menor 3,12.

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem encontrar um número entre 3,11 e 3,12; provavelmente os alunos terão problema em encontrar este número, já que pode ser que os alunos acreditem que o 3,12 aparece imediatamente depois de 3,11.

Respostas obtidas:

(1) “não existe” (10) assinalaram a frase “não consigo”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: nenhum aluno conseguiu encontrar números que satisfizessem a condição do enunciado; essas respostas obtidas talvez nos permitam afirmar que os alunos acreditam que o sucessor de 3,11 é o 3,12 e, por isso, não é possível encontrar um valor entre eles.

- 9) Dado o número 1,5, qual é o próximo?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o 1,6 como sucessor de 1,5; possivelmente o número 1,6 será o valor que aparecerá com maior frequência; dificilmente algum aluno reconhecerá que é impossível determinar o número que vem imediatamente após 1,5.

Respostas obtidas:

(8) “1,6” (1) “1,9” (1) “3” (1) “9” (2) não responderam

Análise das respostas obtidas: os alunos reconheceram o 1,6 como sendo o próximo número depois de 1,5; outras respostas foram dadas sem maiores justificativas; este

resultado nos permite afirmar que talvez, os alunos transfiram a idéia de sucessor de um número do conjunto dos naturais ao conjunto dos racionais.

10) Associe os problemas às seguintes situações:

a) Carmem quer distribuir igualmente 40 bolachas em 2 potes que possui. Quantas bolachas ficarão em cada pote?	() A divisão foi exata e foi possível dar apenas uma quantidade inteira
b) Tereza ganhou 5 tabletes de chocolate e dividiu-o igualmente entre si e seus 3 primos. Quanto cada um recebeu?	() A divisão não foi exata e o resto não pode ser subdividido
c) A professora quer organizar a classe em grupos de 4 alunos para fazer um trabalho. Somos 26 alunos. Quantos grupos serão formados?	() A divisão não foi exata, mas deu pra ser resolvida porque o resto pode ser subdividido

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem que algumas situações podem ser resolvidas devido a possibilidade de subdividir o todo e outras não, pois o todo é discreto e não pode ser dividido; possivelmente os alunos terão dificuldade neste item.

Respostas obtidas:

(6) “ $a - c - b$ ”

(3) “ $a - b - c$ ”

(1) “ $b - a - c$ ”

(1) assinalou “x” nas respostas

(2) assinalaram “não entendi o que os problemas quiseram dizer”

Análise das respostas obtidas: talvez o enunciado desta questão e os termos sobre a divisão tenham dificultado sua resolução; apenas 6 alunos associaram as situações corretamente.

11) Preencha os espaços em branco com as palavras SEMPRE, NUNCA ou ÀS VEZES.

Objetivo da questão: verificar se os alunos dão significados às regras dos algoritmos usados para realizar operações com frações.

a) Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes _____ é necessário usar o conceito de frações equivalentes e calcular o m.m.c.

Respostas obtidas:

(9) “sempre” (3) “às vezes” (1) “nunca”

b) O denominador de uma fração _____ é igual a zero.

Respostas obtidas:

(7) “nunca” (4) “às vezes” (2) “sempre”

c) O numerador de uma fração _____ é maior que o denominador.

Respostas obtidas:

(5) “às vezes” (6) “nunca” (1) “sempre” (1) “mais”

d) Uma fração _____ representa um número natural.

Respostas obtidas:

(7) “às vezes” (3) “sempre” (3) “nunca”

e) Numa adição de frações, o total é _____ maior que 1.

Respostas obtidas:

(3) “às vezes” (9) “sempre” (1) “nunca”

Análise das respostas obtidas: os resultados obtidos nesta questão podem nos mostrar que nem sempre os alunos dão significado aos passos dados nos algoritmos de operações entre frações; esse resultado pode ser reflexo do ensino de algoritmos sem apoio à concepção das operações com frações.

12) Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

(A) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$	(B) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$	(C) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$	(D) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$
$= 0,5 + 0,4$	$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$	$= \frac{3}{7}$	$= \frac{5+4}{10}$
$= 0,9$	$= \frac{9}{10}$		$= \frac{9}{10}$

Analise cada uma dessas formas e verifique se os alunos acertaram ou não. Justifique:

Objetivo da questão: verificar se os alunos percebem que existe mais de uma forma de resolver uma expressão com números racionais, que é possível efetuar as operações lidando com números fracionários ou com números decimais, ou seja, que as escritas são equivalentes; pode ser que o fato dos alunos estarem habituados a exercícios com respostas únicas influencie no resultado desta questão.

Respostas obtidas:

(5) indicaram que a letra c) está errada

Justificativas: “Só a (c) que está errada porque ele não fez o m.m.c., ele só somou”

“A conta c está incorreta, pois os alunos somaram denominador com denominador e numerador com numerador”

“c está porque ele somou”

“O A, B e o D acertaram, mas o C não porque 10 só divide 5 e 2”

“Não porque o C ele somou ao invés de dividir”

(1) indicaram que as letras b) e d) estão incorretas sem maiores justificativas

(1) “Não consigo”

(3) “Não entendi”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 5 alunos conseguiram analisar as resoluções e identificar apenas erro na letra c); esta questão pode nos mostrar que os alunos não se sentem à vontade em lidar com números racionais fracionários e decimais ao mesmo tempo além de evidenciar uma possível dificuldade em analisar e validar resoluções de exercícios.

ANEXO 15 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS INTEIROS

Total de alunos que responderam ao questionário: 23 alunos

Represente na reta numerada todos os números inteiros entre -8 e 8.

Objetivo da representação: verificar se os alunos reconhecem o significado do 0 posicional; pode ser que alguns alunos representem os números na sequência -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Resultado obtido:

(23) “-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8”

Análise do resultado obtido: todos os alunos representaram o intervalo $[-8,9]$ de forma correta.

Utilizando a reta numerada acima, responda às questões de número 1 e 2:

QUESTÃO 1: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

1) Qual número é maior?

a) 5 ou 0?

f) -4 ou 0?

g) -5 ou 5?

h) 3 ou -7?

Objetivo da questão: verificar se os alunos se atêm apenas ao valor absoluto do número, ou seja, ao algarismo, ao comparar os inteiros; além disso, pretende-se verificar se os alunos percebem, com a ajuda da reta numerada, que ao comparar dois números, o maior sempre será o que está mais à direita na reta numerada.

Resultados obtidos:

a) 5 ou 0?

(22) “5” (1) “0”

b) -4 ou 0?

(0) “22” (1) “-4”

c) -5 ou 5?

(20) “5” (1) “-5” (2) “igual”

d) 3 ou -7?

(20) “3” (3) “-7”

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos não teve problema em identificar o maior número entre pares que apareceram na reta numerada; no item d) podemos perceber que, talvez, 3 alunos se ativeram apenas ao algarismo ao comparar os números 3 e -7.

QUESTÃO 2: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

2) Quantos números inteiros existem entre:

g) 1 e 8

h) 4 e 0

i) -2 e 0

j) -5 e -7

k) -3 e 1

l) 8 e -8

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem, com a ajuda da reta numerada, determinar quantos números existem em um intervalo.

Resultados obtidos:

a) 1 e 8?

(13) “6” (7) “7” (3) “8”

b) 4 e 0?

(15) “3” (6) “4” (1) “0” (1) “2”

c) -2 e 0?

(16) “1” (4) “2” (1) “3” (2) não responderam

d) -5 e -7?

(14) “1” (8) “2” (1) não respondeu

e) -3 e 1?

(14) “3” (5) “4” (1) “2”

(1) “5” (1) “9” (1) “0”

f) 8 e -8?

(15) “15” (4) “16” (1) “6”

(1) “8” (1) “14” (1) “9”

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos conseguiu determinar a quantidade de números inteiros em um intervalo dado; podemos perceber que um número considerável de alunos registrou a diferença entre os números de cada item.

QUESTÃO 3: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

3) Com base numa reta numerada, responda as questões a seguir:

e) 5 ou 20? Qual deles está mais distante do ponto zero?

f) -4 ou -8? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

g) -20 ou 13? Qual deles está mais distante do ponto zero?

h) -7 ou $+7$? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

Objetivo da questão: verificar se os alunos possuem intuitivamente a idéia de módulo, sem tratar o conceito formalmente; esta é uma questão que pode introduzir a idéia de oposto de um número; além disso, pretende-se verificar se os alunos reconhecem o significado do zero posicional ao estabelecê-lo como referência.

Resultados obtidos:

a) 5 ou 20? Qual deles está mais distante do ponto zero?

(18) “20” (4) “5” (1) não respondeu

b) -4 ou 8? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

(18) “ -4 ” (4) “8” (1) não respondeu

c) -20 ou 13? Qual deles está mais distante do ponto zero?

(19) “ -20 ” (3) “13” (1) não respondeu

d) -7 ou $+7$? Qual deles está mais próximo do ponto zero?

(13) ambos estão à mesma distância

Algumas respostas obtidas: “iguais”, “os dois”, “estão próximos igualmente”, “tanto faz”, “ambos estão iguais”, “os dois estão numa mesma distância”

(2) “ -7 ” (4) “ $+7$ ” (1) não respondeu

Análise do resultado obtido: grande parte dos alunos não apresentou dificuldade em resolver esta questão; apenas o item d) apresentou um resultado desfavorável, em que apenas 13 alunos perceberam que o -7 e o $+7$ estão à mesma distância do referencial 0.

