UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

LUIS ANTONIO GAGLIARDI PRADO

Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar

São Paulo
2010

LUIS ANTONIO GAGLIARDI PRADO

Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para a obtenção de título de Mestre em Educação Matemática.

Área de Concentração:
Ensino de Ciências e Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Oscar João Abdounur

São Paulo
2010

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3
P896m

Prado, Luis Antonio Gagliardi
Matemática, física, e música no renascimento : uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar / Luis Antonio Gagliardi Prado ; orientação Oscar João Abdounur. São Paulo : s.n., 2010.
110 p. : il

Acompanha CDRom com músicas e um filme didático (6 ½ min)
Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração : Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Física – Estudo e ensino 3. Música – Estudo e ensino 4. Interdisciplinaridade 5. História da ciência I. Abdounur, Oscar João , orient.

LUIS ANTONIO GAGLIARDI PRADO

Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para a obtenção de título de Mestre em Educação Matemática.

Área de Concentração:
Ensino de Ciências e Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Oscar João Abdounur

APROVADA EM ....

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oscar João Abdounur (orientador) Instituição: IME – USP

Julgamento: ______________________ Assinatura: ____________________

Prof[a]. Dr[a]. Adriana Cesar de Mattos Instituição: UNESP

Julgamento: ______________________ Assinatura: ____________________

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente Instituição: UNIFESP

Julgamento: ______________________ Assinatura: ____________________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos aqueles que estão em constante busca do aprimoramento para melhor ajudar o outro, que reconhecem o privilégio que é ensinar e que sentem a gratificação de fazer a diferença.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Oscar João Abdounur pelo seu apoio, colaboração e atenção no decorrer do meu mestrado.

Agradeço ao grupo de pesquisa em matemática e música do IME, coordenado pelo Prof. Dr. Oscar João Abdounur, pelo entusiasmo, participação e pelo desenvolvimento de diversos trabalhos em conjunto que ajudaram na realização desta dissertação.

Agradeço ao grande amigo e colega de graduação e de mestrado Eliezer Gomes Camizão pelo apoio e estímulo que recebi ao longo de todo o nosso curso de mestrado. Ele também foi grande companheiro na apresentação de trabalhos em congressos e seminários no Brasil e no exterior.

Agradeço aos meus pais que me proporcionaram uma ótima educação e me deram todo apoio para que eu me tornasse uma pessoa madura.

Agradeço à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

“La musica è stata da gli antichi annunciata, tra le arti che son dette liberali, cio’è degne d`huomo libero, e meritamente appresso i Greci, maestri, e inventori di essa (come quali di tutte le altre scientie) fu sempre in molta estima; e da migliori legislatori, non solo come dilettevole alla vita, ma ancora come utile alla virtù…”

Vincenzo Galilei (MDLXXXI)

“A música foi anunciada pelos antigos, entre as artes ditas liberais, isto é, dignas do homem livre, e merecidamente junto aos Gregos, professores, e inventores dela (assim como de todas as outras ciências) foi sempre muito estimada; e dos melhores legisladores, não apenas como prazerosa à vida, mas como útil à virtude...”

Vincenzo Galilei (MDLXXXI, tradução do autor)

Dialogo di vincentio galilei nobile fiorentino della musica a et della moderna. In Fiorenza. M.D.LXXXI. Roma, Biblioteca Nazionale.

RESUMO

PRADO, L. A. G. **Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar.** 2010. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2010.

Durante o Renascimento ocorre uma retomada do pensamento racional em que o conhecimento clássico é revisitado e reorganizado pelo homem. Há uma contestação à razão pitagórica nos intervalos musicais. Vincenzo Galilei se opõe à maneira que Pitágoras relacionou os intervalos musicais através de razões de números naturais. Dá-se então, uma revolução sobre as idéias científicas que influenciaram a música. Vincenzo Galilei rompe com a visão pitagórica e passa a testar experimentalmente relações musicais supostamente corretas e começa a reescrever a teoria musical a partir de fundamentos experimentais. Seu filho Galileu, por sua vez, coloca a física dentro de um enfoque experimental e prático. Com este novo enfoque a concepção pitagórica da música se vê ameaçada.

As relações entre a física, a matemática e a música se intensificam e o estudo da música nesta época tem um caráter particularmente interessante sob o ponto de vista interdisciplinar. Através de um enfoque histórico-epistemológico, busca-se estudar a importância da interdisciplinaridade no ensino de maneira geral, em especial da matemática, física e música, e de propor algumas oficinas interdisciplinares em que essas três disciplinas, possam de algum modo estar presentes. O aprendizado focado em mais de uma disciplina através de uma atividade interdisciplinar nem sempre é fácil e pode representar um obstáculo epistemológico, uma vez que saímos de nossa zona de conforto. Tais oficinas, portanto, têm também por objetivo instigar o aluno e convidá-lo a ter um enfoque reflexivo e crítico, assim como perceber o desafio que é enxergar e estudar fenômenos através de enfoques diferentes. Espera-se, dessa maneira, enriquecer o potencial de aprendizado através de uma complementação do ensino tradicionalmente feito através de disciplinas separadas, pela inclusão da interdisciplinaridade, quando possível.

Palavras chave: Matemática, Física, Música, interdisciplinaridade, Renascimento, Pitágoras.

ABSTRACT

PRADO, L. A. G. **Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar.** 2010. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2010.

During the Renaissance there is a resumption of the rational thought in which classical knowledge is revisited and rearranged by man. There is a contestation that challenges the Pythagorean intervals. Vincenzo Galilei opposed the way that Pythagoras listed the musical intervals by ratios of natural numbers. It was then established a revolution of scientific ideas that influenced music. Vincenzo Galilei breaks the Pythagorean view and starts to test experimentally musical relationships that were supposedly correct and begins to write a new music theory based on experimental foundations. His son Galileo, in turn, puts physics within a practical an experimental approach. Due to this new approach, the Pythagorean concept of music is threatened.

The relationships between physics, mathematics and music are intensified and the study of music at this time has a particularly interesting character from an interdisciplinary point of view. Through a historical and epistemological approach, this work studies the importance of interdisciplinary education in general, especially in mathematics, physics and music, and aims at suggesting some interdisciplinary workshops such that these three disciplines can somehow be present. Learning involving more than one subject through an interdisciplinary activity is not always easy and may represent an epistemological obstacle since we go out of our comfort zone. These workshops therefore also aim at instigating the students as well as inviting them to take a reflective and critical approach, and realize how challenging is to see and study phenomena through different points of view. It is hoped in this way to enrich the learning potential through a complementation of the education process, traditionally done by separate subjects, by the inclusion of interdisciplinary activities whenever possible.

Keywords: Mathematics, Physics, Music, Interdisciplinary, Renaissance, Pythagoras.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A relação entre a ciência e a música remonta ao período arcaico. A grande importância da música na Grécia era representada na própria organização curricular, onde ocupava lugar de destaque. Pitágoras foi um grande representante da relação entre a música e matemática na época. Através da utilização de um instrumento de uma única corda, chamada monocórdio, Pitágoras construiu a escala musical por meio do estabelecimento de relações com as razões perfeitas entre números naturais. O experimento de Pitágoras é provavelmente a primeira lei descoberta empiricamente e a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma arbitrária (Abdounur, 2000). Pitágoras deixou um grande legado que constituiu a base teórica de toda a música medieval.

A música manteve essa relação muito próxima com a matemática até o século XVI aproximadamente, quando então passa a ser vista com um enfoque mais experimental. Vincenzo Galilei (1520-1591), um respeitado músico, professor e teórico da música será um dos pioneiros nesta nova abordagem. Ele questiona a visão especulativa do pitagorismo – cuja ênfase é sempre na perfeição da matemática e dos números inteiros para descrever a música – colocando em prática e testando vários conceitos musicais pitagóricos. Um exemplo foi o experimento em que ele coloca várias massas de valores diferentes para produzir a tensão em uma corda. Vincenzo Galilei demonstra que as relações pitagóricas entre as diferentes tensões produzidas pelas diversas massas e os intervalos musicais estavam erradas (Walker, 1978, pg. 23). Alguns historiadores acreditam que tais experimentos foram desenvolvidos em 1588 e que Vincenzo Galilei recebeu a ajuda de seu filho, Galileu Galilei, então com 14 anos. A versatilidade de Vincenzo Galilei e seu comportamento, que aliava teoria e prática musical com uma certa experimentação científica, podem ter sido uma das motivações para que Galileu desenvolvesse interesse pelo estudo da música e que achasse natural a adoção de um enfoque experimental nos seus futuros estudos científicos.

Tomando-se o século XVII como foco, percebemos se tratar de um período de grande produção científica que passa por uma reestruturação do pensamento. Durante essa época ocorre uma tensão entre a ciência especulativa e a ciência experimental. Galileu Galilei contribui para colocar a física dentro de uma abordagem não só teórica, mas também experimental e prática. De um ponto de vista científico-filosófico, podemos dizer que a concepção pitagórica se vê ameaçada. Um fato que colocaria o pitagorismo em dificuldades como referência na música, possivelmente a maior limitação do sistema pitagórico, é a de utilizar somente razões comensuráveis, ou anacronicamente, números racionais, na expressão de intervalos musicais (Abdounur, 2000). Tal limitação pode estar ligada à necessidade de criar um temperamento musical uma vez que a execução musical de diferentes linhas melódicas simultâneas (polifonia) apresentava problemas sonoros de concordância.

Durante o século XVII a ciência dá um salto com a Revolução Científica. Para alguns historiadores é neste momento que nasce a acústica musical. Nesse período há a criação de escalas musicais baseadas em fundamentos acústicos que levariam à necessidade de utilizar ferramentas matemáticas, como os números irracionais e os logaritmos. A escala temperada moderna, por exemplo, pode ser representada por uma espiral logarítmica. A "matematização" da música e a consolidação por uma visão experimental dos fenômenos musicais foram protagonizadas por grandes físicos e matemáticos: Galileu Galilei, René Descartes, Christian Huygens e Marin Mersenne.

Desenvolve-se a partir daí uma série de relações entre a física, a matemática e a música. Mersenne e Galileo separadamente desenvolvem experimentos que levam a uma lei que estabelece conexões entre a tensão de uma corda vibrante, sua espessura, comprimento, peso específico, com a freqüência de vibração. Mais adiante uma relação entre timbre e ondas sonoras estará presente na Série Harmônica que, por sua vez, está ligada com as Séries de Fourier.

Analisando esse período sob um enfoque histórico-epistemológico, percebemos que tanto a matemática quanto a física exerceram um papel importante no desenvolvimento da música ocidental. O temperamento igual é um exemplo característico deste papel, uma vez que foi necessária uma visão mais experimental da física – característica que a física adquire desde Galileu – e da matemática, para uma sistematização do temperamento em si.

Analisar o processo pelo qual a música passa neste período através de uma abordagem físico-matemática pode ser bastante enriquecedor para enxergar a sua evolução dentro de vários domínios do saber assim como perceber como esses domínios se inter-relacionam e até que ponto cada área do conhecimento contribuiu para o desenvolvimento das outras e vice-versa. Com este enfoque, este trabalho pesquisou teorias sobre a interdisciplinaridade, para depois poder sugerir tal enfoque, quando possível, em algumas aplicações educacionais. Após essa análise a pesquisa pretendeu organizar algumas propostas que pudessem ser utilizadas na elaboração de atividades interdisciplinares em que estivessem presentes alguns conceitos físicos e matemáticos relevantes no desenvolvimento da música.

1.1 OBJETIVO

Este projeto de pesquisa pretende estudar o papel da interdisciplinaridade no contexto atual e suas implicações educacionais no ensino de física, matemática e música para a educação básica através de um estudo histórico-epistemológico da evolução da música no Renascimento. A pesquisa pretende também selecionar alguns conceitos intrínsecos entre a música e a matemática e/ou a física que sejam relevantes e que possam ser utilizados na elaboração de atividades interdisciplinares que venham enriquecer o repertório dos professores destas disciplinas, assim como servir de aplicação prática no ensino destas matérias sem que ocorra uma relação artificial, ou seja, não se deve "forçar" a interdisciplinaridade. A visão interdisciplinar neste trabalho não substitui a necessidade da especificidade de cada matéria, mas uma proposta que deve ser incluída nos planejamentos escolares sempre que possível e quando haja de fato ganho de aprendizado. Neste sentido objetivou-se propor oportunidades de trabalho em que a física, a matemática e a música estivessem presentes, quando possível e não necessariamente na mesma proporção.

1.2 PROBLEMA DA PESQUISA

A matemática tem gozado de considerável importância desde os primórdios da humanidade. Na Grécia arcaica, tanto a matemática quanto a música desfrutavam de grande prestígio. Os pitagóricos possuíam uma relação íntima com ambas. A música, entretanto, tinha grande valor também na Idade Média, quando então as universidades adotavam em seus currículos dois blocos fundamentais: o *trivium* e o *quadrivium*. A música, juntamente com a aritmética, a geometria e a astronomia, completava o bloco do *quadrivium*, que era a continuação do trabalho preparatório do *trivium*, composto por lógica, gramática e retórica.

A física, por sua vez, está presente de maneira discreta no ensino fundamental, geralmente dentro de um currículo de ciências, e se torna muito mais presente no ensino médio de maneira específica. Entretanto os aspectos da física que englobam conhecimentos relacionados à música – tais como comprimento de onda, freqüência e propagação do som, só para citar alguns – são quase sempre dissociados dos aspectos musicais ou ainda completamente ausentes, não sendo aproveitado o potencial interdisciplinar.

No contexto atual da educação básica, a matemática continua a ser uma disciplina importante e está presente desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio, coisa que não acontece com a música. A presença da música como disciplina na educação básica é bastante pequena, estando presente em muito poucas oportunidades educacionais. A escola, de maneira geral, não incorpora a música em seu currículo, e quando acontece, é de maneira superficial e incompleta. Os PCN de 5ª a 8ª Séries recuperam o caráter de importância da música na formação do ser humano e apresenta dentre os objetivos gerais, o de:

> Fazer uso de formas de registro sonoro, convencionais ou não, na grafia e leitura de produções musicais próprias ou de outros, utilizando algum instrumento musical, vozes e/ou sons os mais diversos, desenvolvendo variadas maneiras de comunicação.
>
> *PCN 5ª a 8ª Séries – página 81*

Além de recuperar a importância do estudo da música, os PCN incorporam um enfoque interdisciplinar, em especial com as ciências físicas e biológicas, como pode ser visto abaixo um dos itens do conteúdo de Música:

> Construção de instrumentos musicais convencionais (dos mais simples) e não-convencionais a partir da pesquisa de diversos meios, materiais, e de conhecimentos elementares de ciências físicas e biológicas aplicadas à música.
>
> *PCN 5ª a 8ª Séries – página 83*

Podemos ver que uma proposta interdisciplinar que inclua a música dentro do ensino de ciências e/ou matemática é pertinente e deve ser explorada. É claro que tal inclusão não substitui a necessidade de incluir música como uma disciplina independente e presente no currículo da educação básica.

1.3 JUSTIFICATIVA

Para Olga Pombo, falar sobre a interdisciplinaridade é tarefa difícil pois nem as pessoas que a praticam, nem as que a teorizam, nem aquelas que a procuram definir sabem de fato o que é interdisciplinaridade. A verdade é que não há nenhuma estabilidade relativamente a este conceito (Pombo, 2003). Para este trabalho manteremos de maneira geral o significado de interdisciplinaridade como “o intercâmbio mútuo e integração recíproca entre duas ou mais disciplinas, tendo como resultado um enriquecimento recíproco”.

A interdisciplinaridade parece estar cada vez mais presente no âmbito educacional atual. Os PCN fazem uso freqüente e a colocam como destaque através de indicações para a construção de um projeto curricular interdisciplinar.

> Ao longo de anos, a organização do trabalho escolar tem-se dado por meio das disciplinas, cujo enfoque preserva a identidade, a autonomia e os objetivos próprios de cada uma delas. Assentados sobre a base ético-política do projeto escolar, e sobre o princípio da interdisciplinaridade, acredita-se que o currículo, como dimensão especificamente epistemológica e metodológica deste projeto, pode mobilizar intensamente os alunos, assim como os diversos recursos didáticos disponíveis e/ou construídos coletivamente. Pressupomos, com isto, a possibilidade de se dinamizar o processo de ensino-aprendizagem numa perspectiva dialética, em que o conhecimento é compreendido e apreendido como construções histórico-sociais.
> *Contexto do Ensino Médio – Indicações para a Construção de um Projeto Curricular Interdisciplinar - http://portal.mec.gov.br/seb/*

Calvino (1990) também não deixou de fora de suas “propostas para o próximo milênio” uma que esteja relacionada com a interdisciplinaridade. As cinco propostas apresentadas e desenvolvidas por Calvino são inter-relacionadas, sendo que na última – a multiplicidade – destaca-se o conhecimento como uma rede de conexões, longe da idéia de especialização.

Por que utilizar a interdisciplinaridade como estratégia? Um fenômeno visto ou estudado exclusivamente dentro de uma perspectiva específica será compreendido de maneira limitada. Os acontecimentos do nosso dia a dia não pertencem exclusivamente a um único domínio do conhecimento. Há sempre diferentes interpretações de acordo com o enfoque dado. Ora, se o mundo ao nosso redor nos surpreende continuamente com eventos subjetivos e complexos que envolvem múltiplas áreas do conhecimento, talvez tenhamos mais habilidade de compreendê-los se o nosso processo de formação escolar contemplasse oportunidades para estudar e analisar fenômenos sob vários pontos de vista diferentes, i.e. adotasse uma estratégia interdisciplinar.

Por que adotar uma perspectiva histórico-epistemológica no estudo do desenvolvimento da física, da matemática e da música? Fala-se muito sobre o desenvolvimento de capacidades analíticas e críticas no aprendizado de hoje. O questionamento é essencial no processo de aquisição e compreensão do conhecimento. O aluno questionador refletirá sobre aspectos do tipo Como? Por que? De que forma? Qual a motivação para que algo tenha se desenvolvido? O ensino de qualquer disciplina dentro de uma perspectiva histórico-epistemológica aliado à interdisciplinaridade pode contribuir bastante para uma melhora do aprendizado nesse sentido.

O ensino da física e o da matemática apresenta atualmente uma realidade preocupante. Não é raro encontrar alunos com dificuldades acentuadas ou até mesmo medo ou aversão a estas disciplinas. Os livros-texto muitas vezes não oferecem oportunidades suficientes para estimular a curiosidade por outras áreas do conhecimento. A interdisciplinaridade é ainda pouco explorada e muitas vezes utilizada de maneira forçada ou artificial. Talvez a adoção de uma estratégia interdisciplinar possa gerar uma oportunidade para tornar o ensino destas disciplinas, quando possível, mais atraente e mais próxima da realidade.

Frequentemente o ensino de física e particularmente o da matemática estão pouco contextualizados. Alunos aprendem a resolver equações mas não sabem aplicá-las em uma situação problema. Os conhecimentos muitas vezes são ensinados como se viessem "prontos", sem discutir o processo pelo qual se desenvolveu, qual contexto histórico estava presente ou ainda qual contexto social existia.

O contexto sócio-histórico é fundamental para a construção do conhecimento científico. Uma abordagem histórico-epistemológica se faz necessária na medida em que aproxima os alunos daquilo que estão aprendendo. Conhecer a situação histórica e social em que se deu algum progresso científico é, além de mais interessante, mais condizente com a realidade uma vez que todo o progresso científico é humano.

Citando mais uma vez os PCN:

> Por outro lado, se a construção do conhecimento científico, tecnológico e cultural é também um processo sócio-histórico, o ensino médio pode configurar-se como um momento em que necessidades, interesses, curiosidades e saberes diversos confrontam-se com os saberes sistematizados, produzindo aprendizagens socialmente e subjetivamente significativas.
> *(PCN, Contexto do Ensino Médio – Pressupostos para a Construção de um Projeto Escolar Democrático - http://portal.mec.gov.br/seb/*

Costuma-se separar um acontecimento histórico de acordo com a visão específica de uma dada disciplina, criando-se várias nuances sobre um mesmo fato. A busca de uma visão mais global se faz necessária para uma a melhor compreensão dos fenômenos envolvidos. Dessa maneira, o estudo da física e da matemática não desvencilhada da música no período do Renascimento, por exemplo, é uma oportunidade para explorar temas destas disciplinas que estão intimamente ligados dentro do contexto histórico. Assim coloca-se o estudo histórico-epistemológico alinhado com a educação

Uma utilização pertinente dos conceitos relacionados à matemática e à música pode ser uma grande oportunidade para desenvolver atividades práticas e experimentais através de oficinas físico-músico-matemáticas.

A construção do monocórdio, por exemplo, vai ao encontro de objetivos sugeridos nos PCN, podendo-se explorar os conceitos de números racionais e irracionais na construção de instrumentos não convencionais que, por exemplo, façam uso de escalas de intervalos representados por números inteiros assim como escalas temperadas, baseadas em intervalos representados por números irracionais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A INTERDISCIPLINARIDADE

A interdisciplinaridade está longe de ser uma proposta pedagógica nova. De fato há muito tempo que se estuda e se fala sobre interdisciplinaridade. Um dos grandes estudiosos da interdisciplinaridade, Georges Gusdorf, apresenta uma evolução das preocupações interdisciplinares desde os sofistas e os romanos até a atualidade, detendo-se particularmente nos momentos em que estas preocupações foram mais evidentes, como no caso do século XVIII, em que a passagem do *múltiplo* ao *uno* foi uma das maiores preocupações dos enciclopedistas franceses (Fazenda, 2002). Entretanto, ainda existe uma falta de precisão terminológica no trato de questões relativas à integração do conhecimento. Apesar de serem empregados frequentemente os termos *pluridisciplinaridade*, *multidisciplinaridade*, *interdisciplinaridade* e *transdisciplinaridade*, estes mesmos estão muito longe de serem utilizados de maneira consistente uma vez que suas fronteiras não estão estabelecidas.

A questão interdisciplinar entretanto aparece em destaque quando se fala sobre a especialização do saber. Tal especialização teria começado a partir do século XIX (Pombo, 2004). Desde lá até os dias de hoje novos ramos de especializações aparecem dentro do conhecimento acadêmico. Não há nada de errado com isso se supusermos que após a separação de um conhecimento geral através da especialização, nós consigamos, em um momento futuro, reunir as partes e recompor tudo de volta e assim talvez tenhamos uma compreensão total. Mas será que isso acontece? No início do século vinte, quando a especialização já estava em voga há muitos anos, alguns cientistas acenaram para um perigo da especialização.

Oppenheimer, em um texto de 1955 – *Science and the Common Understanding* – descreve a situação do fazer científico especializado, em que cada vez sabemos mais de cada vez menos (Oppenheimer, 1955 apud Pombo, 2004)

> […] Hoje, não são só os nossos reis que não sabem matemática mas também os nossos filósofos não sabem matemática e, para ir um pouco mais longe, são também os nossos matemáticos que não sabem matemática. Cada um deles conhece apenas um ramo do assunto e escutam-se uns aos outros com um respeito fraternal e honesto. (...) O conhecimento científico hoje não se traduz num enriquecimento da cultura geral. Pelo contrário, é posse de comunidades altamente especializadas que se interessam muito por ele, que gostariam de o partilhar, que se esforçam por o comunicar. Mas não faz parte do entendimento humano comum. O que temos em comum são os simples meios pelos quais aprendemos a viver, a falar e a trabalhar juntos. Além disso, temos as disciplinas especializadas que se desenvolveram como os dedos da mão: unidos na origem mas já sem contacto.[1]

É inegavel que o avanço científico nos proporcinou uma qualidade de vida melhor, o conhecimento específico de determinadas áreas tornou possível a produção de tecnologias de altíssimo nível que usufruimos freqüentemente. Entretanto essa tendência de especializarmos cada vez mais dentro de uma área do conhecimento talvez esteja começando a mudar. Segundo Pombo, o progresso da investigação se faz hoje e cada vez mais devido ao cruzamento de suas hipóteses e resultados com as hipóteses e resultados de outras disciplinas.

> […] o progresso da ciência, a partir sobretudo da segunda metade do século XX, deixou de poder ser pensado como linear, resultante de uma especialização cada vez mais funda mas, ao contrário e cada vez mais, depende da fecundação recíproca, da fertilização heurística, de umas disciplinas por outras, da transferência de conceitos, problemas e métodos, numa palavra, do cruzamento interdisciplinar. Trata-se de reconhecer que determinadas investigações reclamam a sua própria abertura para conhecimentos que pertencem, tradicionalmente, ao domínio de outras disciplinas e que só essa abertura permite aceder a camadas mais profundas da realidade que se quer estudar. Estamos perante transformações

[1] Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).

epistemológicas muito profundas. É como se o próprio mundo resistisse ao seu retalhamento disciplinar.(Pombo, 2004).[2]

Segundo Gilbert Duran, a ciência moderna necessita de um salto heurístico para que continue a prosperar. Tal salto heurístico, segundo ele, sempre esteve e continua estando dependente de uma larga informação e cooperação interdisciplinar (Pombo, 2004). Segundo Gilbert Duran,

> […] os sábios criadores do fim do século XIX e dos dez primeiros anos do século XX (esse período áureo da criação científica, em que se perfilam nomes como os de Gauss, Lobatchevski, Riemann, Poincaré, Hertz, Becquerel, os Curie, Rutherford, Pasteur, Max Plank, Bohr, Einstein), tiveram todos uma formação largamente pluridisciplinar, herdeira do velho trivium (as humanidades) e do quadrivium (os conhecimentos quantificáveis e, portanto, também a música) medievais. (1991,Durand apud Pombo, 2004).

Muitos outros autores eminentes no estudo da interdisciplinaridade atestam a necessidade de um estudo mais amplo da questão interdisciplinar uma vez que se faz necessário a sua adoção no âmbito enducacional. Para Delattre:

> [...] As investigações interdisciplinares inscrevem-se em definitivo na categoria dos trabalhos fundamentais de qualidade que, ao longo dos séculos, tiveram por objectivo fazer progredir os nossos conhecimentos sem perder de vista que o homem, se por um lado quer saber fazer, por outro quer também compreender este mundo, do qual ele é simultaneamente parte integrante e parte interessada, a fim de nele se inserir melhor e se sentir mais à vontade. É daí, essencialmente, que provém esta necessidade se uma unidade do saber que constituiu uma das condições primeiras de todo o humanismo verdadeiro. Mas, para proseguir a tarefa nesta via, é necessário vencer hoje o entusiasmo pela facilidade que decorre do "teconologismo", preocupados sobretudo com os saberes parcelares e remetendo para melhores dias a busca da compreensnsão. Esquecemos muitas vezes que espíritos desmembrados só podem construir uma ciência e uma sociedade igualmente desmembradas.[3]

---

[2] Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).
[3] Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).

O tema da interdisciplinaridade ainda é muito polêmico no âmbito educacional atual. Há aqueles que defendem a especialização com unhas e dentes e atestam que a interdisciplinaridade é ineficiente, inapropriada ou até mesmo uma farsa pois acreditam que o aprendizado verdadeiro só é possível através da concentração em áreas específicas.

Tal visão da interdisciplinaridade pode acontecer talvez por que geralmente é mais fácil adotar uma visão única de um dado fenômeno buscando compreendê-lo dentro do nosso repertório de domínio específico. A tentativa de estudarmos um fenômeno procurando entendê-lo por outros ângulos é arriscada uma vez que estaríamos fora da nossa zona de conforto cognitivo. Já passei por experiências na minha prática docente, às vezes até constrangedoras, em que colegas professores de uma dada disciplina diferente da matemática, me convidavam a participar de uma atividade supostamente interdisciplinar da sua matéria com a matemática, simplesmente por tal atividade conter números. Para dar um exemplo, recentemente uma colega, professora de português, organizou uma atividade que consistia em fazer sabonetes. A professora comprou fôrmas, essências, corantes, parafina e tudo o que era necessário para realizar a tarefa. Junto com o professor de ciências, os alunos do 7º ano realizaram a tarefa no laboratório seguindo um roteiro.

Os alunos tiveram que pesar substâncias, aquecer, misturar e colocar nas fôrmas. Todo o processo foi muito divertido e prazeroso para os alunos. Eles apreciaram bastante a atividade e perceberam que o gênero “receita” (contido no roteiro) utilizava muito o modo imperativo – algo que eles haviam recentemente estudado em português. Eles também relacionaram o derreter da parafina com as mudanças de estado aprendidas nas aulas de ciências. Não obstante esses aspectos positivos e pertinentes, a atividade entretanto oferecia pouca oportunidade para se explorar a matemática. Os professores de português e de ciências imaginaram que o fato de conter números, era por si só suficiente para que aquela atividade se caracterizasse por uma atividade interdisciplinar unindo português, ciências e matemática.

