**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

ISABEL PEREIRA DOS SANTOS

**O pensamento analógico e afeto na atribuição de
significados em Matemática**

**São Paulo
2014**

ISABEL PEREIRA DOS SANTOS

**O pensamento analógico e afeto na atribuição de
significados em Matemática**

VERSÃO CORRIGIDA

Tese apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Educação.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

São Paulo
2014

Autorizo a reprodução total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

Santos, Isabel Pereira dos.

O pensamento analógico e afeto na atribuição de significados em Matemática / Isabel Pereira dos Santos; orientador Oscar João Abdounur – São Paulo, 2014.

109 p., il., Acompanha 1 CD-ROM

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2014.

1. Analogia 2. Pensamento analógico 3. Formação de Professores 4. Afeto 5. Educação matemática I. Abdounur, Oscar João II Título: O pensamento analógico e afeto na atribuição de significados em Matemática

SANTOS, Isabel Pereira dos.

O pensamento analógico e afeto na atribuição de significados em Matemática.

Tese apresentada à Faculdade de
Educação da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Doutor em
Educação.

Aprovado em: 13 / 11 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Oscar João Abdounur

Instituição: IME/FEUSP

Julgamento:

Assinatura:

Profa. Dra. Maria do Carmo Santos Domite

Instituição: FEUSP

Julgamento:

Assinatura:

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio

Instituição: UNIBAN

Julgamento:

Assinatura:

Profa. Dra. Abigail Fregni Lins

Instituição: UEPB

Julgamento:

Assinatura:

Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti

Instituição: USP

Julgamento:

Assinatura:

Aos meus pais e ao irmão André Luis pela
presença durante a realização deste estudo.

Ao irmão João Luiz *in memoriam*.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Oscar João Abdounur, pela orientação e incentivo.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do doutorado.

Aos meus pais, pelo estímulo à busca do conhecimento.

Ao meu irmão André Luis, pelo companheirismo solidário neste período.

Às sobrinhas Dandara e Zoé, pelos momentos de alegria durante o processo.

À Renata, pela atenção e compreensão durante o período.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão de bolsa de doutorado.

Aos professores membros da banca examinadora, pela presença e participação.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela disposição e atenção dispensadas.

À Profa. Dra. Zara Abud pelo carinho, atenção e incentivo constantes.

Ao amigo Carlos Lima, pela solidariedade e compreensão neste período.

Às amigas Ana Paula, Alessandra e Wania, pela atenção e compreensão das ausências.

Aos amigos, pelo incentivo direto e indireto.

O conhecimento em movimento é um modo de criação contínua; o antigo explica o novo e o assimila; e, vice-versa, o novo reforça o antigo e o reorganiza.

Gaston Bachelard

RESUMO

Santos, I. P. **O pensamento analógico e afeto na atribuição de significados em Matemática.** 109 p. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Este trabalho discute o papel do pensamento analógico e da afetividade na atribuição de significados e compreensão de conceitos no processo de ensino e aprendizagem em Matemática sob a perspectiva teórica. O uso de analogia em educação coloca em evidência relações estruturais entre elementos similares de domínios diferentes, enriquecendo o entendimento dos conteúdos abordados. Neste contexto, estudou-se a Heurística e em particular o caráter heurístico da analogia em resolução de problemas, o que releva ainda a relação entre tal forma de raciocínio e o conceito de similaridade em atribuição de significados no universo educacional matemático. Por fim, o presente trabalho teorizou o tema afetividade a partir de três constructos, a saber, crenças, atitudes e emoção, visando auxiliar ações que propiciem apreensão e compreensão dos objetos matemáticos.

Palavras-chave: Pensamento analógico. Heurística. Afetividade. Atribuição de significados. Educação matemática.

ABSTRACT

Santos, I.P. **Analogical thought and affection in the attribution of meanings in mathematics.** 109 p. Doctoral Thesis. Faculty of Education, University of São Paulo, São Paulo, 2014.

This research discusses the role of analogical thinking and affectivity on attribution of meaning and understanding of concepts in the teaching/learning process of mathematics from the theoretical perspective. The use of analogy in education evinces structural relations between similar elements of different domains, enriching the understanding of concepts approached in such a situation. In this context, it considers Heuristics and, in particular, heuristic features of analogies on problem solving, which also brings out the relationship between such a reasoning and the concept of similarity in attributing meanings in mathematics education contexts. Eventually, this study theorized the subject affection from three constructs, namely, beliefs, attitudes and emotion in order to support actions that encourage apprehension and understanding of mathematical objects.

Keywords: Analogical thinking. Heuristics. Affectivity. Attribution of meanings. Mathematics education.

SUMÁRIO

Introdução	11
1. Analogia: Significado e papel	20
1.1 Do pensamento analógico: Breve história no âmbito da Matemática	21
2. A função heurística da analogia	25
2.1 A função heurística da análise	26
2.2 O raciocínio heurístico e as operações mentais	30
2.3 Shoenfeld e a resolução de problemas	34
2.4 O uso da heurística na Matemática de Cingapura	35
2.5 Metáforas e Analogias: Diferenças	38
2.6 Sobre o conceito de analogia	42
2.6.1 Tipos de analogia	44
2.7 Analogia e Generalização	45
3. Estudos comparativos	47
3.1 Analogia e Cognição	47
3.2 Cuidados na elaboração de analogias	49
3.3 Linguagem matemática	53
3.4 Significado dos objetos matemáticos e a analogia	54
3.5 Similaridade e Analogia	60
3.5.1 Similaridade e aprendizado	75
4. Afetividade: cognição no ensino e aprendizagem de Matemática	77
4.1 Afeto e crenças em Educação Matemática	78
4.2 Afeto e atitudes em Educação Matemática	81
4.3 Afeto e emoção em Educação Matemática	85
4.4 Analogias na atribuição de significados	89
4.5 Afetividade e cognição.....	91
Considerações finais.....	95
Referências.....	101

INTRODUÇÃO

A implementação das inovações tecnológicas educacionais no Brasil, na década de 90, foi fator decisivo para efetivar meu interesse sobre esta área de pesquisas. A experiência como pesquisadora da Escola do Futuro da Universidade de São Paulo (1994 – 2009) foi essencial para o acesso ao estado da arte no que concerne ao uso de tecnologias emergentes voltadas para a educação e propiciou a oportunidade de acompanhar tais inovações no âmbito da academia e em especial o uso da Internet para fins de pesquisa educacional. Neste instituição pude verificar e vivenciar os primórdios do desenvolvimento de sites e softwares educacionais brasileiros, bem como analisar tais recursos nacionais e estrangeiros - de áreas diversas e em especial os direcionados para o ensino de Matemática. Em paralelo iniciei a docência em Matemática no ensino Fundamental II e Médio.

Na Escola do Futuro/USP foi possível participar de projetos em parceria com escolas privadas brasileiras e em outros que envolviam escolas nacionais e estadunidenses que usavam a Internet como recurso de interação. Neste período, participei ativamente no desenvolvimento de projetos educacionais e formação de professores resultantes da parceria estabelecida entre a Escola do Futuro/USP e a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Ainda na Escola do Futuro/USP, fiz parte do desenvolvimento e implementação da Biblioteca Virtual do Estudante de Língua Portuguesa. Como pesquisadora da Escola do Futuro/USP, analisei diferentes sites e softwares educacionais, apresentando trabalhos e ministrando palestras acerca deste tema em simpósios e congressos internacionais científicos de educação a distância. Neste contexto, tive a oportunidade de elaborar um capítulo de livro, bem como artigos; ministrando cursos e palestras. Cabe aqui ressaltar dois projetos específicos desencadeados por tais experiências: 1. Geometria Interativa: Mosaicos e Simetria; 2. Matemática e Web: Aulas Interativas.

A pedagogia de projetos propiciava apresentar os conteúdos didáticos num formato que sugerisse reflexão, aprofundamentos, momentos de descoberta e análise minuciosa dos objetos estudados. Assim, a implementação dos projetos acima mencionados traziam uma perspectiva diferenciada e de interesse no âmbito da formação docente que ofereciam novo dinamismo ao processo de ensino e aprendizagem.

Em paralelo ao desenvolvimento de projetos, meu interesse se voltou a pesquisas de conteúdos de sites e softwares matemáticos e utilizá-los em projetos educacionais. O critério de escolha contemplou, dentre outros, os seguintes parâmetros: instituição, equipe

desenvolvedora, graus de aprofundamentos, formas de apresentação dos conteúdos, modos de avaliação, maneiras de incentivo ao estudo, sendo que a instituição desenvolvida, a apresentação e o grau de aprofundamento dos conteúdos eram premissas determinantes para a escolha dos recursos. Trazendo esta prática para o contexto deste doutorado, analisou-se recursos matemáticos tais como livros didáticos, applets (animações em flash – software online), sites nacionais e internacionais com o objetivo de encontrar indícios do uso de analogia. Em sites estrangeiros destinados à Matemática básica, foram encontrados exercícios simples de analogia proporcionalista. Tais exemplos são parecidos com os que seguem:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{6} \text{ ou } \frac{5}{10} : 0,5 :: \frac{3}{4} : 0,75 \text{ ou ainda } 10 : 5 :: 6 : 3.$$

Existem sites que indicam exercícios diversos que seguem o conceito da analogia proporcional, conforme exemplo¹:

19. subtraction : addition :: division : multiplication
20. 0 : 1 :: point : line
21. circumference : perimeter :: circle : polygon
22. Discount : Mark-up :: difference : sum
23. regular price : list :: sale : net
24. 1/8 : 0.125 :: 3/4 : 0.75

Dentre os poucos videos educacionais que implicitamente mencionam o uso do raciocínio analógico, encontrados no YouTube, houve um referente ao estudo do tronco da pirâmide e tronco do cone que se destacou ao apresentar a necessidade de conteúdos previamente estudados². Uma síntese do conteúdo apresentado no vídeo encontra-se em tabela 1 na página 62 deste trabalho.

No período de 1994 a 1999, realizei curso de especialização em Matemática no IME - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Durante e após esse período realizei diversos cursos extracurriculares na Universidade de São Paulo, dentre estes alguns como ouvinte e/ou aluna especial. Esta especialização foi decisiva para minha percepção da necessidade de aproximação entre a escola pública e a Universidade, fato que ocorria em algumas faculdades da USP no âmbito da formação continuada de professores, e em especial no IME por meio do CAEM – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da

¹ Disponível em: <<http://www.pleacher.com/mp/puzzles/mathpuz/analogy2.html>>. Acesso em: 14.11.2014.

² Encontra-se no endereço: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQlO9Ud7Q>>. Acesso em: 16.11.2014.

Matemática, onde realizei alguns cursos visando inovar práticas enquanto professora de Matemática.

Com a perspectiva de atuar efetivamente na formação continuada de professores de Matemática e na busca de recursos inovadores fui pesquisadora colaboradora no projeto de oficina de Matemática - IME / USP - coordenado pela Profa. Dra. Elza Gomide e pelo Prof. Dr. Oscar João Abdounur em 1998. Ainda em 1998 realizei os seguintes trabalhos voltados para o ensino e aprendizagem de Matemática: Consultoria na área de matemática do Colégio Sidarta em sua primeira fase, junto à Escola do Futuro/USP – Projeto Amare. Neste projeto, fiz parte da equipe da Escola do Futuro/USP encarregada de estruturar as bases pedagógicas do referido Colégio em sua fase de planejamento e início de atividades e que hoje é referência de ensino no país. Fui responsável pelo desenvolvimento do conteúdo de Matemática e formação dos professores desta área. Como monitora das oficinas do PEC - Programa de Educação Continuada de Matemática - IME-USP, acompanhei professores do IME/USP em ações de formação continuada de professores nas escolas públicas. Fui consultora do software - Desenho Geométrico, desenvolvido pelo Grupo de Multimídia da Escola do Futuro quando tive a oportunidade de acompanhar o desenvolvimento dos conteúdos e adequá-los quando necessário.

Em 1999 participei como pesquisadora, auxiliar de coordenação e webmaster (1999) do Projeto Matemarede - Grupo de Matemática da Escola do Futuro/USP - onde atuei no desenvolvimento de projetos que vinculam a matemática com a informática bem como ensino à distância de Matemática.

Em 2001 ingressei no mestrado em Ciências da Comunicação na Escola de Comunicação e Artes da Universidade de São Paulo, sob a orientação do Prof. Dr. Osvaldo Sangiorgi e posteriormente a orientação foi do Prof. Dr. Luis Barco. O objeto de pesquisa foi discutir a pertinência do uso dos softwares de simulação no ensino da Matemática. O trabalho de mestrado foi pautado em minha vivência com recursos digitais como auxiliares no processo de ensino e aprendizagem em que foi possível aprofundar estudos sobre a comunicação, sobre a educação, sobre a epistemologia da Matemática, sobre as tecnologias em auxílio da memória dentre outros temas.

Em novembro de 2003 o Grupo de Ciências da Escola do Futuro/USP recebeu um convite para indicar softwares educacionais e iniciar, assim, o acervo da secretaria de Franca. Fui convidada pela coordenadora do grupo, na época Marcela Ferjes, para analisar softwares matemáticos. Desta forma analisei e avaliei softwares educacionais de Matemática com fins específicos; tal análise juntamente com a de outros pesquisadores gerou o relatório intitulado:

Avaliação de softwares educativos na área de ciências – Parceria entre Secretaria Municipal de Franca e Escola do Futuro/USP. Esta oportunidade permitiu aplicação das práticas adquiridas no âmbito da pesquisa de softwares educacionais matemáticos e auxiliou a criação do acervo da referida secretaria.

Neste mesmo ano coordenei os Projetos EDSOFT – Catálogo on-line de software educacional – e WEBQUEST da Escola do Futuro/USP. O Projeto Edsoft, referência na área, reunia aproximadamente 2300 títulos de softwares comerciais, e novos lançamentos eram incluídos semanalmente.

Em 2004 ingressei na equipe da Biblioteca Virtual do Estudante de Língua Portuguesa da Escola do Futuro/USP. Tratava-se do primeiro repositório nacional de recursos digitais educacionais para todas as áreas; o projeto foi ganhador de diversos prêmios de melhor site educacional nacional pela produção e inovação. Foi referência nacional e modelo para os que hoje existem no Brasil. Além de conter um acervo digitalizado de livros em domínio público de incentivo à leitura ao deficiente visual e ao público em geral, o material didático lá ancorado servia de conteúdo para o desenvolvimento de projetos educacionais e de aulas nas escolas públicas e particulares. A BibVirt, como era conhecida, foi importante para meu desempenho como educadora por permitir o contato com materiais de referência, por propiciar oportunidade de elaborar materiais inéditos no país. O projeto foi descontinuado em 2009.

Fui docente de Matemática no ensino superior de 2003 a 2007: Faculdades Integradas Torricelli, Faculdade Sumaré e Faculdade das Américas. Nas aulas de graduação pude perceber a necessidade dos estudantes de melhor preparação no ensino básico. Neste período era necessário reciclar conteúdos básicos para que pudessem acompanhar, dentre outros, aulas de pré-cálculo. A partir de então minha preocupação em encontrar formas complementares de apresentação do conteúdo se intensificou e percebia que além de recursos digitais, maior aprofundamento seria necessário, tais como: tópicos de história da Matemática, epistemologia e exercícios de lógica matemática bem como desenvolver nos educandos a capacidade de percepção do encadeamento dos conteúdos abordados.

Em paralelo às pesquisas da Escola do Futuro, participei do Mídias na Educação (2006 – 2013) programa de educação a distância cuja finalidade era propiciar formação continuada aos professores da educação básica.

No período de 2008 a 2009 fui autora de materiais didáticos digitalizados (conteúdo contendo imagens, jogos e animações dentro de uma metodologia específica) para o ensino de

Matemática na Editora COC, foi possível então colocar em prática a experiência adquirida nos anos anteriores de forma a tornar o material didático significativo para o estudante.

Entre 2010 e 2013, em períodos esporádicos, fui tutora da Escola de Formação de Professores da SEED – Secretaria Estadual Educação do Estado de São Paulo em cursos de EAD de curta duração, cujo público alvo era de professores de Matemática da rede pública estadual. Estas experiências foram relevantes, no sentido de poder participar da reciclagem dos professores concursados da rede estadual.

A fragilidade do sistema educacional apresenta a necessidade de incentivar o professor a buscar conhecimentos e propiciar dinâmicas diferenciadas em sala de aula que o levem a desenvolver estratégias que estimulem os estudantes à atenção, à apreensão, à consciência e concentração necessárias para o envolvimento com os conteúdos apresentados.

De 1994 a 2003 realizei diversos cursos extracurriculares na Universidade de São Paulo tais como: Curso de Verão - Cálculo no $\mathbb{R}^n$ e Álgebra Linear (1994), Lógica: Uma introdução básica aos princípios da demonstração (1995), Laboratório de Ensino de Matemática - Ordenação, caminhos em malha e Torre de Hanoi (1997), Mosaicos do plano: uma análise do trabalho do artista M. C. Escher (1997), Oficina Criativa de Projetos Educacionais (1997), Atividades do LABEM – Laboratório de Educação Matemática do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (2000), Considerações para Avaliação de Softwares Educacionais (2003), dentre outros. Estes cursos foram fundamentais para aprofundamentos e descobertas. Em paralelo às matérias que exigiam o rigor matemático, tais cursos confirmavam que a Matemática poderia ser ensinada de forma dinâmica e criativa de forma a despertar o interesse pela busca do conhecimento, tanto por professores quanto por estudantes.

O curso ministrado pelo Prof. Sergio Alves - Mosaicos do plano: uma análise do trabalho do artista M. C. Escher – apresentou nova perspectiva em minha prática de tal modo que desenvolvi o curso “Geometria Interativa: Mosaicos e Simetria” motivada por seus ensinamentos e indicações bibliográficas, cujos livros encontrei na biblioteca do IME. A elaboração deste projeto/curso possibilitou que conceitos matemáticos fossem tratados de forma lúdica e dinâmica vinculando assim a Matemática com a Arte. Retornando ao objeto desta tese penso que o sentimento ao trabalhar com as analogias se aproximam do mesmo sentimento que tive ao desenvolver o curso Geometria Interativa, creio que trabalhar com descobertas matemáticas propiciam apreensão natural do conhecimento de forma que o interesse se amplia e vai de encontro à assimilação.

Os cursos ligados a informática educacional, quando voltados para o universo matemático, permitem novos tratos com o conhecimento e criação, suscitam olhar diferenciado ao conteúdo trabalhado, pois ao mesmo tempo que representam os objetos em diversas perspectivas permitem conjecturas e inferências. Ampliando o grau de visao e permitindo trazer de forma quase que instantanea os conhecimentos anteriores para serem confrontados com os novos conhecimentos. É o caso de traçado de diversos gráficos no mesmo plano cartesiano. Assim é possível inferir, ao mesmo tempo em que se percebem relações intrínsecas aos objetos estudados, podendo rapidamente concluir se os objetos de diferentes domínios plotados em mesmo plano cartesiano são análogos ou não.

Desta forma, percebo que os cursos e práticas vivenciadas foram estruturas relevantes para o presente doutorado.

Em 2000 fiz dois cursos como aluna especial na Universidade de São Paulo: 1. Cibernética Pedagógica; 2. Linguagem, Comunicação e Educação. Estes cursos seriam as bases do meu mestrado.

Em 2003 fui aluna do Prof. Dr. Oscar João no curso Fundamentos de Matemática e Música ~~trata-se~~ de estudos dos fundamentos do raciocínio analógico que se estabelecem entre a Matemática e a Música.

No primeiro semestre de 2006 ingressei como aluna ouvinte na FEUSP - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo no curso “Ensinando em Ambientes Virtuais I” e no segundo semestre do mesmo ano cursei sua continuação Ensinando em Ambientes Virtuais II”, cursos que além de trazer bases sólidas no campo de educação a distância nos permitiu trabalhar com o ambiente virtual Moodle, conhecendo sua estrutura e criando cursos em ensino a distância. Ao refletir sobre a relação de tal curso com a presente tese, pensa-se na forma em que tais ambiente podem contribuir para efetivar o aprendizado de forma que sejam factíveis os resgates/relações analógicas dos conteúdos estudados e quais dinâmicas poderiam ser desenvolvidas para que isto ocorra de forma que o conhecimento de estabeleça de forma efetiva.

Ainda no segundo semestre de 2006 fui aluna ouvinte na FEUSP do curso Tópicos de Epistemologia: As noções de conhecimento e inteligência e a prática docente, na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Em 2010 cursei como ouvinte na ECA - Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo, a disciplina: Educomunicação: Fundamentos, Áreas e Metodologias. Esta disciplina teve ressonância com este trabalho, por apresentar uma nova teoria que se estabelece na interface da Educação e Comunicação: a Educomunicação. De

acordo com o Prof. Dr. Ismar de Oliveira Soares (2003), coordenador geral do NCE/USP – Núcleo de Comunicação e Educação da Universidade de São Paulo – do qual sou pesquisadora -, o termo se define como:

O conjunto das ações voltadas ao planejamento e implementação de práticas destinadas a criar e desenvolver ecossistemas comunicativos abertos e criativos em espaços educativos, garantindo, desta forma, crescentes possibilidades de expressão a todos os membros das comunidades educativas. (SOARES, 2003, p. 22)

Os referidos ecossistemas comunicativos dizem respeito às teias de relações de pessoas nos espaços educomunicativos. De forma efetiva, dentre outros, esta teoria sugere o estabelecimento de relações horizontais entre professores e estudantes, nas quais o exercício comunicativo solidário no espaço escolar é realizado por ambos com o estabelecimento de aproximação de confiança e afeto que amplie o poder de expressão dos indivíduos.

Ao realizar tais cursos percebeu-se a importância do aprofundamento no âmbito das exposições Matemática, de todos os níveis de ensino, de forma que se possa mostrar aos educandos que dentre as ideias matemáticas existem encadeamentos, analogias e que seus objetos se relacionam estruturalmente uns com os outros.

Assim, durante mestrado e doutorado tornou-se relevante, a cada exposição, recorrer aos elementos matemáticos prévios para a exposição dos conteúdos. A cada projeto desenvolvido no âmbito da Matemática meu propósito foi alcançar a compreensão e assimilação do educando de forma que ele pudesse entender as características significativas de tais conteúdos e que estes fossem relevantes para suas vidas. Sugere-se que isto ocorre a partir do entendimento dos tópicos dos domínios estudados vendo-os como partes de um todo. Sugere-se que é responsabilidade docente exteriorizar os encadeamentos e entrelaçamentos de estruturas subjacentes aos conteúdos matemáticos de forma a propiciar a interiorização de tais relações aos conhecimentos dos estudantes. Por isso formações contínuas em processo aos professores de Matemática de todos os níveis são necessárias para que possam estar cientes de seu saber epistemológico e que possam formar estudantes conscientes e seguros do que foi ensinado.

A participação e apresentação de trabalhos em congressos, simpósios, eventos, formações e cursos ministrados no decorrer destes anos tiveram como finalidade o aprendizado e contribuição ao contexto educacional e em especial no âmbito da Matemática.

Após esta vivência e na expectativa de estudar formar de apresentação do conteúdo matemático que tragam significado aos objetos, o tema escolhido para o trabalho de doutorado foi o pensamento analógico, cujo problema consistia em saber: Qual característica do pensamento analógico possibilita a atribuição de significados aos objetos matemáticos?

O trato com o objeto matemático requer cuidados muitas vezes ignorados no contexto de ensino/aprendizagem e neste cenário, a inserção de novos recursos se faz necessária. Considerando o valor de abordagens semânticas neste universo, a interpretação da linguagem Matemática no discurso científico e pedagógico é tarefa primordial para aqueles que abordam o conhecimento nesta área do saber. Assim sendo, a pesquisa acerca das formas de comunicação neste âmbito se faz necessária para fins de possibilitar a apreensão e compreensão de conceitos abstratos por meio de atribuições de significados aos objetos matemáticos.

Diversos são os recursos voltados à construção de significados utilizáveis no processo de ensino e aprendizagem concernentes à compreensão de conceitos. Dentre eles, destaca-se o uso do pensamento analógico. Abdounur (2003, p. 143) ressalta que “Analogias desempenham relevantes papéis enquanto agentes reveladores de relações ocultas na rede de significados, determinando em muitos casos, modificações em nível cognitivo, afetivo e volitivo”. Neste contexto, o uso da analogia com fortes similaridades estruturais, catalizam o processo de assimilação e entendimento. Tal uso viabiliza argumentações pautadas em fundamentos consistentes, possibilita conjecturas, abstrações e trocas de conhecimentos. De acordo com Gentner e Smith (2013, p. 1), “Habilidade analógica– a habilidade de perceber estruturas relacionais através de diferentes contextos – é o mecanismo principal da cognição humana.”³ (tradução da autora) Analogias auxiliam o processo de transferência de significados, inferências, criatividade e descobertas. Sugere-se, para a sedimentação dos conceitos, exaltar aquelas com forte grau de semelhança entre os termos dos sistemas tratados em questão. Sistematizar esta prática favorecerá maiores efeitos positivos se acompanhada de gestos, imagens mentais e visuais.

O estudo das analogias e similaridades se insere no âmbito da Heurística e encontra na afetividade uma relação de complementaridade em direção à construção de significados de objetos matemáticos, tornando possível valorizar aspectos coadjuvantes deste processo como o reconhecimento de padrões e conhecimentos prévios.

A pergunta que norteará esta pesquisa é: Quais características do pensamento analógico contribuem para atribuições de significado no estudo da Matemática?

Significar, desmitificar e substancializar abstrações matemáticas são desafios que acompanham os diversos níveis de ensino. Em virtude das dificuldades que envolvem o processo de ensino-aprendizagem nesta área do conhecimento, este trabalho tem como

³ Analogical ability – the ability to perceive like relational structure across different context – is a core mechanism of human cognition. Gentner e Smith (2013, p. 1)

objetivo geral, por meio de pesquisa bibliográfica, selecionar autores que refletem e discutem acerca do pensamento analógico no âmbito educacional. Neste contexto, pretende-se ainda identificar conhecimentos conectáveis analogicamente em contextos significativos para deslindar a complexidade referente ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Como objetivo específico, por meio de pesquisa bibliográfica, pretende distinguir na literatura consultada características da analogia usadas como catalizadores da assimilação de conteúdos abstratos.

Na fundamentação teórica deste trabalho destacam-se: Abdounur (2003); Gentner (1983, 1989, 1995, 2012); Gentner e Smith (2013); Holyoak, Novick e Metz (1994); Mandler (1975, 1984, 1985, 1988, 1989a, 1989b); Polya (1968, 1973, 1986); Richland, Holyoak e Stigler (2004); Richland, Zur e Holyoak (2007); Ricoeur (1982, 1992, 2005); Schoenfeld (1985, 2012); dentre outros.

Assim, a presente tese possui quatro capítulos, estruturados da seguinte maneira: No primeiro capítulo, o estudo concentra-se na definição do termo analogia e suas especificidades, bem como em seus aspectos históricos. Estabelece-se ainda uma reflexão sobre a importância do uso do pensamento analógico como recurso de atribuição de significado no contexto educacional matemático. No segundo capítulo, investiga-se o caráter heurístico da analogia e em particular os aspectos cognitivos envolvidos na resolução de problemas. Reflete-se ainda sobre a relevância da inclusão do tema no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e nas formações de professores.

No terceiro capítulo, compara-se a analogia com temas correlatos, destacando-se a importância de cuidados na elaboração de analogias. Apresenta-se o mapeamento como um importante processo que se constitui no alinhamento e traçado de inferências entre conceitos antigos e novos. A interpretação da linguagem matemática e suas formas discursivas no âmbito científico e pedagógico foi abordada em linhas gerais, para legitimar o aprendizado desta área do conhecimento. Destinou-se ainda um tópico ao estudo da similaridade e sua relação com a analogia, pela importância do tema no contexto da cognição e da atribuição de significados na educação matemática.

No quarto capítulo, estuda-se a afetividade no contexto de uso do pensamento analógico na atribuição de significados na dinâmica de ensino/aprendizagem.

1 ANALOGIA: SIGNIFICADO E PAPEL

Compreender algo, não é apenas re-conhecer esse algo, mas considerá-lo como a sequência de alguma coisa que já se conhece.

Hofding

Segundo Szabó (1978) a origem da palavra “analogia” é matemática e não linguística ou gramatical. Etmologicamente a definição do termo apresenta-se ancorada em conceitos pitagóricos e de acordo com Fallas (1992):

A palavra αναλογα provêm da união da preposição ανα (segundo) e do substantivo λογος (razão ou proporção), reunidas ambas as palavras o termo significava para o grego “segundo proporção”, ou, talvez, “segundo relação”. Por isso em sua noção primeira estabelece, uma relação proporcional entre dois ou mais termos.⁴ (FALLAS, 1992, p. 295, tradução da autora)

A analogia é resultado da comparação das similaridades de dois conceitos (GLYN; TAASOBSHIRAZY; FAWLER, 2007, p. 45); Bunge (1999, p. 28) a define como “similaridade em certo sentido” e acrescenta que as analogias profundas sugerem um novo padrão, uma nova lei. Gentner (1983) considera a analogia como um movimento em termos de estrutura comparativa entre conhecidos objetos, pertencentes a domínios estudados, denominados fonte ou base de uma analogia e menos conhecidos objetos, pertencentes ao novo domínio de estudo, denominados alvo da analogia.

