UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

LUZIA MAYA KIKUCHI

*A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos
invariantes operatórios no conteúdo de álgebra.
(versão corrigida)*

São Paulo

2019

LUZIA MAYA KIKUCHI

*A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos
invariantes operatórios no conteúdo de álgebra.
(versão corrigida)*

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Educação, da Faculdade de Educação, da
Universidade de São Paulo, como requisito para
obtenção do título de Doutora em Educação.

Área de concentração: Ensino de Ciências e
Matemática

Orientador: Prof. LD. Elio Carlos Ricardo

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo da Publicação

Ficha elaborada pelo Sistema de Geração Automática a partir de dados fornecidos pelo(a) autor(a)
Bibliotecária da FE/USP: Nicolly Soares Leite - CRB-8/8204

Kt Kikuchi, Luzia Maya
 A Teoria dos Campos Conceituais e os invariantes
operatórios no conteúdo de Álgebra / Luzia Maya
Kikuchi; orientador Elio Carlos Ricardo. -- São
Paulo, 2019.
 445 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação
Educação Científica, Matemática e Tecnológica) --
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo,
2019.

 1. Educação Matemática. 2. Ensino e Aprendizagem.
3. Teoria dos Campos Conceituais. 4. Invariantes
Operatórios. 5. Teoria dos Modelos Organizadores do
Pensamento. I. Ricardo, Elio Carlos, orient. II.
Título.

Nome: KIKUCHI, L. M.

Título: A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação, da Faculdade de Educação, da Universidade de São Paulo, como requisito para obtenção do título de Doutora em Educação.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. LD. Elio Carlos Ricardo (presidente)

Instituição: FE-USP

Prof. LD. Antonio Carlos Brolezzi

Instituição: IME-USP

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Instituição: PUC-SP

Prof. Dr. Mikael Frank Rezende Junior

Instituição: UNIFEI

Prof. Dr. Alexandre Campos

Instituição: UFCG

Dedico este trabalho em memória de minha querida sogra, Dona Shyrlei Aparecida Lourenço Rezende Martins, cuja sua graça, coragem e generosidade serviram de fonte de inspiração nos momentos mais difíceis de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Eu poderia escrever estes agradecimentos na forma mais simples e burocrática, porém, sei que acabarei sendo injusta com pessoas que também foram essenciais para a conclusão deste trabalho. Neste período do doutorado, aprendi que, na vida, às vezes, esquecemos de dar valor a cada pessoa que cumpre uma determinada função e, mesmo sendo invisível aos nossos olhos, ela é essencial para o bom funcionamento de um sistema. Um exemplo concreto disso foi quando houve a greve dos caminhoneiros em maio de 2018. Só com uma manifestação daquela magnitude é que percebemos o quanto dependemos uns dos outros para viver em sociedade.

E com uma tese de doutorado não poderia ser diferente. Cada pessoa que conhecemos e com quem compartilhamos experiências, estando ou não relacionados à pesquisa, acabam nos servindo de inspiração. Isso inclui colegas que conheci em viagens a congressos, em cursos de aperfeiçoamento, disciplinas da pós e ex-colegas de trabalho, os próprios funcionários da secretaria da pós-graduação da FEUSP, professores dos cursos que realizei durante a pós-graduação e até de alunos que conheci durante a avaliação de trabalhos em uma feira de Ciências. Todos esses colaboraram indiretamente para que essa pesquisa fosse possível de ser concluída.

Mas, de forma especial, quero agradecer:

Ao meu orientador Prof. Elio Carlos Ricardo, que já me acompanha desde o mestrado, cujo seu exemplo de sabedoria e integridade sempre foi motivo de inspiração, não só como pesquisadora, mas também como pessoa.

Em sequência, à equipe pedagógica, aos alunos e funcionários da Escola Estadual Vereador Antônio de Ré por sempre terem me recebido de “portas-abertas” para a realização da pesquisa.

Aos colegas do grupo de pesquisa, coordenado pelo Prof. Elio Ricardo, cujas discussões e trocas de conhecimento sempre foram muito valiosas para o meu crescimento profissional e pessoal, além de permitir bons momentos de descontração, em momentos que ficamos bastante sobrecarregados e isolados em nossa pesquisa.

À CAPES pela concessão da bolsa de doutorado.

Ao Prof. Zaqueu Vieira Oliveira por ter me supervisionado no programa de aperfeiçoamento de ensino (PAE) e ter me concedido espaço para contribuir de forma direta com as atividades da disciplina. Tal experiência foi relevante para o aperfeiçoamento da minha formação como docente no Ensino Superior.

Aos professores Marco Antônio Bueno Filho e Antonio Carlos Brolezzi pelas sugestões e contribuições com a pesquisa durante o exame de qualificação.

Aos professores e chefes do Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR, Campus Pato Branco, pela compreensão e cooperação durante os meus afastamentos para poder concluir este trabalho de doutorado.

Ao meu marido Marcelo, pelo seu amor e apoio em todos os momentos, não só durante a escrita da tese como na vida.

Aos meus pais, que me deram a vida e o privilégio de alcançar horizontes cada vez maiores.

*Aceder à ciência é rejuvenescer espiritualmente,
é aceitar uma brusca mutação que contradiz o passado.*

Gaston Bachelard (1996)

RESUMO

KIKUCHI, L. M. **A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra**. 2019. 445 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Neste trabalho, levantamos os diferentes níveis de invariantes operatórios envolvendo o conteúdo de álgebra, manifestados pelos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, apoiando-se na teoria psicocognitiva proposta por Gérard Vergnaud (1990; 2009; 2014). Para tal efeito, desenvolvemos um estudo qualitativo, conduzido por meio de duas fases (piloto e final), no qual elaboramos atividades envolvendo cinco tipos de habilidades: percepção, generalização de conceitos matemáticos, reversibilidade do processo mental, raciocínio lógico e tipos de habilidades matemáticas, baseadas nos trabalhos desenvolvidos por Krutetskii (1976). Na primeira fase, aplicamos o estudo para 32 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública estadual, na região metropolitana de São Paulo, e analisamos as respostas dos estudantes com o apoio teórico-metodológico dos Modelos Organizadores do Pensamento (MORENO *et al.*, 2000), organizando as respostas dos estudantes em *perguntas-modelo*. Por meio da análise dessas *perguntas-modelo*, selecionamos nove estudantes, separados em três grupos distintos, de acordo com o nível de habilidade apresentado no estudo piloto, para compor a fase final do estudo. No Grupo 1, elegemos estudantes que apresentaram razoável desempenho no estudo preliminar, ainda com algumas dificuldades. O Grupo 2 foi composto por alunos que demonstraram muitos obstáculos, não só no conteúdo matemático como em habilidades essenciais para a compreensão daquele, tais como a leitura e interpretação de textos. Finalmente, no Grupo 3, escolhemos os estudantes que evidenciaram aspectos emocionais envolvidos em sua dificuldade de aprendizagem em Matemática e aplicamos atividades que não estejam ligados diretamente com conteúdos matemáticos, para avaliar outros aspectos que podem influenciar em suas dificuldades com a disciplina. Também conduzimos, com cada um desses grupos, uma entrevista semiestruturada após a realização das atividades por escrito. Tal diálogo permitiu levantar elementos que ficaram pouco evidentes em suas resoluções, auxiliando-nos no mapeamento das concepções dos estudantes sobre os conceitos de álgebra e, assim, associar os possíveis invariantes operatórios, de acordo com o *modelo* encontrado em suas resoluções. Por meio dessas análises, foi possível revelar que o nível e o tipo de representação do invariante operatório podem variar, dentro de um mesmo grupo, e até mesmo apresentar semelhanças entre grupos com habilidades diferentes. Desse modo, os resultados apontam que uma aparente resolução correta pode ainda esconder outras dificuldades de compreensão formal sobre o conceito e, por outro lado, o tipo de abordagem didática pode influenciar diretamente nos obstáculos e bloqueios emocionais em seus estudantes, em relação ao conteúdo algébrico.

Palavras-chave: Campos Conceituais, Invariantes Operatórios, Modelos Organizadores do Pensamento, Ensino e Aprendizagem de Álgebra no Ensino Fundamental

ABSTRACT

KIKUCHI, L. M. **Theory of Conceptual Fields and study of operational invariants in algebraic contents**. 2019. 445 p. Thesis (Doctor) – Education School, University of São Paulo, São Paulo, 2019.

In this work, we raised different levels of operational invariants involving algebraic content, manifested by students of final years of middle school (equivalent to 8th to 9th grade of K-12), relying on the cognitive theory proposed by Gérard Vergnaud (1990; 2009; 2014). For this extent, we developed a qualitative research, conducted in two stages (pilot and final), which we elaborated some activities involving five types of abilities: perception, generalization of mathematical concepts, reversibility of mental process, logical reasoning and some types of mathematical abilities, based on works developed by Krutetskii (1976). At the first stage, we applied a study for 32 students of 8th grade (K-12), from a public state school, in the metropolitan area of Sao Paulo, and we analyzed solutions of the students supported by Organizing Models of Thinking (MORENO et al., 2000), a theoretical and methodological framework, organizing solutions of the students in *question-models*. By means of the analysis of those *question-models*, we selected nine students, separated in three distinct groups, according to the level of ability showed on the pilot study, to compose the final stage of the study. On Group 1, we selected some students who presented a reasonable performance at preliminary study, although some difficulties could be seen. Group 2 was composed of students who demonstrated many obstacles, not only on mathematical contents but also in essential abilities to comprehend Mathematics, for instance, reading and understanding. Finally, on Group 3, we chose students who clearly showed some emotional aspects involving their difficulties in the learning of Mathematics and applied activities which are not involved to mathematical contents, to evaluate other issues influencing on their difficulties with that subject. Furthermore, we conducted a semi-structured interview with each group after the application of the written activities. Such dialogue allowed us to raise elements which were not clear on their solutions, helping us to make a map of conceptions of the students about algebraic ideas and, thus, to associate with some possible operational invariants, according to the model found on their solutions. According to those analyses, we could reveal that the level and type of operational invariant can vary, in the same group, and even show similarities between groups with different abilities. Consequently, the results indicate that an apparent correct solution could hide some difficulties in understanding of formal concepts, in addition to that, the didactical approach can straightly influence to some obstacles and emotional blockage on the students, in relation to algebraic contents.

Keywords: Conceptual Fields, Operational Invariants, Organizing Models of Thinking, Teaching and Learning of Algebra in Middle School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Um tipo de resolução de expressões dado por um estudante.....	36
Figura 1.2 – Outro tipo de resolução de expressões dado por um estudante.....	36
Figura 1.3 – Quantidade de alunos x quantidade de professores	39
Figura 2.1 – Esquema do modelo de análise didática dos erros	49
Figura 2.2 – Pergunta focal: O que é a Teoria dos Campos Conceituais?	71
Figura 2.3 – Pergunta focal: Qual a definição de “situação” nos Campos Conceituais?	72
Figura 2.4 – Pergunta focal: O que formam as estruturas multiplicativas?	72
Figura 2.5 – Pergunta focal: O que formam as estruturas aditivas?	73
Figura 4.1 – Resposta estudante 27: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	106
Figura 4.2 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V	107
Figura 4.3 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V	108
Figura 4.4 – Resposta estudante 6: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	109
Figura 4.5 – Resposta estudante 22: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	110
Figura 4.6 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V	110
Figura 4.7 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V	111
Figura 4.8 – Resposta estudante 21: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	111
Figura 4.9 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	112
Figura 4.10 – Resposta estudante 10: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V	112
Figura 4.11 – Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V	113
Figura 4.12 – Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V	113
Figura 4.13 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V	114
Figura 4.14 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V	114
Figura 4.15 – Resposta estudante 31: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	115
Figura 4.16 – Resposta estudante 24: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	116
Figura 4.17 – Resposta estudante 1: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	116
Figura 4.18 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	117
Figura 4.19 – Resposta estudante 26: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	117
Figura 4.20 – Resposta estudante 5: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	118
Figura 4.21 – Resposta estudante 8: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	118
Figura 4.22 – Resposta estudante 18: 2ª tentativa da atividade B1 – Série V	119

Figura 4.23 – Resposta estudante 18: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	120
Figura 4.24 – Resposta estudante 2: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	120
Figura 4.25 – Resposta estudante 2: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V	120
Figura 4.26 – Resposta estudante 26: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	121
Figura 4.27 – Resposta estudante 5 – 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.....	121
Figura 4.28 – Resposta estudante 5: 2ª tentativa da atividade B1 – Série V	122
Figura 4.29 – Resposta estudante 23: 2ª tentativa da atividade B1 – Série V	123
Figura 4.30 – Resposta estudante 24: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	123
Figura 4.31 – Resposta estudante 24: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V	123
Figura 4.32 – Resposta estudante 12: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	124
Figura 4.33 – Resposta estudante 25: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	124
Figura 4.34 – Resposta estudante 16: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	125
Figura 4.35 – Resposta estudante 16: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.....	125
Figura 4.36 – Resposta estudante 29: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	126
Figura 4.37 – Resposta estudante 29: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	126
Figura 4.38 - Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	127
Figura 4.39 – Resposta estudante 31: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	127
Figura 4.40 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V	128
Figura 4.41 – Resposta estudante 11: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V	128
Figura 4.42 – Resposta estudante 20: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V	128
Figura 4.43 – Resposta estudante 20: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V	129
Figura 5.1 – Representação geométrica da expressão $(a + b)^2$	134
Figura 5.2 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade B - Série IX (estudo piloto)	136
Figura 5.3 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade B - Série IX (estudo piloto)	137
Figura 5.4 – Tela do jogo Jabara – Nível 1	138
Figura 5.5 – Tela do jogo Jabara – Nível 10	139
Figura 5.6 – Resposta estudante 13: Atividade 1 - item C (estudo final)	147
Figura 5.7 – Resposta estudante 13: Atividade B1 - Série V (estudo piloto)	148
Figura 5.8 – Resposta estudante 3: Atividade B1 - Série V (estudo piloto)	148
Figura 5.9 – Resposta estudante 3: Atividade 1 - item C (estudo final)	149
Figura 5.10 – Resposta estudante 20: Atividade B1 - Série V (estudo piloto)	150

Figura 5.11 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item B (estudo final)	151
Figura 5.12 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item A (estudo final)	152
Figura 5.13 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item C (estudo final)	154
Figura 5.14 – Resposta estudante 13: Atividade 2 (estudo final)	157
Figura 5.15 – Resposta estudante 20: Atividade 2 (estudo final)	157
Figura 5.16 – Resposta estudante 3: Atividade 2 (estudo final)	157
Figura 5.17 – Resposta estudante 3: Atividade 3 - item B (estudo final)	163
Figura 5.18 – Resposta estudante 13: Atividade 3 - item B (estudo final)	163
Figura 5.19 – Resposta estudante 20: Atividade 3 - item B (estudo final)	165
Figura 5.20 – Resposta estudante 3: Atividade 3 - item C (estudo final)	167
Figura 5.21 – Resposta estudante 13: Atividade 3 - item C (estudo final)	167
Figura 5.22 – Resposta estudante 20: Atividade 3 - item C (estudo final)	167
Figura 5.23 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	169
Figura 5.24 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	170
Figura 5.25 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	170
Figura 5.26 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	171
Figura 5.27 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	171
Figura 5.28 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto)	172
Figura 5.29 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	175
Figura 5.30 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	175
Figura 5.31 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade 4 (estudo final)	176
Figura 5.32 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade 4 (estudo final)	178
Figura 5.33 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	179
Figura 5.34 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	179

Figura 5.35 – Resposta estudante 13: Resolução da atividade 4 (estudo final)	180
Figura 5.36 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	181
Figura 5.37 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	182
Figura 5.38 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto)	182
Figura 5.39 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade 4 (estudo final)	183
Figura 5.40 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade 4 (estudo final)	187
Figura 5.41 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade B – Série VIII (estudo piloto)	189
Figura 5.42 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final)	190
Figura 5.43 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final)	191
Figura 5.44 – Esquema de barras. Fonte: VERGANUD, 2014, p. 34	193
Figura 5.45 – Resposta estudante 3: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final)	194
Figura 5.46 – Resposta estudante 3: Quarta tentativa da atividade 5 (estudo final)	196
Figura 5.47 – Resposta estudante 3: Quinta tentativa da atividade 5 (estudo final)	196
Figura 5.48 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final)	198
Figura 5.49 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final)	198
Figura 5.50 – Resposta estudante 13: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final)	199
Figura 5.51 – Resposta estudante 13: Quarta tentativa da atividade 5 (estudo final)	201
Figura 5.52 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final)	203
Figura 5.53 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final)	205
Figura 5.54 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final)	209
Figura 5.55 – Resposta estudante 20: Sexta tentativa da atividade 5 (estudo final)	212
Figura 5.56 – Resposta estudante 20: Sétima tentativa da atividade 5 (estudo final)	213
Figura 5.57 – Resposta estudante 20: Oitava tentativa da atividade 5 (estudo final)	213
Figura 5.58 – Resposta estudante 6: Atividades 1 e 2 (estudo final)	217
Figura 5.59 – Resposta estudante 6: Atividades 3 e 4 (estudo final)	217
Figura 5.60 – Resposta estudante 27: Atividades 1 e 2 (estudo final)	218
Figura 5.61 – Resposta estudante 27: Atividades 3 e 4 (estudo final)	218
Figura 5.62 – Resposta estudante 32: Atividades 1 e 2 (estudo final)	218
Figura 5.63 – Resposta estudante 32: Atividades 3 e 4 (estudo final)	219

Figura 5.64 – Resposta estudante 6: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto)	220
Figura 5.65 – Resposta estudante 27: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto)	220
Figura 5.66 – Resposta estudante 32: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto)	221
Figura 5.67 – Resposta estudante 6: Atividade 5 (estudo final)	222
Figura 5.68 – Resposta estudante 27: Atividade 5 (estudo final)	223
Figura 5.69 – Resposta estudante 32: Atividade 5 (estudo final)	225
Figura 5.70 – Resposta estudante 6: Atividade 6 (estudo final)	226
Figura 5.71 – Resposta estudante 27: Atividade 6 (estudo final)	227
Figura 5.72 – Resposta estudante 32: Atividade 6 (estudo final)	227
Figura 5.73 – Resposta estudante 27: Atividade 7 (estudo final)	228
Figura 5.74 – Resposta estudante 32: Atividade 7 (estudo final)	229
Figura 5.75 – Explicação estudante 27: Atividade 7 (estudo final)	229
Figura 5.76 – Explicação estudante 32: Atividade 7 (estudo final)	229
Figura 5.77 – Explicação estudante 27: Atividade 7 – com resposta corrigida (estudo final)	231
Figura 5.78 – Resposta estudante 32: Atividade 7 – corrigida (estudo final)	233
Figura 5.79 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – primeira parte (estudo final)	235
Figura 5.80 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte (estudo final)	237
Figura 5.81 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte – segunda tentativa (estudo final)	240
Figura 5.82 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte – item E reescrito (estudo final)	241
Figura 5.83 – Resposta estudante 6: Riscos usados para auxiliar nas operações de adição ou subtração (estudo final)	241
Figura 5.84 – Resposta estudante 6: Série II (estudo piloto)	242
Figura 5.85 – Apresentação da atividade 8 (estudo final)	244
Figura 5.86 – Resposta estudante 27: Atividade 8 (estudo final)	245
Figura 5.87 – Resposta estudante 32: Atividade 8 (estudo final)	246
Figura 5.88 – Resposta estudante 32: Série II (estudo piloto)	247
Figura 5.89 – Resposta estudante 32: Série VII – Itens A e B (estudo piloto)	248
Figura 5.90 – Resposta estudante 6: Atividade 8 (estudo final)	249
Figura 5.91 – Imagem da balança construída com material reciclável	250

Figura 5.92 – Imagem das bolinhas de gude utilizadas na balança	250
Figura 5.93 – Resposta estudante 6: Segunda tentativa da atividade 8 - item <i>a</i> (estudo final)	252
Figura 5.94 – Resposta estudante 6: Terceira tentativa da atividade 8 - item <i>a</i> (estudo final)	254
Figura 5.95 – Resposta estudante 6: Segunda tentativa da atividade 8 - item <i>b</i> (estudo final)	254
Figura 5.96 – Resposta estudante 6: Terceira tentativa da atividade 8 - item <i>b</i> (estudo final)	258
Figura 5.97 – Resposta estudante 6: Atividade 8 - extra (estudo final)	260
Figura 5.98 – Resposta estudante 4: Atividades B1 e B2 – Série V (estudo piloto)	261
Figura 5.99 – Resposta estudante 4: Atividade 1 (estudo final)	262
Figura 5.100 – Resposta estudante 4: Atividade 2 (estudo final)	263
Figura 5.101 – Resposta estudante 4: Atividade 3 (estudo final)	263
Figura 5.102 – Resposta estudante 4: Atividade 4 (estudo final)	264
Figura 5.103 – Resposta estudante 4: Atividade 5 (estudo final)	267
Figura 5.104 – Resposta estudante 4: Atividade 6 (estudo final)	268
Figura 5.105 – Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade 7 - primeira parte (estudo final)	269
Figura 5.106 – Resposta estudante 4: Segunda tentativa da atividade 7 - primeira parte (estudo final)	271
Figura 5.107 – Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade 7 - segunda parte (estudo final)	271
Figura 5.108 – Resposta estudante 4: Segunda tentativa da atividade 7 - segunda parte (estudo final)	272
Figura 5.109 – Resposta estudante 4: Atividade 7 - terceira parte (estudo final)	273
Figura 5.110 – Resposta estudante 4: Atividade 8 - primeira parte (estudo final)	273
Figura 5.111 – Resposta estudante 4: Atividade 8 - segunda parte (estudo final)	273
Figura 5.112 – Resposta estudante 19: Questionário sociocultural – questão 1	276
Figura 5.113 – Resposta estudante 22: Questionário sociocultural – questão 1	276
Figura 5.114 – Resposta estudante 4: Questionário sociocultural – questão 1	276
Figura 5.115 – Resposta estudante 19: Questionário sociocultural – questão 4	280
Figura 5.116 – Resposta estudante 22: Questionário sociocultural – questão 4	280

Figura 5.117 – Resposta estudante 4: Questionário sociocultural – questão 4	280
Figura 5.118 – Resposta estudante 19: Questionário sociocultural – questão 2	284
Figura 5.119 – Resposta estudante 19: Questionário sociocultural – questão 5	287
Figura 5.120 – Resposta estudante 22: Questionário sociocultural – questão 5	288
Figura 5.121 – Resposta estudante 4: Questionário sociocultural – questão 5	288
Figura 6.1 – Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade B1 (1ª parte - estudo piloto)	298
Figura 6.2 – Resposta estudante 15: Primeira tentativa da atividade B2	298
Figura 6.3 – Resposta estudante 19: Segunda tentativa da atividade B1	299

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Tipologia dos erros	48
Quadro 2.2 – Exemplo de um esquema envolvendo estruturas multiplicativas	53
Quadro 2.3 – Esquema para resolução do exemplo 1 por operação unária (coluna)	54
Quadro 2.4 – Esquema para resolução do exemplo 1 por operação unária (linha)	54
Quadro 2.5 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do primeiro tipo – forma direta	54
Quadro 2.6 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do primeiro tipo – forma inversa	55
Quadro 2.7 – Esquema para resolução por divisão do segundo tipo	55
Quadro 2.8 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do segundo tipo	55
Quadro 2.9 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do segundo tipo – função direta	56
Quadro 3.1– Grupos de habilidades a serem analisadas.....	80
Quadro 4.1 – Quadro com a associação dos campos conceituais envolvidos em cada habilidade, sub-habilidade e a série de atividades	102
Quadro 4.2 – Quadro com a associação da quantidade de perguntas-modelo por série e os respectivos campos conceituais envolvidos	103
Quadro 4.3 – Perguntas-modelo geradas neste tópico e divididas por quantidade de alunos que se encaixaram em cada pergunta-modelo, respectivamente, na primeira e segunda aplicação	105
Quadro 4.4 – Quadro resumo associando o conteúdo, campo conceitual e esquemas	130
Quadro 5.1 – Quadro descritivo dos grupos de estudantes do estudo final	131
Quadro 5.2 – Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 1 – Aritmética	214
Quadro 5.3 – Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 2 – Geometria	214
Quadro 5.4 – Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 3 – Classes e ordens	215
Quadro 5.5 – Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 4 – Conjuntos	215
Quadro 5.6 – Esquemas mobilizados pelo Grupo 2: Modelo 1 – Aritmética	274
Quadro 5.7 – Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 5 – Matemática	289
Quadro 5.8 – Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 6 – Professor	290
Quadro 5.9 – Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 7 – Lazer	290

Quadro 5.10 – Resumo descritivo de todos os esquemas apresentados por cada grupo em cada modelo	292
Quadro 5.11 - Possíveis invariantes operatórios mobilizados pelos grupos por modelo	293

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Esquema para resolução de um problema de produto das medidas	
– 1ª classe	58
Tabela 2.2 – Esquema para resolução de um problema de produto das medidas	
- 2ª classe	58
Tabela 2.3 – Esquema alternativo 1 de resolução de um problema de produto das medidas	
– 2ª classe	59
Tabela 2.4 – Esquema alternativo 2 de resolução de um problema de produto das medidas	
– 2ª classe	59
Tabela 2.5 – Esquema alternativo 3 de resolução de um problema de produto das medidas	
– 2ª classe	60
Tabela 2.6 – Esquema de resolução do exemplo 4	62
Tabela 2.7 – Esquema de resolução do exemplo 5	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1 ^a	Primeira
2 ^a	Segunda
Aplic.	Aplicação
Cód. Hab.	Código da habilidade
Cód. Sub. Hab.	Código da sub-habilidade
Estuds.	Estudantes
E3	Estudante 3
E4	Estudante 4
E6	Estudante 6
E13	Estudante 13
E20	Estudante 20
E27	Estudante 27
E32	Estudante 32
Hab.	Habilidade
IFRJ	Instituto Federal do Rio de Janeiro
MADE	Modelo de Análise Didática dos Erros
Nº	Número
P.	Pesquisadora
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PISA	Programme for International Student Assessment ou Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	33
1.1. Motivação e contexto da pesquisa	33
1.2. Revisão bibliográfica	35
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	45
2.1. A concepção de erro em matemática	45
2.2. Tratamento didático sobre os erros	48
2.3. Vergnaud e as estruturas multiplicativas	52
2.3.1 Isomorfismo das medidas	52
2.3.2 Produto das medidas	57
2.3.3 Proporções múltiplas	60
2.4. A teoria dos Campos Conceituais	63
CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DO ESTUDO PILOTO	75
3.1. Introdução.....	75
3.2. Elaboração do estudo piloto	77
3.2.1. Objetivo do estudo piloto	77
3.2.2. O contexto da escola e os sujeitos envolvidos	77
3.2.3. Características do conjunto de atividades	80
▪ Série I - Problemas com enunciados indeterminados	81
▪ Série II – Problemas com informações incompletas	82
▪ Série III – Problemas com informações excedentes	83
▪ Série V – Sistemas de problemas de um único tipo	84
▪ Série VII – Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato	86
▪ Série VIII – Composição de problemas de um tipo apresentado previamente	87
▪ Série IX – Problemas para provar	88
▪ Série X – Composição de equações usando os termos de um problema	89
▪ Série XVII – Problemas diretos e inversos	89
▪ Série XIX – Problemas de compreensão e raciocínio lógico	91
▪ Série XXIV – Problemas com formulações visuais e verbais	92

3.2.4. Aplicação do estudo piloto	93
3.3. Elaboração do estudo final	95
CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS ESTUDOS PILOTO E FINAL	97
4.1. Metodologia de análise dos estudos	97
4.1.1. A Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento	97
4.1.2. O que são os modelos e como foram criadas as perguntas-modelo	99
4.2. Classificação das perguntas-modelo com os campos conceituais e os invariantes operatórios	101
4.3. Análise do estudo piloto	102
• 4.3.1 Habilidade H2: Generalização de conceitos matemáticos - Série V:	
Sistema de problemas de um único tipo	104
○ EXEMPLO 1: Multiplicação de dois termos algébricos iguais	106
○ EXEMPLO 2: Soma de termos algébricos diferentes	107
○ EXEMPLO 3: Multiplicação entre a soma de dois termos	109
○ EXEMPLO 4: Comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos	112
○ EXEMPLO 5: Multiplicação entre a soma de dois termos algébricos	115
EXEMPLO 6: Compreensão da função dos parênteses	119
CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DO ESTUDO FINAL	131
5.1 Metodologia adotada para elaboração do estudo final	131
5.2 A escolha do conteúdo e dos campos conceituais para o estudo final	132
5.2.1 Protocolo aplicado ao Grupo 1	133
5.2.2 Protocolo aplicado ao Grupo 2	138
5.2.3 Protocolo aplicado ao Grupo 3	143
5.3 Análise dos modelos por grupo	143
5.3.1. Respostas do Grupo 1.....	144
5.3.1.1 Modelo 1 – Aritmética	145
5.3.1.2 Modelo 2 – Geometria	162
5.3.1.3 Modelo 3 – Classes e ordens	173
5.3.1.4 Modelo 4 – Conjuntos	188
5.3.2 Respostas do Grupo 2	216
5.3.2.1 Modelo 1 – Aritmética	217

5.3.2.2 Caso especial: estudante 4	260
5.3.3 Respostas do Grupo 3	274
5.3.3.1 Modelo 5 – Matemática	275
5.3.3.2 Modelo 6 – Professor	279
5.3.3.3 Modelo 7 – Lazer	283
5.4 Os níveis de invariantes operatórios	290
CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE PESQUISA	295
6.1. Habilidades e conteúdos	295
6.2. O fator emocional no aprendizado	297
6.3. A relevância do papel do professor	300
6.4. Importância da aproximação universidade-escola	301
6.5. Perspectivas de pesquisa	303
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	305
ANEXOS	311
ANEXO A – Categorias de análise dos problemas a serem aplicados no estudo. (Adaptado de Krutetskii, 1976)	313
ANEXO B – Tabela relacionando habilidades e conceitos	315
ANEXO C – Carta de apresentação do protocolo	317
ANEXO D – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	319
ANEXO E – Protocolo do estudo piloto	321
ANEXO F – Protocolo do estudo final Grupo 1	335
ANEXO G – Protocolo do estudo final Grupo 2	341
ANEXO H – Protocolo do estudo final Grupo 3	347
ANEXO I – Transcrição de áudio – estudante 13	351
ANEXO J – Transcrição de áudio – estudante 3	359
ANEXO K – Transcrição de áudio – estudante 20	371
ANEXO L – Transcrição de áudio – estudante 27	401
ANEXO M – Transcrição de áudio – estudante 32	407
ANEXO N – Transcrição de áudio – estudante 6	411
ANEXO O – Transcrição de áudio – estudante 4	423
ANEXO P – Transcrição de áudio – estudante 19	427
ANEXO Q – Transcrição de áudio – estudante 22	433
ANEXO R – Segunda transcrição de áudio – estudante 4	443

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e contexto da pesquisa

São diversos os tipos de desafios que todo iniciante na carreira pode enfrentar. No caso do professor de Matemática, existe a difícil tarefa de lidar com o fato de que muitos alunos não gostam da disciplina de Matemática, embora essa situação já não seja novidade. Os motivos da aversão podem ser dos mais diversos, mas a queixa da grande maioria dos estudantes é em entender os principais conceitos da disciplina.

Desse modo, sempre houve uma preocupação em inovar e trazer atividades contextualizadas para uma melhor compreensão e aceitação dessa disciplina. Porém, mesmo com todos esses esforços, algo que se chama a atenção é a repetição de alguns tipos de obstáculos em diferentes anos e contextos escolares. Por que ocorrem e o que essas dificuldades têm em comum? Foram essas perguntas que nortearam a pesquisa realizada no curso de pós-graduação em 2009, para obtenção do título de mestre em Educação em 2012, nesta mesma instituição onde está sendo concluído o curso de doutoramento. Naquele momento, foi apresentado o trabalho intitulado *“Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre os Obstáculos Epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais”*. A proposta foi aplicar atividades inspiradas nas questões do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), envolvendo questões de álgebra, para os alunos do nono ano do Ensino Fundamental, e analisar suas respostas sob a luz da Teoria dos Obstáculos de Brousseau (1983), classificando-as em obstáculos epistemológicos, didáticos, ontogenéticos e psicológicos, além de uma aproximação com a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990). Essa classificação visava a elucidar as dificuldades e obstáculos que os alunos apresentam para a aprendizagem do conteúdo de álgebra.

Mesmo após o fim desse trabalho, houve sempre um grande interesse em continuar com pesquisas que envolvem a área de Psicologia e utilizá-la como apoio na interpretação de aspectos cognitivos na aprendizagem de Matemática, já que o trabalho desenvolvido durante o mestrado ainda não havia esgotado as possibilidades. Assim, foram pesquisadas diversas

literaturas relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais, tanto do próprio Vergnaud, quanto de outros autores, numa tentativa de aprofundar-se na teoria e elaborar uma segunda etapa do projeto iniciado no mestrado como proposta para o doutorado. De início, foi pensado em desenvolver-se algo semelhante ao trabalho feito anteriormente, mas com enfoque no professor. Ou seja, analisar as escolhas didáticas do professor e sua influência no desenvolvimento cognitivo do aluno, partindo de suportes teóricos como a Teoria dos Obstáculos de Brousseau e a dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Porém, conforme o andamento da pesquisa, foi possível notar que essa não seria uma opção viável, por dois motivos: primeiro porque seria necessário encontrar um professor da escola básica que conheça ambas ou, pelo menos, uma dessas teorias, algo que não foi simples de se encontrar. E o outro motivo é que, mesmo se optássemos em ensinar a teoria, seria necessário analisar um período maior que um ano, com a mesma turma de alunos e com este professor, para obter resultados significativos. Com a mudança constante de atribuição de aulas dos professores, seria inviável realizar tal tipo de análise. Assim, encontrou-se uma alternativa, ligeiramente diferente da primeira, mas que mantém o foco no desenvolvimento cognitivo do aluno, sem ancorar os conhecimentos do professor sobre essas duas teorias. No entanto, haveria alguns pré-requisitos para a escolha da escola, turma e professor para que os dados obtidos na pesquisa fossem relevantes. Maiores detalhes serão explicados no Capítulo 3 da tese.