Não raro caímos na tentação de considerarmos os *números* entidades do domínio exclusivo da matemática, mas na realidade o conceito de número como quantidade está presente em inúmeras situações cujo cunho matemático é bem pequeno ou até mesmo inexistente. A idade de uma pessoa, a hora de ir para a cama, o peso de alguém, etc são exemplos de assuntos corriqueiros que todos nós discutimos com desenvoltura sem necessariamente atribuirmos uma dimensão matemática. Todos aqueles que se consideram “ruins” em matemática não têm o menor constrangimento de relatar a alguém o horário que foi dormir, ou qual a sua altura em metros. Talvez esta visão simplista e extremamente reducionista de uma atividade interdisciplinar exista ainda porque muitas vezes professores são pressionados a realizarem práticas interdisciplinares sem o tempo nem o preparo necessário para que sejam verdadeiras. Também pode ser que adotem esta prática reducionista apenas por ter sido uma requisição da coordenação e que eles se sentem obrigados a fazer algo "interdisciplinar" sem mesmo acreditarem ou ainda não terem tempo par desenvolver e planejar para desenvolver uma atividade mais profunda e verdadeira.

Em uma certa ocasião, após apresentar um projeto interdisciplinar a um professor renomado, recebi o seguinte comentário "a interdisciplinaridade é uma bobagem, ninguém aprende de verdade através dela. É uma desculpa para não assumir a responsabilidade de ter que ensinar bem em uma dada disciplina que não é do domínio imediato do professor". Se por um lado isso pode ser verdade, por outro lado evitá-la poderia então significar que a pessoa não quer assumir a responsabilidade de ter que aprender e conhecer mais sobre outra disciplina para conseguir propor uma atividade suficientemente consistente em que se aprende de fato.

Atividades interdisciplinares podem ser de vários níveis. Desde um simples texto abrangendo duas disciplinas até um complexo projeto interdisciplinar envolvendo várias áreas do saber e com profundidade suficiente. A meu ver, o importante é que qualquer que seja a atividade interdisciplinar, para que ela seja proveitosa pedagogicamente não podemos pecar pela *artificialidade* nem pela *superficialidade*. Trabalhar interdisciplinarmente requer preparo do professor e muitas vezes uma boa interação com os outros professores das outras áreas do saber. Ensinar dentro do repertório exclusivo de uma disciplina é "fácil" e se buscamos evitar a sobrecarga de trabalho cabamos não optando por esta estratégia.

Segundo Gusdorf (Gusdorf *in* Guimarães, Levy, Pombo – 2006), a interdisciplinaridade é uma necessidade premente, uma exigência uma vez constatado o estado de carência que se encontra o conhecimento científico devido ao seu processo de especialização durante séculos. Para Gusdorf "O saber fragmentado é obra de uma inteligência dispersa que pode ser considerada como tendo perdido a razão. Daqui resulta um desequilíbrio que atinge toda a personalidade humana. Esta alienação científica é, sem dúvida, uma das causas do mal-estar da civilização contemporânea." (Gusdorf, 1986).

Tal necessidade foi antevista por vários teóricos desde o século XVII. Em 1657, o pensador checo, pedagogo e teólogo Comenius (Jan Amos Komenský, 1592-1670) terminava a sua obra prima – *Didactica Magna* – em que ele propõe uma didática capaz de ensinar tudo à todos. "*Tratado de Arte Universal de Ensinar Tudo à Todos*" (Comenius, 2001). Nesta obra Comenius define um programa chamado *Pansofia*, que vem a ser uma ciência universal capaz de remediar a fragmentação do conhecimento que lhe parecia caracterizar a situação epistemológica de sua época. No final do século XVII, ninguém menos que Leibniz, considerado um gênio universal, físico, filósofo, matemático, proclamava a necessidade da unificação do saber. Leibniz faz um análise que continuaria ainda hoje atual quando diz

> "O gênero humano, considerado na sua relação com as ciências que servem ao nosso bem estar, parece-me semelhante a uma multidão que marcha confusamente nas trevas sem ter nem chefe, nem ordem, nem palavra, nem outras marcas para regular a marcha e para se reconhecer. Em lugar de nos darmos as mãos para nos guiarmos mutuamente e assegurarmos o nosso caminho, corremos ao acaso e obliquamente; chocamos e magoamo-nos mesmo uns aos outros em vez de nos entreajudarmos e apoiarmos mutuamente. Atolâmo-nos nos pântanos e areias movediças das dúvidas sem fim, onde não há nada de sólido ou de firme, ou então arrastamo-nos nos princípios de erro mais perigoso. É fácil ver que o que mais nos poderia ajudar seria juntar os nossos trabalhos, partilhá-los com vantagem e regulá-los com ordem; mas, presentemente, o que é que ninguém se arrisca ao que é difícil, ao que não foi ainda desbravado, e todos acorrem ao que os outros já fizeram, ou copiando-se entre si, ou combatendo-se eternamente". (Die philosophische Schriften, ed. Gerhardt, t. VII apud Gusdorf, 1986).[4]

Para Gusdorf "Longe de ser uma descoberta do nosso tempo, o tema do conhecimento interdisciplinar remonta tão longe quanto a desintegração moderna do conhecimento" (Gusdorf, 1986). No curso da história da ciência, apesar de várias tentativas para recuperar a unidade do conhecimento, o processo de desintegração do saber continua através da contínua especialização das disciplinas. Para o autor:

> "[...] compartilhar profundo conhecimento específico entre poucos estudiosos no mundo que também se dedicam a uma mesma especialidade é bastante confortante uma vez que este pequeno grupo passa a ser o único responsável por discutir tais assuntos, que se tornam "verdades" dentro daquela realidade. Não há outra exposição pois ninguém mais tem capacidade de contestar ou até mesmo compreender o que estudam.

Segundo Gusdorf, no ocidente foi o pensamento Grego que promoveu um processo racional que adquiriu âmbito geral de um modelo epistemológico que assegurou a coerência de um saber global harmonioso do universo. Tal esquema epistemológico global

[4] Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).

corresponderia a uma pedagogia unitária. Os mestres helênicos teriam sido portanto os inventores da cultura geral. O seu programa recebe o nome de *enkuklios paideia*, ou ainda “enciclopédia”. Para o autor, o conhecimento interdisciplinar deve retomar o tema da *enkuklios paideia* em um contexto epistemológico bastante mais complexo. “É chegada a hora de uma reunificação do espaço mental. Um reagrupamento dos saberes deve restituir ao ser humano o seu lugar privilegiado de ponto de partida e de ponto de chegada de todas as formas de conhecimento”. (Gusdorf, 1986)

É possível que com o tempo ainda exista certa resistência daqueles que são contra a interdisciplinaridade. Apesar deste tema estar cada vez mais presente, desde os anos 70, para George Vaideanu (Vaideanu, 1987) “[...] ele suscita esperanças e inquietudes, o interesse de uns e a hostilidade de outros [...]” a interdisciplinaridade “[...] ascendeu rapidamente ao nível das prioridades epistemológicas e pedagógicas”.

Para Heinz Heckhausen, antes de precisar o sentido vago que se atribui ao termo “interdisciplinaridade”, é necessário precisar bem o que entende-se por disciplinaridade. Para o autor, a disciplinaridade

> “[...] é a exploração científica especializada de um domínio determinado e homogêneo de estudo, exploração esta que consiste em fazer brotar conhecimentos novos que se vão substituir a outros mais antigos. O exercício de uma disciplina leva a formular e a reformar incessantemente a soma atual dos conhecimentos adquiridos no domínio em questão.”

Heckhausen aplica sete critérios distintos para caracterizar a natureza de uma dada disciplina e para a distinguir entre as demais. Uma vez definidos os critérios pelos quais uma dada disciplina poderá ser caracterizada como tal e dimensionada dentro do seu domínio em questão, tem-se uma idéia de sua “disciplinaridade” representando suas possibilidades e limites de tal disciplina. Mais adiante Heckhausen elenca seis tipos de relações interdisciplinares, estando elas em ordem crescente de maturidade. Dessa maneira a primeira relação seria de certa forma a mais artificial ou seja, longe de uma interação em que duas ou mais disciplinas atingiriam uma interdependência máxima, caso este que seria encontrada na última relação, dita *interdisciplinaridade unificada.*

Segundo Torres (2007)

> A vantagem de uma distinção deste gênero é evitar considerar errada toda a interdisciplinaridade que não for o resultado de uma verdadeira integração de método e

linguagem, avaliando diferentes níveis de integração do saber e desse modo deixando margem para aplicações diferenciadas.

Os seis tipos de relações interdisciplinares de Heckhausen:

1 *Interdisciplinaridade heterógena* – este tipo se refere aos reforços de caráter enciclopédico, de combinar programas diferentes com doses diferentes de cada programa para formar um novo programa que atenda às necessidades de formação de cursos profissionalizantes, de nível imediatamente inferior ao do ensino universitário. Heckhausen cita como exemplos a formação de um professor primário, ou de trabalhadores do serviço social, que precisam ter um mínimo de conhecimento de sociologia, psicologia social, economia do trabalho, etc. Ele ainda intitula este tipo de interdisciplinaridade com um *ensino enciclopédico de caráter superficial e ingênuo*.

2 *Pseudo-interdisciplinaridade* – geralmente acontece quando se tem uma idéia audaciosa, mas errônea, segundo a qual a interdisciplinaridade intrínseca poderia ser estabelecida entre disciplinas que recorrem aos mesmos instrumentos de análise. Um exemplo é um curso de “Modelos matemáticos e modelos computacionais” cujo conteúdo representa uma subdivisão interdisciplinar da escola e cobre disciplinas tão diversas quanto antropologia e ciências econômicas. O termo “modelos” dá a falsa impressão de que de fato há algo em comum entre as disciplinas.

3 *Interdisciplinaridade auxiliar* – este tipo se refere à disciplinas que utilizam métodos de outras disciplinas pois fornecem informações a respeito de um domínio de estudo particular que tem um certo valor indicativo para o domínio da primeira disciplina e portanto para o seu nível próprio de integração teórica. Por exemplo, a pedagogia recorre aos testes psicológicos, não só para fundamentar as suas decisões em matéria de ensino, mas para também para pôr à prova as teorias da educação

4 *Interdisciplinaridade compósita* – este tipo de interdisciplinaridade ocorre da necessidade de se apresentar soluções importantes para se resolver problemas que são de natureza interdisciplinar e postos pela dignidade do homem e pela sua sobrevivência: a luta contra a guerra, a fome, a delinqüência, a poluição, etc. O elo que une disciplinas tão diversas reside na necessidade imperiosa de encontrar soluções técnicas viáveis e rápidas para tais problemas. Um exemplo é o urbanismo, que para resolver seus problemas faz uso da engenharia, arquitetura, economia, biologia, psicologia, etc.

5 *Interdisciplinaridade complementar* – este tipo costuma aparecer em disciplinas pertencentes ao mesmos domínios materiais, pois tais disciplinas já se sobrepõem parcialmente, criando assim relações complementares entre seus respectivos domínios de estudo. A interdisciplinaridade neste caso cria uma certa correspondência entre as disciplinas. É comum aparecer em regiões fronteiriças de uma disciplina dando origem, por exemplo, à psicolingüística, à psicobiologia, à psicofisiologia, etc.

6 *Interdisciplinaridade unificada* – este tipo de interdisciplinaridade advém de uma relação de coerência cada vez mais estreita dos domínios de estudos de duas disciplinas. Esse seria o caso paradigmático da biofísica e de todas as tentativas recentes de integrar a física, a química e a biologia no nível da integração teórica da física.

Estas seis relações representam um exemplo de como a questão interdisciplinar não é trivial nem clara dentro do âmbito educacional. Todos os autores estudados para esta pesquisa têm em comum acordo que a questão interdisciplinar é complexa e apresenta vários níveis de interdisciplinaridade. Uma outra questão de consenso é que a há uma tendência premente de se adotar uma visão interdisciplinar na educação e que frequentemente isso é feito de maneira artificial ou até mesmo equivocada. A questão interdisciplinar demanda um estudo e maior conhecimento de como aplicá-la e adotá-la de maneira eficiente.

É unânime para estes autores a necessidade do emprego de estratégias interdisciplinares no âmbito escolar. Vaideanu ainda aponta para a necessidade de considerar elementos preliminares da inserção no sistema educativo. Para ele há alguns especialistas que têm a tendência de isolar a interdisciplinaridade considerando-a como um fim em si mesma. Acredito que a interdisciplinaridade, não obstante seu caráter essencial, não deve ser superestimada ou ainda elevada a um patamar superior de auto-suficiência. Não se trata de produzir um ensino exclusivamente interdisciplinar. O caráter específico das disciplinas pode ainda existir mas de maneira a não negar as inter-relações com outras disciplinas e, mais que isso, oferecer oportunidades concretas de estudar situações dentro de um âmbito completamente interdisciplinar, e realizar isto de maneira eficiente e não superficial. Vaideanu afirma que

> A interdisciplinaridade (e sobretudo a disciplinaridade) não anula a disciplinaridade ou a especificidade; o que faz é derrubar as barreiras entre as disciplinas e evidenciar a complexidade, a globalidade e o carácter fortemente

> imbricado da maioria dos problemas concretos a resolver. Isto é, dá uma visão mais clara da unidade do mundo, da vida e das ciências;

Vaideanu vai além ao afirmar que:

> A interdisciplinaridade supõe naturalmente a existência das disciplinas e reconhece que a abordagem disciplinar é por vezes insubstituível; simultaneamente, fornece a demonstração de que a abordagem disciplinar já não é satisfatória num grande numero de situações e, por isso, acaba por contestar "os conteúdos parcelares" e as barreiras que separam as disciplinas de forma demasiado rígida.

De uma maneira ideal, poderíamos esperar que todas as atividades e projetos interdisciplinares tivessem uma relação de interdisciplinaridade unificada segundo Heckhausen. Mas isso é muito pouco provável, e talvez nem desejável. Quaisquer oportunidades de adotarmos relações interdisciplinares são bem vindas, desde que seja claro para o educador qual o nível de relação está presente para que se tenha claro as expectativas de aprendizado e de relevância interdisciplinar.

Trata-se portanto de adotar uma estratégia interdisciplinar sempre que possível, com critério, dentro de suas possibilidades, mas sem jamais forçar uma situação artificial. Algumas disciplinas, incluindo aquelas que surgiram há pouco tempo, têm características interdisciplinares intrínsecas, sendo estas bem mais convidativas para uma aplicação interdisciplinar. Exemplos são a educação ambiental, a educação para a paz, a educação para a cidadania, etc.

Vaideanu afirma que os conteúdos do ensino se multiplicam, que a interação entre eles é enorme que sua evolução é rápida.

> Se se pretendem respostas à problemática do mundo contemporâneo que, pelo seu carácter fortemente imbricado transcendem as disciplinas tradicionais e colocam terríveis problemas metodológicos aos criadores dos programas e aos docentes. Sublinhemos enfim que de futuro, os conteúdos da educação não formal não poderão ser ignorados pelo ensino de tipo escolar. (...) precisemos desde já que, mesmo que "a informação não seja conhecimento", é um facto que os alunos aprendem, fora da escola, muitas coisas úteis e novas. Ora, a aprendizagem de tipo não formal é de carácter pluri ou multidisciplinar, ao passo que a aprendizagem escolar é concebida em disciplinas compartimentadas. Os

> conteúdos do ensino encontram-se assim em face de uma série de dilemas: evoluir na linha tradicional, ignorando o grande número de fontes de um conteúdo pertinente, ou abrir-se às novas mensagens procurando dominá-las e organizá-las? Ater-se aos métodos tradicionais que ameaçam isolar e enfraquecer a escola, ou recorrer a métodos globais e interdisciplinares susceptíveis de produzir conteúdos equilibrados e integrados quanto às exigências da vida social, da ciência e do mundo contemporâneos?[5]

Vaideanu atenta para a necessidade de associar a interdisciplinaridade a outras idéias novas. Assim os educadores, investigadores e responsáveis pelo planejamento de currículos devem estar cada vez mais preocupados com a articulação e a integração, ou seja, com uma abordagem global que consiga conjugar os princípios e os novos resultados das ciências da educação e de evitar a ruptura entre os componentes de um mesmo sistema.

Para Delattre (Delattre, 1973), a própria história do pensamento "[...] evidencia uma forte oscilação entre as sínteses filosóficas insuficientemente justificadas e as análises fragmentadoras que apenas conduzem a uma poeira de constelações empíricas não relacionadas entre si". A necessidade de novas sínteses são cada vez mais evidentes quanto maiores são as dificuldades de com que nos deparamos para reconstruir os comportamentos globais que observamos.

Em suma, considerando que a educação atual almeja objetivos que ultrapassam os objetivos cognitivos específicos – por vezes muito limitados – e sim objetivos mais complexos, tais como a autonomia intelectual, habilidade de resolução de problemas, a atitude democrática e uma visão articulada e crítica do conhecimento, essas finalidades só serão possíveis através da superação e integração dos recursos específicos das disciplinas isoladas. O interdisciplinaridade constitui uma abordagem apropriada para a formação das atitudes, das aptidões e das capacidades intelectuais.

---

[5] Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).

2.2 A EPISTEMOLOGIA DE BACHELARD

Segundo Martins (Martins, 2004), o pensamento epistemológico desempenha um amplo papel na fundamentação e na crítica a modelos de ensino, estabelecendo vínculos entre concepção de desenvolvimento científico e aprendizagem da ciência. Fala-se muito sobre o desenvolvimento de capacidades analíticas e críticas no aprendizado de hoje. O questionamento é essencial no processo de aquisição e compreensão de conhecimento. O aluno questionador refletirá sobre aspectos do tipo Como? Por que? De que forma? Qual a motivação para que algo tenha se desenvolvido? Em que contexto se encontrava a história então? Até que ponto tal aspecto influenciou, etc. É nesse aluno que o pensamento epistemológico surge como algo inerente ao sujeito que aprende, em diversos níveis de profundidade e consciência (Martins, 2004). Isso provoca demandas sobre o professor, que deve ser capaz de avaliar diferentes perspectivas epistemológicas naquilo que está ensinando.

Portanto quando se pensa no ensino de ciências e da matemática, a dimensão epistemológica não pode ser mais desconsiderada. O professor que tem um posicionamento epistemológico estará contribuindo para que o aprendizado seja feito de maneira mais profunda, dentro das expectativas de hoje.

Há muitos epistemólogos que o professor de ciências e de matemática pode-se utilizar como referências no seu estudo para ampliar os seus conceitos com relação ao processo de desenvolvimento da ciência e da matemática. O professor deve revisitar acontecimentos históricos relativos a sua matéria de um ponto de vista histórico-epistemológico munido de ferramentas adquiridas no estudo da epistemologia. Tais ferramentas são desenvolvidas na medida que se estuda a epistemologia voltada para o desenvolvimento científico.

Thomas Kuhn, Karl Popper, Imre Lakatos e Gaston Bachelard formam talvez o grupo de teóricos mais utilizado como referência no estudo do desenvolvimento científico e matemático. Quaisquer desses autores oferecem uma importante literatura sobre a epistemologia. Cabe ao professor escolher qual ou quais lhe será(ão) mais oportunos.

Gaston Bachelard foi o escolhido como referência para esse projeto. Em seu livro A formação do espírito científico, Bachelard afirma que o papel da matemática na física contemporânea supera a simples descrição geométrica. Segundo ele “o matematismo já não é descritivo e sim formador. A ciência da realidade já não se contenta com o como fenomenológico; ela procura o porquê matemático.” Essa visão é de particular interesse nesse trabalho que aborda justamente o período pelo qual a música passa por uma matematização em busca de um referencial físico, realista e não mais o especulativo, fundamentado no pitagorismo.

Bachelard comenta que o pensamento científico abstrato não é sinônimo de má consciência científica e que na realidade a abstração desobstrui o espírito científico, tornando-o mais leve e dinâmico. A abstração será necessária para compreender o temperamento igual, pois as razões de números inteiros não mais serão suficientes para garantir uma uniformidade acústica, e números irracionais deverão ser utilizados. A música passará a ser vista de maneira mais experimental e menos especulativa. Na realidade vários intervalos musicais serão representados por aproximações de números irracionais e a idéia de perfeição – quando todos os intervalos são representados de maneira exata – não mais existirá.

A necessidade de se adquirir uma percepção abstrata no desenvolvimento da ciência é vital para Bachelard, mas ele alerta que o processo de abstração não é uniforme. Há inúmeros ramos na evolução científica, que vai da percepção considerada exata até a abstração inspirada pelas objeções da razão. As soluções científicas a respeito de problemas diferentes nunca estão no mesmo estágio de maturação, mas para facilitar a compreensão das diferentes etapas históricas do pensamento científico, pode-se, de modo grosseiro, distinguir três grandes períodos:

1. O estado *pré-científico* ➔ que compreenderia tanto a Antigüidade clássica quanto aos séculos do Renascimento.
2. O estado *científico* ➔ final do século XVIII até o início do século XX.
3. O *novo espírito científico* ➔ a partir de 1905 – quando a Relatividade de Einstein deforma conceitos primordiais que eram tidos como fixados para sempre.

Bachelard reconhece, entretanto que uma ordem histórica para representar o desenvolvimento do espírito científico não é apropriada e quando possível esse desenvolvimento deve ser estudado através das questões particulares em cada caso. Em sua formação individual, o espírito científico passaria necessariamente por três estados seguintes:

1. O *estado concreto* ➔ o espírito se entretém com as primeiras imagens do fenômeno e se apóia numa literatura filosófica que exalta a Natureza.
2. O *estado concreto-abstrato* ➔ o espírito acrescenta à experiência física esquemas geométricos.
3. O *estado abstrato* ➔ o espírito adota informações voluntariamente subtraídas à intuição do espaço real, desligadas da experiência imediata e até em polêmica com a realidade primeira.

Dentro desse panorama epistemológico bachelardiano, faz-se necessária a compreensão da noção de obstáculo epistemológico bachelardiano.

2.2.1 A noção de Obstáculo Epistemológico de Gaston Bachelard

Ao analisar o progresso da ciência, Bachelard conclui que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado (Bachelard, 1996). Esses obstáculos aparecem no âmago do próprio ato de conhecer. O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. O real nunca é "o que se poderia achar" mas é sempre o que se deveria ter pensado. Segundo Bachelard, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos. Os obstáculos epistemológicos podem aparecer de diferentes maneiras.

Um primeiro obstáculo seria a "**experiência primeira**": é preciso que o pensamento abandone o empirismo imediato. Bachelard destaca o perigo do deslumbramento que pretensamente proporcionaria um empirismo evidente e básico. Corre-se o risco de que não é preciso compreender, apenas ver. Pelo contrário, segundo Bachelard, o espírito científico deve se formar contra a natureza, oferecendo-lhe resistência. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não há conhecimento cientifico. Nada é evidente.

Um segundo obstáculo epistemológico seria o "**conhecimento geral**". Aqui a generalização é capaz de imobilizar o pensamento. Por trás de uma lei geral, o espírito pré-científico pretende, muitas vezes, explicar tudo. Tecer conjecturas convenientes que justifiquem tudo, mas acabam por não explicar nada.

Um outro obstáculo é o "**verbal**", ou seja, a falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa. Bachelard cita o caso da esponja, e como ela pôde tornar-se uma verdadeira "categoria empírica", capaz de servir de metáforas aos fenômenos mais heterogêneos. A função da esponja é de uma evidência clara e distinta, a tal ponto que não se sente a necessidade de explicá-la. A expressão "o ferro é uma esponja do fluido magnético" é um exemplo típico de obstáculo verbal. Esta é uma metáfora que foge à verdade.

O conhecimento "**unitário**" e "**pragmático**" também formam um obstáculo. O primeiro induz generalizações mais amplas, de caráter filosófico. Há uma tendência de que uma suave letargia imobilize a experiência. O engano de que todas as dificuldades se resolvem diante de uma visão geral do mundo, por simples referência a um princípio geral da Natureza. O pragmatismo está relacionado à convicção de que "encontrar uma utilidade é encontrar uma razão". Essa tendência de querer atribuir a todas as minúcias de um fenômeno uma utilidade característica. Se uma utilidade não caracteriza um traço particular, parece que este aspecto não fica explicado.

O obstáculo "**substancialista**". Por uma tendência quase natural, o espírito pré-científico condensa num objeto todos os conhecimentos em que esse objeto desempenha um papel, sem se preocupar com a hierarquia dos papéis empíricos. Atribui à uma substância qualidades diversas , tanto a qualidade superficial como a qualidade profunda, tanto a qualidade manifesta quanto a oculta. As substâncias tornam-se reflexo de impressões subjetivas, catalisam valores que afastam o pensamento da objetividade.

O obstáculo "**animista**" está relacionado à tendência de aplicar a "intuição da vida" aos mais variados fenômenos. Uma análise à parte merece o "mito da digestão", que como função privilegiada, também foi objeto de analogias abusivas e equivocadas com o mundo inorgânico.

Bachelard ainda examina a "**libido**" e o conhecimento objetivo. Com exemplos retirados da alquimia, mostra como há uma fusão entre imagens objetivas e desejos subjetivos na mentalidade pré-científica. Pensamentos sexuais surgem na descrição do mundo inorgânico, onde metais são divididos em machos e fêmeas, operações são descritas como cópulas, etc. Para Bachelard, não é possível pensar durante muito tempo num mistério, num enigma, sem evocar – de modo mais ou menos encoberto – seus aspectos sexuais. Isso decorre do fato de o nascimento ter sido para a criança o primeiro mistério. O segredo da geração que os pais conhecem e escondem consagram-se como autoridades intelectuais arbitrárias.

Os obstáculos do "**conhecimento quantitativo**". Segundo Bachelard, o conhecimento puramente qualitativo, por si, já conteria um erro a ser retificado. Seria, ainda, um engano pensar que o conhecimento quantitativo escapa, em princípio, aos perigos do conhecimento qualitativo. Como exemplo temos a grande variedade dos primeiros termômetros, em comparação com a padronização quase imediata dos instrumentos atuais de medida. O "conhecimento torna-se objetivo na proporção em que se torna instrumental" (Bachelard, 1996). O que faltaria ao espírito pré-científico seria justamente uma doutrina dos erros experimentais, saber o que pode ser desprezado e o que precisa ser considerado.

Os obstáculos epistemológicos não são presentes apenas nos momentos da pré-ciência. Eles estão impregnados nos conceitos e perturbam mesmo o "novo espírito científico". São difíceis de serem extirpados e carregam valores afetivos que dificultam a objetivação.

2.3 UM PANORAMA DA MÚSICA OCIDENTAL ATÉ O RENASCIMENTO

2.3.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Pitágoras é frequentemente descrito como o primeiro matemático do ocidente. Ele é uma figura extremamente importante no desenvolvimento da matemática, embora saibamos relativamente pouco sobre seus trabalhos. Ao contrario de outros matemáticos gregos, não temos textos escritos por Pitágoras. A sociedade secreta da qual liderou era aparentemente metade científica e metade religiosa. Pitágoras permanece nos dias de hoje uma figura misteriosa.

Não obstante, sabemos que ele desenvolveu um grande trabalho e fez importantes descobertas na área da matemática, da astronomia e da teoria musical. Existem detalhes sobre sua vida presentes em biografias antigas em que frequentemente seus autores lhe atribuíam qualidades divinas, possivelmente com o intuito de representá-lo como uma deidade.

Diz a lenda que um certo dia, Pitágoras estava passando em frente a oficina de um ferreiro, quando de repente sua atenção é surpreendida por alguns sons que vinham do interior desta oficina. O bater de diversos martelos produzia uma cacofonia desordenada e intensa, mas que às vezes produzia um som metálico que parecia dissolver-se e se fundir em um único som agradável. Pitágoras decide então descobrir a razão deste fenômeno e entra na oficina. Esta história está representada em um desenho de Robert Fludd (1618) – O Templo da Musica – em que Pitágoras se encontra dentro da oficina do ferreiro.