Para Gentner (1989, p. 207) “a analogia é aclarada pelo exemplo da correspondência água e calor discutida acima que transmite que o sistema comum relacional se mantém para os dois domínios: Pressões diferentes causam o fluxo da água e temperaturas diferentes causam o fluxo do calor”. Este exemplo foi minuciosamente analisado por Gentner (1989) para apresentar a importância do uso das analogias nas situações de ensino e aprendizagem. O conceito de analogia foi descrito por Polya (1986, p. 29) como uma espécie de semelhança e pode alcançar “o nível do rigor matemático”; salienta o autor que nos objetos análogos existem determinadas coincidências “em certas relações das suas respectivas partes.”

Segundo Polya, a inferência por analogia apresenta-se como

⁴ La palabra αναλογα proviene de la unión de la preposición ανα (según) y el sustantivo λογος (razón o proporción), reunidas ambas palabras el término significaba para el griego “según proporción”, o, quizás, “según relación”. Por eso en su noción primera establece, una relación proporcional entre dos o más términos. (FALLAS, 1992, p. 295)

[...] o tipo mais comum de conclusão e é o essencial. Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso. (POLYA, 1986, p. 33)

Conceitos familiares (fonte) e novos conceitos (alvo) são colocados em relação por meio de analogias, que abrindo caminhos à compreensão de objetos matemáticos, sedimentam a significação.

Neste cenário as analogias contribuem para visualização, construção e análise de conceitos de complexa assimilação, assim como para reflexões decorrentes de suas apreensões.

Em concordância com Polya (1986), Otte (1993), afirma que

Uma analogia baseia-se na estrutura das relações das partes correspondentes de um “sistema”. Por isso, podem ser utilizados todos os processos heurísticos para configurar tais estruturas de relações, por exemplo, considerações de simetria. (OTTE, 1993, p. 31)

Assim sendo, a analogia estabelece-se na estrutura das relações intrínsecas aos elementos em correspondência em um domínio. Segundo o autor, as analogias devem ser aplicadas em estrutura forte e significativamente semelhantes.

Em estudos avançados de modelagem científica Harré, Aronson e Way (2000) estudaram modelos que envolvem idealizações/abstrações e analogia e enfatiza que estas relações são determinadas por diferentes graus de semelhança.

Os detalhes em qualquer caso particular podem ser expressos em termos de similaridades e diferenças entre o modelo e o que ele representa. Não há nada misterioso sobre estas relações desde que modelos e seus análogos ou abstrações, sejam entidades do mesmo status metafísico, ou seja, de um modo geral, coisas, ocupantes de espaço e tempo. (HARRÉ; ARONSON; WAY, 2000, p. 2)

1.1 DO PENSAMENTO ANALÓGICO: BREVE HISTÓRIA NO ÂMBITO DA MATEMÁTICA

Neste primeiro momento a abordagem a ser descrita privilegia um apanhado histórico do Pensamento Analógico para fins de estabelecer o contexto dentro do qual o presente trabalho se insere, bem como compreender acepções atribuídas a tal tipo de pensamento ao longo da história.

É impreciso determinar o momento em que o termo analogia foi usado pela primeira vez. O mesmo se diz a respeito de sua origem. Supõe-se que o termo foi usado primeiramente

pelos pitagóricos, no entanto, não se pode afirmar.

Fallas (1992, p. 296) aponta que a partir do século IV a.C. quase todos os pensadores fizeram uso do conceito, em especial Platão, Aristóteles e os pitagóricos. De acordo com o autor, a concepção matemática inicial do termo analogia apresenta-o como uma identidade de relações ou proporções entre diversos elementos.

Usar analogias proporcionais pressupõe estabelecer uma comparação entre os termos que se relacionam. Uma vez estabelecida a proporção de cada um deles pode-se efetuar a relação. Por isso, este tipo de analogia, em certo sentido, supõe usar do rigor matemático e de comparação exata dos termos. Contudo, este uso matemático da analogia pertence ao pitagorismo, o único que se preocupou com as medições proporcionais entre as coisas.⁵ (FALLAS, 1992, p. 296, tradução da autora)

Uma das formas de investigação da origem da teoria da analogia nos remete a história da educação na Europa ocidental com idiomas de origem latina. A aprendizagem era restrita aos mosteiros, dificultando o acesso aos textos do mundo antigo, porém, de acordo com Ashworth (2013) no início do século XIII, esta situação se transformou com a fundação das primeiras universidades (Bolonha, Paris, Oxford) e a recuperação dos escritos de Aristóteles por meio das traduções feitas por filósofos islâmicos. Ressalta-se que os árabes foram os responsáveis pelo retorno dos escritos de Aristóteles à Europa e dentre eles os filósofos e médicos Avicenas (980 – 1037) e Averróes (1126 – 1198) cujas contribuições influenciaram os filósofos vindouros, visto que eles foram alguns dos que protagonizaram a conservação, interpretação, disseminação e transmissão da cultura helênica ao mundo cristão ocidental medieval (Bittar, 2009, p. 62-63).

[...] Averróis (Abû *al-Walîd Muhammad ibn Ahmad ibn Muhammad ibn Ahmad ibn Ahmad ibn Ruchd*), não é o pioneiro na introdução de Aristóteles no mundo árabe, mas um grande responsável por sua difusão. O primeiro grande pensador a atrair o valor do pensamento aristotélico para o mundo árabe é *al-Kindi* (Bagdá, século IX d.C.), que, como sábio árabe, se destaca por sua longa sabedoria clássica em geometria, filosofia, astronomia, música, medicina, lógica, psicologia, política, aritmética, entre outros assuntos. (GILSON⁶, 1998 apud BITTAR, 2009, p. 68)

Pertinente se faz mencionar a noção Matemática (RICOEUR, 2005, p. 412-413) do conceito de analogia segundo a concepção formal das proporções, a qual “cristaliza em si

⁵ Analogar proporcionalmente presupone una escala relativa de medición para los términos que se relacionan. Una vez establecida la proporción de cada uno de ellos se puede dar la relación. Por eso, este tipo de analogia, en cierto sentido, supone una rigurosidad matemática y una medición exacta de los analogados. Sin embargo, este uso matemático de la misma pertenece propriamente al pitagorismo, el único que se preocupó por mediciones proporcionales entre las cosas. (FALLAS, 1992, p. 296)

⁶ GILSON, E. **A filosofia na Idade Média**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

todo um trabalho de pensamento” e visa solucionar e classificar questões das diversas áreas do conhecimento. Segundo Strumia (2010), “Aristotle (384-322 B.C.) was the first to give a systematic formulation of it in the field of logic.”

De acordo com Vazquez (2010):

Na obra *Ethica Nicomachea* Aristóteles explica a analogia da seguinte maneira: “A analogia é uma igualdade de razões e requer, pelo menos quatro termos.” Seguindo a explicação desta passagem e a da *Poética* 21 se obtém uma proporção do tipo $A : B :: C : D$.⁷ (VAZQUEZ, 2010, p. 93, tradução da autora)

No contexto didático pedagógico o raciocínio por analogia é solicitado, por exemplo, quando estudantes realizam exercícios que completem relações conforme a concepção acima apresentada. Ricoeur (2005, p. 413) esclarece que ao usar a extensão da ideia de número nesta relação, Aristóteles faz alusão à extensão do uso da proporção a termos de generos desiguais, de forma que “eles possam ser ditos iguais ou desiguais sob alguma relação.”

O estudo sobre analogia se desenvolveu desde os tempos medievais dentro do estudo da Lógica, Teologia e da Metafísica. Para possibilitar o entendimento de conceitos pertinentes a estas três áreas foi considerado plausível separar as palavras em três categorias, nos diferentes campos do discurso, independente do contexto.

Algumas são unívocas (sempre usadas com o mesmo sentido), outras são puramente equívocas (usadas com sentidos diferentes), e outras são analógicas (usadas com sentidos relacionados). (ASHWORTH, 2013)

Segundo Ashworth (2013) havia nas discussões medievais, do século XIV em diante, três principais tipos de analogia. A autora assevera que, na concepção grega inicial - denominada analogia de proporcionalidade -, a analogia indicava a "comparação de duas proporções ou razões" (ASHWORTH, 2013). Um exemplo deste tipo seria a analogia entre o modelo atômico de Bohr e o Sistema Solar, pois, neste caso, o núcleo atômico é comparado ao Sol e os elétrons são comparados aos planetas.

O segundo tipo, denominado analogia de atribuição - o principal no contexto medieval, relaciona um objeto primário e outro secundário. Neste caso a palavra "luminosidade" torna-se um termo analógico quando relacionamos um vagalume e sua bioluminescência, pois enquanto o vagalume possui um brilho no sentido primário, sua bioluminescência possui luminosidade num sentido secundário, sendo a origem do brilho do vagalume.

⁷ En *Ethica Nicomachea* Aristóteles explica la analogía de la siguiente manera: “La analogía es una igualdad de razones y requiere, por lo menos cuatro términos.” Siguiendo la explicación de este pasaje y el de *Poetica* 21 se obtiene una proporción del tipo $A : B :: C : D$. (VAZQUEZ, 2010, p. 93)

O terceiro tipo de analogia relaciona Deus e as criaturas, pois "as criaturas são consideradas boas ou justas, pois sua bondade e justiça imitam ou refletem a bondade e justiça de Deus" (ASHWORTH, 2013).

No campo da lógica a palavra grega *αναλογία* referia-se à comparação entre duas razões (ASHWORTH, 2013; STRUMIA, 2010). Atribui-se a Platão (427 - 347 a.C.) a transferência do termo “analogia” da Matemática para a Lógica e Filosofia. Porém nota-se que a organização sistemática da analogia no campo da lógica foi de Aristóteles (384 – 322 a. C.) (ABDOUNUR, 2003; STRUMIA, 2010; ASHWORTH, 2013).

Aristoteles utilizou analogia em quase todas as disciplinas, principalmente na doutrina do ser, o que ressoa em toda a história filosófica que viria a culminar com São Tomás de Aquino. Convertendo-se portanto em uma das categorias centrais do pensamento da Antiguidade e Idade Média, o pensamento analógico ganha aplicações em disciplinas aparentemente distantes como a metafísica, a ética, a antropologia e a lógica. (ABDOUNUR, 2003, p. 118)

De acordo com Ashworth (2013), do século XIV em diante as referências sobre a analogia se davam em relação à “natureza dos conceitos correspondentes às palavras usadas”. Para Polya (1973, p. 13) analogia é uma espécie de similaridade. Similaridade em um nível mais concreto e mais conceitual. Segundo o autor, a diferença essencial entre analogias e outros tipos de similaridade encontra-se na intenção do pesquisador.

2 A FUNÇÃO HEURÍSTICA DA ANALOGIA

Um conhecimento realmente ativo deve dar provas de progresso em todos os seus passos.

Gaston Bachelard

A heurística trata da investigação acerca da invenção e descoberta, vinculada assim a aspectos cognitivos envolvidos na resolução de problemas. Segundo Polya, o raciocínio heurístico serve como ponte para a obtenção de demonstrações rigorosas.

Raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos a absoluta certeza quando chegamos à solução completa, mas frequentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício. [...] O raciocínio heurístico vale por si próprio. O que é mal é confundí-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um raciocínio heurístico por uma demonstração rigorosa. (POLYA, 1986, p. 132-133)

O conhecimento das operações mentais⁸, nas acepções de Polya (1986), envolvidas na resolução de problemas é um importante objetivo da heurística, que investiga tanto suas bases lógicas quanto psicológicas. Tal conhecimento “pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática” (POLYA, 1986, p. 87). A consciência de processos heurísticos propicia o envolvimento de estudantes bem como a relação entre conceitos novos e prévios, enriquecendo o aprendizado e descortinando soluções muitas vezes de complexo entendimento. Do ponto de vista do ensino, a explicitação da heurística e em particular da analogia na preparação do conteúdo tratado pode ocasionar aprofundamentos que influem no aprendizado.

Historicamente a heurística é estudada em textos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), Pappus (290 d.C. - 350 d.C.), Descartes (1596 - 1650), Antoine Arnauld (1612 - 1694), Leibniz (1646 - 1716), Bolzano (1781 - 1848). O livro VII de *A Coleção Matemática* de Pappus de Alexandria é relevante para o estudo da Heurística, primeiramente por “descrever e

⁸ Segundo Balieiro (2004a, p.2) “Os estudos estabelecidos por Polya, relacionados ao “como pensar” para resolver um problema, têm como eixo central a discussão de processos mentais envolvidos no raciocínio heurístico, isto é, num processo psíquico através do qual o homem cria, elabora e descobre um método que até então era desconhecido, útil à resolução do problema.”

discutir a produção matemática dos gregos Euclides, Apolônio, Eratóstenes e Aristeu, relatando os procedimentos que esses antigos geômetras utilizavam para realizar suas descobertas e demonstrações das proposições” (BALIEIRO, 2004, p. 12), assim como por conceituar tópicos concernentes à análise e síntese, elementos que fornecem recursos à atividade heurística.

2.1 A FUNÇÃO HEURÍSTICA DA ANÁLISE

Considerando a vertente histórica das investigações sobre a heurística destaca-se o uso da análise na Antiguidade. Segundo Mora (2004):

Proclo (in Euclid., 211, 19-22) atribuiu a Platão a descoberta de um método de investigação da verdade que consiste em partir de algo buscado, *ζητούμενον*, enquanto admitido ou dado por estabelecido, *ομολογουμένον*. Este método encontra sua melhor aplicação na matemática. Exemplos dele se encontram em parte do Ménon. [...] Num escólio ao livro XIII dos Elementos, de Euclides, Téon de Alexandria, ao qual se atribuem às vezes não apenas a edição mas também a refundição completa dessa obra, deu ao método que “parte do buscado” o nome de “análise” (*αναλυσις*, do verbo *αναλυω* = “desligar”, “desfazer”, e também “examinar detalhadamente um problema”, resolver, isto é, “desfazer” uma questão, ao contrário do método denominado “síntese”, *συνθεσις*). Téon definiu a análise como “um tomar o buscado enquanto admitido para deduzir suas consequências e chegar desse modo a algo admitido como verdadeiro”; e a síntese como “um admitir algo e derivar suas consequências para chegar a algo admitido como verdadeiro”. [...] Proclo denominou da mesma maneira “análise” e “síntese”, respectivamente, dois métodos próprios de todos os ramos da matemática; segundo Proclo, pode-se ir das coisas mais bem conhecidas a coisas buscadas, ou o inverso. (MORA, 2004, p. 118)

A referência, neste trabalho, aos estudos do método de análise desde a Antiguidade, diz respeito ao acesso às origens e entendimento de tal método como um dos procedimentos heurísticos da resolução de problemas. O autor complementa:

Considerou-se a análise como uma resolução (*resolutio*) – resolve-se o complexo no simples – ou uma regressão (*regressio*) – regressa-se, mediante uma sequência lógica de proposições, a uma proposição que se declara evidente partindo de outra proposição que se pretende demonstrar e que se admite como verdadeira. Por esse motivo, o método da análise foi denominado pelos filósofos da “Escola de Pádua” e por Galileu método de resolução ou método resolutivo. (MORA, 2004, p. 118)

Ainda de acordo com o autor:

O sentido anterior do termo “análise” não coincide com o que se costuma usar hoje na literatura filosófica e até em boa parte da científica. Com efeito, é muito frequente hoje entender a análise como a decomposição de um todo em suas partes. [...] (MORA, 2004, p. 119)

De acordo com Balieiro:

Pode-se ler antes, conforme Pappus, que no campo da Matemática, as obras que tratam da análise geométrica utilizada pelos antigos geômetras gregos, caracterizada como um método para se descobrir a solução ou a demonstração de problemas ou teoremas geométricos, isto é, uma forma de atividade heurística, desenvolvida por esses geômetras gregos, é o que constitui a chamada Coleção Analítica dos antigos. (BALIEIRO, 2004, p. 69)

Tais obras são referência para pesquisas sobre os primórdios da investigação analítica no âmbito da Matemática. Segundo Balieiro:

Fica explícito que os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utiliza a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores. (BALIEIRO, 2004, p. 80)

A permanência do uso da análise e da síntese – do método científico -, na atualidade, atesta sua relevância na solução problemas matemáticos; e quanto ao uso da heurística no âmbito do ensino, Abdounur destaca:

[...] e quando reconhecemos um ponto da explicação a partir do qual já sabemos a meta almejada – seja por reativar a memória, seja por criar um atalho que caia num ponto conhecido, porém esquecido como pertencente ao caminho, seja por criar associações a partir dele, ou outro processo mental que estimule a heurística do problema -, o problema torna-se resolvido. Estabelecendo estacas criteriosas em distâncias que não frustrem o desvendar do aluno nem facilitem excessivamente ou tolha a sua capacidade criativa, o trabalho do professor consistiria em desatolar ou mesmo catalisar a reação heurística do aluno dando-lhe dicas reanimadoras de espaços estratégicos da rede na resolução do problema em questão e propiciadoras de criação de atalhos, [...]. (ABDOUNUR, 2003, p. 174-175)

Segue um exemplo do uso da análise como recurso heurístico, na resolução de problemas de demonstração, encontrado em Polya (1986, p. 105); neste contexto o autor descreve a análise como “a ideia de chegar ao objetivo pela redução sucessiva.”.

Determinar o valor de x que satisfaz a equação

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Tomando-se $4^x = (2^x)^2$ e $4^{-x} = (2^x)^{-2}$

Admitindo-se que $y = 2^x$, tem-se:

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

$$z = y + \frac{1}{y}$$

$$8z^2 - 54z + 85 = 0$$

Aqui cessa a análise, desde que o solucionador do problema saiba resolver uma equação do segundo grau.

Em que consiste a síntese? Em executar, passo a passo, os cálculos cuja possibilidade foi indicada pela análise. O solucionador não necessita de nenhuma outra ideia para concluir a resolução, apenas de alguma paciência e de atenção ao calcular as várias incógnitas. A ordem dos cálculos é inversa à ordem da invenção: primeiro calcula-se z ($z = \frac{5}{2}, \frac{17}{4}$), em seguida y ($y = 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$) e, finalmente, a incógnita originalmente procurada x ($x = 1, -1, 2, -2$). A síntese retrocede pelos passos da análise, e por este exemplo, é fácil de ver porque assim é. (POLYA, 1986, p. 105)

O exemplo mostra um problema de relativa complexidade para iniciantes, que requer do estudante conhecimentos prévios e básicos sobre equações e sobre alcançar resultado por meio de “redução sucessiva” Polya (1986, p.105). Neste caso, a heurística (análise e síntese) faz-se presente no processo de identificação de formas de simplificar o processo de resolução e agilizar o encontro da solução.

A ação do professor é fundamental para o estabelecimento de uma abordagem heurística no ensino e aprendizagem. Apontar alguns caminhos, durante o processo de resolução de problemas, é uma forma de estimular tais reações heurísticas, que juntamente com o uso da analogia podem desencadear o encontro de soluções.

O recurso analógico é utilizado frequentemente no processo heurístico e a afetividade mostra-se um fator relevante no sucesso da analogia, mais especificamente na busca de um análogo, uma vez que o sentimento encontra-se intimamente relacionado com a experiência passada e sensibilidade. (ABDOUNUR, 2003, p. 158)

Neste cenário, Balieiro (2004) destaca:

Com relação à obtenção da solução de um problema, frequentemente, pode-se adivinhá-la, utilizando intuições, inferências, induções e baseando-se em analogias com outros problemas resolvidos e não se pode negar que, talvez por esses fatos, foram alcançados resultados importantes, como se verifica no desenvolvimento das ideias Matemáticas; mas, apesar de ser excelente, uma tal adivinhação (predição) não é um método científico propriamente dito: em todo tratamento metódico, importa analisar as condições impostas pelos dados coletados do problema e é necessário, primeiramente, ter bem claramente ao espírito aquilo que se alcançou com a imaginação, então supondo o problema resolvido. Adota-se então um procedimento heurístico segundo regras que se experimentam de problemas análogos ao problema de que se quer a solução. (BALIEIRO, 2004, p. 71-72)

Dada a importância da análise tanto no processo de uso do raciocínio heurístico, e em particular no da analogia, destaca-se a voz da tradição:

A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos⁹ comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. [...] Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese. [...] Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos com certo [...] Mas na síntese, invertendo o

⁹ Pappus se refere à obra Elementos de Euclides

processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. (PAPPUS¹⁰, 1982 apud POLYA, 1986, p. 104)

A análise, um procedimento heurístico que catalisa momentos de descoberta, pois permite acurada investigação durante o processo de resolução de problemas e atribuição de significados, torna possível o exercício de encadeamento de ideias.

Para Polya “A análise consiste em pensamentos; a síntese, em atos [...] A análise vem naturalmente em primeiro lugar, a síntese vem depois; a análise é invenção e a síntese, execução; *a análise consiste em conceber um plano e a síntese, em executá-lo.*” (POLYA, 1978, p. 106). Vale destacar a importância destes elementos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática desde o início da vida escolar. É um exercício que proporciona a auscultação de detalhes inerentes ao universo da Matemática que também pertence às outras ciências.

Balieiro (2004) evidencia a similaridade e sintonia no uso do raciocínio heurístico, no que concerne ao uso em particular do raciocínio analógico visto que a analogia é também usada para descobertas e compreensão de problemas de toda a ordem:

Adota-se então um procedimento heurístico segundo regras que se experimentam de problemas análogos ao problema de que se quer a solução. A *análise* consiste em resolver um problema admitindo o resultado que se quer demonstrar como verdadeiro, buscando, em seguida, um antecedente do qual seja possível deduzir o resultado que se quer demonstrar e que foi admitido como verdadeiro. Repetindo esse processo de regressão sucessivamente busca-se chegar a algum resultado que já se conhece ou admite-se como válido. (BALIEIRO, 2004a, p. 6)

As investigações de Battisti (2010) atestam a filiação de Descartes à tradição do método de análise geométrica:

Da mesma forma que, para os antigos, o ato de instauração da análise começava com a seguinte proclamação: “suponhamos o problema resolvido” ou “suponhamos o que é procurado como já tendo sido feito”, encontramos em Descartes, na mesma situação, frases como “eu suponho a coisa como já feita” (cf. AT, 6, p. 382, 413). Também se percebe nessa obra de Descartes grande familiaridade com a Coleção matemática de Pappus, que contém a principal descrição dos métodos de análise e de síntese dos geômetras gregos. Tendo em conta o teor dessas referências e desses indicativos, parece não haver dúvidas quanto à tese de que Descartes é um legítimo praticante do método de análise geométrica e, como tal, filia-se a essa tradição metodológica. (BATTISTI, 2010, p. 572-574)

A análise considera a utilidade de todas as informações da questão, visa minimizar as complexidades e alcançar relações relevantes para a resolução do problema.

¹⁰ PAPPUS, A. **La Collection Mathématique** 2v. Trad. P. V. Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982.

Mesmo assim, a característica mais marcante do método de análise é sua capacidade de lidar com a estrutura do enunciado ou da problemática fornecida e de utilizá-la da melhor forma, para extrair o máximo de informações de que dispõe. A famosa frase “suponha-se o problema resolvido” ou outra equivalente – que Pappus e os praticantes da análise sempre utilizam no começo da análise (cf. Heath, 1952, p. 437 ss) – não é um mero artifício linguístico ou retórico, sem consequência heurística. Por meio dela, a análise considera o desconhecido (o “efeito”, o dependente) como dado ou como se fosse conhecido e, com isso, utiliza a sua “presença” e o poder heurístico que fornece. Cabe lembrar que, embora as noções de causa e de efeito sejam estranhas ao âmbito matemático, as relações causais são similares às relações de dependência no interior da matemática. A fecundidade da etapa analítica provém da utilização dos poderes do procurado (desconhecido), da sua força lógica, mas isso não significa que se deve ir do desconhecido em direção ao conhecido, seja extraindo conclusões, seja buscando premissas, como muitos pretenderam. Sendo ambos dados (conhecido e desconhecido), ainda que cada um a seu modo, a análise utiliza-os como melhor lhe aprouver. A postura do analista é a de estabelecer ou de construir relações úteis entre todas as entidades dadas ou disponíveis, no interior da complexidade em exame, tendo sempre em mente que seu objetivo final é a determinação do desconhecido pelo conhecido. (BATTISTI, 2010, p. 587)

As considerações de Proclo e Battisti convergem quando mencionam que a análise visa determinar o “desconhecido pelo conhecido”, assim sendo presume-se estar implícito que a análise é um auxílio ao raciocínio analógico. Descartes apresentou a análise como um recurso inerente à resolução de problemas de diferentes áreas do saber:

Descartes, tendo em conta que um dos objetivos centrais de sua filosofia é estabelecer novos fundamentos para o saber, o método que o produz não poderia provir senão das “primeiras sementes de verdades, depositadas pela natureza nos espíritos humanos” (Descartes, 1985, p. 27; AT, 10, p. 376) [...] O método cartesiano brota da reflexão sobre a matemática como paradigma metodológico e, ao mesmo tempo, da reflexão sobre os poderes resolutivos espontâneos possuídos por nossa razão. A matemática serve de ocasião para que a racionalidade revele seu modo de operar e seus poderes. [...] A matemática serve de ilustração ao método e, como tal, é uma fonte importante para compreendê-lo. A matemática é o horizonte privilegiado de atuação da razão, graças a suas características inerentes, [...]. (BATTISTI, 2010, p. 575)

Estas observações sugerem que a Matemática é lugar propício para o exercício do método analítico, o qual descortina a capacidade de obter conhecimento e de acordo com o autor “Conhecer é, portanto, ordenar e medir os objetos entre si pela razão.” (BATTISTI, 2010, p. 577).

2.2 O RACIOCÍNIO HEURÍSTICO E AS OPERAÇÕES MENTAIS

Recai Akkus e Brian Hand (2005, p. 1) assim como Polya (1986) inserem o raciocínio heurístico na categoria de ações pedagógicas que favorecem a resolução de problemas, a argumentação e interação dialógica de ideias bem como o desenvolvimento de textos.

O raciocínio heurístico matemático (MRH – sigla em inglês) é uma ferramenta pedagógica para auxiliar as aulas de Matemática para envolver estudantes, por meio da resolução de problemas, no raciocínio e comunicação de suas ideias por meio da interação dialógica e tarefas escritas. [...] O MRH é um quadro conceptual que explica a relação entre o conhecimento do estudante de matemática, o conhecimento do professor de matemática, a interação com os estudantes, a negociação de ideias, escrita e processo de resolução de problemas dos estudantes.¹¹ (AKKUS; HAND, 2005, p. 1, tradução da autora)

A analogia e a indução podem servir de base para este tipo de raciocínio (Polya 1986, p. 133), possibilitando a transferência de significados por meio de conhecimentos prévios até que o estudante consiga desenvolver resultados formais. Balieiro (2004a) reforça:

Com relação à obtenção da solução de um problema, frequentemente, pode-se “adivinhá-la”, utilizando intuições, inferências, induções e baseando-se em analogias com outros problemas resolvidos e não se pode negar que, talvez por esse fato, foram alcançados resultados importantes, como se verifica no desenvolvimento das ideias Matemáticas; mas, apesar de ser excelente, uma tal adivinhação (predição) não é um método científico propriamente dito: em todo tratamento metódico, importa analisar as condições impostas pelos dados coletados do problema e é necessário, primeiramente, ter bem claramente ao espírito aquilo que se alcançou com a imaginação, então supondo o problema resolvido. (BALIEIRO, 2004a, p. 6)

Ricoeur (2005) destaca o modelo como instrumento heurístico inserindo-o na lógica da descoberta:

[...] na linguagem científica, o modelo é essencialmente um instrumento heurístico que visa, por meio da ficção, destruir uma interpretação inadequada e traçar um caminho para uma interpretação adequada. [...] O modelo pertence não à lógica da prova, mas à da descoberta. Uma vez mais é necessário compreender que a lógica da descoberta não se reduz a uma psicologia da invenção sem interesse propriamente epistemológico, mas comporta um processo cognitivo, um método racional que tem seus próprios cânones e princípios. (RICOEUR, 2005, p. 366)

O raciocínio heurístico favorece a aproximação de ideias de forma não sistemática e fornece indícios para o desenvolvimento de estratégias de argumentação, além de propiciar compreensão, inferências, descobertas e, segundo Polya, quando “apresentado com elegância e franqueza poderá ser útil; é possível que ele prepare para o argumento rigoroso, do qual contém alguns germes.” (POLYA, 1986, p. 133).