Para desenvolver a metodologia desta pesquisa, foram consultadas várias revistas científicas, banco de dissertações/teses e também em anais de congressos nos quais podem ser encontrados diversos trabalhos abordando a Teoria dos Campos Conceituais. Embora a teoria seja bastante complexa e apresente um grande potencial para compreender o processo psicocognitivo de construção do conhecimento, houve certa dificuldade para encontrar trabalhos, relacionados à área de Educação Matemática, que explicitasse uma metodologia sistemática que permitisse uma elucidação de seus esquemas e invariantes operatórios: elementos principais da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Portanto, a hipótese seria elaborar um modelo de sistematização como uma ferramenta que auxiliaria o professor na elaboração de propostas didáticas que fossem coerentes com as dificuldades que os alunos apresentam. Logo, a saída encontrada para esta pesquisa foi desenvolver uma proposta de análise sistemática dos aspectos cognitivos dos alunos e, por meio desses resultados, elaborar propostas didáticas para os professores poderem trabalhar com os alunos em diferentes níveis de dificuldades. Isso significa diferenciar alunos com dificuldades primárias, impedindo-os de compreender os conceitos algébricos, e aqueles que já possuem conhecimentos prévios, mas

que também apresentam dificuldades na compreensão do conceito, além de tentar elucidar outros fatores do processo cognitivo, como o emocional ou sociocultural, por exemplo.

1.2 Revisão bibliográfica

Existem muitos trabalhos que abordam a dificuldade dos alunos em compreender a álgebra. Tal fato pode ser verificado por meio de um levantamento na base de teses, dissertações e artigos científicos das principais Universidades, no Brasil e no exterior. Em tais pesquisas¹, há um consenso de que os estudantes têm dificuldades para entender o conceito de representação por meio de uma incógnita e, principalmente, as propriedades das operações algébricas. Além disso, o ensino de álgebra é limitado à resolução mecânica de exercícios e manipulação de símbolos que obedecem a um fluxo unidirecional no qual existe uma pergunta que espera uma resposta fechada.

Na dissertação de mestrado, verificou-se que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos para compreender a álgebra envolvem a montagem de uma equação de segundo grau para resolver uma situação-problema e a elaboração de uma expressão algébrica em função de outra variável.

Observou-se, por exemplo, uma expressão algébrica do tipo: $5x - 2$. A partir do momento em que esta é apresentada com o enunciado “Resolva”, o aluno interpreta como “encontre o valor desconhecido”, mesmo que não exista qualquer informação de equivalência que ajude a encontrar o valor de x . Veja-se o exemplo a seguir:

¹ Alguns trabalhos que estão diretamente ligados à problemática abordada nesta tese são: Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), Neves (1995), Pinto e Fiorentini (1997), Utsumi (2000), Ribeiro (2001), Quintiliano (2005), Almeida (2006), Bonadiman (2007), Scarlassari (2007), Gil (2008) e Kikuchi (2012).

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 6x$

b) $4x^2 - x^2 = 3x^2$

c) $2x - 1 = x = 0,5$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = x = 4^2 + 12$

Figura 1.1 – Um tipo de resolução de expressões dado por um estudante.

Observou-se que, na figura 1.1, nos itens C e D, o estudante tenta encontrar o valor de x mesmo sem existir uma informação de equivalência dessa expressão com algum valor.

Há ainda aqueles que buscam simplificar essa expressão algébrica em um número natural ou monômio, pois o resultado representado por um monômio parece-lhes incompleto. Possivelmente, isso ocorre devido ao raciocínio aritmético enraizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Veja-se o exemplo da Figura 1.2.

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 6x$

b) $4x^2 - x^2 = 10$

c) $2x - 1 = 1x$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 19x$

Figura 1.2 - Outro tipo de resolução de expressões dado por um estudante.

Já nos itens B, C e D da figura 1.2, o estudante simplifica as expressões algébricas a um número natural ou a um monômio.

Com isso, poderia-se afirmar que a falta de estímulo para generalizar conceitos e abstrações deixa o aluno estagnado apenas em conceitos concretos da Aritmética. Isso dificulta o avanço nos estudos em Matemática, e também nas Ciências Exatas em geral, nas quais a capacidade de trabalhar com o raciocínio abstrato torna-se fundamental.

Para apresentar aos alunos os conceitos de utilização de símbolos e das manipulações de técnicas algébricas tradicionais, Boole, por exemplo, mostrou em sua obra publicada em 1847² que é possível introduzir conceitos de lógica representadas por meio de equações cujos resultados remetem a estados lógicos de “verdadeiro” ou “falso” e não a números reais. Porém, tal conceito de abstração é pouco trabalhado pelos professores do Ensino Básico, principalmente com alunos do Ensino Fundamental que acabaram de iniciar os seus estudos em álgebra.

Do mesmo modo, a dificuldade para compreender esse tópico da Matemática pode estar relacionada também com a didática³ utilizada pelos professores, que não incentiva os estudantes a desenvolverem o raciocínio abstrato. Comumente, a álgebra elementar é ancorada na Geometria ou apoiada em exemplos concretos, preferencialmente, que façam parte do cotidiano dos alunos. Em termos da Transposição Didática, teorizada por Chevallard (1991), a adaptação do saber para um conhecimento que possa ser ensinado é necessária, já que o problema que o cientista enfrenta é diferente da realidade da sala de aula. Portanto, adaptar um conteúdo mais complexo para outros exemplos relevantes e pré-estabelecidos, consistentes com os níveis cognitivos dos alunos e com o projeto de formação em vigor, é algo válido. No entanto, é necessário ter certo cuidado quando se faz a transição do abstrato para exemplos concretos, pois o abuso desse recurso pode criar dificuldades futuras de aprendizagem, principalmente, em Matemática. Na pesquisa de Herscovics (1989, p. 64), foi evidenciada a existência de um obstáculo cognitivo acerca da tradução da língua natural para a linguagem algébrica. Para ilustrar, o autor cita dois problemas de uma pesquisa:

Escreva uma equação usando as variáveis S e P para representar a seguinte afirmação: “*Existem 6 vezes mais estudantes do que professores nesta universidade*”. Use S para o número de estudantes e P para o número de professores⁴. (CLEMENT, 1982; CLEMENT, LOCHHEAD, MONK, 1981; CLEMENT, LOCHHEAD, SOLOWAY, 1979⁵ apud HERSCOVICS, 1989 – tradução nossa)

² Boole publicou um trabalho intitulado *The Mathematical Analysis of Logic* que apresentou as primeiras ideias da lógica booleana.

³ Aqui entende-se a Didática como o processo utilizado para ensinar um conteúdo novo a uma pessoa que ainda não o conhece.

⁴ Texto original: “*Write an equation using the variables S and P to represent the following statement: “There are six times as many students as professors at this university.” Use S for the number of students and P for the number of professors.*”

⁵ Translating between symbol systems: Isolating a common difficulty in solving algebra word problems. Unpublished manuscript, University of Massachusetts at Amherst, Department of Physics and Astronomy, Cognitive Development Project, 1979.

Escreva uma equação usando as variáveis C e S para representar a seguinte afirmação: “No restaurante da Mindy, para cada quatro pessoas que pedem *cheesecake*, há cinco pessoas que pedem *strudel*.” Vamos utilizar C para representar o número de *cheesecakes* e S para representar o número de *strudels* pedidos.⁶ (CLEMENT, 1982; CLEMENT, LOCHHEAD, MONK, 1981; CLEMENT, LOCHHEAD, SOLOWAY, 1979 apud HERSCOVICS, 1989 – tradução nossa)

Essa pesquisa foi aplicada por Clement, Lochhead e Monk em 150 estudantes dos anos iniciais de um curso de engenharia de uma grande universidade⁷. A porcentagem de acertos foi de 63% para o primeiro problema e 27% para o segundo. Nos dois casos, os estudantes representaram a equação algébrica com as informações invertidas: $6S = P$ em vez de $S = 6P$ e $4C = 5S$ em vez de $5C = 4S$. Os pesquisadores ainda afirmam que os erros não foram cometidos por falta de atenção e foi assumido que os estudantes compreenderam o problema e possuíam, supostamente, habilidades algébricas adequadas para o nível em questão.

Um problema semelhante a esses dois exemplos foi aplicado por Lochhead (1980) para 202 membros de uma faculdade e 148 professores do Ensino Médio⁸ e houve um equívoco semelhante aos dos estudantes da pesquisa de Clement, Lochhead e Monk (1981) com incidência de 35% e 47%, respectivamente.

Para explicar a possível origem desses erros de interpretação, Clement, Lochhead e Monk (1981) identificaram dois tipos de problema que gerariam essa dúvida de interpretação entre os estudantes: uma de ordem sintática e outra de ordem semântica.

No caso da ordem sintática, o estudante traduz a sequência de palavras do texto em uma sequência literal de símbolos de uma equação. Veja-se:

$$6S \text{ (6 vezes mais estudantes) } = \text{(que) } P \text{ (professores)}$$

Já na ordem semântica, há uma comparação relativa ao tamanho entre os dois conjuntos envolvidos. Tal afirmação foi evidenciada por meio de diagramas esboçados pelos próprios alunos que participaram da pesquisa, como se ilustra a seguir:

⁶ Texto original: “Write an equation using the variables C and S to represent the following statement: “At Mindy’s restaurant, for every four people who order cheesecake, there are five people who order strudel.” Let C represent the number of cheesecakes and S represent the number of strudels ordered.”

⁷ No artigo, o autor não informa a instituição. Para maiores informações consultar Herscovics (1989) nas referências bibliográficas.

⁸ No artigo, o autor não informa a instituição. Para maiores informações consultar Herscovics (1989) nas referências bibliográficas.

Figura 1.3 - Quantidade de alunos x quantidade de professores

Porém, quando se traduz essa representação diretamente para uma equação, ela não é equivalente, o que leva ao mesmo equívoco de ordem sintática. Logo, existe a hipótese de que a tradução direta da linguagem textual interfira na interpretação de problemas algébricos.

Existe ainda a dificuldade gerada pela relação direta entre o concreto e o abstrato. Uma pesquisa feita por Kaminsky *et al.* (2008) mostrou que os alunos aprendem álgebra com mais facilidade por meio de um exemplo abstrato, em comparação com os concretos. A razão disso, segundo os autores, é pelo fato do modelo genérico permitir, com uma quantidade mínima de informações, a aplicação para qualquer caso, o que não é possível com os exemplos concretos, que tem utilização limitada. Portanto, investir no aprendizado de generalizações parece ter mais eficácia para a transferência de conceitos essenciais de Matemática do que obter uma coleção de exemplos concretos. Um teste de múltipla escolha, com 80 participantes, foi aplicado após esse experimento para verificar a capacidade de transferência de conceitos pelos estudantes. Os resultados mostraram que aqueles que trabalharam com exemplos concretos fizeram pouca ou quase nenhuma transferência, enquanto os alunos que aprenderam com exemplos genéricos tiveram uma performance 25% maior que os primeiros, aproximadamente. Os pesquisadores afirmaram também que esses resultados são ainda mais relevantes quando se trata de alunos do Ensino Fundamental, nos quais a capacidade e controle de atenção às informações relevantes é menos acurada do que um adulto.

Assim, podemos constatar que parte das dificuldades dos alunos tem origem na forma como eles são apresentados à álgebra. A falta de estímulo para desenvolver e adaptar-se ao conceito abstrato desde cedo parece afetar a continuidade dos seus estudos em álgebra. No processo cognitivo de aprendizagem, referindo-se especificamente ao ensino de Ciências e Matemática, há uma necessidade de rupturas com o conhecimento anterior para a acomodação de um novo, além do tempo próprio de aprendizagem de cada indivíduo. Isso revela a

importância de trabalhar desde cedo com paradigmas⁹ para promover a independência de aprendizado de conceitos novos por meio de situações já vistas anteriormente.

Quando se fala de processo cognitivo, não se pode deixar de citar a *zona de desenvolvimento proximal* proposta por Vigotski, que evidencia as etapas pelas quais uma criança passa para a aprendizagem ou aquisição de um conhecimento. Inicialmente, a criança é supervisionada por um adulto que a apresenta para um novo conceito. Depois, ocorre o processo de interiorizar as informações para que, posteriormente, tenha autonomia para agir mobilizando o conhecimento adquirido. Nas palavras de Jonnaert (1996), do ponto de vista de Vigotski, a aprendizagem escolar do aluno não coincide com o seu desenvolvimento intelectual, diferenciando-se em tempo curto e longo de aprendizagem, respectivamente. Por isso, a importância de desenvolver atividades que não sejam muito fáceis e nem muito difíceis, mas estimulantes o suficiente para o seu progresso mental.

Além do tempo de aprendizagem, deve-se considerar também os obstáculos epistemológicos que podem influenciar no aprendizado de alguns conceitos, sendo próprios de cada área de ensino. Porém, é importante ressaltar que apenas identificar os obstáculos muitas vezes não é suficiente. Tais obstáculos podem estar apoiados no que Astolfi (1994) chama de “núcleo-duro”, o qual pode não ser facilmente identificado pelo professor.

Segundo o autor, existem sistemas de pensamentos dos alunos compostos por diferentes lógicas cognitivas alternativas e que se auto explicam e estabilizam-se. Nesses casos, os obstáculos apresentam uma característica mais global e transversal, que fazem emergir novas representações, que podem estar ancoradas em outras concepções e obstáculos, ligação aparente *a priori*, que se originam de um mesmo obstáculo, o que seria o “núcleo-duro” indicado por Astolfi, e que podem pertencer inclusive a outras áreas e outros conteúdos.

O autor ressalta ao menos três etapas nos trabalhos didáticos envolvendo obstáculos. A primeira etapa consiste na *localização do obstáculo*, ou seja, seria a tomada de consciência por parte do aluno em conceitos e procedimentos abstratos e automatizados. A segunda etapa seria a *ruptura com o obstáculo*, que ocorre quando existe uma desestabilização conceitual, que pode ser trabalhada a partir das divergências entre as suas representações antigas e os conceitos ou conteúdos que se pretende ensinar. Didaticamente, isso poderia se consolidar na terceira etapa, chamada de fase da *superação*, que ocorre quando o professor, de posse de um

⁹ Refere-se aos paradigmas na visão de Kuhn (1978 apud OSTERMANN, 1996, p.186) sobre matrizes disciplinares, especificamente, do seu componente “exemplar” no qual o estudante, quando confrontado com situações semelhantes entre dois problemas distintos, saberá estabelecer as devidas relações para aplicar na forma que se demonstrou eficácia anteriormente.

modelo explicativo, pode facilitar a integração desse conceito pelos alunos. Porém, o autor alerta que, apesar desse esforço por parte do professor, não haverá a garantia de um controle absoluto sobre o fato do estudante integrar ou não essa nova concepção. Essa terceira etapa de *superação* se aproxima das ideias da *zona proximal de desenvolvimento* proposta por Vigotski.

Para sugerir um tratamento didático, Astolfi apoia-se em Martinand (1986) com a noção de *objetivo-obstáculo*, na qual a superação dos obstáculos à aprendizagem já conhecidos passariam a ser objetivos didáticos. Esta noção de *objetivo-obstáculo* é relevante para permitir que o professor possa elaborar as aulas considerando as dificuldades que possam levar à má utilização de fórmulas e as compreensões equivocadas de conceitos.

Vergnaud (1990) também evidencia as etapas de aprendizagem por meio dos invariantes operatórios que são formados pelos *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*. Este último, aparenta uma aproximação da ideia de *localização dos obstáculos* de Astolfi (1994) que são informações nas quais o aluno sabe aplicar, mas ainda não possui autonomia a ponto de explicitá-las ou generalizá-las para outras situações. Ou seja, são conhecimentos limitados a uma aplicação muito específica. Por exemplo, quando um aluno utiliza a fórmula de *Bhaskara* para resolver uma equação de segundo grau, mas não compreende a sua aplicação e nem é capaz de explicitar o algoritmo utilizado para resolver problemas diferentes, pode-se concluir que seu aprendizado foi mecânico. Quando os alunos possuem os *teoremas-em-ação*, já são capazes de explicitar algoritmos para resolução de problemas, e também sabem como aplicar e transmitir o conhecimento para outras pessoas e aplicá-lo em exemplos diferentes, pois podem validar sua aplicação em situações diferentes.

Campos (2014) explica que a forma como Vergnaud relaciona o aprendizado por meio da mediação do real com o conceito é complexa. Segundo Campos, o acesso aos conceitos científicos exige uma reflexão sobre eles próprios o que é muito diferente daquela relação apresentada por Vergnaud. Mas, é durante o processo de apropriação conceitual, por meio de idas e vindas, que a noção de homomorfismos passa a ser central para o teórico. Essa noção envolve a relação de significado e significante¹⁰ presentes nos esquemas¹¹, que serão explicados com mais detalhes no Capítulo 2 da tese.

Esses conceitos formulados por Vergnaud fazem parte da Teoria dos Campos Conceituais (1990). Teoria de origem psicocognitiva que foi criada tendo em vista respeitar

¹⁰ Significado e significante são situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, segundo Vergnaud (1990).

¹¹ Para Vergnaud (1990), os esquemas são um conjunto de algoritmos e conceitos que organiza o tratamento das significantes e permite gerar uma classe de condutas diferentes em função de características particulares de cada uma das situações da classe a qual se endereça. Trata-se, portanto, de um conceito de nível cognitivo.

uma estrutura progressiva de elaboração de conceitos, tendo pertinência a sua aplicação à Matemática, embora ela também seja utilizada em outras áreas correlatas, tais como: Física, Química e Biologia e até no aprendizado de idiomas¹².

Além disso, a principal relevância da Teoria dos Campos Conceituais está no fato de levar em consideração as ações realizadas pelo aluno em busca de possíveis filiações e rupturas entre as ideias iniciais da Matemática. Assim, o diferencial está na forma do tratamento do saber escolar, que se encontra entre o conhecimento do cotidiano e o científico, valorizando conceitos na sua forma didatizada, não se limitando a uma simples aplicação empírica e nem se isolando no saber científico. Ou seja, as situações experimentadas pelo indivíduo e os conhecimentos anteriores adquiridos ajudam a progredir e incorporar novas experiências. O professor que se beneficia da Teoria dos Campos Conceituais pode enxergar um novo significado na relação didática com seus alunos, podendo superar questionamentos levantados por eles, tais como: *“Qual a utilidade disso na minha vida?”* ou *“Eu nunca utilizarei esse conhecimento na área em que quero me profissionalizar”*, entre outros.

Embora essa teoria traga importantes benefícios a longo prazo, em termos de aprendizagem, é importante salientar que os resultados e análises não são tão simples de serem obtidas a curto prazo. O próprio Vergnaud, em uma conferência realizada em Tandil¹³, no ano de 2011, enfatizou que sua teoria é complexa e que só é possível analisar os dados a longo prazo. Isso pode ser explicado pela natureza da relação didática entre professor e aluno na qual as ações do primeiro atingem inicialmente uma esfera do tempo curto de aprendizagem. Isso se exemplifica, no contexto escolar, quando o professor apresenta uma situação nova e, para executá-la, o aluno precisa receber instruções até construir a sua própria rede de conhecimentos e autonomia para desempenhar suas tarefas. Quando o indivíduo consegue tomar o próprio controle do conhecimento, a fim de aplicá-lo em situações diferentes de uma relação didática, ocorre o aprendizado, de acordo com Vergnaud (1990), e isso passa a fazer parte do tempo longo de aprendizagem.

E qual seria o papel fundamental do professor para o desenvolvimento do processo cognitivo do aluno? Acredita-se que a relevância está em atuar no tempo curto de aprendizagem, o que está diretamente ligada a situações didáticas (BROUSSEAU, 2000).

¹² Exemplos de trabalhos podem ser consultados nas referências bibliográficas em Campos (2014), Bueno Filho (2010), Tauceda, Del Pino e Nunes (2013) e Bogovich (2013).

¹³ I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (CIECyM) - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil: Argentina, 2011.

Brousseau (2000) ressalta que, dentro de um contexto de ensino, existem níveis de situações de ensino conhecidas como didáticas e a-didáticas. No primeiro, existe uma tríade: professor, aluno e saber a ser ensinado. Essa tríade estabelece uma relação de “contrato” no qual o professor tem a intenção de ensinar algo para o aluno e este precisa “entrar no jogo” de fazer aprender. No segundo nível, ainda ligado a uma situação de ensino, há um controle do professor sob as atividades em desenvolvimento, mas o aluno já é capaz de se utilizar de conhecimentos anteriores e de situações para aplicá-los sobre o que se aprende. Além disso, nas situações a-didáticas, o aluno também é capaz de por em funcionamento um conhecimento que está fora do contexto de ensino e aplicá-lo sem a intervenção de um professor, sendo executado pelo estudante de forma independente. Ou seja, o estudante constrói o seu conceito de Ação e Validação¹⁴ para o processo de aprendizagem.

Embora a teoria de Vergnaud seja o tema central dessa pesquisa, pretende-se realizar também uma aproximação dessa teoria com a análise do tratamento didático sobre os erros proposta por autores como Astolfi (1999), De La Torre (2007), Cury (2008) e Ramos e Curi (2014a; 2014b) além de investigar as habilidades matemáticas envolvidas na aprendizagem dos estudantes (KRUTETSKII, 1976), considerando-se aspectos levantados sobre os obstáculos de aprendizagem como o de Brousseau (1983) e dos conceitos de abstração apresentados por Martinand (1986), Astolfi (1994), Herscovics (1989), Jonnaert (1996), Kaminsky, Sloutsky e Heckler (2008). Somado a esses autores, será utilizada a Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento de Moreno *et al.* (2000) para a organização dos esquemas e invariantes operatórios presentes nas atividades aplicadas aos alunos do Ensino Fundamental. Os detalhes sobre esses autores serão apresentados na fundamentação teórica (Capítulo 2).

¹⁴ Ação e Validação são dois dos três processos elaborados por Brousseau (1983) para justificar o funcionamento e controle de uma situação didática. Os três processos consistem em Formulação, Ação e Validação.

CAPÍTULO 2

FUDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A concepção de erro em matemática

O erro tem diferentes interpretações de acordo com o contexto. Por exemplo, no nosso dia a dia, quantas vezes não erramos um caminho ou executamos uma tarefa várias vezes até aprendermos com perfeição? Nos jogos eletrônicos, esse conceito faz ainda mais sentido, já que por meio da tentativa e erro é que se supera as dificuldades de cada fase até chegarmos ao objetivo final.

Porém, no contexto escolar, o erro já é visto de forma bem diferente. Muitas vezes, o aluno sente-se fracassado pelo seu erro, incapaz e com medo de sanar suas dificuldades por receio de ser julgado ou punido. Esse tipo de tratamento do erro acaba por perpetuar as dificuldades e eventuais obstáculos adquiridos ao longo do tempo por meio da repetição desse comportamento.

Para Astolfi (1999), o erro na aprendizagem é tão antigo quanto o próprio projeto educacional por si só. Para o autor, enquanto o erro deveria ser tratado como algo banal, facilmente corrigível, no contexto escolar, ele é tratado de forma dramática e motivo para gerar angústia e estresse. Já Borasi (1996) relata que a forma como reconhecemos as metáforas pode afetar a nossa percepção em relação a algum fenômeno. A autora constata esse fator por meio da literatura vigente da época que tem utilizado duas metáforas para referir-se aos erros, no contexto de aprendizagem em Matemática. A primeira e a mais popular é considerá-lo como um *“sintoma de uma doença”*, termo empregado em áreas médicas. Ou seja, o erro é um indicador de que há uma má compreensão de um conceito anterior. A segunda metáfora, que surgiu com o desenvolvimento da Informática, é referir-se aos erros como *bugs*. Termo utilizado comumente, até os dias de hoje, quando um equipamento eletrônico apresenta um tipo de funcionamento anormal. Neste caso, a interpretação dada ao erro é de que uma instrução inapropriada de um programa de computador não se permite chegar ao resultado esperado. Em ambos os casos, Borasi considera que as metáforas contribuíram positivamente para uma aproximação construtiva dos erros nas pesquisas em Educação Matemática. Porém, é preciso

também ter cautela em relação a essas mesmas metáforas, pois, tanto no conceito médico de “doença” quanto no conceito de *bug* da computação, parte-se de uma premissa de que algo deve ser evitado e destruído. Isso também implica que é necessária a presença de um especialista para tratar dos erros, colocando o estudante em uma posição bastante passiva dentro do processo de aprendizagem (BORASI, 1996).

A correção de um erro, por muitos anos, tem sido considerada como a principal ou única tarefa por parte do professor. Quando falamos no contexto da Matemática, de forma geral, isso fica ainda mais evidente, pois há uma preocupação em analisar algoritmos pré-estabelecidos para chegar a um resultado final, que é único. Essa visão, felizmente, está mudando ao longo das últimas décadas. Pesquisas que utilizam a análise das respostas dos alunos como ferramentas didáticas vem ganhando cada vez mais destaque na área de Educação Matemática.

Há diversos autores, tanto no Brasil quanto no exterior, que já revelaram a importância do estudo dos erros. Segundo Cury (2008), um dos pioneiros a trabalhar com o conceito de análise de erros foi Hadamard (1945) que, aproveitando as ideias de Poincaré e outros pesquisadores da época, ressaltou a importância da Psicologia para a compreensão dos processos de criação e descoberta dos matemáticos. Consequentemente, ela pode ser aplicada também para o processo de aprendizagem. Em suas discussões, Hadamard (*apud* CURY, 2008), por exemplo, difere o erro cometido pelo matemático (ou professor de matemática) daquele cometido pelo aluno. No caso do especialista, embora esse não esteja livre de cometer equívocos na resolução de algum problema, ele tem a capacidade de perceber e corrigir o próprio erro de forma a não apresentar o seu raciocínio, mas somente o produto final, bem delineado, passando a impressão de que todo processo de conhecimento foi desenvolvido de forma perfeita e infalível, o que é discutível. Esse tipo de comportamento é reproduzido também pelos alunos e estes imaginam que, para demonstrar que aprenderam, o mais importante é chegar no resultado correto de uma única vez. Porém, o processo de aprendizado é mais do que isso. Para qualquer atividade de conhecimento há um processo de idas-e-vindas, retificação de erros, verificação de conceitos anteriores e correção quando necessário. É por meio desse processo que ocorre a acomodação de novos conceitos. Além disso, não é possível afirmar se o aprendizado ocorreu apenas pela análise das atividades corretamente respondidas. Independente da resposta estar correta ou incorreta, há um processo de resolução próprio de cada aluno, que mobilizou seus conhecimentos anteriores. Portanto, a tarefa do professor seria avaliar quais desses conteúdos estão sendo mobilizados de forma relevante para uma aprendizagem a longo prazo. Se houver indícios de que há conceitos mal estabelecidos, é necessário retificá-los, mas como parte do processo de aprendizagem e não de forma punitiva.

Cury (2008) também considera que a análise das produções deve ser um dos principais componentes do trabalho do professor e não apenas um fato isolado. Esse tipo de análise permite, tanto para o professor quanto para o estudante, ter a chance de compreender a forma como ocorre a apropriação dos saberes pelos alunos. Ademais, quando um aluno comete um erro persistentemente, isso é um grande indício de que seja um obstáculo de algum conceito equivocado, adquirido no passado, e é necessário ser investigado. Brousseau (1989) considera que os erros muitas vezes não são cometidos de forma acidental, mas são resultados de aplicações fora do contexto aprendido e, portanto, ineficazes para um novo problema. Por isso, as recomendações que são sugeridas pelo autor, sobre o tratamento dos erros, são:

- 1) Encontrar os erros recorrentes e verificar o que eles têm em comum acerca de um mesmo conceito;
- 2) Identificar os obstáculos na História da Matemática;
- 3) Confrontar as barreiras históricas com os obstáculos de aprendizagem e estabelecer o seu caráter epistemológico.

Nessas mesmas ideias, Bachelard (1996) ressalta que a evolução do pensamento científico se forma pela sucessiva retificação dos erros e um conhecimento novo é formado por meio da desconstrução daquelas ideias mal estabelecidas no passado, que podem servir de obstáculo para compreensão de novas ideias. Karam e Pietrocola (2009) dão prosseguimento ao pensamento de Bachelard, evidenciando a importância entre o desenvolvimento do conhecimento científico e a resolução de problemas. Neste último, os autores ressaltam a afirmação de Bachelard (1977) de que todo conhecimento é oriundo de uma questão ou um problema, ou seja, trabalhos de investigação de erros, por meio de tarefas desenvolvidas pelos alunos, podem trazer uma riqueza de informações didáticas, contribuindo para orientar melhor as opções dos professores em relação à aprendizagem.

2.2 Tratamento didático sobre os erros

Embora já exista um número razoável de trabalhos e pesquisas sobre erros, são poucos os que fazem uma proposta de tratamento didático sobre os erros. Astolfi (1999) talvez seja um dos poucos pesquisadores que realizou tal tipo de diagnóstico elaborando um quadro de tipologia de erros, com as respectivas maneiras de mediar ou remediar cada situação. Veja-se o quadro 2.1:

Quadro 2.1 – Tipologia dos erros

	Natureza do diagnóstico	Mediação e remediação ¹
1	Erros relativos à elaboração e compreensão de instruções.	<ul style="list-style-type: none"> Análise da clareza dos textos escolares. Trabalho sobre a compreensão, seleção e formulação de instruções.
2	Erros provenientes de hábitos escolares de uma má interpretação das expectativas.	<ul style="list-style-type: none"> Análise do contrato e das práticas didáticas em vigor. Trabalho crítico sobre as expectativas.
3	Erros que atestam as concepções alternativas dos alunos.	<ul style="list-style-type: none"> Análise das representações e dos obstáculos subjacentes a noção estudada. Trabalho de tomada de consciência pelos alunos e um debate científico no contexto da sala de aula.
4	Erros ligados às operações intelectuais implicadas.	<ul style="list-style-type: none"> Análise das diferenças entre exercícios similares, mas que remetem a competências lógico-matemáticas distintas. Seleção mais restrita das atividades e análise dos erros neste contexto.
5	Erros oriundos dos procedimentos adotados.	<ul style="list-style-type: none"> Análise das diversidades de procedimentos espontâneos, distantes da estratégia canônica esperada. Trabalho sobre diferentes propostas estratégicas para favorecer a evolução individual.
6	Erros provocados por uma sobrecarga cognitiva no decurso da atividade.	<ul style="list-style-type: none"> Análise da carga mental da atividade. Decomposição em subtarefas de amplitude cognitiva compreensível.
7	Erros provenientes de uma outra disciplina.	<ul style="list-style-type: none"> Análise das características comuns e superficiais nas duas disciplinas. Trabalho de pesquisa dos elementos invariantes entre as situações.
8	Erros causados pela complexidade própria do conteúdo.	<ul style="list-style-type: none"> Análise didática dos núcleos de dificuldade interna à noção, insuficientemente analisadas.

Fonte: ASTOLFI, 1999, p. 96 – tradução nossa.

¹ No português, a palavra “remediar”, geralmente, tem um sentido pejorativo, como uma solução temporária, não efetiva. Porém, no francês, ela tem um sentido totalmente oposto, com conotação positiva.

Por meio desse quadro resumo, a proposta de Astolfi (1999) é possibilitar a reflexão e a conscientização sobre o complexo processo de aprendizagem escolar pelos professores. O autor esclarece que esse quadro pode ainda ser complementado com outros erros, além desses apontados. No entanto, os tópicos do quadro já seriam úteis para iniciar as discussões sobre o assunto.

Vale observar que o estudo dos erros não é exclusividade da área de Matemática. Na área de Linguística, Ciências Humanas e Naturais também existem estudos do tipo. De La Torre (2007) desenvolveu uma teoria conhecida como MADE (Modelo de Análise Didática dos Erros) que serve como guia para analisar os erros e o respectivo tratamento didático que deveria ser aplicado pelo professor. Em seu livro *“Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança”* (2007), o autor faz uma discussão, com exemplos, de como cada área analisa os erros dos alunos, inclusive em Matemática. Autoras como Ramos e Curi (2014b) utilizaram-se dessa teoria para analisar, por exemplo, os erros referentes à função polinomial de segundo grau em alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Basicamente, o MADE compõe-se, conforme o esquema da figura 2.1, de três níveis maiores de processamento de um sistema: Entrada, Organização e Execução. Nela também é possível observar os componentes de cada um desses níveis.

Fonte: RAMOS E CURI, 2014b, p. 29.

Figura 2.1 – Esquema do modelo de análise didática dos erros.

O momento da *Entrada* é quando o aluno entra em contato com a tarefa e pode apresentar alguma dificuldade nos níveis dos três planos contidos no esquema: intenção, percepção ou compreensão. De acordo com cada um desses planos, o erro pode ser originado por um motivo diferente. Por exemplo, no plano das **intenções**, De La Torre (2007) caracteriza a situação na qual o aluno não compreende o que está sendo requisitado pelo professor. Isso pode ser ocasionado pela indefinição de metas ou falta de clareza na atividade solicitada. Por exemplo, atividades com objetivos ambíguos pode gerar desvios do caminho principal ou esquecimento, por parte do aluno, em desenvolver algumas partes da atividade. Normalmente, isso ocorre também de acordo com o grau de maturidade do aluno. Porém, segundo De La Torre (2007), o principal responsável por induzir esses erros nos alunos é o professor. Da mesma forma ocorre no plano das **percepções**, que são erros induzidos por omissão, redundância e distorção de informação, também facilmente contornáveis se o professor estiver atento em adequar as atividades de acordo com o nível de conhecimento e cognitivo dos estudantes. No último plano, no momento de *Entrada*, estão os erros de **compreensão** que se dividem em ordem léxica, conceitual ou lógica que estão ligados à capacidade do aluno em compreender e expressar o conteúdo com sua própria linguagem.