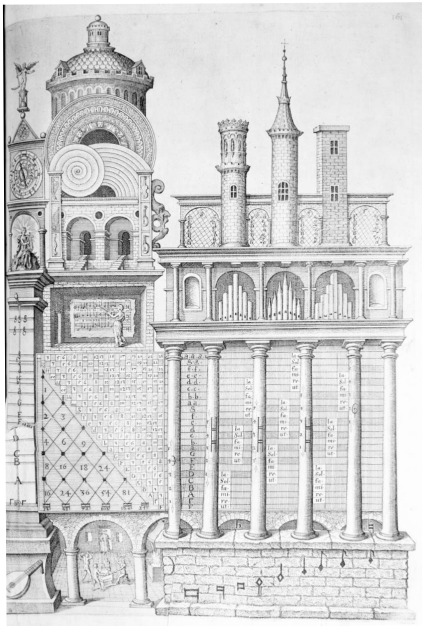


Figura 1 – O Templo da Música de Robert Fludd (1618)

Independente de quão verossímil esta história posa ser, acredita-se que Pitágoras, a partir daí, teria começado um longo e frutífero estudo, com investigações, sobre a música. Ele teria testado diversas maneiras de reprodução sonora, como é representado na figura de Gafurius, mas em especial Pitágoras haveria de estudar profundamente os sons produzidos por cordas vibrantes. Em particular o experimento do monocórdio ficaria para a história.

Gafurius Theorica, f. bvir

Figura 2 – Figura extraída do livro Theorica Musicae de Franchino Gaffurius (1492)

Podemos então dizer que a matemática e a música possuem vínculos profundos desde a Antiguidade. Através das experiências com o monocórdio, Pitágoras organiza e estrutura o conhecimento musical que será a base de toda a música ocidental. Por volta dessa época, a música adquire status de disciplina e passa a ser o quarto ramo da matemática de então. Possivelmente inventado por Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha plana de madeira. Há ainda um cavalete móvel, que tem altura maior que a distância entre a corda e o plano, que, quando colocado sob a corda estendida, possibilita dividir a corda em duas seções.

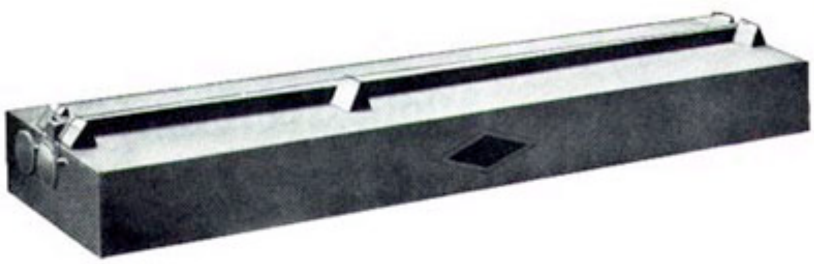


Figura 3 – O Monocórdio

Uma corda nessas condições quando puxada rapidamente com uma palheta (*pizzicata*), produz vibrações que são rápidas ondulações da corda que faz movimentar o ar ao ser redor. Nós percebemos estas ondulações como notas musicais. A velocidade com que a corda vibra varia de acordo com o seu comprimento e tensão na corda. Quanto mais curta for a corda, mais rapidamente ela irá vibrar e o som será mais agudo. Quanto mais longa for a corda, mais lentamente irá vibrar, produzindo um som de freqüência mais baixa, e portanto, mais grave. No caso da tensão, quanto mais tensionada estiver a corda, mais rápido serão as vibrações, portanto mais agudo o som produzido. Analogamente, quanto menos tensionada a corda, mais devagar ela irá vibrar e mais grave será o som produzido.

Todo instrumento de corda desfruta deste fenômeno. Basta pegar um violão e tocar as cordas conforme movemos os dedos das casas no braço do violão. Quanto mais próximo do centro do violão, menor o comprimento das cordas e portanto mais rapidamente ela vai vibrar e percebemos um som mais agudo. Se tocarmos uma dada corda repetidamente e prestarmos atenção a sua altura tonal e simultaneamente variarmos a sua tensão, por exemplo virarmos a cravelha para aumentar a tensão da corda (procedimento feito regularmente pelos violonistas para afinar as cordas), perceberemos que sua altura tonal aumenta, ou seja, a nota musical fica mais aguda. Em um piano existem cordas de vários tamanhos com tensões diferentes de maneira a proporcionar toda a gama de notas musicais necessárias para render ao piano um instrumento tão completo. Tanto no piano como no violão, entretanto, notamos que além da tensão empregada na corda e do comprimento alterarem a freqüência da nota, percebemos que a espessura das cordas também é diferente. A corda mais espessa no violão é geralmente de metal e é responsável pela nota mi. Quanto mais espessa a corda, mais pesada e portanto mais devagar ela irá vibrar, portanto quanto mais fina a corda, mais leve e mais rápido a corda irá vibrar. Essa relação permite conseguir reproduzir alturas tonais mais agudas ou mais graves sem a necessidade de um comprimento muito pequeno ou muito grande da corda. Dessa maneira o piano consegue dispor de todas as cordas necessárias para reproduzir sons de altura tonal que vai do mais grave até o mais agudo. Uma curiosidade é que se quiséssemos construir um piano de cauda em que todas as suas cordas fossem de igual espessura e pudéssemos apenas variar a tensão e fixar seus comprimentos, necessitaríamos de uma cauda de pelo menos sete metros [6] para conseguir reproduzir todas as alturas tonais.

Voltando ao monocórdio, uma vez fixada a tensão da corda, podemos variar o comprimento da corda através do pequeno cavalete. Assim podemos comparar a altura tonal do som produzido com a corda solta (sem o cavalete) com aquela produzida por um determinado comprimento da corda (com o cavalete). Nós podemos perceber este espaço entre um som mais grave e outro mais agudo como uma distância. A esta distância, denominamos musicalmente *intervalo*. Uma sucessão de intervalos produz uma melodia, que quando sobrepostos e tocados simultaneamente, estes intervalos dão origem a uma harmonia.

Pitágoras, ao pesquisar os diversos intervalos sonoros produzidos com cordas de diversos comprimentos, percebeu que alguns que para ele soavam mais "agradáveis" ou mesmo perfeitos eram formados através de razões simples de números inteiros. Se deixarmos vibrar simultaneamente duas cordas (isso pode ser feito em um bi-córdio ou utilizando dois monocórdios) de maneira que a mais curta vibre exatamente com o dobro da velocidade, perceberemos que essas cordas produzem um par de sons que se fundem perfeitamente, como se cada um pertencesse ao outro. Este intervalo foi nomeado por Vincenzo Galilei de "rainha das consonâncias", ou seja o intervalo que nos é mais naturalmente perfeito. A proporção entre os comprimentos da cordas é exatamente 2 para 1, ou seja, 2:1. A corda de comprimento 2 vibra com metade da velocidade da corda de comprimento 1. Podemos então dizer que em termos de velocidade, ou freqüência, a corda menor vibra duas vezes mais rápido que a corda mais longa, ou seja com a proporção 1:2.

[6] Informaçnao retirada da revista americana Keyboard, edição especial sobre a história do piano – 1986. Deve-se considerar esta informação apenas como um exemplo possível.

Concluindo, os experimentos de Pitágoras com o monocórdio evidenciaram relações entre o comprimento de uma corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocado (altura tonal). Em concordância com os princípios de sua escola, Pitágoras buscou relações de comprimentos que produzissem determinados intervalos sonoros. Tais relações eram representadas por razões de números inteiros.

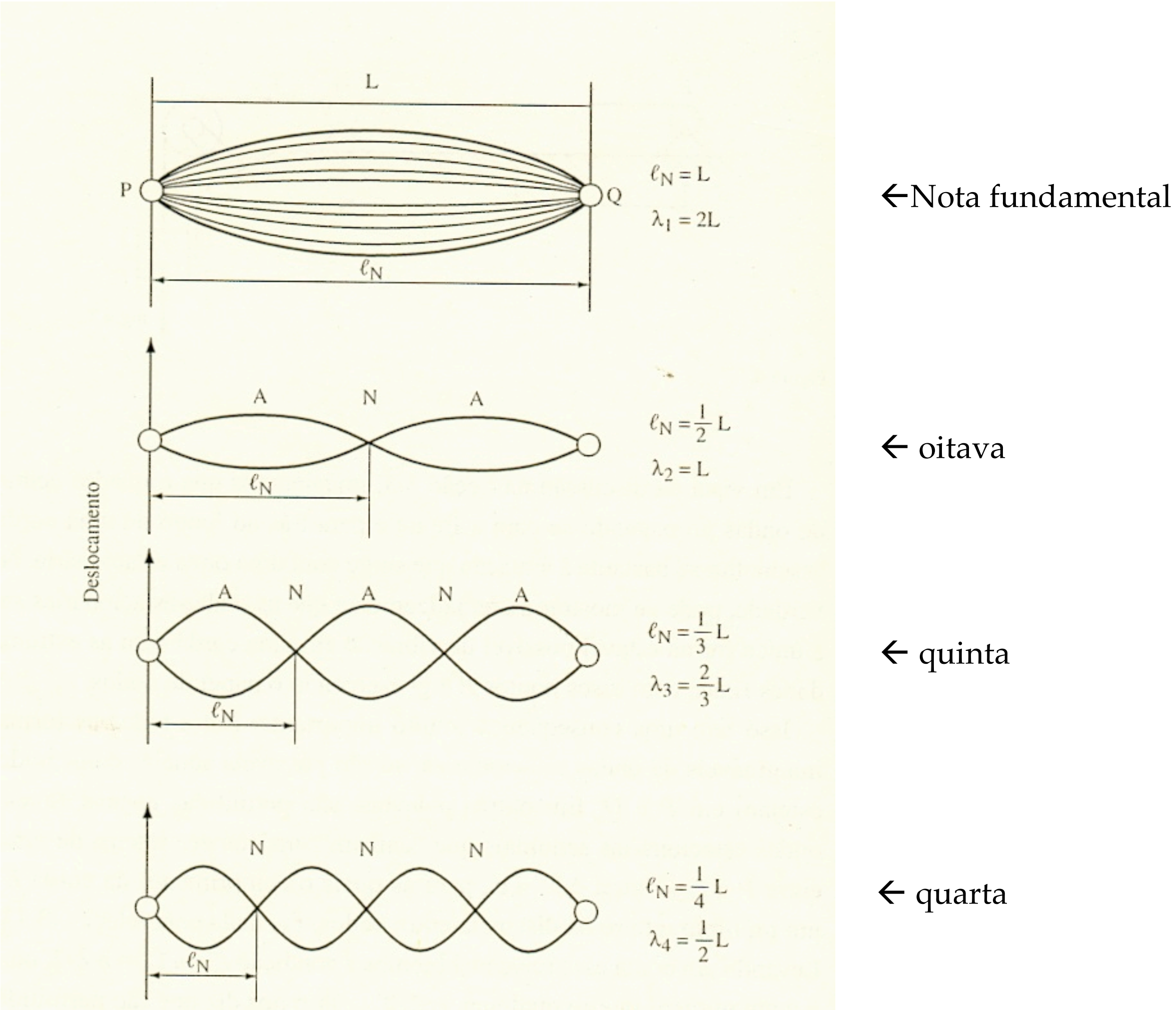


Figura 4 – Ondas e intervalos sonoros, Roederer (2002)

Em seu experimento, Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda e tocando-o, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, quando tal ponto era pressionado a 2/3 do tamanho da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original . Podemos representar esses intervalos com um desenho (figura 4). Tomemos L como o comprimento da corda do monocórdio (entre os dois extremos P e Q) e l_N pelo comprimento da corda até o cavalete. Quando l_N é a metade de L, temos um intervalo de oitava, em relação à nota produzida pela corda solta. Quando l_N é 1/3 de L, temos um intervalo de quinta, em relação à nota produzida pela corda solta e ainda quando l_N é 1/4 de L, teremos um intervalo de quarta, em relação à nota produzida pela corda solta, como mostra a figura.Pitágoras estudou extensivamente tais intervalos e estabeleceu relações simples: 1/2, 2/3 e 3/4 associando-as respectivamente às consonâncias perfeitas (intervalos sonoros) – oitava, quinta e quarta. Se de um lado essas consonâncias representavam uma pureza sonora que poderia produzir uma música "perfeita", por outro lado tais consonâncias marcaram uma limitação no sistema musical pitagórico na medida em que as distinção entre consonâncias e dissonâncias era muito rígida. Esses intervalos, descritos na figura 5, passam a denominar-se consonâncias pitagóricas.

Em outras palavras, para Pitágoras, os intervalos musicais podem ser divididos em intervalos que são consonâncias "perfeitas": o uníssono (mesma freqüência tocada por duas fontes distintas), a oitava, a quinta e a quarta; e outros considerados consonâncias "imperfeitas": sexta maior, terça maior, terça menor e sexta menor. Quaisquer outros intervalos deveriam sempre ser representados por razões comensuráveis, ou seja, razões que podem ser representadas por números inteiros. Este fato impossibilita a utilização de números irracionais para representar intervalos e portanto que pode ser visto como um limitação do sistema pitagórico com relação à possibilidade da criação de um temperamento musical.

Razão de Freqüência (n/m)		Intervalo
Consonâncias "perfeitas"	1/1	uníssono
	2/1	oitava
	3/2	quinta
	4/3	quarta
Consonâncias "imperfeitas"	5/3	sexta maior
	5/4	terça maior
	6/5	terça menor
	8/5	sexta menor

Figura 5 – A consonâncias pitagóricas, Roederer (2002)

Até então temos vários intervalos que representam relações entre duas notas. Para se chegar à escala musical, precisamos definir quais notas devemos ter. Um intervalo é o mais importante para a construção de escalas: o de oitava. Como já vimos a oitava é a mais perfeita das consonâncias. Na realidade quando dobramos a freqüência de uma nota, esta nota "sobe" uma oitava, mas nós a identificamos como tão parecida que acaba por ser a mesma nota, apenas uma oitava “mais alta”. Se chamarmos de **lá** o som produzido por uma corda que vibra 220 vezes por segundo, ou seja 220 Hz, se dobrarmos essa freqüência (diminuindo o comprimento da corda pela metade) teremos uma nota que vibra a 440 Hz. Esta nota nos vai parecer também **lá**, mas um lá mais agudo, ou uma oitava acima. Podemos seguir este raciocínio e continuar a dobrar as freqüências para obter **lás** mais altos ainda. Assim teremos o **lá** 880 Hz, o **lá** 1760 Hz, o **lá** 3520 Hz, o **lá** 7040 Hz, o **lá** 14080 Hz, e assim por diante. Existe porém uma limitação: freqüências mais altas que 20 000 Hz não conseguimos ouvir. Logo não há mais **lás** a serem ouvidos pois o próximo teria uma freqüência de 28160 Hz, estando fora do nosso campo auditivo.

Considerando o nosso limite da audição, podemos ouvir sons de freqüências de 20 Hz até 20000 Hz. Isso nos limitaria em algumas oitavas apenas. Na realidade os sons muito próximos do limite superior da audição são muito pouco perceptíveis. Se considerarmos o **lá** mais grave como o de 27,5 Hz e seguindo as oitavas crescentes, temos então:

lá 17,5 Hz, **lá** 55 Hz, **lá** 110 Hz, **lá** 220 Hz, **lá** 440 Hz, **lá** 880 Hz, **lá** 1760 Hz, **lá** 3520 Hz

Temos então oito **lás** ao longo de sete oitavas. Esta é aproximadamente a extensão de freqüências de um piano. Para construir uma escala então precisamos preencher os espaços entre uma nota e sua oitava, neste exemplo entre dois **lás**. Pitágoras utiliza o intervalo de quinta para gerar as notas que irão fazer parte se sua escala. Houve outras construções de escalas, mas aquela que perdurou na música ocidental foi a pitagórica. O critério pitagórico para a construção da escala resulta na obtenção de quintas compostas reduzidas posteriormente à oitava em questão. Dessa maneira a primeira nota a “aparecer”, tendo o dó como a altura tonal da corda livre, será a primeira quinta (com o cavalete na posição 2/3), ou seja, o sol. À partir do sol agora, tomando-se a sua quinta, teremos o ré, cujo comprimento de corda é (2:3)(2:3) que é equivalente à (4:9), mas reduzido à oitava original resulta em (8:9). Analogamente, a próxima quinta será a quinta do ré: lá, representada pelo comprimento (2:3)(2:3)(2:3)=(8:27), que reduzido à oitava em questão será (16:37). Dessa maneira teremos então as doze notas da escala pitagórica, figura 6.

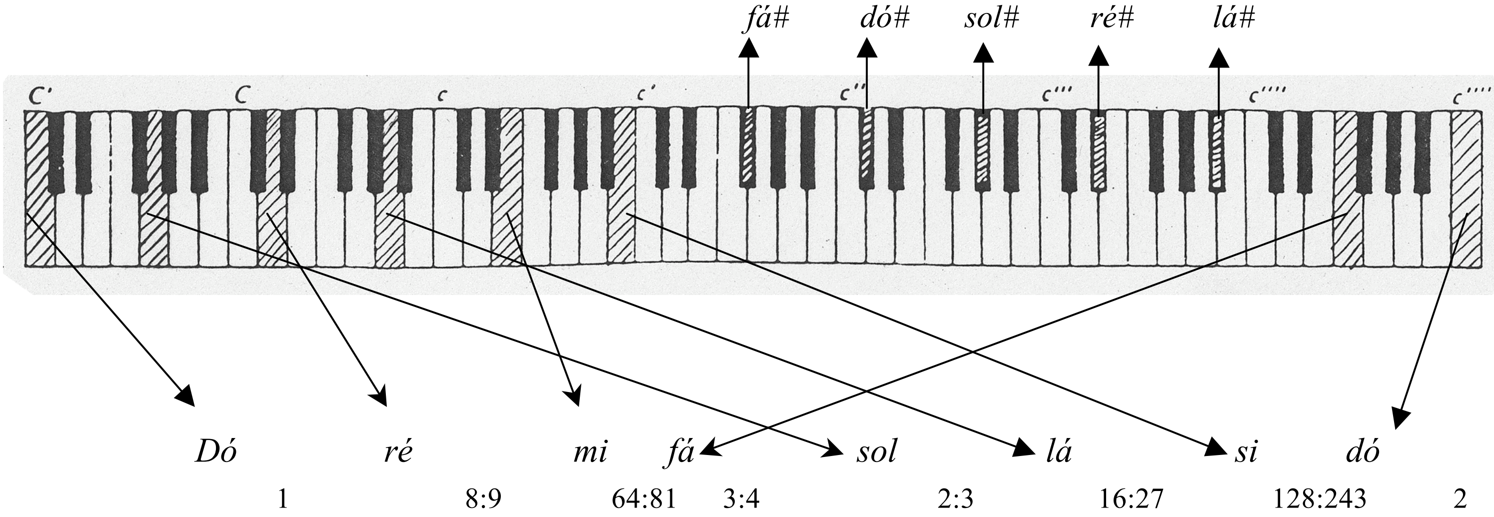


Figura 6 – As notas do ciclo das quintas, partindo do dó, (Abdounur , 2005)

Neste ciclo de quintas na figura acima podemos ver todas as 12 notas de uma escala sendo formadas. Estas doze notas são representadas em um teclado de piano pelas teclas brancas e pretas de acordo com a figura abaixo. Elas estão presentes igualmente em cada uma das sete oitavas do piano. Cada nota tem várias "versões" mais agudas ou mais graves. A notação utilizada na imagem é C, D, E, F, G, A e B respectivamente para dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Podemos notar que as notas pretas tem duas opções, como o dó# (C#) e o réb (Db). No caso de um cravo por exemplo, esta tecla preta seria afinada como dó# ou réb de acordo com o tom da música. Até o advento do temperamento igual, as notas dó# (C#) e o réb (Db) eram notas distintas.

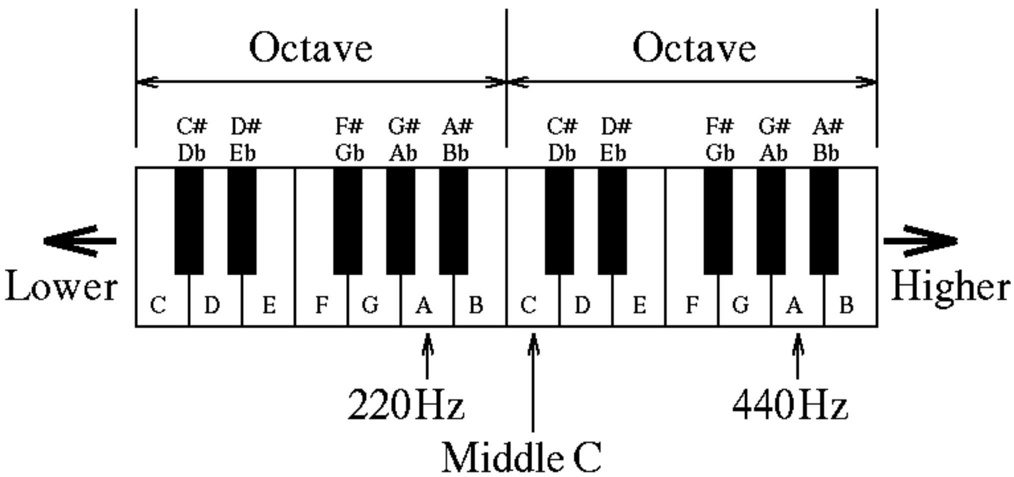


Figura 7 – Representação de duas oitavas em um teclado. O C# e o Db são a mesma nota.

A maneira que Pitágoras criou sua escala, através do ciclo das quintas, proporcionou inicialmente dois tipos de intervalos para as sete notas de dó à dó. O tom pitagórico (9/8) e o meio-tom pitagórico (256/243).

Tabela 1 – Realção entre os intervalos na escala pitagórica.

Nota	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
Intervalo (rel. à freqüência)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Intervalo entre notas adjacentes		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

O problema é que o meio-tom pitagórico é menor que a metade de um tom pitagórico, sendo a diferença igual ao coma pitagórico. Como estamos trabalhando com freqüência, então temos:

$$\frac{9}{8} \div \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{531441}{524288} \approx 1{,}0136$$

Para resolver este problema criaram-se dois semi-tons diferentes: um chamado de diatônico e outro de cromático (Hernrique, 2002). Isso resultou que o tom pitagórico não é o dobro nem do semi-tom diatônico, nem do semi-tom cromático, mas a soma dos dois.

2.3.2 A MÚSICA NA IDADE MÉDIA

A tradição musical pitagórica foi transmitida para a Idade Média principalmente através do tratado *De Institutione musica*, escrito no início do século VI d.C. por Boécio (475-524). Tal obra influenciou a grande maioria de tratados teórico-musicais da Idade Média determinando a predominância do pitagorismo na música teórica medieval e como conseqüência uma abordagem matemático-especulativa como base teórica para resolução dos problemas teórico-musicais.

Até então as manifestações musicais eram constituídas basicamente de elementos rítmicos, feitos por instrumentos de percussão, com melodias predominantes representadas por vozes ou instrumentos solos. Não havia propriamente uma predominância de múltiplas melodias senão ocasionalmente uma ou outra melodia vocal que se superpunha à outra. Dessa maneira o pitagorismo é suficiente como base teórica para a execução da prática musical.

Na medida em que novas manifestações musicais foram se desenvolvendo, como o aparecimento de melodias distintas que se combinavam na execução musical – as vozes –, o corpo da música foi se tornando mais complexo contendo a partir de então, novos intervalos e até acordes que estabeleciam uma composição harmônica. Isso foi possível no início, pois as vozes eram humanas e o ouvido humano se adequa a pequenas variações de freqüência que não comprometem a composição como um todo. Entretanto o surgimento da polifonia viria a ser o cerne de uma revolução na história da música na medida em que o pitagorismo é incongruente com o desenvolvimento da polifonia.

2.3.3 A MÚSICA NO RENASCIMENTO

2.3.3.1 A dificuldade de quebrar o paradigma pitagórico

As relações entre comprimentos da corda e intervalos musicais estabelecidas pelos pitagóricos vigoraram de forma generalizada até que Vincenzo Galilei (1520-1591) as criticasse mostrando que tais relações variavam não somente segundo o parâmetro medido na corda – tensão, densidade linear, etc. – mas de maneira geral, segundo o parâmetro medido em qualquer fonte sonora. Intensificada no decorrer do século XVII, tal perspectiva matemático-experimental representa o início de uma mudança importante de enfoque sobre a compreensão de conceitos acústico-musicais.

A aproximação entre a teoria e prática, característica do Renascimento, põe em risco os pressupostos pitagóricos, segundo os quais consonâncias musicais eram geradas por razões entre os números 1, 2, 3 e 4 e intervalos musicais somente por razões comensuráveis. De fato, o próprio experimento do monocórdio que revela que os intervalos de quinta e oitava estão relacionados respectivamente com razões 2:3 e 1:2 já contém potencialmente o problema levantado pelo advento da polifonia na medida em que a partir desses dados, constata-se que não existem m e n, inteiros positivos tais que $(2/3)^m$ seja igual a $(1/2)^n$, o que implica na impossibilidade de encaixar um número inteiro de ciclos de quintas em um número inteiro de ciclos de oitavas.

Tal impossibilidade resultaria na coma pitagórica, que representa a “semente da imperfeição”, de natureza semelhante à irracionalidade na matemática e impossibilidade de ajuste preciso entre ciclos naturais da Lua e da Terra em torno do Sol na astronomia. Tais observações estabeleceriam uma melhor compreensão da discussão sobre a relação entre o advento da polifonia e a necessidade de um temperamento, uma vez que a coma pitagórica e as outras geradas a partir das tentativas de construção de escalas musicais baseadas em números racionais representam o motor para o desenvolvimento dos diversos temperamentos.

2.3.3.2 As construções de escalas e a matemática – O Temperamento musical

"O piano é talvez o instrumento mais generoso que já tenha sido inventado. A sua extensão vai do mais grave ao mais agudo e é ampla como a de uma orquestra." Esta frase é do pianista e estudioso Stuart Isacoff. O que a torna tão significativa para este trabalho é que há uma razão por trás dela, que é o fato do piano ser um instrumento temperado. Só assim que ele ganha tamanha versatilidade que pode agrupar mais do que sete oitavas de maneira a conter todas as notas possíveis que seriam necessárias para executar qualquer sinfonia, ou concerto, sem a necessidade de re-afinação.

No piano cada oitava tem exatamente doze notas musicais que são dispostas a distâncias iguais, como os degraus de uma escada. Na realidade a "distância" aqui está mais relacionada com uma P G. (progressão geométrica) das freqüências das notas, do que de um comprimento em si. Em outras palavras, no temperamento igual, a relação matemática entre as freqüências de notas de um mesmo intervalo é sempre igual, ou seja, a razões entre as freqüências de duas notas consecutivas, isto é, distantes uma da outra de um semitom, é sempre a mesma, não importando quais duas notas sejam (ex: ré e ré#, ou mi e mi bemol ou sol e sol#) -- o que implica que fá# e sol bemol são a mesma nota.

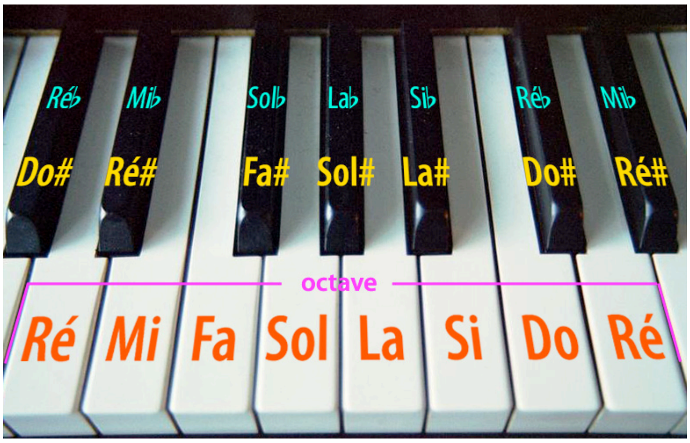


Figura 8 – Uma oitava no piano de ré à ré.

Isso pode não suscitar nada de anormal para alguém que estude música, mas na realidade este fato só é verdadeiro no temperamento igual. Antigamente não era assim. O ré# e o e mi bemol eram de fato notas diferentes. Um instrumento de teclado, como o cravo, poderia ter o mesmo desenho com as teclas brancas e pretas, mas ele era afinado de uma maneira que algumas notas existiriam e outras não, de acordo com o tom de afinação. Isso quer dizer que em uma dada afinação a tecla preta que representa o ré# no piano, poderia ser afinada no cravo como sendo ré# ou mi bemol. Ou era uma, ou outra. E as duas notas eram diferentes entre si.