QUESTÃO 4: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

4) Escreva:

- g) O sucessor de 5
- h) O antecessor de 5
- i) O sucessor de -6
- j) O antecessor de -6
- k) O sucessor de 0
- l) O antecessor de 0

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem determinar sucessores e antecessores de números inteiros; é possível que apareça o -7 como sucessor de -6 e o número -5 como antecessor de -6; além disso, alguns alunos podem dizer que não há antecessor de 0

Resultados obtidos:

- a) O sucessor de 5
(23) “6”
- b) O antecessor de 5?
(23) “4”
- c) O sucessor de -6?
(9) “-5” (13) “-7” (1) “5”
- d) O antecessor de -6?
(9) “-7” (13) “-5” (1) “7”
- e) O sucessor de 0?
(23) “1”
- f) O antecessor de 0?
(21) “-1” (2) “0”

Análise do resultado obtido: diferente do previsto, os alunos não tiveram problema em determinar o antecessor de 0; entretanto, a maioria dos alunos confundiu o antecessor e o sucessor de -6; talvez, pelo fato de no conjunto dos números naturais o sucessor apresentar sempre um algarismo maior, os alunos tenham confundido ao se ater apenas ao algarismo do número.

QUESTÃO 5: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

5) Complete com $>$, $<$ ou $=$.

- i) $0 \underline{\hspace{1cm}} 1$ j) $17 \underline{\hspace{1cm}} -17$ k) $-1 \underline{\hspace{1cm}} 20$ l) $-61 \underline{\hspace{1cm}} -14$
- m) $6 \underline{\hspace{1cm}} -3$ n) $-8 \underline{\hspace{1cm}} 0$ o) $+30 \underline{\hspace{1cm}} 30$ p) $-26 \underline{\hspace{1cm}} -95$

Objetivo da questão: verificar se os alunos usam a estratégia da questão 2 e conseguem generalizá-la ao comparar números inteiros com valores absolutos maiores, sem o auxílio da reta numerada.

Resultados obtidos:

a) $0 \underline{\hspace{1cm}} 1$

(21) “ $<$ ” (2) “ $>$ ”

b) $17 \underline{\hspace{1cm}} -17$

(17) “ $>$ ” (2) “ $<$ ” (4) “ $=$ ”

c) $-1 \underline{\hspace{1cm}} 20$

(18) “ $<$ ” (5) “ $>$ ”

d) $-61 \underline{\hspace{1cm}} -14$

(21) “ $<$ ” (2) “ $>$ ”

e) $6 \underline{\hspace{1cm}} -3$

(19) “>” (4) “<”

f) $-8 \underline{\hspace{1cm}} 0$

(18) “<” (5) “>”

g) $+30 \underline{\hspace{1cm}} 30$

(21) “=” (2) “>” (0) “<”

h) $-26 \underline{\hspace{1cm}} -95$

(20) “>” (3) “<”

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos realizou a comparação entre números inteiros de forma correta; os itens que apresentaram menor índice de acerto foram a comparação entre 17 e -17 e entre -8 e 0; de forma geral, podemos afirmar que os alunos que responderam o questionário sabem comparar números inteiros.

QUESTÃO 6: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

6) Veja como Joana respondeu à seguinte questão na prova:

Qual é o menor número inteiro que existe?

O menor número inteiro é o 0 porque não existe nenhum número antes dele.

A resposta de Joana está correta? Por que?

Objetivo da questão: verificar se os alunos estão familiarizados com os números inteiros negativos ao estabelecer que o 0 não é o menor número inteiro que existe; além disso pode-se verificar se os alunos percebem que não é possível determinar o menor número inteiro.

Resultados obtidos:

(21) Não, Joana está errada

Justificativas: (11) se apoiaram na existência dos números negativos

“Não. Porque existem os números negativos”

“Não, pois tem mais números antes do zero (-1, -2, -3, -4, ...)”

“Não, porque existe número antes do zero, os negativos”

“Não, porque tem -1, -2, ...”

“Está errado porque depois do 0 existem os números negativos”

“Não, porque o zero é maior que qualquer número negativo e menor que o número positivo”

(10) se apoiaram na idéia de que não é possível encontrar o menor número

“Não. Porque não existe menor número inteiro”

“Não, pois os números são infinitos”

“Não, os números nunca acabam, são infinitos”

“Não, pois os números inteiros nunca acabam por isso não existe menor número inteiro”

“Não, porque os números são infinitos antes e depois do zero”

(2) Sim, Joana está correta

Justificativas: “Sim, pois não existe nenhum número inteiro antes do zero”

“Sim. O menor número inteiro é o 0, porque todo o número multiplicado por 0 dá 0.”

Análise do resultado obtido: os alunos mostraram estar bastante familiarizados com os números negativos e levantaram hipóteses coerentes para justificar suas respostas; apenas um aluno mostrou reconhecer o 0 como o menor número inteiro; outro aluno não justificou de forma coerente a sua resposta.

QUESTÃO 7: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

7) Na mesma prova, Joana desenhou a seguinte reta numerada:

A professora passou ao seu lado e disse que ela estava fazendo errado. Como você ajudaria Joana a resolver essa questão?

Objetivo da questão: verificar se o aluno conhece o conceito dos números inteiros e, principalmente, se dão pistas se conhecem a necessidade do surgimento dos números negativos.

Resultados obtidos:

(21) Respostas coerentes

Algumas respostas: “Os números negativos decrescentes (-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1)”

“A reta certa é essa (-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1)”

“Antes do zero vem o -1, -2, -3, -4, -5, -6, .. Sempre antes do zero vem o -1 e assim vai seguindo”

“Está errado! Pois depois do 0 vem o -1, -2, -3,...”

“Que depois do zero tem o 1 ou -1 e assim por diante”

“Que os números negativos estão ao contrário”

“O -1 é o maior número negativo, quanto mais perto da reta maior ele é, o contrário dos positivos”

“Mandaria ela inverter, colocar o -1 no lugar do -8, o -2 no lugar do -7, o -3 no lugar do -6, o -4 no lugar do -5; e os números que ela mudar (-8, -7, -6, -5, -4,...)

“Os números negativos começam depois do zero”

“Mudaria a sequência dos números negativos”

“Os números anteriores ao zero estão em ordem crescente (1, 2, ...) para a esquerda, embora estejam diminuindo”

“Que a ordem dos números negativos estava errado, a ordem é de -8 ao -1”

“Mudar os negativos e colocar assim: -8, -7 e assim vai até chegar no -1 pois ele vai estar perto do zero ou que ela olhasse na reta e visse o zero aí ela iria ver quem vem depois do zero, aí ela iria saber”

“Os números negativos começam pelo outro lado. Ex: -1, -2, -3, ... e assim por diante”

“Que para realizar o exercício ela seguisse do zero a mesma ordem numérica (1, 2, 3, 4, ...)”

“Quando o número é negativo o menor é sempre o maior e o maior é menor. O número negativo que vem antes do zero é o -1 e não o -8”

“Antes do 0 é sempre -1, -2, -3, ... e depois do 0 1, 2, 3”

“Os números negativos decrescentes (-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2,

-1)”

(10) se apoiaram na idéia de que não é possível encontrar o menor número

(2) Respostas sem coerência

Respostas: “Falando que os números não têm fim”

“Que o antecessor menor o sucessor de 0 é -1 e 1”

Análise do resultado obtido: apesar dos alunos saberem “consertar” a reta, fica claro que a maioria deles não sabe efetivamente porque antes do 0 vem o -1, parece não reconhecer o “movimento” de voltar 1 unidade, voltar 2 unidades e assim sucessivamente; os alunos já possuem a imagem visual da reta, mas apenas alguns mostraram ter construído a idéia de número negativo e seu significado.

QUESTÃO 8: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

8) Quais são os próximos números das seqüências?

c) 12, 9, 6, _____, _____, _____, _____

d) -14, -10, -6, _____, _____, _____, _____

Objetivo da questão: esta questão de seqüência completam a intenção da questão anterior ao verificar se os alunos se apropriaram da noção de número negativo.

Resultados obtidos:

a) 12, 9, 6, ____, ____, ____, ____

(22) 3, 0, -3, 6

(1) 3, 0, -7, -4

b) -14, -10, -6, ____, ____, ____, ____

(13) -2, 2, 6, 10

(2) -2, -2, -6, -10 (não chegam aos números positivos)

(3) -2, 0, 6, 10 (os alunos parecem precisar “parar” no zero)

(1) -3, 0, 3, 6 (somou 3 a cada termo)

(1) -2, 3, 7, 11 (somou 4 a cada termo mas pode não ter contado o zero)

(1) -2, 8, 4, 0

(2) não completaram a seqüência

Análise das respostas obtidas: os alunos não mostraram dificuldade em completar a primeira seqüência; entretanto, apenas 13 alunos conseguiram completar a seqüência crescente de razão 4 com termo inicial -14.

QUESTÃO 9: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

9) Responda (V) para verdadeiro, (F) para falso ou (X) se não souber decidir.

() Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo

() O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo

() Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero

() Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem as estratégias de comparação de números inteiros já realizada em outras questões.

Resultados obtidos:

() Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo.

(23) “V”

() O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo.

(18) “V” (5) “F”

() Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero.

(23) “V”

() Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero.

(21) “F” (2) “V”

Análise das respostas obtidas: os alunos mostraram conhecer a estratégia de comparação de números inteiros, eles mostraram generalizar as comparações realizadas em questões anteriores.

QUESTÃO 10: NÚMEROS INTEIROS – 5ª SÉRIE OU 6º ANO

10) Resolva as seguintes operações

q) $(+5) + (+3) =$ r) $(+5) + (-3) =$ s) $(-5) + (+3) =$ t) $(-5) + (-3) =$

u) $(-7) - (+4) =$ v) $(-7) - (-4) =$ w) $(+7) - (+4) =$ x) $(+7) - (-4) =$

y) $(-3) \times (+5) =$ z) $(-3) \times (-2) =$ aa) $(+4) \times (+1) =$ bb) $(+2) \times (-3) =$

cc) $(-12) \div$ dd) $(+6) \div (-3) =$ ee) $(-9) \div (-3) =$ ff) $(+4) \div (+2) =$
 $(+4) =$

Objetivo da questão: verificar, a partir de operações consideradas simples, se os alunos conseguem realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões no universo dos números inteiros; pode ser que alguns alunos transfiram a regra de sinais da multiplicação e divisão (sinais iguais dá mais e sinais diferentes dá menos) às operações de adição e subtração.