Dentre as investigações de Polya (1986, p. 144) estão os sinais de progresso na resolução de problemas, obtidos por meio do processo heurístico. Tais sinais motivam a

¹¹ The mathematics reasoning heuristic (MRH) is a pedagogical tool for supporting mathematics classroom discourse by engaging students, through problem solving, in reasoning and communicating their ideas through dialogical interaction and writing tasks. [...] The MRH refers to a conceptual framework that explains the relationship among students' knowledge of mathematics, teacher's knowledge of mathematics, interaction with students, negotiation of ideas, writing, and process of students' problem solving. (AKKUS; HAND, 2005, p. 1)

análise e reflexão, incentivam a busca por conhecimentos prévios, especificamente por conceitos análogos possibilitando o encontro de solução plausível. As informações relacionadas a um problema devem ser usadas para a resolução; todas são relevantes; simultaneamente é preciso relacionar dados e incógnita. Resolver um problema significa, dentre outros, conectar dados e incógnitas num processo sistemático; os sinais de progresso podem apontar o sucesso, porém no caso do raciocínio heurístico é preciso atenção; pois tais sinais foram alcançados por meio de sugestões heurísticas, e portanto, são soluções plausíveis; “[...] não apresentam a certeza de uma demonstração rigorosa” (POLYA, 1986, p. 149).

Nesta esteira Morris Kline (2001) afirma que:

Os três métodos de raciocínio: por analogia, indução e dedução, bem como outros, são de uso comum. A dedução, no entanto, difere essencialmente dos outros métodos de raciocínio. Embora a conclusão inferida por analogia ou indução tem uma certa probabilidade de estar correta, a inferência decorrente da dedução necessariamente está.¹² (KLINE, 2001, p. 49, tradução da autora)

As operações mentais foram objetos de estudo de Descartes em sua obra “*Règles pour la direction de l’esprit*”; sobre as quais menciona-se o essencial para o presente contexto. Na obra citada a Regra III discorre sobre a intuição e a dedução, as quais são responsáveis pela apreensão dos objetos do conhecimento (BATTISTI, 2010, p. 578). Sobre tais operações afirma:

Elas são responsáveis pela apreensão das relações cognitivas entre os objetos no interior de um campo científico. A intuição permite a apreensão de conhecimentos mais simples e fundamentais, e a dedução permite a construção de cadeias de conhecimentos, a derivação de um conhecimento a partir de outro. (BATTISTI, 2010, p. 578)

Descartes (1628) define a indução na Regra VII com argumentos provenientes de Aristóteles (Balieiro, 2004, p. 148):

Or ici l’énumération, ou l’induction, est la recherche attentive et exacte de tout ce qui a rapport à la question proposée. Mais cette recherche doit être telle que nous puissions conclure avec certitude que nous n’avons rien omis à tort. Quand donc nous l’aurons employée, si la question n’est pas éclaircie, au moins serons - nous plus savants, en ce que nous saurons qu’on ne peut arriver à la solution par aucune des voies à nous connues; et si, par aventure, ce qui a lieu assez souvent, nous avons pu parcourir toutes les routes ouvertes à l’homme pour arriver à la vérité, nous pourrons affirmer avec assurance que la solution dépasse la portée de l’intelligence humaine.¹³ (DESCARTES, 1628, p. 17)

¹² Los tres métodos de razonamiento: por analogía, inducción y deducción, así como otros que podríamos describir, son de empleo común. La deducción, sin embargo, difiere esencialmente de los demás métodos de razonamiento. Mientras que la conclusión inferida por analogía o por inducción sólo tiene cierta probabilidad de ser correcta, la sacada por deducción forzosamente lo es. (KLINE, 2001, p. 49)

¹³ Esta enumeração, ou indução, é então a pesquisa de tudo o que se reporta a uma questão proposta, pesquisa tão diligente e tão cuidadosa que dela tiremos a conclusão certa e evidente que nada tenhamos omitido por inadvertência; de tal sorte que, depois de ter usado, se o objeto de nossa pesquisa nos permanece escondido,

A indução é um processo investigativo tanto na Matemática quanto nas demais ciências; o raciocínio indutivo é um caso particular do raciocínio heurístico Balieiro (2004, p. 148). De acordo com Japiassú e Marcondes (1996) a indução:

Em lógica, forma de raciocínio que vai do particular ao geral, ou seja, que procede à generalização a partir da repetição e da observação de uma regularidade em um certo número de casos. Ex: Se A_1 tem a propriedade P; Se A_2 tem a propriedade P; Se A_n tem a propriedade P; Então, todo A tem a propriedade P. Uma vez que é empiricamente impossível examinar todos os casos de A, a indução é sempre probabilística, seu grau de certeza sendo proporcional ao número de casos examinados. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996, p. 142)

Neste contexto, observa-se uma interligação entre os conceitos da indução e analogia. Polya (1986) destaca a diferença entre indução e indução matemática:

A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. [...] A indução procura encontrar regularidade e coerência nos fatos observados. Seus mais notáveis instrumentos são a generalização, a particularização e a analogia. A generalização por tentativas parte de um esforço para compreender os fatos observados; baseia-se na analogia e é verificada por meio de outros casos particulares. (POLYA, 1986, p. 91-92)

O autor destaca a diferença entre o uso da indução na Matemática e nas demais ciências, e apresenta não apenas a vantagem da sistematicidade na investigação, bem como o cuidado na verificação de regularidades significativas em casos particulares, sem conferir rigor científico, haja vista que “[...] a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental” (POLYA, 1978, p. 93).

Estudos sobre a indução analógica, ou raciocínio por analogia, - e sobre operações mentais em geral - poderiam integrar a grade curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática, fazer parte do currículo oficial de Matemática de forma mais efetiva e assim propiciar, aos futuros professores, a oportunidade de observar pautados em aspectos teóricos - durante as ações pedagógicas - os próprios processos heurísticos e os de seus futuros estudantes. As operações mentais permitem evidenciar, em sua essência, o entrelaçamento dos aspectos da heurística no contexto do pensamento analógico e vice-versa. Um conceito

sejamos pelo menos mais sábios no que percebemos seguramente, que não teríamos podido encontrá-lo por nenhuma das vias que nos são conhecidas; e que, se por acaso, como frequentemente acontece, pudemos percorrer todas as vias pelas quais os homens aí tenham acesso, e, nos seja permitido afirmar audaciosamente que o seu conhecimento está fora de todo alcance do espírito humano. Tradução de Balieiro (2004, p. 106).

fortalece o outro; a analogia com a função de transferências e atribuição de significados, e no entanto, estruturada em ações e recursos heurísticos.

2.3 SHOENFELD E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ancorado nas investigações de Polya, Shoenfeld (2010) dedicou-se a pesquisa do processo de resolução de problemas matemáticos por um período de vinte e cinco anos, o que resultou no desenvolvimento de ideias teóricas sobre o assunto. Algumas de suas observações são oportunas para o presente trabalho, pois discorrem sobre como e porque as pessoas agem de determinada maneira a cada momento em suas atividades sociais tais como no processo de ensino (SHOENFELD, 2012, p. 3). Segundo o autor é possível argumentar sobre o sucesso ou falha em resolução de problemas com base em quatro aspectos: 1. Conhecimento; 2.

Estratégias de resolução de problemas (Heurística); 3. Metacognição; 4. Crenças.

Suas recomendações encerram simples ações que auxiliarão aos professores de Matemática e seus estudantes.

[...] Quanto mais entendemos algo, o melhor que temos a fazer é divulgar. Quando entendemos a funcionalidade de algo, podemos auxiliar outros a fazê-lo. Esta foi a ideia por trás do meu trabalho de resolução de problemas, onde o entendimento de resolução de problemas ajudou-me a auxiliar estudantes a se tornarem melhor resolvedores de problemas. Acredito que a melhor compreensão das tomadas de decisão dos professores pode auxiliar-nos a ajudar os professores de matemática a se tornarem mais eficazes.¹⁴ [...] ICME-12, 2012. (SHOENFELD, 2012, p. 13-14, tradução da autora)

Shoenfeld mostra, explicitamente, a importância das formações de professores no sentido de auxiliá-los a diagnosticar os avanços e retrocessos dos estudantes nas ações heurísticas. Igualmente importante é a tarefa de possibilitar aos estudantes a serem bons resolvedores de problemas.

¹⁴ [...] the more we understand something the better we can make it work. When we understand how something skillful is done we can help others do it. This was the idea behind my problem solving work, where an understanding of problem solving helped me to help students become better problem solvers. I believe that a comparably deep understanding of teachers' decision making can help us to help mathematics teachers become more effective. [...] ICME-12, 2012. (SHOENFELD, 2012, p. 13-14)

2.4 O USO DA HEURÍSTICA NA MATEMÁTICA DE SINGAPURA

Desde 1990 o currículo de Matemática de Singapura privilegia a resolução de problemas como metodologia de ensino. Em 2013 o programa de estudos deste país implementou o uso de estratégias heurísticas no processo de resolução de problemas dos níveis primário ao pré-universitário contemplando as competências solicitadas para o século XXI.

Os pesquisadores Tiong, Hedberg, Lioe (2005) investigam o papel das estratégias heurísticas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no currículo oficial de Singapura, em geral, e em particular investigam as treze estratégias heurísticas do *syllabus* de Singapura. Os autores supracitados estruturam suas pesquisas em Polya, Shoenfeld, Bruner e Landa, dentre outros.

Destaca-se que o programa de estudos de Matemática de Singapura em 2013 está focado no uso do método heurístico e na resolução de problemas, para este mister estrutura-se em cinco elementos: atitudes, metacognição, processos, conceitos e habilidades.

O *syllabus* de Singapura contempla treze estratégias heurísticas:

- . Act it out
 - . Use a diagram/model
 - . Use guess-and-check
 - . Make a systematic list
 - . Look for patterns
 - . Work backwards
 - . Use before-after concept
 - . Make suppositions
 - . Restate the problem in another way
 - . Simplify the problem
 - . Solve part of the problem
 - . Think of a related problem
 - . Use equations
- (Heuristics 12 and 13 are not in the primary syllabus.)

Um ponto de interesse na investigação supra citada é a inclusão de contrapontos entre a visão heurística e a algorítmica, úteis para o processo de ensino e aprendizagem matemático:

A diferença reconhecível e imediata entre heurísticas e algoritmos é que heurísticas não garantem a solução, enquanto que os algoritmos, se os procedimentos são seguidos exatamente, garantem uma solução. Um problema, por definição, não vem com algoritmos conhecidos que podem ser usados para resolvê-lo, portanto

heurísticas são usadas. Mesmo se os algoritmos existirem, a heurística geralmente nos permitirá encontrar uma solução com menos tempo e esforço do que os algoritmos. Outra, e talvez a mais importante, diferença entre os dois é que algoritmos vêm com procedimentos muito específicos, enquanto heurísticas tem somente sugestões não rigorosas acerca do que deveremos fazemos. Nem todas as heurísticas são as mesmas em termos de especificidade.¹⁵ (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 2, tradução da autora)

Na preparação de uma aula, o professor poderá valer-se da heurística em contraponto com o algoritmo de forma criativa e consciente, observando nos estudantes suas diferenças, assim como usá-las de forma adequada e proporcional no processo de resolução de problemas. As pesquisas de Peterson (2007) apontam que:

De acordo com Landa (1976), no final de 1950 Simon e seus colegas distinguiram que entre algoritmos e heurísticas as heurísticas não garantem um resultado, mas foram mais rápidas do que uma busca algorítmica exaustiva. Landa (1976) desenvolveu uma definição mais precisa de heurísticas para uso em educação, contrastando-as com a definição matemática de algoritmos que exigem (a) especificidade (todas as operações são explicitamente determinadas), (b) generalidade (usuários diferentes das operações atigem o mesmo resultados), bem como (c) resultados (garantia de resultado). Assim, os algoritmos e heurísticas podem ser vistos como formando um contínuo de operações com algoritmos completamente determinados em uma extremidade, seguindo com um número cada vez menor de operações ao longo do contínuo em direção à outra extremidade contendo heurísticas completamente indeterminadas (total incerteza em termos de especificidade, generalidade e resultados). Na prática, a diferença entre algoritmos e heurísticas é que um algoritmo nos diz exatamente como resolver nosso problema, passo a passo, enquanto que heurísticas nos ajudam apenas a procurar uma maneira de resolvê-lo.¹⁶ (PETERSON, 2007, p. 8, tradução da autora)

A transferência foi apresentada como importante procedimento heurístico, sendo que esta é também um forte procedimento da analogia; desta forma os dois recursos convergem

¹⁵ The most recognizable and immediate difference between heuristics and algorithms is that heuristics do not guarantee solution, while algorithms, if the procedures are followed exactly, guarantee a solution. A problem, by definition, does not come with known algorithms that can be used to solve it, therefore heuristics are used instead. Even if there do exist algorithms, heuristics usually enable us to find a solution with less time and effort than algorithms. Another, and perhaps the more important, difference between the two is that algorithms come with very specific procedures, while heuristics only have non-rigorous suggestions about what we should do. Not all heuristics are the same in terms of specificity. (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 2)

¹⁶ According to Landa (1976), in the late 1950s Simon and his colleagues distinguished between algorithms and heuristics in that heuristics did not guarantee a result, but were faster than an exhaustive algorithmic search. Landa (1976) developed a more precise definition of heuristics for use in education by contrasting them with the mathematical definition of algorithms requiring (a) specificity (all operations are explicitly determined), (b) generality (different users of the operations attain the same results), as well as (c) resultivity (guaranteeing a result). Thus, algorithms and heuristics can be viewed as forming a continuum of operations with completely determined algorithms on one end and increasingly less determined operations extending along the continuum toward the extreme of completely undetermined heuristics (total uncertainty in terms of specificity, generality and resultivity). In practice, the difference between algorithms and heuristics is that an algorithm tells us exactly how to solve our problem, step by step, whereas a heuristics merely helps us search for a way to solve it. (PETERSON, 2007, p.8)

como auxílio para a atribuição de significados e encontro da solução de problemas. Segundo TIONG; HEDBERG; LIOE (2005):

Algoritmos são usualmente aplicáveis a certos tipos de questões em áreas específicas, enquanto heurísticas são geralmente aplicáveis por meio de tipos de questões e áreas. Isto levanta outra importante característica da heurística que é a transferibilidade. A mais importante razão para usar heurística é porque elas podem ajudar a resolver problemas em áreas desconhecidas.¹⁷ (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 2, tradução da autora)

O uso de estratégias heurísticas torna-se produtivo quando compreende-se o problema.

Um erro comum em resolução de problemas é iniciar a resolução sem primeiro entendê-lo (Eggen & Kauchack, 2003; Rubinstein, 1986). Representar o problema de várias formas nos permite ter um entendimento mais completo que normalmente vai nos auxiliar a melhor resolvê-lo. “Representações heurísticas” são heurísticas que norteiam a representação de problemas em diferentes formas. Entre as treze listadas, “representá-lo”, “use um diagrama / modelo” e “usar uma equação” são “representações heurísticas”, correspondem a três formas de representação do conhecimento de Bruner (1967): enativa, icônica e representação simbólica.¹⁸ (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 3, tradução da autora)

A analogia possui indubitavelmente valor heurístico, propiciando a possibilidade de resolução de problemas, compreensão, descoberta, atribuição de significados a novos conceitos, em especial no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, que requer ainda em particular um apurado desenvolvimento do raciocínio analógico.

Destacam-se, neste contexto, importantes procedimentos da analogia enquanto raciocínio heurístico tais como resgate do conhecimento prévio do estudante, uso da similaridade, transferência de significados, assim como exercício de percepção e de mapeamentos de padrões. Desta forma, o uso da analogia em um contexto heurístico tem potencial de sensibilizar para a valorização de princípios esperados no âmbito do ensino e aprendizagem.

¹⁷ Algorithms are usually applicable to a certain type of question in a specific topic area, while heuristics are generally applicable through types of question and topic areas. This raises another important characteristic of heuristics, that of *transferability*. The most important reason to learn heuristics is that because they can help solve problems in unfamiliar topic areas. (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 2)

¹⁸ One common mistake in problem solving is to start solving the problem without first understanding it (Eggen & Kauchack, 2003; Rubinstein, 1986). Representing the problem in various ways allows us to have a fuller understanding of the problem that will normally help us tackle the problem better. “Representation heuristics” are heuristics that guide the representation of problems in different forms. Among the thirteen listed, “act it out”, “use a diagram/model” and “use an equation” are “representation heuristics”, correspond to Bruner’s (1967) three forms of knowledge representation: *enactive*, *iconic*, and *symbolic representation*. (TIONG; HEDBERG; LIOE, 2005, p. 3)

Pode-se considerar a inferência analógica como um dos procedimentos fundamentais da heurística, propiciando construção de significados a conceitos matemáticos, visto que a transferência de atributos entre domínios considerados é essencial na compreensão de novos conceitos.

Na visão de Ricoeur (2005, p. 366), a lógica da descoberta preserva certos interesses epistemológicos, comporta um processo cognitivo, um método racional com princípios próprios, um modelo que não pertence a lógica da prova. Em contrapartida, Polya (1986) considera que por meio do raciocínio heurístico, chega-se a soluções plausíveis sem o alcance efetivo a respostas absolutas.

Diante destas considerações, o uso em Matemática de tal lógica promove a construção de sentido e significado e está a meio caminho de resultados rigorosos.

O raciocínio heurístico, que inclui a analogia, é um ato de criação e de coragem no fazer Matemática; é de natureza livre sem apegos necessariamente a procedimentos e/ou domínios preestabelecidos.

2.5 METÁFORAS E ANALOGIAS: DIFERENÇAS

Para efeito desta investigação torna-se pertinente analisar as diferenças entre os conceitos de metáfora e o de analogia. A definição desses termos e entrelaçamentos de seus aspectos auxiliarão no esclarecimento sobre em quais âmbitos e momentos do discurso matemático é pertinente fazer uso dos mesmos. O uso dos pensamentos analógico e metafórico são essenciais para o desenvolvimento do pensamento criativo, analítico e crítico, desta forma propiciam condições para a produção e comunicação de conhecimento, fatores essenciais para a pesquisa em educação (AUBUSSON; HARRISON; RITCHIE, 2006, p. 7).

Importante se faz ressaltar que o propósito deste tópico não é aprofundar a descrição conceitual sobre a noção de metáfora e sim apresentar pontos comuns bem como as diferenças entre esses recursos argumentativos e a importância desta comparação no processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Aristóteles definiu a metáfora como sendo “o transporte para uma coisa de um nome que designa uma outra coisa, ou do gênero para a espécie, ou da espécie para o gênero, ou da espécie de uma para o gênero da outra, ou por analogia” Poética, 1475 b 6-9 – (RICOEUR, 2005, p. 24), e alertou quanto ao seu uso indevido na ciência (VAZQUEZ, 2010, p. 87).

Segundo o filósofo grego, “Em ciências as metáforas não podem ser utilizadas para nomear realidades que não tem nome [...] podem ser confundidas por enunciados assertivos, em um contexto onde se espera que se nomeie as coisas com propriedade” (VAZQUEZ, 2010, p. 87). Deste modo Aristóteles recomenda não usar a metáfora na ciência e filosofia, ou seja, em discursos assertivos. Ao passo que em relação à retórica e à poética – discursos manifestativos –, o uso da metáfora é recomendado. Nota-se que os recursos de linguagem devem ser adequadamente utilizados para não gerar enganos.

Contrariamente à ideia clássica de substituição, Black defende a teoria da interação que transcende à mera substituição de uma palavra por outra, permitindo a emergência da interação entre um sujeito e um predicado lógicos, o que desloca o foco do sentido metafórico da semântica da palavra para a semântica da sentença como um todo. De acordo com a teoria mencionada, uma metáfora nos induz a atribuir a seu sujeito um sistema de lugares-comuns, relacionados a palavra metafórica. Por exemplo, em o homem é um lobo, tende-se a transferir características ordinárias do animal referido para o homem. (ABDOUNUR, 2003, p. 125)

Metáforas e analogias são usadas para comparar objetos considerados similares, porém diferentes um do outro; uma entidade familiar é usada para fornecer informações, interpretar ou comunicar ideias sobre entidades menos conhecidas (AUBUSSON; HARRISON; RITCHIE, 2006, p. 3). Nesta esteira, subprocessos tais como mapeamentos, transferências e relações são particularmente importantes, pois descrevem o processo, implícito por vezes, de ligação das características selecionadas de um elemento da comparação a outro. Os autores ainda destacam que nas metáforas as comparações são encobertas enquanto que nas analogias são evidentes; em outras palavras, as similaridades e diferenças entre objetos comparados por meio de analogias são mais explícitas.

Da obra *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* de George Lakoff e Rafael E. Núñez (2000) destacam-se alguns exemplos de metáforas atribuídos ao contexto matemático. Este exemplos tentam relacionar o significado geral do conceito à termos conhecidos do cotidiano, ou seja, oferecem termos metafóricos que se aproximam do tema a ser trabalhado. Nos casos mencionados apresentam-se simples aproximação entre noções conhecidas (domínio fonte) e conceitos (domínio alvo) para abarcar uma compreensão inicial sobre o objeto matemático:

1. Aritmética é o movimento ao longo de um caminho, coleção de objetos / construção;
2. Mudança é movimento;
3. Conjuntos são recipientes, objetos;
4. A continuidade é sem lacunas;

5. Sistemas matemáticos têm uma "essência", ou seja, a sua estrutura axiomática algébrica;
6. Funções são conjuntos de pares ordenados, curvas no plano cartesiano;
7. Figuras geométricas são objetos no espaço;
8. Independência lógica é ortogonalidade geométrica;
9. Números são conjuntos, coleções de objetos, segmentos físicos, pontos em uma linha;
10. A recorrência é circular.

O raciocínio matemático requer variáveis que pertencem ao universo de discurso, de modo que podemos raciocinar sobre generalidades e não apenas sobre particularidades. A comparação entre conceitos matemáticos e ideias similares do cotidiano colaboram com a transferência de significados entre domínios aparentemente desconexos. Por um lado este exercício é um estímulo à descoberta de conexões criativas que ampliam o conhecimento e conforme Ricoeur (1992, p. 148) “A característica decisiva é a inovação semântica, graças a qual uma nova pertinência, uma nova congruência, é estabelecida de tal maneira que o enunciado “faz sentido” como um todo.” Abdounur (2003) ressalta nesta ótica que:

A semelhança consiste precisamente numa transição de uma incongruência literal para uma congruência metafórica entre dois ou mais terrenos distintos, como se uma mudança de distância entre significados ocorresse na rede ou como se desvendássemos um atalho que unisse significados outrora distantes no espaço do saber. (ABDOUNUR, 2003, p. 148)

Ricoeur (2005, p. 29) define dois traços importantes para a metáfora: 1. A metáfora é algo que acontece ao nome. 2. A metáfora é definida em termos de movimento: a epiphorá de uma palavra é descrita como uma sorte de deslocamento de ... para ... Segundo o autor “Essa noção de epiphorá traz consigo uma informação e uma perplexidade. [...] a palavra metáfora, em Aristóteles, aplica-se a toda transposição de termos. [...] Um interesse pelo próprio movimento de transposição.”

A similaridade não é nada mais que essa aproximação que revela um parentesco entre idéias heterogêneas. Aquilo que Aristóteles chamou de epiphora da metáfora, ou seja, a transferência de significado não é nada mais senão essa mudança ou alteração lógica, do distante para o próximo. (RICOEUR, 1992, p. 148)

Segundo Aristóteles: “... elaborar boas metáforas é contemplar semelhanças ou ter um insight de similaridades” (RICOEUR, 1992, p. 146). Evidenciando o poder da semelhança, Abdounur (2003, p. 137) destaca que “Para fins de enredamento de significados, vale endossar o poder das analogias e metáforas de estabelecerem semelhanças, aproximando significados outrora distantes.”.

De acordo com Vazquez (2010) a metáfora torna cognoscíveis os significados em virtude das semelhanças entre os termos relacionados.

Adiante ver-se-á, neste texto, que a semelhança é uma figura comum quando metáforas e analogias estão em questão. Torna-se pertinente recordar a semelhança que existe, no âmbito da Matemática, entre os conceitos de reta numérica e os números reais, lembrando que a cada ponto da reta numérica corresponde um número real ou a noção de função que pode ser interpretada como se fosse uma máquina.

Nos escritos de Aristóteles não existe clara diferenciação “entre uso e significado das palavras”, porém fica explícita a “distinção entre o que se diz com propriedade e o que não.”. Partindo deste pressuposto, a metáfora torna-se uma figura ambígua, pois “está fora do que se diz com propriedade, aspecto necessário para a formação de premissas e silogismos.” Vazquez (2010, p. 89) ressalta ainda que “[...] deve quedarnos claro, que ao ser el language convencional, la frontera entre lo que se disse com propriedade y lo metafórico es difusa y depende del auditorio”.

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática esta questão torna-se delicada pois para alcançar a audiência sem incorrer em enganos é prioritário que na argumentação os termos usados para clarear conceitos, sejam reconhecidos pelos estudantes. Estes devem fazer parte da cultura geral dos educandos, mais acertadamente devem fazer parte do conhecimento prévio dos mesmos.

Seguindo a tradição clássica, Polya (1986) destaca a coincidência entre objetos análogos nas relações que existem entre seus elementos constituintes. A analogia em sua função de descoberta apresenta a “identidade de relações” de dois domínios. Por exemplo: Lados de um retângulo e faces de um paralelepípedo retângulo; centro de gravidade de um tetraedro homogêneo e o centro de gravidade de um triângulo homogêneo; ou analogia entre três objetos: segmento de reta, triângulo e tetraedro.

Pimm (1981) esclarece que para entender a metáfora temos que identificar a analogia latente na qual ela está baseada. Segundo o autor o que deve e o que não deve ser considerado precisa ser deixado muito claro.

Perelmann e Tyteca (1996) consideram que:

[...] acreditamos que é em função da teoria argumentativa da analogia que o papel da metáfora ficará mais claro. Afirmar o vínculo entre metáfora e analogia significa, aliás, retomar uma tradição antiga, a dos filósofos e, em especial, dos lógicos, de Aristóteles a John Start Mill. Esse vínculo voltará a ser, a nosso ver, aceitável, na medida em que se elaborar mais profundamente a teoria da analogia. Não poderíamos, neste momento, descrever melhor a metáfora do que a concebendo, pelo menos no que tange à argumentação, como uma analogia condensada,

resultante da fusão de um elemento do foro com um elemento do tema.
(PERELMANN; TYTECA, 1996, p. 453)

A indagação de Ricoeur (2005, p. 428) permite refletir sobre a linha tênue de separação entre os dois recursos argumentativos: “Quando com efeito a analogia é mais próxima da metáfora? Quando é definida como proporcionalidade.”

2.6 SOBRE O CONCEITO DE ANALOGIA

Segundo Pimm (1981, p. 48), Perelmann considera a definição segundo a qual a analogia é análoga a uma proporção. Assim sendo, uma analogia corresponderia a seguinte relação $A : B :: C : D$. De fato, este foi um dos significados originais da palavra *αναλογία*, que deu origem ao termo “analogy”. Em outras palavras o termo foi modificado ao longo da história linguística: de proporção para analogia.

“Por exemplo: a idade avançada está para a vida assim como a primavera está para as estações do ano” ou “O triângulo está para o tetraedro assim como o paralelogramo está para o paralelepípedo”. Estas afirmações evidenciam a relação simétrica do conceito de proporção. Segundo Polya (1986) dois objetos são análogos se coincidem em certas relações de suas respectivas partes. Gentner (1983) definiu analogia como uma comparação entre objetos denominados origem ou base da analogia e menos conhecidos objetos denominados alvo da analogia. Importante ressaltar que o pensamento analógico pressupõe a habilidade de transferência de representações por meio de conceitos (NOVICK, 1988).

Com perspicácia, Pimm (1981, p.48) ao analisar a assertiva de Perelman, acima descrita, compara a noção de proporção com a de analogia, e considera a unidirecionalidade da segunda, a qual pressupõe “que sabemos mais sobre uma relação do que sobre a outra.” Destacar o acima exposto é importante por apresentar a alteração do significado do termo ao longo do tempo.

Quando trabalhamos com analogia estamos usando forma rica e criativa de investigação que compreende aspectos heurísticos. Neste fato, importante para professores e estudantes, reside a ampliação de conhecimentos e descobertas, o reconhecimento da importância do conhecimento prévio na transferência de significados aos novos conceitos.