Dizemos que o teclado moderno (o do piano) está em perfeita simetria. Qualquer nota da escala é perfeitamente eqüidistante da nota anterior à posterior. Não há intervalos diferentes entre notas consecutivas. Este sistema de afinação permite repetir uma mesma figura musical a partir de qualquer nota. Podemos dizer que este sistema cria um universo musical em que as notas são precisas e coerentes entre si.

Hoje pode-nos parecer estranho que algum dia os instrumentos não tenham sido temperados, mas o fato é que o advento do temperamento igual foi um processo historicamente complicado e cheio de controvérsias. Talvez a primeira tentativa de se buscar um temperamento igual tenha sido a de Vincenzo Galilei em seu livro “Dialogo di vincentio galilei nobile fiorentino della musica a et della moderna, 1581” que foi contestada por Gioseffo Zarlino. Não obstante, em 1643, o construtor de instrumentos musicais Jean Denis, conselheiro do padre Marin Mersenne, uma das autoridades de ciência e de matemática mais respeitadas pelo filósofo e matemático René Descartes, propôs um tratado de afinação que permanecia semelhante àqueles utilizados antigamente, ou seja, não propôs nenhum temperamento igual. Isto demonstra a dificuldade de se colocar em prática qualquer tentativa de temperamento igual naquela época.

Com a afinação não temperada, cravos e órgãos podiam produzir harmonias maravilhosas, perfeitas, mas ao se tentar reproduzir uma mesma música em outra região do teclado, poder-se-iam ouvir dissonâncias estridentes. Para Isacoff (Isacoff, 2005) os compositores eram prisioneiros das afinações antigas e uma possível solução para isso, o temperamento igual, era mal vista por várias razões, entre elas por acreditar que haveria uma perda enorme para a música em que os intervalos pitagóricos eram considerados perfeitos.

A resistência ao temperamento igual foi tal que considerou-se produzir teclados com teclas adicionais que pudessem dar conta das notas necessárias sem precisar de uma nova afinação. Dessa maneira teríamos por exemplo um teclado que convivesse tanto um ré#

quanto um mi bemol. Marin Mersenne propôs, em seu livro *Harmonie Universelle* (1636), um teclado composto por dezenove teclas para cada oitava.

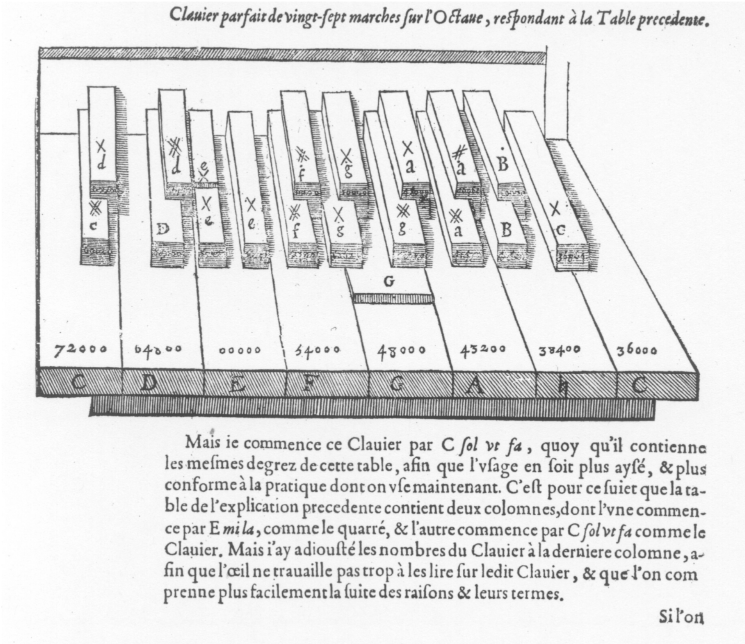


Figura 9 – Órgão de 27 teclas em uma oitava inventado por Mersenne, representado no livro Harmonie universelle.

Esta proposta entretanto não era muito viável e para alguns igualmente controversa com relação ao temperamento igual. É conhecido que o compositor Georg Friedrich Haendel chegou a utilizar órgãos com teclas subdivididas, semelhantes ao do desenho de Mersenne acima. (Isacoff, 2005). No órgão utilizado por Haendel, cada oitava continua dezesseis teclas.

Dentre muitas tentativas de solicionar o problema de que os instrumentos não continham todas as notas necessárias para tocar músicas em todos as possibilidades tonais (diferentes tons musicais), assim como as propostas de acrescentar teclas aos instrumentos de teclado para suprir algumas necessidades, talvez o temperamento igual fosse realmente a solução mais conveniente, um vez que várias notas musicais diferentes se uniriam para ser a mesma nota, como o dó# e o réb que têm uma "distância" muito próxima, poderiam passar a ser a mesma nota. O grande inconveniente è que de fato estas notas musicais mudariam, ou seja, o dó# se tornarla uma nota com maior frequência (altura tonal) e o réb se tornaria uma nota com menor frequência (altura tonal), de maniera que elas se fundissem numa mesma nota.

A questão é que a diferença, para uns, è considerada muito pequena e aceitável na medida em que nossos ouvidos passariam a se acostumar com os novos "dós-sustenidos" e os novos “rés-bemois” que se tornariam a mesma nota. Um outro grupo, por sua vez, via essa mudança radical a ponto de considerar que a música perderia seu caráter perfeito, puro, uma vez que as notas seriam mudadas e elas descaracterizariam a música, sendo portanto uma solução inviável. Para os puristas apenas as proporções simples de intervalos (puros) dão origem a harmonias que ouvido humano aprecia.

As discussões, tentativas e experimentos para manter a música com intervalos “puros”, assim como a procura de deixá-la mais acessível e viável para os músicos e criar instrumentos que abarcassem uma gama maior de notas musicais inevitavelmente gerariam questões controversas e sistemas alternativos ou para assegurar a “pureza” da música ou para deixá-la mais versátil, sacrificando então esta pureza. Incontáveis estudiosos procuram soluções das mais mirabolantes para revolver, pelo menos parcialmente esta questão, como o teclado de Msersenne com 27 teclas para uma oitava. Não está no escopo desta pesquisa analisar a fundo todas estas tentativas, entretanto existe uma controvérsia nesse âmbito que foi muito representativa para o período, e que de certa forma, pode dar um panorama da dificuldade de se dar o salto necessário para a adoção do temperamento.

Durante esse período vale destacar duas figuras muito importantes no âmbito musical que travaram entre si uma longa batalha. De uma lado, representando o sistema pitagórico temos Gioseffo Zarlino: compositor e teórico musical mais respeitado da época. Do outro lado temos Vincenzo Galilei: pai de Galileo, músico, compositor e teórico musical que seria um dos precursores de um nova maneira de enxergar os fenômenos musicais.

Vincenzo Galilei publicou diversos livros sobre música e teoria musical. Ele combinava a prática com a teoria da música. Até então a teoria musical era baseada em uma discussão essencialmente matemática em que os números e as razões entre números inteiros ocupavam grande destaque. Aparentemente muito pouco se colocava em prática para testar ou confirmar algumas teorias. Um exemplo é que na antiguidade acreditava-se que não apenas a razão entre comprimentos de duas cordas de 2:1 era de um intervalo de oitava, mas também que a razão entre as tensões de duas cordas de 2:1 dava um intervalo de oitava. Provavelmente ninguém tinha colocado à prova. Vincenzo Galilei demonstrou que a razão entre as tensões de duas cordas de mesmo comprimento para gerarem um intervalo de oitava era de 4:1.

Galileo Galilei, filho de Vincezo tinha grande interesse pela observação experimental. Na mesma época ele havia colocado em movimento diversos pêndulos para estudar o seu comportamento. Foi através deste experimento que Galileo descobriu um fenômeno conhecido como isocronismo, ou seja, a tendência do pêndulo a manter constante a duração de uma oscilação mesmo que a energia que o alimenta diminui. Galileo iria estabelecer posteriormente uma relação entre a física do pêndulo e o modo de vibração de uma corda musical. Muito provavelmente a curiosidade de Galileo pela observação experimental foi motivada pelo seu pai, Vincenzo Galilei, que utilizou um sistema de peso para variar as tensões de cordas vibrantes e acabou conduzindo a uma das mais belas e grandes discussões na história da música (veja Oficina VI)

Tudo teve início a partir do progeto de um grupo de artistas e intelectuais. Vincenzo e outros músicos, poetas e nobres se encontravam regularmente na casa do influente e excêntrico Conde Giovanni Bardi di Firenze, com o intuito de fazer música e onversar de arte, ciência de filosofia. Este grupo, conhecido como Camerata Fiorentina era um núcleo de atividade intelectual, uma espécie de academia de estudos.

Vincenzo Galilei foi aluno de Gioseffo Zarlino, com o qual aprendeu muito sobre teoria musical e principalmente como a música tinha um apoio muito forte nos números, ou seja na matemática especulativa. Vincenzo continuou seus estudos por conta própria, que com o seu enfoque experimental acabou rompendo com as idéias de Zarlino, que de certa forma estava tentando salvar a visão musical pitagórica. Zarlino chegou a incluir outros intervalos, ditos consonantes para ampliar a possibilidade musical do sistema pitagórico e talvez resguardar das tendências em contestá-lo e por fim substituí-lo. Em sua obra *Istitutioni harmoniche,* Zarlino ampliou os intervalos considerados consonantes na época para seis e os chamou de *Senario*. Nesta obra Zarlino divide a música em uma parte especulativa e outra prática, especificando que a parte especulativa, ou seja, a razão com as quais ela opera, representa sempre a parte mais nobre com relação a própria operação ou uso da música. Assim como a alma, que contem o saber, vence e supera em nobreza o corpo operante. Isso fez com que Zarlino mantivesse durante toda a sua vida uma visão de que a teoria musical só podia ser construída a partir de aspectos divinos, ou perfeitos e jamais através de "constatações" experimentais.

Vincenzo Galilei, ao contrário de Zarlino, manteve seu cunho experimental e chega a declarar em seu livro *Dialogos* (Galilei, MDLXXXI) uma frase visivelmente direcionada a Zarlino, em que diz: "os intervalos musicais são naturais, como aqueles contidos entre as partes do Senario, como qualquer outro que estão fora desse grupo. Todas as escalas, no final, são obras do homem." Tal afirmação é categórica e mostra muito bem porque Zarlino e Vincenzo mantiveram uma grande disputa até o final de suas vidas (veja Oficina X).

É difícil dizer quanto tempo e disputas foram necessários para que enfim o temperamento igual implacasse. Temperamento deriva do latim *temperamentum* que quer dizer "mistura de coisas em determinada proporções", logo temperamento igual seria a mistura de coisas em uma determinada proporção igual, ou seja todas as notas contidas em uma oitava deveriam estar distantes igualmente umas das outras, em proporções iguais.

Uma outra possível motivação para o advento do temperamento, como já mencionado, é o advento da polifonia, ou seja, a execussão de várias melodias diferentes simultaneamente. Para executar uma polifonia de algumas vozes (melodias) em algum sistema musical puro, como o pitagórico, algumas dissonâncias ocorrem devido a algumas notas não estarem de acordo com as escalas de um certo tom ou melodia. Isso trazia uma grande limitação uma vez que a música deveria produzir uma harmonia agradável ao ouvido humano e o que acontecia, em alguns momentos era exatamente o contrário, ou seja, produzia dissonâncias bastante incômodas que minavam a sua execussão. Como já dissémos, muitas tentativas foram feitas para aperfeiçoar os diversos sistemas musicais mas o que finalmente se consolidou gradualmente e com grande dificuldade foi o temperamento igual.

O temperamento igual é uma afinação da escala em que notas puras são alteradas ligeiramente, no qual a oitava é dividida em 12 semitons uniformes. Este representa o temperamento ocidental padrão utilizado hoje em dia, exceto em contextos musicais específicos. Podemos concluir que a necessidade do temperamento se deve sobretudo à incomensurabilidade entre acordes envolvendo oitavas, quintas e terças em suas formas puras. De fato, o próprio experimento do monocórdio que revela que os intervalos de quinta e oitava estão relacionados respectivamente com razões 2:3 e 1:2 já contém potencialmente o problema levantado pelo advento da polifonia na medida em que a partir desses dados, constata-se que não existem m e n, inteiros positivos tais que $(2/3)^m$ seja igual a $(1/2)^n$, o que implica na impossibilidade de encaixar um número inteiro de ciclos de quintas em um número inteiro de ciclos de oitavas, como já vimos anteriormente.

Uma possível solução para este problema é justamente o temperamento igual, que tem como característica fundamental o fato da relação matemática entre as freqüências de notas de um mesmo intervalo ser sempre igual, ou seja, a razões entre as freqüências de duas notas distantes uma da outra de um semitom é sempre a mesma, não importando quais duas notas sejam (ex: dó e dó# e ou dó e dó bemol ou sol e sol#) – o que implica que fá# e sol bemol são equivalentes.

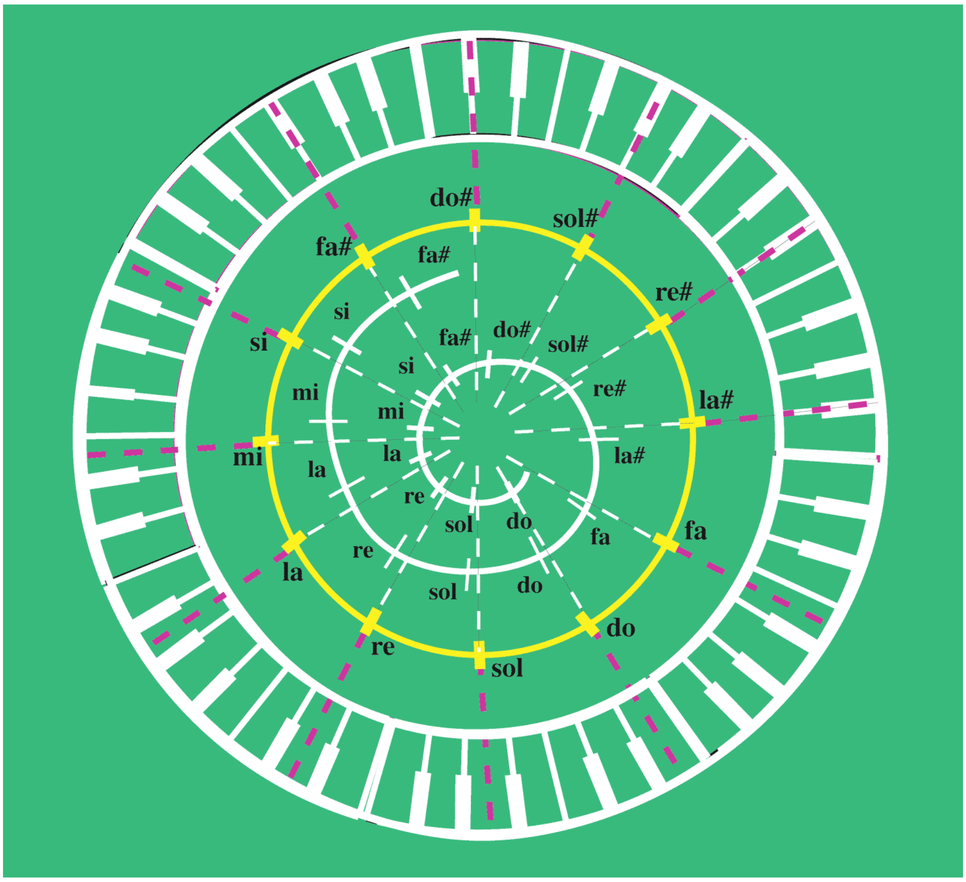


Figura 10 – A escala sendo temperada, (Abdounur, 2005)

Em outras palavras o temperamento igual consiste em dividir a oitava em 12 partes iguais, o que resulta no encontro entre 12 ciclos de quinta e 7 ciclos de oitava. Neste caso, a razão relacionada ao intervalo de quinta seria 1:27/12, que numericamente é aproximadamente 1,4983, e não 1,5 correspondente à razão 3:2 como propunha Pitágoras. (Vide Apêndice I – Vídeo: A Escala Bem Temperada e o vídeo contido no CD).

2.3.4 A Série harmônica

A Série Harmônica é de principal interesse quando se trata de estabelecar uma conexão entre a música e a matemática. Ela está intimamente ligada com as Séries de Fourier.

Toda nota produzida por um instrumento é acompanhada por várias outras notas a intervalos fixos acima da mesma ou harmônicos. O conjunto de harmônicos produzidos na vibração de uma corda, por exemplo, é chamado de série harmônica.

O tom mais baixo, chamado de fundamental, é o primeiro harmônico, o segundo mais baixo o segundo harmónico, e assim por diante. Tomando-se f_1 como o primeiro harmónico – representado pela freqüência da nota – e f_2 como o segundo harmônico, etc teremos então:

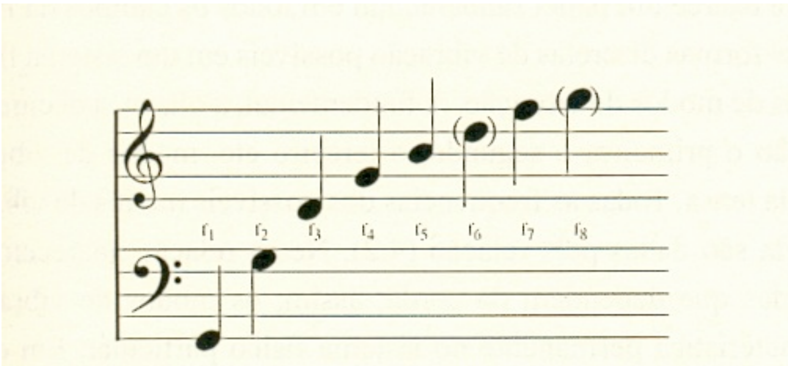


Figura 11 – A seqüência dos harmônicos, (Roederer, 2002)

No exemplo acima (figura 11) a fundamental é a nota sol e a série harmônica é composta pela fundamental sol, um intervalo de oitava, ou a nota sol uma oitava mais aguda, depois um intervalo de quinta ou a nota ré, em seguida a nota sol duas oitavas acima da primeira, depois a nota si que é a terça do sol, em seguida a nota ré ou terça do si, depois a nota fá ou terça menor do ré, e finalmente a nota sol agora três oitavas acima do primeiro harmônico, sendo o intervalo de segunda de fá.

Essa seqüência é a mesma para qualquer nota que se toque. Na realidade há muito mais harmônicos. Abaixo temos a série harmônica com os 16 primeiros harmônicos partindo na nota dó – figura 12.

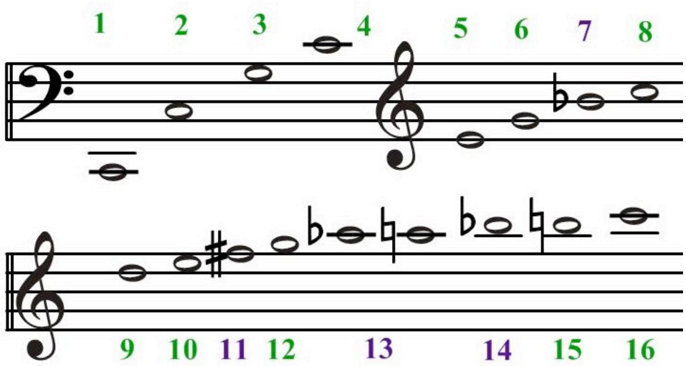


Figura 12 – A seqüência dos 16 primeiros harmônicos

Temos então: dó dó sol dó mi sol sib dó ré mi fá# sol láb lá sib si dó

Interpretando fisicamente o que acontece quando produzimos uma vibração em uma corda dó: a corda vibra em vários modos diferentes. Cada componente harmônico da vibração original contribui para a formação da onda resultante. O resultado de todos os harmônicos vibrando é uma superposição de ondas sonoras combinadas numa única onda complexa com freqüência da fundamental e com uma série de harmônicos superiores de freqüências $2f_1$, $3f_1$, $4f^1$, … etc. Esta onda complexa pode ser representada por uma soma de ondas?

Aqui chegamos a um teorema matemático que teve um impacto enorme na física e em especial na física da música: o Teorema de Fourier ou Série de Fourier. Através desse teorema, podemos representar uma onda complexa qualquer através da soma de funções senos e cossenos. Em outras palavras, podemos separar cada harmônico e representá-lo como uma função seno ou cosseno independente. Essa idéia foi muito útil na construção de sons sintetizados eletronicamente. Osciladores eletrônicos produziriam uma série de senóides (os harmônicos) de tal maneira a criar um som complexo.

A estreita ligação entre a série harmônica e a de Fourier é talvez a relação mais forte e interdependente entre a matemática e a música dentro do contexto experimental. Tal relação é um exemplo que pode ser explorado em projetos interdisciplinares de física e matemática, embora a matemática envolvida na série de Fourier esteja muito além das expectativas disciplinares do Ensino Médio, mas o conceito de ondas que se somam para formar uma onda mais completa é bastante viável.

Uma outra relação importante da série harmônica é que ela está ligada ao timbre sonoro, ou a cor do instrumento. É justamente a superposição dos hamônicos e suas intensidades que vão gerar a onda resultante que contribuirá para um certo timbre. (vide oficina IV)

3 CONCLUSÃO E PROPOSTAS

Trabalhar com projetos ou mesmo atividades interdisciplinares representa um desafio para qualquer educador e também para o aluno. Como vimos, o advento da interdisciplinaridade está cada vez mais evidente e necessário no âmbito educacional, porém apresenta ainda resistências por parte dos professores e muitas vezes também por parte dos alunos. É fundamental reconhecer que a adoção de uma visão interdisciplinar está longe de ser trivial, e mesmo que fosse fácil ainda assim não deveríamos realizar exclusivamente atividades interdisciplinares em nossa prática pedagógica.

A especificidade se faz necessária em várias situações e contexto, mas não devemos nos limitar a ela. Reconhecendo que existem aspectos desafiadores para a execução de atividades interdisciplinares em que os professores não tem conhecimento suficiente na área, devemos mesmo assim fazer uso desta estratégia com o intuito de fortalecer o ensino e apresentar situações que são muito mais reais e verdadeiras. Os problemas da vida não vêm separados, ao contrario, temos que lidar com problemas que apresentam uma enorme game de especificidades e para isso temos dificuldades. Ao aprendermos através de uma situação problema na escola, poderemos ter a oportunidade de desenvolver outras habilidades pertinentes à resolução de problemas e reconhecer os diferentes aspectos envolvidos assim como saber relacioná-los e interpretá-los.

Enfrentar um problema complexo, que envolve diversos âmbitos disciplinares, nos é sem dúvida desafiador, mas ao fazê-lo desenvolvemos habilidade em lidar com situações mais complexas que estão mais freqüentemente presentes o dia a dia do que questões específicas de um dado tópico ou uma dada disciplina. A física, a música e a matemática têm muitos aspectos que podem ser aprendidos e desenvolvidos com estes três vieses. Pode-se dar naturalmente mais ênfase em um deles – aquele que o professor tem mais conhecimento – ou em dois deles ou ainda nos três em alguns casos quando mais professores estão desenvolvendo a atividade em conjunto ou ainda quando uma dado professor se sente suficientemente seguro para lidar com as três. Para finalizar este trabalho, apresentarei algumas atividades ou oficinas que podem ser realizadas dentro desse panorama interdisciplinar proposto. Cada atividade pode e deve ser adaptada para cada contexto e mesmo enriquecida em uma dada direção disciplinar de acordo com a necessidade e objetivo.

Acredito ser necessário termos em mente que a realização de atividades deste tipo poderá ser melhor concebida ou realizada se considerarmos o aspecto epistemológico, que no presente trabalho, optei pela epistemologia de Gaston Bachelard. Faço ainda uma reflexão sobre o processo pelo qual a música passou no Renascimento em que culminaria na adoção e sistematização da escala de temperamento igual à luz do conceito de obstáculo epistemológico de Bachelard.

O presente trabalho tem como principal período histórico de enfoque o Renascimento, porém, períodos anteriores foram buscados com o intuito de compreender a seqüência histórica. É com o advento do Renascimento que ocorre uma retomada do pensamento racional que preparou terreno para a Revolução Científica do século XVII. Foi justamente nesse período que Vincenzo Galilei se opôs à maneira pela qual Pitágoras havia relacionado os intervalos musicais através de razões de números naturais. Deu-se então, uma revolução sobre as idéias científicas que influenciaram tanto a física, quanto a matemática e a música. Segundo Pitágoras, os sons consonantes comuns podiam ser perfeitamente representados matematicamente. O mais preciso parecia ser mais agradável ao ouvido. A explicação de Pitágoras para esse fato era a de que tudo no mundo se resumia a números e, portanto não era de se estranhar que a precisão matemática nos fosse agradável.

Mais tarde Gioseffo Zarlino, no seu livro "Istitutioni Harmoniche" (1558) trata sons dissonantes como exceções para exprimir sentimentos particulares ou para preparar um desfecho consonante. Zarlino inseriu sextas e terças maiores e menores às consonantes pitagóricas (tônica, oitava, quinta e quarta). Mesmo que Zarlino tenha dado uma nova visão para os intervalos, ela estaria ainda longe de responder as questões relacionadas com a consonância. De fato os próprios intervalos teriam que ser revistos e ajustados de acordo com as necessidades da época e para que a polifonia pudesse se estabelecer completamente. Foi talvez a tentativa de utilização de várias vozes na música que reforçou a necessidade de se procurar uma visão menos especulativa e mais experimental da matemática e, portanto compreender os mecanismos pelos quais o sons pudessem ser combinados de maneira harmônica. Esse momento histórico que antecede ao temperamento musical pode ser visto como um obstáculo epistemológico bachelardiano.

Do ponto de vista de Bachelard, podemos interpretar que nessa época há uma descontinuidade, uma ruptura com princípios absolutos. O conceito bachelardiano de obstáculo epistemológico torna-se muito apropriado na tentativa de compreender o processo pelo qual a relação música e matemática é submetida.

Acredito que a noção de **obstáculo epistemológico** é fundamental para a compreensão do processo pelo qual a música passou durante a Revolução Científica e que culminaria no advento do temperamento, que por sua vez tornou possível o uso consistente da polifonia. A dificuldade de romper com a conveniente visão pitagórica de intervalos musicais representados por razões de números naturais era tão grande que até mesmo Kepler continuou buscando por muito tempo uma relação entre as órbitas dos planetas com razões entre números inteiros que estaria ainda relacionada com a criação da música das esferas. Parece até que Kepler tentou "forçar" para que as razões procuradas fossem de fato as relacionadas com os números pitagóricos 1, 2, 3 e 4. Isso mostra a enorme presença da tradição pitagórica e a resistência que ainda existia em desconsiderá-la.

Uma explicação bachelardiana para a dificuldade de chegar-se ao temperamento seria de que o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, e ainda o pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido (Bachelard, 1986). De fato, nessa época o enfoque para a compreensão de fenômenos de todos os tipos era essencialmente experimental, caracterizado por uma tentativa de matematizar e estabelecer leis físicas que explicassem os diversos fenômenos. Provavelmente foi esse cenário epistemológico que proporcionou condições para que finalmente se pudesse superar o obstáculo epistemológico do "tudo é numero (natural) e harmonia" dos pitagóricos para dar um grande passo adiante onde a experimentação faria parte quase que constante no desenvolvimento de novos saberes científicos.

Segundo Bergson (Bachelard, 1986) "Nosso espírito tem a tendência irresistível de considerar como mais clara a idéia que costuma utilizar com freqüência".

Convido ainda a todos os educadores ou leitores que optem por ter uma visão histórico-epistemológica de qualquer situação problema ou atividade pedagógica, uma vez que acredito acrescentar aspetos fundamentais à compreensão e visão como um todo de uma dada fatia do conhecimento. Saliento ainda que as atividades/oficinas propostas são apenas algumas dentre muitas possibilidades de realização de atividades deste tipo englobando apenas alguns tópicos aqui abordados.

Que este trabalho sirva de inspiração para que a prática interdisciplinar se propague de maneira a enriquecer o nosso repertório didático assim como ampliar a nossa visão criativa para elaborar cada vez mais atividades complexas (ricas) em que o aluno esteja em uma situação mais próxima do mundo real.