Resultados obtidos:

a) $(+5) + (+3)$

(22) “8”

(1) “2” (podem ter efetuado $5-3$)

b) $(+5) + (-3)$

(19) “2”

(2) “-8” (podem ter utilizado a regra de sinais)

(2) não efetuaram o cálculo

c) $(-5) + (+3)$

(18) “-2”

(5) “-8” (podem ter utilizado a regra de sinais)

d) $(-5) + (-3)$

(16) “-8”

(4) “8” (podem ter utilizado a regra de sinais)

(1) “-2” (pode ter efetuado $-5 + 3$)

(1) “2” (pode ter efetuado $5 - 3$)

(1) não efetuou o cálculo

e) $(-7) - (+4)$

(11) “-3”

(9) “3” (podem ter efetuado $-7 + 4$)

(3) “11” (podem ter somado e utilizado a regra de sinais)

(1) “3” (pode ter efetuado $7 - 4$)

(1) não efetuou o cálculo

f) $(-7) - (-4)$

(11) “-3”

(4) “3” (podem ter efetuado $7 - 4$)

(6) “-11” (podem ter somado e utilizado a regra de sinais)

(2) não efetuaram o cálculo

g) $(+7) - (+4)$

(13) “3”

(2) “-3” (pode ter efetuado $-7 + 4$)

(6) “11” (podem ter efetuado $(7 + 4)$)

(2) não efetuaram o cálculo

h) $(+7) - (-4)$

(12) “11”

(6) “3” (pode ter somado e utilizado a regra de sinais)

(3) “-3”

(2) não efetuaram o cálculo

i) $(-3) \times (+5)$

(20) “-15”

(1) “8” (pode ter efetuado $3+5$)

(2) não efetuaram o cálculo

j) $(-3) \times (-2)$

(20) “6”

(1) “1” (pode ter efetuado $3 - 2$)

(2) não efetuaram o cálculo

k) $(+4) \times (+1)$

(20) “4”

(1) “3” (pode ter efetuado $3 - 2$)

(2) não efetuaram o cálculo

l) $(+2) \times (-3)$

(20) “-6”

(1) “5” (pode ter efetuado $2 + 3$)

(2) não efetuaram o cálculo

m) $(-12) \div (+4)$

(18) “-3”

(1) “16” (podem ter efetuado $12 + 4$)

(1) “3”

(3) não efetuaram o cálculo

n) $(+6) \div (-3)$

(15) “-2”

(2) “3” (podem ter efetuado $6 - 3$)

(1) “2”

(1) “-3”

(1) “-18” (podem ter efetuado $(+6) \times (-3)$)

(3) não efetuaram o cálculo

o) $(-9) \div (-3)$

(15) “3”

(1) “6” (podem ter efetuado $9 - 3$)

(3) “-3”

(1) “27” (podem ter efetuado $(-9) \times (-3)$)

(3) não efetuaram o cálculo

p) $(+4) \div (+2)$

(20) “2”

(3) não efetuaram o cálculo

Análise das respostas obtidas: podemos observar que o índice de acertos nas multiplicações e divisões foi maior do que nas adições e subtrações; isso pode ter ocorrido pela interiorização da regra de sinais usada na multiplicação e divisão que alguns alunos transferem para a adição e para a subtração; pode ser que os alunos não conheçam o significado das operações no universo dos números inteiros.

ANEXO 16 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS

Total de alunos que responderam ao questionário: 20 alunos

QUESTÃO 1: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

1) Encontre os seguintes valores e em seguida represente-os na reta numerada:

g) $\sqrt{10}$

h) $\sqrt{16}$

i) $\sqrt{20}$

j) $\sqrt{25}$

k) $\sqrt{30}$

l) $\sqrt{40}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos encontram valores aproximados ou exatos para números indicados por radicais; os números estão em ordem crescente e caso o aluno perceba essa regularidade, não deve apresentar dificuldade em encontrá-los e representá-los na reta numérica.

Respostas obtidas:

a) $\sqrt{10}$

(2) “3,16...”

(6) “3,16”

(7) “3,1”

(2) “5”

(3) não responderam

b) $\sqrt{16}$

(18) “4”

(1) “8”

(1) não respondeu

c) $\sqrt{20}$

(2) “4,47...”

(4) “4,47”

(8) “4,4”

(1) “4,5”

(1) “2”

(1) “10”

(3) não responderam

d) $\sqrt{25}$

(18) “5”

(2) não responderam

e) $\sqrt{30}$

(2) “5,47...”

(4) “5,47”

(9) “5,4”

(2) “6”

(3) não responderam

f) $\sqrt{40}$

(2) “6,32...”

(4) “6,32”

(9) “6,3”

(1) “7”

(1) “3,2”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos não demonstraram dificuldade em encontrar um número próximo aos valores indicados; cabe ressaltar, entretanto, que não há cálculos na folha e que muitos deles não arredondam as casa, apenas “cortam” ou truncam as casas decimais; apenas 2 alunos mostraram reconhecer que os números irracionais que apareceram não podiam ser representados corretamente e ao indicar usaram a notação da reticência para indicar, talvez, que o número continuava; a representação na reta numérica não foi analisada, pois na impressão ocorreu uma falta de alinhamento entre a reta e os números, o que prejudicou a interpretação das respostas.

QUESTÃO 2: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

- 2) As aulas de Matemática da 7ª série trouxeram uma novidade, os números irracionais. Explique, com suas palavras, o que é um número irracional.

Objetivo da questão: verificar a concepção que os alunos possuem sobre número irracional; pretende-se verificar se os alunos sabem definir um número irracional como um número decimal com dízima não periódica ou como um número indicado por radiciação não exata.

Respostas obtidas:

(11) definiram os números racionais

Algumas respostas obtidas:

“O mesmo que uma divisão como ex.: $-\frac{3}{5}$ ou $-\frac{5}{12}$ ou fracionário”

“Números com fração”

“São números fracionários”

“São números representados como frações”

“Números que contém frações”

“Números racionais são os decimais”

“Números irracionais são números fracionários, ou seja, números quebrados”

(9) não responderam

Análise das respostas obtidas: os alunos que responderam esse questionário parecem ter confundido os números irracionais com os racionais; dessa forma, não é possível fazer uma análise mais complexa dos dados desta questão; talvez possamos afirmar que os alunos não sabem definir um número irracional.

QUESTÃO 3: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

3) Quais destes números são irracionais?

() 3,2121...

() $-\frac{3}{5}$

() $-\sqrt{6}$

() 2,15

() 1,310310031000...

() $\sqrt{7}$

() $\sqrt{2}$

() π

Objetivo da questão: verificar se os alunos identificam os números irracionais dentre um grupo de números

Respostas obtidas:

(6) 3,2121... (9) $-\frac{3}{5}$ (1) $-\sqrt{6}$ (3) 2,15
 (4) 1,310310031000... (2) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) π

(8) não assinalaram nenhum número

Análise das respostas obtidas: o resultado desta questão nos permite afirmar que os alunos confundem os números irracionais com os racionais; mais uma vez podemos inferir que talvez os alunos não conheçam as características de um número irracional.

QUESTÃO 4: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

4) Complete com = ou $\neq$.

Objetivo da questão: verificar se os alunos aplicam algumas características das operações com números racionais às operações com números irracionais.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ _____ $\sqrt{5}$

Característica do item: é comum que o aluno some os números dos radicais; possivelmente a maioria dos alunos dirá que existe a igualdade.

Respostas obtidas:

(2) “ $\neq$ ” (16) “=” (2) não responderam

Análise das repostas obtidas: como previsto, maioria dos alunos acredita que a igualdade deste item é válida; vale destacar que o aluno que escreveu no espaço o símbolo “ $\neq$ ” parece ter registrado no canto da folha valores aproximados para as raízes não exatas que aparecem no exercício: “3 $\rightarrow$ 1,7”; “2 $\rightarrow$ 1,4”; “5 $\rightarrow$ 2,2” e “6 $\rightarrow$ 2,4”.

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ _____ 5

Característica do item: se os alunos acreditarem que podem somar os valores dos radicais, chegarão ao valor $\sqrt{25}$ e, se realizarem o cálculo, dirão que existe a igualdade; entretanto, se o aluno substituir as raízes do primeiro termo a valores exatos, verificará que a igualdade não ocorre.

Respostas obtidas:

(12) “ $\neq$ ” (6) “ $=$ ” (2) não responderam

Análise das repostas obtidas: apenas 6 alunos reconheceram que não existe a igualdade neste item; 12 alunos podem ter interpretado o cálculo como descrito e validaram a igualdade.

c) $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ _____ $\sqrt{5}$

Característica do item: pode ser que os alunos efetuem a subtração entre os valores que aparecem nos radicais e que, por isso, reconheçam uma igualdade neste item.

Respostas obtidas:

(6) “ $\neq$ ” (12) “ $=$ ” (2) não responderam

Análise das repostas obtidas: mais uma vez os alunos deram evidências para que se conclua que eles acreditam que é possível fazer adição e subtração com os números que aparecem nos radicais.

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ _____ $\sqrt{6}$

Característica do item: a operação da multiplicação não costuma trazer problema aos alunos porque é possível operar com os números dos radicais.