Já o momento da *Organização*, é quando o aluno realiza a **síntese, ordenação e conexão** das informações obtidas anteriormente. Nesse caso, o processo cognitivo do aluno é o que está em jogo. O trabalho dessa etapa é colocar em prática a sua capacidade de relacionar as informações obtidas e conectá-las com seus conhecimentos anteriores, além de dar significado ao que está sendo pedido na tarefa e sequenciá-las de uma forma coesa. Os erros cometidos nesse momento estão relacionados à uma má ordenação e síntese das informações obtidas.

Os erros cometidos no último momento, que é o da *Execução*, são aqueles que se caracterizam pelos pequenos lapsos como troca de sinal, erro de operação, ortografia ou palavras. De La Torre (2007) caracteriza os alunos hiperativos e aqueles que são sensíveis à pressão ou nervosismo como os mais frequentes a cometer esses tipos de erros. Também há aqueles que gostam de arriscar um novo tipo de solução para o problema. De certo ponto de vista, são erros que normalmente tem menor relevância para se planejar uma ação didática ou metodológica, comparado aos outros momentos, já que estão ligados a um problema mais pontual.

Para analisar os erros cometidos pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio sobre o conteúdo de função polinomial de segundo grau, Ramos e Curi (2014b) agruparam as questões aplicadas em suas pesquisas com a seguinte classificação por códigos (0 a 2 e 9), o mesmo

utilizado pelo PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), que representam, respectivamente:

- Código 0 – Resposta incorreta;
- Código 1 – Resposta parcialmente correta;
- Código 2 – Resposta correta;
- Código 9 – Questão sem resposta (Em branco).

Por meio dessa classificação, as autoras separaram o material para a análise e, posteriormente, apoiaram-se no MADE para interpretar as respostas dos alunos em cada questão. Em suas análises, Ramos e Curi (2014b) conseguiram encontrar indícios de erros que podem ser de origem didática², muito ligada à forma como o professor transpõe o conteúdo para o aluno, outros de origem epistemológica, no qual um conhecimento mal adquirido no passado é responsável pela não compreensão do conteúdo novo; e alguns de nível ontogenético no qual a maturidade do sujeito não é suficiente para transpor os conceitos para uma nova situação.

Porém, optou-se por não adotar essa metodologia nesta pesquisa, embora seja bastante interessante, pois considera-se que, para trabalhar com os invariantes operatórios dos Campos Conceituais de Vergnaud, seria significativo encontrar uma teoria que aproximasse propriamente com o trabalho no nível cognitivo do aluno, associado ao desenvolvimento dos conceitos em Matemática. Por isso, adotamos a Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento, que iremos apresentar no Capítulo 4 mais adiante.

Para compreender as análises que serão feitas no Capítulo 4, apresentaremos as ideias das estruturas multiplicativas que, junto com as estruturas aditivas, foram fundamentais para o desenvolvimento da Teoria dos Campos Conceituais.

² É preciso esclarecer que estamos usando a terminologia utilizada por Brousseau (1983), sobre a teoria dos obstáculos, para podermos resumir as principais ideias dos resultados da pesquisa de Ramos e Curi (2014b).

2.3 Vergnaud e as estruturas multiplicativas

Antes de apresentar a Teoria dos Campos Conceituais da forma como ela é conhecida hoje, Vergnaud vinha desenvolvendo as principais ideias ligadas aos processos de conceitualização progressiva por meio de situações nomeadas como lógicas de classes, estruturas algébricas, estruturas aditivas e estruturas multiplicativas. Particularmente, essas duas últimas são as que o teórico deu maior enfoque em seu trabalho (BUENO FILHO, 2010). Isso se deve não só pelo fato de serem constituintes da matemática básica como essas situações serem, de certa forma, pré-requisitos para a compreensão de outras duas situações (estruturas algébricas e lógica de classes).

Para o estudo da álgebra, podemos dizer que muitas dessas situações estão diretamente envolvidas de forma intrínseca, mesmo havendo a predominância de uma ou de outra. Vergnaud (1983) enfatiza que, idealmente, as situações deveriam ser trabalhadas de forma conjunta. No caso das estruturas multiplicativas, por exemplo, é necessário trabalhar de forma intrínseca com conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, números racionais, função linear e não-linear, análise dimensional e espaço vetorial. Porém, quando ocorre a didatização desses conceitos, realiza-se um processo diferente: cada um deles são trabalhados e avaliados de forma individual como se não fossem dependentes entre si, o que seria inadequado. A proposta dos Campos Conceituais é justamente fornecer um quadro para a aprendizagem que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos que, como tal, não se dão de forma independente. No caso das estruturas multiplicativas, elas subdividem-se em três tipos:

2.3.1 Isomorfismo das medidas

Esse subtipo representa as proporções simples diretas entre duas grandezas G_1 e G_2 . Ele também é popularmente conhecido como “regra de três simples” e talvez seja a estrutura, geralmente, mais utilizada no cotidiano, pois envolve conceitos como: distribuir uniformemente objetos e pessoas, determinar o custo de uma produção, calcular a velocidade média, a distribuição uniforme em retas, superfícies e volumes. O quadro 2.2 representa o esquema desse tipo de multiplicação:

Quadro 2.2 – Exemplo de um esquema envolvendo estruturas multiplicativas.

G_1	G_2
1	a
b	x

Fonte: a autora.

Vergnaud (1983) chama a atenção para o fato de que os problemas de multiplicação não consistem apenas em **três termos**, mas em **quatro termos** dos quais o sujeito deve extrair os três termos que se relacionam entre si. Eles podem realizar essa operação tanto pela *lei da composição binária* quanto pela *operação unária*. A principal diferença entre as duas seria o tipo de raciocínio adotado para chegar ao resultado. Veja-se um problema aplicado para exemplificar essas operações:

Exemplo 1: Ana comprou 4 maçãs ao preço de R\$ 1,00 cada. Quanto ela pagou no total?³

Seguindo o esquema do quadro 2.2, temos as seguintes informações:

G_1 = quantidade de maçãs.

G_2 = preço

a = preço de cada maçã.

b = quantidade de maçãs compradas.

Numa composição binária, o estudante simplesmente faria a multiplicação entre “ a ” e “ b ” para obter “ x ”, caso ele seja capaz de identificar que se trata de uma estrutura multiplicativa. Assim, ele obteria $4 \times 1 = 4$ reais. No entanto, a dúvida que pode surgir no aluno seria em relação à grandeza do resultado dessa multiplicação. De forma lógica, se ele compreende que está calculando o preço final, poderá deduzir que a sua grandeza é o preço, logo a unidade será em “reais” ou outra unidade monetária. Mas, se ele realiza a operação apenas de forma mecânica, considerando apenas os números, é possível que surja a dúvida: “*Por que a unidade final está expressa em reais e não em maçãs?*”.

Já na operação unária, multiplicaríamos as duas grandezas por um mesmo valor, para obter “ x ”. Este raciocínio é útil para evitar a dúvida em relação à unidade da grandeza, pois, se

³ Atividade inspirada no exemplo dado por Vergnaud (1983, p. 129).

o aluno for capaz de montar o quadro 2.2, ficará evidente a unidade de cada uma, aplicando-se o operador escalar (multiplicar 4 vezes) nos dois lados da grandeza.

Quadro 2.3 – Esquema para resolução do exemplo 1 por operação unária (coluna).

Maçãs	Preço (R\$)
1	1,00
4	x

Fonte: a autora.

Multiplica-se 4 vezes

Multiplica-se 4 vezes

Outra possibilidade seria transpor o mesmo operador escalar da primeira linha para a segunda.

Quadro 2.4 – Esquema para resolução do exemplo 1 por operação unária (linha).

Maçãs	Operação	Preço (R\$)
1	$\times R\$ 1,00$	1,00
4	$\times R\$ 1,00$	x

Fonte: a autora.

Há também três tipos de operações que são inversas às duas citadas anteriormente: a divisão *de primeiro e segundo tipo* e a *regra de três*, este seria o caso mais genérico.

No caso da divisão de primeiro tipo, a tarefa seria encontrar o valor unitário de uma das grandezas para encontrar o resultado final. Veja-se a inversão dos dados do exemplo 1:

Exemplo 2: Ana pagou R\$ 4,00 para comprar 4 maçãs. Quanto ela pagou por cada uma?

Quadro 2.5 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do primeiro tipo – forma direta.

Maçãs	Preço (R\$)	Função
4	4,00	$f(4)$
1	x	$f(1)$

Fonte: a autora.

Divide-se 4 vezes

Divide-se 4 vezes

Se for aplicado o mesmo raciocínio da operação unária, os alunos terão mais facilidade para efetuar a divisão da primeira linha para a segunda linha como expresso no quadro 2.5. Se essas linhas estivessem invertidas, provavelmente, os alunos que não estão ainda familiarizados com esse tipo de raciocínio inverso, teriam dificuldades. Aqui, Vergnaud ressalta uma

difficuldade conceitual provocada pela inversão de fatores. Esse mesmo tipo de problema é encontrado nas estruturas aditivas, quando o estudante precisa resolver uma operação inversa de subtração. Por exemplo, uma operação como “Tenho 15 bolinhas. Perdi x e fiquei com 9 no final. Quantas bolinhas perdi?” é mais fácil de ser resolvida do que esta “Tenho x bolinhas. Perdi 6 e fiquei com 9 no final. Quantas bolinhas eu tinha?”. Na primeira operação, devo subtrair de 15 o número final para obter o resultado seis. Também posso subtrair um a um até chegar ao nove. Na segunda operação, preciso efetuar $9 + 6$ para poder chegar ao valor inicial, o que é uma operação inversa.

Quadro 2.6 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do primeiro tipo – forma inversa.

		Maçãs	Preço (R\$)	Função	
		1	x	$f(1)$	
Divide-se 4 vezes	→	4	4,00	$f(4)$	← Divide-se 4 vezes

Fonte: a autora.

No caso da *divisão de segundo tipo*, precisa-se descobrir o valor de x , sabendo os valores de $f(1)$ e $f(x)$. Alterando ligeiramente os dados do nosso exemplo 2, seu esquema seria representado como no quadro 2.8:

Quadro 2.7 – Esquema para resolução por divisão do segundo tipo.

G₁	G₂
1	$a = f(1)$
x	$b = f(x)$

Fonte: a autora.

Quadro 2.8 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do segundo tipo.

Maçãs	Preço (R\$)	Função
1	1,00	$f(1)$
x	4,00	$f(4)$

Fonte: a autora.

A solução desse tipo de problema seria semelhante ao usado no quadro 2.4, mas com a inversão da operação para divisão como é possível observar-se no quadro 2.9:

Quadro 2.9 – Esquema para resolução do exemplo 2 por divisão do segundo tipo – função direta.

Maçãs	Operação	Preço (R\$)
1	÷ R\$ 1,00	1,00
x	÷ R\$ 1,00	4,00

Fonte: a autora.

Vergnaud (1983) ressalta que esse tipo de raciocínio inverso não é tão simples assim, principalmente, por ser difícil para a criança lidar com as respectivas unidades de cada grandeza. Como forma de contornar essa dificuldade, muitos estudantes poderiam fazer a mesma operação como do quadro 2.3 ou 2.4 e chegar ao mesmo resultado.

Por último, no caso da *regra de três*, que é um modelo geral para resolução de problemas contendo quatro termos, é natural os estudantes aplicarem as seguintes propriedades isomórficas de funções lineares:

$$\begin{aligned}
 f(x + x') &= f(x) + f(x') \\
 f(x - x') &= f(x) - f(x') \\
 f(\lambda x) &= \lambda f(x) \\
 f(\lambda x + \lambda' x') &= \lambda f(x) + \lambda' f(x')
 \end{aligned}$$

No entanto, as seguintes propriedades de proporção são as menos comumente utilizadas:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax \\
 x &= \frac{1}{a} f(x)
 \end{aligned}$$

Vergnaud (1983) explica que as propriedades isomórficas parecem mais naturais para os alunos por envolver apenas duas grandezas e é propriamente modelada numa função linear. Portanto, proporções simples diretas também são nomeadas de *isomorfismo de medidas* para distinguir claramente a estrutura dos próximos subtipos: *produto das medidas* e *proporções múltiplas*.

2.3.2 Produto das medidas

O **produto das medidas** representa a estrutura cartesiana de duas grandezas de medida, G_1 e G_2 , dentro de uma terceira G_3 . Por exemplo, quando tratamos de área do retângulo, o produto das medidas (base $\times$ altura ou comprimento $\times$ largura) origina uma terceira grandeza (área). O mesmo ocorre com problemas envolvendo volumes, produto cartesiano, além de conceitos relacionados à Física.

Para obtenção da unidade da terceira grandeza, no caso do produto das medidas, há uma forma canônica para obtê-la:

$$(1 \text{ unidade de comprimento}) \times (1 \text{ unidade de comprimento}) = (1 \text{ unidade de área})$$

Por exemplo, vamos calcular a área de um terreno que tem 6 m de comprimento e 4 m de largura. As informações que temos desse problema são:

$$G_1 = \textit{comprimento}$$

$$G_2 = \textit{largura}$$

$$G_3 = \textit{área}$$

$$a = \textit{comprimento do terreno.}$$

$$b = \textit{largura do terreno.}$$

Para representar essas informações em um esquema, teremos que trabalhar com uma tabela de dupla entrada como a 2.1:

Tabela 2.1 - Esquema para resolução de um problema de produto das medidas – 1ª classe

		COMPRIMENTO (G_1)
		$a = 6 \text{ m}$
LARGURA (G_2)	$b = 4 \text{ m}$	$\text{ÁREA } (G_3) = a \times b = 24 \text{ m}^2$

Fonte: a autora.

É preciso estar muito claro para o aluno que, no caso do produto das medidas, basicamente, trabalha-se com o produto cartesiano e este é o produto de duas grandezas. No entanto, segundo Vergnaud (1983), esse conceito não é óbvio para os iniciantes. Por isso, é importante trabalhar com proporções simples antes de trabalhar com proporções duplas. O autor ressalta que é possível trabalhar tanto com o conceito de multiplicação quanto com o de divisão. Contudo, em uma segunda classe de problemas desse tipo, teríamos uma situação no qual o processo da divisão pode não ser claro. Veja-se a alteração dos dados da tabela 2.1 para ilustrar esse exemplo:

Tabela 2.2 – Esquema para resolução de um problema de produto das medidas - 2ª classe.

		COMPRIMENTO (G_1)
		$a = 6 \text{ m}$
LARGURA (G_2)	$b = x \text{ m}$	$\text{ÁREA } (G_3) = 6 \times x = 24 \text{ m}^2$

Fonte: a autora.

Veja-se que, para chegar à medida elementar (no caso, a largura em metros), é preciso lidar com a composta (área em metros quadrados). Decompor unidades de medida é um conceito que mesmo os alunos que já trabalham há alguns anos com produto das medidas (8º e 9º ano) ainda tem dificuldade.

Vergnaud (1983) esclarece que uma forma de explicar o produto das medidas é aplicar o duplo isomorfismo ou a proporção dupla. Ou seja, as propriedades escalares e aditivas do

isomorfismo de medidas podem ser aplicadas da mesma forma no produto das medidas, desde que uma das grandezas se mantenha constante. Por exemplo, veja-se o esquema da tabela 2.2, mantendo-se o comprimento como constante (6 m) e a largura como variável (x). Multiplica-se esse valor b por um λ . Logo, o resultado da área seria: $A = 6\lambda x$ (Tabela 2.3).

Tabela 2.3 – Esquema alternativo 1 de resolução de um problema de produto das medidas – 2ª classe.

		COMPRIMENTO (G_1)
		$a = 6 \text{ m}$
LARGURA (G_2)	$b = \lambda x \text{ m}$	$\text{ÁREA } (G_3) = 6 \times \lambda x = 6\lambda x \text{ m}^2$

Fonte: a autora.

De forma análoga, se o comprimento passa a ser variável (x) e a largura uma constante (4 m) e multiplica-se este valor por um λ , continua-se a obter a mesma operação: $A = 4\lambda x$ (Tabela 2.4).

Tabela 2.4 – Esquema alternativo 2 de resolução de um problema de produto das medidas – 2ª classe.

		COMPRIMENTO (G_1)
		$a = x \text{ m}$
LARGURA (G_2)	$b = 4\lambda \text{ m}$	$\text{ÁREA } (G_3) = x \times 4\lambda = 4\lambda x \text{ m}^2$

Fonte: a autora.

Se o comprimento é multiplicado por λ e largura por λ' , sendo x e y , respectivamente, as variáveis de comprimento e largura, teremos o resultado da área $A = \lambda\lambda'xy$. Veja-se o esquema na tabela 2.5:

Tabela 2.5 – Esquema alternativo 3 de resolução de um problema de produto das medidas – 2ª classe.

		COMPRIMENTO (G_1)
		$a = \lambda x \text{ m}$
LARGURA (G_2)	$b = \lambda' y \text{ m}$	$\text{ÁREA } (G_3) = \lambda x \times \lambda' y = \lambda \lambda' xy \text{ m}^2$

Fonte: a autora.

O isomorfismo também é válido para relação entre dimensões como tempo $\times$ velocidade = distância (exemplo: segundos $\times$ metros por segundo = metros). É importante ressaltar que a velocidade não é uma medida elementar, pois é representada por um quociente (metros/segundos). Logo, quando se aplica o isomorfismo, é preciso ficar atento às dimensões trabalhadas, principalmente, quando estamos ensinando para crianças mais novas. Por exemplo, a unidade de velocidade é um quociente entre distância e tempo, por isso, deve ser representada pela divisão das respectivas unidades dessas grandezas (**distância**: cm, m, km, etc. e **tempo**: min, h, dias, meses, etc.).

2.3.3 Proporções múltiplas

No caso das proporções múltiplas, há uma estrutura muito semelhante com o produto das medidas, principalmente, pelo aspecto da relação aritmética entre uma grandeza de medida (G_3) ser proporcional a outras duas independentes (G_1) e (G_2). No entanto, suas proporções possuem um significado próprio de acordo com uma situação fictícia. Isso significa que as proporções apresentadas nesses problemas não necessariamente têm uma relação geral aplicável a qualquer tipo de situação. Em outras palavras, seus aspectos aritméticos possuem uma relação proporcional, no entanto, quando se aplica no mundo real, isso só pode funcionar sob certas circunstâncias. Por exemplo, quando se quer estimar o consumo total de pães por uma família de quatro pessoas, no período de uma semana, sabendo que cada pessoa consome três pães por dia. Veja-se que essa situação só funciona para essa dada família criada para o problema e para as grandezas envolvidas. Eventualmente, os membros de outra família podem

não consumir três pães diariamente ou até mesmo consumir mais do que essa estimativa. Além disso, pode-se relacionar outras grandezas e não exatamente essas. Vejam-se três exemplos para ilustrar as ideias das proporções múltiplas.

Exemplo 3: Um casal pretende passar 12 dias hospedados em um hotel no qual a diária custa R\$ 40,00 por pessoa. Quanto será o seu gasto total?

Exemplo 4: Um fazendeiro quer calcular a média de produção de leite por suas vacas durante os melhores períodos. Com 17 vacas, ele produziu 70.340 litros de leite em um período de 180 dias. Qual a média de produção de leite por vaca e por dia?

Exemplo 5: Um acampamento recebeu 500 kg em cereais. Cada pessoa deverá receber 0,6 kg de cereal por semana. Se existem 236 pessoas nesse acampamento, quanto tempo durará o estoque de cereal?

No exemplo 3, trata-se de uma classe de problemas envolvendo a multiplicação. Observe-se que as grandezas envolvidas foram o número total de dias de hospedagem, o custo diário por pessoa e seu gasto total. Para obter o gasto total (G_3), basta multiplicar todas as três grandezas:

$$G_3 = 12 \text{ dias} \times 40 \frac{\text{reais}}{\text{pessoa} \times \text{dia}} \times 2 \text{ pessoas} = 960 \text{ reais}$$

Veja-se que essa segunda grandeza (custo da diária por pessoa por dia) foi escolhida arbitrariamente para este problema, mas poderiam ser outras. Poderia ser simplesmente custo por dia (mais utilizado). Porém, neste caso, o número de pessoas não entraria na conta do gasto final, somente o número de dias e a diária. Por isso, as proporções múltiplas se diferenciam do produto das medidas, pois as relações de grandezas são usadas para cada caso específico. Quando se calcula área ou volume, suas relações entre as grandezas são sempre fixas, por isso, ela faz parte do produto das medidas.

No caso dos exemplos 4 e 5, tratam-se de problemas de divisão, respectivamente, do primeiro e segundo tipo, como visto anteriormente no isomorfismo das medidas. A diferença entre os dois é que, no primeiro caso, se precisa encontrar o valor unitário $f(1,1)$ sabendo que $f(17,180) = 70.340 \text{ L}$ (Tabela 2.6) e, no segundo caso, precisa-se encontrar o valor de x sabendo que $f(1,1)$ e $f(x, 236) = 500$ (Tabela 2.7).

Tabela 2.6 – Esquema de resolução do exemplo 4.

		TEMPO (DIAS)	
		1	180
Nº DE VACAS	1	$f(1, 1) = x$	
	17		70.340 L

Fonte: a autora.

Tabela 2.7 – Esquema de resolução do exemplo 5.

		TEMPO (DIAS)	
		1	x
PESSOAS	1	0,6	
	236		500 kg

Fonte: a autora.

Vergnaud (1983) tentou explicitar, por meio dessas estruturas multiplicativas, que alguns conceitos em matemática, mesmo quando trabalhados desde cedo, não são facilmente compreendidos pelos estudantes. Esses exemplos que foram mostrados anteriormente são facilmente encontrados em livros didáticos a partir dos anos finais do segundo ciclo⁴ do Ensino Fundamental. O autor explica, por exemplo, que não é claramente definido o limite entre o estágio concreto e o formal, referindo-se às ideias de Piaget, dentro de um campo conceitual como o das estruturas multiplicativas. Ele acredita que contrastar números concretos com outros “puros” seria uma visão muito reducionista de trabalhar com esse conceito. Esse tipo de simplificação pode gerar equívocos no futuro como tratar grandezas como números ou as operações numéricas como um estágio concreto de aprendizado de operações. Mas, sabe-se que existem ideias e teoremas formais a respeito das grandezas e operações que não podem ser resumidas a essa interpretação.

No entanto, Vergnaud (1983) pondera que algumas propriedades mais gerais de números racionais não podem ser expressados ou explicados sem os considerar como números “puros”. Um exemplo disso seriam os casos da “multiplicação em cruz”, como a seguir:

⁴ Considerando a divisão em quatro ou em três ciclos segundo orientação do MEC (BRASIL, 2006), correspondendo a uma faixa do quarto e quinto ano do Ensino Fundamental de nove anos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad , \quad ad = bc \quad , \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Nesse esquema, o que se poderia concluir por meio da multiplicação de a com d , se cada um deles representa uma grandeza? Esse tipo de operação é comumente utilizado em problemas envolvendo razão e proporção, mas será que o conceito de estrutura multiplicativa está realmente claro para os alunos quando resolvem tal tipo de operação?

Brousseau utiliza um termo chamado *ilusão didática* que consiste na crença de que apresentar uma aula ou teoria de maneira bem organizada é suficiente para os estudantes aprenderem Matemática. Vergnaud (1983) também reforça a mesma ideia de que, embora a resolução de problemas seja uma parte importante do aprendizado, ela não é garantia de que ocorreu de forma permanente, pois os campos conceituais desenvolvem-se de maneira gradual. No entanto, o autor também afirma que isso não significa que se deve extinguir as resoluções de problemas, pelo contrário, elas são essenciais para o processo de aprendizagem. Portanto, o professor deve preocupar-se em criar formas que permitam avaliar as etapas desse processo de desenvolvimento dos conceitos e o seu respectivo domínio pelos alunos.

Outra falácia muito comum, quando se trata de aprendizagem em Matemática, é de postergar a abordagem de conceitos mais complexos até que os alunos atinjam um suposto estágio de maturidade. Vergnaud (1983) afirma que isso é um completo engano, pois não há como os estudantes desenvolverem conceitos mais complexos se não são colocados em tais situações desde cedo. Por isso, sua Teoria dos Campos Conceituais tem o propósito de mostrar ao professor uma variedade de situações e análises em diferentes níveis, para ajudá-lo a compreender o progresso dos alunos de forma gradual e operacional.

2.4 A teoria dos Campos Conceituais

O grande passo dado pela Teoria dos Campos Conceituais foi reunir a ideia de situação. Ou seja, refere-se a qualquer tarefa matemática que um indivíduo deseja realizar. Para Vergnaud (1990), um conceito só adquire sentido para a criança quando existem situações e problemas para resolver. Ou seja, um conceito não deve ser reduzido a sua definição. Deve

existir uma classe de situações nas quais um sujeito pode aplicar tais conceitos. Segundo o autor, existem dois tipos de classe de situações:

- 1) Uma classe de situações nas quais o sujeito consegue aplicar competências de forma imediata;
- 2) Uma classe de situações nas quais o sujeito ainda precisa desenvolver competências.

Para aplicar os conceitos dentro de cada situação é necessário possuir esquemas para a resolução dos problemas. Conforme Vergnaud, esquema é uma organização invariante de conduta, para uma dada classe de situações, e pode estar presente nas duas categorias citadas anteriormente. Ela pode ser usada em diferentes níveis (*conhecimentos-em-ação* e *teoremas-em-ação*), além da possibilidade de existir mais de um esquema para cada classe.

Os *conhecimentos-em-ação* são ações que um sujeito consegue executar, mas não é capaz de explicitar o seu processo, pois ainda não tem domínio suficiente. Normalmente, os *conhecimentos-em-ação* estão ligados às tarefas operacionais aprendidas no cotidiano, sem um aprofundamento teórico por trás deste conhecimento. Krutetskii (1976) cita, por exemplo, o pensamento “em voz alta” no raciocínio dos alunos. Quando um sujeito está aprendendo um algoritmo ou uma habilidade nova, é normal que verbalize suas ações com o intuito de memorizar pouco a pouco as informações até se tornar automatizada. Esse tipo de comportamento pode se repetir em outras situações, tais como: o aprendizado da leitura (só depois de um tempo, uma criança é capaz de fazer a leitura silenciosa⁵), uma pessoa que aprende a dirigir ou operar uma máquina, um sujeito que está se locomovendo de um lugar a outro verbalizando o nome das ruas e as respectivas direções em que deve seguir, entre outras, também são exemplos ilustrativos.

No caso dos *teoremas-em-ação* são ações executadas com o apoio de uma perícia ou conhecimento erudito sobre o assunto. Ou seja, é passível de ser verificada como verdadeira sobre o real. Quando esses dois níveis de esquema trabalham juntos e o sujeito é capaz de desenvolver e aplicar tais esquemas para variadas situações, elas passam a ser chamados de invariantes operatórios. Esta última se refere a ações suficientemente automatizadas e implícitas que fazem parte da habilidade cognitiva do sujeito para resolução de uma determinada situação.

⁵ A leitura silenciosa é uma habilidade desenvolvida pelos monges copistas na Idade Média de acordo com o contexto da época. Para detalhes, consulte Fischer (2006) nas referências bibliográficas.

Os invariantes operatórios, no entanto, não são ações observáveis ou explícitas para os alunos, pois fazem parte do psicológico do sujeito, embora seja explícito ao professor. Pode-se levantar algumas habilidades como supostos pré-requisitos para a resolução de uma tarefa, mas não se pode afirmar com precisão se os invariantes operatórios de um sujeito A trabalham da mesma forma que os de um sujeito B , embora os dois consigam chegar a uma mesma solução.

Moreira (2002) exemplifica essa situação utilizando dois tópicos da Matemática, álgebra e aritmética, como dois conteúdos que se apoiam um no outro, mas que para compreender o primeiro é necessário romper com a Aritmética. Outro exemplo seria com a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica que, da mesma forma como na álgebra e na aritmética, é necessário criar rupturas, mesmo apresentando continuidades entre esses dois tópicos.

Além disso, influências externas, principalmente socioculturais, podem estar envolvidas no desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. A forma de investigar mais profundamente um invariante operatório em ação é trabalhando por longos anos um determinado grupo, separando-os por faixas etárias, por formação acadêmica ou cultural, facilidade com o conceito matemático entre outros. No entanto, para fins didáticos e de pesquisa, pode limitar-se a levantar as partes visíveis dos invariantes operatórios que são compostas pelas proposições, funções proposicionais e objetos-argumento.

As **Proposições** são os invariantes operatórios compostos por sentenças que são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas. Podemos dizer que elas são os *teoremas-em-ação* dos esquemas.

Exemplo 1: Crianças entre cinco e sete anos de idade já são capazes de perceber que não é necessário recontar desde o início para encontrar o cardinal de $A \cup B$ se já contamos A e B . Esse conhecimento pode ser expresso pelo seguinte *teorema-em-ação*:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B), \text{ sempre que } A \cap B = \emptyset$$

Exemplo 2: Já entre oito e dez anos de idade, a criança é capaz de perceber a relação de multiplicidade entre a quantidade de objetos comprados e o preço a ser pago. Por exemplo, se uma quantidade de objetos for multiplicada por um número x , consequentemente, seu preço também será x vezes maior. Expressando esse *teorema-em-ação*, temos:

$$f(nx) = n \cdot f(x), \forall n \text{ inteiro e simples.}$$

Funções proposicionais são peças indispensáveis para a construção de proposições. Elas não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas e são construídas dentro de uma ação cognitiva do aluno. Em matemática, pode-se citar alguns exemplos:

- 1) Propriedades (funções proposicionais com um argumento, que podemos escrever como $P(x)$).

“... é azul”

- 2) Relações binárias (funções proposicionais com dois argumentos, que podemos escrever como $R_2(x, y)$).

“... está à direita de ...”

- 3) Relações ternárias (funções proposicionais com três argumentos, que podemos escrever como $R_3(x, y, z)$).

“... está entre ... e ...”

- 4) Proporções (funções proposicionais com 4 argumentos)

“... é proporcional a ... tal que ... e ...”

Dizem-se que essas funções proposicionais são construídas dentro de uma ação cognitiva dos alunos, pois no caso do primeiro exemplo, para o sujeito identificar que um objeto é azul, ele precisa implicitamente usar a relação de equivalência para diferenciar as propriedades desse objeto. O resultado final seria apresentar um objeto azul, porém, como poderia descrevê-lo? Como poderia diferenciá-lo da cor vermelha, por exemplo? Para saber a definição de azul, é preciso um conhecimento anterior para o reconhecimento desta cor. Por isso, diz-se também que eles são *conhecimentos-em-ação*, pois o sujeito pode até não conseguir explicar a definição de azul, mas sabe distinguir ou dar exemplos de objetos azuis. Otero (2014) refere-se a essas representações como um “fluxo da consciência” (p. 28) que se explica como um fenômeno psicológico no qual um indivíduo tem a experiência de esboçar imagens abstratas em seu pensamento em diferentes níveis de interiorização e que ocorrem de forma espontânea, sem uma ação necessariamente consciente.

E, por fim, os invariantes do tipo *objeto-argumento* são a junção das proposições com as funções proposicionais para criar um sentido de um conceito.

Exemplo:

Tome três argumentos: P , R_2 e R_3 e três objetos: Paulo, livro e mesa.

Vejam-se as propriedades (P):

- Paulo é uma pessoa;
- Livro é um objeto que pode ser manipulado por Paulo;
- Mesa é um aparato de apoio para o livro e pode ser manipulado por Paulo.

Matematicamente, esses três objetos poderiam ser representados da seguinte maneira:

$$\text{Paulo} = x;$$

$$\text{Livro} = y;$$

$$\text{Mesa} = z.$$

Utilizando o argumento binário $R_2(x, y)$ teríamos $R_2(\text{Paulo}, \text{livro})$ correspondente à função proposicional “Paulo põe o livro”.

No argumento ternário teríamos $R_3(x, y, z)$ que é correspondente a $R_3(\text{Paulo}, \text{livro}, \text{mesa})$ e que representa a proposição “Paulo põe o livro sobre a mesa”.

Por isso, para Vergnaud (1990), a forma de explicitar um conceito seria uma ternária dos conjuntos $C(S, I, \Gamma)$:

S : conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I : conjunto de situações sobre as quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado);

Γ : conjunto das formas linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e procedimentos de tratamento (o significante).

Assim, dizem-se que os invariantes operatórios não possuem um tipo lógico único para a construção de um conceito, mas sabe-se que o envolvimento das proposições, funções proposicionais e os *objetos-argumento* dão sentido para as situações. Moreira (2002) afirma que os *teoremas-em-ação* de Vergnaud possuem uma certa compatibilidade com a teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird⁶, principalmente se for pensado em termos de categoria de

⁶ Uma compreensão melhor sobre as ideias dos Modelos Mentais de Johnson-Laird poderá ser obtida no Capítulo 4 desta tese, com a apresentação da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento.

pensamento. No entanto, há uma diferença entre os dois: os Modelos Mentais são instrumentos para compreender um conceito enquanto os esquemas de assimilação de Vergnaud são invariantes de comportamento utilizados em determinadas classes de situações. Ou seja, os Modelos Mentais possuem um modelo mais “temporário” de construção de ideias e pensamentos que são passíveis de serem reacomodados para construir um novo modelo. Já os invariantes operatórios são mais estáveis e, por isso, poderia-se dizer que é um passo posterior aos Modelos Mentais.