4 IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

As possibilidades de utilização de elementos desenvolvidos neste trabalho em projetos para o Ensino Fundamental e Médio são inúmeras. Serão citadas e exemplificadas algumas delas, sendo os professores de física, matemática ou música, livres para utilizarem os conteúdos e as idéias aqui sugeridas de acordo com os seus interesses e necessidades.

O trabalho interdisciplinar junto com os professores das três áreas é bastante indicado, entretanto deve-se ter em mente a visão de interdisciplinaridade aqui proposta e apresentada anteriormente. Parafraseando Gusdorf, que os especialistas das diversas disciplinas estejam engajados de uma vontade comum. De maneira ideal cada um deve aceitar esforçar-se fora do seu domínio próprio e da sua própria linguagem técnica para aventurar-se num domínio de que não é o proprietário exclusivo. A interdisciplinaridade pressupõe abertura de pensamento e curiosidade que se busca além de si mesmo. Dessa maneira os especialistas ampliarão o seu domínio de conhecimento e assim terão uma compreensão mais completa dos fenômenos envolvidos.

A falta de um ou mais professores das três áreas envolvidas na realização destas atividades não é fator limitante, entretanto é importante ter em mente que algumas das oportunidades pedagógicas necessitarão de um esforço maior do professor que não esteja familiarizado com uma das três áreas de conhecimento em questão: física, matemática e música. É também aconselhado que cada professor ajuste a atividade de acordo com o seu domínio e objetivos educacionais. Quero lembrar que o conceito de obstáculo epistemológico pode dar uma ajuda para compreender porque temos dificuldades de sair de nossa zona de conforto cognitiva para adentrar novos horizontes. Lembrando que para Bachelard, os obstáculos epistemológicos aparecem no âmago do próprio ato de conhecer. Ora, se ao realizar uma atividade interdisciplinar que inclui uma área de conhecimento que não dominamos, então estamos no próprio âmago do conhecer e portanto diante de obstáculos. Lembremos este fato e façamos um esforço para dar um salto heurístico, na direção do aprender e ampliar a nossa compreensão como educadores abrindo cada vez mais nossos horizontes interdisciplinares.

4.1 Oficina I – O experimento do monocórdio

As cordas musicais são um dos muitos temas onde a física, a matemática e a música se inter-relacionam bastante. Sugere-se construir um monocórdio, um instrumento elementar que foi empregado pelos gregos e principalmente conhecido como o instrumento utilizado por Pitágoras em seus experimentos relacionados com os intervalos musicais.

O experimento do monocórdio pode ser utilizado para a realização de uma oficina, com o intuito de reproduzir parte da trajetória da matemática e da música envolvida ao longo deste experimento, além de poder abordar conceitos físicos intimamente ligados com a música, como relacionar altura tonal com a freqüência e a intensidade sonora com a amplitude da onda.

A tradição pitagórica pode ser alvo do desenvolvimento histórico, estabelecendo relações com outras disciplinas além das citadas, como história da ciência (a importância do experimento como um referencial empírico na história) e mesmo a história propriamente dita, através da busca pelo cenário epistemológico presente na época do experimento e suas crenças e relações com a filosofia.

Uma vez tendo em mãos o monocórdio, podemos citar alguns objetivos relativos as áreas envolvidas:

Objetivos **físicos** e **musicais**:

- Familiarização com o conceito de *altura tonal*, ou seja, sons agudos e graves (conceitos musicais) e sua relação com a *freqüência de vibração* da corda (conceito físico).
- Familiarização com o conceito de *intensidade sonora*, ou seja, um som tocado mais forte, isto é com volume mais alto, ou mais fraco, isto é com volume mais baixo (conceito musical) e sua relação com a *amplitude* de uma onda (conceito físico).
- Familiarização com o *timbre* de diversos instrumentos musicais. Comparar as qualidades sonoras, o timbre de uma mesma nota tocada pelo monocórdio e por um violão, por exemplo. Nota-se uma diferença e esta diferença é o timbre. A explicação do timbre pelo ponto de vista da física está relacionada com a série harmônica e série de Fourier (ver oficina IV).

- Investigar diversos *intervalos musicais* e perceber a diferença entre o intervalo de oitava com o de quinta e o de quarta (conceito musical). Estabelecer relações entre números inteiros com os *comprimentos das cordas* de acordo com cada intervalo (conceito matemático). Aqui é importante para o leigo se familiarizar com o conceito de intervalos musicais.
- Estabelecer relação entre o comprimento de uma corda (conceito matemático) e a freqüência do som produzido por ela (conceito físico) e relacionar com a altura tonal (conceito musical) – para este objetivo se faz necessário a utilização de um afinador eletrônico digital que apresente o valor da freqüência do som em Hertz. Alternativamente pode-se utilizar de um software livre que executa a função de um afinador eletronico ou detector de freqüências sonoras – ambos disponíveis na Internet.

4.2 Oficina II – Percepção Sonora e Construção de Escalas Musicais

Talvez valha uma reflexão preliminar no sentido do porque existem escalas? Como sugere Henrique (Henrique, 2002) "Sabemos que o ouvido humano tem capacidade de distinguir centenas de alturas diferentes dentro de uma mesma oitava, mas do conjunto de todos esses sons o homem escolheu alguns e organizou-os em seqüência".

Também sabemos que uma escala é composta de uma seqüência de intervalos. A palavra escala vem do latim *scala* que significa escada e logo pressupões uma seqüência ascendente ou descendente de notas musicais definidas. Roederer (Roederer, 2002) propõe uma definição mais precisa: "um conjunto discreto de alturas arranjadas de tal modo que forneçam o máximo número possível de combinações consonantes (ou o mínimo número possível de dissonâncias) quando duas notas ou mais notas do conjunto soam simultaneamente".

Também vários investigadores questionaram a necessidade ou não da existência das escalas, e porque o homem utiliza grupos discretos de alturas e não conjuntos muito maiores de sons ou mesmo variações contínuas como fazem as baleias e os golfinhos por exemplo? Embora existam tribos e outras culturas étnicas que utilizam-se de sons bem menos definidos em termos de altura tonal, ou seja uma dada nota oscila em freqüência tornando-se mais ou menos alta de acordo com a interpretação do cantor – um exemplo são tribos africanas e árabes em que as melodias cantadas tem grandes variação de altura tonal para certas notas – na grande maioria, incluindo escalas exóticas, orientais e ciganas, só para citar algumas, as notas são bem definidas e discretas e podem se organizar de uma escala definida.

Para Roederer (Roederer, 2002), a razão neuropsicológica mais importante que justifica a existência de escalas está relacionada com o fato de que para o cérebro é muito mais fácil identificar e memorizar uma seqüência de alturas discretas do que varrimentos contínuos de freqüência ascendentes e descendentes em todas as freqüências possíveis".

Este importante fato pode ser uma grande oportunidade para gerar uma reflexão e discussão de cunho filosófico-antropológico, comparando a maneira pela qual o homem utiliza-se quase sempre de escalas bem definidas ao contrário de muitos animais, ou mesmo sons da natureza como o uivar do vento, uma porta rangendo conforme se muda a velocidade com a qual ela fecha, etc. Pode-se também ouvir músicas de origem culturais diversas em que as notas não são bem definidas e em seguida ouvir exemplos em que as notas são bem definidas. Pode-se ainda comparar o pequeno grupo de notas em que o canto gregoriano faz uso para realizar suas melodias com outros exemplos em que uma escala muito mais rica e acidentada é utilizada.

Alguns exemplos de utilização de escalas estão disponíveis nas faixas do CD que acompanha este trabalho. Muitos deles mostram que apezar de existir uma certa escala, ou tendência ordenada de sons, muitas notas musicais produzidas não são discretas (freqüências fixas e intervalos fixos), mas sim contínuo. Isso nos faz pensar que mesmo no mundo atual em que o temperamento está consolidado, ainda temos muitas oportunidades para ouvir sons que não estão sujeitos à sistemas musicais definidos pelo homem.

- Faixa 1: *Lhahi dha Juk*, 1989 – Cantos sagrados de cura tibetanos, executados por monges tibetanos do Gaden Shartse Monastery localizado na colônia tibetana do sul da Índia. ➔ estes cânticos são um exemplo de utilização de notas cujas alturas tonais não são bem definidas, apresentando sons de variação de freqüência contínuos.
- Faixa 2: Abdelli – JSK *New Moon*, 1995. Abdelli nasceu no norte da África e faz parte de um grupo indígena que ocupava o norte do continente antes da chegada dos Árabes. Música gravada no Real World Records Ltd e faz parte de uma coletânia de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Reppublica*, respeitado jornal Italiano ➔ embora esta música apresente pequenos trechos em que os sons não

são discretos, a grande maioria dos intervalos utilizados são discretos e de uma escala bem definida mas oriental, não representando nenhuma das escalas utilizadas no ocidente. É interessantes perceber que alguns intervalos não são familiares e portanto não fazem parte da música ocidental em geral.

- Faixa 3: Sheila Chandra – *Speaking in tongues III*, 1994 Real World Records ltd. Faz parte de uma coletânia de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Reppublica*, respeitado jornal Italiano ➔ Sheila nasceu no sul da Inglaterra e é filha de imigrantes vindos do sul da Índia. Esta música é realizada exclusivamente com uma única voz feminina. Mostra uma enorme riqueza rítmica e domínio vocal para pronúncia e produção de sons discretos e também com uma certa variação contínua de freqüência em algumas notas.

- Faixa 4: Baaba Maal, *Call to prayer*, 1989 – Virgin Records Ltd. Faz parte de uma coletânia de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Reppublica*, respeitado jornal Italiano ➔ Baaba Maal nasceu na África em uma pequena vila do Senegal. Sua música tem muita influência da música ocidental, mas ele utiliza uma maneira de cantar que não se limita a sons musicais bem definidos. Sua melodia passeia pelo espectro contínuo de freqüências sonoras de maneira harmoniosa. Este é um exemplo de música cuja melodia não está estritamente cerceada em uma dada escala.

- Faixa 5: Peter Gabriel, *Zaar*, 1990 – Peter Gabriel LTd. O famoso compositor inglês faz uso extenso de recursos que lhe dão oportunidade de não ficar preso em escalas ou alturas tonais bem definidas. Esta música é uma contem uma estrutura harmônica ocidental, mas está repleta de sons que não estão presentes em escalas ocidentais. Peter Gabriel faz um uso rico de sons, às vezes não definidos em altura, e de ouras escalas exóticas que enriquecem-na e a caracterizam um pouco fora do âmbito baseado estritamente nas escalas ocidentais.

- Faixa 6: L.Subramaniam, *Lost Love!*, Erato Disques Paris, 1999. – L. Subramaniam é violinista indiano e considerado o "Paganini da música clássica indiana". Por ser um instrumento não temperado, Subramaniam utiliza o violino realizando melodias que estão dentro de escalas indianas (diferentes das escalas ocidentais) e faz grande uso de notas que apresentam variações de freqüência contínua. Este é mais um exemplo de música que não está exclusivamente compreendida dentro dos limites de escala.

Segundo o próprio autor, esta composição tem estrutura micro-tonal (contendo intervalos tonais bem menores do que um semi-tom) onde o koto (instrumento tradicional japonês) se mescla eloqüentemente com o violino indiano. Podemos perceber um certo “choro” que o violino dá em algumas notas justamente com a variação de freqüência.

- Faixa 7: Subramaniam, *Gipsy Trail!*, Erato Disques Paris, 1999. – Também de L. Subramaniam nesta música há um diálogo entre o violino e uma voz feminina. Ambos fazem uso extensivo de melodias com notas não discretas. É bem visível o uso da variação contínua de freqüência tonal. Mais adiante um violão espanhol e uma densa percussão indiana se juntam formando uma base harmônica seguindo a escala temperada ocidental enquanto a voz e o violino continuam se expressando através de suas escalas exóticas cheias de micro-tons.
- Faixa 8: *Purupupuruweny / Puupu Iuen*, Paxinã Poty Apalai et Sarina Apalai, arranjado por Marlui Miranda – Música indígena, tocada por índios brasileiros Kayapó Xikrin, de Macapá –. Esta faixa mostra várias melodias sendo tocadas simultaneamente por flautas Turékoka e outros instrumentos mais adiante. Este exemplo mostra que mesmo os índios têm aparentemente uma escala, dada que as notas são as mesmas que se repetem ao longo da música, entretanto é interessante notar que os intervalos utilizados são bastante incomuns comparados com aqueles presentes na escala ocidental temperada.
- Faixa 9: Sons de pássaros – Aves Brasileiras I, John Dlagas Frisch. Alguns sons de pássaros brasileiros foram gravados entre 1958 e 1964. Aqui podemos observar que os pássaros utilizam algumas notas discretas com freqüências definidas mas com algumas notas indefinidas, produzindo um som contínuo que varia com a freqüências. O primeiro pássaro é o **Corruíra-do-brejo**: percebemos que a terceira “nota” não é discreta e sim contínua. O segundo é o **Sabiá coleira** – Faixa 10: percebemos que várias de suas notas não são discretas. O pássaro **Tovaca** – Faixa 11: executa uma nota repetidas vezes que vai aumentando a altura tonal lenta e gradativamente. **O Pixarro** – Faixa 12 e o **Tipio** – Faixa 13 assobiam notas com variação de freqüência contínua descendente. O **Jaó** – Faixa 14: assobia um intervalo que é menor que o intervalo de um semitom.

- Faixa 15: Shankar, *Morning Love*, EMI Records, 1976. Ravi Shankar, toca uma musica baseada em uma Raga clássica. Esta música é um ótimo exemplo para perceber as escalas utilizadas que são distintas daquelas que estamos acostumados no ocidente.
- Faixa 16: Matt Turner and Jeff Song, *Reclusive Prayer*, O.O. Discs, INC. 1992. Esta faixa mostra um dialogo sonoro entre dois músicos. De uma lado Matt Turner tocando violoncelo e voz e de outro Jeff Song tocando kayagum e também voz. A concepção melódica que eles utilizam foge à estética comum e às escalas usuais. É um exemplo em que os intervalos não são bem definidos e em algumas situações eles produzem dissonâncias através da reprodução de duas notas vocais com freqüências muito próximas.

Henrique (Henrique, 2002) sugere que as diferenças entre sons discretos e contínuos podem ser relacionadas com a terminologia de informática em que variações contínuas necessitam de muito mais bits do que seqüências discretas sugerindo uma possível analogia entre "analógico" e "digital".

Com os conceitos de intervalos e consonâncias em mãos, pode-se criar uma oficina que desenvolva a idéia de construção de escalas através da superposição de intervalos desejados até que se obtenha uma gama que "complete" o espectro de notas musicais.

Há algumas maneiras de construir uma escala, de acordo com quais intervalos que queremos dar preferência. Tomando-se como idéia básica de que uma escala pode ser definida simplesmente como "um conjunto discreto de alturas arranjadas de tal modo que forneçam o máximo número possível de combinações consonantes (ou o mínimo número possível de dissonâncias) quando duas notas ou mais notas do conjunto soam simultaneamente".

Com essa definição é possível gerar, em princípio, duas escalas dependendo se todos os intervalos consonates devem ser levados em conta ou se apenas serão consideradas as consonâncias perfeitas. No primeiro caso, temos a escala justa e no segundo a escala pitagórica.

Com um oito-córdio em mãos (um instrumento primo do monocórdio, mas com 8 cordas), podemos colocar os cavaletes em cada corda de acordo com a altura tonal desejada. Assim podemos, por exemplo, criar uma escala com tons puros, seguindo as leis da consonância pitagórica, e tocar algumas músicas de melodias simples para ouvir e sentir como uma instrumento de afinação "pura" reproduz uma dada melodia. Com um outro oito-córdio em mãos, podemos afiná-lo de acordo com um outro sistema e depois comparar a nossa percepção sonora ao tocar a mesma melodia com duas escalas diferentes.

Na tabela 2 temos as sete notas principais de uma escala, representadas por freqüência para os sistemas pitagórico, de Zarlino e de temperamento igual.

Tabela 2 – Afinação musical com razão de tons expressos como freqüências (Hz).

Nota	Pitagórico	Zarlino	Temperado
Dó	261,63	261,63	261,63
Ré	294,33	294,33	293,66
Mi	331,12	327,03	329,63
Fá	348,84	348,84	349,23
Sol	392,45	392,45	392
Lá	441,5	436,06	440
Si	496,69	490,56	493,88
Dó	523,26	523,26	523,26

Entretanto podemos construir a escala pitagórica considerando as razões com relação aos comprimentos das cordas utilizadas por Pitágoras. Já sabemos que a oitava é de 2:1, a quinta de 3:2 e a quarta de 4:3. Abaixo temos um esquema que mostra as sete notas dentro de uma oitava na escala pitagórica com suas razões:

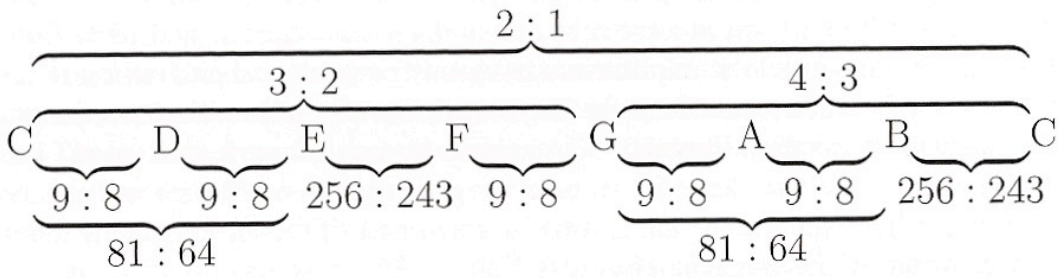


Figura 13 – A escala pitagórica

Para construir a escala de tons justos, também conhecida como escala de Zalino ou ainda escala natural, basta seguir as razões para cada intervalo segundo o esquema da figura 14:

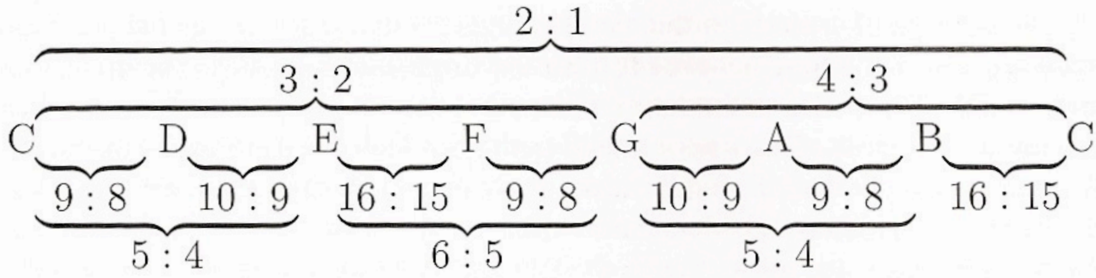


Figura 14 – A escala de Zarlino

A construção da escala de temperamento igual tem uma dificuldade extra, pois seus intervalos não estão representados por frações de números inteiros pelo simples fato que os números são todos irracionais, com exceção do intervalo de oitava que é de 2:1. Sabemos que a oitava contem exatamente 12 semitons simetricamente espaçados. Tomando-se a oitava, por exemplo, de dó$_1$ à dó$_2$ e buscando realizar uma divisão simétrica de modo a dividir a oitava em 12 intervalos iguais, temos que:

A freqüência da nota dó mais agudo, representado por dó$_2$ será $f$dó$_2$ = 2 $f$dó$_1$ → a freqüência de uma oitava acima será o dobro da freqüência da fundamental. Como devemos "percorrer" doze intervalos iguais (semitons) do dó$_1$ até chegar ao dó$_2$, então a freqüência de dó$_2$ terá que ser multiplicada doze vezes por um dado valor fixo, de tal forma que a freqüência do dó$_2$ seja igual ao dobro da freqüência do dó$_1$.

Anacronicamente falando, se tomarmos o lá$_3$ representando a freqüência de 440Hz, então o lá$_4$ (uma oitava acima), terá freqüência de 880Hz. A freqüência de uma nota qualquer, exatamente uma oitava acima, será sempre o dobro da freqüência da nota original. Logo, ao dividirmos uma oitava, digamos entre dó$_1$ e dó$_2$, em doze intervalos igualmente distribuídos – temperamento igual – devemos multiplicar a freqüência do dó$_1$ por um fator s de maneira a encontrar a nota subseqüente à anterior. Repetindo essa multiplicação podemos encontrar as freqüências relativas a cada uma das doze notas, ou altura tonal, até atingir a freqüência do dó$_2$. Matematicamente temos:

$f\text{dó}_1 \times s^{12} = f\text{dó}_2 = 2\,f\text{dó}_1$ ➔ $s=\sqrt[12]{2}$ → e este número é irracional!

Assim teremos que da nota dó ao sol, ao invés de 3:2 ou 1,5 será $f\text{dó}_1 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1{,}498307076876682$. Podemos montar o esquema então para a escala temperada, figura 15.

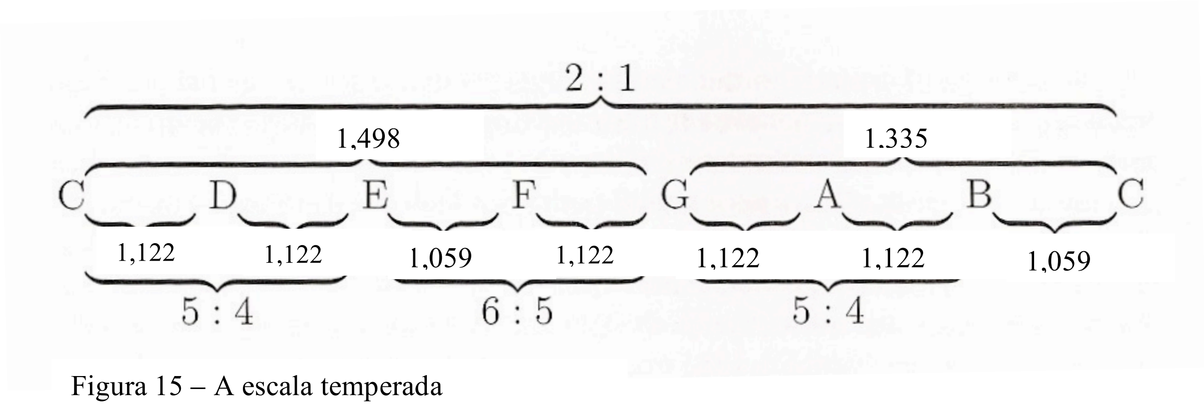


Figura 15 – A escala temperada

4.3 Oficina III – Ouvindo a Série Harmônica

Esses aspectos podem ser desenvolvidos através de algumas investigações práticas. Os harmônicos que uma corda produz são sempre a fundamental, a oitava, a décima segunda, décima sexta, e assim por diante, seguindo o ciclo das quintas ascendentes, como foi visto anteriormente. Esses harmônicos são o primeiro, segundo, terceiro, etc. modos de vibração de uma corda tencionada.

A questão desta oficina é oferecer um jeito em que podemos constatar que realmente estes harmônicos estão sendo produzidos por uma única corda. Para experimentar isso nos basta apenas um piano.

Investigação

Podemos verificar experimentalmente se conseguimos ouvir os harmônicos previstos pela série harmônica através de um piano? Podemos ainda demonstrar que outras notas do piano, que não são os harmônicos em questão, não soarão? Estas perguntas são as que queremos responder nesta oficina.

Experiência: abaixe lentamente a tecla de uma nota grave no piano, digamos a nota dó$_2$, mantendo-a abaixada, mas de maneira a não produzir nenhum som (o abafador permanece afastado da corda, deixando-a livre para vibrar). Agora toque de maneira forte a tecla da nota de uma oitava acima, dó$_3$ e após alguns instantes solte esta tecla de modo a parar o som. Depois que o som da nota dó$_3$ desaparece, ouve-se claramente a corda dó$_2$ vibrando uma oitava acima? Sim! Ela foi excitada por ressonância em seu segundo harmônico: o dó$_3$. Ou seja, a nota dó$_2$ está tocando o dó$_3$. Analogamente podemos repetir esse experimento com todos os harmônicos previstos pela série harmônica, e para a nossa surpresa, a corda dó$_2$ soará diligentemente todos os harmônicos que se esperava. Só para lembrar, neste caso os harmônicos produzidos pela nota dó$_2$ serão: dó$_3$ sol$_3$ dó$_4$ mi$_4$ sol$_4$ sib$_4$ dó$_5$ ré$_5$ mi$_5$

fá#$_5$ sol$_5$ láb$_5$ lá$_5$ sib$_5$ si$_5$ dó$_6$ que estão representados com bolinhas pretas e brancas na figura:

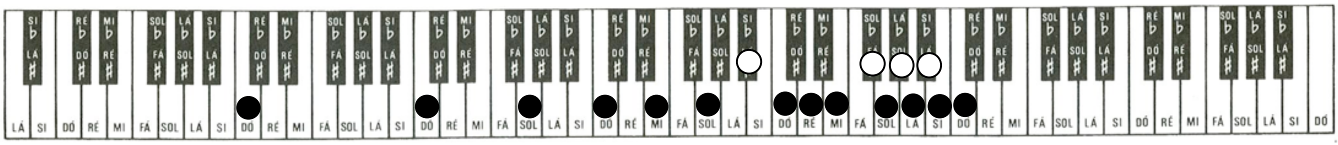


Figura 16 – Os harmônicos representados no teclado do piano

Vamos imaginar então que a corda dó$_2$ pode então soar e reverberar qualquer outro som dado por outra corda, mesmo que não seja um harmônico. Precisamos então por à prova. Ao fazer o experimento com outras notas que não harmônicos – qualquer uma que seja as que estão representadas na figura – percebe-se que a corda dó$_2$ **não** produz sequer algum som. Se fizermos com todas as outras notas que não são harmônicos, à priori, este fato comprova que os harmônicos de uma nota se dão exatamente desta maneira.

4.4 Oficina IV – Série Harmônica, Série de Fourier e o timbre.

Já vimos o que é a série harmônica. Ela pode ser pensada como um conjunto de sons – harmônicos – que estão sendo reproduzidos por uma mesma corda. Isso quer dizer que além da freqüência da nota fundamental, aquela em que nos parece a mais evidente aos ouvidos, uma dada corda vibrante também está simultaneamente vibrando de diferentes modos de acordo com os seus harmônicos. Este fato é muito interessante e geralmente desconhecido pela grande maioria das pessoas. Quando tocamos a corda mais grave do violão, o mi, geralmente pensamos que ela está vibrando apenas naquela freqüência de oscilação que dá origem à nota mi.

Na realidade, a corda está vibrando de diferentes maneiras ao mesmo tempo, mas podemos pensar que é como se fosse uma soma de modos diferentes de vibração, portanto freqüências também diferentes – que no conjunto nós ouvimos o mi, que é a freqüência fundamental. Podemos então perguntar-nos, se ouvimos só o mi, para que "servem" os outros harmônicos?

Há pessoas que com o ouvido treinado também conseguem ouvir alguns harmônicos do mi, através de uma audição seletiva em que a pessoa concentra sua percepção em uma dada freqüência. Independente de conseguirmos ouvir outros harmônicos ou não, o resultado de uma dada fonte de vibração gerar muitos harmônicos é que eles dão uma “cor” ao som, portanto estão relacionados ao timbre. Imaginemos que ao tocarmos uma nota lá 440 Hz ao piano podemos indentificá-la como sendo um som produzido por um piano e não por um violino, por exemplo. Se tocarmos o mesmo lá 440 Hz em um violino, perceberemos que não é um piano. Essa distinção é bastante evidente e não precisamos conhecer música para perceber.

Quando alguém conhecido nos chama, muitas vezes sabemos que é apenas pela voz, na realidade estamos distinguindo o timbre da voz da pessoa e não a altura tonal ou intensidade. Esta oficina procura gerar uma reflexão sobre as seguintes questões: De que modo a série harmônica se relaciona com o timbre? As séries de Fourier podem representar o que acontece com uma corda vibrante? Até que ponto elas são um modelo matemático convincente do que realmente acontece? Podemos testá-la experimentalmente? De que maneira o timbre está relacionado com os harmônicos?