Respostas obtidas:

(15) “ $=$ ” (4) “ $\neq$ ” (2) não responderam

Análise das repostas obtidas: a maioria dos alunos acertou este item; talvez aqui possamos afirmar que para o aluno sempre é possível realizar operações com os radicandos.

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$ _____ 6

Característica do item: este item não traz nenhum acréscimo à questão principalmente por um erro de digitação, o item deveria ser:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ _____ 6

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ _____ 3

Característica do item: além de tratar sobre a multiplicação entre radicais, este item trabalha a concepção da operação de radicais; possivelmente os alunos não terá dificuldade neste item.

Respostas obtidas:

(6) “=” (11) “≠” (3) não responderam

Análise das repostas obtidas: diferente do previsto, poucos alunos identificaram a igualdade deste item; pode ser que os alunos não validem uma igualdade entre termos que apresentem radicais e termos que não os apresentem.

g) $\sqrt{3^2}$ _____ 3

Característica do item: este item traz a concepção dos radicais; possivelmente os alunos não terão problema neste item, pois é comum que sejam submetidos a “cancelar” o quadrado com a raiz.

Respostas obtidas:

(9) “=” (8) “≠” (3) não responderam

Análise das repostas obtidas: a maioria dos alunos apresentou dificuldade em analisar esta relação; este resultado pode nos mostrar que os alunos não conhecem o significado de raiz quadrada de um número.

h) $\sqrt{10} - \sqrt{1}$ _____ 3

Característica do item: se os alunos acreditarem ser possível a subtração entre os números dos radicais, eles reconhecerão a igualdade neste item; possivelmente a maioria dos alunos o farão dessa maneira.

Respostas obtidas:

(11) “≠” (5) “=” (4) não responderam

Análise das repostas obtidas: apesar de grande parte dos alunos assinalarem que não existe a relação de igualdade neste item, não podemos concluir que eles sabem que não é possível subtrair os radicandos; talvez eles o tenham feito porque acreditam que números com radicais não podem “perder” esse símbolo.

i) $\sqrt{5^2 + 4^2}$ _____ $5 + 4$

Característica do item: pode ser que os alunos ampliem a estratégia de cortar a raiz com os radicais e encontrem uma falsa igualdade neste item.

Respostas obtidas:

(11) “≠” (3) “=” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: apesar de grande parte dos alunos assinalarem que não existe a relação de igualdade neste item, não podemos concluir que eles sabem que não é possível anular a raiz com os quadrados; talvez eles o tenham feito porque acreditam que números com radicais não podem “perder” esse símbolo.

j) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ _____ 2

Característica do item: este item pode ser considerado simples, os alunos não deverão ter dificuldade em encontrar 2 como resultado para o primeiro termo.

Respostas obtidas:

(7) “=” (6) “≠” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: o resultado obtido contraria a hipótese de que este é um cálculo simples; pode ser que os alunos tenham dificuldade em estabelecer uma igualdade entre termos que aparecem radicais e outros em que eles não apareçam.

k) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ _____ $\sqrt{6}$

Característica do item: o objetivo é verificar se os alunos somam os números dos radicais; possivelmente os alunos dirão que os termos são equivalentes.

Respostas obtidas:

(3) “≠” (11) “=” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: como previsto, a maioria dos alunos validou a igualdade; podemos dizer que os alunos parecem operar com os números da radiciação.

l) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ _____ 2

Característica do item: o objetivo deste item é verificar se os alunos somam os números que aparecem nos radicais e encontram como resposta da soma o número 2.

Respostas obtidas:

(8) “≠” (6) “=” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: os alunos se dividiram na resposta; não podemos afirmar que a maioria não opera com os radicais e por isso não validam a igualdade porque o

resultado de outros itens nos diz o contrário; pode ser que alguns alunos tenham dificuldade em comparar números que apresentam radiciação com números que não a apresentam.

m) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ _____ $2\sqrt{2}$

Característica do item: o objetivo deste item é verificar se os alunos conhecem a notação utilizada nas operações com radicais; pode ser que os alunos apresentem dificuldade em reconhecer a igualdade neste item.

Respostas obtidas:

(6) “=” (8) “≠” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: apenas 6 alunos reconheceram a notação utilizada para agrupar radicais iguais.

n) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ _____ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

Característica do item: o objetivo deste item é verificar se os alunos conseguem operar com radiciação de frações.

Respostas obtidas:

(6) “=” (8) “≠” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: apenas 6 alunos mostraram saber operar com números racionais em radicais.

o) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ _____ 0

Característica do item: este item traz um cálculo simples com radical; poderemos verificar se os alunos lidam com termos que envolvem raízes como números e percebem a igualdade neste item.

Respostas obtidas:

(11) “=” (3) “≠” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: grande parte dos alunos responderam este item corretamente.

p) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ——— $\frac{3}{2}$

Característica do item: verificar se os alunos sabem operar com radicais em frações

Respostas obtidas:

(7) “=” (7) “≠” (6) não responderam

Análise das repostas obtidas: apenas 6 alunos mostraram saber operar com números racionais em radicais.

Conclusão: os resultados apresentados nesta questão nos permitem afirmar que possivelmente os alunos efetuem a adição e subtração de radicandos assim como os fazem para a multiplicação e divisão; além disso, temos indícios para afirmar que talvez os alunos tenham dificuldade em estabelecer uma relação de equivalência entre termos que possuem radicais e termos que não os possuem.

QUESTÃO 5: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

5) Calcule o valor das seguintes expressões:

Objetivo da questão: verificar se os alunos efetuam simplificações de radicais e se sabem efetuar adições e subtrações com esses valores; este é um exercício que deve trazer problema aos alunos que costumam demonstrar bastante dificuldade em operar com números irracionais.

Resultados obtidos:

a) $\sqrt{9} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{1}$

(7) “7” (1) “6546” (12) não resolveram

b) $\sqrt[3]{27} + \sqrt{0} - \sqrt{1} + \sqrt{36}$

(6) “8” (1) “13” (1) “734” (12) não resolveram

c) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[5]{-32}$

(1) “-2” (3) “2” (1) “274” (15) não resolveram

d) $\sqrt{8} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32}$

(3) “1,4” (substituíram o valor de $\sqrt{2}$)

(1) “-11”

(1) “0,4”

(1) “2,8”

(1) “-5,6”

(14) não resolveram

e) $5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(3) “19,6” (substituíram o valor de $\sqrt{2}$)

(1) “15” (cancelou o $\sqrt{2}$ e efetuou $5 + 10$)

(1) “8,9”

(16) não resolveram

f) $-7\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

(1) “ $3\sqrt{3}$ ”

(1) “28,9” (substituiu o $\sqrt{3}$)

(1) “12”

(1) “31,6”

(1) “5,6” (substituiu o $\sqrt{3}$, mas se atrapalhou no cálculo)

(15) não resolveram

Análise dos resultados obtidos: com base nos resultados obtidos, podemos afirmar que os alunos não se sentem à vontade em operar com radicais; alguns alunos recorreram à substituição dos valores das raízes e encontraram respostas aproximadas às corretas; os dois primeiros itens trabalharam o conceito de raízes de alguns números e apresentou um índice considerável de imprecisões.

QUESTÃO 6: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

6) Calcule:

a) $(\sqrt{2})^2 =$ b) $(3\sqrt{2})^2 =$ c) $(2\sqrt{3})^2 =$ d) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} =$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam cálculos de potenciação e de multiplicação entre radicais.

Resultados obtidos:

a) $(\sqrt{2})^2$

(2) “2” (2) “ $\sqrt{4}$ ” (1) “2,8” (4) “4” (2) “1”

(9) não resolveram

b) $(3\sqrt{2})^2$

(1) “18” (2) “ $9\sqrt{4}$ ” (1) “8,4” (1) “5”

(1) “12” (1) “0,75” (13) não resolveram

c) $(2\sqrt{3})^2$

(2) “12” (2) “ $4\sqrt{9}$ ” (1) “6.9” (1) “5”

(14) não resolveram

d) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}$

(1) “17,34” (substituiu o $\sqrt{3}$ por 1,7)

(2) “ $6\sqrt{3}$ ” (1) “8.5” (1) “10” (1) “72” (efetuou $6 \cdot 9$)

(14) não resolveram

Análise dos resultados obtidos: os alunos demonstraram não saber operar com números irracionais.

QUESTÃO 7: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

7) Assinale o resultado mais próximo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

() 2,8 () 3,0 () 3,9 () 4,0

Objetivo da questão: verificar se os alunos aproximam os valores dos números irracionais para efetuar a adição em questão.

Resultados obtidos:

(4) 2,8 (2) 3,0 (4) 3,9 (4) 4,0

(8) não assinalaram nenhuma alternativa

Análise dos resultados obtidos: esta questão nos mostra indícios de que os alunos talvez não conheçam o significado dos números irracionais e não consigam aproximá-los a valores conhecidos.

QUESTÃO 8: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

8) O que é maior? 3 ou $2\sqrt{2}$? Justifique:

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam aproximação do valor do número irracional para decidir qual número é maior; pode ser que os alunos não tenham muita dificuldade em encontrar o maior número entre os pares dados.

Respostas obtidas:

(4) “3”

Algumas justificativas: “3 é maior que $2\sqrt{2}$ ”

“3. Porque $2\sqrt{2} = 2,8$ ”

“3, porque o 2 está na raiz”

(5) “ $2\sqrt{2}$ ”

Algumas justificativas: “ $2\sqrt{2}$ é maior pois o 2 está multiplicando o que está dentro da chave”

“O $2\sqrt{2}$ porque dá um valor maior que 3”

“O maior é o $2\sqrt{2}$, pois ele tem o número dois na frente, aumentando o valor da conta”

“O $2\sqrt{2}$, pois é preciso ter a raiz quadrada de 2 e depois somar por mais 2 e assim deu 3,4, maior que 3”

(4) Os dois números são iguais

(7) Não responderam

Análise das respostas obtidas: esta questão nos mostra indícios de que os alunos talvez não conheçam o significado dos números irracionais e não consigam aproximá-los a valores conhecidos.