Voltando à ternária dos conjuntos que representa o conceito, existe o conjunto das situações que dão sentido a ele, que é o primeiro deles. Porém, o que significa uma situação ter sentido? Para Vergnaud (1990), o sentido envolve esquemas mobilizados dentro do sujeito por uma situação ou por um significante, ou seja, são as suas condutas e organizações. Por exemplo, o sentido da adição pode iniciar um conjunto de esquemas relacionados às ideias de símbolos, números, da álgebra e da linguagem. Porém, isso não significa necessariamente que se deve mobilizar todos os esquemas possíveis. Em outras palavras, dentro de uma situação dada e de seu universo, cada sujeito associa a um subconjunto de esquemas possíveis para criar o sentido próprio. Ou seja, deve existir uma situação para criar o sentido e, conseqüentemente, provocar a ação do sujeito e não o seu inverso.

Quando se fala de operacionalidade dos esquemas (segundo conjunto da ternária, representada por I), precisa-se entender como elas funcionam para possibilitar a mobilização do pensamento. Basicamente, os esquemas geram uma classe de condutas associadas a uma situação específica atuando como um organizador do pensamento. Vergnaud (1990) explica porque isso é possível pelas seguintes explicações sobre o esquema:

1) Comporta invariantes operatórios

Isso significa que os *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação* servem de guias para o reconhecimento do sujeito sobre a situação e informação que deve tratar.

2) Permite antecipar ações

Como os esquemas são organizações imediatas e relativamente automatizadas de um sujeito, de acordo com cada situação, ele poderá prever os passos e etapas intermediárias que devem ser construídas para atingir um objetivo.

3) Permite regras de ação do tipo condicional

As regras de ação do tipo “se...então...” permitem gerar uma sequência de ações.

4) Permite inferências

Em outras palavras, permite antecipar regras de acordo com as informações e sistema de invariantes operatórios pertencentes ao sujeito.

Para encerrar-se a discussão sobre o último conjunto (Γ), as formas linguísticas, Vergnaud (1990) ressalta que a dupla função da linguagem de comunicação e representação já é um consenso. No entanto, o seu valor para ajudar na organização do pensamento ainda é subestimado, segundo o teórico. Ele exemplifica as circunstâncias em que um indivíduo, ainda em processo de aprendizagem, precisa repetir verbalmente o passo a passo de suas ações. Quando elas são automatizadas, não há o acompanhamento da fala. Por isso, um grande indício de que um conceito ainda não foi totalmente internalizado é quando há a verbalização voluntária ou, no caso de explicações formais, as pessoas explicam de forma prolixa. Portanto, o papel da linguagem parece ir além da sua representação. Serve também para ajudar na organização do pensamento.

Em resumo, a Teoria dos Campos Conceituais é uma ferramenta que parte do princípio da elaboração pragmática dos conhecimentos. Na aprendizagem de Matemática, é importante tratar de sentidos e de situações. Isso significa que não se deve valorizar apenas o simbolismo (por exemplo, a linguagem formal matemática) e nem apenas as situações (trabalhar apenas com exemplos ligados ao cotidiano, sem a linguagem formal matemática). A chave é focar-se nas organizações de conduta que permitem a mobilização coerente dos conhecimentos. Quando se trata de álgebra, há uma crença de que se trata apenas de manipular símbolos. Rousseau (2015) considera que há algumas línguas que são mais conhecidas escritas do que faladas e, inclusive, refere-se à álgebra como um desses tipos. Nesses casos, há uma necessidade de aprender duas vezes: a sua forma escrita e como ela é falada⁷. No caso da álgebra, pode-se expressar que os alunos podem aprender a sua escrita, porém, poucos compreendem

⁷ Rousseau (2015) exemplifica a língua inglesa como uma língua que é necessário aprender a ouvir e a falar. No caso, a impressão causada pela sua escrita e fala são diferentes, principalmente, para um estrangeiro. A justificativa se repousa no fato da Inglaterra ter sido conquistada por vários povos e, consequentemente, as pronúncias terem mudado ao longo do tempo, mas a sua escrita ter permanecido a mesma.

aquilo que escrevem. Logo, é preciso criar sentidos e situações para que o conhecimento algébrico passe a fazer sentido para o aluno enquanto um algoritmo lógico.

Para ajudar a resumir os principais conceitos da teoria, foram montados alguns diagramas em forma de mapas conceituais, no qual, cada um, responde a uma pergunta focal. Não será entrando em detalhes teóricos sobre os mapas conceituais, pois o intuito é utilizá-los apenas como uma ferramenta de apoio para ilustrar os principais conceitos acerca da Teoria dos Campos Conceituais.

Os mapas conceituais são muito úteis para ajudar na sistematização do conhecimento de um especialista para que seja compreensível por um não especialista. Basicamente, cada mapa responde à uma única pergunta focal e formado por proposições. Cada proposição é composta por um conceito inicial conectada por um termo de ligação chegando ao conceito final. Cada uma das proposições contidas no mapa deve ter clareza semântica para ajudar a responder a pergunta focal. Além disso, cada conceito pode ser detalhado por meio de um novo mapa que responde a uma nova pergunta focal. Neste caso, optou-se por responder às seguintes perguntas:

- 1) O que é a Teoria dos Campos Conceituais?
- 2) Qual a definição de “situação” nos Campos Conceituais?
- 3) O que formam as estruturas multiplicativas?
- 4) O que formam as estruturas aditivas?

Figura 2.2 – Pergunta focal: O que é a Teoria dos Campos Conceituais?

Figura 2.3 – Pergunta focal: Qual a definição de “situação” nos Campos Conceituais?

Pergunta focal: O que formam as estruturas multiplicativas?

Figura 2.4 – Pergunta focal: O que formam as estruturas multiplicativas?

Figura 2.5 – Pergunta focal: O que formam as estruturas aditivas?

No próximo capítulo, será feita uma discussão sobre a metodologia da pesquisa e sobre o referencial utilizado para desenvolvê-la.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DO ESTUDO PILOTO

3.1 Introdução

A metodologia que foi adotada para elaborar este estudo foi seguir as séries de classificação de habilidades matemáticas (KRUTETSKII, 1976) e realizar uma adaptação de acordo com o contexto local dos alunos envolvidos. Foram escolhidas apenas algumas dessas séries que fossem mais coerentes com as habilidades cognitivas que se pretende analisar, principalmente, tendo como apoio a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2009, 2014). Quanto à análise deste estudo, optou-se por uma abordagem qualitativa que compara as habilidades apresentadas pelos respectivos sujeitos, por meio de uma categorização das respostas em *perguntas-modelo*, criadas com o apoio da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento (MORENO *et al.*, 2000c). A ideia foi cruzar os dados obtidos na análise com os Campos Conceituais que apresentaram mais evidências de dificuldades pelos estudantes. Com esse levantamento, entende-se que seria possível elaborar quais esquemas e invariantes operatórios podem ser encontrados, de acordo com uma faixa etária de ensino. Todavia, pode haver variações de acordo com o indivíduo. E também houve o interesse em analisar tais aspectos neste trabalho.

É importante ressaltar que o trabalho original de Krutetskii (1976) foi uma pesquisa de grande porte, envolvendo um grupo composto por vários pesquisadores e desenvolvida ao longo de doze anos. Houve uma preocupação, por parte do autor, em desenvolver tanto uma análise quantitativa quanto qualitativa. Por isso, houve um cuidado de levantar uma amostra razoavelmente grande de dados para uma análise estatística posterior.

Essa pesquisa também envolveu a participação de, pelo menos, 50 professores e 1.000 alunos da região de Moscou, a qual apresenta o número de acertos e erros de cada tipo de atividade de acordo com cada série. Além da pesquisa quantitativa, Krutetskii teve como objetivo realizar uma análise qualitativa identificando, dentro dessa amostra, aqueles alunos com facilidade para resolver problemas matemáticos, entrevistá-los individualmente e pesquisar como esses estudantes desenvolveram tais habilidades. Foram investigados fatores

que relacionassem a habilidade destacada dos alunos em Matemática, como o seu histórico familiar, escolar, ou de seu desenvolvimento psicocognitivo e até mesmo de gênero, mas não se chegou a uma concreta indicação de tal correlação. Aparentemente, trata-se de um conjunto desses fatores, mas não se aponta um único que seja responsável por desenvolver a habilidade em Matemática.

Já esta pesquisa, focou-se em analisar as principais dificuldades e a forma como os alunos demonstram a resolução de um problema matemático. Além disso, buscou-se identificar os diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo, por meio da classificação dos possíveis esquemas e invariantes operatórios envolvendo conteúdos de aritmética, álgebra, com um pouco de lógica, ou a mistura de todos eles. Krutetskii utilizou também o conteúdo de geometria. Neste caso, esse conteúdo aparece eventualmente numa característica mista para possibilitar o olhar apenas no aspecto de transição da aritmética para a álgebra.

Para analisar essas habilidades, foram escolhidos os alunos de oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de São Paulo. Selecionou-se esse nível de ensino por dois motivos: minimizar a chance de desconhecimento sobre o conteúdo, já que se pressupõe um contato mínimo de um ano com a álgebra. E, teria-se a oportunidade de continuar a coleta de dados no ano subsequente, com a mesma turma, que estará cursando o último ano do Ensino Fundamental. Isso garantiria uma certa linearidade dos dados e uma análise mais aprofundada dos sujeitos escolhidos para a pesquisa.

Outro critério que se considerou importante para a escolha da escola parceira de pesquisa foi o perfil da professora de Matemática. O perfil desejado foi encontrar um(a) professor(a) que lecionasse a disciplina há mais de um ano, na mesma escola, e que conhecesse suficientemente bem os alunos escolhidos para a pesquisa. Esses critérios foram adotados como forma de garantir a validação prévia dos conteúdos com o(a) professor(a), para a aplicação do estudo. Esse cuidado evitaria o risco de apresentar um tópico que seria novidade para os estudantes.

Para encontrar a escola com esse perfil, procurou-se por indicações de instituições, com colegas da área que lecionam na rede pública, e foi encontrada, nesta escola, uma docente que leciona há mais de vinte anos nesta mesma instituição e conhece bem as dificuldades com o conteúdo de álgebra desses alunos. Com o apoio dessa professora, foi possível validar o estudo piloto previamente e garantir a relevância nos dados que seriam coletados dentro das hipóteses desta pesquisa.

3.2 Elaboração do estudo piloto

3.2.1 Objetivo do estudo piloto

Nesta pesquisa, o estudo piloto cumpriu a principal função de possibilitar a seleção das atividades que permitem a melhor análise das dificuldades dos alunos com as habilidades relacionadas à álgebra. Porém, para que isso fosse feito com sucesso, foi importante a participação da professora que trabalha com esses alunos. Inicialmente, para criar-se um vínculo com a professora nesta pesquisa, considerou-se relevante fazer uma breve entrevista contando um pouco sobre a sua experiência docente e as estratégias didáticas mais utilizadas para motivar e superar as dificuldades que os alunos apresentam com o conteúdo de álgebra. Não será feita uma transcrição da entrevista na íntegra, pois não era o foco principal analisar o seu conteúdo, mas apenas um resumo com as observações fundamentais que contribuíram para a elaboração do estudo piloto que serão discutidos no item a seguir.

3.2.2 O contexto da escola e os sujeitos envolvidos

A escola que aceitou a parceria de pesquisa é da rede estadual, localizada na região metropolitana da cidade de São Paulo. Ela tem 40 anos de existência e reconhecida na região por desenvolver projetos educacionais diferenciados de engajamento socioambiental. Um desses projetos, inclusive, foi premiado em 2011, na EducaRed, em Madrid, promovido pela Fundação Telefônica.

A professora Ângela¹ é docente da disciplina de Matemática nesta escola há 20 anos, já lecionou desde o início do Ensino Fundamental até o Ensino Médio e possui como característica marcante o engajamento com projetos educacionais que

1 Nome fictício adotado para preservar sua identidade.

possibilitam a aproximação do conteúdo com a realidade do aluno. Ela também foi uma das idealizadoras do projeto premiado pela Fundação Telefônica, e contou que a ideia do projeto surgiu por meio de um problema ambiental enfrentado no bairro onde se situa a escola: as enchentes. E, de dois outros problemas que enfrentava na sala de aula: a desmotivação dos alunos e o uso contínuo de aparelhos celulares durante as aulas.

Em conversa com outra docente da disciplina de Geografia, as duas professoras tiveram juntas a ideia de unir as três “problemáticas” e propor um projeto aos alunos: montar um documentário sobre a questão das enchentes na região, com a ajuda dos aparelhos celulares. Para isso, coletaram dados, entrevistaram moradores do bairro para abordar o problema e criaram uma campanha de conscientização. Prepararam em formato de vídeo e disponibilizaram na internet o documentário gravado e editado pelos próprios alunos. Com ele, fizeram a inscrição no projeto da EducaRed da Telefônica, o qual foi premiado em Madrid.

Mesmo depois da premiação, houve uma continuação desses trabalhos, realizando parcerias com o Centro de Controle de Zoonoses da região para apresentar uma palestra na escola com os alunos e conscientizá-los sobre os riscos que o lixo acumulado nas ruas e córregos pode trazer à saúde. Outra iniciativa adotada foi de criar um jardim, dentro da escola, com mudas recebidas por meio de doação dos pais dos alunos e, assim, tornar um ambiente mais agradável no qual os alunos possam desfrutar as horas do intervalo. Essa ideia também surgiu do fato de ter pouco verde no bairro onde se situa a escola.

Contando um pouco sobre esses projetos, foi possível notar que a professora Ângela tem uma grande preocupação em ressaltar os conteúdos estudados pelos alunos e de unificar a teoria com a prática. Esse projeto educacional desenvolvido foi descrito, embora não tenha ligação direta com o conteúdo que será abordada nesta pesquisa, para evidenciar a importância da participação desta professora neste estudo.

Em relação à sua formação, a professora Ângela relatou que concluiu sua graduação já há um tempo e o mestrado em Educação na década de 90². Seu tema de pesquisa envolveu o ensino de Probabilidade e Estatística.

² Durante as conversas, a professora mencionou diversas vezes a importância da presença do Prof. Dr. Ubiratan D’Ambrósio em sua banca de defesa de mestrado, cuja admiração pela figura do professor parece ter exercido muita influência na sua forma de atuação como docente.

Quanto aos conteúdos de Álgebra que já foram trabalhados com os alunos do oitavo ano, a professora contou que trabalhou com produtos notáveis, expressões algébricas, fatoração e sistemas de equações. Quando se contatou a escola, encontrava-se no quarto bimestre do ano de 2016 e esses conteúdos foram trabalhados no segundo bimestre desse mesmo ano. Nesse momento, estavam estudando o conteúdo de geometria sobre áreas. Foi questionado a docente sobre quais tipos de atividades foram utilizadas para ajudar na compreensão dos conteúdos de álgebra. Segundo ela, os alunos tinham muita dificuldade com operações utilizando incógnitas.

Quando foi indagado sobre as estratégias que a professora utiliza em suas aulas, comentou que sempre tenta utilizar recursos diferenciados como jogos, competições e idas ao laboratório de informática para motivar os alunos a aprender conteúdos que, muitas vezes, são de difícil compreensão. Por exemplo, para ajudá-los a superar a dificuldade de operações com incógnitas, a professora aplicou uma atividade, inspirada em um livro de atividades algébricas utilizando jogos, na qual os alunos deveriam se dividir em times e resolver várias expressões algébricas sorteadas de forma aleatória na lousa. O time que conseguisse resolver mais expressões corretamente ganharia o jogo. Essa estratégia parece ter funcionado bem e, portanto, no início de cada aula, os alunos iniciavam com essa atividade para revisar e reforçar as operações algébricas. Com o espírito de colaboração e competição saudável, a professora disse que tal atividade trouxe bons resultados para alunos que apresentavam alguma dificuldade, ainda que alguns tenham permanecido com muitas dúvidas.

Partindo dessas informações prévias, foram escolhidas algumas atividades que mesclassem as características das atividades desenvolvidas pela professora Ângela, dentro do conjunto de atividades elaboradas por Krutetskii. Tais atividades deveriam permitir analisar as evidências das habilidades matemáticas dos alunos para resolução de problemas algébricos. Depois da escolha dessas atividades, elas foram entregues à docente para que pudesse contribuir com críticas e sugestões, mas não houve nenhuma alteração após a sua análise.

3.2.3 Características do conjunto de atividades

Para definir o conjunto de atividades que seria aplicado no piloto, dividiu-se em três categorias e cinco grupos de habilidades conforme resumo do quadro 3.1. Elas foram adaptadas de Krutetskii (1976) e também estão divididas em várias séries de atividades. O seu modelo ampliado, com a descrição completa dos grupos de habilidades, pode ser consultado no Anexo A da tese.

Quadro 3.1 - Grupos de habilidades a serem analisadas.

Categorias	Nº³	Grupo de habilidades
Coleta de informações	H1	Percepção (Interpretação de um problema)
Processamento de informações	H2	Generalização de conceitos matemáticos
	H3	Reversibilidade do processo mental
	H4	Compreensão; Raciocínio e Lógica
Tipologia	H5	Tipos de habilidades matemáticas

Fonte: a autora.

As categorias e tipos de atividades que foram escolhidas dão ênfase nos conteúdos de aritmética, álgebra e algumas de lógica. Esses conteúdos foram escolhidos para poder-se comparar os alunos em três características:

- 1) Os que resolvem utilizando recursos de aritmética;
- 2) Os que resolvem utilizando recursos de álgebra;
- 3) Os que utilizam recursos alternados ou lógico-verbais.

Nas categorias criadas por Krutetskii, os conteúdos estão reunidos em diferentes séries e grupos de habilidades, permitindo-se uma análise mais abrangente em termos de desenvolvimento cognitivo. No entanto, Vergnaud (1983) faz um alerta de que não seria adequado analisar de forma separada as habilidades matemáticas, pois elas são intrínsecas, o que se está de acordo. Porém, é válido afirmar que existe uma linearidade na transição da aritmética para a álgebra, principalmente, na forma como

os conteúdos estão didatizados no currículo escolar. Logo, não se objetivou analisar as habilidades por conteúdo, mas verificar os diferentes esquemas e invariantes operatórios mobilizados de acordo com o conteúdo. E, se tratando da Teoria dos Campos Conceituais, é inevitável que se escolha conteúdos didáticos, já que a teoria se propõe a analisar uma situação didática e, portanto, não seria válido elaborar atividades que não se amparassem nesses conteúdos.

No trabalho de Krutetskii (1976), dentro de cada habilidade também foram criadas uma série de atividades com objetivos específicos. Foram escolhidas algumas dessas séries que vão ao encontro das três características, que foram citadas anteriormente, e separadas naquelas que fariam parte do estudo piloto ou do estudo final, como serão detalhados a seguir.

Série I - Problemas com enunciados indeterminados

O principal objetivo da Série I é identificar se os alunos são capazes de formular questões em problemas no qual elas não estão explicitadas. Basicamente, seria testar sua capacidade em relacionar as informações dadas e interpretar o que se deseja obter por meio delas. Sabe-se que, na maioria das atividades realizadas pelos alunos, os enunciados dos problemas costumam ser diretos e escritos com verbos na forma imperativa como “Calcule”, “Resolva” ou “Descubra”. Por meio de um processo mecanizado e de muita repetição, muitos são capazes de resolver problemas corretamente, mesmo não compreendendo a essência da atividade. Portanto, essa Série I tem como principal objetivo analisar o nível de compreensão global das informações ao interpretar um problema.

As atividades desta série estão divididas em dois tipos de conteúdo: aritmética e algébrica. O problema apresenta informações semelhantes, mas com uma diferença básica: uma apresenta os dados sem a utilização de incógnitas (aritmética) e a outra com as incógnitas (algébrica). Essa divisão, porém, não será explicitada para o aluno.

Série I: Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.

i. Aritmética

- 1) Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para o outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres. *(Resposta similar esperada: Qual é o valor que há em cada cofre?)*
- 2) Fui ao shopping fazer uma compra. Se eu pagar utilizando apenas notas de 2 reais, terei que utilizar 9 notas a mais do que se eu pagasse com notas de 5 reais. *(Resposta similar esperada: Qual é o valor da minha compra?)*

ii. Algébrica

- 1) Um homem viveu por x meses. *(Resposta similar esperada: Qual é a idade desse homem?)*
- 2) Um carro viajou 760 km a uma velocidade média de x km por hora. *(Resposta similar esperada: Quanto tempo durou essa viagem?)*

Série II – Problemas com informações incompletas

Nesta série, o aluno deve perceber a informação que está faltando para resolver o problema. Esta série difere da anterior pelo fato da primeira não ter uma pergunta direta, mas suas informações serem suficientes para resolvê-las (pelo menos nas aritméticas). Portanto, o objetivo principal desta série é verificar se o aluno consegue identificar a estrutura formal de um problema como um todo e perceber as informações que estão faltando para poder resolvê-lo. Tal nível de complexidade de raciocínio é possível quando se percebe as relações e os fatos concretos de um problema. No caso desta série trabalha-se apenas com o conteúdo de Aritmética.

Série II: Leia e resolva os problemas a seguir. Você notou algo de diferente neles? Explique.

- 1) Uma escola recebeu 80 notebooks separados em dois tipos de modelos. Os mais simples custam 800 reais e o modelo mais avançado 1.000 reais. Quantos

notebooks de cada tipo a escola recebeu? (*Resposta esperada: Falta o valor total dos notebooks*)

- 2) Uma biblioteca possui um total de 6.100 livros entre Português, Matemática e Ciências. Existe 25% a mais de livros de Português do que de Ciências. Quantos livros de cada tipo existe na biblioteca? (*Resposta esperada: Falta a informação de quantidade de cada tipo de livro*)

Série III – Problemas com informações excedentes

Quando o aluno mecaniza a resolução de problemas, muitas vezes, há uma preocupação em identificar e organizar as informações de um problema, de uma forma que todas elas sejam utilizadas para resolvê-lo. No entanto, existem algumas informações que são dedutíveis e não precisam ser informadas. Esta série serve para identificar esse tipo de habilidade no aluno: como ele será capaz de identificar apenas as informações relevantes e deixar de lado aquelas que são excedentes?

Nesta série também se trabalha apenas com o conteúdo de aritmética. As informações excedentes estão marcadas em *itálico*.

Série III: Leia e resolva os problemas a seguir. As informações expressas são suficientes? Explique quais você utilizou.

- 1) Existem 40 veículos em um estacionamento entre carros e motocicletas. Ao todo existem 100 rodas e 40 volantes⁴. Quantos veículos de cada tipo há neste estacionamento? *(Resposta esperada: Notar que o número de volantes é irrelevante).*
- 2) Quatro Pokémon juntos pesam⁵ 40 kg. Determine o Pokémon de maior peso sabendo que cada um deles é 3 vezes mais pesado que o outro e o mais leve pesa exatamente 12 vezes menos do que a soma dos dois Pokémon de peso intermediário entre os quatro. *(Resposta esperada: Notar que a informação do Pokémon mais leve é irrelevante).*

Série V – Sistemas de problemas de um tipo único

Esta série de problemas tem como principal objetivo verificar a capacidade de generalização de processos e a habilidade de transferir um método de operação desenvolvido anteriormente para outra com condições similares. Essa habilidade é o que vai mais ao encontro dos esquemas e invariantes operatórios dos Campos Conceituais, pois parte do pressuposto de que o aluno possui autonomia suficiente para criar processos semelhantes para contextos diferentes. Particularmente, esta habilidade é a mais exigida em álgebra. Por isso, o conteúdo que será analisado para essa Série V será apenas o conteúdo algébrico.

Nesta série há dois tipos de atividades. A atividade B1 que contém expressões algébricas, na qual é necessário aplicar uma regra distributiva ou o conceito de produto notável (quadrado da soma de dois termos) para resolvê-las. Cada item tem

⁴ No inglês, essa palavra está denotada como *steering devices*, que pode ser traduzida como volante, mas na Língua Portuguesa possui significado específico apenas para controles de direção em formato circular. Isso causou dúvidas em alguns alunos na interpretação do problema. Porém, não existe, na nossa língua, uma palavra que fosse genérica o suficiente para traduzir algo que se refere tanto para automóveis quanto para motocicletas. De qualquer forma, foi utilizada a própria dúvida ou questionamento dos alunos para interpretar-se os dados, já que não se está interessado em analisar a sua resolução.

⁵ Aqui optou-se pelo uso popular do significado de peso referente à massa de um corpo e não a definição correta de Física como a força exercida sobre um corpo pela ação gravitacional.

complexidade gradual, ou seja, o item anterior serve como base para resolver o posterior. Dessa forma, se o aluno tiver dificuldade para resolver qualquer uma delas, deve sempre retomar o que foi feito no passo anterior como dica para poder resolvê-la.

A atividade B2 é semelhante à B1, mas possui a característica de permitir que o aluno explique, em forma de texto, as regras distributivas ou o quadrado da soma de dois termos nas expressões apresentadas. Tais atividades têm como objetivo identificar os alunos com dois tipos diferentes de habilidade: o primeiro com facilidade em expressar-se matematicamente e, o segundo, em expressar-se de forma verbal ou discursiva. Essa identificação permite tratar de forma adequada as estratégias didáticas mais eficientes de acordo com a característica do aluno.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

- a. $(a + b)^2 =$
- b. $\left(1 + \frac{1}{2}a^3b^2\right)^2 =$
- c. $(-5x + 0,6xy^2)^2 =$
- d. $(3x - 6y)^2 =$
- e. $(m + x + b)^2 =$
- f. $(4x + y^3 - a)^2 =$
- g. $51^2 =$
- h. $(C + D + E)(E + C + D) =$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

- 1. $a^2 + b^2 =$
- 2. $\left(\frac{1}{3}ab^3\right)^2 + (2a)^2 =$
- 3. $(-5x^2 - 0,6xy^2) \cdot 2 =$
- 4. $(3x + 6y) \cdot 2x =$
- 5. $2 \cdot (m^2 + x^2 + b^2) =$
- 6. $4x^2 + y^2 - a^2 =$
- 7. $98^3 =$
- 8. $(c + m + x)(c - m + x) =$

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

- a. $(a + b)^2$
- b. $a + b^2$
- c. $a + 2b^2$
- d. $a^2 + b^2$
- e. $(a + 2b)^2$
- f. $(a + b^2)^2$
- g. $(a + 2b^2)^2$
- h. $a + 2b$
- i. $(a + b^2) \cdot 2 \cdot (a + 2b)^2 \cdot 2$
- j. $(2a + 2b) \cdot 2$

Série VII – Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato

A Série VII traz um conjunto de atividades que verifica a capacidade do aluno de resolver os problemas com dados numéricos e, baseando-se nelas, obter uma fórmula generalizada para resolução com dados diferentes.

Nesses problemas apresentam-se conteúdos tanto de aritmética (resolução com números) quanto algébricos (representação por incógnitas). Portanto, classificou-se pelo código⁶ C de conteúdo misto.

Série VII – Os problemas a seguir são semelhantes, mas seus resultados são representados de formas diferentes. Apresente a resolução para cada um deles.

- a. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de 4 quartos iguais a esse?

⁶ O código pode ser consultado no Anexo A.

- b. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?
- c. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede x m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?
- d. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura e altura mede x m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?
- e. O comprimento de um quarto mede y m enquanto sua largura e altura mede x m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?

Série VIII – Composição de problemas de um tipo apresentado previamente

Esta série representa um consolidado de habilidades trabalhadas nas séries anteriores. O principal objetivo dessas atividades é avaliar os diferentes níveis de domínio dos alunos e se estão relacionados a conteúdos de aritmética, álgebra ou lógica.

Série VIII – Resolva os problemas a seguir:

- a. Dois operários trabalhando durante 9 horas produzem 243 peças. Um deles produziu 13 peças em 1 hora. Quantas peças o outro operário produziu em 1 hora?
- b. Um dos lados de um retângulo mede $3m + 2n$ e o seu outro lado mede $(m - n)$ a mais. Determine o seu perímetro e área.
- c. Qual a fórmula geral de um número ímpar?
- d. Uma escola tem 370 alunos matriculados. Prove que há pelo menos dois alunos que fazem aniversário no mesmo dia.

Série IX – Problemas para provar

Nesta série os alunos são desafiados a provar uma condição dada por um problema. É uma habilidade que requer uma verificação empírica, mas também de domínio de processos e conceitos. Não se teve a intenção de verificar uma prova formal tal como é feito pelos matemáticos, mas foi uma forma interessante de observar a argumentação e o raciocínio utilizado para realizar essas verificações. Os tipos de conteúdos foram focados em álgebra e lógica.

Série IX – Nos problemas a seguir, você será desafiado a provar as condições apresentadas pelos problemas ou resolver utilizando a lógica. Nos problemas para provar, tente explicar da forma mais detalhada possível o que você pensou.

- a. Prove que a soma de três números consecutivos quaisquer sempre é divisível por 3 (para qualquer número inteiro a).
- b. Pense em um número qualquer, multiplique-o pelo número que é 6 unidades maior que o número que você tinha pensado inicialmente. Finalmente, adicione 9 a esse produto. Prove que o resultado é um número quadrado.
- c. Complete os dígitos que estão faltando nesta soma:

$$\begin{array}{r} 4 \quad _ \\ + \quad _ \quad _ \quad 2 \\ \hline _ \quad _ \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

- d. Complete os dígitos que estão faltando nesta multiplicação:

$$\begin{array}{r} _ \quad _ \quad _ \quad _ \\ \times \quad _ \quad _ \quad 2 \\ \hline 1 \quad 8 \quad _ \quad 4 \quad 8 \\ \hline 7 \quad 4 \quad 9 \quad 9 \quad _ \\ \hline _ \quad _ \quad _ \quad 6 \quad 6 \quad _ \end{array}$$

Série X - Composição de equações usando os termos de um problema

As atividades desta série têm o enfoque em verificar a capacidade do aluno em compor equações algébricas com os dados de um problema. Enquanto as atividades anteriores verificam a aplicação e reprodução direta de algoritmos de resolução de equações, nestas atividades há uma verificação da capacidade de generalizar um raciocínio e da amplitude da zona de transferência de aplicação dos conhecimentos anteriores para os dados dos problemas.

Esta série é mais uma que verifica alguns esquemas e invariantes operatórios dominados pelos alunos.

Série X – Resolva os problemas a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.

- a. A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o seu resultado por 12. Por sorte, chegou no mesmo resultado. Em qual número ela pensou?
- b. Pensei em um número. A soma da sua metade com um terço desse número resulta em 7 unidades a mais do que um quarto dele. Que número é esse?

Série XVII – Problemas diretos e inversos

Vergnaud (2009) exemplificou, em uma atividade envolvendo as estruturas aditivas, a complexidade do pensamento reverso para a criança. Resolver um problema direto do tipo “Tenho duas maçãs e ganhei mais três. Com quantas maçãs fiquei?” é diferente em termos de complexidade cognitiva deste: “Ganhei três maçãs e fiquei com cinco. Quantas maçãs eu tinha antes?”. A facilidade para resolver um problema

inverso depende do quanto esse aluno já possui um invariante operatório (nesse caso da adição) bem estruturado.

As atividades a seguir têm o intuito de verificar tal tipo de capacidade e comparar as diferentes dificuldades que os alunos apresentaram para resolvê-las. Essa verificação serve para alertar o professor que, muitas vezes, a dificuldade que o aluno enfrenta não necessariamente significa desconhecimento do conteúdo, mas um invariante operatório, ligado àquela habilidade, ainda não estar desenvolvido. No caso dos problemas inversos, eles requerem um preparo e mobilização de mais esquemas e habilidades previamente desenvolvidas, independente do conteúdo abordado. Para lidar com essas situações, seria necessário variar a forma de apresentação de um mesmo problema para ajudar o aluno a superar essas dificuldades.

Série XVII – Nas atividades a seguir, você deverá tentar resolver os problemas da forma como está apresentada no verso A. Se tiver dificuldade, você pode optar em resolver o verso B. No final, justifique qual foi a dificuldade que o(a) impossibilitou de resolver o verso A.

Verso A (Problemas inversos)

- a. Um tanque com capacidade de 80 litros foi preenchido com $\frac{2}{5}$ de seu volume. Quantos litros foram preenchidos nesse tanque?
- b. Um pai tem 35 anos e seu filho 5. Em quantos anos a idade do pai será 3 vezes a de seu filho?
- c. Apresente a forma fatorada das seguintes expressões: $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$.

Verso B (Problemas diretos)

- a. Um tanque foi preenchido com dezesseis litros de água preenchendo $\frac{2}{5}$ da sua capacidade total. Qual é o volume total desse tanque?
- b. A idade de uma mãe é 3 vezes de sua filha hoje; daqui a 10 anos ela terá apenas 2 vezes a idade de sua filha. Qual é a idade da mãe?
- c. Desenvolva as seguintes expressões: $(a - b)^2$ e $(a + b)(a - b)$.

Série XIX – Problemas de compreensão e raciocínio lógico

Nesta série, além de analisar a compreensão, raciocínio e lógica utilizados pelos alunos para a resolução dos problemas, permite-se identificar, principalmente, a construção da heurística ou habilidade de deduzir soluções de acordo com seus conhecimentos prévios.

Os conteúdos envolvidos são classificados como geral e de lógica, já que não há uma habilidade específica para resolução. Embora, em alguns problemas, o conhecimento de sistemas de equações possa facilitar sua resolução, é possível resolver por um raciocínio lógico e dedutivo, como mencionado anteriormente.

Série XIX – Resolva os problemas a seguir colocando o máximo de detalhes do raciocínio que usou para resolvê-lo.