Quando as pessoas “recebem” analogias, elas usam seus conhecimentos passados, experiências e preferências para interpretar a analogia para que ela se harmonize

com o seu ambiente pessoal e social atual. Em termos modernos, isso é chamado de construção pessoal de significado. Aulas de ciências são um cenário comum em que as analogias são usados para melhorar conceito de aprendizagem; portanto, melhorar a forma como as analogias são utilizados no ensino de ciências tem importantes consequências de ensino e aprendizagem. [...] Se as analogias são adequadas, promovem conceito de aprendizagem, porque eles incentivam os estudantes a construir ligações entre o conhecimento passado familiar e experiências e novos contextos e problemas.¹⁹ (HARRISON; TREAGUST, 2006, p. 11-12, tradução da autora)

Em contrapartida, Pimm (1981, p. 47) registra que existem opiniões que não consideram a analogia como prova, mas como ilustração. Polya (1986, p. 30, 33) afirma que a analogia pode alcançar o nível do rigor científico e que as especialmente evidentes são mais confiáveis do que “vagas similitudes, exemplos sistematicamente dispostos tem maior valor do que coleções aleatória de casos.”.

Nesta esteira Perelmann e Tyteca (1996, p. 423) consideram a analogia um importante recurso heurístico, porém como Polya (1986) e Pimm (1981), destacam as desconfianças atribuídas ao conceito por pensadores empíricos, que a vêem como uma “semelhança de qualidade menor, imperfeita, fraca, incerta”.

Polya (1986) ressalta que as analogias superficiais e sem clareza, podem gerar ambiguidades.

Neste caso torna-se oportuno considerar o grau de plausibilidade das conclusões acerca dos objetos análogos estudados, examinando-os detalhadamente.

Estas considerações não diminuem o valor criativo e dinâmico do raciocínio por analogia visto que dentre os aspectos cognitivos proporcionados por ela estão associados a habilidade de percepção e captação de novos conceitos.

O processo do raciocínio analógico é usualmente dividido em três distintos subprocessos denominados: acesso, mapeamento e generalização (VOSNIADOU; ORTONY, 1989).

Considerar a analogia como sendo a transferência de atributos do conhecimento prévio para iluminar novos conhecimentos, permite aprofundar e destacar aspectos dos conhecimentos familiares para evidenciar relações inerentes aos conhecimentos do domínio alvo.

¹⁹ When people “receive” analogies, they use their past knowledge, experiences and preferences to interpret the analogy so that it harmonises with their current personal and social milieu. In modern terms, this is called *the personal construction of meaning*. Science classrooms are a common setting in which analogies are used to enhance concept learning; therefore, improving the way analogies are used in science education has important teaching and learning consequences. [...] If the analogies are appropriate, they promote concept learning because they encourage students to build links between past familiar knowledge and experiences and new contexts and problems. (HARRISON; TREAGUST, 2006, p. 11-12)

Para Polya (1973, 1986) é a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contem o conjunto restrito.

Perelmann e Tyteca (1996, p. 424) atribuem diferentes nomes para os elementos da analogia: tema e foro. Para os autores o foro (fonte) corresponde ao elemento conhecido e o tema (corresponde ao alvo), diz respeito ao novo conhecimento a ser compreendido. Segundo os autores: “Há, de todo o modo, entre tema e foro, uma relação assimétrica que nasce no lugar por eles ocupado no raciocínio.” Dentre outros aspectos, destacam que:

[...] para haver analogia, tema e foro devem pertencer a áreas diferentes: quando as duas relações que confrontamos pertencem a uma mesma área e podem ser subsumidas sob uma estrutura comum, a analogia é trocada por um raciocínio pelo exemplo ou pela ilustração, pois tema e foro fornecem dois casos particulares de uma mesma regra. (PERELMAN; TYTECA, 1996, p. 425)

2.6.1 Tipos de analogia

Para os propósitos deste trabalho torna-se suficiente mencionar três tipos de analogia:

1. Analogia de Proporcionalidade, 2. Analogia por inferência e 3. Isomorfismo.

A analogia de proporcionalidade $A : B :: C : D$, conforme anteriormente mencionado, pressupõe, conforme Fallas (1992, p. 296), uma escala relativa de medição para os termos que se relacionam. Segundo o autor, uma vez estabelecida a proporção de cada um deles, a relação pode acontecer.

Por isso, este tipo de analogia, em certo sentido, supõe usar o rigor matemático e a comparação exata dos termos. Contudo, este uso matemático da analogia pertence ao pitagorismo, o único que se preocupou com as medições proporcionais entre as coisas. [...] No tomismo, o termo apresenta dois usos: atribuição e proporcionalidade, mas ambos se entendem na mesma linha conceitual de Aristóteles.²⁰ (FALLAS, 1992, p. 296, tradução da autora)

²⁰ Por eso, este tipo de analogía, en cierto sentido, supone una rigurosidad matemática y una medición exacta de los analogados. Sin embargo, este uso matemático de la misma pertenece propiamente al pitagorismo, el único que se preocupó por mediciones proporcionalistas entre las cosas. [...] En el tomismo, el término presenta dos usos: atribución y proporcionalidad, pero ambos se pueden entender en la misma línea conceptual de Aristóteles. (FALLAS, 1992, p. 296)

As inferências por analogia são previsões; visão esta reiterada anteriormente, mencionada por Polya (1986) a qual assevera que:

A inferência por analogia parece ser o tipo mais comum de conclusão e é o essencial. Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso. (POLYA, 1986, p. 33)

O isomorfismo ou isomorfismo holoédrico é um tipo rigoroso de analogia que ocorre quando, por exemplo, em dois sistemas de elementos matemáticos, P e P' , certas conexões são configuradas da seguinte forma: as relações entre os elementos de P são regidas pelas mesmas leis que regem as relações entre os elementos de P' . Polya (1986) explica que existe uma correspondência unívoca entre os elementos dos dois sistemas P e P' , conservando certas relações.

2.7 ANALOGIA E GENERALIZAÇÃO

Tradicionalmente a analogia tem sido considerada como uma aproximação das generalizações. Agassi (1964, p. 353) apresenta a analogia como uma generalização de alto grau baseada em outras de mais baixo grau. Propriedades semelhantes observáveis em diferentes objetos favorecem o uso da analogia. A confiabilidade de uma generalização é evidenciada quando certas condições de alto grau estão presentes. Intuitivamente, o autor descreve três generalizações tradicionais: 1. As amostras devem ser aleatórias 2. As amostras devem ser relativamente grandes e 3. Os conjuntos ou populações caracterizados por criteriosas propriedades. É importante destacar que a condição dois caracteriza a generalização. E quando a condição três é encontrada caracteriza-se como analogia. Agassi (1964) afirma que nunca soube que a condição um tenha sido encontrada.

Hesse (1961, p. 25) e Harre (1961, p. 26) ressaltam que declarações tais como “átomos são como bolas de bilhar” não são analogias: são metáforas. Segundo Agassi (1964, p. 353), metáforas são de fáceis construções para elucidar qualquer teoria, mas não adicionam novos conhecimentos. Declarações como “nervos conduzem eletricidade como telégrafos” são analogias adequadas, pois nervos e telégrafos transmitem informações e ambos transmitem eletricidade. Analogias são para finalidades específicas (ad hoc). Segundo o autor a analogia demonstra sua importância ao sugerir novas teorias - nervos transmitem eletricidade - porém após o seu uso passa-se a considerar “a teoria em seu próprio mérito”

(AGASSI, 1964, p. 353). As analogias que não são para finalidades específicas (ad hoc) são de fácil construção porém não são encontradas em livros texto (AGASSI, 1964, p. 354).

Agassi (1964) cita Hesse e Harre: De acordo com Hesse as analogias são significativas na ciência, pois explicitam significados de termos e teorias abstratas, embora isto necessariamente torna a analogia imperfeita (partindo do concreto para o abstrato). Neste caso as analogias são reconhecidamente ad hoc, de forma que dificilmente se possa ver a diferença entre analogias e metáforas. Na perspectiva de Harre (1961, p. 25), o uso da analogia faz parte de "um movimento característico da ciência avançada".

Agassi (1964, p. 354) finaliza seu artigo com um exemplo relativo aos elementos químicos alumínio e sódio e conclui que "a analogia entre o sódio e o alumínio, como todas as analogias relacionadas à tabela de elementos químicos, é uma analogia de fato, e de nenhuma maneira ad hoc - é uma generalização."

As conclusões de Agassi indicam sua preocupação com o caráter ad hoc de algumas analogias e com o fato de alguns a defenderem como método científico (supostamente) confiável.

3 ESTUDOS COMPARATIVOS

Aprender é constituir uma estrutura. Em qualquer processo educativo, o progresso não consiste tanto na ligação de uma percepção com uma resposta, mas sim na modificação da própria percepção.

P. Guillaume

3.1 ANALOGIA E COGNIÇÃO

Pesquisas realizadas por Richland, Zur e Holyoak (2007) nos vídeos do encontro de avaliação em Matemática e Ciências, *Trends in Internacional Mathematics and Science Study* – TIMSS 1999 Video Study - possibilitaram a investigação das diferenças, no uso da analogia, dentre as atividades matemáticas ministradas aos estudantes dos Estados Unidos, Hong Kong e Japão; estes dois últimos locais alcançam com frequência, altos índices em resultados nos testes internacionais. Segundo os autores, os professores americanos com frequência elaboram atividades com o uso de analogias, porém nem sempre estas atividades incentivam o raciocínio de seus estudantes. Fatores tais como cognição, memória e uso da analogia aliados aos comportamentos culturais serviram de base no processo da investigação. Segundo Richland, Zur e Holyoak (2007) a proficiência em Matemática é alcançada quando as analogias decorrentes dos pontos em comum entre as representações matemáticas são evidenciadas, auxiliando assim o entendimento de novos problemas e conceitos.

De acordo com Polya (1986, p. 33) “Analogias evidentes pesam mais que vagas similitudes, exemplos sistematicamente dispostos tem mais valor do que coleções aleatórias de casos.”; o autor mostra a importância da quantidade e qualidade dos objetos a serem comparados, e destaca a relevância da qualidade da analogia em detrimento da quantidade de casos análogos estudados.

As considerações de Richland, Zur e Holyoak (2007, p. 1128) acima, acentuam a pertinência da escolha de fortes analogias ao indicar que a “proficiência em Matemática” decorre de tais percepções. Enquanto Polya (1986) salienta que o critério e cuidado na comparação dos casos análogos são fatores que influenciam positivamente no entendimento dos casos estudados.

Tais considerações sugerem que o uso do raciocínio analógico na comparação de elementos de domínios próximos tendem a apresentar conjecturas plausíveis que potencializam o aprendizado. As conjecturas resultantes de tais mapeamentos são plausíveis e frutos de exames sistemáticos das relações estruturais dos objetos analisados; podem ainda segundo Polya (1986), serem confirmadas por meio de raciocínio mais rigoroso.

Os processos decorrentes do uso da analogia sedimentam o aprendizado do conhecimento alvo e acredita-se, passam posteriormente a fazer parte do acervo intelectual do estudante servindo de base para novas análises, além disso, vale destacar que o raciocínio analógico propicia a maior apreensão de conceitos e resolução de problemas permitindo correlações entre estruturas análogas de conceitos conhecidos (fonte) e novos conceitos (alvo). As conexões se estabelecem em domínios diferentes. Richland, Zur e Holyoak (2007, p. 1128) relembram que “o raciocínio matemático envolve o entendimento de relações abstratas em diferentes contextos” e alertam que tais relações podem ser melhor ensinadas traçando-se paralelos entre exemplos simples. Os autores afirmam que mesmo assim, os estudantes falham em apresentar bons resultados quando esta estratégia é apresentada sem pistas de apoio, tais como dicas, questões ou elaboração de analogia.

Destacar o conceito conhecido (fonte) com representações visuais tais como, gestos, diagramas, animações, contextualizações com recursos digitais, pode auxiliar positivamente na atribuição de significado ao novo conceito (alvo).

A apresentação de grande número de representações visuais e espaciais análogas ao novo objeto de estudo propicia transferência de atributos fortemente estabelecidos e duradouros, auxiliando assim a compreensão de conceitos abstratos e reduzindo a necessidade de recorrer à memória de trabalho²¹. Pistas espaciais, tais como posições e setas, ou gestos comparativos podem servir para realçar correspondências, na visão de Richland, Zur e Holyoak (2007).

Ainda segundo estudos de Richland, Zur e Holyoak (2004, p. 44), quando um dos objetivos de aprendizado é o ensino de novos conceitos e procedimentos pode-se fazer analogia com conceitos e procedimentos similares estudados.

²¹ A memória de trabalho (MT) é um sistema de processamento e armazenamento de informações em curto prazo que mantém o pensamento, a aprendizagem e a comunicação. A MT envolve o armazenamento temporal e a manipulação da informação necessária para a realização de complexas atividades cognitivas, como a compreensão da leitura, o acesso ao léxico e o raciocínio. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S2179-64912011000300010&script=sci_arttext>. Acesso em: 29 jan. 2013.

Um exemplo seria o resgate de estudos dos conceitos de área e perímetro de polígonos, tais resgates servem de base para o estudo de conceitos relacionados a área de um círculo e comprimento da circunferência.

Para tal aprendizado, seria útil rever estudos dos conceitos de área e perímetro de polígonos, tais resgates serviriam de base para a compreensão dos novos conceitos.

A compreensão de conceitos abstratos torna-se mais evidente em função das relações entre conceitos, sendo um deles o conceito conhecido e o outro o conceito novo. A correlação entre as suas respectivas características realça os atributos do conceito novo, isto é, do novo objeto de estudo. Este fato economiza recorrer à memória de trabalho e proporciona melhor compreensão e apreensão do novo conceito.

O estudo acima citado mostrou que os professores americanos de Matemática usaram com frequência analogias, porém não o suficiente para ultrapassar os índices alcançados pelos seus pares de Hong Kong e Japão Richland, Zur e Holyoak (2007, p. 1129). Os professores asiáticos utilizam suportes cognitivos para enfatizar as analogias, tais como: gestos, imagens mentais e visuais. Desta forma observou-se os benefícios deste apoio cognitivo aos estudantes, para o alcance de melhores posições nos testes do TIMSS Internacional.

3.2 CUIDADOS NA ELABORAÇÃO DE ANALOGIAS

Na identificação de analogias um importante processo é o mapeamento (comparação, correspondência), que se constitui no alinhamento e posterior estabelecimento de inferências entre o conceito conhecido (fonte) e o conceito novo (alvo). Inferências são então estabelecidas provindas da estrutura fonte usadas para derivar novos conhecimentos sobre a estrutura alvo correspondente segundo Richland, Zur e Holyoak (2004, p. 41). A partir do nível de elaboração das analogias é possível o envolvimento e interpretação do estudante em relação ao conceito novo bem como incentivar a criação de novas analogias. Na pesquisa em questão, o envolvimento do estudante está de acordo com o modelo de aprendizado construtivista.

Quando estabelecidas claramente, as relações entre objeto fonte e objeto alvo auxiliam e potencializam o aprendizado. Segundo Richland, Holyoak e Stigler (2004), pesquisas sobre o raciocínio com analogia:

[...] delinearam as etapas cognitivas que ocorrem quando as pessoas raciocinam com base em comparações analógicas (por exemplo, Holyoak, Novick, e Metz, 1994) e forneceram conhecimentos fundamentais sobre como as características dos análogos origem e destino afetam o processamento do raciocínio .

Por exemplo, a pesquisa demonstrou que o nível de semelhança superficial entre objetos origem e destino (sobreposição das características entre objetos) afeta diretamente o nível de dificuldade de perceber e usar similaridade relacional (correspondências entre os objetos que desempenham papéis paralelos na origem e no destino, por exemplo, Gentner & Toupin, 1986; Holyoak, Junn, & Billman, 1984). Além disso, há evidências de que a comparação analógica pode resultar na formação de esquemas abstratos para representar a estrutura subjacente de objetos de origem e de destino, aumentando assim a capacidade de raciocínio para transferir a aprendizagem em diferentes contextos (por exemplo, Novick & Holyoak, 1991; Ross & Kennedy, 1990). Estes achados sugerem que o raciocínio analógico segue uma série de etapas específicas que podem levar a profunda transformação de novas informações, gerando a capacidade de aprender e transferir conhecimento aos alvos desconhecidos. No entanto, as metodologias experimentais típicas podem não fornecer informações generalizável sobre como analogia opera em contextos mais complexos ou sobre como analogias são utilizadas em interações cotidianas para ensinar e aprender.²² (RICHLAND; HOLYOAK; STIGLER, 2004, p. 38, tradução da autora)

Analogias são, segundo os autores, construções da similaridade entre estruturas relacionais dos objetos fonte e alvo.

Um dos resultados das pesquisas realizadas pelos autores acima citados demonstrou que o nível superficial de similaridade entre objetos fonte e alvo (sobreposição de características entre objetos) afeta a percepção e uso de semelhanças relacionais (correspondências entre objetos que desempenham papéis paralelos na origem e no destino).

Este fato evidencia que o conceito fonte não pode ter características sobrepostas as do objeto alvo, pois isto dificulta a percepção e compreensão do novo conceito. Assim sendo o professor deve elaborar analogias que contemplem conceitos, conhecidos da audiência, com características parcialmente similares em relação ao novo conceito. Este fato é importante

²² [...] have delineated the cognitive steps that occur when people reason on the basis of analogical comparisons (e.g., Holyoak, Novick, & Metz, 1994) and have provided fundamental insights into how features of the source and target analogs affect reasoners's processing.

For example, research has demonstrated that the level of *surface similarity* between source and target objects (salient feature overlap between objects) directly affects the difficulty level of noticing and using *relational similarity* (correspondences between objects that play parallel roles in the source and target; e.g., Gentner & Toupin, 1986; Holyoak, Junn, & Billman, 1984). In addition, there is evidence that analogical comparison can result in formation of abstract schemas to represent the underlying structure of source and target objects, thereby enhancing reasoners' capacity to transfer learning across contexts (e.g., Novick & Holyoak, 1991; Ross & Kennedy, 1990). These findings suggest that analogical reasoning follows a series of specific steps that can lead to deep processing of novel information, yielding the capacity to learn and transfer knowledge to unfamiliar targets. However, typical experimental methodologies may not provide generalizable information about how analogy operates in more complex contexts or about how analogies are used in everyday interactions to teach and learn. (RICHLAND; HOLYOAK; STIGLER, 2004, p. 38)

pois o objetivo é propiciar um novo conhecimento trazido pela compreensão de um novo objeto com algumas características similares – não todas – às do objeto conhecido.

O uso de alguns termos implica necessariamente na existência da analogia tais como: como se fosse, assim como, como se, parece com, imagine que, suponha que.

Para efeito da análise das analogias usadas nos três países, foram desenvolvidos códigos baseados na literatura e em observações em sala de aula. Os seis princípios codificados, para a análise realizada pelos autores, estão ordenados pelo grau de importância dos mesmos. Os três primeiros fatores a serem analisados referem-se ao procedimento dos professores que elaboraram os recursos fontes. O professor:

A – Usou um conceito conhecido para comparar com o conceito novo a ser ensinado

B – Apresentou o conceito conhecido visualmente

C – Manteve o conceito fonte visível aos aprendizes durante a comparação com o conceito alvo.

Outros princípios serviram para elucidar a comparação relacional utilizada. Professores:

D – Usaram pistas espaciais para realçar o alinhamento entre elementos correspondentes fonte e alvo

E – Usaram gestos manuais ou com o braço que sinalizassem uma comparação pretendida

F - Usaram imagens mentais ou visualizações

Os princípios de B a F podem ser vistos como casos especiais de princípios abrangentes – de pistas espaciais e visuais apropriadas – que auxiliam a compreensão de relações abstratas (RICHLAND; ZUR; HOLYOAK, 2007, p. 1129).

Dos seis princípios codificados, os exemplos elaborados pelos Estados Unidos alcançaram baixos resultados, indicando índices inferiores de aprendizado. Ainda segundo os mesmos autores, professores de Hong Kong e japoneses demonstram ser mais atentos para as necessidades de usos dos processos de comparações relacionais que os professores americanos. Este modo de ensino reflete o uso de estratégias que permitem rápida assimilação do conteúdo. (RICHLAND; ZUR; HOLYOAK, 2007).

As investigações de Richland, Holyoak e Stigler (2004) e Richland, Zur e Holyoak (2007) mostraram: interesse em investigar o aproveitamento em Matemática dos estudantes americanos; interesse em conhecer alternativas usadas por países com elevado aproveitamento em Matemática – Japão e Hong Kong - no processo de ensino e aprendizado da disciplina; formas do uso do raciocínio analógico para a melhoria da apreensão dos conteúdos

matemáticos; inclusão de fatores associados ao uso do pensamento analógico tais como: gestos, pistas espaciais, imagens mentais e visuais, como auxiliares do entendimento. A disseminação dos resultados de tais investigações exemplificam caminhos para a implementação do uso do raciocínio analógico nas aulas de Matemática.

Segundo Polya (1986) a analogia é um recurso inerente ao pensamento; analogamente sugere-se que o uso da analogia deve ser inerente ao processo de ensino e aprendizagem matemático, desta forma é possível que quando usado com propósitos pedagógicos atribuem novos significados aos objetos estudados, por iluminar os conhecimentos alvo.

O uso de ferramentas externas em auxílio às exposições em sala de aula, tais como materiais específicos, objetos de aprendizagem, recursos digitais é frequente. No entanto a analogia, por vezes, é esquecida em sua função na descoberta da solução de problemas. O pensamento analógico pode ser usado com outros recursos trazendo clareza ao conteúdo alvo, porém cuidados devem ser tomados para evitar enganos.

No exemplo a seguir, a analogia negativa entre a área do trapézio e o volume do tronco piramidal:

Figura 1 - Analogia entre a figura (i) bidimensional trapézio e a figura (ii) tridimensional tronco piramidal. A e B denotam o comprimento da base maior e comprimento da base menor na figura (i); e, respectivamente, a área da base maior e área da base menor na figura (ii).

Fonte: PEASE, A.; GUHE M.; SMAILL A. Analogy formulation and modification in geometry. In: **Proceedings of the Second International Conference on Analogy** (p. 358–364), 2009.

Segundo Pease, Guhe e Smaill (2009), a mais antiga analogia, referente a objetos geométricos de duas e três dimensões, foi elaborada pelos babilônios entre a área de um trapézio e o volume de um tronco piramidal. O trapézio pode ser visto como análogo ao tronco piramidal, obtendo-se as seguintes relações: a área do trapézio corresponde ao volume do tronco piramidal, o comprimento da base menor e o da base maior do trapézio corresponderia a área da base menor e a da base maior do tronco piramidal. De acordo com os autores, “os babilônios fizeram uma incorreta inferência analógica ao indicar que a fórmula

para o volume do tronco piramidal seria $h \cdot \frac{1}{2}(A + B)$, onde A e B seriam as áreas dos polígonos A e B.” De fato, esta inconsistência mostra a importância do rigor na elaboração das analogias. Temos como premissa que o raciocínio analógico cataliza a apreensão do conhecimento, porém as relações entre as estruturas dos objetos em correspondência é que irá conferir interiorização dos conteúdos e isto de fato acontecerá se os dados forem verdadeiros.

A correspondência entre elementos dos domínios matemáticos fonte e alvo propicia revisão de conhecimentos sobre os objetos fonte; percepção e interiorização das características estruturais dos objetos dos diferentes domínios e da relação que existe entre eles; permite ainda a percepção do encadeamento e em alguns casos a relação de dependência entre os elementos matemáticos. A transferência de significados é um dos principais procedimentos que faz do uso do raciocínio analógico relevante recurso ao entendimento de conteúdos matemáticos.

3.3 LINGUAGEM MATEMÁTICA

No contexto da Filosofia da Educação matemática, a concepção de linguagem matemática contempla manifestações textuais, orais, gestuais, pictóricas e recursos digitais, tendo a analogia como recurso relevante junto a estas manifestações.

Segundo Bicudo e Garnica (2002, p. 52) “o texto de Matemática é um locus privilegiado no qual a linguagem Matemática – formal e classicamente – manifesta-se”. A Lógica Matemática, de acordo com os autores, é a gramática própria deste texto que tende a tornar implícitos seus argumentos.

Este é o ponto crucial que torna essencial o desvelamento dos conteúdos matemáticos nos livros didáticos e recursos digitais de toda ordem.

É possível observar em grande parte dos livros didáticos, a presença de uma linguagem que apresenta descrições conceituais rigorosas, sem clareza, entretanto para a maioria dos discentes. Acrescenta-se a isto a falta de exemplos esclarecedores e contextualizados. Desta feita a analogia poderia ser um auxiliar tanto para a compreensão dos conteúdos dos livros bem como para a compreensão das exposições em aulas ancoradas nestes textos.

David Pimm (1981) ressalta que pesquisas importantes na área de linguagem e Matemática têm sido feitas sobre a legibilidade de textos matemáticos ou dificuldades de problemas de aritmética verbal.

3.4 SIGNIFICADO DOS OBJETOS MATEMÁTICOS E A ANALOGIA

A preocupação em maximizar a compreensão dos conceitos matemáticos foi a responsável pela busca do desvelamento dos signos e do discurso matemático impulsionado por esta pesquisa, levando-a a enveredar no campo da linguística apenas para explicitar os conceitos de significação e sentido implicados na temática deste trabalho. Desta forma buscou-se em Frege (1892), Paul Ricoeur (1976), Bunge (2002), Japiassú e Marcondes (1996), Azevedo (1983), Bicudo e Garnica (2002), Saussure (1971), Bakhtin²³(1990) apud Pires e Dias (2009), e Benveniste²⁴(1989) apud Pires e Dias (2009) os fundamentos epistemológicos sobre a significação e sentido para ressignificá-los no contexto da compreensão dos objetos matemáticos.

Quando o objetivo é a explicitação e entendimento dos conceitos matemáticos, na esfera educacional, torna-se importante voltar os interesses para a interpretação da linguagem matemática bem como para suas formas discursivas, mesmo que em linhas gerais. Bicudo e Garnica (2002) apresentam um estudo que ressalta a relevância da investigação do discurso desta área do conhecimento, no contexto científico e pedagógico.

No âmbito do discurso Ricoeur (1976) observa que:

No entanto um ato do discurso não é simplesmente transitório e evanescente. Pode identificar-se e reidentificar-se como o mesmo, de maneira que o possamos dizer novamente ou por outras palavras. Podemos até dizê-lo noutra língua ou traduzi-lo de uma língua para outra. Ao longo de todas as transformações preserva uma identidade própria, que pode chamar-se o conteúdo proposicional, o “dito enquanto tal”. (RICOEUR, 1976, p. 21)

O autor ressalta a importância do ato do discurso: “[...] não é transitório e simplesmente evanescente. [...]” posto que, neste discurso deve-se apreender o essencial, o que faz sentido e tem significado para a compreensão/apreensão do conceito apresentado. O fato de podermos apresentar tal ato de formas diversas desde que a essência seja preservada,

²³ BAKHTIN, Mikhail. **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. 5. ed. São Paulo: HUCITEC, 1990.

²⁴ BENVENISTE, Émile. **Problemas de Linguística Geral II**. Campinas: Pontes, 1989.

demonstra que o conceito foi apreendido, que pode-se traçar paralelos relacionados a conceitos semelhantes e anteriores. Este fato promove atribuição de sentido e significado ao objeto matemático; demonstra a identificação de padrões que auxiliam na desmitificação de obstáculos didáticos possíveis. Tal identificação não basta, visto que, ao padrão identificado, foi acrescida certa complexidade, inerente ao novo conceito. Relevante é pois, identificar os acréscimos, e qual o objetivo deste acréscimo, seu significado e sentido para o contexto do novo conceito.

As peculiaridades do universo matemático, em especial no que se refere ao ensino básico, solicita do professor, aprofundamentos para aperfeiçoamento das explicações e exposições.

Há que se estabelecer o sentido e significado às suas argumentações de forma a tornarem legítimos os aprendizados. São oportunas as observações de Garnica e Bicudo (2002):

Por outro lado, vemos que a manifestação do discurso pedagógico da Matemática dá-se nas inúmeras e divergentes situações de ensino e aprendizagem, dentre as quais a prática educativa da escolaridade formal tem sido homogênea – e talvez, equivocadamente – focada nos trabalhos dos quais temos tido referência. Mesmo que aqui estejamos - por agora - focando a linguagem matemática na escola, deve-se reconhecer a pluralidade das formas de ensino e aprendizado de Matemática, além das que ocorrem intramuros na instituição escolar. Mesmo a pesquisa em Educação Matemática tem incorrido neste equívoco de não considerar, em suas abordagens, formas alternativas de ação, culturalmente legítimas e essenciais para o entendimento dos modos de argumentação acerca dos objetos matemáticos. (GARNICA; BICUDO, 2002, p. 45)

Os autores destacam a importância de opções e práticas inovadoras para propiciar um aprendizado eficaz em Matemática que contribua para interpretações aprofundadas e relacionadas à conhecimentos anteriores.