QUESTÃO 9: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

- 9) Oswaldo estava estudando Matemática e viu a seguinte frase em uma página: “o π é um número irracional”. O que será que o livro quis dizer com isso?

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem definir número irracional como sendo um número decimal com dízimas não periódicas, característica do número π .

Respostas obtidas:

(2) “É 3,14”

(1) “Quer dizer que o resultado da conta não deu um número inteiro, deu um número fracionário”

(1) “Primeiro que a afirmação dele tá errado, isso não é número irracional”

(16) Não responderam

Análise das respostas obtidas: esta questão nos mostra mais uma vez que os alunos não conhecem o conceito de número irracional, não sabem defini-lo a partir das suas características.

QUESTÃO 10: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

10) Indique o número racional:

() $\sqrt{15}$

() $\sqrt{25}$

() $\sqrt{8}$

() $\sqrt{18}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem dentre os números com radicais, o número racional.

Resultado obtido:

(2) $\sqrt{25}$

(5) assinalaram mais de uma alternativa

(13) não assinalaram nenhum item

QUESTÃO 11: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

11) Represente os números abaixo na reta real:

$$A = -4$$

$$B = -2,5$$

$$C = 4,3$$

$$D = -\frac{7}{4}$$

$$E = \sqrt{2}$$

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem representar números reais na reta numérica.

Resultados obtidos:

$$A = -4$$

(5) no -4 (15) não representaram

$$B = -2,5$$

(4) entre -2 e -3 (1) entre -1 e -2 (15) não representaram

$$C = 4,3$$

(5) entre 4 e 5 (15) não representaram

$$D = -\frac{7}{4}$$

(1) entre -6 e -7 (1) entre -7 e -8 (1) entre 6 e 7 (17) não representaram

$$E = \sqrt{2}$$

(1) entre 1 e 2 (2) no 1 (1) no 2 (16) não representaram

Análise dos resultados obtidos: os alunos tiveram problema em representar os números reais em questão; mesmo os números inteiros e racionais foram representados por

poucos alunos; o número irracional $\sqrt{2}$ foi representado de forma correta por apenas 1 aluno.

QUESTÃO 12: NÚMEROS IRRACIONAIS – 7ª SÉRIE OU 8º ANO

12) Calcule, fazendo tentativas:

a) $\sqrt{196} =$ b) $\sqrt[3]{-343} =$ c) $\sqrt{0,64} =$ d) $\sqrt{\frac{36}{121}} =$

Objetivo da questão: verificar se os alunos calculam o valor de raízes quadradas e cúbicas de números reais.

Resultados obtidos:

a) $\sqrt{196}$

(2) “14”

(1) “148”

(17) não responderam

b) $\sqrt[3]{-343}$

(1) “18”

(19) não responderam

c) $\sqrt{0,64}$

(1) “0,8”

(1) “0,32”

(18) não responderam

d) $\sqrt{\frac{36}{121}}$

(1) “8”

(1) “ $\frac{1,6}{1,11}$ ”

(18) não responderam

Análise dos resultados obtidos: os alunos mostraram não saber calcular raízes quadradas e cúbicas de números reais.

ANEXO 17 – ANÁLISE COMPLETA DO QUESTIONÁRIO SOBRE NÚMEROS REAIS**QUESTÃO 1: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO**

- 1) Tomando como conjunto universo os números reais, complete com V (verdadeiro) ou F (falso):

() 2 é sucessor de 1

() 3,9 é antecessor de 4

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem algumas das propriedades dos números reais e, principalmente, se reconhecem que propriedades específicas dos subconjuntos dos inteiros não podem ser generalizadas ao conjunto dos reais, como a idéia de sucessor e antecessor de um número; possivelmente a maioria dos alunos classificará ambas as sentenças como verdadeiras por acreditar ser possível identificar um número que vem imediatamente antes ou depois de outro.

Resultados obtidos:

2 é sucessor de 1

(3) “F” (16) “V”

3,9 é antecessor de 4

(4) “F” (14) “V” (1) não respondeu

Análise dos resultados obtidos: a maioria dos alunos parece transferir a idéia de sucessor e antecessor do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números reais.

QUESTÃO 2: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

- 2) Dê dois exemplos de números que sejam:

- e) Naturais: _____
- f) Inteiros, mas que não seja natural: _____
- g) Racionais, mas que não seja inteiro: _____
- h) Reais, mas que não seja racional: _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos sabem dar exemplos de elementos dos subconjuntos dos números reais; possivelmente os alunos não terão dificuldade em representar elementos dos conjuntos solicitados nas letras a), b) e c); entretanto, pode ser que os alunos não consigam dar exemplos de números reais que não sejam racionais, ou sejam, irracionais.

Respostas obtidas:

- a) Naturais: _____

(19) escreveram apenas números naturais

Números escritos:

(1) “0”	(11) “1”	(9) “2”	(8) “3”	(4) “4”
(1) “5”	(1) “6”	(3) “8”	(1) “9”	(2) “10”

- b) Inteiros, mas que não seja natural: _____

(14) escreveram apenas números inteiros

Números escritos:

(3) “-30”	(5) “-20”	(5) “-10”	(1) “-9”	(2) “-8”	(2) “-7”
(1) “-6”	(2) “-5”	(2) “-4”	(2) “-3”	(3) “-2”	(4) “-1”

(3) escreveram apenas números naturais

Números escritos

(3) “1” (3) “2”

(1) não respondeu

c) Racionais, mas que não seja inteiro: _____

(2) escreveu números inteiros

Números escritos:

(1) “2” (1) “3”

(2) escreveram números racionais fracionários

Números escritos

(1) “ $\frac{1}{3}$ ” (1) “ $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ” (1) “ $\frac{1}{2}$ ” (1) “ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ”

(8) escreveram números racionais decimais

Números escritos:

(1) “-2,3” (1) “0,1” (1) “0,2” (3) “0,5” (1) “0,7”

(1) “1,5” (2) “1,9” (2) “2,3” (2) “2,9” (2) “3,9”

(7) escreveram números irracionais

Números escritos:

(3) “ $\sqrt{2}$ ” (1) “ $\sqrt{\frac{10}{5}}$ ” (3) “ $\sqrt{3}$ ” (1) “ $\sqrt{5}$ ” (1) “ $2\sqrt{2}$ ”

(2) “ $\sqrt{7}$ ” (1) “ $\sqrt{10}$ ” (1) “ $3,2\sqrt{2}$ ” (1) “ $5,6\sqrt{2}$ ”

d) Reais, mas que não seja racional: _____

(11) escreveram números inteiros

Números escritos:

(1) “-6” (1) “-3” (1) “-2” (3) “-1” (4) “1”

(1) “2” (1) “5” (1) “6” (1) “7” (1) “8”

(2) “9” (2) “10” (1) “15” (2) “20”

(4) escreveram números racionais escritos na forma decimal

Números escritos:

(2) “3,2” (2) “3,8” (3) “4,9” (1) “7,8”

(3) escreveram dízimas periódicas

Números escritos:

(1) “0,2333...” (1) “0,5656...” (1) “0,5999...”

(1) “1,5555...” (1) “8,9999...” (1) “9,11111...”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: o resultado desta questão nos mostra que os alunos conhecem os números naturais e sabem exemplificá-los; os números inteiros e não naturais, ou seja, os números negativos, foram exemplificados por 15 alunos; apenas 10 alunos souberam exemplificar números racionais que não fossem inteiros, 2 alunos escreveram números inteiros neste item e 7 alunos deram como exemplos números irracionais, o que pode demonstrar que os alunos confundem o termo “números racionais” com “números irracionais”; como exemplo de números reais que não fossem racionais, 11 alunos escreveram números inteiros, 4 escreveram números decimais e 3 representaram dízimas periódicas; podemos dizer, a partir dos resultados obtidos, que os alunos não conhecem a definição de número irracional e não o reconhecem como números reais que não são racionais; além disso, pode ser que os alunos confundam os números racionais com os irracionais.

QUESTÃO 3: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

3) Quantos números reais existem entre 7 e 10?

Objetivo da questão: verificar se os alunos conhecem o fato de que entre dois números reais distintos existem infinitos números reais; é possível que os alunos respondam que existem dois números reais nesse intervalo ao considerarem os números 8 e 9, ou ainda pensem em alguns números decimais e o incluam na contagem; imagina-se que possa ser difícil para o aluno perceber que não é possível determinar quantos números reais existem em um intervalo dado.

Respostas obtidas:

(1) “2”

(17) “ ∞ ” ou “é impossível mostrar todos os números” ou “é impossível contar todas as casas” ou “infinito”

(1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: as respostas obtidas nesta questão surpreenderam; a maioria dos alunos mostrou perceber que é impossível determinar quantos números reais existem em um intervalo dado; o símbolo do infinito apareceu com frequência da resposta, apesar de na maioria das vezes aparecer uma forma mais parecida com α .

QUESTÃO 4: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

4) Efetue os cálculos

e) $(-4) + (-0,5)$

f) $1,75 - 2$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$

h) $1 : \left(-\frac{5}{2}\right)$

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam as quatro operações básicas com números reais racionais.

a) $(-4) + (-0,5)$

Característica do item: este cálculo é uma soma de dívidas; pode ser que alguns alunos se atrapalhem ao tentar usar a regra de sinais da multiplicação e divisão entre inteiros, ou seja, os alunos podem somar os valores absolutos e adéqua o resultado com a regra “menos com menos dá mais”, chegando ao resultado “+4,5”.