- a. Explique porque o quadrado de um número de múltiplos dígitos termina com o mesmo dígito do quadrado do dígito da unidade desse número.
- b. Em uma olimpíada de matemática, foram propostos 10 problemas. Cada participante receberá 5 pontos para cada problema resolvido corretamente e perde 3 pontos se for resolvido de forma incorreta. Quantos problemas foram resolvidos corretamente para um aluno que recebeu 34 pontos no final? E para quem recebeu 10 pontos?
- c. A vegetação está cobrindo um terreno baldio. A cada dia essa área coberta pela vegetação está dobrando. No oitavo dia, metade desse terreno já está coberto pela vegetação. Em que dia a vegetação cobrirá o terreno todo?
- d. Em uma caixa há 16 bolas nas cores preta, branca e vermelha. Há 7 vezes menos bolas vermelhas do que brancas. Quantas bolas pretas há na caixa? (Prove que essa é a única possibilidade).

Série XXIV – Problemas com formulações visuais e verbais

Krutetskii (1976) originalmente elaborou essa série para verificar a percepção dos alunos sobre a capacidade de correlação concreta entre diferentes níveis de abstração de um problema (visual e verbal) envolvendo problemas de álgebra e geometria. Nesta pesquisa, foi optado por trabalhar apenas com as atividades de álgebra. O propósito dela é verificar a compreensão das nomenclaturas comumente utilizadas nesse conteúdo e se o aluno é capaz de expressar-se verbalmente sobre elas. O Campo Conceitual correspondente a essa habilidade seria a estrutura algébrica.

Série XXIV – Nas atividades a seguir, você deverá explicar verbalmente ou montar a expressão algébrica necessária. Tente inserir o máximo de detalhes do seu raciocínio.

- a. Explique, com suas próprias palavras, o que é um coeficiente. Depois, indique quais são os coeficientes das seguintes expressões algébricas.

- i. $3a^2$
- ii. m
- iii. $b \cdot 4$
- iv. $3b \cdot 2$
- v. $\frac{3}{7}x^3$
- vi. $4ab^n(3 + 2)$
- vii. $\frac{4}{5}ab\frac{5}{4}2y^n$

- b. Nas expressões algébricas a seguir, quais são os expoentes correspondentes a cada incógnita? Em seguida, dê uma definição apropriada para o que é um expoente.

- i. $2a^3$
- ii. b^2
- iii. $-3x^2y^2$
- iv. $7xy^6$
- v. $\frac{1}{2}mn$

vi. z

vii. $\frac{c}{4}$

c. Escreva a expressão algébrica correspondente aos que estão a seguir, mas de forma que os seus coeficientes sejam iguais a 1.

i. $3abc$

ii. $4m^2n^3$

iii. $7xy^3z$

d. Calcule o quadrado da expressão $2a$. Dobre o seu resultado. Agora, triplique a expressão $2x^2$. Eleve ao cubo o seu resultado. Por último, some os resultados das duas expressões obtidas.

3.2.4. Aplicação do estudo piloto

A proposta foi incluir a ajuda da professora Ângela para escolher as atividades mais adequadas para os alunos, das séries que foram separadas do trabalho de Krutetskii. Assim, elaborou-se um protocolo com todas as atividades que foram mencionadas no tópico anterior e entregue com antecedência à professora para receber seu aval. Ela considerou que todas as atividades estavam adequadas para aplicação, já que os assuntos foram abordados anteriormente com os alunos, embora tenha feito a ressalva de que algumas séries poderiam ser mais desafiadoras. Pela extensão do protocolo, sugeriu-se escolher apenas uma ou duas atividades de cada série para aplicação do piloto e, posteriormente, de acordo com os resultados do estudo, adotar aquelas que não foram utilizadas, o que foi deixado a nosso encargo. Optou-se por chamar esse conjunto de atividades de “protocolo” para evitar a conotação de “avaliação” para os alunos, já que isso poderia interferir psicologicamente no seu desempenho. Essa nomenclatura foi reforçada tanto em carta de apresentação⁷ quanto verbalmente no dia da aplicação. Foi esclarecido que eles não estavam sendo avaliados

⁷ Vide anexo C.

e que não deveriam se sentir intimidados a expor suas dúvidas no protocolo. Foi incentivado para que escrevam nos mínimos detalhes, o máximo possível, toda a resolução que fosse apresentada, mesmo que não tivessem certeza da resposta correta.

O estudo piloto foi composto por um protocolo com 12 atividades divididas em 16 sub habilidades distribuídas em 14 páginas. Ele foi aplicado em quatro sessões, sendo a primeira aplicada no dia 31 de outubro de 2016 e a última em 06 de março de 2017. Cada sessão durou o equivalente a duas aulas de 50 minutos e foram utilizadas estratégias diferentes de aplicação para cada sessão.

Na primeira, como não se conhecia os estudantes e o ritmo de cada um, decidiu-se entregar uma página de cada vez para os alunos e, conforme a conclusão, seria entregue a próxima página e assim sucessivamente até o término das 14 páginas. Pouquíssimos alunos conseguiram completar as 14 páginas em uma sessão. A grande maioria resolveu em torno de 9 a 10 páginas.

Entre a primeira e a segunda sessão, analisou-se previamente as primeiras respostas dos alunos e elaborou-se um conjunto de *perguntas-modelo* para poder obter maiores informações dos estudantes a respeito da resolução apresentada por eles. As *perguntas-modelo* foram elaboradas com o apoio da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento de Moreno *et al.* (2000c), que será detalhada no Capítulo 4, como metodologia de análise do estudo. Logo, na segunda sessão, eles teriam a tarefa de terminar as páginas que ainda não fizeram e analisar suas respostas dadas na primeira sessão de acordo com a *pergunta-modelo* que foi deixada para cada uma delas. A segunda sessão ocorreu no dia 19 de novembro de 2016 e esse espaçamento de datas ocorreu por conta da disponibilidade de horário das aulas e também devido aos feriados que coincidiram no mês de novembro. Nesta sessão, grande parte dos alunos completou o protocolo e pôde revisar suas respostas e complementar com mais informações, caso necessário. Apenas alguns alunos não conseguiram completar os protocolos e, de acordo com as análises de suas respostas, considerou-se que não seria produtivo insistir na continuação do protocolo e, assim, a aplicação foi encerrada na segunda sessão com estes.

No dia 22 de fevereiro de 2017, foi feita uma terceira sessão para aplicar-se um segundo conjunto de *perguntas-modelo* para aprofundar-se as análises das respostas apresentadas pelos alunos na segunda sessão e, no dia 06 de março de 2017, a quarta e última sessão. Como a primeira e a segunda sessão foram aplicadas no final do ano,

próximo aos exames finais dos alunos, retornou-se no ano seguinte, assim que a escola iniciou o ano letivo para ser aplicado o segundo conjunto de *perguntas-modelo*.

Na realidade, a terceira e a quarta sessão poderiam ser uma única, mas foi necessário realizar essas duas sessões por conta dos alunos que foram divididos em duas turmas distintas no ano posterior, sendo que metade dos alunos que se queria reaplicar o protocolo estava em uma turma e metade na outra, além da grade horária das aulas serem distintas. Todas as análises detalhadas serão apresentadas no Capítulo 4.

Levando em conta a análise do estudo piloto, partiu-se para a elaboração do estudo final.

3.3 Elaboração do estudo final

Para testar se as habilidades que os estudantes apresentaram são de fato as dificuldades que eles têm em relação a esse conteúdo, aplicou-se um segundo protocolo, chamado como estudo final, o qual foi composto por atividades das séries que manifestaram mais categorias de *perguntas-modelo*. Esse segundo protocolo foi aplicado apenas aos estudantes que participaram dos dois conjuntos de *perguntas-modelo*, denominado como Grupo 1. Também foi separado um Grupo 2 formado por aqueles alunos que chegaram a completar o protocolo, mas evidenciaram dificuldades de leitura e interpretação de texto com padrões de respostas como “*Não entendi*”, “*Não sei explicar*” ou aqueles que até explicaram, mas evidenciam um equívoco de interpretação de texto. A ideia foi verificar-se as hipóteses em relação à interferência das dificuldades de leitura e interpretação de texto. Para isso, aplicou-se um conjunto de atividades com habilidades semelhantes aos do Grupo 1, porém, que não dependa necessariamente da habilidade de leitura.

Como forma complementar de pesquisa, optou-se por criar um terceiro grupo de alunos denominado Grupo 3, com estudantes que não conseguiram completar o protocolo ou expressaram sinais de muita angústia para resolver as atividades, por meio da verificação de suas respostas. Com esses alunos, optou-se por aplicar um

protocolo que não envolvesse atividades matemáticas, mas com perguntas dissertativas sobre a forma como enxergam a disciplina de Matemática, a escola e o seu cotidiano.

Para a análise do estudo final, escolheu-se complementar com uma entrevista semiestruturada (TRIVIÑOS, 1987, p. 146), na qual foi feito o estudo por meio dos relatos verbais. Essa metodologia, segundo Luna (2007, p. 53), permite estudar as representações de um indivíduo para ajudar a compreender a estrutura de suas ações. Contudo, o autor alerta que, para utilizar tal tipo de método, é necessário ter o embasamento de uma teoria forte o suficiente que permita realizar o elo entre o diálogo e a ação. Entende-se que o embasamento teórico-metodológico feito por meio da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento, com o apoio das interpretações das ações pela Teoria dos Campos Conceituais, é adequada para o propósito desta pesquisa. Os resultados do estudo final podem ser verificados no Capítulo 5 da tese.

No próximo capítulo, serão detalhados os fundamentos da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento, que permitiu organizar os dados em *perguntas-modelo* para a respectiva análise dos resultados do estudo piloto e, posteriormente, em modelos, no estudo final.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS ESTUDOS PILOTO E FINAL

4.1 Metodologia de análise dos estudos

Como mencionado no capítulo anterior, nesta pesquisa, foram adotadas duas metodologias: uma para a elaboração dos estudos (piloto e final) apoiada nas pesquisas de Krutetskii (1976) e, outra, para a interpretação desses dados, que é a teoria desenvolvida por Moreno *et al.* (2000c), intitulada Modelos Organizadores do Pensamento, a qual será detalhada a seguir.

4.1.1 A Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento

Montserrat Moreno, Magali Bovet, Genoveva Sastre e Aurora Leal são psicólogas e escreveram um livro sobre a Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento (MORENO *et al.*, 2000c). Assim como Vergnaud, tiveram influências piagetianas para a idealização dessa teoria, Bovet inclusive foi colaboradora direta do teórico suíço. No prefácio do livro, onde desenvolve as ideias dos Modelos Organizadores, Moreno (2000a) descreve que, na Psicologia, descobrir constantes é o que permite estudar a diversidade e, por criar referências naquelas, adquirem um sentido. Porém, após a descrição da regularidade, as atenções passam a focar-se nas mudanças, ainda mais quando se trata de seres humanos.

A autora discorre também que, na Ciência, há evidências de que as atenções se voltam para a mudança e não mais para a constante. Exemplos disso seriam as teorias evolucionistas de Darwin e o conceito de movimento e repouso, introduzido por Galileu, no qual os dois conceitos adquirem a mesma condição, diferente daquela postulada na mecânica da Antiguidade na qual o movimento era considerado uma exceção. Ou seja, a mudança passa a ser aceita como parte de uma regularidade, tornando-se o próprio objeto de estudo.

Na Psicologia, o ser humano é visto como um ser que evolui, isto é, ele muda. Porém, mesmo dentro desse cenário de mudança, algo permanece, criando uma complexidade para

analisar novos fenômenos oriundos da associação entre o que mudou e o que ficou. Mas, como descrever e interpretar simultaneamente esses fatos? A teoria de Piaget não levava em consideração esses fatores. Assim, criou-se a necessidade de trazer uma teoria que contemplasse a incorporação do mundo externo pelo sujeito, ainda que esses conceitos sejam prematuros, mas que, pouco a pouco, passam a ganhar sua complexidade própria, mesmo partindo de um cenário estrutural comum à espécie. Em termos dos Campos Conceituais, poder-se-iam chamar esses conceitos prematuros de *conhecimentos-em-ação*, pois partem de um pressuposto comum ao sujeito, formado de experiências anteriores, mas não são conceitos ainda formalizados.

Nessa nova teoria que buscavam, também deveria ser capaz de envolver o estudo do funcionamento de sistemas complexos, incluindo tanto o pensamento individual quanto o coletivo, interpretar o que é denominado como “cognitivo” como “afetivo”, além dos pensamentos considerados como “científico” ou “cotidiano”. Para isso, as autoras afirmam que foi necessário desenvolver uma visão pluridisciplinar para permitir a visualização, por amplos espectros, dos fatores que estão ligados ao desenvolvimento cognitivo de um sujeito. Buscaram ainda, criar uma teoria funcional que permitisse abordar os procedimentos adotados pela mente na construção e apropriação de conhecimentos e quais tipos de mecanismo implicaram em tais mudanças.

Para contemplar essas complexidades, uma referência utilizada pelas autoras para desenvolver a Teoria dos Modelos Organizadores foi a dos Modelos Mentais de Johnson-Laird. Este que é autor da obra *“La theorie des modeles mentaux”* (1993) e, segundo Moreira (2002), os Modelos Mentais são formas de estruturar estados gerais de como um sujeito observa o mundo. Isto é, são operações mais gerais do pensamento. Moreno (2000b, p. 37) também complementa dizendo que, em termos de processos cognitivos, os Modelos Mentais são fundamentais para a construção do raciocínio, já que este consiste da manipulação das representações do mundo por um sujeito. Porém, esses modelos podem ser temporários em alguns casos e, portanto, maleáveis. Ou seja, um Modelo Mental nunca é definitivo, mas essencial para a construção do pensamento.

A teoria dos Modelos Mentais também possui uma aproximação teórica com os Campos Conceituais de Vergnaud em termos cognitivos, mas diferem-se na especificidade do tratamento do pensamento, pois, no caso dos Campos Conceituais, tratam-se das representações de operações específicas para uma situação didática. Sendo assim, os Modelos Mentais de Johnson-Laird parecem ter semelhança em termos de invariantes operatórios, mas seus construtos mentais possuem características temporárias, enquanto para Vergnaud, esses

invariantes que passam a ser os esquemas, são mais estáveis, pois se tratam de classe de situações de um conhecimento.

Observa-se que, ao incorporar aspectos como as representações da psicogênese do sujeito, fruto do trabalho de Piaget, somadas às características dos Modelos Mentais, os Modelos Organizadores constituem-se em uma teoria que ajuda a estruturar e dividir as respostas de um sujeito de acordo com os novos dados obtidos. Ou seja, conforme ele assimila novos fenômenos ou informações, modifica-se o seu modelo anterior, cria semelhanças e diferenças transformando em um novo conhecimento até que ele se estabilize e crie uma regra específica para uma dada situação. Em termos dos Campos Conceituais, são os chamados de *teoremas-em-ação*, que são as ações implícitas ligadas a outras específicas como os conhecimentos teóricos e científicos. Porém, as autoras alertam que essa teoria, por ter uma característica funcional, não se preocupa em analisar a verdade dentro das respostas do sujeito. Ela não foi criada com este intuito. Porém, como há o interesse em trabalhar com os Campos Conceituais de Vergnaud que, por outro lado, não contempla em sua teoria uma forma funcional de analisar os esquemas e as classes de situações, os Modelos Organizadores parecem ser uma ferramenta que auxilia na organização e na estruturação de possíveis invariantes operatórios dos estudantes no aprendizado de conceitos algébricos em Matemática. Portanto, a principal inovação que caracteriza a teoria dos Modelos Organizadores consiste na criação de modelos *a posteriori*, ou seja, partindo de procedimentos e representações dos próprios alunos (nível individual) criam-se evidências de uma organização em comum de um certo grupo (nível coletivo). Isso promove a criação de parâmetros e constantes que permitem analisar de forma generalizada o que partiu de um indivíduo.

4.1.2 O que são os modelos e como foram criadas as perguntas-modelo

Os modelos pertencentes à teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento nada mais são do que categorias surgidas a partir das respostas de um sujeito. Ou seja, não são criadas *a priori* para “encaixá-las” nas respostas obtidas por meio da coleta de dados; seria um passo posterior. Primeiro, coletam-se os dados que se quer dentro de um assunto específico e depois de analisá-los é que se passam a evidenciar as categorias.

Esses modelos, como mencionado no tópico anterior, são maleáveis. Podem mudar de um sujeito para outro, interconectar-se ou até mesmo dividir-se em submodelos. Por isso, há riqueza na interpretação de dados. Embora, para quem faz pesquisa, seja sempre gratificante obter o maior número possível de informações, ao mesmo tempo, sabe-se o quanto se demanda de energia para organizá-los. Quando se está diante dos dados coletados, principalmente quando esses dados são subjetivos, como uma resposta dissertativa de um estudante, é muito difícil encontrar algo em comum para que possam ser agrupados em uma categoria. Quando se trata da disciplina de Matemática, seria suficiente analisar apenas o resultado final de um exercício proposto para afirmar que este aluno compreendeu a teoria? Existem outras variáveis que podem tornar uma resposta, aparentemente correta, como inválida? São essas variáveis que se quer tratar nesta análise. Mesmo que um aluno chegue a um resultado correto ou não, seus *conhecimentos* e *conceitos-em-ação* possuem uma riqueza e particularidade que não são necessariamente iguais entre duas pessoas. Ou seja, partir do individual para analisar um coletivo.

Portanto, o objetivo foi analisar todas as respostas dos estudantes e criar categorias que evidenciem o seu modelo de pensamento, ou seja, as classes de situações pertencentes aos conhecimentos em Álgebra que cada um desses alunos mobilizou e o que difere de um aluno para outro. Porém, para evidenciá-las, seria necessário fazer um acompanhamento linear e individual de cada aluno, para definir um modelo. E, como se trata de conceitos teóricos, seria necessário estabelecer alguns pré-requisitos de conhecimentos para que essa análise fosse viável. Logo, optou-se então por criar as *perguntas-modelo*. Ou seja, criar um conjunto de perguntas, por tipo de respostas dos estudantes e, partindo de um mesmo tipo de dúvida, analisar sua progressão em resposta à *pergunta-modelo*.

As *perguntas-modelo* foram geradas de acordo com a resolução que o estudante apresentou. Ou seja, analisa-se o tipo de solução e, caso não tenha chegado à resposta correta, cria-se uma pergunta que pode ajudá-lo a interpretar o problema por um outro viés. Quando é verificado que o tipo de dúvida é semelhante, utiliza-se a mesma *pergunta-modelo*. Caso contrário, cria-se outra. Obviamente, trata-se de uma interpretação subjetiva, feita por meio de comparação das respostas, e as perguntas foram geradas apoiando-se numa experiência anterior, como docente, com alunos desta faixa etária. Não se pretende criar um método pré-determinado para classificação das respostas, pois esse não seria o intuito da própria Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento. A riqueza da interpretação consiste em categorizar os dados somente *a posteriori*, ou seja, os resultados da coleta de dados são os que levarão aos padrões de categorias para análise. Por trabalhar-se com a cognição, esse método

é mais relevante por levar em conta detalhes subjetivos trazidos pelos dados coletados, já que não se pode esperar *a priori* quais tipos de respostas poderão ser apresentados, tampouco interpretar de forma objetiva o nível cognitivo, tais como esquemas e invariantes operatórios.

4.2 Classificação das perguntas-modelo com os campos conceituais e os invariantes operatórios

Além de fazer as classificações por *perguntas-modelo*, será feita uma associação dessas com os principais tipos de campos conceituais como as estruturas aditivas, multiplicativas e as algébricas, além dos invariantes operatórios envolvidos, sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990). O intuito é tentar evidenciar os invariantes operatórios implicados em cada tipo de campo conceitual e como eles podem influenciar na compreensão de conceitos algébricos. Acredita-se, assim como Vergnaud, que esses campos conceituais não são eventos mutuamente exclusivos, mas que se entrecruzam de alguma forma. Eventualmente, ao tentar evidenciar os invariantes operatórios, pode-se deparar com a explicitação de conceitos teóricos, pois é difícil falar de habilidades cognitivas sem os mencionar, principalmente, quando se trata de um conceito matemático. Por isso, em alguns casos, o próprio invariante operatório pode ser o conhecimento exigido para a resolução de um problema.

No quadro 4.1 é possível observar como os campos conceituais foram classificados em cada habilidade, sub-habilidade e as séries de atividades que foram escolhidas para elaborar o protocolo.

Quadro 4.1 – Quadro com a associação dos campos conceituais envolvidos em cada habilidade, sub-habilidade e a série de atividades.

Cód. Hab.	Hab.	Cód. Sub. Hab.	Sub. Hab.	Série	Campos Conceituais
H1	Percepção (Interpretação de um problema)	A	Aritmética	I	Estruturas aditivas
		B	Algébrica	I	Estruturas algébricas
		A	Aritmética	II	Estruturas aditivas
		A	Aritmética	III	Estruturas aditivas Estruturas algébricas
H2	Generalização de conceitos matemáticos	A	Aritmética	VIII	Estruturas multiplicativas
		A	Algébrica	IX	Estruturas algébricas Estruturas multiplicativas
		B	Algébrica	V	Estruturas algébricas
		B	Algébrica	VIII	Estruturas algébricas
		B	Algébrica	X	Estruturas algébricas
		C	Mista	VII	Estruturas multiplicativas Estruturas algébrica
		D	Lógica	IX	Estruturas aditivas
H3	Reversibilidade do processo mental	A	Aritmética	XVII	Estruturas multiplicativas
		B	Algébrica	XVII	Estruturas algébricas
H4	Compreensão; Raciocínio e Lógica	D	Lógica	XIX	Estruturas aditivas
		E	Geral	XIX	Estruturas multiplicativas
H5	Tipos de habilidades matemáticas	A	Algébrica	XXIV	Estruturas algébricas

Fonte: a autora.

No caso dos invariantes operatórios, eles serão evidenciados a seguir em conjunto com a análise dos protocolos aplicados com os estudantes. No final, haverá um quadro consolidando esses dados.

4.3 Análise do estudo piloto

O protocolo composto de 14 páginas obteve dois conjuntos de *perguntas-modelo*, mas que foram categorizadas em dois critérios: o primeiro, foi gerado a partir das respostas dos alunos na primeira aplicação. Já, o segundo conjunto, foi gerado a partir das respostas da segunda aplicação, ou seja, as respostas tiveram algum avanço em relação à primeira aplicação. A terceira e quarta sessão foram basicamente para aplicar o segundo conjunto de

perguntas-modelo para verificar possíveis mudanças naqueles que ainda não encontraram a resposta correta das atividades correspondentes.

Entre as cinco habilidades testadas, foram geradas 99 *perguntas-modelo* sendo 84 pertencentes ao primeiro conjunto e 15 ao segundo conjunto. No quadro a seguir, é possível observar as séries, a quantidade de *perguntas-modelo* e os campos conceituais envolvidos. A versão completa deste quadro, com as respectivas relações entre habilidades e conceitos, pode ser consultada no anexo B.

Quadro 4.2 - Quadro com a associação da quantidade de perguntas-modelo por série e os respectivos campos conceituais envolvidos.

Sub. Hab.	Série	Quantidade de perguntas-modelo únicas	Perguntas-modelo 1ª aplic.	Perguntas-modelo 2ª aplic.	Campos Conceituais
Aritmética	I	4	3	1	Estruturas aditivas
Algébrica	I	4	3	1	Estruturas algébricas
Aritmética	II	7	6	1	Estruturas aditivas Estruturas multiplicativas
Aritmética	III	8	6	3	Estruturas aditivas Estruturas algébricas
Aritmética	VIII	7	6	2	Estruturas multiplicativas
Algébrica	IX	10	8	3	Estruturas algébricas Estruturas multiplicativas
Algébrica	V	14	13	3	Estruturas algébricas
Algébrica	VIII	5	3	2	Estruturas algébricas
Algébrica	X	9	8	2	Estruturas algébricas
Mista	VII	7	5	3	Estruturas multiplicativas Estruturas algébricas
Lógica	IX	2	2	0	Estruturas aditivas
Aritmética	XVII	5	4	1	Estruturas multiplicativas
Algébrica	XVII	3	3	1	Estruturas algébricas
Lógica	XIX	2	2	0	Estruturas aditivas
Geral	XIX	4	4	1	Estruturas multiplicativas
Algébrica	XXIV	8	8	0	Estruturas algébricas
Total		99	84	24	

Fonte: a autora.

Observa-se que o total da quantidade de *perguntas-modelo* da segunda aplicação está contabilizado como 24. Nesse caso, em algumas séries, houve uma repetição das *perguntas-modelo* da primeira aplicação para alguns estudantes. Isso ocorreu por dois motivos:

- 1) O estudante não havia resolvido ainda a atividade na primeira aplicação;
- 2) Após a segunda aplicação, a nova *pergunta-modelo* gerada correspondeu a uma outra já existente na primeira aplicação.

As séries que tiveram esse resultado são aquelas cuja soma da primeira e segunda aplicação são maiores que o total de *perguntas-modelo* únicas.

Dentre essas habilidades, a que mais gerou *perguntas-modelo* foi a habilidade referente à Série V. Esta série consiste em verificar a capacidade de generalização de processos e a habilidade de transferir um método de operação já desenvolvido anteriormente para outra com condições similares. Em termos dos Campos Conceituais, essa série também envolve os conhecimentos de estruturas algébricas; confirmando-se hipóteses iniciais sobre os obstáculos dos estudantes estarem relacionados aos processos de generalização e abstração. Porém, também identificou-se que muitos dos estudantes apresentaram grandes dificuldades de interpretação de texto para que pudessem prosseguir com instruções simples para realizar as atividades. Sendo assim, não se pode afirmar com clareza se as dificuldades estão mais ligadas ao processo de raciocínio matemático, de leitura ou uma combinação de ambos. A seguir, serão mostrados os exemplos ilustrando algumas das dificuldades encontradas. Serão analisadas as habilidades do tópico que mais gerou *perguntas-modelo*.

4.3.1 Habilidade H2: Generalização de conceitos matemáticos - Série V: Sistema de problemas de um único tipo

Nesta habilidade, foi gerado um total de 14 *perguntas-modelo* sendo que 13 delas apareceram no primeiro conjunto e apenas 1 nova no segundo. No quadro 4.3, nas penúltimas colunas da direita, é possível observar o número de estudantes que deram origem à *pergunta-modelo*, respectivamente, na primeira e na segunda aplicação. Para facilitar a análise, serão usadas a identificação por código da coluna¹ mais à esquerda para as discussões das respostas.

¹ O código utilizará a seguinte formatação: número da habilidade-série-letra por ordem alfabética.

Quadro 4.3 – Perguntas-modelo geradas neste tópico e divididas por quantidade de alunos que se encaixaram em cada pergunta-modelo, respectivamente, na primeira e segunda aplicação.

Código	Perguntas-modelo	Nº de estuds. (1ª aplic.)	Nº de estuds. (2ª aplic.)
H2-V-A	Aplique a distributiva nesta expressão $(1 + 3)(1 + 3)$ e depois nesta expressão $(a + b)(a + b)$. Você consegue descobrir a fórmula do quadrado da soma de dois termos?	8	2
H2-V-B	Confira se você aplicou a distributiva em todos os termos.	3	0
H2-V-C	O que te faz concluir que esta conta está montada de forma correta?	1	0
H2-V-D	O que te fez concluir que elas são equivalentes?	1	0
H2-V-E	O que você obtém se fizer este cálculo: $(a + b)(a + b)$?	5	0
H2-V-F	Por que as expressões sem parênteses são as que permitem a resolução por meio da fórmula do quadrado da soma de dois termos?	1	0
H2-V-G	Por que os parênteses ajudam na hora de aplicar a fórmula do quadrado da soma de dois termos?	2	0
H2-V-H	Quanto é 4^2 e $4 \cdot 2$?	1	0
H2-V-I	Você consegue resolver estas expressões? $(1 + 3)^2$ $3^2 + 4^2$	8	1
H2-V-J	Você lembra da fórmula do quadrado da soma de dois termos? Ou tente deduzir por meio desta conta $(a + b)(a + b)$.	8	0
H2-V-K	Você lembra da fórmula do quadrado da soma de dois termos? Ou tente deduzir por meio desta conta $(a + b)(a + b)$. Qual foi o raciocínio utilizado para chegar a este resultado?	1	0
H2-V-L	Você lembra da fórmula do quadrado da soma de dois termos? Ou tente deduzir utilizando o que fez em B1.	2	0
H2-V-M	O que significa estar "elevado"?	0	1
H2-V-N	Qual a diferença entre "termos" e "números"?	1	0

Fonte: a autora.

A *pergunta-modelo* de código H2-V-A é um modelo que representa o conceito de distributiva e, a partir deste, o estudante seria capaz de determinar a origem da fórmula do quadrado da soma de dois termos. A *pergunta-modelo* de código H2-V-B seria para diferenciar os estudantes exemplificados com o código H2-V-A, pois parte do princípio de que ele sabe o conceito, mas cometeu algum erro de cálculo.

No caso desses modelos, observou-se que o estudante não conseguia lembrar a fórmula citada ou mesmo aplicá-la em uma expressão algébrica. Portanto, a hipótese foi determinar se eles seriam capazes de aplicar o conceito de distributiva corretamente em expressões numéricas e, depois, deduzir sua aplicação em expressões algébricas. Seguem

alguns exemplos de respostas originadas após a primeira e algumas da segunda aplicação do protocolo.

EXEMPLO 1: Multiplicação de dois termos algébricos iguais

Observa-se, na figura 4.1, como o estudante² 27 aplicou a distributiva entre os termos da expressão algébrica dada. No item *a*, é possível notar que há um equívoco na operação de multiplicação entre dois monômios, resultando em uma operação de adição entre dois monômios iguais. Por isso, a *pergunta-modelo* H2-V-A sugere, primeiramente, que o estudante faça a operação com expressões numéricas e, assim, perceba o equívoco cometido na primeira tentativa. No entanto, no caso deste aluno, não houve alteração na resposta. Nota-se também que, por não compreender as estruturas multiplicativas que são aplicadas às estruturas algébricas, este estudante não consegue resolver também o item *b*, pois existem coeficientes fracionários. Assim, o estudante justifica “*Sinto muito, mas não me lembro muito bem como resolver estes problemas*”.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = 2a + ab \cdot ba + 2b =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Sinto muito, mas não me lembro muito bem como resolver estes problemas.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Os números se repetem, alguns parênteses não estão fechados, uma coisa é um ao contar não funciona.

Figura 4.1 – Resposta estudante 27: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

² Nesta pesquisa, foi adotada, de forma arbitrária, o gênero masculino para se referir a todos os estudantes pesquisados.

Já o objetivo da segunda parte da atividade B1 foi verificar se o estudante consegue perceber a diferença entre as expressões obtidas no item a comparada ao item 1 e o item b ao item 2, ou seja, se o aluno compreende a diferença entre o quadrado da soma entre dois termos e a soma de dois quadrados. No entanto, o estudante 27, e muitos outros dessa turma, não foram capazes de perceber a diferença entre operações que originam cada uma das expressões algébricas. Veja-se a sua resposta conforme a figura 4.1: “*Os números se repetem, alguns parênteses são retirados, mas ainda sim (sic) as contas são parecidas*”. Isso leva à hipótese de que não há uma compreensão correta da estrutura multiplicativa como a multiplicação entre dois termos iguais, e que ela pode ser representada com o mesmo termo elevado ao quadrado, por exemplo. Se não há a compreensão dessa estrutura, haverá uma dificuldade de transpor esse conhecimento para as estruturas algébricas, gerando equívocos do tipo: $a \cdot a = 2a$.

Veja-se outro exemplo na figura 4.2. Pode ser verificado um equívoco semelhante ao da figura 4.1, no qual a multiplicação $a \times a$ e $b \times b$ resultam, respectivamente, em $2a$ e $2b$. No entanto, é possível observar que este estudante consegue juntar os termos semelhantes ab , mas também comete o equívoco de juntar termos diferentes como $2a$ e $2b$ resultando em $4ab$. É possível que o estudante tenha deduzido esse raciocínio pela semelhança de termos para que pudesse realizar a soma algébrica entre eles.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $2a + ab + ab + 2b$
 $2a + 2b(ab+ab)$
 $4ab + 2ab$
 $6ab$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = ?$
 não consigo resolver isso

Figura 4.2 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.

EXEMPLO 2: Soma de termos algébricos diferentes

Na segunda parte da atividade B1 do estudante 7, que corresponde à figura 4.3, é possível observar um novo equívoco: veja-se a seguinte operação realizada pelo

estudante: $2a + 2b = 2ab$. Além de não fazer a soma dos coeficientes, os termos deveriam ter sido elevados ao quadrado, o que também não aconteceu no item a e b da figura 4.2. Em vez disso, há uma concatenação de termos diferentes sem efetuar a soma dos coeficientes dos respectivos termos. Esse tipo de erro é muito comum nessa fase do aprendizado de Álgebra.

Figura 4.3 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V.

Nesse caso, presume-se que o aluno não compreende as representações de incógnitas como termos diferentes, ou há um conhecimento prévio que provoca a necessidade de ter apenas um monômio como resposta como, por exemplo, a concatenação de termos aditivos como $2 + 3$ resultando em 23 que se observa em alguns estudantes, no início da compreensão de estruturas aditivas. Esse tipo de confusão pode ser observado também no estudante 10, no exemplo 3, mais adiante.