A atribuição de significado e de sentido estão conectadas ao fenômeno da linguagem. De acordo com Ricoeur (1976):

[...] A linguagem não é um mundo próprio. Nem sequer é um mundo. Mas, porque estamos no mundo, porque somos afetados por situações, temos algo a dizer, temos a experiência para trazer à linguagem. [...] Pressupomos que algo deve existir para que algo se possa identificar. A postulação da existência como base da identificação é o que Frege, em última análise, quis dizer quando afirmou que não nos satisfazemos apenas com o sentido, mas pressupomos uma referência. (RICOEUR, 1976, p. 32)

Ao deparar-se com o problema da identidade Frege (2012, p. 61) concentrou-se na diferenciação entre sentido e referência. Assim sendo, indaga se a identificação “seria uma relação entre objetos ou entre nomes ou sinais dos objetos.” Embora esta questão tenha surgido no âmbito da filosofia da Matemática, a interpretação dos termos é oportuna.

Segundo Frege (1962),

O sentido de um nome próprio é entendido por todos que estejam suficientemente familiarizados com a linguagem ou com a totalidade de designações a que ele pertence; isto, porém, elucida a referência, caso ele tenha uma, mas de uma maneira sempre parcial. (FREGE, 1962, p. 63)

Para o autor,

A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a representação que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é tão subjetivo quanto a representação, mas que também não é o próprio objeto. (FREGE, 1962, p. 65)

Frege (1962) exemplifica:

Sejam a, b e c as linhas que ligam os vértices de um triângulo com os pontos médios dos lados opostos. O ponto de interseção de a e b é, pois, o mesmo que o ponto de interseção de b e c. Temos, assim, diferentes designações para o mesmo ponto, e estes nomes (“ponto de interseção de a e b” e “ponto de interseção de b e c”) indicam, simultaneamente, o modo de apresentação e, em consequência, a sentença contém um conhecimento real. (FREGE, 1962, p. 62)

Assim, segundo o exemplo, as expressões (“ponto de interseção de a e b” e “ponto de interseção de b e c”) possuem a mesma referência, porém não o mesmo sentido.

Nesta vertente, para Ricoeur (1976, p. 31) o “quê” do discurso é o seu “sentido”, o “acerca de quê” é a sua referência, que de acordo com nossa ótica, neste caso, pode ser considerada como o seu significado. Segundo o autor com a frase a linguagem se dirige para além dela. “Enquanto o sentido é imanente ao discurso, e objetivo no sentido de ideal, a referência exprime o movimento em que a linguagem se transcende a si mesma.”

Não se trata aqui de aprofundar as diferenças entre referência e sentido, mas sim de fazer uma primeira demarcação dos termos significado e referência a serviço da presente proposta.

Na ótica de Bicudo e Garnica (2002), a atribuição de significados é elaboração do intérprete; a significação é atribuída ao texto pelo leitor.

Quanto à formação do professor de Matemática, Bicudo e Garnica (2002) observam:

O trabalho com textos em cursos de formação de professores inclui possibilidades de outra natureza. Além do tratamento ao texto para que os conceitos sejam compreendidos, o futuro professor precisa munir-se de argumentos para que o estudo desses textos seja significativo para si enquanto aluno e como docente: é preciso conhecer e reconhecer os meandros que cercam o texto matemático, as teias de sua produção, a racionalidade de sua gramática, as exigências da comunidade matemática e o modo pelo qual as exigências dessa comunidade insinuam-se nos textos didáticos. (BICUDO; GARNICA, 2002, p. 56)

Desta forma os autores observam a necessidade do entendimento que permita – aos professores - criticidade aos objetos matemáticos de forma que as ações pedagógicas possam estar imbuídas de clareza e significado e que estes aspectos sejam interiorizados pelos estudantes.

A semântica, “a ciência da frase” de acordo com Ricoeur (1976, p. 19), será usada na tentativa de descortinar a compreensão dos objetos matemáticos sob a ótica da significação e sentido.

Nesta esteira pode-se considerar fundamentados em Ricoeur (1976, p. 21), que as exposições matemáticas seriam “atos de discurso”- o discurso matemático – cujas nuances “Pode identificar-se e reidentificar-se como o mesmo, de maneira que o possamos dizer novamente ou por outras palavras” (Ricoeur, 1976, p.21) e representações.

A discussão sobre o discurso matemático é relevante, pois quando se expõe um conceito em sala de aula utilizando outras representações tais como uma animação, um vídeo ou um software, usando a fala para esclarecimentos pontuais, simultaneamente, o que acontece é a transposição de conceitos abstratos em “formas concretas” e adequadas ao entendimento. Neste momento o discurso científico transforma-se em discurso didático, e assim, segundo Ricoeur (1976):

[...] a noção de fala, enquanto acontecimento, fornece a chave para a transição de uma linguística do código para uma linguística da mensagem. Recorda-nos que o discurso se realiza temporalmente e num momento presente, ao passo que o sistema da língua é virtual e fora do tempo. Mas, este traço aparece somente no movimento de atualização da língua para o discurso. (RICOEUR, 1976, p. 23)

Enfatiza-se aqui a importância e cuidado ao realizar esta transição, pois dela decorre a compreensão em maior ou menor grau pelos estudantes e ouvintes.

Neste momento o uso do recurso heurístico torna-se relevante. Conhecer a audiência, o público alvo, sua cultura geral e valores, seu conhecimento prévio, torna-se imprescindível para o sucesso do uso de “figuras de linguagem” que possibilitem o entendimento de tais conceitos abstratos. Nesta hora a analogia é a sugestão proposta, a ser aplicada nesta investigação como recurso auxiliar.

Aqui se torna importante definir as funções de identificação e predicação. Como identificação (singular ou sujeito lógico), Ricoeur (1976, p. 22) sugere a nomeação de “um só e apenas um só elemento.” – por elemento entende-se um conceito matemático. E como predicação “uma caracterização universal do sujeito.”

Desta forma o diálogo entre professores e estudantes acontece de forma a interpretar sem equívocos os conceitos e suas respectivas características. Por ora torna-se mister apresentar meios de descortinar, para as audiências, os significados ocultos, por meio de exposições que mostrem a realidade implícita nos textos matemáticos.

Com estas ações pretende-se ressignificar o uso da analogia na atribuição de sentido e significado aos conteúdos dos programas curriculares da área de Matemática.

Antes, porém o conceito de significação, relevante para esta pesquisa, está pautado nos escritos de Frege (1962) e Ricoeur (1976). “Significar é o que o falante quer dizer, isto é, o que intenta dizer e o que a frase denota, isto é, o que a conjunção entre a função de identificação e a função predicativa produz”, segundo Ricoeur (1976, p. 22).

Segundo Bicudo e Garnica (2002):

A atribuição de significados, porém, é elaboração do intérprete. Na fusão dos horizontes de compreensão do professor e dos alunos o texto descortina sua mensagem de forma a inserir-se em ambos os horizontes, cada qual a seu modo. (BICUDO; GARNICA, 2002, p. 54)

De fato, as apresentações dos conteúdos passa, a princípio, pela interpretação do professor. Este tem como responsabilidade “relacionar” o conceito com o real e com as realidades da audiência que por sua vez deve estar atenta as relações de definições expostas.

O sucesso desta empreitada se dá quando os horizontes visualizados são comuns, este será o local de entendimento compreensão e apreensão dos conceitos apresentados.

Abdounur (2003) aprofunda a investigação sobre a significação apresentando reflexões que indicam de forma pragmática

[...] a maneira concebida a dinâmica de participação do pensamento analógico no enredamento e (re)construção de significados. [...] A (re)construção e enredamento multidirecional de um dado significado consistiria em sua revisualização a partir de diferentes pontos, em seu entretecimento com outros significados, desvendando suas associações táticas e desterritorializando-o de suas regiões mais denotativas. (ABDOUNUR, 2003, p.145-146)

Dos escritos de Ricoeur (1976, p. 27) emana um ponto de conexão entre a área das ciências exatas e a das ciências humanas. Este ponto é a comunicação. Isto porque em sala de aula, por exemplo, o agente ou ator é o professor na figura do locutor enquanto que os estudantes configuram-se na figura de ouvintes, portanto a existência destes atores estabelece “a linguagem da comunicação”.

Interessante notar que além / apesar de a experiência individual não poder tornar-se a experiência do outro, por meio do diálogo, o que “se transfere de uma esfera de vida para outra” é a significação, isto é, o que se transfere neste processo é a significação, de acordo com Ricoeur (1976, p. 27).

Assim sendo a comunicação se estabelece; o diálogo torna-se profícuo: “É em relação ao evento dialógico que a compreensão como significação é homogênea.” (Ricoeur, 1976, p. 28).

Sabe-se das dificuldades de entendimento que ocorrem nas exposições em sala de aula, em todos os níveis e especialmente no ensino fundamental e médio.

Para sanar ou tentar sanar estas dificuldades, tentar transcender estes obstáculos pedagógicos, pesquisas em diversos países, tanto no ocidente quanto no oriente, sinalizam e oferecem alternativas.

O caráter subjetivo da experiência é mantido porém “o seu sentido, a sua significação torna-se pública” (Ricoeur, 1976, p. 28).

As representações sejam gramaticais, pictórias, gestuais, no formato de animações ou de recursos digitais e mesmo as formas concretas ou ainda as especializações servem como pontes elucidativas para clarear “dificuldades de entendimento” e obstáculos didáticos.

Estendendo ao discurso matemático as considerações de Ricoeur (1976, p. 28), ao explicitar os enunciados matemáticos está-se “atribuindo significados”, isto é, definindo conteúdos, suas representações e suas características principais de forma a relacionar com o real.

No que se refere ao diálogo, isto é, as aulas expositivas, cuidados devem ser tomados para a sedimentação rigorosa dos conceitos de forma a evitar interpretações equivocadas (equívocos de interpretação), pois conforme Ricoeur (1976):

As nossas palavras na sua maioria são polissêmicas; [...] não filtrada das palavras. E a função do diálogo é iniciar esta função de filtragem do contexto. O contextual é o diálogo. É neste sentido preciso que o papel [...] comunicabilidade da experiência. (RICOEUR, 1976, p. 28)

O entendimento do professor exterioriza-se de forma a clarificar os diversos conceitos, suas respectivas características e representações, ou seja, atribuir ao conteúdo significado e sentido.

Do ponto de vista educacional tais ideias são desafios aos docentes da área de Matemática de forma que o uso da analogia no incentivo do pensar analogicamente tornou-se neste texto ponto central, fundamentado principalmente nas investigações de Ricoeur sobre a linguagem e o discurso, para que tal uso possa auxiliar na atribuição de significado aos objetos da Matemática.

Os conteúdos ministrados nas aulas de Matemática básica são as pontas minúsculas (área exposta) de um iceberg em que a compreensão da imensa área submersa depende da compreensão e entendimento das áreas expostas. Assim sendo, pode-se pensar a construção e atribuição de significados como sendo as pontas do iceberg, essenciais para a descoberta de novos conhecimentos, resolução de novos problemas e resolução de problemas antigos, reconhecimento de padrões, descobertas científicas, criatividade dentre outros.

3.5 SIMILARIDADE E ANALOGIA

A inclusão deste tópico se deve a importância da similaridade e analogia na cognição humana e na atribuição de significados, em particular, na educação matemática. Segundo Gentner “É amplamente aceito que a similaridade é a chave determinante da transferência. [...] Experiências mentais estão repletas de momentos em que a situação atual nos lembra alguma experiência arquivada na memória” (1989, p. 199). Investigações da autora (Gentner et al., 2012) indicam que a similaridade implica em processos tais como: categorização, recuperação de memória, resolução de problemas e tomada de decisão. Destaca ainda que “Distinguir diferentes tipos de similaridade é essencial para entender a aprendizagem por analogia e similaridade” (Gentner, 1989, p. 206). A similaridade pressupõe considerar aspectos relevantes para a atribuição de significados, logo deve ser diferenciada da similaridade tautológica, neste sentido Hampton destaca:

[...] similaridade tautológica não explica por completo como esta categoria é construída. [...] Categorias deste tipo são claramente não baseadas em similaridade, exceto em um sentido tautológico. A similaridade deve significar mais do que simples identidade em uma dimensão particular ou combinação de dimensões.²⁵ (HAMPTON, 2000, p. 1, tradução da autora)

Trabalhar com similaridades não implica em mapear atributos óbvios relacionados aos conceitos correlatos dos objetos fonte e alvo. É mais que isso, no sentido de que é necessário incentivar a percepção do modo de construção das determinadas categorias de objetos e o entendimento de seus postulados.

Uma das considerações de Ricoeur (1982) quanto a inclusão de uma nova pertinência e de uma nova congruência, colocando em destaque a figura da semelhança para que o enunciado faça sentido, ressoa no universo da atribuição de significados quando do estudo de novos conceitos matemáticos, por exemplo, nas séries finais do ensino fundamental II. Nesta esteira não é indicado usar a semelhança de forma mecânica, mas considerar os protótipos dos conceitos fontes nos quais se pretende focar a similaridade quando em relação aos objetos alvo. E daí fazer emergir uma nova entidade no âmbito da categorização, ou resolução de um

²⁵ [...] tautological similarity does not go far in explaining how this category is constructed. [...] Categories of this kind are clearly not based on similarity, except in a tautological sense. Similarity must mean more than simple identity on a particular dimension or combination of dimensions. (HAMPTON, 2000, p. 1)

problema, ou estudo de um novo conceito, dentre outros. Ricoeur aprofundou estudos que destacam a importância da similaridade no âmbito da semântica; com a devida transposição seus pressupostos podem ser empregados na área da educação Matemática:

[...] Coisas e ideias, que estavam afastadas, surgem de súbito próximas. Em última instância, a semelhança é apenas essa aproximação que revela uma afinidade genérica entre ideias, antes heterogêneas. O que Aristóteles chamava a *epiphora* da metáfora, ou dito de outra maneira, a própria transferência, não é mais do que esse deslocamento, essa alteração na distância lógica, do longínquo ao próximo. (RICOEUR, 1982, p. 5)

Supõe-se que este processo alcance resultados efetivos caso as dimensões cognitivo/afetivas sejam contempladas no processo de ensino e aprendizagem, conforme reflexões anteriores.

A interdependência inerente aos conceitos matemáticos, muitas vezes não percebida de imediato pelos estudantes, pode ser ressaltada pelos docentes, com o uso da similaridade, de forma a auxiliar na compreensão e atribuição de significados contribuindo para o uso da analogia. Acredita-se que ao aproximar criteriosamente tópicos matemáticos de mesma categoria promove-se a motivação e interesse do estudante, levando-o a investigar tais conceitos com olhar atento, possibilitando-se maior compreensão.

A categorização é um importante processo proveniente do uso da similaridade, desta forma destacam-se estudos de Ricoeur (1982), Rips (1989) e Hampton (2000). Ricoeur (1982, p. 5) evoca o *insight* (compreensão intuitiva) como um catalizador da aproximação “da distância no espaço lógico” entre “campos semânticos”. Suas considerações mostram que:

Esta visão da semelhança é ao mesmo tempo *ver* e *pensar*. É *pensar*, na medida em que ela efectua uma reestruturação dos campos semânticos, uma nova categorização de aquilo que tinha já sido categorizado. Mas este *pensar* é um *ver*, na medida em que a apercepção consiste numa compreensão instantânea das possibilidades combinatórias oferecidas, por exemplo, por uma relação de proporcionalidade (veja-se o exemplo da metáfora proporcional: o copo está para Dionísio assim como o escudo está para Ares; metaforicamente, digo: o escudo de Dionísio, o copo de Ares). Podemos chamar *assimilação* predicativa a esta produção de semelhança por aproximação lógica. Mas falhamos a sua significação, se a interpretamos em função da velha associação por semelhança. Uma atracção mecânica entre partículas mentais é assim substituída a uma operação homogênea à linguagem e ao seu acto nuclear, o acto predicativo. A assimilação consiste precisamente em *tornar* semelhante – em *assimilar* – logo, em tornar semanticamente próximos os termos que a enunciação metafórica coloca em conjunto. (RICOEUR, 1982, p. 5)

A similaridade propicia um mapeamento dos objetos de cada conceito envolvido de forma a estabelecer não apenas uma relação mecânica, mas possibilita resgatar definições fundamentais que propiciam aprofundamentos e maior familiaridade com tais objetos em estudo. Este fato possibilita a sedimentação dos conceitos na memória de longo prazo. Ainda

aqui importa uma aproximação com a teoria da metáfora (Ricoeur, 2005, p. 299). Segundo Aristóteles (apud Ricoeur, 2005, p. 299), epífora “é a transposição, a transferência enquanto tal, isto é, o processo unitivo, o tipo de assimilação que se produz entre ideias estranhas, estranhas porque distanciadas. Esse processo unitivo resulta de uma apercepção – de um *insight* – que é da ordem do ver.” Aristóteles (apud Ricoeur, 2005, p. 299) indicou que “Bem metaforizar é ver – contemplar, lançar um golpe de vista para – o semelhante”. Para Ricoeur (2005, p. 299) “A epífora é este golpe de vista e esse golpe de gênio: o não-ensinável e o não adquirível”.

A aproximação entre os dois objetos a serem estudados, quais sejam: fonte e alvo, no tocante a similaridade entre ambos, traz a tona novos conhecimentos, visto que se descobrem outras categorias dentre as existentes, descortinando ampla visão e significação. Destaca-se neste processo a identificação das diferenças estruturais e conceituais, reforçando, porém aspectos que despertarão a compreensão do objeto estudado de forma efetiva e duradoura, servindo de alicerce para novos estudos e investigações. De acordo com Ricoeur

Relacionamos então o ganho em significação a uma variação de “distância” entre campos semânticos, isto é, a uma assimilação predicativa. Ora, ao dizer que isto é (como) aquilo – quer o *como* seja “marcado” ou não –, a assimilação não atinge o nível da identidade do sentido. O “semelhante” permanece imperfeito em relação ao “mesmo” na, e apesar da, “diferença”. (RICOEUR, 2005, p. 455)

Como dissemos anteriormente, retomando os pressupostos de Ricoeur (1982, p. 5) emprestamos o termo “assimilação predicativa” com o mesmo objetivo de “produzir semelhanças por aproximação lógica” entre objetos matemáticos visando um “saber pelo conceito” (Ricoeur, 2005, p. 455). Destaca-se com isto o papel da similaridade no processo de categorização dos conceitos que permitirão efetivar o uso do recurso da analogia. Retomamos que o “saber pelo conceito” é atingido após o mapeamento entre o conceito novo e o antigo da mesma categoria levando em consideração suas definições e postulados.

No contexto do ensino e aprendizagem em Matemática vinculados ao uso da analogia na atribuição de sentido, este processo possibilita a construção de “novas inferências de descobertas de abstrações comuns” Gentner (1989, p. 199). A princípio é necessário classificar os objetos matemáticos em categorias e para isto a similaridade é a ferramenta ideal. De acordo com Rips

O objeto é um membro da categoria, se é suficientemente semelhantes aos membros conhecidos da categoria. Para colocar isso em termos mais cognitivos, se você quer saber se um objeto é um membro da categoria, comece com uma representação do objeto e uma representação potencial da categoria. Em seguida, determine a semelhança da representação do objeto em relação a representação da categoria. Se a

similaridade for suficientemente elevada, então o objeto pertence à categoria; caso contrário, ele não pertence.²⁶ (RIPS, 1989, p. 21, tradução da autora)

Destaca-se que, segundo Gentner (1989, p. 206) “Em analogia, apenas predicados relacionais são mapeados. Na similaridade literal, ambos predicados relacionais e atributos de objetos são mapeados.”²⁷ (tradução da autora)

Na perspectiva do uso de processos inovadores de ensino e aprendizagem sugere-se que o estudante seja motivado a entender detalhes da estrutura dos conceitos estudados e para isto é importante que as correspondências entre os atributos dos objetos em estudo sejam minuciosamente analisadas, façam sentido para o aprendizado e estejam naturalmente contextualizadas. Para que o ensino torne-se motivador é relevante desenvolver projetos matemáticos com a inclusão de recursos pedagógicos diversos de forma a possibilitar a realização das referidas correspondências e mapeamentos e posterior explicitação de sua relação com o real.

As investigações de Gentner (1989) apontam que a sistematização pode ser oportuna quando se usa a analogia:

A aprendizagem analógica espontânea pode ser decomposta em subprocessos: (a) acessar o sistema base; (b) realizar o mapeamento entre a fonte e o alvo; (c) avaliar a correspondência; (d) armazenar inferências no alvo; e, por vezes, (e) extrair os pontos comuns (Clement, 1981, 1983; Gentner, 1987; Gentner & Landers, 1985; Hall, no prelo; Kedar-Cabelli, 1988).²⁸ (GENTNER, 1989, p. 200, tradução da autora)

Tanto para o aprendizado com a analogia como para com a similaridade a sequência apresentada acima pode ser usada com ou sem variações.

O uso da similaridade na análise dos conceitos matemáticos pode ser acompanhado de recursos que emocionalmente façam sentido para o estudante de forma a tornar inesquecível e relevante seu significado.

²⁶ The object is a member of the category if its is sufficiently similar to known category members. To put this in more cognitive terms, if you want to know whether an object is a category member, start with a representation of the object and a representation of the potential category. Then determine the similarity of the object representation to the category representation. If this similarity value is high enough, then the object belongs to the category; otherwise, it does not. (RIPS, 1989, p. 21)

²⁷ In analogy, only relational predicates are mapped. In literal similarity, both relational predicates and object attributes are mapped. Gentner (1989, p. 206)

²⁸ Spontaneous analogical learning can be decomposed into subprocesses of (a) accessing the base system; (b) performing the mapping between base and target; (c) evaluating the match; (d) storing inferences in the target; and sometimes, (e) extracting the commonalities (Clement, 1981, 1983; Gentner, 1987; Gentner & Landers, 1985; Hall, in press; Kedar-Cabelli, 1988). (GENTNER, 1989, p. 200)

O mapeamento do subprocesso citado acima é essencial e relevante no contexto do raciocínio analógico e segundo Gentner (1989):

A ideia central da estrutura de mapeamento é que a analogia é um mapeamento do conhecimento de um domínio (fonte) para outro (alvo), e transmite que um sistema de relações estabelecidas entre os objetos do fonte também é estabelecido entre os objetos do alvo.²⁹ (GENTNER, 1989, p. 201, tradução da autora)

Tal processo propicia a transferência de conhecimentos entre os domínios fonte e alvo além de possibilitar a revisão da estrutura do objeto fonte importante para o entendimento da estrutura do objeto alvo. Nesta esteira torna-se oportuno apresentar exemplos do uso da analogia destacando as relações estruturais relevantes para a atribuição de significados aos objetos alvo.

O estudo do tronco da pirâmide, por exemplo, propicia a utilização da analogia em diversas fases do processo. Será apresentado num dos próximos tópicos. Usa-se três relações da proporção e tudo o que for estudado para o tronco da pirâmide serve também para o tronco do cone. Volume é a área da base (relembrar a área da base) vezes a altura dividido por 3. Na semelhança de triângulos tem-se a relação entre lados e Alturas. Área da base da grande está para a área da pequena assim como a altura da grande está para a altura da pequena, (ao quadrado). Volume da grande está para o volume da pequena assim como a altura da grande está para a altura da pequena, (ao cubo).

O propósito no momento não é resolver exercícios e sim apresentar exemplos de possíveis mapeamentos ou correspondências das relações estruturais no tronco da pirâmide. Este processo também envolve relações de semelhança entre os triângulos, valendo-se da proporção (relação entre razões), conforme o uso clássico do conceito de analogia. Ao codificar alguns experimentos ligados à analogia, as investigações de Richland, Holyoak, Stigler (2004, p. 46) definiram aqueles que indicam conceitos matemáticos e procedimentos específicos denominando-os de “conceitos e procedimentos”; apresentaram o seguinte exemplo: “Vocês se lembram como encontramos o perímetro e área dos polígonos, na semana passada? Desta vez é o mesmo conceito, mas usaremos fórmulas similares para resolver as circunferências e área do círculo.”³⁰ (RICHLAND; HOLYOAK; STIGLER, 2004, p. 46,

²⁹ The central idea in structure-mapping is that an analogy is a mapping of knowledge from one domain (the base) into another (the target), which conveys that a system of relations that holds among the base objects also holds among the target objects. (GENTNER, 1989, p. 201)

³⁰ Do you remember how we found the perimeter and area of polygons last week? This time it is the same concept but we are going to use similar formulas to solve for circumference and area of a circle” (RICHLAND; HOLYOAK; STIGLER, 2004, p. 46).

tradução da autora). De forma análoga, preparou-se a tabela abaixo que destaca conceitos fontes e alvos ligados ao estudo da pirâmide como exemplo de mapeamento a ser realizado quando do uso da analogia.

Os conceitos e procedimentos relacionados ao tronco da pirâmide (conceito alvo), triângulo equilátero e triângulo retângulo (conceito fonte) podem ser trabalhados usando conceitos previamente estudados conforme tabela abaixo.

Tabela 1 – Analogia entre o cálculo do volume do tronco do cone e o cálculo do volume do tronco de pirâmide

Analogia	Conceito Fonte	Conceito Alvo
Aplica-se o Teorema de Pitágoras para o cálculo da altura da pirâmide de forma análoga ao processo de determinação da altura no triângulo retângulo	Triângulo retângulo	Altura da pirâmide
Para relacionar a secção transversal e a base da pirâmide usa-se as relações de semelhança de triângulos.	Relações de semelhança de um triângulo $\frac{L}{l} = \frac{H}{h}; \frac{A_B}{A_b} = \frac{H^2}{h^2}; \frac{V_B}{V_b} = \frac{H^3}{h^3}$	Tronco da pirâmide: Relação entre a secção transversal da pirâmide e a base da pirâmide
O cálculo da apótema do tronco depende do cálculo da altura do trapézio.	Altura do trapézio	Apótema do tronco do tetraedro
O cálculo do volume do tronco do cone é análogo ao cálculo do volume do tronco de pirâmide. Este caso está em conformidade às considerações de Polya (1986, p. 35), “Há uma correspondência unívoca entre os elementos dos dois sistemas S e S’, conservando certas relações.” Observa-se que aqui pode-se considerar que “S” corresponde ao volume do tronco do cone e “S’” corresponde ao volume do tronco da pirâmide.	Volume do tronco da pirâmide $Vt = \frac{ht}{3} \cdot (AB + \sqrt{AB \cdot Ab} + Ab)$ Onde: ht – Altura do tronco AB – Área da base maior Ab – Área da base menor	Volume do tronco do cone $Vt = \frac{\pi \cdot ht}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$ Onde: ht – Altura do tronco R – Raio maior r – Raio menor

Figura 1 – Tronco da pirâmide e tronco do cone

Fonte das imagens: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Tronco_\(geometria\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tronco_(geometria))>

Segue um exemplo do uso da analogia destacando-se procedimentos similares mais simples, aplicados a domínios diferentes: Estudar o sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é análogo a estudar o sinal da função afim $f(x) = x - 3$.

Tem-se que em $f(x) = x - 3$, $a > 0$, logo a função é crescente, cuja raiz é $x = 3$.

Sinal
$y > 0 \Rightarrow x > 3$
$y < 0 \Rightarrow x < 3$

Analogamente tem-se que $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $a > 0$, logo a concavidade é voltada para cima, e suas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2$
$y < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$

O coeficiente angular da função afim é positiva, o que significa que a mesma é crescente. O coeficiente de x^2 também é positivo significando que a função tem a concavidade voltada para cima. Os elementos chave a ser calculados quando do estudo dos sinais são as raízes das equações. Em primeiro lugar, calcula-se a raiz da função afim (fonte); elemento essencial para iniciar o processo de mapeamento. Em seguida determina-se o intervalo para o qual a função é positiva e o intervalo onde a função é negativa. Repete-se o mesmo procedimento para a função quadrática. Assim, verificou que a função $f(x) = x - 3$ é positiva para valores de x maiores que 3 e negativa para valores de x menores que 3.

Analogamente, verifica-se que a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é positiva para valores de x menores que 1 e para valores de x maiores que 2 será negativa para valores de x compreendidos no intervalo entre 1 e 2. O procedimento para a determinação de tais intervalos são análogos diferindo em detalhes concernentes aos atributos da função quadrática. Desta forma, tendo como procedimento inicial resolver o problema primeiramente para o objeto fonte usando conhecimentos prévios similares, auxilia o entendimento do objeto alvo. Este procedimento mostra alguns aspectos do objeto alvo no que diz respeito ao estudo de sinais: 1. Facilidade de resolução após relembrar o processo análogo mais simples; 2. Propicia a comparação entre os processos; 3. O coeficiente angular da função afim e o coeficiente do termo em x da função quadrática são os primeiros a ser analisado nos dois casos; 4. Na função quadrática é possível determinar até três intervalos com sinais diferentes, ao passo que nas funções afins são determinados dois intervalos.

Neste caso, os conceitos e procedimentos foram bastante semelhantes, indicando uma forte analogia, e para desenvolver o processo basta recorrer aos conhecimentos prévios

relacionados a estudos de sinais das função afim. Ao destacar este fato, verifica-se que uma das estratégia de uso do raciocínio analógico é apresentar novos conceitos (alvo), relaciona-los (corresponder, mapear) à conceitos familiares e similares e possibilitar o reconhecimento e assimilação do conceito alvo, gerando assim um novo conhecimento.