Resultados obtidos:

(9) “-4,5” (8) “+ 4,5” (2) “-4,55”

Análise dos resultados obtidos: 8 alunos talvez tenham usado a regra de sinais da multiplicação para encontrar como resposta o +4,5; apenas 9 alunos encontrou a resposta correta.

b) $1,75 - 2$

Característica do item: este cálculo traz como resultado um número racional negativo escrito em forma decimal; pode ser que os alunos não coloquem o sinal de negativo no número por não estarem habituados a números decimais negativos; talvez alguns alunos possam se atrapalhar no momento de montar a conta por conta do alinhamento dos algarismos.

Resultados obtidos:

(14) “-0,25” (4) “0,25” (1) “0,28”

Análise dos resultados obtidos: a maioria dos alunos calculou corretamente o valor da operação deste item; 4 alunos encontraram como resposta o valor 0,25.

c) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$

Característica do item: este item traz a multiplicação de frações; provavelmente os alunos não terão problema em efetuar este cálculo.

Resultados obtidos:

$$(6) \text{ “} -\frac{9}{8} \text{”} \quad (1) \text{ “} \frac{9}{8} \text{”} \quad (1) \text{ “} -\frac{9}{4} \text{”}$$

$$(3) \text{ “} -\frac{6}{12} \text{” (podem ter multiplicado em cruz)} \quad (2) \text{ “} 2,25 \text{”} \quad (1) \text{ “} 1,125 \text{”}$$

(5) não efetuaram o cálculo

Análise dos resultados obtidos: diferente do previsto, os alunos mostraram certas dificuldades em efetuar a multiplicação entre frações; apenas 6 alunos conseguiram efetuar o cálculo deste item.

d) $1 : \left(-\frac{5}{2}\right)$

Característica do item: este item traz a divisão entre frações; a regra de manter a primeira fração e inverter a segunda efetuando a multiplicação entre elas pode trazer alguns erros talvez pelo fato do aluno não saber o motivo desta técnica e se atrapalhar em aplicá-la.

Resultados obtidos:

$$(1) \text{ “} -\frac{2}{5} \text{”} \quad (5) \text{ “} -\frac{5}{2} \text{”} \quad (1) \text{ “} \frac{5}{2} \text{”}$$

$$(1) \text{ “} 0,4 \text{”} \quad (1) \text{ “} 2,5 \text{”} \quad (10) \text{ não efetuaram o cálculo}$$

Análise dos resultados obtidos: apenas 1 aluno conseguiu efetuar a divisão deste item; outro aluno encontrou o valor absoluto da divisão (0,4), mas não registrou o sinal correto; 5 alunos parecem ter realizado a multiplicação e encontrado como resposta a fração $-\frac{5}{2}$; a maioria dos alunos não resolveu este cálculo.

QUESTÃO 5: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

5) Qual é maior:

Objetivo da questão: verificar algumas concepções sobre operações com números racionais a partir da comparação de valores.

a) 7^3 ou 7×3 ? _____

Característica do item: alguns alunos podem confundir a potência 7^3 com a operação 7×3 e dizer que ambos valem o mesmo.

Resultado obtido:

(18) “ 7^3 ” (1) “ 7×3 ”

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos apontou 7^3 como o maior número no par destacado; podemos dizer, então, que os alunos conhecem o significado da operação potenciação

b) 0^1 ou 5^0 ? _____

Característica do item: este item pretende verificar se os alunos sabem calcular potências de um número real.

Resultado obtido:

(18) “ 5^0 ” (1) “ 0^1 ”

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos resolveu de forma correta este item, alguns alunos registraram o valor de cada um dos termos para compará-los.

c) $4^3 + 2^3$ ou $(4 + 2)^3$? _____

Característica do item: este item pretende verificar se os alunos percebem que os valores não são iguais, ou seja, que não podemos atribuir a potência 3 aos termos da soma.

Resultado obtido:

(18) “ $(4 + 2)^3$ ” (1) não resolveu

Análise do resultado obtido: todos os alunos resolveram este item corretamente, alguns fizeram os cálculos no canto da folha para comparar as expressões.

d) $3 \times 5 \times 0$ ou $1 \times 5 \times 3$? _____

Característica do item: este item pretende verificar se os alunos resolvem corretamente a multiplicação por 0; pode ser que os alunos dêem como resultado do primeiro cálculo o número 15.

Resultado obtido:

(17) “ $1 \times 5 \times 3$ ” (2) não resolveram

Análise do resultado obtido: a maioria dos alunos indicou corretamente a maior expressão; podemos dizer que os alunos não têm problema em multiplicar um número por 0.

e) $4048 \div 8$ ou $448 \div 8$? _____

Característica do item: este item pretende verificar se os alunos efetuam corretamente a divisão entre inteiros; a primeira divisão pode trazer algum problema por causa do 0 que resulta na posição da dezena do quociente; com isso, pode ser que os alunos encontrem o mesmo resultado em ambos os cálculos;

entretanto, se o aluno se ativer ao fato do primeiro dividendo ser maior, não terá dificuldade em indicar o cálculo que resulta em maior valor.

Resultado obtido:

(19) “ $4048 \div 8$ ”

Análise do resultado obtido: todos os alunos resolveram de forma correta este item; pode ser que os alunos não tenham resolvido as divisões, já que não havia nenhum cálculo na folha; os alunos podem ter reparado apenas no valor do dividendo para escolher o maior valor.

f) $3000 - 1238$ ou $3238 - 1000$? _____

Característica do item: o primeiro cálculo deste item pode trazer algum problema para os alunos por causa dos “empréstimos” entre as ordens.

Resultado obtido:

(18) “ $3238 - 1000$ ” (1) não resolveu

Análise do resultado obtido: os alunos não tiveram dificuldade em resolver este item.

QUESTÃO 6: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

6) Preencha os espaços em branco com as palavras SEMPRE, NUNCA ou ÀS VEZES.

Objetivo da questão: verificar se os alunos dão significados às regras dos algoritmos usados para realizar operações com frações.

a) Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes _____ é necessário usar o conceito de frações equivalentes e calcular o m.m.c.

Respostas obtidas:

(15) “sempre” (5) “às vezes”

- b) O denominador de uma fração _____ é igual a zero.

Respostas obtidas:

(19) “nunca”

- c) O numerador de uma fração _____ é maior que o denominador.

Respostas obtidas:

(16) “às vezes”

(3) “sempre”

- d) Uma fração _____ representa um número natural.

Respostas obtidas:

(9) “às vezes”

(5) “sempre”

(5) “nunca”

- e) Numa adição de frações, o total é _____ maior que 1.

Respostas obtidas:

(4) “às vezes”

(15) “sempre”

Análise das respostas obtidas: todos os alunos reconheceram que o denominador de uma fração nunca é zero; a maioria dos alunos reconheceu que sempre é necessário calcular o m.m.c. para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes; alguns alunos acreditam que o numerador de uma fração deve sempre ser maior que o denominador; apenas 9 alunos reconheceram que uma fração pode às vezes representar um número natural; apenas 4 alunos afirmaram que em uma adição de frações o resultado às vezes é maior que 1, a maioria afirma que sempre teremos um resultado maior que 1.

QUESTÃO 7: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

- 7) Em uma prova, Felipe resolveu as expressões abaixo da seguinte maneira:

a) $12 \times 6 - 4 \div 2$ b) $12 \times (6 - 4) \div 2$ c) $(12 \times 6 - 4) \div 2$ d) $12 \times (6 - 4 \div 2)$

$= 72 - 2$	$= 12 \times 2 \div 2$	$= (72 - 4) \div 2$	$= 12 \times (6 - 2)$
$= 70$	$= 24 \div 2$	$= 68 \div 2$	$= 12 \times 4$
	$= 12$	$= 39$	$= 48$

Felipe acertou todas as expressões! Como isso pode acontecer?

Objetivo da questão: observar se os alunos estão familiarizados com o significado dos parênteses em expressões numéricas e se respeitam a ordem das operações em uma expressão. Pode ser que os alunos tenham problema essa questão porque não é natural aceitar que as “mesmas” expressões possam resultar em números diferentes.

Respostas obtidas:

(6) Ele acertou

Algumas justificativas: “Pois ele resolveu de maneira correta, respeitando todas as regras”

“Ele seguiu todas as regras de expressões numéricas”

“Para dar esse resultado, precisa-se do ()”

(1) Ele errou todas as expressões

Algumas justificativas: “Todas as questões estão erradas”

(3) Ele acertou (justificativas desconexas com o objetivo)

Algumas justificativas: “Porque ele resolveu as questões corretamente”

“Porque primeiro ele fez as contas mais difíceis e depois as mais fáceis”

(9) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 6 alunos mostraram conhecer as regras de resolução de uma expressão numérica e reconhecer o significado dos parênteses; 9 alunos não responderam esta questão.

QUESTÃO 8: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

- 8) Associe as situações com as expressões aritméticas, colocando as letras nos parênteses antes das expressões:

a) Fui em uma papelaria e comprei um monte de adesivos! Comprei 4 para cada um dos meus 3 primos. Outros 6 comprei para o meu irmão. Não esqueci de mim! Comprei 6 adesivos para cada um dos meus 4 cadernos. Quantos adesivos comprei?	() $6 + 4 \times 3 + 4 \times 6$
b) Fiz muita lição hoje! 6 exercícios de Português, 4 páginas de Matemática com 3 exercícios cada e 4 páginas de Ciências com 6 exercícios cada. Quantos exercícios resolvi ao todo hoje?	() $4 \times 3 + 6 + 6 \times 4$
c) Gastei 4 reais em cada um dos 6 cadernos que comprei para Fabíola; 3 reais em cada cartela uma das 4 cartelas de adesivos e 4 reais em uma caneta colorida. Quanto gastei?	() $4 \times 6 + 3 \times 4 + 4$

() Não entendi o que os problemas quiseram dizer

Objetivo da questão: verificar se os alunos conseguem associar a linguagem escrita à linguagem aritmética. Possivelmente os alunos não terão problema nessa

questão, pois as expressões apresentam as operações na ordem em que os fatos se sucedem no texto.