Na figura 4.4 ocorre o mesmo tipo de equívoco, mas o estudante assume alguns números no lugar das incógnitas e tenta realizar o cálculo para comparar a diferença entre a primeira e a segunda atividade. No entanto, não há uma clareza do tipo de operação executada em cada linha. No item a , por exemplo, é possível notar que a expressão $2 + 2^2$ tem o oito como resultado. Poderia-se assumir que foi um equívoco no cálculo no qual omitiu o expoente dois do primeiro termo. Porém, observando-se o item 1, ele realiza o seguinte cálculo $2^2 + 2^2$ resultando em 16. Assim, o erro parece estar na operação de adição sendo assumida como de multiplicação. Por isso, aplica-se a *pergunta-modelo*, de código H2-V-H: “Quanto é 4^2 e $4 \cdot 2$?”. Mas, as respostas da primeira e da segunda tentativa, não foram alteradas. Esse foi o único estudante que realizou esse tipo de procedimento para resolver essa atividade.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = \dots$ $2 + 2^2 = 8.$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 + 2^2 = 28.$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = 2^2 + 2^2 = 16$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$
 $(\frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3) \cdot 2 \cdot 2 = 4$
 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$

Figura 4.4 – Resposta estudante 6: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

EXEMPLO 3: Multiplicação entre a soma de dois termos

O estudante 22 tentou aplicar a distributiva, mas trocou as operações onde deveria aparecer a adição pela multiplicação e vice-versa. Também não conseguiu completar a operação e justifica sua resposta afirmando “E se estiver errado é que eu estou um pouco nervoso”. Não houve avanço no item b e nem na segunda parte da atividade B1. Esse exemplo demonstra a dificuldade na estrutura multiplicativa e algébrica. Ou seja, o estudante não consegue aplicar o conceito de distributiva mesmo com a dica da *pergunta-modelo* H2-V-A.

Outro raciocínio que pode ter sido desenvolvido pelo aluno é duplicar cada fator entre parênteses e depois somar os seus termos. Veja-se a figura 4.5:

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a \cdot a) + (b \cdot b)$ E se estiver errado é que eu estou um pouco nervoso.

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$ Eu não sei responder.

Figura 4.5 – Resposta estudante 22: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Observa-se que o estudante 10 (figura 4.6) comete o mesmo equívoco do exemplo 2, somando dois termos algébricos diferentes, e ainda eleva ao quadrado esse termo resultante. No entanto, é curioso observar que o coeficiente meio ($\frac{1}{2}$) é somado ao termo um e os expoentes de termos diferentes são somados. Ou seja, há outros equívocos cometidos que vão além da incompreensão das estruturas multiplicativas. Primeiro, observa-se o erro ao realizar a soma $1 + \frac{1}{2}$ resultando em $\frac{2}{2}$ o que aponta um problema das estruturas aditivas com números inteiros e fracionários. Continuando-se com o raciocínio, observa-se outro erro na operação do termo um elevado ao quadrado resultando em dois.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = a + b^2 - ab^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (\frac{2}{2} + ab^5)^2 = 2 + a^7$

Figura 4.6 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.

Na segunda parte da atividade B1 (figura 4.7), há uma repetição dos mesmos equívocos da primeira parte (figura 4.6). Além disso, o estudante não explica a diferença entre os respectivos itens. Equívocos semelhantes foram encontrados nos estudantes 14 e 20. Há também um outro tipo de equívoco muito comum que é aplicar apenas o expoente nos termos dentro dos parênteses. Esse exemplo foi encontrado no estudante 21 (figura 4.8).

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$
2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$
 $(\frac{1}{3} \cdot ab^3)^2 + (2a)^2 =$
 $\frac{1}{9} ab^6 + 4a^2$

Figura 4.7 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

- a. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = \frac{1}{4} a^6 b^4 + 2a^3b^2$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ item a com item 1
2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ item b com item 2

Não sei escolher o melhor, matematicamente. Apenasorra, lise, os problemas, não é a mesma coisa, o B1 com o B2, não é a mesma coisa, não é a mesma coisa, não é a mesma coisa.

Figura 4.8 – Resposta estudante 21: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Em relação à atividade B2, o estudante 10 (figura 4.9) tentou aplicar a distributiva sugerida pela *pergunta-modelo* código H2-V-A. Na primeira tentativa, ele somente escolheu a alternativa e não justifica sua resposta. Quando se pede para que esclareça sua resposta, baseando-se na *pergunta-modelo* código H2-V-A, nota-se (figura 4.10) que ele é capaz de resolver a expressão numérica sugerida, mas não transfere o mesmo raciocínio na forma algébrica. Assim, o estudante não consegue verificar se a alternativa que escolheu na primeira aplicação está certa ou errada. Na justificativa da segunda tentativa (figura 4.10) escreve: “Então, o primeiro, na minha cabeça, com o meu raciocínio, deu 4 o resultado. Agora o dois não estou entendendo”.

Figura 4.9 – Resposta estudante 10: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Figura 4.10 – Resposta estudante 10: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V.

EXEMPLO 4: Comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos

O estudante 13 (figura 4.11), por outro lado, embora não tenha sido classificado nos códigos de *perguntas-modelo* H2-V-A e H2-V-B, entre todos os alunos, foi um dos que mais se aproximou da resposta correta. Ele teve a mesma dificuldade de não considerar os termos ab e ba como termos semelhantes, mas diferente do estudante 27 (figura 4.1), aplicou corretamente a operação $a \times a = a^2$ e $b \times b = b^2$. Também apresentou a mesma dificuldade de aplicar a distributiva no item B.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2)$

Figura 4.11 – Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.

Em relação à resposta da segunda parte da atividade B1 (figura 4.12), o estudante 13 justificou as diferenças por meio de exemplos numéricos. Uma estratégia válida, e que se permite compreender melhor o seu raciocínio, foi a seguinte: “Se compararmos o item “a” com o item “1”, percebemos que a diferença de valores chega a ser quase a metade de uma para a outra”. Nesse caso, pode-se dizer que o estudante compreende a estrutura multiplicativa, mas a algébrica ainda está em desenvolvimento, pois não conseguiu explicar a diferença sem utilizar recursos aritméticos.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

1. Se compararmos o item “a” com o item “1”, percebemos que a diferença de valores chega a ser quase a metade de uma para a outra, ex. $(4+5)^2 - (9)^2 = 81$
 $(4)^2 + (5)^2 = 16 + 25 = 41$

Figura 4.12 - Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V.

O estudante 11 (figura 4.13) também apresentou a resposta mais próxima à correta e é possível perceber uma compreensão melhor das estruturas algébricas em relação aos outros dois estudantes que apresentaram resoluções semelhantes. Essa observação pode ser verificada por meio de sua resposta da segunda parte da atividade (figura 4.14), que mostra um domínio de estruturas fundamentais de operações algébricas.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + ab + ab + b)$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) = (1 + \frac{1}{2}a^6b^4)$

Figura 4.13 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ ~~a^2 poderia ser 1^2 e b^2 poderia ser 2^2~~ Se fizermos $(a+b)^2$ não seria o mesmo que $a^2 + b^2$, pois no a^2b^2 não poderíamos somar pois são termos diferentes. Mas $(a+b)^2$ poderíamos obter a multiplicação.
2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ Não poderíamos realizar a soma, pois os termos são diferentes, assim como não poderia misturar banana com abacate, mas sim banana com banana.

Figura 4.14 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V.³

Embora não seja uma solução “elegante” e não tenha chegado à resposta correta, por meio dessa explicação da segunda parte, é possível notar uma melhor compreensão das estruturas algébricas. Se, numa situação hipotética, for analisada apenas a resposta da primeira parte da atividade, poderia-se afirmar, de forma equivocada, que o nível de compreensão do estudante 11 seria o mesmo de outros estudantes que não aplicaram a definição do quadrado da soma de dois termos. Porém, com dois tipos de atividades, nos quais o aluno é colocado para expor o seu raciocínio de formas diferentes (numérica e verbal), pode-se ter uma visão mais detalhada dos esquemas que o aluno mobiliza para resolver uma atividade. Por isso, é importante variar os tipos de atividades para avaliação, como é relevante criar uma metodologia que permita analisar essas respostas e, a partir delas, mudar as estratégias didáticas necessárias para uma melhor compreensão a respeito das estruturas algébricas.

³ Transcrição das respostas da figura 4.14:

Item 1: “Se fizermos $(a + b)^2$ não seria o mesmo que $a^2 + b^2$, pois no $a^2 + b^2$ não poderíamos somar, pois são termos diferentes. Mas $(a + b)^2$ poderíamos obter a multiplicação”.

Item 2: “Não poderíamos realizar a soma, pois os termos são diferentes, assim como não poderia misturar banana com abacate, mas sim banana com banana”.

EXEMPLO 5: Multiplicação entre a soma de dois termos algébricos

Neste exemplo (figura 4.15), verifica-se algo semelhante feito pelo estudante 21 (figura 4.8), com a diferença de que, considerando o protocolo deste aluno como um todo, aplica-se a *pergunta-modelo* código H2-V-A na segunda aplicação, mas não houve alteração da resposta. No entanto, observa-se que este estudante conclui que o item *a* e 1 são iguais e acaba por ignorar dois termos que originariam por meio da aplicação correta da distributiva (*ab* e *ba*). O mesmo tipo de resposta foi encontrado no estudante 24 (figura 4.16).

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2 + \dots$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$
 não me lembro como resolve.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ (por não é possível torná-los).

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ não me lembro como resolver.

Figura 4.15 – Resposta estudante 31: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

O estudante 24 (figura 4.16) apresentou uma resolução para o item B da primeira parte da atividade B1, ainda que os termos tenham sido multiplicados erroneamente. Também é possível notar que não sabe diferenciar os itens da primeira com a segunda parte, como no exemplo da figura 4.15.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) = 2 + 4a^6b^4$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ as duas estão ao quadrado (?)

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ todas as fórmulas estão elevadas

Figura 4.16 – Resposta estudante 24: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Nos códigos H2-V-C e H2-V-D, não houve nenhuma alteração nas respostas em contato com essas *perguntas-modelo* (figuras 4.17 e 4.18). Basicamente, baseado no que foi desenvolvido na primeira parte da atividade, esperava-se que o estudante pudesse detalhar o motivo que o levou a concluir que os itens *a* e *b* são equivalentes aos itens 1 e 2, respectivamente. Além disso, verificar o que significa afirmar “*Porque a conta está montada de forma correta*”. Porém, não houve sucesso nesse intento.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = A^2 B^2$ $(A + b) \cdot (A + b)$
 $A^2 B^2 + A^2 B^2$
 $A^2 B^2 + A^2 B^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$
 $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2)$
 $1 + \frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^3b^2 + 1A^6B^4 = 1 + 1A^6B^4 + 1A^6B^4$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ ELAS SÃO EQUIVALENTES

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Figura 4.17 – Resposta estudante 1: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Figura 4.18 – Resposta estudante 7: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

A pergunta-modelo de código H2-V-E foi criada para verificar se os estudantes são capazes de concluir a fórmula para a resolução da atividade na segunda tentativa. As respostas dadas por eles na primeira tentativa, diferente dos outros códigos, demonstraram que tiveram dificuldades para iniciar a atividade. Vejam-se alguns exemplos nas figuras 4.19 a 4.22:

Figura 4.19 – Resposta estudante 26: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

du já se usa mais não lembra

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ Eu não lembro

Figura 4.20 – Resposta estudante 5: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Não consegui resolver
tive dificuldade.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ $a \cdot a \cdot a^2 + B \cdot B \cdot B^2$ Bom não me deu muito bom
com essas coisas.

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Figura 4.21 – Resposta estudante 8: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Figura 4.22 – Resposta estudante 18: 2ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Portanto, com a *pergunta-modelo* H2-V-E “O que você obtém se fizer este cálculo: $(a + b)(a + b)$?”, verificar-se-ia se há a compreensão da aplicação da distributiva, mas todos esses cinco alunos que receberam esse código não alteraram a resposta. Logo, no caso desses estudantes, o conceito de distributiva não está consolidado como esquema. Então, por meio desta atividade da série V, não se pode verificar o nível das estruturas multiplicativas desses alunos, embora se possa analisar pelo restante das atividades desenvolvidas no protocolo. Para fins de discussão, os resultados do estudo piloto serão concentrados apenas nesta série V.

EXEMPLO 6: Compreensão da função dos parênteses

Os códigos H2-V-F e H2-V-G são muito semelhantes, exceto pela pequena diferença entre as afirmações dadas pelos três alunos que geraram essas *perguntas-modelo*. Seguem os exemplos.

O estudante 18 (figura 4.23) respondeu que as expressões algébricas que podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números são os itens que não contêm parênteses. Porém, como se pode notar pela figura 4.23, ele não apresenta nenhuma justificativa mais detalhada além dessa.

Figura 4.23 – Resposta estudante 18: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

No caso do estudante 2 (figura 4.24), na primeira tentativa, justificou que a fórmula pode ser aplicada por existir os parênteses. Aplicou-se o código H2-V-G para verificar se é capaz de explicar o raciocínio com mais detalhes:

Figura 4.24 – Resposta estudante 2: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Figura 4.25 – Resposta estudante 2: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Verbalmente, com alguns esquemas, o estudante explica (figura 4.25): “No item a, temos o quadrado $(a + b)^2$, da soma $(a + b)^2$ de dois números $(a + b)^2$. O parênteses nos indica que temos que multiplicar os dois (sic)”. O raciocínio está correto, considerando que a afirmação “multiplicar os dois” é referente ao termo $(a + b)$

multiplicados entre si, embora não seja uma resposta formal ou elegante. No entanto, é possível notar que há uma compreensão, ao menos aplicada, do que se trata a fórmula do quadrado de dois termos. O estudante 26 (figura 4.26) também fez a mesma observação, mas não explicou detalhadamente sua conclusão.

Figura 4.26 – Resposta estudante 26: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

O próximo código que será analisado é o H2-V-I, aplicados tanto para a atividade B1 quanto a B2. Embora a *pergunta-modelo* tenha sido gerada para oito estudantes, ela é semelhante ao código H2-V-H, porém, o principal objetivo desta *pergunta-modelo* é verificar se os estudantes percebem a diferença entre as expressões $(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$.

Veja-se a resposta do estudante 5 (figura 4.27) na primeira tentativa de resolução do protocolo. Ele responde: “Eu já vi isso, mas não me lembro”.

Figura 4.27 - Resposta estudante 5 – 1ª tentativa da atividade B1 (1ª parte) – Série V.

Depois que obteve uma dica por meio da *pergunta-modelo* H2-V-I (figura 4.28), houve um progresso na segunda tentativa, no qual é possível observar que há um intento de realizar o método da distributiva na própria expressão algébrica dada, mas faltou concluí-la juntando os termos semelhantes ab e ba . Além disso, também não elevou o último termo b ao quadrado. No caso dos termos semelhantes, há uma hipótese de que o aluno tenha dúvida de considerá-los como termos semelhantes. Algo muito comum entre os alunos dessa faixa etária em Álgebra, o que torna a resolução de equações algébricas

bastante confusa para os estudantes, como no caso do exemplo 4 sobre a comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos.

Para corroborar com essa hipótese, observe-se como o estudante 5 (figura 4.28) resolveu o item *b* da atividade. Percebe-se que há uma dificuldade em notar que o valor meio $\left(\frac{1}{2}\right)$ é coeficiente do termo a^3b^2 . Na segunda linha de sua resolução, ele acaba tornando-se um termo independente e deixando a resolução pela metade. Diferente do item *a* no qual desenvolveu corretamente a distributiva.

Série V: Os problemas a seguir estão separadas em seção B1 e B2.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}a^3b^2\right) =$

$$1 + \frac{1}{2} + a^3b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a^3b^2$$

lembra

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $\left(\frac{1}{2}ab^3\right)^2 + (2a)^2 =$

Figura 4.28 – Resposta estudante 5: 2ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Embora a resposta tenha sido muito semelhante aos estudantes 2 (figura 4.24) e 26 (figura 4.26), foram aplicados diferentes códigos de *perguntas-modelo* analisando o conjunto do protocolo resolvido por cada um deles. No caso do estudante 23 (figura 4.29), avaliou-se a possibilidade deste ser capaz de resolver a atividade se fosse exemplificado com casos numéricos em vez de algébricos. No entanto, não houve alteração da resposta na segunda tentativa. Muito provavelmente, as dificuldades são anteriores às estruturas algébricas.

Figura 4.29 - Resposta estudante 23: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Os próximos códigos que serão analisados (H2-V-J, H2-V-K e H2-V-L) são *perguntas-modelo* muito semelhantes e poderiam ser submodelos umas das outras. No entanto, considerou-se no mesmo nível, pois as perguntas foram aplicadas a diferentes grupos de estudantes de acordo com as respostas de seus protocolos.

O estudante 24 (figura 4.30) aparece novamente como exemplo, como continuação da atividade B1. Na primeira tentativa, o estudante havia escolhido o item *d* como resposta, pois os dois termos estão elevados ao quadrado. A segunda tentativa também corresponde à *pergunta-modelo* código H2-V-M “O que significa estar “elevado””, mas não houve alteração ou explicações melhores.

Figura 4.30 – Resposta estudante 24: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Figura 4.31 - Resposta estudante 24: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V.

O estudante 12 (figura 4.32) tentou aplicar a distributiva no item *a*, mas trocou a operação de adição entre os termos dentro dos parênteses pela multiplicação. Além disso, não conseguiu terminar a operação. No item *b* ocorreu algo semelhante ao estudante 5, da figura 4.28, que seria não considerar o coeficiente meio $\left(\frac{1}{2}\right)$ como parte do termo a^3b^2 .

Série V: Os problemas a seguir estão separados em seção B1 e B2.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a+b)^2 = (a+b)^2 = (a \cdot b) + (b \cdot a)$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = 1 + \frac{1}{2}a^3b^2 = 1,5a^3b^2$ $(a \cdot b)^2 = (b \cdot a)^2$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ $a^2 + 1 = 1$ $b^2 + 1 = 1$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 = (\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 = \frac{1}{9}a^2b^6 + 4a^2$

Figura 4.32 – Resposta estudante 12: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Já o estudante 25 (figura 4.33), por exemplo, expressou a dificuldade para resolver a atividade por não possuir os valores de *a* e *b*. Isso demonstra, mais uma vez, que os estudantes ainda estão muito conectados com a Aritmética em vez da Álgebra.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a+b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

* Como resolver se não tem o valor de a e b.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

* Que a resposta acima e a abaixo não são iguais.

Figura 4.33 – Resposta estudante 25: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Observa-se que o mesmo problema ocorre com o estudante 16 (figura 4.34), mas este vai um pouco mais adiante e assume alguns valores hipotéticos como proposta para

resolução. No entanto, é possível notar que ele não consegue estruturar sua resposta para explicar a diferença entre os itens da primeira parte da atividade e a segunda.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Não entendi

Supondo que a incógnita "a" tem o valor 10 e "b" o valor 5, nós temos que somar $(10+5)$ e depois elevar ao quadrado: $(10+5)^2$.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Não entendi

Comparando a letra a com 1 podemos ver que na letra a a expressão é $(a+b)^2$ e na numera 1 é: $a^2 + b^2$.

Figura 4.34 – Resposta estudante 16: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Em relação à resolução da atividade B2, o estudante 16 explica que o fato dos dois termos estarem elevados ao quadrado seria a justificativa. Conforme visto no desenvolvimento da atividade B1, não há uma compreensão do que se trata a fórmula do quadrado da soma de dois termos. Por isso, é previsível o equívoco presente em sua explicação, e que é cometido por muitos estudantes, referentes à fórmula do quadrado da soma de dois termos.

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

a. $(a + b)^2$

b. $a + b^2$

c. $a + 2b^2$

d. $a^2 + b^2$

Eu acho que a letra d é pois os dois valores desconhecidos não foram elevados ao quadrado.

Figura 4.35 – Resposta estudante 16: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Outra resposta interessante encontrada nesse conjunto foi uma mistura da aplicação equivocada do expoente aos termos entre parênteses e a transformação da

expressão algébrica em uma equação. É possível observar, na figura a seguir, a operação realizada pelo estudante 29 (figura 4.36).

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = 4$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = a^6 + b^4 = 10$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 = 4$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 = ab^2 + 2a^2 = 6$

Figura 4.36 – Resposta estudante 29: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Há três coisas a serem consideradas na resolução desse aluno: o número adotado após a igualdade (4 no item a e 10 no item b), os expoentes assumidos no item b (no qual o termo “1” acaba sendo oculto) e a diferença do item 2 para o item b (Por que teria assumido a mesma equação apenas para o item A e o item 1?).

Na atividade B2 (figura 4.37), na qual foi o único que explicou verbalmente o seu raciocínio, descreve “Por que pelo que eu lembro as expressões algébricas são resolvidas quando estão entre parênteses”, ou seja, há uma vaga lembrança da aplicação da fórmula do quadrado da soma de dois termos, mas não há uma consolidação ou compreensão do significado desse processo.

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

a. $(a + b)^2$

b. $a + b^2$

c. $a + 2b^2$

d. $a^2 + b^2$

Porque pelo que lembro as expressões algébricas são resolvidas quando estão entre parênteses.

Figura 4.37 – Resposta estudante 29: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Observa-se novamente o estudante 13 (figura 4.38) para a resposta da atividade B2. Ele também não foi classificado nesse código de *pergunta-modelo*, mas respondeu de forma bastante coerente para justificar a escolha do item *a*. Resposta semelhante também foi dada pelo estudante 31 (figura 4.39).

Figura 4.38 - Resposta estudante 13: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Figura 4.39 – Resposta estudante 31: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

No último código, I-N, pediu-se ao estudante 11 (figura 4.40) para explicar a diferença entre “termos” e “números”, já que, em sua resposta na atividade B2, escolhe a alternativa C como correta e as outras não poderiam ser “pois o resto das expressões são termos, não números”. Na segunda tentativa (figura 4.41), ele responde que “termos” são “incógnitas” e “números” são os numerais como conhecemos (1, 2, 3...). Porém, sua resposta nos surpreende, pois não há uma diferença clara entre os itens que faça essa distinção. Ou seja, pode-se refletir, enquanto docentes, se o uso da palavra “termo” é frequentemente utilizada quando se fala de Álgebra, mas pouco quando se trata da Aritmética. Seria um obstáculo didático que gera esse tipo de dúvida?

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

- a. $(a + b)^2$
- b. $a + b^2$
- c. $a + 2b^2$
- d. $a^2 + b^2$

C1 pois o resto das expressões são termos, não números.

Figura 4.40 – Resposta estudante 11: 1ª tentativa da atividade B2 – Série V.

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

- a. $(a + b)^2$
- b. $a + b^2$
- c. $a + 2b^2$
- d. $a^2 + b^2$

C1 pois o resto das expressões são termos, não números.

Termos = uma incógnita

números: 1, 2, 3 etc...

Figura 4.41 – Resposta estudante 11: 2ª tentativa da atividade B2 – Série V.

Resposta semelhante também foi encontrada no estudante 20 (figura 4.42):

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

- ☒ a. $(a + b)^2$
- b. $a + b^2$
- c. $a + 2b^2$
- ☒ d. $a^2 + b^2$

Porque " $a^2 + b^2$ ", a e b são números, a^2 . Desculpe eu me confundi, como estou sem lápis e não posso apagar a resposta é a "a", porque são a soma de 2 números ao "2" quadrado

Figura 4.42 – Resposta estudante 20: 1ª tentativa da atividade B1 (2ª parte) – Série V.

Embora tenha uma semelhança quanto à definição de “termos”, o estudante 20 (figura 4.43) apresenta mais equívocos do que o estudante 11 (figura 4.13) para resolver a

primeira parte da atividade B1. Na justificativa da segunda parte, fica evidente que o estudante 20 não tem clareza das estruturas algébricas como o estudante 11.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = \cancel{a^2} \cdot \cancel{b^2} \cdot \cancel{ab} = 4ab$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) = 1 + \frac{1}{4}a^6b^4 = \frac{3}{5} \cdot 4ab$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Eu não sei responder, porque a forma que a questão quer ser passada, eu não entendo.

Figura 4.43 – Resposta estudante 20: 1ª tentativa da atividade B1 – Série V.

Veja-se agora um quadro resumo com a associação dos campos conceituais e conteúdos encontrados nas respostas dos alunos do tópico H2-V.

Quadro 4.4 – Quadro resumo associando o conteúdo, campo conceitual e esquemas.

Conteúdo principal	Campo Conceitual envolvido	Esquemas mobilizados para o domínio deste conteúdo	Exemplo de dúvida principal referente ao esquema
Distributiva	Estrutura multiplicativa	Multiplicação de dois termos iguais.	Confundir $2 \cdot 3$ com 2^3 .
		Multiplicação entre a soma de dois termos.	Não perceber que a multiplicação $(1+3)(1+3)$ pode representar uma operação equivalente a $1+3+3+9$.
	Estrutura algébrica	Multiplicação de dois termos algébricos iguais.	Confundir $a \cdot a = a^2$ e representar como $a \cdot a = 2a$.
		Soma de termos algébricos diferentes.	Somar $a + b$ e resultar em ab .
		Soma de termos algébricos iguais.	Confundir a soma de termos iguais como $ab + ab$ e multiplica-los resultando em a^2b^2 .
		Multiplicação entre a soma de dois termos algébricos.	Aplicar apenas os expoentes nos termos entre parênteses $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
		Comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos.	Não considerar $a \cdot b = ab$ e $b \cdot a = ba$.
		Compreensão da função dos parênteses.	Compreender que o conteúdo dentro dos parênteses deve ser considerado como um termo único.
		Compreensão do coeficiente de uma variável.	Acreditar que o coeficiente de uma variável x é sempre 1.

Fonte: a autora.

Portanto, por meio da análise do tópico H2-V (Generalização de conceitos matemáticos com sistema de problemas de um único tipo), encontraram-se alguns esquemas mobilizados pelos estudantes, referentes ao conteúdo de distributiva. Obviamente, o nível de mobilização de cada esquema variou de um aluno para outro, no qual serão aprofundados na análise do estudo final.

Assim, no próximo capítulo, será apresentada a forma como o estudo final foi elaborado, baseando-se nesses resultados do estudo piloto, para tentar verificar os diferentes níveis de invariantes operatórios mobilizados por cada um dos alunos estudados.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DO ESTUDO FINAL

5.1 Metodologia adotada para elaboração do estudo final

Baseando-se nos resultados obtidos no estudo piloto, partir-se-á para uma análise qualitativa mais detalhada de um grupo seletivo de estudantes. No caso, foi optado pela separação em três grupos:

Quadro 5.1 – Quadro descritivo dos grupos de estudantes do estudo final.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Estudantes que apresentaram razoável desempenho no protocolo e que nos permitem analisar suas dificuldades e também as habilidades já desenvolvidas.	Estudantes que apresentaram evidências de problemas de interpretação de texto e dificuldades de expressão na escrita.	Estudantes que não conseguiram resolver boa parte do protocolo e que demonstraram alguns sinais de bloqueio emocional em relação à disciplina de Matemática.

Fonte: a autora.

Um protocolo específico foi elaborado para cada grupo e complementado com uma entrevista semiestruturada (TRIVIÑOS, 1987, p. 146) na qual cada estudante justifica as resoluções apresentadas, com suas próprias palavras. A análise dessas justificativas, em conjunto com suas resoluções, serviram de base para evidenciar os possíveis invariantes operatórios e esquemas utilizados pelos alunos em cada grupo. Essas entrevistas foram gravadas em áudio cujas transcrições se encontram em anexo à tese.

Por meio da análise desses materiais, foi possível levantar um panorama dos diferentes níveis de compreensão de cada grupo sobre o conteúdo de Álgebra. A única exceção foi com o Grupo 3 com o qual foi realizada uma entrevista semiestruturada, que envolve aspectos socioculturais, para compreender os possíveis bloqueios de cunho social e emocional que pudessem influenciar no aprendizado de Matemática.

Em cada grupo foram selecionados três estudantes que se encaixassem no perfil descrito pelo quadro 5.1, dentro daquele grupo que participou do estudo piloto. Portanto, para este estudo final, foram entrevistados um total de nove estudantes, dos trinta e dois alunos que participaram da pesquisa. A escolha foi baseada no desempenho descritivo apresentado nos seus respectivos protocolos e também da própria disposição do estudante em colaborar com a pesquisa.

O estudo final foi aplicado em meados de outubro de 2017, com duração de, aproximadamente, três semanas, que compreende a entrega dos TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) aos responsáveis pelos estudantes e o retorno desses termos assinados. A aplicação efetiva das atividades durou cerca de duas semanas, que foram feitas durante as aulas de Matemática, com a autorização do respectivo professor responsável pela turma. Após a finalização da aplicação, a análise desses dados ocorreu da seguinte forma:

1. Analisar os protocolos escritos pelos estudantes com sua respectiva entrevista semiestruturada;
2. Encontrar observações verbais e escritas em comum entre os estudantes, por grupo;
3. Comparar o progresso do estudante entre o estudo piloto e o estudo final para nomear o modelo em comum que os estudantes apresentaram para resolver as atividades do protocolo;
4. Nomear modelos que justificam o raciocínio adotado pelos estudantes e compará-los com diferentes níveis de invariantes operatórios, por grupo.

5.2 A escolha do conteúdo e dos campos conceituais para o estudo final

Conforme evidenciado no capítulo 4, o conteúdo que apresentou mais dificuldades entre os estudantes foi o de **distributiva**, que envolve dois tipos de campos conceituais principais: a **estrutura multiplicativa** e a **algébrica**. Evidenciou-se, por meio do quadro 4.4, quais foram os respectivos esquemas relacionados a esse conteúdo. Neste estudo final, foram concentrados diversos tipos de atividades que estivessem relacionadas a esse conteúdo, mas também que envolvessem estratégias diferentes, para que fosse possível observar o desempenho dos estudantes de cada grupo.

Conforme a opção teórico-metodológica adotada, os modelos apresentados neste capítulo são resultados das análises *a posteriori* das respostas dos estudantes. Ressalta-se que, no estudo piloto, os modelos organizadores foram chamados de **perguntas-modelo**, que direcionaram a elaboração das atividades deste estudo final. Neste capítulo, chamam-se os

modelos organizadores apenas de **modelo X**, sendo que **X** corresponde aos nomes originados das análises do conjunto de resolução dos estudantes, por grupo.

A entrevista semiestruturada foi crucial para compreender, com um pouco mais de detalhes, o raciocínio e as estratégias utilizadas para desenvolver a atividade. Muitas vezes, observar apenas a resolução dos estudantes não permite trazer muitas informações sobre os esquemas e invariantes operatórios utilizados. Porém, por meio do diálogo, é possível ter um pouco mais de profundidade e clareza de nossas hipóteses sobre as dificuldades dos estudantes. Também houve o cuidado de manter uma linguagem mais informal durante a entrevista, de forma proposital, para que os estudantes ficassem menos intimidados para expressar suas dúvidas ou desconhecimentos de eventuais termos técnicos apresentados nas atividades, já que a presença de uma pessoa de fora da escola e a própria situação de entrevista cria uma apreensão nos alunos.

5.2.1 Protocolo aplicado ao Grupo 1

Para o Grupo 1, elaboraram-se atividades que envolvessem diferentes formas de representar uma expressão algébrica e sua compreensão acerca do conceito de Produto Notável.

Na atividade 1, apresentam-se três formas de desenvolver uma expressão do tipo $(a + b)^2$. Na primeira forma, a mais utilizada pelos estudantes, aplica-se a fórmula do quadrado da soma de dois termos que diz:

“O quadrado do primeiro termo somado ao dobro da multiplicação do primeiro e segundo termo somado ao quadrado do segundo termo”.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Na segunda forma, que envolve a aplicação da distributiva, multiplicam-se os termos entre parênteses $(a + b)(a + b)$:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2\end{aligned}$$

A terceira e última forma, consistiu de uma representação geométrica que corresponde à figura 5.1, na qual o resultado da expressão equivale a soma das áreas $A1, A2, A3$ e $A4$ representadas dentro do quadrado de lado $(a + b)$.

Figura 5.1 – Representação geométrica da expressão $(a + b)^2$.

Após a apresentação desses três exemplos de desenvolvimento, o estudante deveria escolher uma das opções anteriores para desenvolver as três expressões algébricas a seguir:

- a. $(c + 1)^2$
- b. $(3 + b)^2$
- c. $(5x + y)^2$

Durante a análise das resoluções, verificou-se qual seria a opção preferida pelos estudantes desse grupo. Dessa forma, poderia-se traçar um paralelo de quais invariantes operatórios são comumente desenvolvidos para os estudantes que se encontram nessa fase escolar. Vale ressaltar que, independentemente da estratégia adotada, eles deveriam ser capazes de responder à seguinte pergunta, que leva à atividade 2:

$$(a + b)^2 \text{ é o mesmo que } a^2 + b^2?$$

Considerar que essas expressões significam a mesma coisa é um erro muito comum cometido pelos estudantes e, por isso, tentou-se elucidar distintas estratégias de resolução para que essas diferenças ficassem mais claras ao aluno. Mais adiante, as resoluções apresentadas pelos estudantes serão comentadas.

Na atividade 3, o estudante deveria responder às seguintes perguntas:

- a. Qual a principal característica sobre os lados de um quadrado?*
- b. Desenhe 3 exemplos de quadrados de medidas diferentes.*
- c. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.*

O item *a* visa a verificar a compreensão do conceito de números quadrados pela própria percepção da propriedade dos quadrados. Muitos estudantes costumam calcular a área do quadrado aplicando a propriedade de retângulos (multiplicação da base pela altura), mas, muitas vezes, não se atentam ao fato de que o quadrado é o caso de um retângulo “especial”, cujos lados têm exatamente a mesma medida. Logo, pode-se simplesmente escolher um de seus lados e elevá-lo à segunda potência. Assim, todo número que é quadrado perfeito remete naturalmente à essa propriedade do quadrado, que seria a resposta esperada para o item *a*.

No caso do item *b*, pretende-se verificar a compreensão do aluno acerca da representação das dimensões de uma figura geométrica. Há um equívoco muito comum dos alunos utilizarem as medidas de um instrumento de medida (por exemplo, a régua) e utilizá-las como referência para fazer os cálculos da área ou outros problemas relacionados¹. Já no item *c*, espera-se que o estudante tenha compreendido as características do quadrado citado no item *a* e, assim, poderá dar outros exemplos de números quadrados perfeitos.