Para responder ou pensar sobre estas questões podemos realizar primeiro uma atividade com vários instrumentos diferentes, como flautas, violão, cavaquinho, teclados, e muitos outros caso estejam disponíveis. Primeiramente verificar que todos estão afinados. Distribuir os instrumentos entre alguns voluntários de maneira que cada um toque uma dada nota igual, por exemplo o ré 359 Hz. Uma vez que cada um aprendeu a produzir esta nota, o professor pede que os alunos fechem os olhos e prestem atenção aos sons que serão produzidos. Previamente combinado com o professor, cada aluno que está com um instrumento soará sua nota, um de cada vez. Em seguida o professor pergunta se todos acham que a nota tocada por eles era a mesma (altura tonal) – os alunos perceberão que a altura tonal é a mesma, então pergunta-se se eles notaram diferenças entre os sons tocados por instrumentos diferentes. Todos concordarão que as notas eram de instrumentos distintos pois tinham timbres diferentes. O professor pode então apresentar bem cada instrumento aos alunos e pedir que eles fechem os olhos e ao tocar um dado instrumento eles tentem identificar qual instrumento foi tocado. Com algumas tentativas a grande maioria dos alunos perceberá qual instrumento era.

O timbre é talvez a característica mais complexa do som. Muitos teóricos musicais se dedicaram a estudá-lo e a conceituá-lo mas esta tarefa é bem difícil pois praticamente todos os parâmetros sonoros influenciam o timbre de um instrumento. “O timbre é uma característica subjetiva do som que nos permite diferenciar dois sons de altura e intensidade iguais. O timbre resulta da correlação subjetiva de todas as propriedades do som que não influenciam directamente a altura e a sensação de intensidade (...)" (Henrique, 200).

Pelo fato do timbre ser tão complexo e por ser extremamente difícil de quantificar ano há uma teoria satisfatória sobre o timbre. Nesta oficina, entretanto, relacionaremos o timbre com a série harmônica. Para isso precisamos de um software que dada uma freqüência, ele produz os harmônicos de acordo com a série harmônica. Depois podemos variar a intensidade dos harmônicos enquanto ouvimos o som produzido eletronicamente e observar o que acontece com o timbre.

O que um software deste tipo faz é nada mais que uma soma algébrica das equações matemáticas das ondas, representadas por funções seno e cosseno. Utiliza-se o que foi desenvolvido pelo grande matemático francês chamado Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), à partir do princípio da superposição – desenvolvido por Daniel Bernoulli em 1755 – que permite interpretar a vibração de todo ponto em uma corda vibrante como uma soma algébrica do deslocamento produzido pela freqüência fundamental e todos os seus harmônicos.

Fourier sistematizou este princípio somente em 1822, quando demonstrou que "qualquer curva pode ser representada pela superposição de um número de curvas harmônicas simples, resultado esse estendido posteriormente por Ohm em 1843 para ondas sonoras". (Abdounur, 2000 – *Matemática e música*).

O grupo de Matemática e Música do IME-USP, da qual faço parte, coordenado pelo Prof. Dr. Oscar Abdounur, desenvolveu um software que faz a soma de harmônicos de acordo com a intensidade que selecionamos e visualizamos a onda completa que representa a soma de todas as outras enquanto ouvimos o som produzido.

Dentre os softwares disponíveis gratuitos encontrados online, quero destacar os softwares e simulações produzidas pela Universidade do Colorado no projeto – Phet. Há inúmeras simulações interativas e divertidas na área de física que inclui uma boa seleção de recursos interativos para compreender os fenômenos de onda e do som em geral.

Para esta oficina, podemos utilizar o software chamado *Fourier: Making Waves*[7], que pode ser baixado gratuitamente ou ser rodado online. Com este recurso podemos variar a

[7] *Making waves*: fazendo ondas, tradução do autor. Disponível em http://phet.colorado.edu/ Acesso em: 15 Fev. de 2010.

intensidade dos harmônicos da maneira que quisermos e observar o resultado da soma das ondas na tela, assim como ouvir o som produzido, veja a figura abaixo.

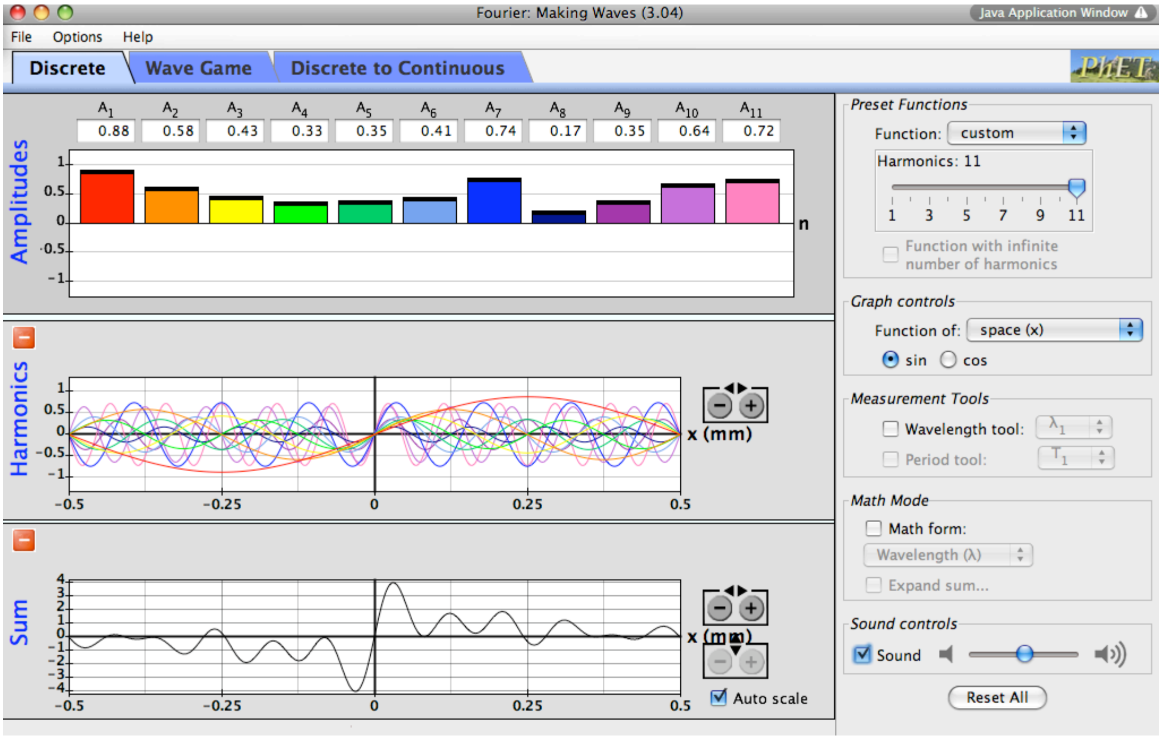


Figura 17 – Tela do software *Fourier: Making Waves* mostrando uma onda (em preto) gerada pela soma de 11 harmônicos (coloridos).

O software tem muitos outros recursos que podem ser explorados, entre eles um jogo em que se deve executar uma soma de harmônicos para se atingir uma dada onda complexa. Neste jogo, o nível de dificuldade varia de 1 à 10. É uma boa oportunidade para os alunos aprenderem brincando e perceberem, através da visualização, como a soma de ondas acontece.

4.5 Oficina V – Determinando a velocidade do som através da ressonância de harmônicos

Os tubos cilíndricos ocos constituem uma parte importante para alguns tipos de instrumentos de sopro, como a flauta transversal. Eles se comportam fisicamente como tubos aberto-aberto ou fechado-aberto. Para esta oficina utilizaremos apenas tubos do tipo fechado-aberto. Esses tubos produzem ondas transversais que representam na realidade a movimentação de ar para um lado e para outro entre as duas extremidades. Geralmente nas extremidades fechadas representamos sempre um nó, e nas abertas anti-nós. O ar não pode se mover de um lado para o outro nas extremidades fechadas, mas está livre para se mover nas extremidades abertas.

Na figura abaixo temos os primeiros três modos normais de vibração de uma coluna de gás dentro de um cilindro com uma extremidade fechada (à esquerda do tubo) e outra extremidade aberta (à direita do tubo).

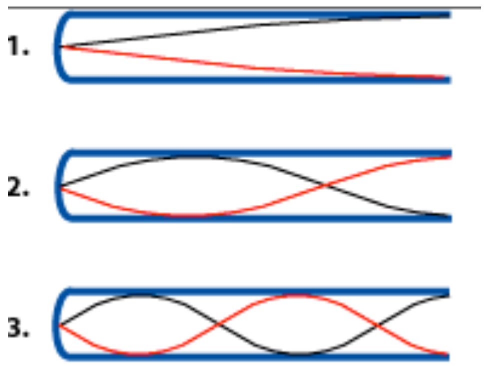


Figura 18 – Representação de modos de vibração de uma coluna de ar em um tubo cilíndrico fechado-aberto

Percebe-se que os harmônicos produzidos em um tubo deste tipo são apenas os “ímpares” da ordem de harmônicos da série harmônica. É fácil notar que os desenhos das ondas transversais nos tubos são exatamente metades das ondas referentes ao primeiro, terceiro e quinto harmônicos. Na próxima figura este fato fica mais evidente ao “adicionar” as outras metades.

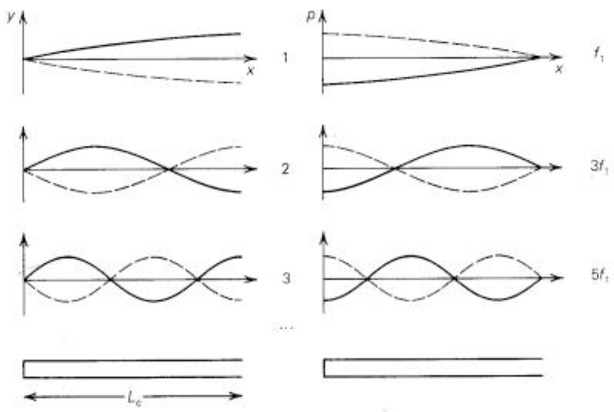


Figura 19 – Representação de modos de vibração com sua outra “metade” para visualizar a oscilação.

Oficina

O som viaja no ar a uma velocidade aproximada de 330 m/s, de acordo com a temperatura e pressão do ar. Esta velocidade é muito rápida para que possamos medir com um cronômetro. Uma maneira de medir a velocidade neste caso é tentar "congelar" a onda, ou seja, analisar uma onda estacionária. Um exemplo de onda estacionária é a onda de uma corda do violão, que vibra mas não de desloca do lugar. Quando temos ondas estacionárias, portanto é fácil calcular o seu comprimento de onda, e se soubermos a sua freqüência, podemos calcular a velocidade através da fórmula $velocidade = f \cdot \lambda$.

Nesta oficina, também faremos uso do fenômeno da ressonância [8] sonora para calcular a velocidade do som no ar. Quando ocorre a ressonância sonora, percebe-se que um mesmo som, ou nota musical aumenta sua intensidade repentinamente.

O material necessário para a oficina será:

- Um tubo de vidro transparente
- Um proveta grande e larga o suficiente para que o tubo entre nela
- Alguns diapasões de metal de freqüência diferentes
- Uma régua de um metro

Enchemos a proveta com água e colocamos o tubo de vidro dentro dela com cuidado. Podemos notar que a coluna de ar que está dentro do tubo pode se mover livremente na extremidade superior e na extremidade inferior é limitada pela água. Desta maneira nós conseguimos produzir um tubo cilíndrico aberto-fechado cujo comprimento varia conforme eu levanto o tubo ou coloco-o mais para dentro da proveta.

Este recurso nos possibilita variar o comprimento da onda sonora e portanto a sua altura tonal, de maneira a encontrar um valor específico que nos possibilitará encontrar a velocidade do som no ar, à temperatura ambiente.

[8] Ressonância é um estado de um sistema que vibra numa de suas freqüências naturais, com amplitude acentuadamente maior, como resultado de estímulos externos que possuem a mesma freqüência da vibração, ou suficientemente próxima. – Dicionário Houaiss de Física

Diagrama da aparelhagem:

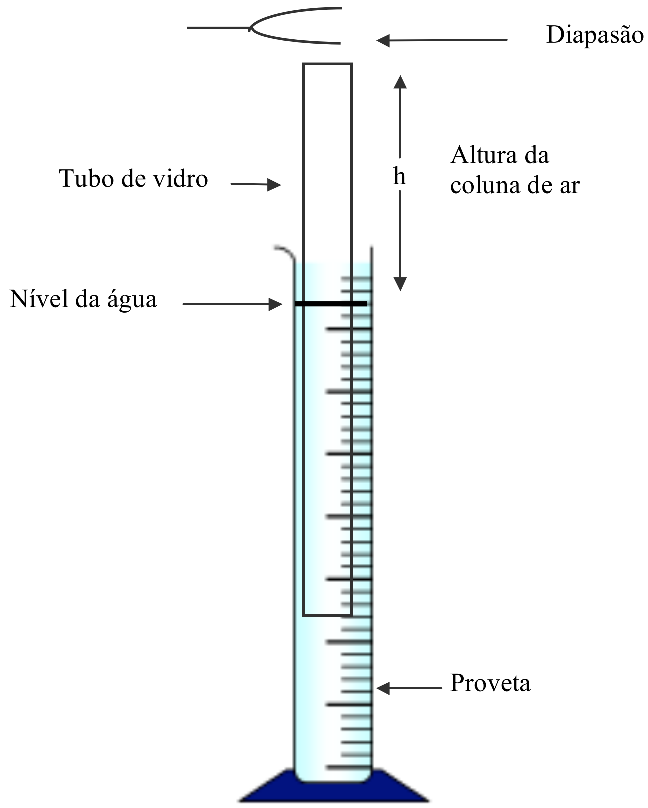


Figura 20 – Esquema de montagem para realizar o experimento da Oficina V

O procedimento experimental é simples. Escolhe-se um dos diapasões com uma dada freqüência fixa. Bata-o em uma superfície segura para que comece a vibrar e posicione-o logo acima do tubo de vidro. Enquanto o diapasão está vibrando podemos ouvir o seu som ao ficarmos com o ouvido próximo a ele. Durante este período mova o tubo para cima e para baixo lentamente até encontrar a altura mínima de ar que produza ressonância do som do diapasão, ou seja, o mesmo som – com altura tonal idêntica, irá reverberar muito mais forte. Esta é a freqüência de ressonância, indicando que para este valor de freqüência (a do diapasão) o ar dentro do tubo vibra com a mesma velocidade do próprio diapasão. Neste momento medimos a altura *h*.

Repita este processo mais algumas vezes com diapasões de freqüências distintas. Como a altura h que se encontra é referente à menor altura que a coluna de ar reverbera, temos neste caso uma vibração de ar dentro de um tubo cilíndrico fechado-aberto do tipo 1. O

h que medimos é metade do comprimento L da corda, que representa por sua vez metade do comprimento de onda λ. Podemos então adotar a fórmula: $\lambda = 4 \cdot h$ para encontrar o valor do comprimento de onda. Com estes dados, substituímos na fórmula:

$$velocidade = f \cdot \lambda$$

Calculamos a velocidade do som em metros por segundo. Comparamos o valor da velocidade encontrado com os outros dados de freqüência do outros diapasões e valores de h e tiramos a média para obter um valor melhor.

Um exemplo: suponhamos que utilizamos um diapasão de freqüência 256 Hz, e que encontramos h = 31 cm = 0,31 m, logo $\lambda = 4 \cdot 0{,}31 = 1{,}24\,\text{m}$, e substituindo na equação $velocidade = f \cdot \lambda$, temos que $velocidade = 256 \cdot 1{,}24 = 317{,}44 \cong 320\ m/s$.

Utilizamos o valor final com apenas dois algarismos significativos para ficar consistente com os valores iniciais, cuja menor precisão é de h com dois algarismos significativos. Como na realidade teremos vários diapasões, e portanto vários resultados da velocidade do som de acordo com a freqüência utilizada, sugere-se calcular a média dos valores da velocidade, pegar o valor que maior se distancia da média e tomá-lo como a incerteza absolta. Desta maneira teremos um resultado, por exemplo, do tipo:

Velocidade do som $= 320 \pm 5\ m/s$.

4.6 Oficina VI – Testando a fórmula de Mersenne-Galileo experimentalmente

Sabemos que em seus estudos, Galileu dedicou muito tempo ao estudo dos pêndulos, possivelmente motivado pela observação do grande lustre da catedral de Pisa ao ser inclinado quando era aceso. Galileu percebeu que os pêndulos com pequenas oscilações mantinham a mesma freqüência de oscilação independente da sua amplitude.

Como Galileo era também músico amador – ele tocava um instrumento de cordas chamado alaúde – é bastante provável que ele tenha relacionado uma possível relação entre pêndulo e corda vibrante, afinal ambos são sistemas que oscilam que são acionados por uma força externa mecânica. Ele sabia que quando um som emitido de uma corda vibrante ir se enfraquecendo, ou seja, diminuindo seu volume, a amplitude de vibração da corda diminuía, mas a freqüência da vibração não variava, ou seja, um dó é sempre um dó independente se tocamos mais forte ou mais fraco.

Analogamente a corda vibrante mantinha sua freqüência de oscilação, independente da amplitude que era puxada. Galileu, apesar de não ser muito divulgado, teve igual interesse pelo estudo da corda vibrante quanto teve pelo estudo do pêndulo. Ele chegou a formular as leis que correlacionam a nota musical produzida por uma corda, com os parâmetros físicos e geométricos desta corda como comprimento, tensão e material de fabricação.

A relação entre o comprimento de uma corda e sua freqüência indicando a altura tonal podemos facilmente perceber em um monocórdio, entretanto quando incluímos mais variáveis físicas, como a tensão da corda, o tipo de material e a espessura, etc. Fica muito mais difícil de avaliar.

Nesta oficina, sugerimos uma variação do monocórdio de maneira a permitir também estudar a variação da tensão aplicada na corda.

Em uma mesa de madeira de com aproximadamente meio centímetro de espessura ou um pouco mais, uns 15 cm de largura e uns 50 cm. Colocasse um pino de aço em uma extremidade e uma pequeno cavalete fixo na outra extremidade. Prende-se um fio de aço ao pino e se estica até o outro lado, passando pelo cavalete fixo e sendo preso na alça de em um balde com areia, como mostra a figura. Temos ainda um cavalete móvel para colocar em qualquer posição que desejemos.

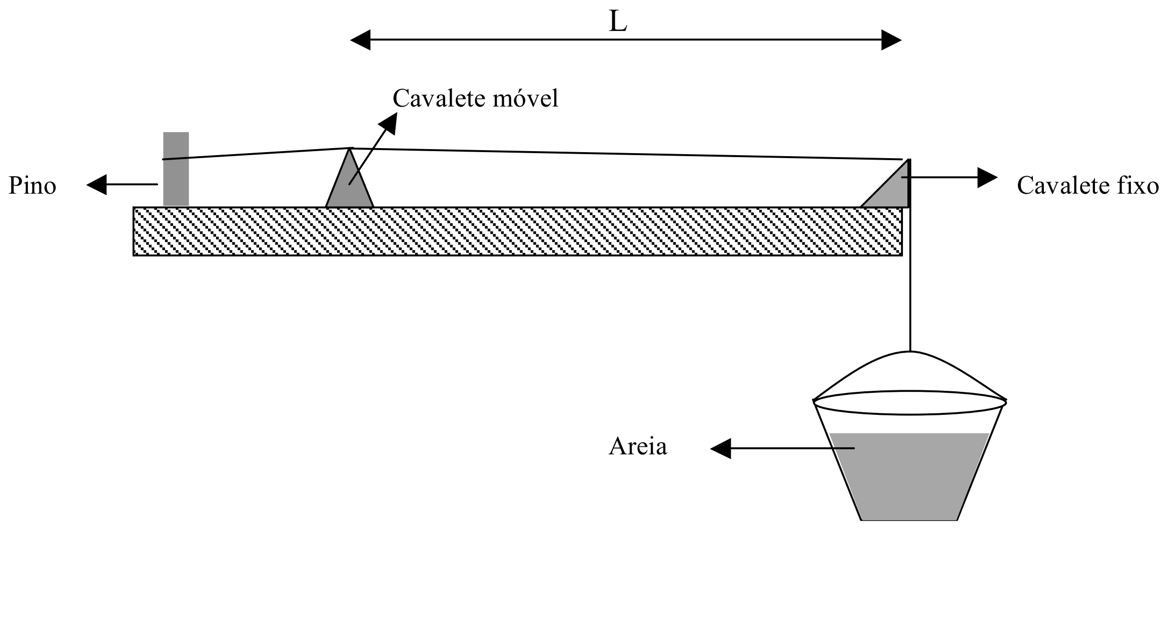


Figura 21 – Esquema de montagem para realizar o experimento da Oficina VI

Podemos agora variar o comprimento L da corda mudando de posição o cavalete móvel. Podemos notar que quando fazemos L/2, a freqüência dobra e ouvimos um intervalo de oitava, como já podia ser percebido no experimento do monocórdio tradicional.

Nesta versão, com a ajuda de um afinador eletrônico, podemos estabelecer L e T (tensão da corda que é aproximadamente igual à massa do balde com areia em kg x 10) de modo que a corda vibre a uma freqüência, digamos, de 220 Hz (220 oscilações por segundo). Isso pode ser feito com tentativa e erro até o afinador detectar a freqüência desejada.

Uma vez tendo estabelecido este "padrão" inicial, podemos variar a tensão T e ver como a freqüência a corda varia. Coletando vários dados e utilizando de tabelas e construção de gráficos, poderemos verificar que a freqüência é diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão. Para incluirmos mais uma parâmetro, a densidade linear *d* da corda, podemos descobrir de que maneira a freqüência varia com a densidade linear *d* . Estes procedimentos experimentais não são triviais e requerem um bom apoio do professor de física neste caso.

A objetivo é que no final se consiga demonstrar a fórmula de Mersenne-Galileo para a freqüência da vibração fundamental:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}}$$

L é o comprimento da corda, T a tensão da corda, d é a densidade linear da corda.

Nessa relação aparecem apenas quantidades que dependem da corda; assim os modos de vibração são uma característica permanente do sistema físico particular. Em quais possíveis modos a corda vibrará? Devido à capacidade de superposição linear das ondas, muitos modos diferentes podem coexistir simultaneamente sem que perturbem uns aos outros.

Dessa maneira, podemos testar o experimento também com as frequências dos harmônicos produzidos. Utilizamos n para representar o número do harmônico. Teremos então a fórmula mais completa:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}} = nf_1$$

4.7 Oficina VII – O Pêndulo e a consonância musical

As analogias entre pêndulo e a corda vibrante, já mencionada na Oficina VI, foram muito estudadas por Galileu Galilei. Já sabemos que Galileu realizou os primeiros estudos sobre o pêndulo com rigor científico. Ele deduziu o isocronismo das oascilações do pêndulo, ou seja, que o período (tempo) das oscilações permanecia o mesmo para pequenas oscilações.

Além disso, Galileu também estabeleceu que o período não depende da massa presa no fio, mas apenas da raiz quadrada do comprimento do fio, ou seja uma bolinha de gude ou uma bola de tênis utilizadas para oscilações em um pêndulo de mesmo comprimento de fio, terão períodos iguais (soltadas em ângulos iniciais iguais).

Estas propriedades podem ser facilmente verificadas através de um experimento simples com pêndulos. Pode-se montar facilmente uma haste de madeira ou suporte de metal que fique bem firme em uma mesa para prender o pêndulo, como mostra a figura.

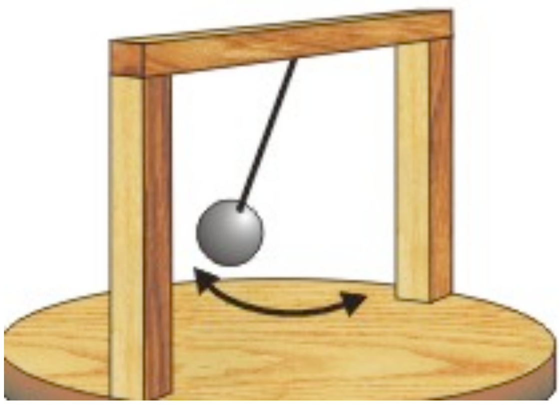


Figura 22 – Representação do suporte simples para um pêndulo.

Com a utilização de um cronômetro, pode-se coletar dados para inferir as propriedades que Galileu descobriu, entretanto não é este o foco desta oficina. Existe uma propriedade que é muito importante do estudo de ondas e, portanto também, do som e que utilizamos na oficina V. Essa propriedade se chama ressonância.

Um ponto importante é que um dado pêndulo tende a oscilar em uma dada freqüência, que chamaremos de freqüência própria. Quando ele é estimulado por uma perturbação externa, o pêndulo responde de maneira a reproduzir a oscilação externa somente se esta tiver a mesma freqüência da freqüência própria do pêndulo. Podemos dizer que ocorre um efeito de ressonância quando o máximo possível de energia mecânica é transferida ao pêndulo.

A oficina proposta aqui utilizará um haste em "U" suficientemente larga para que consigamos prender vários pêndulos de comprimentos diversos. Colocamos uma corda paralela à haste superior, e nela prendemos os fios dos pêndulos.

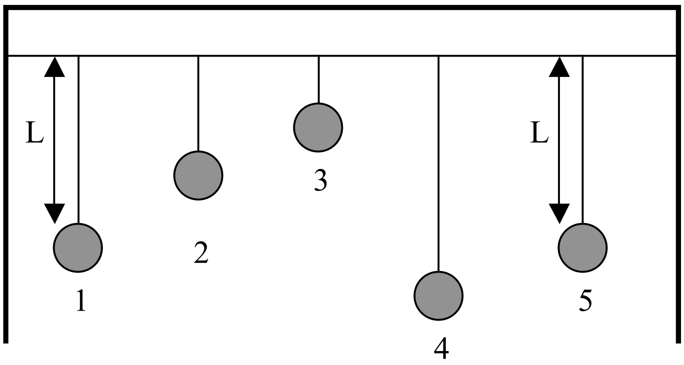


Figura 23 – Pêndulos justapostos mostrando a transferência de energia entre um pêndulo e outro com o mesmo comprimento.

A corda superior que está segurando os pêndulos transfere energia para os outros pêndulos. Mantendo todos os pêndulos em repouso, ao puxarmos apenas o pêndulo 1 e colocarmos em movimento, vamos observar que suas oscilações vão diminuindo de amplitude ao mesmo tempo em que o pêndulo 5 começa a se movimentar. Esse processo de transferência de energia mecânica continua até que toda a energia do pêndulo 1 se transferiu para o pêndulo 5. Daí vemos o pêndulo 1 em repouso e o pêndulo 5 oscilando.

A razão pela qual os outros pêndulos não foram estimulados é exatamente porque cada pêndulo tem uma freqüência própria. Este mecanismo descrito está presente nas caixas de ressonância dos instrumentos. Um violão tem uma caixa de ressonância que é feita de tal maneira que reproduza uma gama de freqüências próprias das cordas aumentando assim o som final produzido.

Para explicar a idéia de consinância ou dissonância de um intervalo musical, Galileo traça um interessante paralelo entre pêndulo e corda vibrante. Como já vimos, os intervalos de consonância perfeitas estabelecidos por Pitágoras tem uma relação entre suas freqüências representadas por números inteiros pequenos 1, 2, 3, 4. Vamos incluir o número 5 também para estabelecermos uma relação dó-mi-sol. Tomando-se f a freqüência de oscilação do primeiro pêndulo representando a nota dó, teremos que o mi, a terça maior, terá uma freqüência $(5/4)f$, e o sol terá uma freqüência de oscilação de $(3/2)f$.

Podemos então estabelecer a seguinte relação:

$$f:\frac{5}{4}f:\frac{3}{2}f \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{4}f:\frac{5}{4}f:\frac{6}{4} \quad \Rightarrow \quad 4:5:6$$

Se quisermos falar de período de oscilação, ele será o inverso da freqüência, daí teremos $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$. Pegamos agora três pêndulos que os chamaremos de dó, mi e sol. Segundo Galileu, o período do pêndulo depende da raiz quadrada do comprimento do fio, logo o comprimento do fio do pêndulo depende do quadrado do período, então para os pêndulos dó, mi e sol, teremos os comprimentos de acordo com as seguintes proporções:

$$\frac{1}{4^2}:\frac{1}{5^2}:\frac{1}{6^2} \Rightarrow \frac{1}{16}:\frac{1}{25}:\frac{1}{36} \Rightarrow 900:576:400$$

Podemos então tomar como comprimento para o pêndulo dó 9 cm, para o mi, 5,76 cm e para o sol, 4 cm. Colocamos todos os três pêndulos em oscilação simultaneamente. O que acontecerá? Cada pêndulo oscila com sua freqüência definida, mas a cada quatro oscilações do pêndulo mais lento, todos os três entram em fase (oscilam juntos). Esta particularidade acontece muito mais raramente se as proporções entre as freqüências são dadas por números inteiros grandes oi ainda nunca haverá oscilação em fase se se tratar de números irracionais.