Respostas obtidas:

(13) “ $B - A - C$ ”

(3) “ $A - B - C$ ”

(3) não responderam

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos realizou a associação entre os problemas e as expressões de forma correta; podemos afirmar, talvez, que os alunos sabem passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica.

QUESTÃO 9: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

9) Resolva as operações abaixo:

a) $567 + 929$

Característica do item: essa adição exige transformação entre ordens, ou seja, o famoso “vai um”. Apesar disso, os alunos devem resolvê-la sem dificuldade.

Respostas obtidas:

(19) “1496”

Análise das respostas obtidas: todos os alunos encontraram o valor correto, entretanto, apenas 4 alunos efetuaram o cálculo no papel.

b) $4000 - 1986$

Característica do item: esta subtração pode ser considerada complexa, pois é preciso várias transformações sucessivas entre as ordens para efetuá-las. É possível que poucos alunos acertem este cálculo.

Respostas obtidas:

(16) “2014”

(1) “2026”

(1) “2024”

(1) “5086” (pode ter efetuado a adição)

Análise das respostas obtidas: dos 16 alunos que indicaram a diferença entre os números corretamente, apenas 2 registraram a conta, os demais apenas anotaram o resultado.

c) 51×102

Característica do item: o problema nesta multiplicação está no zero na posição da dezena. As parcelas terão que ser deslocadas em duas casas se os números não forem invertidos.

Respostas obtidas:

(19) “5202”

Análise das respostas obtidas: todos os alunos parecem ter realizado a multiplicação de forma correta; entretanto, apenas 4 alunos armaram a conta no papel e o fizeram de forma invertida (102×51).

d) $1428 \div 7$

Característica do item: este é uma divisão aparentemente simples, pois 14 e 28 são divisíveis por 7. Entretanto, o algoritmo tão treinado confunde os alunos porque pode ser que eles interiorizem que sempre “quando não dá abaixa o próximo”, não sintam a necessidade de colocar o 0 no meio do número. Muito provavelmente o resultado mais presente nas respostas será 24.

Respostas obtidas:

(18) “204”

(1) “24” (fizeram $14 \div 7$ e $28 \div 7$)

Análise das respostas obtidas: dos 18 alunos que aparentemente acertaram o cálculo, apenas 3 mostraram o cálculo.

Conclusão: o resultado dessas operações surpreendeu bastante; apesar dos alunos não terem efetuado os cálculos de maneira correta na questão 4, aqui eles as fizeram tranquilamente; pode ser que alguns alunos tenham usado calculadora para resolver esses cálculos, principalmente porque 14 delas não registraram nenhum indício de cálculo, só escreveram a resposta.

QUESTÃO 10: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

10) Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira? Qual das escritas matemáticas abaixo podem representar essa situação?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
---	---

Objetivo da questão: verificar se o aluno reconhece que nos dois exemplos recebe-se a mesma parte da folha, ou seja, se frações diferentes representam a mesma parte; além disso, esta questão apresenta a idéia de adição de frações com

denominadores iguais; pode ser que os alunos optem por uma das representações como correta e interprete a outra como incorreta.

Respostas obtidas:

(6) apontou a primeira situação

Algumas justificativas: “ $\frac{3}{2}$ pois foram três folhas divididas para 2 pessoas”

(2) apontou a segunda situação

(5) apontou ambas as situações como corretas

Algumas justificativas: “Tanto uma quanto a outra representa a situação, mas o segundo mostra os números mistos”

“As duas estão certas”

Análise das respostas obtidas: apenas 5 alunos reconheceram a situação nos dois quadros; 6 alunos apontaram apenas a primeira situação e 2 apenas a segunda situação sem maiores justificativas.

QUESTÃO 11: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

11) Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

$$(A) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= 0,5 + 0,4$$

$$= 0,9$$

$$(B) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$$(C) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{7}$$

$$(D) \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5+4}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

Analise cada uma dessas formas e verifique se os alunos acertaram ou não. Justifique:

Objetivo da questão: verificar se os alunos percebem que existe mais de uma forma de resolver uma expressão com números racionais, que é possível efetuar as operações lidando com números fracionários ou com números decimais, ou seja, que as escritas são equivalentes; pode ser que o fato dos alunos estarem habituados a exercícios com respostas únicas influencie no resultado desta questão.

Respostas obtidas:

(9) indicaram que a letra c) está errada

Algumas Justificativas: “C porque não há soma de denominadores diferentes, teria que tirar o m.m.c.”

“A c está errada e todas certas”

“Não, pois a C está diferente do resto”

“As letras A, B e D estão certas, mas a C está errada, pois em adição de frações você tem que fazer m.m.c, não se pode somar direto”

“A (c) está errada pois ele somou os denominadores $2+5$ e o correto seria 2×5 ”

“O aluno c errou, pois não se soma os denominadores”

“Todos acertaram com exceção do (c), pois este somou denominadores diferentes”

(5) indicaram que todos acertaram

Algumas Justificativas: “Sim, pois eles fizeram de forma diferente, mas com resultados equivalentes”

“Sim, pois resolveram por outros caminhos, mas deu o mesmo resultado”

(5) não responderam

Análise das respostas obtidas: pouco menos da metade dos alunos indicou corretamente que apenas a letra c) está incorreta; pode ser que os alunos não estejam habituados a analisar resoluções e interpretá-las, o que pode justificar a dificuldade que apresentam em questões desse tipo.

QUESTÃO 12: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

12) Dado o número 1,5, qual é o próximo?

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem o 1,6 como sucessor de 1,5; possivelmente o número 1,6 será o valor que aparecerá com maior frequência; dificilmente algum aluno reconhecerá que é impossível determinar o número que vem imediatamente após 1,5.

Respostas obtidas:

(2) reconheceram a impossibilidade de escrever o próximo número

Justificativas obtidas: “Depende do conjunto numérico, como você sabe se é 1,6 ou 2,0?”

“Depende do conjunto pedido”)

(8) “1,6” (6) “2” (1) “9” (pode ter pensado na sequência 1-5...)

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 2 alunos reconheceram ser impossível escrever o número que vem logo depois de 1,5; a maioria dos alunos tentou encontrar uma resposta; diferente do esperado, apareceram dois valores com grande frequência, os

números 1,6 e o 2; um dos alunos escreveu que o próximo número é o 9, ele pode ter pensado na sequência 1-5, com razão 4 e encontrado o seu terceiro termo.

QUESTÃO 13: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

13) Observe a reta numerada e os pontos indicados por letras maiúsculas que estão assinaladas nela:

Quais das frações abaixo correspondem às letras marcadas na reta?

() $\frac{1}{2}$ () $\frac{1}{6}$ () $\frac{1}{4}$ () $\frac{1}{5}$ () $\frac{1}{3}$ () $\frac{1}{10}$

Objetivo da questão: verificar se os alunos transportam os números à reta numerada e se, principalmente, conseguem comparar o “tamanho” dos números; os alunos podem apresentar certa dificuldade com a idéia de representar frações em uma reta numerada.

Respostas obtidas:

(9) “A – E – C – D – B – F”

(2) assinalaram a fração $\frac{1}{4}$

(1) assinalou a fração $\frac{1}{10}$

(6) assinalaram a fração $\frac{1}{6}$

(1) deixaram a questão em branco

Análise das respostas obtidas: nenhum aluno associou as frações aos pontos corretamente; vale destacar que 4 alunos encontraram o valor das frações e

escreveram seus valores acima delas ($0,5 - 0,16... - 0,35 - 0,2 - 0,33... - 0,1$) mas não conseguiram associar os pontos de forma correta; podemos afirmar, talvez, que os alunos não sabem representar os números racionais na reta numérica.

QUESTÃO 14: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

14) Que número é maior?

a) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos comparam frações com numeradores iguais; as duas frações apresentadas possuem o mesmo numerador e numeradores diferentes; a idéia central dessa comparação está em reconhecer que ao dividirmos um inteiro em 5 partes iguais, teremos uma quantidade maior do que ao dividi-lo em 7 partes iguais; pode ser que os alunos apresentem alguma dificuldade nessa comparação caso se atenham aos valores dos algarismos e não percebam o significado que possuem nas frações apresentadas.

Respostas obtidas:

(10) " $\frac{2}{5}$ " (8) " $\frac{2}{7}$ " (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: grande parte dos alunos reconhece a idéia descrita no objetivo do item; entretanto, 8 deles podem ter comparado os algarismos sem perceber o seu significado nas frações.

b) $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$? _____

Objetivo da questão: verificar se os alunos comparam frações com denominadores iguais; a comparação com frações de mesmo denominador costuma ser de fácil compreensão porque para realizá-la, basta comparar os numeradores; dessa forma,

imagina-se que os alunos não terão dificuldade em indicar a maior fração dentre as opções dadas.

Respostas obtidas:

(16) " $\frac{7}{11}$ " (2) " $\frac{7}{11}$ " (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos indicou a maior fração dentre as opções corretamente; entretanto, 2 alunos o fizeram de forma errônea.

QUESTÃO 15: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

15) Uma escola com 500 alunos resolveu fazer uma festa para comemorar o Final do Ano.