Na atividade 4, o intuito foi verificar a compreensão da composição decimal sem se apoiar no algoritmo das operações de soma e subtração, como os estudantes costumam aprender nas séries iniciais do Ensino Fundamental:

- 4. O sistema numérico decimal é composto com algarismos de 0 a 9 e os seus agrupamentos são feitos de 10 em 10.*

Observe a casa da unidade desta conta:

¹ Exemplos desses erros podem ser encontrados em Kikuchi e Trevizan (2010).

$$\begin{array}{r} 39 \\ + 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

Em termos práticos, isso significa que 39 são formados por 3 dezenas e 9 unidades. Se somamos com 3 unidades, o resultado é formado por 4 dezenas e 2 unidades. Pois cada dezena representa 10.

Partindo dessa explicação, tente explicar porque usamos o algoritmo do “sobe 1” quando obtemos resultados maiores que 9 na soma de uma das casas.

Esse tipo de atividade foi escolhido, pois, no estudo piloto aplicado a esses alunos, constatou-se que houve muita dificuldade para compreender a composição dos sistemas decimais. Para verificar os níveis dos esquemas desses estudantes, foram apresentadas as seguintes *perguntas-modelo* para ajudá-los a resolver a questão:

1. *Que número somado a 2 resulta em um outro que termina com dígito 1?*
2. *Termine o cálculo seguindo o mesmo raciocínio.*

A primeira pergunta foi formulada para os alunos que sequer iniciaram a resolução para que, no segundo dia de aplicação, tentassem resolvê-la. Nesse caso, alguns alunos obtiveram sucesso em resolver parcialmente a questão passando para a segunda *pergunta-modelo* e passaram para um terceiro dia de aplicação do estudo piloto.

No caso da segunda pergunta, seria para aqueles estudantes que conseguiram resolver parcialmente a questão, mas não completaram até o final. Veja-se um exemplo de uma resolução incompleta feita pelo estudante 20:

Figura 5.2 - Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade B - Série IX (estudo piloto).

Figura 5.3 -Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade B - Série IX (estudo piloto).

Deve ser ressaltado, novamente, que tentou-se manter uma linguagem mais coloquial nos enunciados das atividades para minimizar a barreira da compreensão de vocabulário técnico na resolução dos exercícios. No momento da entrevista, também houve o cuidado de manter a conversa em um tom mais informal, para não intimidar o aluno numa eventual falta de compreensão de um termo técnico. Embora a compreensão de termos técnicos também tenha correlação com o aprendizado de Matemática, neste estudo, tentou-se afastar esse tipo de obstáculo para focar-se, majoritariamente, no raciocínio lógico e algébrico dos estudantes.

Por último, na atividade 5, houve uma atividade no estudo piloto que nenhum dos alunos foi capaz de resolvê-la: definir uma fórmula geral dos números ímpares. Nesse caso, optou-se por apresentar uma atividade semelhante, mas contendo um exemplo que ajudasse no desenvolvimento da atividade pelos estudantes:

5. *Números consecutivos são aqueles que vêm em uma sequência. E números inteiros são os números naturais incluindo os números negativos.*

Divisível significa que a divisão dá um resultado com resto zero. Por exemplo: 12 é divisível por 4, pois:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Sabendo dessas definições, prove que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por 3.

O resultado dessa atividade foi bem positivo, já que todos os alunos deste grupo foram capazes de responder corretamente a atividade durante a entrevista. Obviamente, houve

diferentes níveis de dificuldades entre os estudantes, mas cada um deles desenvolveu uma técnica própria para compreender e chegar ao resultado esperado.

5.2.2 Protocolo aplicado ao Grupo 2

O Grupo 2 foi representado por estudantes que, embora possuíssem dificuldades dos mesmos conceitos do Grupo 1, evidenciaram mais obstáculos na compreensão do conceito de Álgebra elementar. Assim, as atividades foram direcionadas para verificar, passo a passo, a compreensão dos conceitos de equação e incógnita.

Nesse caso, além do protocolo escrito e uma posterior entrevista semiestruturada, também foi utilizado o auxílio de um jogo, em forma de aplicativo para dispositivos móveis, como o *Jabara*² da plataforma *Mangahigh*, desenvolvida pela empresa britânica *Blue Duck Education*.

Figura 5.4 – Tela do jogo Jabara – Nível 1.

² Na época da aplicação (2017), este jogo estava disponível para a plataforma Android e poderia ser baixado e instalado, gratuitamente, pela Google Play. Na época de conclusão desta pesquisa, o jogo passou a estar disponível apenas na versão online no endereço: <https://www.mangahigh.com/pt-br/algebra>.

Figura 5.5 – Tela do jogo Jabara – Nível 10.

O objetivo do jogo é ensinar ao jogador as ideias fundamentais de equações e de variáveis, com diferentes níveis de dificuldades, para que o aluno possa dominar tais conceitos. Utilizou-se a mesma progressão de dificuldade do jogo para elaborar as cinco atividades do protocolo para os estudantes desse grupo, conforme será visto a seguir. Após trinta minutos de contato com o jogo, cada aluno deveria resolver as seguintes atividades do seu protocolo:

1. *Quanto vale o x? Some os números “2” do lado direito da igualdade.*

$$x = 2 + 2$$

2. *x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.*

$$x = 2 + 4$$

3. *x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.*

$$x = 10 + 2$$

4. Os números “3” e “7” são “constantes”. Ou seja, qualquer número por si só é chamado de “constante”. Encontre o valor de x na equação abaixo.

$$x = 3 + 7$$

5. O que você resolveu até agora chamam-se “equações”. Uma equação mostra que duas coisas são iguais. Veja:

$$x = 12$$

- a. O x é igual a qual valor?
- b. Tente representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item a.

É possível observar que a atividade tem pouca variação quanto à resolução propriamente dita, mas guarda significados de compreensões de diferentes níveis. Uma resolução mecânica na qual se faz apenas a soma dos valores de um lado da igualdade ou até mesmo o algoritmo do “isola o x para um dos lados da igualdade”, pode não ter significado algum para o aluno se ele não compreendeu a essência da noção de igualdade. Mostrar-se-á, no item 5.3.2, uma das entrevistas na qual um dos estudantes apresentou essa dificuldade.

Após a resolução dessas atividades, espera-se que o aluno tenha compreendido o conceito de igualdade em uma equação e, então, que seja capaz de determinar se as equações apresentadas na atividade 6 são verdadeiras ou falsas.

6. Responda se é verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes equações:

- a. $6 + 3 = 9$ ()
- b. $14 = 7 + 7$ ()
- c. $3 + 3 = 1 + 5$ ()
- d. $1 + 4 = 2 + 3$ ()
- e. $13 + 3 = 6$ ()

A função principal dessa atividade é de evitar a resolução mecanizada de equações, sem compreender o real significado delas. Caso a atividade tenha sido bem-sucedida, o aluno será capaz de verificar que cada lado da igualdade deve corresponder a valores idênticos, como uma

balança. No caso de encontrar um valor de uma variável, não importando o lado da igualdade, ela deve ser isolada para encontrar-se o valor correspondente por meio da igualdade.

Na atividade 7, concentrou-se a ideia de operações com números negativos. Operações com esses tipos de números geram dúvidas nos estudantes, principalmente, por misturar as regras de sinais da multiplicação com a de adição, memorizadas de forma automática, sem a real compreensão das operações. Por exemplo, um erro muito comum que foi encontrado é em relação à regra de sinal “+ com – resulta em –” que é aplicada de forma equivocada na seguinte operação gerando as seguintes soluções:

Exemplo 1: $2 + (-8) = -10$

Exemplo 2: $8 + (-2) = -10$

Nesses casos, nota-se que ambos apresentam o resultado incorreto. O estudante que faz esse tipo de resolução aplica a regra de sinais, de forma separada, e os números das operações trabalhadas em módulo³. Ou seja, $2 + 8 = 10$ e depois aplica-se a regra de sinais da multiplicação. Entrar-se-á em mais detalhes no item 5.3.2, na análise do estudante 6.

Assim, a atividade 7 foi dividida em várias partes e apresentadas da seguinte forma:

7. *Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:*

$$7 + (-2) = 7 - 2$$

Qual é o resultado dessa equação?

Calcule o resultado das seguintes equações:

a. $2 + (-2) =$

b. $5 + (-3) =$

c. $8 + (-5) =$

d. $33 + (-12) =$

e. $2 + (-8) =$

³ Valor absoluto de um número sem o número negativo.

O que acontece quando somamos um número negativo com um positivo? Dê o resultado desta expressão e explique sua resposta.

$$- 2 + 5 =$$

Seguindo com a compreensão de equações, para testar-se o entendimento dos estudantes do Grupo 2, foi proposta esta atividade de resolução de uma equação na qual eles devem encontrar o valor da variável. No entanto, o nivelamento da dificuldade foi feito passo a passo, no mesmo modelo proposto pelo jogo *Jabara* e apresenta-se uma explicação detalhada do conceito de equações, na atividade 8, a seguir:

8. *Observe a equação a seguir:*

$$x + 2 = 5$$

Você precisa isolar o x , ou seja, deixar um lado da igualdade apenas com o x e o outro lado apenas com constantes. Para fazer isso, você precisa eliminar (zerar) a constante do lado em que está o x . Veja:

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x + 0 = 5 - 2$$

Perceba que quando eu subtraio uma constante dos lados da igualdade, eu tenho que fazer o mesmo do outro lado. Por isso, subtraímos 2 do lado onde está o 5.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo a passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$

b. $- 6 + x = 30$

5.2.3 Protocolo aplicado ao Grupo 3

No caso do Grupo 3, foi feita apenas a entrevista semiestruturada, sem relação direta com atividades envolvendo o conteúdo de Matemática, que se permitiu elucidar as preferências e anseios dos alunos em relação às suas disciplinas e, assim, encontrar meios que nos permitissem compreender as dificuldades ou bloqueios existentes em relação à disciplina de Matemática. Também procurou-se identificar afinidades existentes entre as atividades de lazer e se seus hábitos do cotidiano, com os seus familiares, podem interferir na possível dificuldade ou medo em relação à disciplina de Matemática. No estudo piloto, esses alunos expressaram suas angústias em não poder responder as questões, o que se chamou atenção, e, por isso, aplicou-se um estudo, que não envolvesse necessariamente a resolução de problemas matemáticos, mas a forma como os estudantes que possuem esses “bloqueios emocionais” respondem à entrevista semiestruturada como no questionário a seguir.

QUESTIONÁRIO

1. *Tente explicar qual o seu sentimento em relação à disciplina de Matemática.*
2. *Diga quais as matérias que você gosta explicando o por quê.*
3. *Diga quais as matérias que você **não** gosta explicando o por quê.*
4. *Descreva o que você considera uma “boa aula”.*
5. *O que você gosta de fazer nas suas horas livres?*

A análise das respostas será apresentada no item 5.3.3.

5.3 Análise dos modelos por grupo

5.3.1 Respostas do Grupo 1

Os três estudantes⁴ que fizeram parte desse grupo foram os que foram nomeados como 3, 13 e 20 desde o estudo piloto.

Escolheram-se esses três estudantes para representar o Grupo 1 baseando-se nos seguintes critérios:

1. Resolveram todo o protocolo do estudo piloto;
2. Após o contato com as perguntas-modelo do estudo piloto, conseguiram elaborar ou melhorar as suas respostas;
3. Apresentaram receptividade para dar continuidade à próxima fase da pesquisa.

Outros pontos que justificaram a escolha de apenas três estudantes para cada grupo foram:

1. Tempo disponibilizado pelo professor e a escola para aplicação das atividades

O professor de Matemática disponibilizou a intervenção durante as suas aulas, permitindo a saída dos estudantes para um outro ambiente para que fosse possível conduzir a aplicação da atividade de forma tranquila e assertiva. Dependendo do dia da aula, esse tempo variava entre 50 minutos a uma hora e 40 minutos de aula.

Como os alunos são retirados da sala, foi combinado com o professor de que os mesmos não seriam prejudicados durante a ausência em sua aula, caso houvesse a entrega de alguma atividade avaliativa.

Outro ponto nevrálgico foi adaptar o nosso calendário de andamento da pesquisa com o da escola, que possui, durante o ano, atividades extracurriculares, como feiras, passeios, reuniões de pais e mestres que poderiam conflitar com o cronograma da pesquisa.

2. Viabilidade do local e presença dos estudantes para realizar a entrevista

A escola permitiu que fossem utilizadas salas de aulas vagas para que fosse possível fazer a aplicação da pesquisa. No entanto, havia dias em que a

⁴ Convencionou-se por adotar o gênero masculino para referir-se aos estudantes.

sala ficaria vaga por um período, mas depois seria ocupada. Consequentemente, dever-se-ia fazer a transferência para uma outra sala.

Outro ponto importante é que, por tratar-se de uma pesquisa voluntária, não foi possível controlar as ausências dos estudantes que, muitas vezes, atrasava a aplicação do protocolo e da respectiva entrevista. Se fosse aplicado com um número muito grande de estudantes, não seria possível concluir, no tempo hábil, as atividades ou deixar-se-ia um intervalo muito longo entre a resolução do protocolo com a entrevista, o que comprometeria a viabilidade de análise das respostas dos alunos.

Por conta desses critérios, escolheu-se, de forma muito restrita, o número de alunos que fariam parte de cada grupo do nosso estudo final. No entanto, após a análise das entrevistas, acredita-se que os perfis de cada aluno são representativos para as questões que se propôs a analisar.

Conforme descrito no quadro 5.1, o perfil dos estudantes do Grupo 1 são aqueles que apresentaram um bom desempenho no estudo piloto, ainda que tenham evidenciado uma ou outra dificuldade para solucionar alguns problemas. Nesse grupo, identificaram-se características de estudantes que, no geral, apresentam de razoável a bom desempenho em Matemática, comparado ao restante da turma.

Nos subtópicos a seguir, elaborou-se alguns modelos que foram identificados nos estudantes quanto à resolução do protocolo sobre o conceito de distributiva.

5.3.1.1 Modelo 1 - Aritmética

Na primeira atividade, o grupo foi exposto a três diferentes formas de resolver o quadrado da soma de dois termos. Os estudantes 3 e 13 resolveram utilizando a distributiva e o estudante 20 usando o algoritmo do quadrado da soma. Nenhum deles optou por utilizar a forma geométrica de interpretação dessa expressão algébrica.

Os que optaram pelo modelo da distributiva foram mais assertivos na resolução do que o estudante que tentou aplicar diretamente o algoritmo do quadrado da soma. Vale ressaltar que,

mesmo durante o estudo piloto, todos eles apresentaram uma resolução incompleta ou com algum equívoco de cálculo, conforme apresentado no quadro 4.4 do capítulo anterior.

A diferença entre o estudo piloto e o final consiste na apresentação das formas de desenvolver a expressão $(a + b)^2$. No estudo piloto, pedia-se apenas para que as expressões fossem desenvolvidas aplicando-se o princípio de produto notável: o *quadrado da soma de dois termos*.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

No estudo final, foram apresentadas três formas diferentes de desenvolver aquela expressão e o estudante deveria selecionar a que considerasse mais simples.

Nota-se que os três estudantes tiveram mais facilidade para resolver as expressões que continham pelo menos um número em uma das variáveis, tais como $(3 + b)^2$. Portanto, esse modelo exemplifica que o conceito de Aritmética ainda é muito enraizado nos estudantes deste ciclo. Assim, trabalhar cálculos com incógnitas e variáveis deve ser um processo contínuo e gradativo, até que o aluno consiga incorporar esse novo conceito, ou seja, um esquema que passe a ser um invariante operatório.

A principal dificuldade notada, em dois dos estudantes, é quando um dos termos da expressão apresenta um coeficiente maior que um, por exemplo, $(5x + y)^2$. Há uma dificuldade para compreender que $5x$ representa um único termo e, assim, ao elevar ao quadrado, ou esquecem de elevar cinco ao quadrado ou o x ao quadrado. Essa constatação pode ser expressa no diálogo da entrevista com o estudante 13:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 36 A 59

Linha 36	P ⁵ : Ok. Por exemplo, esse $5x$ são dois termos ou é um termo só?
Linha 37	E13 ⁶ : Um termo.

⁵ P: Fala da pesquisadora.

⁶ E13: Fala do estudante 13.

Linha 38	P: Ok. Então, na regra aqui, você vai multiplicar todo o primeiro termo pelo outro primeiro termo, não é? Será que está todo mundo multiplicado no que você fez aqui? Você colocou como $25x$.
Linha 39	E13: $5x \times 5x$, dá 25... aí depois $5x \times y$ para 5... xy?
Linha 40	P: Aham.
Linha 41	E13: Aí depois $y \times 5x$ que é o $5xy$...
Linha 42	P: Aham.
Linha 43	E13: $y \times y$ que é o y ao quadrado.
Linha 44	P: Isso. Mas e o $5x \times 5x$? Está todo mundo multiplicado?
Linha 45	E13: Não.
Linha 46	P: O que não está multiplicado?
Linha 47	E13: Agora eu não entendi.
Linha 48	P: Aqui, olha: você multiplicou o 5 com o 5, certo?
Linha 49	E13: Sim.
Linha 50	P: Deu 25. E o x ? O $x \times x$ é quanto?
Linha 51	E13: É o x ao quadrado.
Linha 52	P: Aham.
Linha 53	E13: Ah! Entendi! Aqui. Tem que ter “ao quadrado”.
Linha 54	P: Isso. É.
Linha 55	E13: Ah, entendi.
Linha 56	P: Certo.
Linha 57	E13: São dois termos.
Linha 58	P: Isso. São dois termos juntos que está formando um termo só. Está certo?
Linha 59	E13: Dois termos que formam um.

O estudante 13, após esse esclarecimento, corrigiu o equívoco feito na primeira resolução no qual não havia elevado o x do primeiro termo ao quadrado. A sua resolução correta consta na figura 5.6.

c. $(5x + y)^2$
 $(5x + y)(5x + y)$
 $25x^2 + 5xy + 5xy + y^2$
 $25x^2 + 10xy + y^2$

Figura 5.6 – Resposta estudante 13: Atividade 1 - item C (estudo final).

No estudo piloto, esse mesmo estudante tinha dúvidas sobre o esquema envolvendo a *comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos*. Observe-se a figura 5.7:

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2)$

Figura 5.7 – Resposta estudante 13: Atividade B1 - Série V (estudo piloto).

Comparando as respostas das figuras 5.6 e 5.7 nota-se que esse estudante já compreende o esquema de comutatividade. Isso é perceptível no trecho do diálogo anterior com esse aluno, nas linhas 38 a 41.

Observa-se, no segundo negrito, que o estudante automaticamente faz a comutação da posição do y para obter o termo $5xy$ (primeiro negrito), o mesmo obtido na primeira multiplicação. No estudo piloto (figura 5.7), ele não percebia a comutatividade do ab com o ba , assim, acaba não somando esses termos, considerando-os como termos independentes. No estudo final, o estudante 13 faz a soma dos termos corretamente, como é possível observar na figura 5.6.

Houve um intervalo de aproximadamente um ano entre o estudo piloto e o estudo final. Assim, nota-se que o estudante conseguiu desenvolver esse esquema, durante esse período.

No caso do estudante 3, que utilizou também a distributiva para desenvolver as expressões dadas, houve um aproveitamento de 100% da atividade. Esse estudante também apresentou dificuldades para somar termos iguais durante o estudo piloto. Observe as figuras 5.8 e 5.9:

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$
 $a^2 + ab^2 + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) = 1 + \frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a^6 + b^4$

Figura 5.8 – Resposta estudante 3: Atividade B1 - Série V (estudo piloto).

Na figura 5.8 é possível observar o equívoco para somar os termos ab . Comparado ao estudante 13, este parece não ter dúvidas sobre a comutatividade dos termos ab e ba . No entanto,

apresenta a soma como ab^2 , seguido de um ponto de interrogação, denotando a dúvida em sua resolução.

c. $(5x + y)^2$

$$(5x + y) \cdot (5x + y) = 25x^2 + 5xy + 5xy + y^2$$

$$25x^2 + 10xy + y^2$$

Figura 5.9 – Resposta estudante 3: Atividade 1 - item C (estudo final).

Já na figura 5.9 observa-se que a soma é feita corretamente e, por meio do seguinte diálogo, durante a entrevista semiestruturada, comprova-se que não possui dúvidas em relação a esse esquema.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 67 A 84

Linha 67	P: Tá. Agora vamos ver. Então, como você já tinha me explicado anteriormente, você preferiu a segunda forma.
Linha 68	E3: Sim.
Linha 69	P: Para fazer isso, não é? Tá... E aí você fez a distributiva, aplicou e depois somou os termos semelhantes, certo?
Linha 70	E3: Certo.
Linha 71	P: Aham. E você acha que está tudo certinho?
Linha 72	E3: Acredito que sim (rs).
Linha 73	P: É? Vamos ver: a primeira parece que está certa, a segunda também... Ok... E o que você achou da letra <i>c</i> dessa atividade?
Linha 74	E3: Humpf... ((Silêncio)) É igual as outras.
Linha 75	P: Aham... é completamente igual?
Linha 76	E3: Não... ((hesitação))
Linha 77	P: O que é que tem de diferente?
Linha 78	E3: Nos outros o... o número. Esse estava sozinho, e aí no último é... $5x + 5y$. Então tem... duas incógnitas...
Linha 79	P: Aham... Sim... E como você soube que esse $5x$ é o termo <i>a</i> ? No caso, se fosse uma fórmula genérica.
Linha 80	E3: ((Silêncio e depois muxoxa)) Ah... Intuição...
Linha 81	P: Tá. Aqui você já considerou o termo inteiro porque muitos alunos costumam confundir quando tem um número na frente do <i>x</i> . Eles acabam aplicando só no <i>x</i> , por exemplo. Aí aplica-se só o <i>x</i> ao quadrado...
Linha 82	E3: ... Não... mas o <i>x</i> está junto do 5.
Linha 83	P: É.
Linha 84	E3: Se fosse $5 + x + y$...

Observa-se que, ao questionar o estudante como ele tem certeza de que o termo $5x$ representa um único termo, mas não dois separados, ele pensa e responde que foi “intuição”. Assim, é possível notar que, nem sempre, os conhecimentos adquiridos pelo aluno são

facilmente explicitáveis. O estudante pode até saber resolver corretamente o problema, pois já fez um número suficiente de resoluções parecidas, mas não necessariamente consegue explicar porque determinada regra funciona daquela forma. No período de um ano, talvez, esses dois estudantes puderam retificar algumas dúvidas e, assim, são capazes de desenvolver melhor os esquemas que lhes faltavam. Porém, há uma diferença do nível de compreensão de cada um deles. Por isso, o desenvolvimento de esquemas e invariantes operatórios de cada estudante varia de acordo com sua própria rede de conhecimento no qual se constrói de forma individual.

O estudante 20, em particular, foi muito produtivo para a pesquisa, em termos de fornecer muitos detalhes para análise, já que demonstrou muita resiliência durante toda atividade e, em nenhum momento manifestou apatia ou impaciência para chegar ao resultado correto. Isso permitiu obter muitos pormenores do seu raciocínio, ao menos dos explicitáveis, e gerar algumas hipóteses de como se pode trabalhar com alguns esquemas para favorecer a compreensão de conceitos algébricos. Sua entrevista completa, como de outros estudantes, poderá ser consultada no anexo. Nas próximas análises conterão apenas os trechos mais relevantes.

Esse estudante, que optou pela aplicação do algoritmo do quadrado da soma de dois termos, mesmo com o exemplo explicitado no próprio protocolo, ainda apresentou dúvidas no desenvolvimento. Embora, comparado ao estudo piloto, seu desempenho tenha sido muito melhor, percebe-se que ainda há um equívoco em uma parte de sua resolução. Observem-se as figuras 5.10 e 5.11:

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \cancel{ab} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \cancel{ab} = 4ab$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}a^3b^2) = 1 + \frac{1}{4}a^6b^4 = \frac{3}{5} \cdot 4ab$

Figura 5.10 – Resposta estudante 20: Atividade B1 - Série V (estudo piloto).

$$\begin{aligned}
 &b. (3 + b)^2 \\
 &(3+b)^2 = 3^2 + 9b + b^2 \\
 &= 3^2 + 6b + b^2 \\
 &= 9 + 6b + b^2
 \end{aligned}$$

Figura 5.11 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item B (estudo final).

Questionou-se o motivo do estudante ter apresentado o termo central do trinômio como $9b$ em vez de $6b$. A resposta que está expressa no diálogo a seguir:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 39 A 42

Linha 39	P: Aham... entendi. E a letra b , por exemplo? Tem aqui $3 + p$ tudo elevado ao quadrado.
Linha 40	E20: Sim.
Linha 41	P: Aí você elevou 3 ao quadrado, b ao quadrado e aqui no meio você multiplicou $9 \times b$. Porque é $9 \times b$ aqui?
Linha 42	E20: Porque... como o 3 está dentro do... parênteses, e o parênteses é ao quadrado... Eu acho que eu achei certo porque eu vou fazer 3 ao quadrado que é igual a 9.

Vale ressaltar que foi cometido o mesmo equívoco no item a , do estudo final, apresentando o resultado como $c^2 + 1c + 1^2$, veja-se o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 31 A 38

Linha 31	P: Tá. Vamos ver aqui. Você colocou ao quadrado, né? Cada um dos termos, o primeiro e o segundo, e...
Linha 32	E20: ... a soma deles.
Linha 33	P: A soma deles?
Linha 34	E20: Isso.
Linha 35	P: Tá... que aí é um c . Mas... porque a soma é um c ?
Linha 36	E20: ((Silêncio)) Porque... bom... não tinha como eu fazer 1 ao quadrado para virar um resultado... Porque 1 ao quadrado vai ser sempre igual a 1.
Linha 37	P: Certo.
Linha 38	E20: Então... não tinha muito o que fazer...

Foi pedido ao estudante 20 que observasse a definição do algoritmo do quadrado da soma de dois termos, mais uma vez, e verificasse se sua resolução fazia sentido. Ele percebe que realmente há algo errado no termo central desse trinômio. Segue o diálogo desse trecho:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 63 A72

Linha 63	P: Aham.
Linha 64	E20: Então... eu acho que deu uma complicada na minha cabeça... (rs)
Linha 65	P: Certo (rs)
Linha 66	E20: Pensando bem agora. Olhando... analisando...
Linha 67	P: Tá...
Linha 68	E20: (...) alguma coisa está errada, mas eu não vou saber explicar o que está de errado...
Linha 69	P: Tá... Mas você conseguiu perceber ONDE tá errado?
Linha 70	E20: Humn... geralmente aqueles “nos meios”...
Linha 71	P: Ah... no meio! Certo...
Linha 72	E20: Sim...

Depois do diálogo, o item *a* foi corrigido conforme a figura 5.12.

a. $(c + 1)^2$

$$(c+1)^2 = c^2 + 1c + 1^2$$

$$= c^2 + 2c + 1^2$$

$$= c^2 + 2c + 1$$

Figura 5.12 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item A (estudo final).

Ao continuar a entrevista com o estudante 20, percebe-se que a dúvida estava no fato da expressão estar sendo elevada ao quadrado, o que causava o equívoco de elevar todos os termos ao quadrado. Ou seja, houve uma compreensão parcial de que a expressão $(a + b)^2$, quando desenvolvida, gerava uma expressão com três termos. No entanto, havia um erro de interpretação em relação ao termo central, que é multiplicar o primeiro e o segundo termo por dois. Comparando as figuras 5.10 e 5.11, é possível observar que as dificuldades que esse estudante apresenta são diferentes. Ou seja, o seu esquema se modificou no período de um ano. Porém, não há ainda uma internalização completa do conceito do quadrado da soma de dois termos comparado ao estudante 3, por exemplo. A justificativa dada pelo próprio aluno foi o fato do exemplo ter apenas variáveis, dificultando a compreensão do algoritmo. Mais uma vez, o modelo da Aritmética está fortemente presente nesse invariante operatório.

Outros conceitos que o estudante 20, em particular, apresentou dúvidas foi em relação à soma de termos semelhantes. Por exemplo, se uma expressão como $9 + 6b$ pode ser somada para tornar-se um único termo (percebe-se aqui que há uma dúvida semelhante à que

apresentava na figura 5.11). Segue o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 159 A166

Linha 159	P: Aham. Por que você está com essa “vontade” de somar $9 + 6b$? (rs)
Linha 160	E20: Não sei... acho que... pelo histórico, desde quando a gente é pequena, não é? É sempre quando tem no... final de adição, sempre somar e dar um resultado e acabou, realmente, toda a conta.
Linha 161	P: Aham.
Linha 162	E20: Então, isso dá uma vontade sim de somar... (rs)
Linha 163	P: Parece que está incompleto, não é? (rs)
Linha 164	E20: É!
Linha 165	P: Como se fosse “não, a conta não terminou ainda!” (rs)
Linha 166	E20: Parece realmente que está incompleto, mas eu acho que esse é o resultado dessa expressão.

Observa-se que, nessa fala, o estudante 20 está bastante enraizado no conceito de Aritmética sobre as operações cujo resultado é um único número. É por esse motivo que operações algébricas causam tantas dúvidas nos estudantes. Há uma necessidade de superar um obstáculo, isto é, desconstruir um conhecimento anterior para que possa compreender uma nova situação na qual nunca fora exposto antes. Mas, aceitar um novo conceito, não ocorre de uma forma tão simples, conforme explicitada pela noção de obstáculo epistemológico de Bachelard (1996) sobre o conhecimento científico, porém, aproximando a um contexto de ensino.

Também foi possível notar na fala desse estudante que há uma memória, ou um aprendizado, de que o x sempre vale um. Não se sabe ao certo qual a associação que o aluno faz para chegar a essa conclusão. Ao se indagar sobre esse conhecimento, ele mesmo afirma que ouviu algo parecido de professores no passado. É possível que seja em relação ao coeficiente e não necessariamente que o x valha um. Novamente, alunos tendem a memorizar regras gerais para resolver problemas matemáticos. Assim, se o professor enfatiza a memorização na resolução de exercícios, isso pode criar equívocos em outros conceitos⁷. Com isso, em nenhum momento está sendo afirmado que a memorização seja totalmente excluída do processo de aprendizagem. No entanto, o excesso de valorização sobre a mimetização de algoritmos pode criar erros de interpretação em outros conceitos. Observe-se o trecho do diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 115 A 128

Linha 115	P: Dobro de c ...
Linha 116	E20: ...vai ser igual... a c ao quadrado? Ou não?
Linha 117	P: Não... Na verdade, como o c você não conhece, então o dobro de c é dobro de c !

⁷ Aqui se utiliza a noção de conceitos matemáticos.

Linha 118	E20: É!
Linha 119	P: E o 1 ao quadrado?
Linha 120	E20: O 1 ao quadrado vai ser igual a 1.
Linha 121	P: Igual a 1. Então você pode colocar só 1. Não precisa nem colocar o a ao quadrado. Então, aí embaixo você colocaria como?
Linha 122	E20: ((Silêncio)) Se c ao quadrado é igual a c, então poderia excluir...
Linha 123	P: Por que você vai excluir?
Linha 124	E20: ((Silêncio)) Porque não faria sentido eu colocar... apenas... o resultado do c...
Linha 125	P: Humn...
Linha 126	E20: Porque a letra é sempre igual a 1.
Linha 127	P: Ah... Por que é sempre igual a 1?
Linha 128	E20: Bom... é o que umas professoras me ensinaram... (rs)

O diálogo continua, no qual foi feito um processo passo a passo, para que o estudante 20 compreendesse qual seria a interpretação correta do algoritmo da soma do quadrado de dois termos. Conforme mostrado no quadro 4.4, nota-se a dúvida sobre o esquema envolvendo a multiplicação de dois termos algébricos iguais. Com isso, esse estudante demonstra em sua fala a incerteza na diferença entre multiplicar por dois e elevar ao quadrado.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 85 A 92

Linha 85	P: O a , não é? Então o “quadrado” é toda vez que você está multiplicando um número por ele mesmo.
Linha 86	E20: Aí dá o dobro...
Linha 87	P: Aí somado ao dobro da multiplicação do primeiro e do segundo termo, que é esse aqui. Então, aqui não é quadrado!
Linha 88	E20: É o dobro!
Linha 89	P: É o dobro, isso... Aí, depois, se o segundo termo é o b , então $+ b$ ao quadrado.
Linha 90	E20: Sim...
Linha 91	P: E agora? Você consegue arrumar o que fez?
Linha 92	E20: ((Silêncio)) Então... seria... o dobro... Dobro de 5 é 10...