A hipótese de Galileu para justificar que tais intervalos eram considerados consonantes por Pitágoras, é que da "[...] mesma forma que os olhos apreciam a elegância ordenada dos movimentos dos pêndulos que entram em fase a cada ciclo, o ouvido prefere conjuntos sonoros que, a intervalos regulares, induzem sobre o tímpano uma estimulação simultânea" (Frova, 2005).

Galileu procurou uma explicação para que este acorde dó-mi-sol soasse agradável aos nossos ouvidos justamente porque o máximo de pressão chega ao tímpano a cada quatro perídos da onda sonora do dó. Ao contrário, se não há um intervalo em que os pressões chegam ao tímpano juntas, representando um máximo, como no caso de freqüências que não tem relações de proporção com números inteiros, o ouvido cansa e temos uma sensação desagradável.

Os aspectos de consonância e dissonância estão longe de ser triviais e vários estudiosos estudaram e incluíram muitas outras variáveis, como o próprio aspecto cultural, que pode mudar completamente uma visão universal. Mesmo assim esta oficina possibilita que se faça uma reflexão com relação a uma busca científica, experimental na tentativa de explicar a consonância dos intervalos musicais e não meramente especulações matemáticas.

4.8 Oficina VIII – Percepção: limites audíveis, intervalos e percepção seletiva.

É muito comum dizermos que uma pessoa tem "ouvido" ou "ela tem um ouvido bom para música". O que isso quer dizer? Considerando todas as pessoas que não têm problemas auditivos, ou seja, falam normalmente e escutam normalmente. Mesmo assim nós diferenciamos algumas como tendo um "bom ouvido" ou um "mau ouvido" para a música.

Esta atividade propõe uma investigação para ver até onde as pessoas de um certo grupo, como em uma classe de alunos, tem a mesma habilidade de distinguir sons de freqüências diferentes. O foco aqui não é a diferença de timbre.

Para começar, utilizamos um gerador de sinal sonoro (signal generator). É um aparelho eletrônico que produz freqüências sonoras contínuas desde uma freqüência muito baixa, como 10 Hz até freqüências acima de 20.000 Hz. Na falta deste aparelho podemos utilizar alguns signal generators disponíveis online e realizar a investigação junto a um computador com caixas de som. Um exemplo de um freeware que produz freqüências sonoras de 0 Hz à 22.000 Hz é o DFG *Warble Tone Generator* [9] da empresa *Digital Recordings*. Este gerador permite selecionar qualquer freqüência dentro o limite acima em intervalos crescentes ou decrescentes de 1 Hz.

Pode-se começar gerando um som com uma freqüência muito baixa e ir aumentando a freqüência lentamente e pedir que os alunos levantem a mão quando começarem a escutar algo. Continua-se aumentando a freqüência e pede-se que os alunos abaixem a mão quando a partir da freqüência que deixam de ouvir. A literatura frequentemente admite que o intervalo de freqüência auditiva do ouvido humano é de 20 à 20.000 Hz. Algumas referências adotam o

[9] *Warble Tone generator*: gerador de som oscilante, tradução do autor. Disponível em www.digital-recordings.com. Acesso em: 20 Jan. 2010.

limite de 16 Hz à 16.000 Hz. Utilizando esta atividade diversas vezes e, aulas de física, percebi que é interessante notar que pode haver uma grande diferença dos limites de audição entre os alunos e que as pessoas mais velhas, como nós professores por exemplo, muito raramente conseguem ouvir um som de freqüência superior a 16.000 Hz, enquanto a maioria dos alunos ainda ouve até bem próximo dos 20.000 Hz. A explicação mais comum para isso é que ao longo dos anos, as células ciliares, responsáveis pela detecção da vibração sonora nos ouvidos, vão morrendo ao longo da vida (a célula ciliar é um tipo de neurônio) e o ouvido humano vai perdendo a capacidade de detectar sons muito agudos, de freqüência alta. Entretanto eu já encontrei alguns alunos que não ouviam acima dos 16.000 Hz e ao questioná-los sobre seus hábitos musicais, constatei que quase a totalidade deles ouvia música com fones de ouvido durante muito tempo e com o volume muito alto. Alguns também freqüentavam muitas "baladas" onde a música é sempre excessivamente alta, muito acima do limite considerado seguro para o ouvido humano.

Dando continuidade a esta oficina de percepção, podemos realizar uma investigação para ver se todos os alunos percebem claramente a diferença de um semitom. Para tanto utilizamos um piano ou um teclado eletrônico. Tocamos uma nota "central" como um lá 440 Hz, por exemplo, e pedimos aos alunos prestarem bastante atenção. Podemos tocar três vezes para que a nota fique bem memorizada. Logo em seguida tocamos uma nota mais alta, digamos um ré 659 Hz, e perguntamos aos alunos se esta nota é mais "alta" ou mais "baixa" de acordo com a altura tonal (freqüência). É muito raro alguém não conseguir distinguir uma nota mais alta ou mais baixa para intervalos relativamente grandes.

Repetimos o lá e agora tocamos uma nota mais baixa, como um mi 370 Hz logo abaixo, na mesma oitava e perguntamos mais uma vez se a nota é mais alta que a de referência, o lá, ou mais baixa. Este exercício se repete várias vezes diminuindo a distância dos intervalos até chegarmos em um semitom - menor intervalo possível na escala temperada. É possível que neste caso existam alunos que tem dificuldade de identificar estas notas, quando estão muito próximas (ao serem tocadas com um intervalo de silêncio entre elas).

Para finalizar com esta oficina, utilizamos um recurso que é usado frequentemente e diariamente por todos os alunos: o telefone. Os telefones utilizam um sistema de tons chamado *Touch-Tone dialing system* que é padronizado para que os sistemas de comunicações telefônicos consigam identificar quais informações (números) estão sendo enviados. Todos nós ouvimos estes tons mas não damos muita atenção.

A teclas do telefone produzem, na realidade, doze intervalos e não freqüências simples, ou seja, cada tecla produz uma freqüência baixa e uma outra freqüência alta ao mesmo tempo. Existem no total 8 freqüências fixas que são combinadas para dar os doze intervalos possíveis que identificam as doze teclas distintas como mostra a figura abaixo:

freq (Hz)	**1209**	**1336**	**1477**
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#

Figura 24 – Freqüências referentes às teclas de um telefone

Como podemos ver na tabela, os intervalos musicais produzidos pelas teclas 1, 2 e 3 contém uma mesma freqüência baixa de 697 Hz enquanto que as freqüências altas são 1209 Hz, 1336 Hz e 1477 Hz respectivamente. Essa variação de freqüência é diferente maior do que a variação da freqüência de um semitom e menor do que a de um tom. Isso torna dificulta a nossa percepção pois não reconhecemos uma escala ascendente ou descendente com os mesmos "degraus" cm que estamos acostumados. O menor "degrau" na escala temperada equivale a um fator de $\sqrt[12]{2} = 1{,}059463094359295$, enquanto dois "degraus" equivaleriam portanto a $\sqrt[12]{2^2} = 1{,}122462048309373$ Se tomarmos então a nota de freqüência 1209 Hz, a nota logo "acima" que tem 1336 Hz, perceberemos que a razão entre elas é de $\frac{1336}{1209} = 1{,}105045492142266$. Isto mostra porque os intervalos usados nos telefones nos parecem estranhos.

Podemos então utilizar um telefone celular e conectá-lo a um caixa amplificada (as mesmas utilizadas para mp3 players). Repetimos a investigação de percepção utilizando estes intervalos musicais. Este caso apresenta um desafio muito maior dado os intervalos e freqüências envolvidas. É muito provável que vários alunos não conseguirão distinguir os sons produzidos pelos números mais próximos e isto é perfeitamente normal.

Nesta mesma atividade, podemos treinar o nosso ouvido para perceber qual freqüência de mantém constante e qual varia, isto é, pressionamos as teclas 1, 2 e 3 e fazemos um esforço para perceber que em todos os sons produzidos, há "algo" que se mantém constante. Este “algo” é o som de freqüência 667 Hz. Isto é um exemplo de percepção seletiva. Podemos repetir a experiência usando as teclas 4, 5 e 6, que neste caso terão como freqüência baixa de fundo a nota que produz a freqüência de 770 Hz. Analogamente podemos fazer para as teclas *, 0 e #. Nestes três casos a freqüência fixa era a baixa. Podemos repetir o procedimento dando ênfase na seqüência alta como fixa. Para estes casos, usaremos as teclas 1, 4, 0 e *; 2, 5, 8 e 0; e 3, 6, 9 e #.

Em âmbos os casos, fixando a freqüência baixa, ou seja, usando as teclas 1, 2, 3 ou fixando as freqüências altas, como nas teclas 1, 4, 0 e *, podemos usar o *DFG Warble Tone Generator* para produzir o som de freqüência fixa, dando um apoio à nossa percepção auditiva. Desta maneira a percepção do som de freqüência fixa nos intervalos é um pouco mais fácil. Mesmo assim, esta investigação de percepção sonora foi a que teve menos sucesso, em que a maioria das pessoas não conseguiram ou não tinham certeza de que haviam conseguido ouvir a freqüência fixa. Esta seleção de atenção da nossa percepção para uma dada freqüência se mostrou ser uma habilidade bem menos freqüente nas pessoas.

Estas oficinas promovem o desenvolvimento da percepção e reconhecimento de elementos que estão presentes no nosso dia a dia e que geralmente não damos muita atenção. É uma ótima oportunidade para entrarmos mais em contato com os processos de percepção sensorial ligados à audição e compreender um pouco do que está por trás. Neste ponto convida-se os alunos a refletirem e a conjecturarem o que quer dizer a expressão “ele tem bom ouvido para a musica” à luz dos elementos desenvolvidos nesta oficina.

4.9 Oficina IX – Concerto para garrafas

Todo objeto que contem uma cavidade fixa cujo ar penetra é em potencial um instrumento musical. Isso acontece porque esta cavidade é capaz de entrar em ressonância com um som cuja freqüência coincida com uma das freqüências características de oscilação do ar contido na cavidade. Como já sabemos, a ressonância reforça o som, ou seja, deixa-o com um volume maior (maior intensidade). Podemos perceber isso facilmente ao soprar a boca de uma garrafa.

Utilizando várias garrafas, podemos colocar quantidades de água distintas de modo a ter uma altura da coluna de ar que varia, começando de uma garrafa sem água, ou seja, máxima altura de coluna de ar, e ir diminuindo até uma garrafa que teria menos ar que as outras. Se batermos nas garrafas com uma colher, podemos perceber que há de fato uma variação da altura tonal. Quanto menor a altura da coluna de ar, mais agudo o som.

Esta oficina é bastante simples e pode ser feita até com alunos pequenos. Utilizando 8 garrafas idênticas, colocasse água em diferentes quantidades de maneira a buscar imitar uma escala maior com uma oitava. A notas só serão precisas caso se utilize um afinador eletrônico, mas isso depende do objetivo que se quer chegar. Para crianças pequenas é interessante deixá-las livres para construir suas próprias escalas de freqüência crescente sem ter que necessariamente se parecer com uma escala temperada correta. Esta atividade põe a percepção auditiva em funcionamento e não estabelece uma relação da percepção auditiva com intervalos fixos ou pré-definidos como ocorre com os instrumentos temperados.

4.10 Oficina X – Leitura, reflexão e produção te texto

Dentro do contexto desse trabalho, pode-se explorar e desenvolver aspectos relativos à história da matemática e da física e sua relação com a música. Através de pesquisas focadas em personagens específicos relacionados à evolução da teoria e da prática musical, o aluno pode criar um diálogo entre dois personagens representativos que tenham uma relação com algum fato histórico em comum e explorá-lo.

Este diálogo hipotético pode acontecer entre personagens do mesmo período histórico ou não. É um bom exercício para comparar e articular os conceitos abordados, sinalizando suas diferenças, curiosidades e indicando sua evolução.

Dois diálogos são disponibilizados aqui como exemplo. Eles também podem ser utilizados como uma atividade alternativa, como por exemplo sua leitura, reflexão e posterior levantamento das informações contidas neles.

O *primeiro* texto (vide apêndice) é sobre um encontro histórico entre J.S. Bach e Johann Bernoulli. Este texto foi extraído o livro "*e: a história de um número*" (Maor, 2004) localizado na página 169. Ele é uma ótima oportunidade para, por exemplo, introduzir a questão do temperamento e da sua relação com a escala logarítmica.

Através de um encontro hipotético entre J.S. Bach e Johann Bernoulli em 1740, o leitor é convidado a viajar dentro dos aspectos matemáticos e musicais daquilo que marcou de maneira decisiva o desenvolvimento da ciência da música e da matemática no século XVII: o advento do temperamento.

Bach comenta de seu interesse pelo estudo de como as cordas vibram, uma vez que toca cravo. Ele relata ainda de como resolveu um problema técnico que o incomodou durante anos. Esse problema está intimamente relacionado com a necessidade de criar um temperamento igual. Bernoulli ouve, compreende o problema e oferece ajuda a Bach, fazendo uso de números irracionais. O discurso sugere uma discussão e reflexão sobre a necessidade e dificuldade de criar um novo sistema musical que não esteja fundamentado na matemática especulativa pitagórica e sim na matemática experimental. As dificuldades encontradas por Bach podem servir de exemplos a possíveis obstáculos epistemológicos bachelardianos, tornando tal leitura crítica uma rica oportunidade de debate sobre o desenvolvimento da ciência.

O *segundo* texto (vide apêndice) é sobre um encontro hipotético sobre entre Gioseffo Zarlino e Vincenzo Galilei. Ambos são personagens centrais com relação à grande mudança que a música sofre no Renascimento. Vincenzo estudou teoria musical com Zarlino inicialmente. Chegou a escrever um compendium sobre a famosa obra de Zarlino *"Le istitutioni harmoniche"* por volta de 1570, entretanto ao longo de sua pesquisa sobre a música, Vincenzo adotou uma nova orientação de pesquisa que o levou a travar uma batalha com Zarlino que haveria de durar muitos anos. Em sua obra *"Dialogo di Vincentio Galilei nobile fiorentino della musicaa et della moderna.*" (Galilei, 1581), Vincenzo contesta muitas afirmações de Zarlino de maneira incisiva, inclusive apontando vários casos em que Zarlino havia mal compreendido alguns argumentos presentes em fontes arcaicas. Zarlino, aparentemente ficou profundamente magoado e não respondeu nada até escrever sua obra "*Sopplimenti musicali*" de 1588, que segundo estudiosos Zarlino não deu conta de contestar os argumentos bem fundados de seu antigo aluno, Vincenzo Galilei.

Este texto é parte de um projeto para uma apresentação sobre Matemática e Música, financiada pelo CNPQ, da qual faço parte. Ele tem caráter de divulgação científica para todos os públicos e por esta razão, optamos por não gerar uma grande tensão, ao contrário do que aconteceu, entre Zarlino e Vincenzo por razões didáticas.

5 REFERÊNCIAS

5.1 Glossário

Para um melhor aproveitamento do trabalho, faz-se necessária uma rápida explicação e definição de alguns elementos básicos da música.

Altura tonal (*pitch*) – A localização de um som na escala tonal, dependendo da velocidade de vibração da fonte sonora: vibrações rápidas produzem alta altura tonal e vibrações lentas produzem baixa altura tonal. A taxa de vibração por segundo é a freqüência da nota. Através de um acordo internacional de 1939, renovado em 1960, a afinação padrão de concerto é de 440 Hz para a nota lá diretamente acima do dó central (a afinação na época renascentista variava entre 420 e 428 Hz, um pouco abaixo na afinação moderna).

Amplitude – A amplitude de uma oscilação é o deslocamento máximo da posição de equilíbrio à distenção máxima imposta a uma corda vibrante, por exemplo. A amplitude está relacionada à intensidade sonora, ou volume. Quanto mais puxamos uma corda de um violão, mais volume ela tem.

Bemol – Bemol é uma nota musical abaixada de um semitom. Ela é representada pelo símbolo b. Um si bemol é portanto representado por Sib ou Bb.

Contraponto – A habilidade , unicamente na música, de dizer duas coisa ao mesmo tempo compreensivamente. O termo deriva da expressão *punctus contra puntum*, ou ponto contra ponto ou ainda nota contra nota. Uma voz adicionada a outra é chamada de contraponto `aquela mas o uso mais comum da palavra significa uma combinação de partes ou vozes simultâneas, cada uma com a sua importância individual, de maneira a formar uma textura coerente. Nesse sentido *contraponto* é o mesmo que *polifonia*.

Escala – Uma série de notas musicais progredindo para cima ou para baixo no espectro de vibração do som. Uma série de notas dentro de uma oitava é utilizada como base na composição de escalas. As escalas são arbitrárias e o número de escalas utilizadas ao redor do mundo é incalculável.

Freqüência – É o número de cilcos efetuados por uma unidade de tempo. Utilizando-se a unidade segundo para o tempo, temos a freqüência em Hertz (Hz).

Harmônicos – Qualquer nota produzida por um instrumento é acompanhada por várias outras notas a intervalos fixos acima da mesma. Estas notas são ouvidas como constituintes de uma só nota, mas podem ser produzidas separadamente. Em instrumentos de corda isso pode ser feito tocando levemente a corda em vários pontos ou nós, dividindo então as vibrações e produzindo notas de pureza semelhante aos sons da flauta.

Intervalo sonoro – A "distância" entre duas notas musicais. A diferença de altura tonal (freqüência) entre duas notas quaisquer. O "tamanho" do intervalo é expresso numericamente: do Dó ao Sol tem-se um intervalo de quinta – pois seguindo a escala de Dó, o Sol se encontra na 5ª posição.

Oitava – Intervalo de oito notas, contando a primeira e a última, dentro de uma escala maior. Notas distantes entre si de uma oitava têm o mesmo nome, como dó e dó, sendo uma mais aguda e outra mais grave. Na realidade em uma oitava existem 12 semitons (contando os sustenidos ou bemóis) e por essa razão, no piano, por exemplo, ao tocar um dó qualquer, o dó uma oitava acima estará distante 12 semitones (12 teclas adiante, contando as pretas).

Onda – Fenômeno que consiste numa perturbação periódica que se propaga num meio material ou no espaço. A onda sonora é uma onda mecânica pois depende de um meio para se propagar (não se propaga no espaço). As ondas mecânicas são divididas em ondas transversais e ondas longitudinais. O som se propagando no ar, por exemplo, é uma onda longitudinal (variação de pressão do ar). Uma corda vibrante representa uma onda transversal.

Polifonia – Muitos sons. Música que apresenta várias vozes ou instrumentos simultâneos combinados contrapontisticamente, ao contrário da monofonia (melodia única) ou homofonia (uma linha melódica e outras partes atuando como acompanhamento). Em termos históricos a era polifónica é definida como o período entre os séculos XIII e XVI, embora ela exita até os dias de hoje.

Ressonância – Ressonância é um estado de um sistema que vibra numa de suas freqüências naturais, com amplitude acentuadamente maior, como resultado de estímulos externos que possuem a mesma freqüência da vibração, ou suficientemente próxima. – Dicionário Houaiss de Física.

Semitom – É o menor intervalo de freqüência que existe na escala temperada (temperamento igua). Em um piano, por exemplo, o intervalo entre uma dada nota e a sua imediata superior ou inferior dá um intervalo de um semitom. No violão, a movimentação de uma casa (no braço do violão) para um lado u para o outro é um acréscimo ou decréscimo de um semitom.

Sustenido – Sustenido é uma nota acima de um semitom. Ela é representada pelo símbolo #. Um dó sustenido é portanto representado por Dó# ou C#.

Tempo – A velocidade pela qual uma peça musical é tocada. Está diretamente ligado ao andamento da música e a sua interpretação: *vivace, allegro, presto, adágio, etc.*

Timbre – É a cor do som, o que distingue a qualidade do som de um dado instrumento. É através dele que identificamos a voz de alguém ou um som conhecido. É a propriedade mais complexa do som (Henrique, 2005).

Volume (loudness) – Está relacionado aom a intensidade sonora. Vide amplitude da onda.

5.2 Apêndice I – Vídeo sobre o Temperamento musical

O grupo de estudos Matemática e Música, do qual faço parte, elaborou um vídeo pedagógico que tem por objetivo comparar o sistema musical com o temperamento igual, utilizado atualmente na música. O vídeo, *A Escala Bem Temperada*[10], está disponível da Internet. Para este fim usou-se de animações com um roteiro criado pelo grupo, de maneira a tornar o conceito da afinação de temperamento igual acessível a uma boa parte do público.

Apresento o Roteiro da animação como uma referência textual para a elaboração de uma maneira mais acessível de compreender o processo do temperamento musical. Na versão final do vídeo, ao invés de se optar por um comprimento inicial da corda de 1 metro, utilizou-se o comprimento de 128 cm para facilitar a explicação, uma vez que a diferença no final entre os comprimentos das duas cordas fica mais evidente.

1. Ciclo de oitavas

Vincenzo Galilei dizia "A oitava é a rainha das consonâncias". De fato, a oitava é o intevalo musical mais universal que existe, o mais natural. Quando um adulto e uma criança cantam uma mesma melodia, eles freqüentemente cantam em oitavas diferentes. O adulto canta na oitava mais grave e a criança em uma oitava mais alta. Como produzimos um intervalo de oitava?

[10] A Escala Bem Temperada. Disponível no CD.

Vamos fazer um monocórdio – um instrumento com uma corda musical. Esticamos a corda e prendemos a dois pregos previamente presos a uma madeira. Suponhamos que a distância da corda é de 1 metro.

Ao puxarmos a corda rapidamente com o dedo, produzimos uma dada nota musical. Digamos que essa nota é um dó bem grave, como o dó mais grave de um piano. Essa corda vibra aproximadamente 65 vezes por segundo, ou 65 Hertz.

dó$_1$

Se colocarmos um cavalete exatamente no meio da corda, faremos com que ela vibre em cada metade separadamente. Ao puxarmos agora a corda em uma das metades, que tem agora meio metro, ela vibrará mais rápido e produzirá um dó uma oitava acima ou dó2, que tem aproximadamente 131 Hertz.

dó$_2$

Se repetirmos esse procedimento mais vezes obteremos notas dós cada vez mais agudas. Vamos fazer isso até o dó da oitava 8, ou seja, sete oitavas acima do dó original.

dó$_3$ comprimento da corda = ¼ de metro
freqüência da nota = 262 Hz

dó$_4$ comprimento da corda = 1/8 de metro
freqüência da nota = 523 Hz

dó$_5$ comprimento da corda = 1/16 de metro
freqüência da nota = 1047 Hz

dó$_6$ comprimento da corda = 1/32 de metro
freqüência da nota = 2093 Hz

dó$_7$ comprimento da corda = 1/64 de metro
freqüência da nota = 4186 Hz

dó$_8$ comprimento da corda = 1/128 de metro
freqüência da nota = 8372 Hz

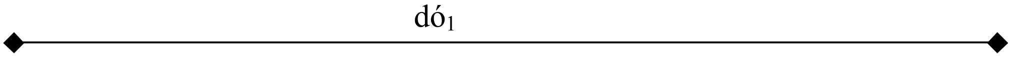
Poderíamos continuar mais algumas oitavas, mas o comprimento da corda ficaria muito pequeno e o som tão agudo que mal conseguiríamos ouvir – o dó$_8$ já está próximo do nosso limite da audição.

Através dessa seqüência de intervalos de oitavas, nós produzimos notas “iguais”, mas de oitavas diferentes, ou seja, mais ou menos agudas. Um intervalo de oitava produz então uma nota semelhante. Pitágoras, no século VI a.C. usando um monocórdio como esse, utilizou um ciclo semelhante porém de quintas e não oitavas.

2. Ciclo de quintas

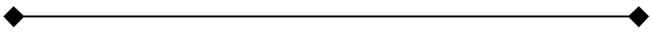
Pitágoras, ao invés de dividir a corda à metade em cada intervalo, dividiu a corda na razão 2/3. Esse intervalo produzido é o de quinta. Ao repetir essa divisão doze vezes, partindo digamos do dó, ele percebeu que essa última nota era o dó, sete oitavas acima, ou o dó$_8$. Ele percebeu que cada nota era diferente durante o ciclo, vindo a se repetir somente no final, com um dó$_8$.

dó$_1$

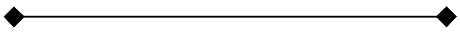


Se colocarmos um cavalete exatamente no ponto que tem 2/3 do comprimento da corda, faremos com que ela vibre na parte maior. A nota produzida será uma quinta acima, ou sol1.

sol$_1$



Ré$_2$ comprimento da corda = 2/3 * 2/3 = 4/9 de metro



lá$_2$ comprimento da corda = 8/27 de metro

Repete-se esse procedimento com animações que vão mostrando as divisões.

Próximas notas e comprimentos das cordas:

Mi3 = 16/81
Si3 = 32/243
Fá# 4= 64/729
dó#5 = 128/2187
sól#5 = 256/6561
ré#6 =512/19683
lá#6 =1024/59049
fá7 =2048/177147
dó8 = 4096/53144

3. O problema dos dó$_8$ que não se encaixam

Pitágoras, utilizando o ciclo das quinta, passou por doze notas distintas e encontrou supostamente o dó$_8$, mas ele percebeu que não era exatamente o dó oito. Podemos enxergar isso ao ver o comprimento da corda no dó$_8$ nos dois ciclos.

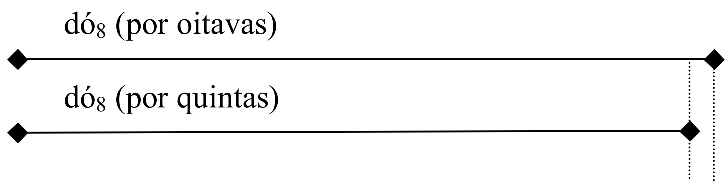
Ciclo de oitavas ➔ dó$_8$ tem 1/128 metro
Ciclo de quintas ➔ dó$_8$ tem 4096/53144 metro

Ao dividirmos teremos para o ciclo de oitavas ➔ 0.0078125 m
E para o ciclo de quintas ➔ 0.00770734662925893937426732224273325 m,

Ou seja, se as cordas tem comprimentos diferentes, elas vão vibrar diferente e produzirão notas diferentes.

Pitágoras resolveu esse problema ajustando o último dó para o de comprimento 1/128 m, isso fez com que a última quinta fosse “suja”ou seja, não pura. Essa quinta tinha um som diferente das outras e é conhecida hoje pelo nome de quinta do lobo.

Ao fazermos um “zoom in” nas cordas podemos ver:



Hás um pequeno pedacinho faltando!

4. Podemos visualizar melhor o ciclo de quintas através de uma espiral

A construção da escala pelo ciclo de quintas, gera todas as notas existentes na escala pitagórica, porém como vimos, em oitavas distintas. Essas notas podem ser trransportadas facilmente para todas as oitavas, ou seja, uma vez que sabemos qual comprimento da corda é reponsável pela nota fá$_7$, podemos encontrar todos os fás de oitavas precedentes (dobrando o comprimento da corda, encontramos uma oitava abaixo) ou ascendentes (dividindo o comprimento da corda ao meio, encontramos uma oitava acima).

Isso significa que ao quando encontramos uma dada notas no ciclo das quintas, nós estamos na realidade encontrando esta nota em todas as oitavas. Podemos então construir todas as notas, desde o dó$_1$ até o dó$_8$.

Para facilitar a compreensão, podemos visualizar uma espiral que representa a ascensão do ciclo de quintas – vide vídeo.

Animação com a espiral crescendo e tocando as notas até chegar ao dó de novo... mostrarndo que ela pode continuar se quisermos, embora o som ficaria tão agudo que não ouviríamos. Logo em seguida, mostrar que o dó$_8$ não encaixa com o dó$_1$.

Note que quando encontramos o dó$_8$, ele está um pouco mais agudo do que deveria estar. Se tocarmos ao mesmo tempo o dó$_8$ e o dó$_1$ ouviremos algo estranho. Há uma pequena desarmonia, algo não consonante.

Pitágoras resolveu esse problema, como mostramos anteriormente, mudando apenas a última quinta. Entretanto, essa não é a solução utilizada que mostrou ser a mais prática e perdura até os dias de hoje: o temperamento igual.