Este pode ser um procedimento recorrente para a prática docente, de forma a sedimentar, aperfeiçoar e trazer novos recursos na apresentação de conteúdos e propiciar assimilação à audiência bem como observar o nível dos conhecimentos prévios dos estudantes. Junta-se a este fato a intenção de fazer uso de aspectos afetivos ao processo de ensino e aprendizagem conforme será apresentado a seguir.

O próximo exemplo destaca uma vídeo aula ministrada por Porto (2013), que utiliza-se da analogia, de forma implícita, como recurso para apresentação dos conteúdos e cujo discurso evidencia a necessidade de resgate de conhecimentos prévios. Porto (2013) discorre sobre a Geometria Espacial: Volume do tronco da pirâmide e do cone.

Figura 2 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Prof. Augusto Porto: Vou mostrar para vocês que para resolver este tipo de questão nós podemos usar três relações da proporção, lá da Matemática básica, que foram trabalhadas em aula.

Prof. Augusto Porto: Então, tem que tomar muito cuidado, porque tudo que eu falar do tronco da pirâmide serve também para o tronco do cone. (PORTO, 2013)

Figura 3 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Prof. Augusto Porto: Outra informação que irá tornar muito rápido o cálculo do tronco é perceber que a altura, se traçarmos a apótema da pirâmide, ou altura da face, ela forma dois triângulos retângulos e obrigatoriamente estes triângulos são semelhantes.(PORTO, 2013)

Figura 4 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Resgate da importância da semelhança de triângulos para o estudo do tronco de pirâmide.

Seguem transcrições feitas em relação às proporções apresentadas na vídeo aula; neste caso, usa-se o conceito tradicional da analogia proporcional:

Prof. Augusto Porto: [...] Relação entre lados e alturas. Lembra que o lado da grande (pirâmide) está para o lado da pequena (pirâmide) assim como a altura da grande está para a altura da pequena.

Prof. Augusto Porto: [...] Eu sei que a área da base da grande está para a área da base da pequena, assim como a altura da grande está para a altura da pequena. Altura ao quadrado [...].

Prof. Augusto Porto: [...] E a terceira e ultima informação que é muito importante nesta relação [...] Eu sei que o volume da grande está para o volume da pequena, - o volume da pirâmide grande para o volume da pirâmide pequena -, assim como a altura da grande está para a altura da pequena. Altura ao cubo [...].

Prof. Augusto Porto: Isto vai servir para raios, [...] para perímetros ... (PORTO, 2013)

No caso acima, mesmo que as correspondências / mapeamento estejam dentro de um mesmo domínio, servem para catalisar as relações estruturais relevantes entre os objetos.

Exercício sobre a pirâmide

A distância do vértice em centímetros que devemos sectionar uma pirâmide com 20 centímetros de altura, por um plano paralelo a base, de modo que a área da secção seja $\frac{1}{4}$ da área da base é:

296) A distância do vértice, em centímetros, que devemos sectionar uma pirâmide com altura de 20cm, por um plano paralelo à base, de modo que a área da secção seja $\frac{1}{4}$ da área da base é:

$A_b = \frac{1}{4} A_B$ ou $A_B = 4.A_b$

$\frac{A_B}{A_b} = \frac{H^2}{h^2}$

$\frac{4.A_b}{A_b} = \frac{(20)^2}{h^2}$

$\frac{h^2}{1} = \frac{(20 \cdot 20)}{4}$

$h^2 = 100$

$h = 10$

Figura 5 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Figura 6 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>

Prof. Augusto Porto: [...] Nós temos aqui a mesma relação que a da pirâmide. A única diferença é que o cone tem na sua base um círculo. Então nós vamos usar o raio da base e o raio da secção. [...] (PORTO, 2013)

Figura 7 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>

As relações de semelhanças entre triângulos servem para cálculos relacionados às pirâmides, da mesma forma servirão para cálculos relacionados ao cone. Observa-se que os lados dos triângulos – na pirâmide – correspondem aos raios - do cone - nas relações abaixo:

Tabela 2 – Analogias entre o tronco de pirâmide e o tronco do cone por meio relações de semelhanças dos triângulos retângulos

Analogias – relações de semelhanças entre triângulos retângulos (tronco de pirâmide e tronco do cone)	Pirâmide	Cone
Lados da pirâmide e raios do cone	$\frac{L}{l} = \frac{H}{h}$	$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$
Área	$\frac{A_B}{A_b} = \frac{H^2}{h^2}$	$\frac{A_B}{A_b} = \frac{H^2}{h^2}$
Volume	$\frac{V_{Grande}}{V_{Pequena}} = \frac{H^3}{h^3}$	$\frac{V_{Grande}}{V_{Pequeno}} = \frac{H^3}{h^3}$

O volume do tronco da pirâmide e o do tronco do cone são calculados de forma análoga:

Tabela 3 – Analogia entre o volume do tronco da pirâmide e o volume do tronco do cone

Analogia	Pirâmide	Cone
Volume do Tronco	$\frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3}$	$\frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3}$

Exercício sobre o tronco do cone

O volume da caixa d'água em litros, representada na figura abaixo, é:

Figura 8 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Observa-se a relação existente entre os raios: $R = 3$ e $r = 1,5$. Um é o dobro do outro, usa-se então, a relação $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$ conforme apresentada abaixo:

Figura 9 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

As próximas telas apresentam a finalização do exercício, utilizando-se dos conceitos análogos relacionados ao estudo da pirâmide:

Figura 10 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Figura 11 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

Figura 12 – Vídeo-aula do Prof. Augusto Porto

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>

O objetivo da inclusão de algumas telas deste vídeo aula é apresentar os resultados de uma exposição com clara preocupação de conscientizar os estudantes da importância de acessar conhecimentos prévios e prepará-los conceitualmente para a recepção de futuros conhecimentos similares. Nota-se que o exercício do raciocínio analógico foi premissa, na preparação da aula, visando destacar as relações estruturais entre objetos estudados e exaltando as conexões entre os conceitos.

Simple exemplos do uso do raciocínio analógico, associados a outras ciências, auxiliam a visualizar o processo de mapeamento entre objetos, propriedades, relações e funções entre dois domínios, conforme Bartha (2013).

	Earth (S)		Mars (T)
	Known similarities:		
vertical	orbits the sun	← horizontal →	orbits the sun
	has a moon		has moons
	revolves on axis		revolves on axis
	subject to gravity		subject to gravity
	Inferred similarity:		
	supports life	⇒	may support life

Quadro 1 – Inferências analógicas

Fonte: Bartha (2013)

3.5.1 Similaridade e aprendizado

A correspondência entre estruturas conceituais relacionadas faz da similaridade mais um relevante recurso para a atribuição de significado no processo de ensino e aprendizagem. A declaração de Gentner segue nesta direção:

Conjecturamos que muito dos ganhos do aprendizado empírico é realizado por meio de comparações espontâneas – que podem ser implícitas ou explícitas – entre a situação atual e situações anteriores similares ou análogas as que o estudante tenha armazenado na memória.³¹ (GENTNER, 1989, p. 232, tradução da autora)

Gentner (1989) destaca a importância de mapeamentos adequados entre os objetos correspondentes fonte e alvo; bem como a importância da sistematicidade e da similaridade estrutural que conferem transparência entre os objetos correspondentes. Neste contexto as relações apresentam oportunidades de inferências e acuidade ao constatar as leis e analogias que deste processo decorrem. Aponta ainda algumas limitações do processo de mapeamento das similaridades:

Embora adequada para previsões, a correspondência entre similaridades literais são provavelmente menos úteis do que analogias para fins de explicitação de princípios causais. Em uma correspondência analógica, a estrutura de dados compartilhada é escassa o suficiente para permitir que o estudante isole os princípios fundamentais. Na semelhança literal, há muitas predicados comuns para saber quais são cruciais.³² (GENTNER, 1989, p. 232, tradução da autora)

Para finalizar destaca-se que Ricoeur apresenta detalhes que comprovam a relação entre a semelhança e a metáfora, coloca aquela no centro do processo, e mostra que por meio dela a metáfora se estabelece entre as figuras de significação. Isto se dá por meio do “papel que a relação de semelhança desempenha na transferência da ideia primitiva à nova ideia. [...]

É, com efeito, primeiramente entre as ideias das quais as palavras são os nomes que a semelhança opera” (RICOEUR, 2005, p. 267). A semelhança/similitude desencadeia a possibilidade do uso da analogia em processos de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo suficiente existir correspondência entre as relações estruturais dos elementos estudados.

³¹ We conjecture that much of experiential learning proceeds through spontaneous comparisons – which may be implicit or explicit – between a current situation and prior similar or analogous situations that the learner has stored in memory. (GENTNER, 1989, p. 232)

³² Although adequate for prediction, literal similarity matches are probably less useful than analogies for purposes of explicitly extracting causal principles. In an analogical match, the shared data structure is sparse enough to permit the learner to isolate the key principles. In literal similarity, there are too many common predicates to know which are crucial. (GENTNER, 1989, p. 232)

A abordagem do tema similitude neste trabalho destacou a importância das relações entre ideias, conceitos e objetos matemáticos no contexto do pensamento analógico.

O próximo capítulo tem como tema principal a inclusão da afetividade no contexto da sala de aula de Matemática.

4. AFETIVIDADE: COGNIÇÃO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Na perspectiva genética de Henri Wallon, inteligência e afetividade estão integradas: a evolução da afetividade depende das construções realizadas no plano da inteligência, assim como a evolução da inteligência depende das construções afetivas.

Valéria Amorin Arantes

Neste trabalho considerou-se relevante estudar temas associados ao pensamento analógico, dentre eles tópicos sobre a Heurística e similaridade, por entender-se a analogia como objeto da Heurística e a similaridade como um espaço no qual a analogia se insere. A maior interação entre professores e estudantes propicia o resgate de fatos arquivados na memória. Entre os estudantes, o interesse em aprofundar o conhecimento dos conceitos relaciona-se com a empatia estabelecida com os professores, tal empatia amplia o interesse do educando em relação à Matemática e nesta perspectiva considera-se relevante tratar de tópicos relacionados ao afeto como motivador do aprendizado aliado ao uso da analogia.

A afetividade é um componente essencial nas dinâmicas de transferências de significado e está relacionada diretamente à cognição. O afeto no contexto educacional relaciona-se basicamente a relações interpessoais que catalisam a possibilidade de atribuição de significados aos conceitos estudados.

Na perspectiva de Spinoza (1632 – 1677), Sévérac coloca que a afetividade humana é um objeto de conhecimento racional:

A essência do corpo humano define-se, em Spinoza, por sua aptidão a ser afetado e afetar. Ora, quanto maior essa aptidão afetiva, maior é a capacidade da mente de pensar várias coisas simultaneamente, e, por conseguinte, de compreender-lhes as relações de conveniência, diferença e oposição. (SEVÉRAC, 2009, p. 23)

Dentre os referenciais teóricos que tratam desta questão, considera-se aqui Abdounur (2003), Mcleod (1992), Schoenfeld (1985, 2012), Sévérac (2009), Gustave Le Bon, Ricoeur (1992), Mandller (1985), Thompson (1984), Silver (1985), Marja-Liisa Malmivuori (2001), Roseline Nascimento de Ardiles (2007), Wallon (1975, 2007), Aurino Lima Ferreira (2010), Nadja Maria Acioly-Régnier (2010).

Os sentimentos segundo Ricoeur (1992, p. 157) colaboram no processo de assimilação do conhecimento, na medida em que participam da dinâmica de apreensão das similaridades.

Ressalta que “[...] essa apreensão instantânea da nova congruência é “sentida” como também “vista””, características próprias dos processos analógicos.

Abdounur (2003) insere o sentimento como um fator relevante relacionado à experiência e sensibilidade. Para o autor a conduta do professor torna-se condição especial para consolidar a relação afeto/cognição. Nesta perspectiva, “sentir o conhecimento” depende da carga afetiva aplicada a contextos cujas ligações analógicas entre os conceitos carece de intensidade, tais ligações são mais intensas na medida em que as similaridades se evidenciam.

Segundo Ricoeur (1992, p. 148) “a similaridade não é nada mais que essa aproximação que revela um parentesco entre ideias heterogêneas”. Nesta esteira sugere-se que além participar da dinâmica de interiorização do conhecimento a tarefa do professor consiste em apresentar as relações e aproximações entre os conteúdos por meio de analogias. Tais procedimentos estabelecem confiança ao estudante de modo a sedimentar o aprendizado.

Decorre disto que analogias, afeto e cognição são suportes imprescindíveis para a atribuição de significados e apreensão de conhecimento.

Mandler propõe que a afetividade na Educação Matemática deveria compreender três fatores: crenças, atitudes e emoções, vinculando os aspectos afetivos e cognitivos no processo de ensino e aprendizagem (MANDLER³³, 1984 apud MCLEOD, 1992, p. 578). Pesquisas tais como as de Chacón (2003) apontam a influência dos fatores acima mencionados no desempenho tanto do professor quanto do estudante de Matemática. Tal pesquisa aponta para a existência de estreita relação entre a consciência por parte do professor dos fundamentos epistemológicos da Matemática e a convicção dos educandos de seus argumentos e ensinamentos.

4.1 CRENÇAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Estudos vinculados às ações de professores e estudantes, tais como os de Chacón acerca da influência e relevância da crença no processo de ensino em Matemática, vêm sendo desenvolvidos desde a década de 1980. No âmbito da Educação Matemática, encontramos pesquisas importantes tais como as de Thompson (1984) que versam sobre as concepções dos professores de Matemática. Schoenfeld (1985, 2012) e Silver (1985) investigam o sistema de

³³ MANDLER, G. **Mind and body**: Psychology of emotion and science. Nova York: Norton, 1984.

crenças relacionadas à resolução de problemas (MCLEOD, 1992). Em diversos países tais como, Estados Unidos, Brasil, Espanha, Alemanha, Finlândia, Estônia, Israel, o papel das crenças dos estudantes sobre a disciplina de Matemática vem sendo investigado.

As pesquisas de campo acerca de crenças no contexto de Educação Matemática concentram-se em aspectos relacionados aos estudantes e aos professores. McLeod (1992) investiga algumas categorias de crenças dos estudantes: crenças sobre a Matemática, crenças sobre si mesmos, crenças sobre ensino da Matemática, crenças sobre o contexto em que ocorre a Educação Matemática. Para Mcleod (1992), as crenças são essenciais no desempenho de respostas atitudinais e emocionais em Matemática.

Tais crenças, de acordo com o autor, são desenvolvidas por um período longo, quando positivas são essenciais para uma trajetória de sucesso no tocante aos objetos matemáticos, seja no percurso dos estudantes ou dos professores. Quando negativas, cristalizam-se prejudicando o avanço intelectual e intensificando os problemas de assimilação de conceitos. Neste último caso, torna-se pertinente averiguar e substituí-las para a obtenção de sucesso no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. As crenças positivas ou eficazes propiciam uma interação entre os agentes envolvidos na dinâmica de ensino e aprendizagem, na medida em que possibilitam uma conexão maior com os conhecimentos prévios estimulando o uso da analogia na apreensão do conteúdo matemático.

Segundo D'Andrade³⁴ (1981) apud Mcleod (1992, p. 579), o desenvolvimento de crenças acontece por meio de um processo muito parecido com a “descoberta guiada” de acordo com o qual as crianças respondem às situações apresentadas desenvolvendo crenças consistentes com suas experiências. De acordo com Schoenfeld (1985) diversas pesquisas em Educação Matemática sugerem que o desenvolvimento das crenças sobre a Matemática é fortemente influenciado pelo cenário cultural dos estudantes.

Chacón (2000) descreve resultados de investigação das reações emocionais dos estudantes no decorrer de atividades matemáticas. Como exemplo da manifestação dos sentimentos dos estudantes, segue uma pequena parte dos resultados, que evidenciam a importância dada para grande parte dos estudantes à aprendizagem de um ofício e obtenção de um título que lhes abra portas para um possível trabalho. Segundo a autora, os objetivos de formação cultural ou de aprendizagem de Matemática aparecem em segundo plano e observa-se que os estudos são considerados, pelos estudantes, meios para a obtenção de trabalho.

³⁴ D'ANDRADE, R. G. The cultural part of cognition. **Cognitive Science**, v. 5, 1981. p. 179-195.

Sentimientos de éxito	Sentimientos de fracaso
Bien, pues veía que avanzaba más que otros. Me gusta.	Fatal, mal... me traía tebeos para leer.
De alegría, orgullo, que soy un matemático de estos de toda la vida.	Me sentía mal con mí mismo mesmo. ¡Porque no sabía hacerlo!
Bien, bien no me preocupaba el no saber hacerlo.	Não me importava, não fazia nada estava sempre desenhando.
Felicidad.	Los sentimientos es que me daba igual, me obligaban a ir a clase, como quieres que me sienta? Pues mal, me daba igual.
Me sentía bien, por lo menos me daba confianza en mí y me sentía bien.	Yo soy un inútil, no sirvo y entonces pues no..., te entra envidia que todo el mundo sepa y tú no sabes nada, que a todo el mundo le sale bien y a ti no.

Quadro 2 - Exemplo de sentimentos associados ao êxito e fracasso escolar

Fonte: Chacón (2000, p. 89)

Guimarães (2009) trabalhou com a técnica de grupos focais para, dentre outros aspectos, compreender dimensão afetiva nas relações interpessoais entre professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Segundo a autora, a pesquisa

[...] investigou a importância da dimensão afetiva para o desempenho da sistematização cognitiva dos educandos na disciplina de matemática, com a intenção de revelar como os afetos articulados entre educando e educador podem contribuir para resultados satisfatórios ou não na aprendizagem. (GUIMARÃES, 2009, p.1)

A autora descreve a manifestação de crenças apresentadas pelos estudantes:

Durante os encontros dos grupos focais, pôde-se perceber nas “falas” dos jovens, o grau de entendimento e reconhecimento que têm de suas próprias atitudes. Quase como em um processo inconsciente, eles admitem repetir frases do tipo ‘matemática é muito difícil’; ‘matemática não serve para mim’; ‘não consigo aprender matemática’; ‘sempre fui ruim em matemática’, entre outras. Desse modo, acham que não gostam de estudar matemática e não conseguem sucesso no aprendizado porque “todos” (círculo de amigos) dizem que é uma disciplina difícil ou porque seus pais também não foram bons alunos nesta disciplina, ou ainda, e principalmente, porque não encontraram incentivo seja da família, seja dos professores, para empregar um esforço pessoal maior e aguçar o próprio desejo e expectativa em aprender. (GUIMARÃES, 2009, p.9)

A aproximação afetiva entre professores atentos e estudantes propicia análise detalhada dos motivos e origens das crenças negativas dos estudantes em relação a Matemática e possibilita a transformação de tais crenças. O apoio aos educandos com dificuldades de aprendizagem abre canais de entendimento dos conteúdos, visto que a natureza da Matemática exige clara compreensão de seus símbolos, procedimentos, conceitos, abstrações, dentre outros. Além dos resultados cognitivos, ao professor consciente, cabe garantir amparo aos estudantes na compreensão do conhecimento matemático, de suas

características e sua significação em relação a outras ciências. Assim torna-se oportuno elaborar as aulas com vistas a preparar o ambiente para a recepção do novo conteúdo, inserindo o uso de analogias. Quando o professor percebe a importância de vincular o pensamento analógico aos constructos relacionados a afetividade, quais sejam: crenças atitudes e emoções, passa a oferecer oportunidade ao estudante de visualizar com maior clareza e proximidade as relações estruturais entre objetos matemáticos e seus significados. O raciocínio analógico aliado a observação das crenças dos estudantes sejam elas positivas ou negativas tende a auxiliar nas compreensão das abstrações dos conteúdos matemáticos.

4.2 ATITUDES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A consciência da própria capacidade em aprender Matemática é um dos principais fatos que impulsionam o avanço do processo de aprendizagem e desencadeiam atitudes que favorecem o desenvolvimento de estratégias próprias na resolução de problemas, motivação e interesse em descobertas, reconstrução dos diversos propósitos da Matemática aplicados à realidade. De acordo com o PCN, tal conscientização terá maior sucesso quanto mais cedo ocorrer (Brasil, 2001- PCN).

O estudo de atitudes pertence ao campo da psicologia social:

De acordo com Thomas and Znasniescki (1918), o estudo de atitudes é por excelência o campo da psicologia social. Atitudes são processos mentais individuais que determinam tanto as respostas reais quanto as potenciais de cada pessoa no mundo social. Desde que uma atitude é sempre direcionada para algum objeto, pode ser definida como um “estado da mente do indivíduo em direção a um valor”. Valores são geralmente de natureza social, isto é, eles são vistos como objetos comuns pelos homens socializados.³⁵ (ALLPORT, 1970, p.19, tradução da autora)

Oriundas do campo da psicologia social, as pesquisas relacionadas às atitudes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática implicam em voltar as atenções ao estudante como um “ser global” passível de ter uma aproximação positiva junto à Matemática. Cabe notar que este trabalho estuda os constructo da afetividade de acordo com a perspectiva de Mandler (1984), conforme apontado na página 74 deste texto. Assim sendo,

³⁵ According to Thomas and Znasniescki (1918), the study of attitudes is *par excellence* the field of social psychology. Attitudes are individual mental process which determine both the actual and potential responses of each person in the social world. Since an attitude is always directed toward some object, it may be defined as a “state of mind of the individual toward a value”. Values are usually social in nature, that is to say, they are objects of common regard on the part of socialized men. (ALLPORT, 1970, p.19)

atitudes são consideradas como um dos constructos que compõe a afetividade na Educação Matemática.

Segundo Brito (1998) as investigações que envolvem a interrelação entre o domínio afetivo e a aprendizagem matemática, iniciaram-se na década de 1950 com a:

[...] exploração do conceito de atitudes em relação à Matemática, consideradas enquanto sentimentos dos sujeitos com relação à disciplina Matemática, isoladamente de outros componentes transitórios, tais como o professor, o método de ensino, etc. (BRITO, 1998, p. 113)

Este recorte favorece a análise de fatores essencialmente subjetivos que induzem a determinadas atitudes, sejam positivas ou negativas, com a possibilidade de diagnóstico e compreensão de suas causas e posterior tomada de decisões sobre como incentivá-las ou não.

Diversos pesquisadores dedicaram-se ao estudo do tema e destacando-se Hart (2004), Aiken (1963), Brito (1996), Dobarro (2007), Chacón (2003), Utsumi e Lima (2008). Dentre as definições de atitudes relacionadas à Matemática cabe aqui ressaltar as de Aiken (1970), Brito (1996) e Dobarro (2007).

Aiken (1970) afirma que este constructo é uma “predisposição ou tendência de um indivíduo a responder positivamente ou negativamente a algum objeto, situação, conceito ou outra pessoa” (AIKEN³⁶, 1970 apud MACHADO, 2013, p. 2).

Brito (1996) a define como sendo:

Uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor. (BRITO, 1996, p. 11)

Em relação à formação de atitudes, Dobarro (2007) destaca que:

A formação das atitudes em relação à Matemática por um indivíduo depende, dentre outros fatores, das crenças que esse sujeito desenvolve durante sua vida escolar, seja por meio da sua experiência, seja por meio da transmissão de crenças por outros que convivam com ele e que de alguma forma representem um papel de “autoridade”, como os pais e professores. (DOBARRO, 2007, p. 25)

Gonzalez e Brito (1996) destacam um ponto convergente nas definições do constructo atitude: a “predisposição de uma pessoa para responder a um determinado objeto de maneira favorável ou desfavorável” (GONÇALEZ; BRITO³⁷, 1996 apud MORAES, 2010, p. 118). Encontramos em Brito³⁸ (1996) apud Machado (2013, p. 2) a recomendação para que se evite

³⁶ AIKEN, L. R. Jr. Attitudes toward mathematics. **Review of Educational Research**, 40, 551-596, 1970.

³⁷ GONÇALEZ, Maria Helena de C. de Castro; BRITO, Márcia Regina F. **Atitudes (des)favoráveis com relação a matemática**. Campinas: Zetetiké, v.4, n.6, jul/dez.1996.

³⁸ BRITO, Márcia R. F. Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1o e 2o Graus. 1996. **Tese Livre**

confundir comportamento com atitude; e neste contexto Brito e Gonzalez³⁹ (2001) apud Machado (2013, p.2) alertam para o caráter impermanente deste constructo, passível de ser alterado sob determinadas circunstâncias. Cabe aqui ressaltar que se os professores apresentam atitudes negativas em relação a Matemática, estas serão transmitidas aos estudantes gerando assim um processo cíclico improdutivo para ambas as partes. Segundo Utsumi e Lima (2006)

A necessidade de comprometimento dos educadores com relação à questão das suas atitudes e a de seus alunos torna-se fundamental, principalmente depois da constatação da importância das variáveis afetivas no processo de aprendizagem pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. (UTSUMI; LIMA, 2006, p. 5)

Os autores referem-se neste contexto a:

(...) as atitudes têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam. BRASIL (1998, p. 50)

As considerações acima apresentam as atitudes como um complexo constructo, resultado de convicções e crenças, que quando positivas podem desencadear novos conhecimentos e novos interesses. Este direcionamento depende da postura dos professores, mediante o processo de ensino e aprendizagem. É importante que o professor compreenda a dinâmica desencadeada por seu comportamento diante dos estudantes. As atitudes positivas do professor geram confiança aos estudantes e como uma ação em cadeia possivelmente resultará em aproveitamento do conteúdo ministrado. Supõe-se com isto que os estudantes com dificuldades se sentirão seguros no trato dos objetos matemáticos. Assim sendo, o uso da analogia em tal contexto propiciará, de forma natural, a visualização, compreensão e atribuição de sentido aos objetos de estudo.

Na perspectiva oposta, ou seja, a de um professor com atitudes negativas diante da Matemática, dificultará o processo de ensino e aprendizagem, além de dificultar o terreno para a aplicação do raciocínio analógico visto que para tal uso deve haver diálogo e empatia entre os interlocutores. É igualmente importante que os estudantes observem suas atitudes na sala de aula de Matemática; tais atitudes provavelmente impliquem em seu sucesso ou fracasso no âmbito da matéria.

As atitudes relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática estão diretamente ligadas às crenças que os estudantes desenvolvem ao longo do tempo.

Ao aprender Matemática, o estudante recebe estímulos contínuos associados a ela – problemas, atuações do professor, mensagens sociais, etc. – que geram nele certa tensão. Diante desses estímulos, reage emocionalmente de forma positiva ou negativa. Esta reação está condicionada por suas crenças sobre si mesmo e sobre a Matemática. Se o indivíduo depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a ativação da reação emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e se “solidificar” em atitudes. Estas atitudes e emoções influenciam nas crenças e colaboram com sua formação. (CHACÓN, 2003, p. 23)

Blanco, Barona e Carrasco (2013, p. 339) apresentam esta mesma compreensão, quando afirmam que:

O que os estudantes pensam sobre a matemática influencia os sentimentos que afloram em direção ao objeto e sua predisposição para agir em consequência. Ou seja, se os estudantes têm crenças negativas sobre a matemática ou seu ensino, tendem a apresentar sentimentos negativos para com tarefas relacionadas, em especial o comportamento de distanciamento ou simples rejeição dessas tarefas. Esta predisposição para certas intenções e comportamentos pessoais é o que se chama de atitudes.⁴⁰ (tradução da autora)

Para confirmar o acima exposto, as investigações de Moraes (2010) mostram que:

[...] quanto melhor o desempenho mais favorável mostrou-se as atitudes. Os alunos que manifestaram terem uma boa interação com a matemática, principalmente com a resolução de problemas evidenciaram de forma predominante atitudes positivas. Na medida em que a idade do aluno avançou percebeu-se uma redução na probabilidade de manifestar atitude favorável à matemática. Os professores devem buscar estratégias para desenvolver um sentimento afetivo e permanente do aluno com a matemática. (MORAES, 2010, p. 116)

Assim, a qualidade de interação entre professor e estudante é imprescindível se o objetivo for reavivar seu interesse pela Matemática. A observação das reações e atitudes dos educandos permite direcionar o aprendizado de forma a motivar o pensamento crítico e trabalhar os sentimentos de rejeição a Matemática. Tal postura possibilita tratar o processo cognitivo afetivo de forma mais natural, intensificando a empatia pela Matemática na forma de atitudes positivas.

As considerações de Chacón (2003) acerca do vínculo entre atitudes e crenças apresentam um importante fator a ser observado quando da preparação e exposição dos conteúdos em sala de aula. Nota-se que a percepção da reação da audiência torna-se relevante para colher resultados sobre a assimilação do material apresentado. Disto decorre que o

⁴⁰ What students think about mathematics influences the feelings that surface towards the subject and their predisposition to act in consequence. That is, if students have negative beliefs about mathematics or its teaching, they will tend to show adverse feelings towards related tasks, in particular presenting avoidance behaviour or simple rejection of those tasks. This predisposition towards certain personal intentions and behaviours is what one calls attitudes. (BLANCO, BARONA E CARRASCO, 2013, p. 339)

professor, ao preparar a aula deve ter em mente as características e potencialidades de seu público considerando as reações positivas e adversas em relação ao novo conteúdo. Assim, deve ter o cuidado de utilizar recursos que possibilitem a melhor compreensão dos objetos estudados.