A organização sugeriu que os alunos trouxessem os comes e bebes da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}$ dos alunos deveria trazer doces

$\frac{2}{5}$ dos alunos trariam salgados

$\frac{1}{10}$ dos alunos traria refrigerantes

Calcule a quantidade de alunos que levaram para a festa:

a) Doces

b) Salgados

c) Refrigerantes

Objetivo da questão: verificar se os alunos têm a idéia de fração como parte de um todo discreto e se sabem lidar com ela em problemas; este tipo de questão aparece com freqüência nos livros didáticos com a estratégia de “dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima”; pode ser que os alunos não tenham dificuldade em resolvê-la.

a) Doces

Respostas obtidas:

(15) “250”

(1) “1000”

(1) “0,5”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: apesar da metade de uma quantidade ser uma idéia simples, 4 alunos não conseguiram resolver esse exercício de forma correta; 1 aluno escreveu o valor da fração $\frac{1}{2}$ sem se ater ao todo em questão.

b) Salgados

Respostas obtidas:

(13) “200”

(2) “125”

(1) “1250”

(1) “0,4”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 13 alunos conseguiram calcular $\frac{2}{5}$ de 500; 1 aluno escreveu o valor da fração $\frac{2}{5}$ sem se ater ao todo em questão.

c) Refrigerante

Respostas obtidas:

(13) “50”

(2) “125”

(1) “5000”

(1) “0,1”

(2) não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 13 alunos conseguiram calcular $\frac{1}{10}$ de 500; 1 aluno escreveu o valor da fração $\frac{1}{10}$ sem se ater ao todo em questão.

QUESTÃO 16: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

16) Responda (V) para verdadeiro, (F) para falso ou (X) se não souber decidir.

- () Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo
- () O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo
- () Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero
- () Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero

Objetivo da questão: verificar se os alunos reconhecem as estratégias de comparação de números inteiros já realizada em outras questões.

Respostas obtidos:

- () Qualquer número positivo é sempre maior que qualquer número negativo.

(14) “V” (4) “F” (1) não respondeu

- () O zero é sempre maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo.

(12) “V” (5) “F” (1) “X” (1) não respondeu

- () Entre dois números positivos, o maior é aquele mais distante do zero.

(17) “V” (1) “X” (1) não respondeu

- () Entre dois números negativos, o maior é aquele mais distante do zero.

(12) “F” (6) “V” (1) não respondeu

Análise das respostas obtidas: a maioria dos alunos não apresentou dificuldade em classificar as estratégias referentes a comparação entre números inteiros.

QUESTÃO 17: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

17) Resolva as seguintes operações

a) $(+5) + (+3) =$ b) $(+5) + (-3) =$ c) $(-5) + (+3) =$ d) $(-5) + (-3) =$

e) $(-7) - (+4) =$ f) $(-7) - (-4) =$ g) $(+7) - (+4) =$ h) $(+7) - (-4) =$

i) $(-3) \times (+5) =$ j) $(-3) \times (-2) =$ k) $(+4) \times (+1) =$ l) $(+2) \times (-3) =$

m) $(-12) \div (+4) =$ n) $(+6) \div (-3) =$ o) $(-9) \div (-3) =$ p) $(+4) \div (+2) =$

Objetivo da questão: verificar, a partir de operações consideradas simples, se os alunos conseguem realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões no universo dos números inteiros; pode ser que alguns alunos transfiram a regra de sinais da multiplicação e divisão (sinais iguais dá mais e sinais diferentes dá menos) às operações de adição e subtração.

Resultados obtidos:

a) $(+5) + (+3)$

(17) “8” (1) “-8” (1) não resolveu

b) $(+5) + (-3)$

- (14) “2” (2) “-2” (2) “-8” (1) não resolveu
- c)** $(-5) + (+3)$
- (14) “-2” (2) “2” (2) “-8” (1) não resolveu
- d)** $(-5) + (-3)$
- (9) “-8” (8) “+8” (1) “-2” (1) não resolveu
- e)** $(-7) - (+4)$
- (10) “-3” (6) “-11” (2) “11” (1) não resolveu
- f)** $(-7) - (-4)$
- (5) “-3” (9) “-11” (2) “3” (2) “+11”
- (1) não resolveu
- g)** $(+7) - (+4)$
- (11) “3” (6) “+11” (1) “4” (1) não resolveu
- h)** $(+7) - (-4)$
- (6) “11” (1) “-11” (3) “-3” (8) “3”
- (1) não resolveu
- i)** $(-3) \times (+5)$
- (12) “-15” (6) “15” (1) não resolveu
- j)** $(-3) \times (-2)$
- (15) “6” (3) “-6” (1) não resolveu
- k)** $(+4) \times (+1)$
- (18) “4” (1) não resolveu
- l)** $(+2) \times (-3)$
- (14) “-6” (3) “6” (1) “-1” (1) não resolveu
- m)** $(-12) \div (+4)$
- (15) “-3” (2) “3” (2) não resolveram

n) $(+6) \div (-3)$

(13) “-2” (4) “2” (1) “+3” (1) não resolveu

o) $(-9) \div (-3)$

(14) “3” (3) “-3” (2) não resolveram

p) $(+4) \div (+2)$

(18) “2” (1) não resolveu

Análise das respostas obtidas: podemos observar que os alunos se saíram melhor nas multiplicações e divisões do que nas adições e subtrações; assim como ocorrido com os alunos da 6ª série, isso pode ter ocorrido pela interiorização da regra de sinais usada na multiplicação e divisão que alguns alunos transferem para a adição e para a subtração; pode ser que os alunos não conheçam o significado das operações no universo dos números inteiros.

QUESTÃO 18: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

18) Explique, com suas palavras, o que é um número irracional.

Objetivo da questão: verificar a concepção que os alunos possuem sobre número irracional; pretende-se verificar se os alunos sabem definir um número irracional como um número decimal com dízima não periódica ou como um número indicado por radiciação não exata.

Respostas obtidas:

(6) Apresentaram alguma idéia de número irracional

Algumas respostas: “Número irracional é aquele número decimal que não é igual e não tem fim”

“Números com raízes”

“Números quebrados”

“Irracionais são os números com raízes e vírgulas”

(8) Respostas diversas

Algumas respostas: “São números positivos e negativos”

“Os negativos”

“Irracionais são iguais a números com vírgula”

“Não sei”

(5) não responderam

Análise das respostas obtidas: alguns alunos mostraram conhecer algumas características dos números irracionais, como a representação em radicais e o fato deles serem “quebrados”, de terem números depois da vírgula; entretanto, não podemos afirmar que os alunos sabem o que é um número irracional, eles apresentaram bastante dificuldade em definir um número irracional.

QUESTÃO 19: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

19) Assinale o resultado mais próximo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

() 2,8 () 3,0 () 3,9 () 4,0

Objetivo da questão: verificar se os alunos aproximam os valores dos números irracionais para efetuar a adição em questão.

Resultados obtidos:

(7) 2,8 (0) 3,0 (7) 3,9 (3) 4,0

(2) não assinalaram nenhuma alternativa

Análise dos resultados obtidos: apenas 3 alunos assinalaram que o resultado mais próximo da expressão em questão é 4,0; pode ser que os alunos tenham tido dificuldade em aproximar os valores e que, por isso, 7 deles tenham assinalado o número 3,9; não podemos afirmar, entretanto, que os alunos sabem aproximar números irracionais para efetuar operações com eles.

QUESTÃO 20: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

20) O que é maior? 3 ou $2\sqrt{2}$? Justifique:

Objetivo da questão: verificar se os alunos realizam aproximação do valor do número irracional para decidir qual número é maior; pode ser que os alunos não tenham muita dificuldade em encontrar o maior número entre os pares dados.

Respostas obtidas:

(5) “3” com justificativas coerentes

Algumas justificativas corretas: “3, pois $2\sqrt{2}$ é próximo de 2,8”

“3, pois $2\sqrt{2} = 2,828427$

“3, pois $2\sqrt{2}$ é 2,82”

(9) “3” com justificativas incoerentes

Algumas justificativas “3, porque $2\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ que é menor que 3”

“3, porque $2\sqrt{2}$ não tem raiz”

“3, porque $2\sqrt{2} = 1$ ”

(3) “ $2\sqrt{2}$ ”

Algumas justificativas: “ $2\sqrt{2}$ porque é o número 2”

” $2\sqrt{2} = 4$ ”

(2) Não responderam

Análise das respostas obtidas: apenas 5 alunos conseguiram aproximar o valor de $2\sqrt{2}$ para realizar a comparação entre os números; a maioria mostrou não conhecer o significado dos números irracionais ou como aproximá-los de forma correta.

QUESTÃO 22: NÚMEROS REAIS – 8ª SÉRIE OU 9º ANO

21) Calcule, fazendo tentativas:

a) $\sqrt{196} =$ b) $\sqrt[3]{-343} =$ c) $\sqrt{0,64} =$ d) $\sqrt{\frac{36}{121}} =$

Objetivo da questão: verificar se os alunos calculam o valor de raízes quadradas e cúbicas de números reais.

Resultados obtidos:

a) $\sqrt{196}$

(15) “14” (1) “13”

(3) não responderam

b) $\sqrt[3]{-343}$

(3) “-7” (3) “0” (9) “~~3~~” ou “não existe raiz negativa”

(3) não responderam

c) $\sqrt{0,64}$

(16) “0,8”

(3) não responderam

d) $\sqrt{\frac{36}{121}}$

(10) “ $\frac{6}{11}$ ” (2) “0,54” (2) “ $\sqrt{\frac{6}{11}} = 0,5$ ” (1) “11” (1) 1,83...

(3) não responderam

Análise dos resultados obtidos: a partir dos resultados obtidos nesta questão, podemos dizer que talvez os alunos não saibam calcular a raiz cúbica de números reais; além disso, podemos afirmar que boa parte dos alunos sabe calcular raízes quadradas de números racionais.