A idéia é tentar distribuir essa defasagem igualmente ao longo dos intervalos, ou seja, vamos priorizar a simetria em detrimento da pureza. Vamos abaixar a freqüência de cada intervalo (equivalente a aumentar um pouquinho o comprimento da corda, pois freqüência é inversamente proporcional que o comprimento). Se retirarmos essa minúscula parcela de freqüência de cada intervalo, podemos ajustá-lo de tal maneira que todas as notas de oitavas diferentes de agora em diante serão realmente intervalos de oitava.

Mostrar os pedacinhos saindo de cada intervalo, enquanto a espiral aumenta gradativamente e alarga até se tornar um círculo. Toca-se agora cada nota (temperada).

Pronto, temos uma escala temperada! A grande vantagem de utilizar uma escala temperada é que podemos interpretar uma música em qualquer tom musical, podemos transpô-la facilmente. Isso não era possível anteriormente. O temperamento igual favorece a criação de músicas com várias vozes (várias melodias) sem gerar nenhum conflito harmônico. A escala temperada é largamente utilizada hoje em dia e graças à ela temos orquestras tocando música com vários intrumentos em vozes distintas, gerando complexas combinações sonoras que deixam a música riquíssima.

O instrumento que pode representar muito bem a utilização da escala temperada é o cravo e posteriormente o piano. O teclado representa as notas.

Animação com as notas do teclado em volta do círculo temperado. Pode-se tocar cada nota. Logo em seguida, uma tesoura corta o teclado e ele se transforma em um teclado reto, que está sendo tocado por Johan Sebastian Bach.

Provavelmente o maior entusiasta e divulgador da escala bem temperada foi o consagrado músico alemão Johan Sebastian Bach. Para ilustrar as vantagens da escala temperada, Bach compôs prelúdios e fugas para cravo – O Cravo Bem Temperado – em todas as tonalidades possíveis.

Bach estaria tocando um pedaço de um prelúdio e posteriormente Jesus Alegria dos Homens.

5.3 Apêndice II – Diálogo hipotético entre Gioseffo Zarlino e Vincenzo Galileu

Dialogo realizado pelo grupo de Matemática e Música, da qual faço parte, coordenado pelo Prof. Dr. Oscar Abdounur.

Vincenzo: Salve Gioseffo, tutto bene?

Zarlino: Salve Vincenzo, sto bene grazie! Faz muito tempo que não nos vemos.

Vincenzo: É verdade! Me lembro com nostalgia as aulas de teoria musical que tive com você em Veneza.

Zarlino: Eu me lembro bem dos seus questionamentos. Aliás, como vão as suas pesquisas sobre a música atualmente?

Vincenzo: Tem ido bem, tenho feito experimentos com com cordas, tubos e sinos para analizar se as razões simples subtendidas a intervalos de oitava, quinta e quarta são válidas universalmente. E os seus estudos, como vão?

Zarlino: Eu sou um eterno estudante das relações entre a matemática e a música, como músico espero um dia conhecer uma boa interpretação matemática para conceitos tais como: Consonância, Dissonância, Timbres, o que é som e etc.

Vincenzo: Esses conceitos são para mim ainda abertos. Temos muito a pesquisar. Hoje, meu trabalho é fundamentado na verificação experimental, e não no dogmatismo aritmético dos pitagóricos.

Zarlino: Meu sábio colega, por que deveríamos alterar um tratamento que funciona efetivamente há séculos?

Vincenzo: Porque não?

Zarlino: Você não acha que o Universo tem suas regularidades?

Vincenzo: Pode ser, mas isso não implica necessariamente que a música deva se limitar a conceitos matemáticos especulativos. Por que não estudá-la sob um aspecto experimental? Que mal faria?

Zarlino: Acredito que nossas observações nos conduzem à entender a tradição Pitagórica. O fato de a Terra ser esférica, o mundo ter sido feito em 6 dias, e as constatações do experimento do Monocórdio não são evidências “empíricas” da validade da tradição Pitagórica?

Vincenzo: Indiscutivelmente a tradição Pitagórica tem um valor enorme ao longo da história das ciências e da matemática, no entanto me parece razoável que experimentos sejam feitos para confirmar ou contestar tais conceitos.

Zarlino: Apesar de compreender seu raciocínio considero que a Tradição Pitagórica já esteja devidamente estabelecida. Por exemplo, o senário, é possível explicar todas as consonâncias e dissonâncias escutadas por um bom músico utilizando os 6 primeiros números naturais.

Vincenzo: Como?

Zarlino: Os intervalos consonantes são a oitava (1:2), a quarta (3:4), quinta (2:3) e a sexta (4:5 / 5:6). Neste sentido com os números 1,2,3,4,5 e 6 podemos entender o conceito de consonância.

Vincenzo: Mas se eu não estou enganado Pitágoras imaginava que seria possível explicar o mundo somente com os números 1,2,3 e 4? Desta forma aos poucos tal tradição acabará incluindo os outros números naturais, racionais, irracionais...

Zarlino: Acredito que não... Afinal o número 6 está muito bem fundamentado: Deus fez o mundo em 6 dias, o cubo (Poliedro Perfeito) tem 6 faces, são 6 os planetas: Saturno, Júpiter, Marte, Vênus, Mercúrio e a Lua. Logo a consonância pode muito bem ser explicada pelos mesmos 6 números...

Vincenzo: Aparentemente seu argumento é muito bom, porém as relações apresentadas no senário são muito boas para o estudo da corda, mas será que valem para qualquer fonte sonora? Você já testou experimentalmente?

Zarlino: Continuo a acreditar que a matemática é suficiente para explicar a consonância musical assim como todos os fenômenos musicais. Para mim, a música é uma ciência puramente matemática. Ela é perfeita, como o círculo, como o universo, e logo devemos representá-los por números.

Vincenzo: Mamma mia Gioseffo! Que mal há testar nossas afirmações experimentalmente?

Zarlino: Caro Vincenzo, per me la música pode ser dividida como especulativa e prática, sendo que a especulativa é a mais nobre. Da mesma maneira que a alma contém o saber, ela supera em nobreza o corpo que é prático.

Vincenzo: Honestamente, a sua visão numerológica a meu ver é excessiva. Não acredito que tudo possa ser explicado através dos números inteiros. Os números não são sonoros, eles são entidades abstratas. A propriedade de reproduzir um som só pode ser atribuída a um corpo.

Zarlino: De fato temos visões diferentes.

Não acredito em testes...(argumentos)... Mas de qualquer forma foi um prazer conversar com você. Espero que possamos encontrar a melhor maneira de modelar os fenômenos sonoros, podendo assim entender a música de uma maneira consistente.

Vincenzo: Esperamos...

5.4 Anexo: Diálogo hipotético entre J.Sebastian Bach & Bernoullis

Será que algum membro da família Bach algum dia encontrou um dos Bernoullis? É pouco provável. Viajar em pleno século XVII era um empreendimento que só se realizava por motivos extremos. Descontandose um encontro casual, a única razão imaginável para tal encontro teria sido uma curiosidade intensa pela atividade do outro, e não há evidência disso. Não obstante, o pensamento de que tal encontro pudesse acontecer é fascinante. Vamos imaginar uma reunião entre Johann Bernoulli (ou seja, Johann I) e Johann Sebastian Bach. O ano é 1740 e cada um dos dois encontra-se no auge de sua fama. Bach, aos 55 anos, é compositor, organista e Kapellmeister (diretor musical) na igreja de São Tomás, em Leipzig. Bernoulli, com 73, é o mais notável professor da Universidade da Basiléia. O encontro acontece em Nuremberg, a meio caminho entre as cidades onde os dois vivem.

BACH: Herr professor, eu fico muito feliz por encontrá-Io afinal, tendo ouvido falar tanto sobre suas extraordinárias conquistas.

BERNOULLI: Estou igualmente contente em encontrá-Io, Herr Kapellmeister. Sua fama como compositor e organista já chegou muito além do . Reno. Mas diga-me, meu trabalho realmente lhe interessa? Quero dizer, os . músicos geralmente não são versados em matemática, ou são? E para dizer a verdade, meu interesse na música é inteiramente teórico; por exemplo, há algum tempo, eu e meu filho Daniel fizemos alguns estudos sobre a teoria das cordas vibratórias. Este é um novo campo de pesquisa que envolve o que nós chamamos, em matemática, de mecânica do continuum.[1]

BACH: De fato, eu também tenho me interessado pelo modo como as cordas vibram. Como sabe, também toco o cravo, cujo som é produzido golpeando-se as cordas através de teclas. Durante anos fui incomodado por um problema técnico com esse instrumento que só recentemente pude resolver.

BERNOULLI: E que problema era esse?

BACH: Como sabe, nossa escala musical comum é baseada nas leis das cordas vibratórias. Os intervalos que usamos na música - a oitava, quinta, quarta, e assim por diante - são todos derivados dos harmônicos, ou sobretons de uma corda - cujos tons mais altos e fracos estão sempre presentes quando a corda vibra. fu freqüências desses harmônicos são múltiplos inteiros da freqüência fundamental (mais baixa), e assim formam a progressão 1,2,3,4... [fig. 25].

Figura 25 – A série harmônica ou sobretons emitidos por uma corda vibrando. Os números indicam as freqüências relativas das notas.

Os intervalos da nossa escala correspondem a proporções entre esses números: 2: 1 no caso da oitava, 3:2 para a quinta, 4:3 para a quarta e assim por diante. A escala formada a partir dessas proporções é chamada de escala de modulação exata.

BERNOULLI: O que se encaixa perfeitamente no meu amor por seqüências ordeiras de números.

BACH: Mas existe um problema. A escala construída a partir dessas proporções consiste em três intervalos básicos: 9:8, 10:9 e 16: 15 [fig. 26].

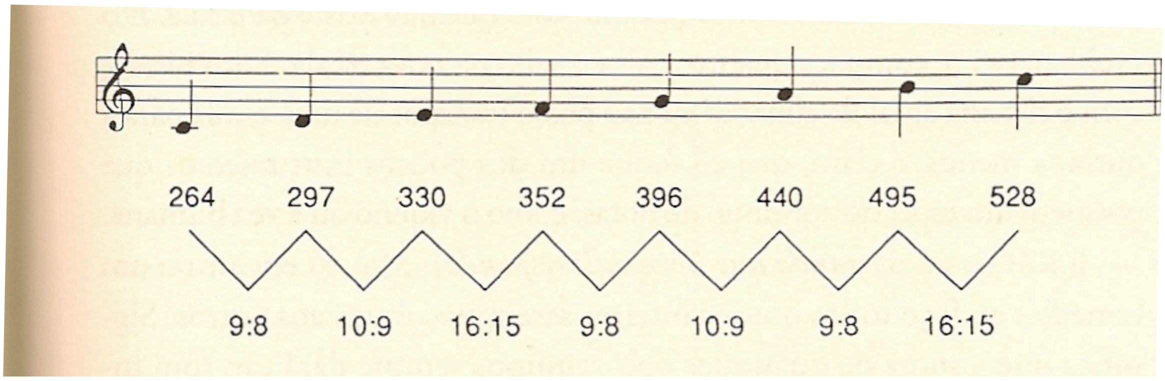


Figura 26 – A escala em dó-maior. Os números em cima indicam a freqüência de cada nota em ciclos por segundo, os números em baixo são a proporção entre a freqüência de notas sucessivas.

Os dois primeiros são quase idênticos e cada um é conhecido como tom inteiro, ou um segundo (assim chamado porque leva à segunda nota na escala). A última proporção é muito menor e chamada de semitom.

Agora, se você começar com a nota dó e for subindo na escala dó - ré- mi - fá - sol-lá - si - dó-maior, o primeiro intervalo, de dó a ré, é um tom inteiro cuja taxa de freqüência é 9:8. O intervalo seguinte, de ré a mi é novamente um tom inteiro, mas sua taxa de freqüência é 10:9. Os intervalos remanescentes na escala são mi para fá (16:15), fá para sol (9:8), sol para lá (10:9), lá para si (9:8), e finalmente si para dó-maior (16: 15) - a última nota estando uma oitava acima de dó. Esta é a escala conhecida como dó-maior. Mas as mesmas proporções devem se manter, independente de com qual nota começamos. Cada escala maior consiste na mesma seqüência de intervalos.

BERNOULLI: Eu posso ver a confusão causada pela existência de duas proporções diferentes para o mesmo intervalo. Mas porque isso o incomoda? Afinal a música está conosco há tantos séculos e ninguém mais se incomodou.

BACH: Na verdade é pior do que isso. Não somente existem dois tipos diferentes de tons inteiros em uso, mas se somarmos dois semitons, a soma não será exatamente igual a nenhum dos dois tons. Experimente calcular. É como se 1/2 + 1/2 não fosse exatamente igual ai, apenas aproximadamente.

BERNOULLI (escrevendo alguns números em seu bloco de notas): Você está certo. Para somar dois intervalos nós devemos multiplicar suas taxas de freqüência. Somar dois semitons corresponde ao produto de (16:15) . (16:15) = 256:225 ou, aproximadamente 1,138, que é ligeiramente maior do que 9:8 (= 1,125) ou 10:9 (=1,111).

BACH: Esta vendo o que acontece? O cravo tem um mecanismo delicado, que permite que cada corda vibre apenas na freqüência fundamental específica. Isto significa que, se eu quero tocar uma peça em rémaior, no lugar de dó-maior - o que se conhece como transposição - então, o primeiro intervalo (de ré para mi) terá uma proporção de 10:9, em vez do 9:8 original. Isso continua bem porque a proporção 10:9 ainda faz parte da escala; e ademais, o ouvinte médio quase não nota a diferença. Mas o intervalo seguinte - que novamente deve ser um tom inteiropode ser formado apenas se subirmos um semitom de mi para fá e então outro semitom de fá para fá sustenido. Isso corresponde a uma proporção de (16: 15) . (16: 15) = 256:225, um intervalo que não existe na escala. E o problema só se complica quanto mais eu subo na nova escala. Resumindo, com o sistema atual de afinação eu não posso transpor de uma escala para a outra, a menos, é claro, que eu toque um dos poucos instrumentos que possuem um espectro contínuo de notas, como o violino ou a voz humana.

BACH: (não esperando que Bernoulli responda): Mas eu encontrei um remédio: eu faço todos os tons inteiros serem iguais uns aos outros. Significa que a soma de quaisquer dois semitons sempre dará um tom inteiro. Mas para fazer isso tive que abandonar a escala de modulação exata em favor de um compromisso. No novo arranjo a oitava consiste em doze semitons iguais. Eu a chamo de escala igualmente temperada.2 Mas o problema é que é difícil convencer meus colegas músicos de suas vantagens. Eles se agarram teimosamente a escala antiga.

BERNOULLI: Talvez eu possa ajudá-Io. Em primeiro lugar, preciso saber a proporção entre as freqüências de cada semitom em sua nova escala.

BACH: Bem, o senhor é o matemático, estou certo de que pode calcular.

BERNOULLI: Acabei de fazê-Io. Se existem doze semitons iguais na oitava, então cada semitom deve ter uma taxa de freqüência de 12-{2: 1. De fato, a soma de doze desses semitons corresponderá a (l2-{2)12, que é exatamente 2:1, a oitava.3

BACH: Agora você me deixou completamente perdido. Meu conhecimento de matemática vai pouco além da aritmética elementar. Existe algum meio de mostrar isso visualmente?

BERNOULLI: Acho que sim. Meu falecido irmão Jakob passou muito tempo explorando uma curva chamada de espirallogarítmica. Nessa curva, rotações iguais aumentam a distância em relação ao pólo em proporções iguais. Não é isso exatamente o que acontece com a escala que acabou de descrever?

BACH: Pode me mostrar essa curva?

BERNOULLI: Claro [figo 53]. Enquanto você falava, eu marquei sobre ela os doze semitons iguais. Para transpor uma peça de uma escala para outra, tudo o que se terá de fazer será girar a espiral de modo que o primeiro tom de sua escala caia sobre o eixo dos x. Os tons remanescentes cairão automaticamente no lugar. Na verdade é uma espécie de calculador musical!

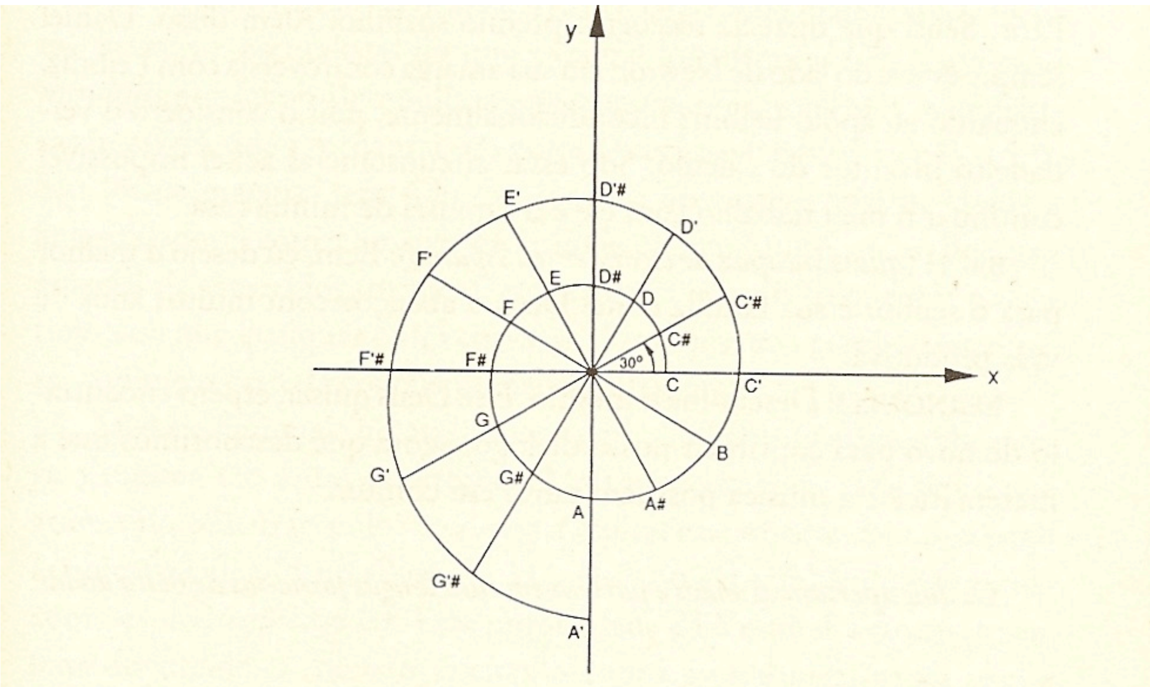


Figura 27 – As doze notas da escala igualmente temperada, arrumadas ao longo de uma espiral logarítmica.

BACH: Isso soa empolgante. Talvez a sua espiral possa me ajudar a ensinar o assunto para os jovens músicos, pois estou convencido de que a nova escala tem um grande potencial para os futuros instrumentistas. De fato estou agora trabalhando em uma série de prelúdios que chamo de "Cravo Bem Temperado". Cada prelúdio é escrito para uma das doze teclas maiores e menores. Escrevi uma série semelhante em 1722, como um livro de instrução para a minha primeira esposa, Maria Barbara - que descanse em paz -, e meu primeiro filho, Wilhelm Friedemann. Desde então, como sabe, fui abençoado com outros filhos, e todos mostram sinais de um grande talento musical. É para eles, assim como para minha segunda esposa, Anna Magdalena, que estou escrevendo esse novo trabalho.

BERNOULLI: Eu admiro o relacionamento maravilhoso que tem com os seus filhos. Não posso dizer o mesmo quanto à minha família. Por algum motivo sempre fomos um grupo brigão. Já mencionei meu filho Daniel, com quem trabalhei em vários problemas. Mas há seis anos eu tive que partilhar com ele o prêmio bianual da Academia de Ciências de Paris. Senti que merecia receber o prêmio sozinho. Além disso, Daniel sempre esteve do lado de Newton em sua amarga controvérsia com Leibniz, enquanto eu apóio Leibniz incondicionalmente, pois o considero o verdadeiro inventor do cálculo. Sob essas circunstâncias achei impossível continuar o meu trabalho com ele e o expulsei de minha casa.

BACH (quase incapaz de esconder seu espanto): Bem, eu desejo o melhor para o senhor e sua família e que Deus o abençoe com muitos anos de vida produtiva.

BERNOULU: Desejo-lhe o mesmo. E se. Deus quiser, espero encontrá10 de novo para continuar nosso diálogo, agora que descobrimos que a matemática e a música possuem tanto em comum

Os dois apertam as mãos e partem em suas longas jornadas de volta ao lar.

NOTAS

1. As cordas vibratórias foram o mais notável problema matemático do século XVIII. A maioria dos principais matemáticos do período contribuiu para a sua solução, entre eles os Bernoullis, Euler, O'Alembert e Lagrange. O problema foi finalmente resolvido em 1822 por Joseph Fourier.

2. Bach não foi o primeiro a pensar em tal disposição de notas. Tentativas para se chegar a um sistema "correto" de afinação remontam ao século XVI, e, em 1691, uma escala "bem temperadà' foi sugerida pelo construtor de órgãos Andreas Werckmeister. Mas foi devido a Bach que a escala igualmente temperada tornou-

se conhecida universalmente. Ver o The New Grove Dictionary of Music and Musicians, vol. 18 (Londres: Macmillan, 1980), pp. 664-666 e 669-670.

3. O valor decimal dessa proporção é cerca de 1,059, comparado a 1,067 para a proporção 16: 15. Essa escassa diferença, embora ainda dentro do alcance da audição, é tão pequena que a maioria dos ouvintes a ignora. Ao tocar solo, entretanto, os cantores e os instrumentistas de cordas ainda preferem a escala exata de entonação.

6 BIBLIOGRAFIA

ABDOUNUR, OSCAR J. **Histórias da relação matemática/música e construção de significados**. Editora da SBHMat. Extraído de *Facetas do diamante: ensaios sobre educação matemática e história da matemática*. John Fossa. 2000, 272 pág.

ABDOUNUR, OSCAR J. **Matemática e música**. Editora Escrituras. 1a edição, 2000, 352 pág.

ABDOUNUR, OSCAR J; ADDONO JR, A.A.; PEREIRA, A.A.; PEREIRA, R.A.; PRADO, L.A.G., **A relação matemática-música no renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica**. Trabalho apresentado na X Seminário de História da Ciência. Belo Horizonte, 2005.

BACHELARD, GASTON. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro. Ed. Contraponto, 1996.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CALVINO, ITALO. **Seis propostas para o próximo milênio**. Tradução Ivo Barroso. São Paulo. Companhia das Letras, 1990. 141 páginas.

COHEN, H.F. **Quantifying music: the science of music at the first stage of the scientific revolution, 1580-1650**. Kluwer Academic Publishers. 1984.

COMENIUS, I.A. **Didáctica magna**. Tradução de Joaquim Ferreira Gomes do original em latim Didactica Magna (1621-1657). FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN, Coimbra 2001.

DELATTRE, PIERRE (1973). **Investigações interdisciplinares. Objectivos e dificuldades**. In: Pombo, Olga; Henrique Manuel Guimarães e Teresa Levy, orgs. Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006. Pp. 279-299.

ECO, UMBERTO. **Como se faz uma tese**. 18ª Edição - 2003 - 192 pág. Editora Perspectiva.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**.Campinas. Editora Atual.

FAZENDA, I.C.A . **A virtude da força nas práticas interdisciplinares**. Editora Papirus. 1999. 172 páginas.

FAZENDA, I.C.A . **Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro**. São Paulo, Edições Loyola, 2002.

FROVA, IA . **La física sotto il naso**. Biblioteca Universale Rizzoli.2005. Milano. 380 páginas.

GALILEI, VINCENZO. **Dialogo di vincentio galilei nobile fiorentino della musica a et della moderna**. In Fiorenza. M.D.LXXXI. Roma, Biblioteca Nazionale.

GALILEI, VINCENZO. **Discorso intorno alle opere di Gioseffo Zarlino et altri importanti particolari attenenti alla musica**. Firenze M.D.LXXXIX. Bollettino bibliografico musicale, Milano.

GUSDORF, GEORGES (1991). **O gato que anda sozinho**. Texto inédito, cedido a Olga Pombo, Henrique Guimarães e Teresa Levy quando de uma entrevista em Strasboug, França. In: Pombo, Olga; Henrique Manuel Guimarães e Teresa Levy, orgs. Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006. Pp. 13-26.

GUSDORF, GEORGES (1986). **Conhecimento interdisciplinar**. In: Pombo, Olga; Henrique Manuel Guimarães e Teresa Levy, orgs. Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006. Pp. 37-58.

HOUAISS. **Dicionário de física**. Editora objetiva. 248 pág. 2005

HOUAISS. Dicionário da língua portuguesa. Editora objetiva. 2924 pág. 2001

HALL, A. R. **Revolução na ciência 1500-1750**. Coleção saber da filosofia. Ed. Edições 70. Lisboa 1988. 496 pág.

HECKHAUSEN, HEINZ (1972). **Disciplina e interdisciplinaridade**. In: Pombo, Olga; Henrique Manuel Guimarães e Teresa Levy, orgs. Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006. Pp. 79-90.

HENRIQUE, LUÍS L. **Acústica musical**. Edição da Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa 2002. 1130 páginas.

ISACOFF, STUART. **Temperamento: storia di un enigma musicale**. Edizione italiana EDT srl. Torino. 295 páginas.

KENERY, MICHAEL. **Oxford, concise dictionary of Music**. Oxford University Press (2004).

KUHN, THOMAS. **A estrutura das revoluções científicas**. Editora Perspectiva. 8ª edição. 2003. 264 páginas.

MAOR, ELI. **e: a história de um número**. Tradução de Jorge Calife – 2ª edição – Rio de Janeiro: Record, 2004. 291 páginas.

PALISCA, CLAUDE V. **Vincenzo Galilei, scienziato sperimentale, mentore Del figlio galileo**. Annali di Storia della Scienza. Nuncius. Anno XV, 2000, fasc. 2. Firenze.

POMBO, OLGA. **Epistemologia da interdisciplinaridade**. Seminário Internacional Interdisciplinaridade, Humanismo, Universidade. Faculdade de Letras da Universidade do Porto, Novembro 2003.

POMBO, OLGA. **Interdisciplinaridade e a integração dos saberes**. Conferência apresentada no “Congresso Luso-Brasileiro sobre Epistemologia e Interdisciplinaridade na Pos-Graduação”, realizado em Porto Alegre, Brasil, na Universidade Pontifícia do Rio Grande do Sul, nos dias 21, 22 e 23 de Junho de 2004.

POMBO, OLGA. **Praticas interdisciplinares**. Sociologias – Porto Alegre, ano 8, n. 15, jan/jun 2006, p. 208-249.

POMBO, OLGA; LEVY, T.; GUIMARÃES, H. **A interdisciplinaridade: reflexão e experiência**. Lisboa: ed. Texto, 1993, 96 p. (2ª edição revista e aumentada, 1994, 102 p.).

ROEDERER, J.G., **Introdução à física e psicofísica da música**. Edusp. 2002, 312 páginas.

SARGOLINI, F**. La critica di Vincenzo Galilei al misticismo numerico di Zarlino**. Annali di Storia della Scienza. Nuncius. Anno XV, 2000, fasc. 2. Firenze.

TORRES, RUI. **Apontamentos sobre interdisciplinaridade em projectos de investigação sobre humanidades e informática**. - Seminários do Grupo de Estudos dos Média, Cultura, Linguagem e Hipermédia, CECICLO-UFO, Ponte de Lima/Porto, Setembro 2007.

VAIDEANU, GEORGES (1987). **A interdisciplinaridade no ensino; esboço de síntese**. In: Pombo, Olga; Henrique Manuel Guimarães e Teresa Levy, orgs. Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006. Pp. 161-175.

WALKER, D. P. **Studies in musical science in the late renaissance**. London, The Warburg Institute – University of London. Leiden. E.J. Brill. 1978.

WARDHAUGH, BENJAMIN. **Music, experiment and mathematics in England, 1653-1705**. All Souls College, Oxford. UK. 2008, 209 páginas.

ZARLINO, GIOSEFFO. **Le istitutioni harmoniche**. In Venetia. MDLVIII. Roma, Biblioteca Nazionale.

ZARLINO, GIOSEFFO. **Sopplimenti musicali del R. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia**. Mastro di cappella della serenissima signoria di Venetia. In Venetia. MDLXXXVIII.