Sugere-se, além de aproximar-se do estudante e observar suas reações, usar o raciocínio analógico como recurso para atribuir significados aos conceitos. A observação e pronto “atendimento” das atitudes negativas de cada educando – quando em contato com o conhecimento alvo - é um diferencial que pode evitar obstáculos didáticos. O pronto auxílio ao estudante, tem a intenção de interromper o provável círculo de crenças negativas dos próprios estudantes sobre suas capacidades; gerar crenças positivas que alimentarão, por sua vez, atitudes positivas e aproximar professores e estudantes. Desta feita, este é um quadro propício para que conteúdos sejam apresentados de forma que as relações de sua estrutura seja evidenciada e que se destaque conhecimentos prévios análogos, para a construção de significados aos objetos matemáticos.

O processo de aprendizagem será naturalmente produtivo caso se utilize estratégias favoráveis que proporcionem assimilação dos conteúdos matemáticos. De acordo com Moraes (2010), quanto mais comprometido for o professor no sentido de colaborar para o desenvolvimento da dimensão afetivo-cognitiva e em especial de atitudes que resgatem a confiança no desempenho dos estudantes em relação a Matemática, maior a efetividade do pensamento analógico como auxílio ao desempenho do estudante, havendo terreno fértil para a apreensão, atribuição e transferências de significados matemáticos.

4.3 AFETO E EMOÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Diversos são os autores preocupados em investigar a articulação entre emoção e processos educacionais. Estudos específicos sobre a emoção foram realizados por Wallon (1975, 2007), Dantas (1993), Arantes (2002), dentre outros. Desde a década de 1980 pesquisas em educação Matemática e teoria da emoção são realizadas por autores de referência tais como Mandler (1975, 1984, 1989a, 1989b) e McLeod (1985, 1988, 1990, 1992, 1994). Destacam-se na atualidade Chacón (2003), Péres e Cubero (2009), Ferreira e Acioly-Régnier (2010), Utsumi e Lima (2006, 2008a), Utsumi et al. (2008b). Segundo a ótica de

Wallon a questão emocional deve fazer parte da ação pedagógica e ser observada como um dos objetos desta ação (Dantas, 1993, p. 73).

Wallon (2007, p. 121) ressalta que: “[...] a emoção está muito particularmente apta a suscitar reflexos condicionados. Sob a influência deles, pode muitas vezes parecer contrária à lógica ou à evidência. [...]”. Neste sentido Dantas (1993, p. 74) sublinha que “Entre emoção e cognição existe filiação, mas também antagonismo. [...] É preciso que ela desapareça enquanto tal para que possa atuar como o combustível que alimenta a atividade racional.”. A autora afirma que no decorrer da vida adulta as novas situações nas quais os sujeitos estejam despreparados propiciará a elevação do tonus emocional (Dantas, 1993, p. 73). Este fato se relaciona as reações do educando diante de um obstáculo epistemológico. Tal enfoque merece um estudo aprofundado, porém neste texto, é suficiente explicitar que:

Wallon rompe com uma visão valorativa das emoções, buscando compreendê-las a partir da apreensão de suas funções, e atribuindo-lhes um papel central na evolução da consciência em si. Em suas postulações concebe as emoções como um fenômeno psíquico e social, além de orgânico. (ARANTES, 2002, p. 8)

Heloyza Dantas (1997, p. 68) considera a distinção entre afetividade e emoção condição imprescindível para que se possa afirmar que a apreensão do conhecimento está vinculada com o aumento da temperatura afetiva⁴¹ e diminuição da temperatura emocional. De acordo com a autora:

A emoção é diretamente proporcional ao grau de imperícia, diria Wallon. Ela é, porém, a condição indispensável para o ingresso no mundo da razão e da competência humana, na medida em que possibilita uma primeira forma de comunicação, básica, primitiva, profunda, lastro sobre o qual se construirá a comunicação lingüística que transporta o conhecimento e dá ingresso à vida cognitiva.

A emoção estabelece, pois, as bases da inteligência; se identificada com o seu desenvolvimento próximo, a afetividade surge como condição para toda e qualquer intervenção sobre aquela. A princípio, estimular a inteligência confundir-se-á com a tarefa de alimentar a afetividade. Mais tarde, a temperatura afetivo-emocional da relação pedagógica representará provavelmente o elemento catalisador sem o qual a reação de síntese cognitiva não se realiza. Alguém disse que "a criança não aprende sem vínculo afetivo". Esta afirmação é, aqui, inteiramente procedente, e permitirá afirmar, retomando o nosso tema, que a emoção é o agente mediador da ação pedagógica. (DANTAS, 1993, p. 73-74)

Pesquisas direcionadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática (CHACÓN, 2003; ABDOUNUR, 2003) tem uma especial preocupação com investigações acerca da compreensão do estudante, desta forma, a prática e manutenção da “temperatura afetivo-emocional” (DANTAS, 1993, p.73-74) pode ser considerada nas relações educacionais formais, informais ou não-formais no referido processo para que o pensamento

⁴¹ Galvão interpretou o termo temperatura afetiva como “intensificação do vínculo” (Galvão, 2003, p. 83).

crítico, a motivação e o interesse pelos objetos matemáticos se estabeleçam. Abdounur (2003) observa:

Envolver-se e entregar-se afetivamente às atividades educativas permitem o desenvolvimento de empatia com o conhecimento, que passa a ser sentido como parte de si próprio. Neste contexto, ganha considerável importância a preocupação em tornar familiar os cenários vividos quotidianamente representados, do ponto de vista didático, pelos ambientes de ensino / aprendizagem e o universo cognitivo. (ABDOUNUR, 2003, p. 185)

A partir de tais considerações, pode-se estabelecer um paralelo entre a temperatura afetivo-emocional e a empatia com o conhecimento, na medida em que a aproximação entre professores e estudantes tende a intensificar a qualidade do aprendizado e diminuir a distância entre o “conhecedor” e o “conhecido” Ricoeur (1992, p. 157). Neste sentido o grau de confiança estabelecido na relação professor/aluno cataliza o aprendizado de Matemática, particularmente no que concerne à fluidez no resgate dos conceitos análogos já estudados para auxiliar este processo.

As reflexões anteriores mostram-se congruentes com os pressupostos de Wallon (1975, 2007) quanto à dinâmica afetivo-cognitiva no contexto educacional. Nesta esteira Abdounur (2003) ressalta que:

O conhecimento das tendências promissoras e dificuldades de um aluno torna-se elemento significativo no contexto presente. Faz-se portanto relevante preocupar-se constantemente na dinâmica de ensino com o que se poderia chamar radiografia cognitivo/afetiva do aluno, ou seja, com a maneira como distribuem-se ponderadamente suas capacidades, a fim de oferecer terrenos que possibilitem ao estudante desvendar sua originalidade bem como desenvolver aquelas competências consideradas mais deficientes. (ABDOUNUR, 2003, p. 178)

De acordo com a ótica acima apontada, tem-se na radiografia cognitivo/afetiva um meio de observar e orientar os estudantes a serviço de desenvolver suas competências, assim como adequar a temperatura afetivo-emocional para propósito de atribuição de significados aos objetos matemáticos. Nesta perspectiva Wallon (1975) considera a “observação”, desde a infância, como fator relevante ao contexto em que as crianças se inserem:

É em todas as suas fases, em todas as suas manifestações, que é preciso estudar a criança. O seu conhecimento exige a colaboração de todos aqueles que por qualquer razão estão em contato com ela. Mas nem sempre pertence àqueles, que estão em melhor situação de a conhecer e que às vezes melhor a conhecem, saber observá-la. Observar é evidentemente saber registrar o que pode ser verificado. Mas registrar e verificar é ainda analisar, é ordenar o real em fórmulas, é fazer-lhe perguntas. [...] A observação é um método cujo contributo é dos mais ricos na psicologia da criança. (WALLON, 1975, p. 15-16)

A radiografia cognitivo/afetiva e a observação são ações complementares que apresentam semelhanças e acompanham o docente no despertar do interesse e empatia do

estudante pela Matemática. Tais ações fortalecem a interação professor-estudante proporcionando o afloramento, em contexto afetivo, de competências necessárias ao entendimento da Matemática.

Chacón realizou interessante pesquisa junto a um grupo de estudantes mapeando relações significativas passíveis de serem instituídas entre cognição e afeto e seu uso no ensino e aprendizagem da Matemática (CHACÓN, 2003, p. 138). Os aspectos investigados foram a curiosidade, desorientação, tédio, pressa, bloqueio, “quebrando a cabeça”, desespero, ânimo, confiança, excelência, diversão, prazer, indiferença e tranquilidade e suas implicações no processo de interação dos estudantes com a Matemática. Algumas de suas conclusões sobre o estudo das influências afetivas no conhecimento da Matemática sugerem que:

[...] É preciso elaborar estratégias de ensino da Matemática, nas quais a dimensão afetiva seja mais do que um acompanhamento acidental, centrado somente em que os professores tornem a matéria mais motivadora. É necessário continuar pesquisando os modos de observar e de codificar as reações emocionais dos estudantes e suas características. [...] o desafio dos educadores é irromper e interromper os sentimentos negativos, como passo prévio para a necessária reconstrução afetiva/cognitiva que deve acontecer para o progresso do estudante, encontrando caminhos didáticos que favoreçam tais aspectos. (CHACÓN, 2003, p. 141-142)

No que concerne a pesquisas sobre relações entre educação matemática e afeto, cabe ressaltar as contribuições de Mandler (1984, 1985, 1988, 1989a, 1989b) cuja abordagem integra a atividade fisiológica e o processo de avaliação cognitiva, bem como a emoção como interação complexa entre sistema cognitivo e sistema biológico (Chacón, 2003). Mandler desenvolveu a teoria da discrepância que sugere explicações

[...] para a forma como as crenças dos estudantes e sua interação com situações de resolução de problemas levam a respostas afetivas. De acordo com ele, quando a instrução de aula é radicalmente diferente do que os estudantes esperam, eles experimentam discrepâncias entre suas expectativas e suas experiências, e tais discrepâncias são, possivelmente, o resultado de intensas respostas emocionais. (CHACÓN, 2003, p. 37)

Supõe-se que as referidas discrepâncias seriam melhor compreendidas, caso o professor tivesse proximidade afetiva com o estudante de forma a entender as frágeis percepções do mesmo em relação aos objetos de estudo. Provavelmente ocorrem pelo desconhecimento prévio do estudante sobre o assunto tratado e / ou pelo desconhecimento do professor da bagagem intelectual e cultural de sua audiência; fica estabelecido assim, um círculo vicioso que necessita de mudanças. Desta forma registra-se a importância de uma aula que contemple de forma adequada e consciente a necessidade da audiência; o conteúdo pedagógico a ser abarcado, o uso do raciocínio analógico e em especial priorize a

aproximação entre docente e discente (vínculo afetivo) de forma que seja possível observar as emoções associadas ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Desconsiderar tais discrepâncias implica em distanciar os personagens do processo de ensino e aprendizagem matemáticos: professores e estudantes; estudantes e novos conhecimentos, e num processo inverso ao esperado elevar a temperatura emocional em detrimento ao aumento da temperatura afetiva.

Qualquer discrepância durante a resolução de problemas representa um episódio afetivo em potencial. Conforme assinala antes, tais episódios podem ser vistos dentro de um contexto de uma corrente afetiva geral e de mudanças de humor. De qualquer forma, é possível identificar categorias de discrepâncias e interrupções que podem ocorrer durante a resolução de problemas em geral e no raciocínio e na aprendizagem matemática em particular. A maior categoria desse tipo de acontecimento pode ser denominada de erros, quando o aprendiz pensa algo que é diferente de suas intenções originais ou é diferente pelo resultado final que acaba acontecendo... Outra categoria de discrepâncias pode ser denominada “acontecimentos”, que podem ser intencionais ou não-intencionais. (MANDLER⁴², 1989a apud CHACÓN, 2003, p. 37)

O estudo sobre a emoção vinculada ao ensino da Matemática necessita de maiores investigações, estratégias inovadoras precisam ser desenvolvidas levando em consideração a relação afeto-cognição nesta área do conhecimento. Importantes iniciativas foram implementadas, tais como a de Chacón (2003) que serviram e servirão para nortear produções recentes e futuras.

4.4 ANALOGIAS NA ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS

Estudos de Albert Bandura investigam a crença da autoeficácia, segundo o autor:

A autoeficácia percebida é definida como a opinião da pessoa sobre suas capacidades em produzir níveis de desempenho designados que exercem influência sobre os eventos que afetam suas vidas. Crenças de autoeficácia determinam como as pessoas sentem, pensam, motivam-se e comportam-se. Tais crenças produzem efeitos diversos por meio de quatro processos principais: cognitivos, motivacionais, afetivos e processos de seleção.

Um forte senso de eficácia reforça a realização humana e o bem estar pessoal de várias maneiras. Pessoas com elevada confiança em sua capacidade abordam tarefas difíceis como desafios a serem superados ao invés de ameaças a serem evitadas. Tal perspectiva eficaz promove o interesse intrínseco e a dedicação profunda nas atividades. (BANDURA, 1994, p. 71)

⁴² MANDLER, G. Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. IN: D. B. McLeod e V. M. Adams (Eds) **Affect and mathematical problem solving: A new perspective**. Nova York: Springer-Verlag, p. 3-19, 1989a.

Crenças de auto-eficácia proporcionam estratégias úteis para a resolução de problemas, que promovem a visualização de recursos utilizáveis em desafios propostos. Obstáculos interpretativos são comuns em estudantes de Matemática básica e a observação do grau da crença de auto-eficácia por parte de professores tanto em relação aos seus estudantes como em relação a si mesmos é um fator relevante no desenvolvimento de níveis de desempenho. Tal crença desencadeia atitudes positivas na percepção de atalhos no processo de resolução de desafios, percepção esta em que o pensamento analógico possui papel decisivo e heurístico, na medida em destaca as similaridades estruturais assim como as transferências proporcionando inferências e atribuindo significados aos objetos de estudo.

Uma baixa crença de auto-eficácia exigiria um maior cuidado, de modo que a auto-confiança intensificasse suas capacidades e potencialidades, bem como aflorasse sua auto-eficácia, importante constructo afetivo na assimilação de objetos matemáticos. Analogias resultantes de ações de indivíduos com forte crença de auto-eficácia possuem suas capacidades de atribuição de significados intensificadas, catalizando, no contexto matemático, compreensões e interpretações de similaridades em relações estruturais entre os conteúdos. As especificidades deste tipo de crença não serão o foco deste trabalho, porém ressalta-se a relevância do tema para estudos futuros visando sugerir ações para minimizar os problemas de aprendizado da Matemática. Nesta esteira, Torisu e Ferreira (2009, p. 171) advertem que:

[...] é necessário deixar claro que a capacidade que um indivíduo tem de exercer sua agência humana, ou seja, agir de modo intencional para alcançar seus objetivos, tem maior relação com as suas crenças de autoeficácia que com as suas capacidades comprovadas. Para ilustrar essa idéia no contexto escolar tomemos, por exemplo, dois alunos cujos professores julgam ter mesma capacidade cognitiva para realizar uma determinada tarefa. Ora, se considerarmos somente o aspecto cognitivo, os dois deverão ter resultados próximos. Porém, se um deles desenvolveu crenças de autoeficácia mais positivas, provavelmente, se sentirá mais motivado a realizar a tarefa e possivelmente se sairá melhor. Não queremos, com isso, dizer que somente possuir robustas crenças de autoeficácia seja suficiente para garantir o sucesso na realização de uma tarefa. Essas crenças, aliadas a conhecimentos prévios e uma capacidade cognitiva adequada, servirão de base para a motivação e o sucesso.

No contexto educacional segundo Torisu e Ferreira (2009), a crença de autoeficácia motiva realizações de tarefas complexas e possibilita o sucesso. De acordo com o acima exposto, o pensamento analógico aliado à crença de auto-eficácia positiva propicia o desencadeamento de resgates cognitivos frente a desafios no contexto da resolução de problemas.

Uma exposição consciente de tal perspectiva propicia a apresentação de conteúdos, cuja forma de representação influencia estratégias de recuperação de informações pertinentes, o que fortalece a crença de auto-eficácia.

De acordo com Séverac (2009), Spinoza enfoca a produção de afetos liberadores como fonte do aperfeiçoamento ético e aproxima a afetividade humana do conhecimento racional; eleva o status etéreo da afetividade humana tomando-o como objeto deste conhecimento; centraliza a ética do conhecimento como o propósito do afeto:

O projeto spinozista nos propõe uma ética do conhecimento que certamente se distingue de uma moral da obediência; mas não se trata nunca de conhecer por conhecer, trata-se de conhecer para ser afetado, e ser afetado de tal forma que possamos viver felizes. [...] A essência do corpo humano define-se, em Spinoza, por sua aptidão a ser afetado e afetar. Ora, quanto maior essa aptidão afetiva, maior é a capacidade da mente de pensar várias coisas simultaneamente, e, por conseguinte, de compreender-lhes as relações de conveniência, diferença e oposição. (SÉVÉRAC, 2009, p. 17 e 23)

Considerando a possibilidade de transportar tais reflexões ao universo do ensino e aprendizagem da Matemática, compreende-se a conveniência e importância da inserção de aspectos da afetividade no contexto desta disciplina e no trato de seus objetos. Isto nos leva ainda a considerar que o afeto contagia o humano para a busca do conhecimento e felicidade.

4.5 AFETIVIDADE E COGNIÇÃO

Cada um entende e compreende a seu modo, e assimila assim conceitos matemáticos em contextos próprios. Desta forma, os *insights* são estabelecidos de forma particular, e respeitado os tempos de entendimento de cada um, processa-se a apreensão. A lógica afetiva então, neste âmbito, pode ser percebida pelo professor como a explicitação de um particular modo de percepção e de um trato interior revelador da multiplicidade dentro da unidade. Pois um conceito pode ser assimilado sob diversas perspectivas para cada um dos estudantes formando assim, um mosaico de apreensões (diversas percepções) de determinado conteúdo.

No âmbito do ensino da Matemática, esta visão holográfica/fractal lógico-afetiva (onde cada parte remete ao todo de acordo com a percepção de cada um) de cada conceito, permite estabelecer, de forma particular, associações cognitivo-afetivas com os conceitos antigos e/ou análogos apresentando aspectos esclarecedores e singulares que atribuem significado ao conceito investigado. Assim, o conhecimento torna-se próprio, processo esse em conformidade com Ricoeur ao dizer que “Sentir, no sentido emocional da palavra, é tornar nosso o que foi colocado a distância pelo pensamento em sua fase de objetivação” (RICOEUR, 1992, p. 157).

As pesquisas de Malmivuori (2001) mostram que:

Crenças e sistemas de crenças foram aqui escolhidos como as construções mentais, abstrações, ou conceitos para ilustrar os aspectos estruturais mentais (cognitivos) e não transitórios com respostas afetivas dos estudantes, e, em particular, as relações afetivo-cognitivo em seus processos pessoais de aprendizagem da matemática. Isto caracteristicamente oferece a direção e estruturas para os processos diários pessoais dos alunos e respostas com a matemática, bem como para o desenvolvimento destes. Com esta escolha ressaltamos a importância das relações individuais dos alunos, apreciações, intenções, expectativas, experiências e formas de processamentos mentais, por meio das quais teremos acesso direto aos seus processos mentais de avaliação e julgamentos, e às suas respostas afetivas e experiências com a matemática.⁴³ (MALMIVUORI de 2001, p. 100, tradução da autora)

Le Bon (2013) afirma que “A crença orienta os pensamentos, as opiniões e, por conseguinte, a maneira de proceder. [...] Elaborada nas regiões subconscientes a que a inteligência não poderia chegar, uma crença se implanta no espírito, mas não se discute.” No âmbito da Matemática as acepções e concepções solicitam consistência lógica visto se tratar de uma ciência exata. O aprofundamento epistemológico permite visualizar as analogias com maior propriedade, ao mesmo tempo em que contribui para refinar “o nível de consciência das próprias crenças” Chacón (2003, p. 65).

Chacón (2003) enfatiza o impacto da crença no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e coloca o professor como figura central causadora de mudanças neste contexto. A autora destaca quatro fatores que propiciam a autonomia do professor e que ao mesmo tempo consistem na promoção de inovações: Os esquemas mentais, os sistemas de crenças do professor referente ao ensino e à aprendizagem da Matemática, o contexto social da situação de ensino ou o contexto social no qual o aluno chega ao conhecimento e o nível de processos de pensamento e de reflexão do professor.

A autora cita Ernest (1988), Thompson (1984) e Cañón (1993, 1995) como exemplo de autores preocupados com a questão da crença dos professores sobre a Matemática. Para

⁴³ Beliefs and belief systems have been chosen here as the mental constructs, abstractions, or concepts to illustrate the structural and non-transient human mental (cognitive) aspects with pupils’ affective responses, and in particular the affective-cognitive linkages in their personal mathematics learning processes. These characteristically give the direction and structures for pupils’ personal daily processes and responses with mathematics, as well as for the further development of these. With this choice we stress the significance of pupils’ individual regards, appreciations, intentions, expectancies, experiences, and forms of mental processings, from which we should have direct access to their evaluative mental processes and judgments, and to their affective responses and experiences with mathematics. (MALMIVUORI, 2001, p. 100)

menção um exemplo, destacam-se as considerações de Ernest⁴⁴ (1988) apud Chacón (2003, p. 65):

- Visão da Matemática como uma caixa de ferramentas. A Matemática torna-se acumulativa na medida em que existem objetivos externos que ela pode ajudar a conseguir. O fim que persegue a criação do conhecimento matemático é o desenvolvimento de outras ciências e técnicas. A Matemática como conjunto de fatos não relacionados (visão utilitarista).
- Visão da Matemática como corpo estático e unificado de conhecimento. A Matemática, então, somente se descobre, não se cria (visão platonista).
- Visão dinâmica da Matemática como um campo de criação humana em contínua expansão, no qual são gerados modelos e procedimentos que são aprimorados como conhecimentos. A Matemática é algo aberto e seus resultados permanecem abertos à revisão (perspectiva de resolução de problemas).

Nesta esteira, a didática da Matemática tem como desafio principal aproximar as concepções epistemológicas da Matemática das ações docentes de forma a influenciar com consistência a compreensão e entendimento dos educandos (CHACÓN, 2003). Este capítulo procurou abordar a relação entre pensamento analógico e afetividade no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática, com o intuito de aproximar afeto-cognição da atribuição de significados no universo deste campo do conhecimento e resgatar o hábito de pensar analogicamente no sentir o conhecimento. Para isso foram considerados autores que voltaram seus estudos para a questão do afeto, bem como de crenças, atitudes e emoções no contexto de Educação Matemática. A presente reflexão aponta para a catalização da atribuição de significados pelo uso do pensamento analógico no contexto afetivo. Ressalta ainda a importância da observação de tendências afeto-cognitivas na relação professor-estudante, fatores estes que aproximam os objetos de estudo, no que concerne o interesse pela investigação e descobertas matemáticas.

O trabalho contemplou o pensamento analógico na perspectiva da atribuição de significados aos objetos matemáticos privilegiando temas correlatos tais com a Heurística e a similaridade, intrínsecos a este universo, que auxiliaram o alcance dos objetivos propostos. Neste trabalho a analogia foi contemplada conceitual e historicamente no contexto do pensamento ocidental; seus principais procedimentos, tais como a transferência, o mapeamento e a generalização, foram estudados ressaltando sua importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Segundo Gentner (2013, p. 11) a analogia é um poderoso mecanismo de aprendizagem por meio da qual as relações estruturais são compartilhadas Gentner (2013, p.

⁴⁴ ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, P. Gerdes (Eds.), **Mathematics Education and Society**. Paris: United Nations Educational Scientific, 1988. p. 99-101.

10). De acordo com Polya (1986, p. 33) a inferência por analogia apresenta-se como “o tipo mais comum de conclusão e é o essencial”.

Destaca-se o caráter heurístico da analogia e a plausibilidade da heurística que segundo o mesmo autor “[...] não apresentam a certeza de uma demonstração rigorosa” (POLYA, 1986, p. 149). A analogia é objeto da Heurística e portanto também serve como ponte para demonstrações rigorosas. Cabe notar ainda que a analogia aumenta o conhecimento por meio de generalizações, isto significa que os resultados das comparações entre objetos análogos podem ser usados no futuro promovendo assim o alcance de novos conhecimentos e transferindo resultados que possam ser usados em cenários com relações estruturais semelhantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou reafirmar o pensamento analógico como propulsor da atribuição de significados aos conceitos matemáticos, identificando seus aspectos históricos e teóricos. Para apontar suas especificidades, valeu-se da investigação de temas interconectados tais como Heurística e similaridade nos quais se insere o pensamento analógico, fortemente munido de um caráter relacional. Destacou-se o caráter heurístico da analogia, tendo a similaridade como premissa e a reafirmação de sua condição básica de estabelecer movimentos de transferência em termos de estrutura comparativa entre objetos fonte e alvo.

Desta forma, a relação entre eles resulta em novos e plausíveis conhecimentos que possibilitam atribuir significação e compreensão de conceitos matemáticos. Na elaboração das analogias, sugere-se destacar a necessidade de priorizar conceitos conhecidos ao interlocutor com características parcialmente similares em relação ao novo conceito (alvo), visto que o propósito é compreender o novo conceito fazendo uso de atributos do conceito conhecido (fonte). Neste cenário, as analogias contribuem para visualização, análise e construção de conceitos em situações de difícil assimilação, assim como para reflexões e inferências decorrentes de suas apreensões.

Figura 13: Analogia como mapeamento
 Fonte: Gentner e Smith (2013, p. 7)

A figura acima exemplifica a analogia como o mapeamento de uma estrutura: (A) Alinhamento inicial de estruturas relacionais comuns. (B) Candidatos a inferências são gerados a partir do alinhamento inicial das duas representações. (C) Abstração como um possível resultado do alinhamento da estrutura relacional comum.

As inferências analógicas decorrentes do processo de mapeamento são de especial relevância (GENTNER; SMITH, 2013, p. 6). Tais inferências conferem consistência ao processo e resultam de mapeamentos criteriosos entre objetos matemáticos, pois nem todos os atributos do objeto fonte estarão alinhados com os do objeto alvo. Assim sendo, para garantir a veracidade das inferências, um critério rigoroso de seleção é necessário. Conforme mencionado anteriormente, (tópico 3.2, p. 47) o mapeamento – essencial na analogia – é da mesma forma um importante processo a partir do qual decorrem as inferências analógicas válidas que propiciarão transferência de conhecimentos e significados aos novos conceitos estudados.

No processo de ensino e aprendizagem, analogias contribuem para a implementação do raciocínio lógico, visto que inferências resultam em encadeamento lógico de proposições. Cabe aqui ressaltar que a legitimação de analogias fortes se dá pela validação de tais inferências. Este fato contribui para o exercício das escolhas consistentes, análises minuciosas e atribuição de significado aos objetos investigados. Sugere-se ainda que este processo seja implementado sem interrupção, desde o início da escola básica. Os atributos escolhidos do objeto fonte devem ter forte relação, coerência e consistência com os do objeto alvo, pois as inferências válidas decorrerão desta escolha.

Um fator adicional que influencia se a analogia será útil envolve a seleção do domínio fonte. Quando falamos sobre processamento analógicos, supõe-se que um apropriado domínio fonte foi selecionado. No entanto, escolhe-se, às vezes, objetos análogos inadequados, que podem levar a inferências equivocadas e falsos conhecimentos.⁴⁵ (GENTNER; SMITH, 2013, p. 19, tradução da autora)

As argumentações, abstrações e entendimentos decorrentes do uso da analogia no processo de ensino-aprendizagem da Matemática advém da escolha do objeto fonte. Presume-se que tal objeto, selecionado como integrante do mapeamento entre objetos fonte e alvo, faça parte do conhecimento prévio dos estudantes.

⁴⁵ One additional factor that influences whether analogy will be useful involves the selection of the base domain. When we talk about analogical processing, it is usually with the assumption that an appropriate base domain has been selected. However, people sometimes choose inappropriate source analogs, which can lead to misguided inferences and faulty knowledge. (GENTNER; SMITH, 2013, p.19)

O processo de alinhamento é acompanhado por um conjunto de restrições tácitas que levam à consistência estrutural. Consistência estrutural implica em uma correspondência biunívoca, a qual requer que cada elemento de uma representação corresponda (no máximo) a um elemento da outra representação.⁴⁶ (GENTNER; SMITH, 2013, p. 5, tradução da autora)

A consistência estrutural inicial é fundamental para o estabelecimento de analogias fortes. Após a correspondência dos objetos similares entre os domínios, outras informações relevantes podem ser transferidas da fonte para o alvo com base neste mapeamento. Tais informações sedimentam os conhecimentos prévios e confirmam a continuidade das relações entre os diferentes conteúdos e domínios matemáticos.

No caso de resolução de problemas, este procedimento auxilia na revisão das relações estruturais do objeto fonte e na transferência de significados entre objetos fonte e alvo baseado nas similaridades das relações estruturais mapeadas. Tais transferências geram inferências analógicas de fundamental importância no processo de mapeamento, porém é essencial que sejam tratadas com critério para que sejam consideradas consistentes e verdadeiras. Por vezes, segundo Gentner e Smith (2013), nem toda analogia produz inferências; em alguns casos transmite abstrações comuns. No caso do estudo de novos conteúdos a escolha do objeto fonte deve ser feita igualmente com rigor. Assim, temos que as relações estruturais são importantes para a atribuição de significados aos objetos matemáticos quando do uso de analogias.

O raciocínio por similaridade e analogia pode tornar o conhecimento mais flexível e facilitar o aprendizado de regras gerais e aquisição de novos esquemas (VOSNIADOU; ORTONY, 1989, p. 14). Neste sentido, aponta-se que a similaridade não é uma construção fixa; mas se transforma de acordo com a base de conhecimento do estudante (BREWER, 1989, p. 535). Estudos das similaridades entre objetos fonte e alvo sedimentam o aprendizado na medida em que evidenciam aspectos da estrutura do domínio, bem como características dos elementos matemático em questão.

De acordo com Gentner e Smith (2013):

A diferença entre analogia e similaridade pode ser considerada dentro de um espaço de semelhança definido pelo grau de semelhança do objeto-atributo e o grau de semelhança relacional [...] Quando uma comparação partilha um elevado grau de semelhança relacional, mas tem muito pouca semelhança de atributo, consideramos que é uma analogia. Como a quantidade de atributos de similaridade aumenta, torna-

⁴⁶ The alignment process is guided by a set of tacit constraints that lead to structural consistency. Structural consistency entails one-to-one correspondence, which requires that each element of a representation match (at most) one element of the other representation. (GENTNER; SMITH, 2013, p. 5)

se uma comparação de semelhança literal. Assim, a distinção entre a semelhança literal e analogia pura é um contínuo, não uma dicotomia: Um par de casos que compartilha estrutura relacional pode ser puramente o caso de analogia (a raiva é como uma chaleira), literalmente semelhante (esta chaleira é como aquela chaleira), ou algo entre analogia e semelhança (a máquina a vapor é como uma chaleira). Estas distinções não são meramente uma questão de terminologia; eles são importantes psicologicamente. Comparações globais de similaridade são muito mais fáceis de observar e mapear que comparações puramente analógicas, e eles podem servir como ponto de entrada para as crianças e para estudantes novatos, [...] ⁴⁷ (GENTNER, 2013, p.10, tradução da autora)

A investigação da similaridade entre conceitos fonte e alvo é fator relevante no processo de atribuição de sentido aos conceitos matemáticos, o uso mecânico de tal recurso deve ser evitado. Faz-se necessária a escolha de similaridades adequadas para o surgimento de analogias significativas que contribuam para o entendimento de novos conceitos e conjecturas.

O trabalho buscou ainda refletir sobre a influência do afeto durante o processo de ensino-aprendizagem da Matemática no contexto do pensamento analógico a partir de três constructos ligados à afetividade: crenças, atitudes e emoções. A presença dos aspectos positivos destes constructos, no âmbito da disciplina em questão, favorece o uso da analogia e aumento da auto-estima de estudantes e professores.

Pesquisas que monitorem as crenças no processo de ensino e aprendizagem são de especial relevância; seus resultados devem ser analisados visando o aprimoramento de aplicações analógicas significativas que incentivem o interesse pelo conhecimento matemático no contexto cultural dos estudantes. Esta prática tem potencial de gerar novas atribuições de significado aos objetos matemáticos, e de ampliar a função semântica de tais aplicações no processo de apreensão. Tal fato é provável, na medida em que crenças positivas dos professores são transferidas naturalmente aos estudantes e possibilitam o estabelecimento de analogias favoráveis à compreensão e novas abstrações. De acordo com as investigações realizadas nesta pesquisa, sugere-se em relação a afetividade que:

⁴⁷ The difference between analogy and similarity can be thought of within a similarity space defined by the degree of object-attribute similarity and the degree of relational similarity [...] When a comparison shared a high degree of relational similarity, but has very little attribute similarity, we consider it an analogy. As the amount of attribute similarity increases, the comparison becomes one of literal similarity. Thus, the distinction between literal similarity and pure analogy is a continuum, not a dichotomy: A pair of cases that shares relational structure can be purely analogical (anger is like a teakettle), literally similar (this teakettle is like that teakettle), or somewhere in between (a steam engine is like a teakettle). These distinctions are not merely a matter of terminology; they are important psychologically. Overall similarity comparisons are far easier to notice and map than purely analogical comparisons, and they can serve as the entry point for children and other novice learners, [...] (GENTNER, 2013, p.10)

1. As crenças positivas ou eficazes propiciam uma interação entre os agentes envolvidos na dinâmica de ensino e aprendizagem, na medida em que possibilitam uma conexão maior com os conhecimentos prévios estimulando o uso da analogia na apreensão do conteúdo matemático.
2. [...] quanto mais comprometido for o professor no sentido de colaborar para o desenvolvimento da dimensão afetivo-cognitiva e em especial de atitudes que resgatem a confiança no autodesempenho dos estudantes em relação a Matemática, maior a efetividade do pensamento analógico como auxílio ao desempenho do estudante, havendo terreno fértil para a apreensão, atribuição e transferências de significados matemáticos.
3. [...] pode-se estabelecer um paralelo entre a temperatura afetivo-emocional e a empatia com o conhecimento, na medida em que a aproximação entre professores e estudantes tende a intensificar a qualidade do aprendizado e diminuir a distância entre o “conhecedor” e o “conhecido” (RICOEUR, 1992, p. 157). Neste sentido o grau de confiança estabelecido na relação professor/aluno cataliza o aprendizado de Matemática, particularmente no que concerne à fluidez no resgate dos conceitos análogos já estudados para auxiliar este processo. [...] tem-se na radiografia cognitivo/afetiva um meio de observar e orientar os estudantes a serviço de desenvolver suas competências, assim como adequar a temperatura afetivo-emocional para propósito de atribuição de significados aos objetos matemáticos.

Os três constructos interligam-se e complementam-se de forma a explicitar que seus aspectos positivos estimulam o hábito de pensar analogicamente na atribuição de significados a conceitos matemáticos.

De acordo com Gentner (2013, p. 10) “The distinction between analogy and literal similarity is that in analogy, only the relational structure is shared, whereas in literal similarity (or overall similarity), both relational structure and object properties are shared”.

De fato, as relações estruturais mapeadas entre conteúdos de diferentes domínios conferem significado aos objetos matemáticos quando do uso da analogia. Uma das características da Matemática é a interrelação entre seus objetos e conteúdos: “Perto de qualquer fato matemático particular encontramos outros fatos relacionados” (STEWART, 1996, p. 39). Este trabalho procura evidenciar a existência desta interrelação – na forma de analogias – que pode servir de recurso para entendimento e explanação dos diversos conceitos; as características que catalisam este processo são justamente as relações estruturais.

Os resultados alcançados com o uso do raciocínio analógico, sejam eles inferências ou abstrações, contribuem para que os conteúdos estudados sejam assimilados de forma dinâmica a partir de conhecimentos preliminares.

Ainda confirmando o uso das relações estruturais no processo educacional, segundo Richland, Zur e Holyoak (2007, p. 1129), professores de Hong Kong e japoneses demonstram ser mais atentos para as necessidades de usos dos processos de comparações relacionais que os professores americanos. Os resultados das pesquisas dos referidos autores servem de exemplos da pertinência de usar analogia relacionais como recurso para a apreensão dos conhecimentos matemáticos. Acredita-se que este fato comprova os benefícios que o uso da analogia traz no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Polya (1986) observa que “Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto, objetos análogos coincidem em certas relações de suas respectivas partes” (POLYA, 1986, p. 29). Destaca-se a importância em apresentar as conexões existentes entre os conteúdos exaltando as relações estruturais para a interiorização do conhecimento matemático.

As analogias colocam em pauta situações de aprendizado de forma efetiva por conectar antigos (fonte) e novos (alvo) conhecimentos. O mapeamento das relações estruturais entre conceitos catalisam a assimilação dos análogos, intensificando a compreensão dos fundamentos e atribuindo significados aos elementos estudados.

Em situações de resolução de problemas os estudantes, ao usar analogias, tendem a ampliar seus conhecimentos e probabilidades de compreender as relações estruturais que fundamentam os conceitos.

As conexões que se estabelecem a partir de então permitem o uso dos resultados, abstrações e inferências em situações futuras.

As transferências de conhecimentos e significados que se estabelecem entre domínios fonte e alvo enriquecem estudantes e professores e descortinam a possibilidade do surgimento de novas leis e significações.

Finalmente, a presente pesquisa reafirma a importância da analogia na atribuição de significados a objetos matemáticos, na cognição, na tomada de decisões, na busca de inferências, na compreensão de conceitos, na descoberta e na criatividade.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados**. - 3a. Ed. - São Paulo: Escrituras Editora, 2003.
- AGASSI, J. Analogies as Generalizations. **Philosophy of Science**. Volume 31, Issue 4 (Oct., 1964), p. 351 – 356.
- AIKEN, L. R. & DREGER, R. M. Personality correlates of attitude toward Mathematics. **Journal of Educational Research**, 56 (9), p. 476-480, 1963.
- AIKEN, L. R. Jr. Attitudes toward mathematics. **Review of Educational Research**, 40, 551-596, 1970.
- AKKUS, R.; HAND, B. Mathematics Reasoning Heuristic (MRH): Writing-To-Learn. In: **27th annual meeting** of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.), 2005, Virginia Tech. Proceedings. Virginia Tech. 2005. p. 1.
- ALLPORT, G. W. Attitudes in the History of Social Psychology. In: Jahoda, M. & Warren (Ed.). **Attitudes**. p.19. England: Penguin books, 1970.
- ALVES, H. O.; LUZ, A. A. Aspectos cognitivos, metacognitivos e afetivos envolvidos na resolução de problemas matemáticos. In: **Revista contemporânea de educação**. V. 2, no. 3, Faculdade de Educação – UFRJ, 2007.
- ANTONIETTI, A. **Analogical discoveries: Identifying Similarities to solve problems**. Roma: Carossi editore, 2001.
- ARANTES, V. A. Afetividade e Cognição: Rompendo a Dicotomia na educação. In: OLIVEIRA, M. K ; TRENTO, D.; REGO, T. (org). **Psicologia, Educação e as temáticas da vida contemporânea**. São Paulo: Moderna, 2002.
- ARDILES, R. N. Um estudo sobre as Concepções, Crenças e Atitudes dos professores em relação à Matemática. **Dissertação**. Faculdade de Educação / Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2007.
- ASHWORTH, E. J. Medieval Theories of Analogy. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), 2013. Disponível em: <<http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/analogy-medieval/>>. Acesso em: 21 nov. 2013.
- AUBUSSON, P. J.; HARRISON, A. G.; RITCHIE, S.M. **Metaphor and Analogy in Science Education**. Netherlands: Springer, 2006.
- AZEVEDO, F. F. S. **Dicionário analógico da língua portuguesa** (Idéias Afins). Brasília: Coedição – Coordenada Editor e Thesaurus Editora, 1983.

BACHELARD, G. **Ensaio sobre o conhecimento aproximado**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.

BALIEIRO FILHO, I. F. Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística. 2004. 228 f. **Tese** (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico – Científicos) - Rio Claro: IGCE - Cp. de Rio Claro - UNESP, 2004.

BALIEIRO FILHO, I. F. Análise e síntese: vestígios de heurística no método de demonstração dos antigos geômetras. **IX ENEM**. Encontro Nacional de Educação matemática, 2007.

BANDURA, A. Self-efficacy. In V.S. Ramachaudran (Ed.) **Encyclopedia of human behavior**. Vol. 4, p. 71-81. New York: Academic Press, 1994.

BARTHA, P. Analogy and Analogical Reasoning. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Fall 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/reasoning-analogy/>>. Acesso em: 20 jul. 2014.

BATTISTI, C. A. O método de análise cartesiano e o seu fundamento. In: **Scientiæ Studia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 571-96, 2010.

BLANCO, L. J.; BARONA, E. G.; CARRASCO, A. C. The affective domain in Mathematics learning. **International Electronic Journal Of Mathematics Education** / Vol.1 No.1, October 2006.

BLANCO, L. J.; BARONA, E. G.; CARRASCO, A. C. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. **The Mathematics Enthusiast**, Vol. 10, nos.1 e 2, p. 335-364, 2013.

BLANCO, L. J.; CARRASCO, A. C. Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. **XI SEIEM**. Simposio de Investigación y Educación Matemática, Universidad de La Laguna, 2007.

BICUDO, M. A. V., GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 2a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BITTAR, Eduardo C. B. O aristotelismo e o pensamento árabe: Averróis e a recepção de Aristóteles no mundo medieval. **Revista Portuguesa de História Do Livro e da Edição** - Ano XII, no. 24 - 2009, pp. 61-103.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 5^a. a 8^a. séries**. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 1998.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 2001.

BREWER, W. L. The activation and acquisition of knowledge. In: VOSNIADOU, S.; ORTONY, A. **Similarity and Analogical Reasoning: Analogy**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. p. 535.

BRITO, M. R. F. Um Estudo sobre as Atitudes em relação a Matemática em estudantes de 1o e 2o graus. **Tese de Livre Docência**, FE-UNICAMP. Campinas-SP, 1996.

BRITO, M. R. F. **Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática**. Zetetiké, Campinas, v. 6, n. 9, 1998, p. 109-162.

BUNGE, M. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Perspectivas, 2002.

CAÑON, C. **La Matemática: creación y descubrimiento**. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 1993.

CAÑON, C. La Modas e creencias en epistemología matemática. Sua relevancia para la didáctica. In: **Actas de las VII JAEN**, Madrid: Sociedad Madrileña del Profesores de matemáticas Enma Castelnuevo, p. 27-31, 1995.

CASPER, Michael; ROESKEN, Bettina. **Current state of research on mathematical beliefs XVII**. Germany: Ruhr-Universität Bochum, 2011.

CHACÓN, Inéz Ma Gómez. **Matemática Emocional: Os Afetos na Aprendizagem Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CHACÓN, Inéz Ma Gómez. **Matemática Emocional: Los afectos em el aprendizaje matemático**. Madri: Narcea ediciones, 2000.

DANTAS, Heloysa. **Emoção e ação pedagógica na infância: Contribuição de Wallon**. Temas em Psicologia, nº 3, 1993.

DANTAS, Heloysa. As fontes do Erro. In: Aquino, J. A. (Org.) **Erros e fracassos na escola: alternativas teóricas e práticas**. – 5a. Ed. – p. 68, São Paulo: Summus Editorial, 1997.

DeBELLIS, Valerie A.; GOLDIN, G. A. **Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective**. Disponível em: <<http://deimos3.apple.com/WebObjects/Core.woa/DownloadTrackPreview/tamu-public.2117699024.02117699032.2276558405.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 2013.

DESCARTES, R. **Règles pour la direction de l'esprit**. Disponível em: <http://lycl.fr/upload/profil_admin/doc_4fa934a4a20a4.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2014.

DOBARRO, Viviane. R. Solução de Problemas e Tipos de Mente Matemática: relações com as atitudes e crenças de autoeficácia. **Tese** (Doutorado em Educação). Campinas, SP: Unicamp, 2007.

DOBARRO, Viviane R. e BRITO, Márcia R.F. Atitude e crença de autoeficácia: relações com o desempenho em Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n. 2, 2010. p. 199- 220.

DURBIN, P. T. **Dictionary of concepts in the Philosophy of Science**. Connecticut: Greenwood Press, 1988.

ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, P. Gerdes (Eds.), **Mathematics Education and Society**. Paris: United Nations Educational Scientific, 1988. p. 99-101.

FALLAS, L. A. La Analogia Pitagorica. **Revista de Filosofia de la Universidad de Costa Rica**. Número extraordinário, 1992.

FERREIRA, A. L.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M. Contribuições de Henri Wallon à relação cognição e afetividade na educação. **Educar**, n. 36, p. 21-38. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

FREGE, G. **Sobre o sentido e a referência**. (1962). Disponível em: <<http://pt.scribd.com/doc/56489804/Frege-Sobre-o-Sentido-e-a-Referencia>>. Acesso em: 15 dez. 2012.

GALVÃO, Izabel. Expressividade e emoção segundo a perspectiva de Wallon. In: Aquino, J.A (Coord.), Arantes, V. A. (Org.) **Afetividade na escola: alternativas teóricas e práticas**, São Paulo: Summus Editorial, 2003. p. 83.

GENTNER, D. Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy. **Cognitive Science**, v. 7, 1983. p. 155-170.

GENTNER, D. The mechanisms of analogical learning. In: S. Vosniadou and A. Ortony. **Similarity and analogical reasoning**. London: Cambridge University Press, 1989. p. 199 – 241.

GENTNER, D. et al. Two forces in the development of relational similarity. In: HALFORD G.; SIMON T. (Eds.) **Developing Cognitive competence: New approaches to process modeling**, Hillsdale, 1995. p. 263 – 313.

GENTNER, D. et al. What difference reveals about similarity. **Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal**, Austin, v. 36, n. 6, 2012. p. 1019 – 1050.

GENTNER, D.; SMITH, L. A. Analogical learning and reasoning. In: D. Reisberg (Ed.), **The Oxford handbook of Cognitive Psychology**. New York, NY: Oxford university Press, 2013. p. 668 – 681.

GLYNN, S. M.; TAASOBSHIRAZY, G., FAWLER, S. **Analogies: Explanatory tools in web-based science instruction**. Educational Technology, 2007.

GONÇALEZ, Maria Helena de C. de Castro; BRITO, Márcia Regina F. **Atitudes (des)favoráveis com relação a matemática**. Campinas: Zetetiké, v.4, n.6, jul/dez.1996.

GUIMARÃES, G.G. Representações do processo afetivo e do aprendizado da matemática para os jovens. **XXXII Reunião Annual da ANPED**. 2009.

HALLYN, F. **Metaphor and Analogy in the Sciences**. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

HAMPTON, J. A. The role of similarity in natural categorization. In: M.Ramscar, U.Hahn, E.Cambouropoulos, & H.Pain (Eds.). **Similarity and categorization**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

HARRE, R. **Theories of things**. London and N.Y., 1961.

HARRÉ, R.; ARONSON, J.L.; WAY, E.C. Apparatus as models of nature. In: Fernand Hallyn (Ed.) **Metaphor and analogy in the sciences**. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academics Publishers, 2000.

HARRISON, A. G.; TREAGUST, D. F. Teaching and learning with analogies: Friend or Foe?. In AUBUSSON, P. J.; HARRISON, A. G.; RITCHIE, S.M. **Metaphor and Analogy in Science Education**. Netherlands: Springer, 2006.

HART, L. C. Beliefs and perspectives of first-year, alternative preparation, elementary teachers in urban classrooms. **School Science and Mathematics**, 104 (2), p. 79-88, 2004.

HESSE, M. B. **Forces and fields**. Nelsons, 1961.

HOFFDING, H. **On analogy and its philosophical importance**. Oxford University Press, New Series, Vol 14, Issue 54, Apr. 1905.

HOLYOAK, K. J.; NOVICK, L. R.; METZ, E. R. Component processes in analogical transfer: Mapping, pattern completion, and adaptation. In K. J. Holyoak & J. A. Barnden (Eds), **Advances in connectionist and neural computation theory: Vol 2. Analogical connections**. Norwood, NJ: Ablex, 1994. p. 113 – 180.

JAKOBSON R. **Linguística e Comunicação**. São Paulo: Editora Cultrix, 2007.

JAPIASSÚ, H; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed. 1996.

KLINE, M. **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. México: Fondo de cultura económica, 2001.

KNOBLOCH E. L'analogie et la pensée Mathématique. In: RASHED, R. **Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique**. Paris: Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1991. p. 217 – 237.

KROESCH, S. Change of meaning by analogy. In: **Studies in honor of Hermann Collitz**. New York: Books for Libraries Press, 1969. p. 176 – 189.

LAKOF, G.; R, Núñez. **Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being**. New York. Basic Books. 2000.

LANDA, L. N. **Instructional regulation and control: Cybernetics, algorithmization, and heuristics in education**. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications, 1976.

LE BON, G. **As opiniões e as crenças**. Disponível em:

<<http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/lebon.html>>. Acesso em: 27 jun. 2013.

MACHADO, M. C. Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática, crenças de autoeficácia matemática e o desempenho escolar dos estudantes. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013.

MALMIVUORI, Marja-Liisa. The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation of personal learning processes: The case of Mathematics. **Dissertation**. Helsinki: Helsinki University Press, 2001.

MANDLER, G. **Mind and emotion**. Nova York: Wiley, 1975.

MANDLER, G. **Mind and body**: Psychology of emotion and science. Nova York: Norton, 1984.

MANDLER, G. **Cognitive psychology**: An essay in cognitive science. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1985.

MANDLER, G. Historia y desarrollo de la psicología de la emoción. In: L. Mayor (Comp.), **Psicología de la emoción** (Teoría básica e investigación). Valencia: Promolibro, 1988. p. 9 – 71.

MANDLER, G. Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. IN: D. B. McLeod e V. M. Adams (Eds) **Affect and mathematical problem solving**: A new perspective. Nova York: Springer-Verlag, p. 3-19, 1989a.

MANDLER, G. Affect and learning: reflections and prospects. In: D. B. McLeod e V. M. Adams (Eds) **Affect and mathematical problem solving**: A new perspective. Nova York: Springer-Verlag, p. 237-244, 1989b.

MCINERNY, R. M. Metaphor and analogy. In: ROSS, J. F. **Inquiries into Medieval Philosophy**. Connecticut: Greenwood Publishing Co., 1971. Cap. 4, p. 75 – 96.

MCLEOD, D. B. Affective issues in research on teaching mathematical problem solving. In: E. A. Silver (Ed), **Teaching and learning mathematical problem solving**: multiple research perspectives. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. p. 267-279, 1985.

MCLEOD, D. B. Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. **Journal for Research in Mathematics Education**, 19, 134-141, 1988.

MCLEOD, D. B. Information-processing theories and mathematics learning: The role of affect. **International Journal of Educational Research**, 14, 13-29, 1990.

MCLEOD, D. B. Research on affect in Mathematics education: A Reconceptualization. In: Douglas A. Grows (Ed.). **Handbook of research on Mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, NCTM. p. 575-596, 1992.

MCLEOD, D. B. Research on affect and mathematics learning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25, 637-647, 1994.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Edições Loyola, 2004.

MORAES, J. F. D. **Atitudes em relação à Matemática**: Um estudo transversal com alunos da educação básica de escolas públicas do Estado do Rio Grande do Sul. EREMATSUL – XVI Edição, 2010.

NOVICK, L.R. Analogical transfer, problem similarity, and expertise. **Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition**, 14, 510-520, 1988.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo**: Uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática. São Paulo: Editora Unesp, 1993.

PAPPUS, A. **La Collection Mathématique** 2v. Trad. P. V. Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982.

PEASE, A.; GUHE M.; SMAILL A. Analogy formulation and modification in geometry. In: **Proceedings of the Second International Conference on Analogy** (p. 358–364), 2009.

PERELMAN, C.; TYTECA, L.O. **Tratado da argumentação**: A nova retórica. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

PÉRES, C. R.; CUBERO, L. N. **Emociones, Cultura y Educación**. Sevilla: Secretariado de publicaciones Universidad de Sevilla, 2009.

PETERSON, B. J. An instructional design model for heuristics. 122 f. **Ph. D.** (Doctor of Philosophy School of Education). School of Education, Indiana University, 2007

PIMM, D. Metaphor and analogy in Mathematics. **IV Annual conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Berkeley. 1981.

PIRES, V. L.; DIAS, A. B. F. A questão da significação na língua para Benveniste e para Bakhtin: é possível uma aproximação? **ReVEL**, vol. 7, n. 13, 2009.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**: Patterns of plausible inference. Vol. II. New Jersey: Princeton University Press, 1968.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**: Induction and analogy in Mathematics. Vol. I. 8a. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1973.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

PORTO, A. **Geometria Espacial**: Volume do tronco da pirâmide e do cone. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=llTQIO9Ud7Q>>. Acesso em: 20 jul. 2014.

RICHLAND, L. E., HOLYOAK, K.J., STIGLER, J. W. **Analogy use in eight-grade Mathematics classrooms**. *Cognition and Instruction* 22 (1), 37-60. Los Angeles, 2004.

RICHLAND, L. E., ZUR, O., HOLYOAK, K.J. Cognitive supports for analogies in the Mathematics classroom. **Science: Education Forum**. Vol. 316, 25 May 2007.

RICOEUR, P. **Teoria da interpretação: O discurso e o excesso de significação**. Lisboa: Edições 70, 1976.

RICOEUR, P. **Imaginação e metáfora**. Psychologie Médicale, Paris, v.14, n. 12, p. 1883 – 1887, 1982.

RICOEUR, P. O processo metafórico como cognição, imaginação e sentimento. In: SACKS, S. (org.). **Da Metáfora**. P. 145-160. São Paulo: Edic-Pontes, 1992.

RICOEUR, P. **A metáfora viva**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

RIPS, L.J. Similarity, typicality, and categorization. In: VOSNIADOU, S. & ORTONY, A. **Similarity and analogical reasoning**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

ROSS, J. F. **Inquiries into Medieval Philosophy**. Connecticut: Greenwood Publishing Co., 1971.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd, 1985.

SCHOENFELD, A. H. How we think: a theory of human decision-making with a focus on teaching. Korea, Seoul: **12^o ICME - COEX**, 2012.

SÉVÉRAC, Pascal. Conhecimento e afetividade em Spinoza. In: **O mais potente dos afetos: Spinoza e Nietzsche**. MARTINS, André (org.), São Paulo: Martins Fontes, 2009.

SILVER, E. A. Research on teaching mathematical problema solving: Some underrepresented themes and needed directions. In: E. A. Silver (Ed), **Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives** (p. 247-266). Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1985.

SOARES, Ismar de Oliveira. Educomunicação e cidadania: a construção de um campo a partir da prática social. In: PERUZZO, Cicília Maria Krohling; ALMEIDA, Fernando Ferreira de (org.). **Comunicação para a cidadania**. Salvador: Intercom/UINEB, 2003.

STEWART, I. **Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996

STRUMIA, A. Analogy. 2010. In **INTERS – Interdisciplinary Encyclopedia of Religion and Science**. Disponível em: <<http://www.disf.org/en/voci/29.asp>>. Acesso em: 03.set.2011.

SZABÓ, A. **The Beginnings of Greek Mathematics**. Reidel: Dordrecht, 1978.

TIONG, J. Y. S.; HEDBERG, J.; LIOE, L. T. **A Metacognitive Approach to Support Heuristic Solution of Mathematical Problems**. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University, 2005.

TIONG, J. Y. S. **Top-Down Approach to Teaching Problem Solving Heuristics in Mathematics**. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University, 2005.

THOMPSON, A. G. The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. **Educational Studies in Mathematics**, 15, p. 105-127, 1984.

TORISU, E. M.; FERREIRA, A. C. A teoria social cognitiva e o ensino-aprendizagem da matemática: considerações sobre as crenças de autoeficácia matemática. **Ciências & Cognição**, Vol 14 (3): p. 168-177, 2009.

UTSUMI, M. C. e LIMA, R. C. P. Atitudes e representações de alunas de Pedagogia em relação à Matemática. **Anais da 29ª. Reunião Anual da Anped**. Caxambu: Anped, p. 1-22, 2006.

UTSUMI, M. C.; LIMA, R. C. P. Um estudo sobre as atitudes de alunas de Pedagogia em relação à Matemática. **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), v. 24, p. 46- 54, 2008a.

UTSUMI, M. C.; CAZORLA, I. M. ; SANTANA, E. R. S. ; VITA, A. C. Relação entre o domínio afetivo e o desempenho em Matemática de estudantes das séries iniciais do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 89, p. 145-161, 2008b.

UTSUMI, M. C.; PRADO, E. P. A. As variáveis afetivas e a aprendizagem em Matemática. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba, 2013.

VAZQUEZ, D. Metáfora y analogía en Aristóteles: Su distinción y uso en la ciencia y la filosofía. In **Tópicos** 38, 2010.

VOSNIADOU, S.; ORTONY, A. **Similarity and Analogical Reasoning: Analogy**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

WALLON, Henri. **Psicologia e Educação da Infância**. Lisboa: Estampa, 1975.

WALLON, Henri. **A evolução psicológica da criança**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.