A continuação desse diálogo refere-se à figura 5.13:

c. $(5x + y)^2$

$$25x + 25xy + y^2$$

$$25x^2 + 10xy + y^2$$

$$10x + 10xy + y^2$$

$$25x^2 + 10xy + y^2$$

$$605$$

$$5x^2 + 2.5xy + y^2$$

$$= 25x + 2.5xy + y^2$$

$$= 25x^2 + 10xy + y^2$$

Figura 5.13 – Resposta estudante 20: Atividade 1 - item C (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 195 A 234

Linha 195	P: Olha... É $5x$, não é? Aqui?
Linha 196	E20: Sim...
Linha 197	P: Por que virou 10 aqui?
Linha 198	E20: ((Silêncio))
Linha 199	P: O $5x$ não é elevado ao quadrado?
Linha 200	E20: ((hesitante)) Sim!
Linha 201	P: $5x$ AO QUADRADO não é isso aqui?
Linha 202	E20: 25 então estava certa?! ((tom de indignação))
Linha 203	P: Estava certa, mas por que você achou que é $10x$?
Linha 204	E20: É porque... ((pausa)) Humn... tem alguma... Eu tenho como explicar... ((pausa)) Por causa da adição... Da bendita adição! (rs) Porque, como eles falam... tipo, quando aparece o 2, parece que a gente sempre tem que somá-los... E não dividir ou multiplicar...
Linha 205	P: Aham.
Linha 206	E20: Eu acho que a primeira série ainda está na minha mente um pouquinho... (rs)
Linha 207	P: (rs)
Linha 208	E20: ((silêncio e depois hesitação)) Mas eu achei o valor tão alto...
Linha 209	P: Humn... Eu acho que você está confundindo o que tem que ser elevado ao quadrado. Pense assim: a letra b , você fez certinho. Você não elevou o primeiro termo ao quadrado?
Linha 210	E20: Sim...
Linha 211	P: 3 ao quadrado e você fez aqui: 3×3 que é 9.
Linha 212	E20: Não, espera, então, quer dizer que o $25x$ já é o... resultado?
Linha 213	P: É o resultado, só que aí qual é a diferença do (item) B para o (item) C? Aqui o número 3 está sozinho, né?
Linha 214	E20: Sim... Ele não está acompanhado?
Linha 215	P: Isso. O que acontece quando tem um x acompanhado? O que acontece com esse x ?
Linha 216	E20: ((silêncio e depois hesitação)) Ele não vai virar um número, né?
Linha 217	P: Não, não vai virar um número.
Linha 218	E20: Será que... eu tenho que esquecê-lo?
Linha 219	P: Humn, se você esquecê-lo, vai ficar quanto? Não precisa apagar, pode deixar.
Linha 220	E20: ((fala baixinho: vou deixar aqui só para eu não esquecer...)) ((Silêncio)) Mas... não sei... eu pensei que o x ia continuar... Porque do mesmo jeito que o (item) B continuou...
Linha 221	P: Aham.
Linha 222	E20: ...eu imaginaria que o x também continuaria acompanhado do 25...
Linha 223	P: Ele continua, ele está junto com o 5, então não pode ser abandonado.
Linha 224	E20: Eu vou tentar fazer ele (x) ao quadrado!
Linha 225	P: Isso.
Linha 226	E20: (rs) Mas não daria x de qualquer jeito...
Linha 227	P: Por quê?
Linha 228	E20: Porque... x é igual a x e ele não tem valor exato.
Linha 229	P: É... Mas $x \times x$ tem um valor, não é?
Linha 230	E20: Que é igual a 1? ((ri nervosamente))
Linha 231	P: Não... (rs) Não é 1, porque você não sabe o valor...
Linha 232	E20: ...o valor dele!
Linha 233	P: Aqui você não colocou? Por que y ? Por que y ao quadrado?
Linha 234	E20: ((Silêncio)) Porque é ele multiplicado... por ele mesmo.

Algo interessante ocorre no final desse diálogo: o estudante afirma que a multiplicação de y por y resulta em y^2 . No entanto, tem dúvidas quando a mesma operação é aplicada à variável x . Ou seja, o estudante persiste com o conceito de que o x deve valer 1. Parece-lhe difícil aceitar a ideia de que o x pode ser uma variável como outra qualquer. Ele carrega um valor semântico especial nos problemas.

Há um trecho da entrevista em que esse aluno cita a experiência com equações. Normalmente, utiliza-se muito o x como incógnita de uma equação, o qual se deve descobrir o valor. É possível que esse conceito esteja causando o obstáculo para compreender a propriedade da multiplicação de dois termos algébricos iguais:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 53 A 64

Linha 53	P: Humn... entendi. Tá, então vamos ver. Então pensando no que você resolveu aqui, eu queria que você visse mais uma vez essa parte aqui e olhasse essa expressão. Na primeira explicação, fala assim: o $a + b$, tudo nos parênteses, elevado ao quadrado é igual a a ao quadrado mais $2 \times a \times b + b$ ao quadrado.
Linha 54	E20: Sim.
Linha 55	P: Será que, o que você fez aqui, está representando exatamente o que ele está falando?
Linha 56	E20: ((Silêncio)) É... ((hesitação)) Talvez não...
Linha 57	P: Por quê?
Linha 58	E20: ((Silêncio)) Eu acho que por ter colocado um número, em vez de letra, isso dá uma bagunçada na minha mente...
Linha 59	P: Humn... entendi...
Linha 60	E20: Porque aqui é tudo representado com letra. Aqui ele já coloca números...
Linha 61	P: Sim.
Linha 62	E20: E, pela minha mente, pelo que eu estou (vendo) em equação agora, acho que isso dá uma bagunçada assim, porque tudo na equação tem que, automaticamente, sempre resolver...
Linha 63	P: Aham.
Linha 64	E20: Então... eu acho que deu uma complicada na minha cabeça... (rs)

Observa-se pela figura 5.13 que o estudante foi desenvolvendo vários passos até chegar ao resultado esperado. Foi pedido para que não fossem apagadas as soluções anteriores, para fins de registro do estudo.

Na resolução da atividade 2, na qual pede-se para que os três estudantes explicassem se $(a + b)^2$ é o mesmo que $a^2 + b^2$, nota-se que a explicação dada pelos estudantes 13 e 20 (figuras 5.14 e 5.15, respectivamente) estão fundamentados na Aritmética. Já o estudante 3 (figura 5.16), usou um argumento de estrutura multiplicativa, embora sua resposta não seja suficientemente esclarecedora.

2. Levando em consideração algum dos exemplos de resolução da atividade anterior, tente explicar, com suas próprias palavras, a seguinte pergunta:

$(a + b)^2$ é o mesmo que $a^2 + b^2$?

Não, pois se resolvemos a expressão $a^2 + b^2$ é diferente de $(a+b)^2$

Ex:

$a^2 + b^2 =$	$(a+b)^2 =$
$2^2 + 4^2 =$	$(2+4)(2+4) =$
$4 + 16 =$	$4 + 8 + 8 + 16 =$
$= 20$	$= 36$

Figura 5.14 – Resposta estudante 13: Atividade 2 (estudo final).

2. Levando em consideração algum dos exemplos de resolução da atividade anterior, tente explicar, com suas próprias palavras, a seguinte pergunta:

$(a + b)^2$ é o mesmo que $a^2 + b^2$?

Não, pois a expressão entre parênteses, tem um resultado diferente porque a soma de " $a+b$ " forma um resultado onde é acrescentado o 2, por exemplo " $a^2 + 2ab + b^2$ "

Figura 5.15 – Resposta estudante 20: Atividade 2 (estudo final).

2. Levando em consideração algum dos exemplos de resolução da atividade anterior, tente explicar, com suas próprias palavras, a seguinte pergunta:

$(a + b)^2$ é o mesmo que $a^2 + b^2$?

Não, a expressão $(a+b)^2$ está multiplicando um conjunto pelo mesmo $(a+b) \cdot (a+b)$ e $a^2 + b^2$ é só o quadrado das letras

Figura 5.16 – Resposta estudante 3: Atividade 2 (estudo final).

Nos diálogos a seguir, cada um dos estudantes explica o que pensou baseando-se nas respostas dadas na atividade 1:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 86 A 103

Linha 86	P: Certo. Então você conseguiu provar que eles são diferentes por causa dos resultados, não é? Se você não soubesse os números, qual seria uma outra forma de explicar que elas são diferentes?
Linha 87	E13: Eu não sei. Porque antes a gente poderia até falar que eles são iguais.
Linha 88	P: Humn.
Linha 89	E13: Porque seria... multiplicar o a elevado a 2, então ia dar a ao quadrado, e b elevado a 2 que ia dar b ao quadrado.
Linha 90	P: Aham.
Linha 91	E13: Então acaba ficando assim.
Linha 92	P: Sim.
Linha 93	E13: Se eu soubesse os números.
Linha 94	P: Mas você sabe que, isso aqui, quando você desenvolve, não fica a ao quadrado mais b ao quadrado, não é? Ele tem alguma coisa diferente. O que ele tem de diferente?
Linha 95	E13: Não lembro... Não sei nem como faz...
Linha 96	P: Tenta desenvolver esse a mais b ao quadrado. Quando você desenvolve, qual é o resultado que fica?
Linha 97	E13: Fica a ao quadrado mais $2ab$ mais b ao quadrado.
Linha 98	P: Isso. E qual é a diferença com esse aqui?
Linha 99	E13: Esse aqui já... ((silêncio)) só tem número elevado ao quadrado, então... ((fala baixa))
Linha 100	P: E o outro, ele tem?
Linha 101	E13: Tem... é... tem um... dois números elevados ao quadrado, e tem um que é três termos, que formam um termo.
Linha 102	P: Ah, certo. Que é o...?
Linha 103	E13: Que é o $2ab$.

Observa-se que o estudante 13 (figura 5.14) nem considerou em desenvolver a expressão $(a + b)^2$ e optou por substituir diretamente por números fictícios, para explicar a diferença entre as duas expressões. Isso é uma evidência de que o conhecimento empírico Aritmético é o esquema mobilizado em primeiro lugar, mesmo tendo desenvolvido antes uma atividade semelhante, sem a necessidade de uso dos números. Isso demonstra que, para um novo esquema ser mobilizado, é necessário um longo tempo de contato com atividades similares a esse tipo. Por isso, muitas vezes, há uma crença de que, para aprender Matemática, é necessário resolver muitos exercícios. Na realidade, o treino não deixa de ser importante, mas não pode se tornar o único meio de aprendizado, pois passa a se valorizar apenas a repetição mecânica de exercícios equivalentes.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 324 A 354

Linha 324	E20: “... por exemplo, a ao quadrado mais o dobro de a e b mais b ao quadrado...” Porque, por exemplo, aqui eu acho que não teria “a soma”... Não teria... não multiplicaria a soma desses dois...
Linha 325	P: Certo.

Linha 326	E20: O dobro desses dois.
Linha 327	P: Aham.
Linha 328	E20: Aqui, no caso, só seria a ao quadrado, b ao quadrado e o resultado disso.
Linha 329	P: Aham.
Linha 330	E20: E não... como diz aqui, colocaria primeiro... faria a ao quadrado... humn... mais eles dois, o dobro deles e b ao quadrado... Por isso eu acho que... não é igual... o resultado.
Linha 331	P: Isso. Está certo, não é igual o resultado. Agora você consegue explicar qual é o maior? Qual dá o resultado maior?
Linha 332	E20: O resultado maior?
Linha 333	P: É.
Linha 334	E20: ((Silêncio)) Poxa... ((Silêncio)) eu acho que é a ao quadrado mais b ao quadrado.
Linha 335	P: Humn, por quê?
Linha 336	E20: Porque eu sei que... eles dois vão dar um resultado...
Linha 337	P: Aham.
Linha 338	E20: Que depois, esse resultado, vai ser somado novamente para dar outro resultado. Talvez... Por exemplo, aqui vai dar um... aqui vai dar um resultado...
Linha 339	P: Aham.
Linha 340	E20: E aqui vai outro.
Linha 341	P: Aham.
Linha 342	E20: Vou somá-los. b... b... Não, espera! ((Silêncio)) Está faltando alguma coisa... ((começa a murmurar as contas: a ao quadrado + b ao quadrado...)) Sim! Aqui vai dar um resultado... E aqui vai dar outro...
Linha 343	P: Certo.
Linha 344	E20: Eles vão ser somados e vai dar... Espera! Então... qual é... qual é a DIFERENÇA? A única diferença é que aqui dá o dobro...
Linha 345	P: Aham.
Linha 346	E20: Então acho que pelo fato de ter número acrescentado acho que o $a + b$, entre parênteses, ao quadrado, daria um resultado maior.
Linha 347	P: Isso.
Linha 348	E20: Pelo fato deles colocarem em dobro...
Linha 349	P: Isso.
Linha 350	E20: Sim.
Linha 351	P: Então tem um termo a mais aí, né?
Linha 352	E20: É.
Linha 353	P: Isso, perfeito.
Linha 354	E20: Por isso mesmo que eu acho, pronto! (rs)

No caso do estudante 20, por sua fala é possível notar uma insegurança na resposta apresentada, diferente do estudante 3. Ele explica que, intuitivamente, as duas expressões têm resultados diferentes, mas não sabe dizer exatamente o motivo. Quando se perguntou qual das duas apresenta um resultado maior, ele passa a fazer o teste empírico comparando o desenvolvimento das duas expressões e, finalmente, percebe que uma delas apresenta dois termos idênticos, mas com um termo a mais do que o outro e, portanto, a expressão $(a + b)^2$ é o que apresenta um resultado maior. Desse modo, as duas expressões são diferentes. Aparentemente, o estudante 20 (figura 5.15) parece ainda influenciado pela atividade 1, diferente do estudante 13 (figura 5.14), que ignorou completamente o desenvolvimento algébrico e partiu direto para uma explicação Aritmética. Embora o novo invariante operatório, desenvolvido na atividade 1, não esteja ainda totalmente evidente no estudante 20, há uma diferença nos níveis desses dois estudantes.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 88 A 108

Linha 88	E3: Ahn... $a + b$ ao quadrado, como eu falei, está multiplicando o conjunto $(a + b)$. É $(a + b) \times (a + b)$. E $a^2 + b^2$ é só a ao quadrado + b (ao) quadrado, não tenho multiplicação de $a \times a \times b$.
Linha 89	P: Humn... certo. Então, O que está faltando aí? Tem alguma coisa faltando em um dos dois?
Linha 90	E3: Ah sim, humn... aqui, não tem... parênteses.
Linha 91	P: Só os parênteses?
Linha 92	E3: Quando o... quadrado está fora do parênteses, ele está multiplicando tudo que está dentro. Como aqui não tem, está multiplicando só... esse... termo.
Linha 93	P: Aham. Mas quando eu desenvolvo esse $a + b$ que está nos parênteses ao quadrado, não tem uma parte que fica bem parecido com o a ao quadrado + b ao quadrado?
Linha 94	E3: Fica mas... falta o meio...
Linha 95	P: Humn... Falta o meio... Tá... e por que será que acontece isso?
Linha 96	E3: ((Silêncio)) Ué? Aqui tá multiplicando... ((Silêncio))... esse vezes esse, esse vezes esse, esse vezes esse e esse vezes esse. E esse só está...
Linha 97	P: Aham.
Linha 98	E3: ...elevando ao quadrado do primeiro... Não tem multiplicação...
Linha 99	P: Certo.
Linha 100	E3: Então não tem como extrair um outro termo...
Linha 101	P: Aham... Agora, se a gente pensar assim: vamos supor que esse a e b sejam números, tá?
Linha 102	E3: Certo.
Linha 103	P: Você pode pensar em algum número. Qual dá o resultado maior? O $a + b$ elevado ao quadrado? ou a ao quadrado + b ao quadrado?
Linha 104	E3: ((Silêncio)) Imaginado que... o a seja 2 e o... b seja 16. Dá 4... oh! dá... o b é 4. Aí fica 16 e os dois ficam 4, então dá 20. O a ao quadrado + b quadrado. Agora... se for o mesmo... $2 + 4$ ficaria 6. Só que, como não tem... letra, aí a gente somaria aqui dentro mesmo e depois elevaria ao quadrado. Então ficaria o $2 + 4$... 6. 6 elevado ao quadrado é 12 e nesse aqui deu 20. Então esse aqui é maior!
Linha 105	P: Aham... 6 elevado ao quadrado é...
Linha 106	E3: Ah não! $6 \times 6 = 36$.
Linha 107	P: Ah... ((admiração positiva))
Linha 108	E3: Ah! Esse aqui é maior.

Por último, o estudante 3 parece convicto de que o motivo das duas expressões não serem iguais seria o fato de uma apresentar um termo a mais que a outra expressão. Ao ser questionado sobre o caso dessas expressões serem diferentes, ele afirma que seria a ausência dos parênteses em uma delas. Insistiu-se para que ele desenvolvesse melhor a sua resposta e, com ligeira irritação na fala, responde que quando uma soma está dentro dos parênteses, é necessário que todos os termos sejam multiplicados entre si, ou seja, ele se refere à distributiva resultante da multiplicação dos $(a + b)(a + b)$ resultando em $a^2 + 2ab + b^2$ enquanto a expressão $a^2 + b^2$ é resultante da multiplicação de $a \cdot a + b \cdot b$. Em um momento do diálogo, ele afirma que “*falta o meio*” na segunda expressão, demonstrando que compreendeu a diferença entre as duas expressões pela ausência de um termo. A título de curiosidade, já que não era o objetivo dessa atividade, perguntou-se qual delas apresenta um resultado maior. Indicou-se para substituir os termos por números fictícios, assim como fez o estudante 13. Assim, por meio dos cálculos, o estudante concluiu que seria a expressão que produz o trinômio.

Embora provar algebricamente já teria sido suficiente, por ter feito uma atividade similar imediatamente antes, os três estudantes só se convenceram utilizando o modelo da Aritmética.

A melhor sugestão para resolver a atividade 2 seria usar a representação geométrica de produto notável apresentada como exemplo na atividade 1 (figura 5.1). Verifica-se que, na figura apresentada, os quadrados de lado a e b estão contidos dentro do quadrado de lado $a + b$. Logo, $(a + b)^2$ é maior que $a^2 + b^2$ ⁸. Embora essa solução geométrica pareça mais intuitiva, nenhum dos três estudantes sentiu-se confortável em utilizá-la. Segue suas respectivas falas a respeito da abordagem geométrica:

Eu entendi, mas... é... por exemplo, eu tenho... uma amiga e ela não é muito boa em geometria. Então, eu acho que isso aí só ia confundir mais (Estudante 3).

Dificuldade mesmo... é geometria... tenho muita dificuldade. Vamos dizer que eu não tenho muita dificuldade em álgebra e nem em equação. É questão de treinar mesmo, lembrar, porque eu esqueço as coisas (de maneira) muito fácil (Estudante 20).

É. É fácil. Mas eu acho que é mais fácil de... complicar. De se confundir um pouquinho. Que pode ser que chegue alguém e eu acabe somando em vez de multiplicar (Estudante 13).

Muitas vezes, interpreta-se que a Geometria é mais intuitiva que a Álgebra, por utilizar representações visuais, como figuras e *esquemas*⁹, para a compreensão de propriedades matemáticas. No entanto, por meio das falas desses três alunos, é possível inferir que essa interpretação nem sempre é verdadeira. Se a abordagem mais utilizada é a algébrica, o estudante tenderá a associar os seus esquemas, ou até mesmo os algoritmos, no raciocínio algébrico. Por isso, ressalta-se a importância de, na medida do possível, apresentar uma variedade de interpretações e abordagens na resolução de problemas matemáticos.

⁸ Aqui estamos considerando apenas os valores de a e b positivos maiores que zero, já que estamos tratando de medidas.

⁹ Nesse caso, referem-se aos esquemas como esboços de imagens, não no sentido de atividade cognitiva do sujeito, portanto serão utilizadas a fonte itálica para diferenciá-la dos esquemas cognitivos.

5.3.1.2 Modelo 2 - Geometria

No estudo piloto, foi constatado que muitos alunos ainda confundem o conceito de área e perímetro de uma figura bidimensional, mesmo nos anos finais do Ensino Fundamental. Inicialmente, é necessário que o estudante compreenda esses conceitos para posteriormente aplicar os seus respectivos cálculos. Porém, é muito comum praticar-se a memorização de uma série de fórmulas, sem pensar necessariamente nas propriedades que cada figura geométrica possui. Por exemplo, no caso do quadrado, ele é um retângulo com uma característica especial: tanto a medida de sua base quanto a da altura são iguais. Por esse motivo, a palavra **quadrada** é utilizada também para outros tipos de representações na Matemática, tais como: elevar ao quadrado ou números quadrados.

Por isso, nesta atividade 3, resolveu-se fazer as seguintes perguntas aos alunos. O intuito era que eles fizessem a associação desses conceitos além da Geometria:

- A. Qual a principal característica sobre os lados de um quadrado?*
- B. Desenhe 3 exemplos de quadrados de medidas diferentes.*
- C. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.*

No item *a*, era fundamental verificar se os alunos compreendem a principal característica de um quadrado. Nesse caso, todos os estudantes deste grupo responderam corretamente sem maiores problemas.

Já no item *b*, pediu-se para que os alunos desenhasssem três quadrados de medidas diferentes. Essa pergunta visava a verificar se os estudantes já possuem um invariante operatório desenvolvido em relação à noção de representação de uma figura geométrica, de medida fictícia no papel. Os três estudantes desenharam as respectivas figuras que, para uma análise superficial, poderia-se inferir que os alunos conseguem representar quadrados de medidas diferentes. No entanto, observa-se uma diferença entre os diálogos de cada um deles quando questionado a respeito:

Figura 5.17 – Resposta estudante 3: Atividade 3 - item B (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 127 A 136

Linha 127	P: Aham. Mas por que você desenhou dessa forma?
Linha 128	E3: ((Silêncio)) Bom... quando alguém passa um exercício... na lousa, por exemplo, ele... faz um quadrado e coloca que tem 10 metros. ((Silêncio)) Um lado.
Linha 129	P: Aham.
Linha 130	E3: Obviamente, você desenhando o quadrado, na lousa ou num caderno, não tem 10 metros. É... o desenho, é... figurativo.
Linha 131	P: Humn... certo... Então, não importa...
Linha 132	E3: ...não importa o tamanho que eu desenhei. Importa (o valor da) medida que eu coloquei. Por exemplo, esse aqui eu coloquei... ((pausa)) O de 2 e 3 metros têm uma pequena diferença... de tamanho.
Linha 133	P: Aham.
Linha 134	E3: O de 1 metro é um pouquinho menor... que o de 2, (que é) um pouco... maior... que o de 3, em relação ao segundo. Mas isso não significa que ele tenha 1 metro e que o outro tenha 2 metros, eu poderia colocar a medida que eu quisesse.
Linha 135	P: Certo... porque é só uma representação então?
Linha 136	E3: Sim.

Figura 5.18 – Resposta estudante 13: Atividade 3 - item B (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 114 A 149

Linha 114	P: Certo. E aí você desenhou três exemplos de quadrados. Por que você desenhou dessa forma?
Linha 115	E13: Porque é... todos os quadrados possuem os lados do mesmo tamanho.
Linha 116	P: Aham.
Linha 117	E13: Então, como eles possuem o mesmo tamanho, é... não importa o que você faz, se eu aumentar um lado vai aumentar do outro.
Linha 118	P: Aham.
Linha 119	E13: Então eu pus um que é... 5 por 5 e outro que é 10 por 10, e o outro é 2,5 por 2,5.
Linha 120	P: Aham.
Linha 121	E13: Porque não importa que você mude, se é o quadrado, vai continuar sendo igual os lados.
Linha 122	P: Certo. E qual é a unidade desses quadrados? A medida desses quadrados?
Linha 123	E13: Seria 5... ((silêncio))
Linha 124	P: Por exemplo, é 5... o que? Porque quando a gente mede a gente tem uma unidade, não é?
Linha 125	E13: 5 ao quadrado. Mede o quadrado.
Linha 126	P: Não. A unidade. O que é unidade? É (unidade de) centímetros, metros, quilômetros...
Linha 127	E13: Ah, tá. ((silêncio)) Esse daqui? Seria em... centímetros.
Linha 128	P: É centímetros? Por que você escolheria centímetros?
Linha 129	E13: Porque é o que... seria, que cabe dentro da folha. De acordo.
Linha 130	P: Humn. E se...
Linha 131	E13: Mas poderia representar tipo um... um prédio.
Linha 132	P: Aham.
Linha 133	E13: O teto de um prédio. Então aí já seria em metros.
Linha 134	P: Certo.
Linha 135	E13: Aí se fosse uma cidade, já é... já é quilômetros.
Linha 136	P: Certo. Aí você teria...?
Linha 137	E13: Medidas diferentes.
Linha 138	P: Medidas diferentes, mas que estão representadas... no papel?
Linha 139	E13: É. No papel.
Linha 140	P: É. Só que ela não significa ter exatamente a mesma medida, não é?
Linha 141	E13: Sim.
Linha 142	P: Então, por exemplo, a planta de uma casa...
Linha 143	E13: ... É diferente de um... de um apartamento ou de uma escola.
Linha 144	P: Sim. Aí, se eu quisesse desenhar a planta da sua casa, que tem metros de comprimento, no papel, você precisaria de metros de papel para desenhá-la?
Linha 145	E13: Não.
Linha 146	P: Tá.
Linha 147	E13: Poderia representar... aqui em centímetros, mas formando um metro. Usando uma medida de metro, só que em centímetros.
Linha 148	P: Certo. Então, você faz uma correspondência?
Linha 149	E13: Sim.

Figura 5.19 – Resposta estudante 20: Atividade 3 - item B (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 357 A 395

Linha 357	P: Então você explicou qual a característica dos lados de um quadrado...
Linha 358	E20: Para mim, tem sempre... por exemplo, a parte horizontal é do mesmo tamanho e a parte vertical também é.
Linha 359	P: Aham.
Linha 360	E20: Por isso, na B, eu já fiquei indecisa se era (para) pegar o de a ou não.
Linha 361	P: Humn...
Linha 362	E20: Talvez acho que medidas diferentes podem ser... maior, menor, médio.
Linha 363	P: Aham.
Linha 364	E20: Então, eu... me... me inspirei nesse... nesse... nesse exemplo...
Linha 365	P: No exemplo 3, aham.
Linha 366	E20: Para responder o (item) B, porque eu achava que, realmente, não... não tinha como, mas tem como. Porque... até que fiquei olhando partes da sala...
Linha 367	P: Aham.
Linha 368	E20: Porque se é MUITO grande... horizontalmente... Vira um retângulo.
Linha 369	P: Aham.
Linha 370	E20: Tanto vertical, tanto horizontal...
Linha 371	P: Aham.
Linha 372	E20: Então pode virar um retângulo, mas, mesmo assim, tem tamanhos diferentes de quadrado... Por exemplo, o nosso assento é diferente do tamanho de uma borracha quadrada...
Linha 373	P: Aham.
Linha 374	E20: São medidas diferentes. Então eu acho impossível. Por isso que eu disse que... Aqui, vamos dizer que não é “realmente”... É mais a figura mesmo... é um exemplo só...
Linha 375	P: Tá, você colocou aí um quadrado de 15 metros...
Linha 376	E20: ... 15 metros, 1 metro e 5 metros...
Linha 377	P: Isso...
Linha 378	E20: É só apenas um exemplo, só para mostrar que eles são de diferentes tamanhos...
Linha 379	P: Aham. E você está falando aí que “não mede 15m de verdade”, não é?
Linha 380	E20: Sim... ((hesitante))
Linha 381	P: É só uma representação?
Linha 382	E20: ((concorda afirmando)) É, é.
Linha 383	P: Certo. Então, as características do quadrado, só para lembrar aqui, são todos os lados que têm a medida igual, certo? Então não importa se você colocou aqui a nomenclatura, em cima ou na lateral... ou aqui, certo?
Linha 384	E20: ((Silêncio)) Espera! Todos os lados são iguais? Isso que você está falando?
Linha 385	P: É. Essa é a característica do quadrado ou não?
Linha 386	E20: ((Silêncio))
Linha 387	P: Você falou, na sua explicação, que horizontalmente eles têm a mesma medida e verticalmente eles têm a mesma medida, mas, e entre eles? Entre o vertical e o horizontal? Eles têm a mesma medida?

Linha 388	E20: Entre... horizontal e vertical?
Linha 389	P: É.
Linha 390	E20: ((Silêncio)) Têm. Eu acho que sim. Acho que é uma característica muito forte do quadrado porque eu nunca vi um quadrado que em cima ele seja pequeno e dos lados maiores...
Linha 391	P: Porque se ele for assim...
Linha 392	E20: ...ele vira outro... outra forma geométrica...
Linha 393	P: Que é o...?
Linha 394	E20: ((hesitando)) Retângulo?
Linha 395	P: Retângulo! Exatamente...

Analisando-se os três diálogos desses estudantes, pode-se indicar diferentes níveis de invariantes operatórios cujos detalhes podem ser vistos no quadro 5.11. Em função do nível mais predominante para o menos, o estudante 3 é o que possui mais itens que representam invariantes operatórios, dentro do nível de representação algébrica ou geométrica, tais como:

- I. Reconhecimento de uma figura geométrica por meio de suas nomenclaturas;
- II. Representação dessa figura respeitando essas características;
- III. Noção de equivalência em escala representada por meio das unidades de medida.

No caso do estudante 13, é possível notar que também há a presença desses três itens anteriores, exceto pelo fato de que se confundiu ao explicar a definição de unidade com o próprio conceito de quadrado.

Já no caso do estudante 20, há a presença desses três itens, mas nota-se uma insegurança para explicar as suas respostas, comparado aos outros dois colegas. Observa-se que o estudante tem a intuição de que há quadrados de tamanhos diferentes, mas existe uma hesitação para definir qual é a principal característica de um quadrado. Ele apenas afirma que, se os lados tiverem medidas diferentes, ele não pode ser chamado de quadrado e passaria a ser um retângulo.

É válido reforçar que, segundo a definição, o quadrado também é um retângulo, mas com características especiais. Um retângulo genérico possui as medidas da base e da altura diferentes. Portanto, um retângulo nada mais é do que um quadrilátero cujos ângulos de sua base e altura formam noventa graus. Não se entrou nessa explicação com o estudante 20, naquele momento da entrevista, para não desviar do objetivo principal da atividade, que era definir o que são números quadrados. Mas, ressalta-se este comentário para alertar os professores de Matemática que estiverem trabalhando tais conceitos geométricos com seus alunos, para fortalecer essas definições, pois são dúvidas muito comuns entre os estudantes.

Por fim, no item C dessa atividade 3, após definir o conceito de quadrado, pela explicação geométrica, os estudantes deveriam exemplificar três números quadrados.

Aqui, há um salto da compreensão geométrica para o conceito algébrico, no qual os estudantes devem associar as características do quadrado para generalizar a definição de um número quadrado. Deve ser lembrado que a medida de uma área cuja unidade é representada por unidade (u) quadrada (u^2), sendo a unidade (u) podendo ser representada por centímetros, metros e seus múltiplos.

Portanto, os alunos deveriam representar com números que resultam de uma multiplicação de dois termos iguais. Observem-se as suas respostas:

c. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

Figura 5.20 – Resposta estudante 3: Atividade 3 - item C (estudo final).

c. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.

$$4^2 = 16$$

$$10^2 = 100$$

$$5^2 = 25$$

Figura 5.21 – Resposta estudante 13: Atividade 3 - item C (estudo final).

c. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.

$$4, 8, 16.$$

$$16, 9, 36$$

Figura 5.22 – Resposta estudante 20: Atividade 3 - item C (estudo final).

Com exceção do estudante 20 que, no primeiro momento, equivocou-se na representação de um dos números, os outros dois responderam corretamente. No seguinte trecho do diálogo, o estudante explica qual foi o seu raciocínio:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 396 A 422

Linha 396	E20: ... agora fiquei meio indecisa com esse, porque... eu tinha... eu realmente aprendi sobre o número... números quadrados. Só que... eu não tenho a mínima noção do que seja... Eu presumi que seria... isso...
Linha 397	P: Tá... Aham. Deixa eu só dar uma pausa rapidinho.

(A entrevista foi interrompida para recolher a atividade de outro aluno)

Linha 398	P: ((continuando a entrevista depois da pausa)) Bom, então qual a sua dúvida aqui?
Linha 399	E20: Números quadrados... Eu acho que, não sei por que, para mim é todo número multiplicado por 2. O resultado multiplicado por 2.
Linha 400	P: Aham.
Linha 401	E20: Eu não sei se eu estou certa...
Linha 402	P: Humn, está...
Linha 403	E20: Mas eu... a única coisa que me vem à cabeça são os resultados da... da... de todo número multiplicado por... De todo número não, né? Quero dizer, que esteja na tabuada do 2.
Linha 404	P: Aham...
Linha 405	E20: Para mim, é um número quadrado, não sei porquê... Por ser par... Não sei... Não sei explicar...
Linha 406	P: Pode ser, pode ser.
Linha 407	E20: Pode ser...
Linha 408	P: Aham. É a mesma dúvida da primeira atividade. Lembra quando eu te expliquei a diferença entre o quadrado e o dobro?
Linha 409	E20: ((hesita um pouco)) Sim... sim!
Linha 410	P: Então, aí você...
Linha 411	E20: ...será que seria o dobro isso aí? ((Pausa)) Sim, eu fiz o dobro!
Linha 412	P: Sim, você fez o dobro. Para ser o quadrado seria como?
Linha 413	E20: ((Silêncio)) Número multiplicado por ele mesmo...
Linha 414	P: Ah... então está certo. Então corrija aqui embaixo. Não precisa apagar o que você fez. Quais seriam os três exemplos de números quadrados?
Linha 415	E20: Tipo... Ahn... Vamos lá. ((pausa)) 4×4 é 16.
Linha 416	P: Aham.
Linha 417	E20: Então, um eu acertei! (rs)
Linha 418	P: Um você acertou, ok.
Linha 419	E20: Então... vou fazer aqui vai... Vou fazer de outro... um 9, por exemplo.
Linha 420	P: Isso!
Linha 421	E20: Que... é o quadrado de 3. E... deixo pensar... ((Silêncio)) 36! Que é o resultado do quadrado de 6!
Linha 422	P: OK, perfeito, 36, isso aí!

De acordo com sua explicação, o estudante 20 confundiu a definição de *quadrado* com o de *dobro*. Equívoco já cometido em atividade anterior. Ao fazê-lo recordar do que havia feito antes, rapidamente ele corrige o erro e responde corretamente, representada pela segunda linha

da sua resposta, na figura 5.22. Sempre que possível, pediu-se aos participantes para que suas respostas não sejam apagadas, para que permanecesse o registro para análise posterior.

É interessante notar que, em termos de invariante operatório, um conhecimento de uma área (no caso, a Geometria) não se transfere imediatamente para outra (a Álgebra, por exemplo). Por isso, é interessante o professor de Matemática trabalhar com conteúdos de diferentes unidades temáticas¹⁰ (Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística), não privilegiando apenas uma dessas unidades. O processo de construção dos esquemas e invariantes operatórios é longo e, por isso, o aluno deve ser constantemente desafiado e apresentado a diferentes tipos de raciocínio e conceitos, para que possa construir uma diversificação de habilidades necessárias para resolução de problemas.

Por exemplo, no estudo piloto, aplicado em 2016 com esses mesmos estudantes, foi possível verificar as dificuldades de compreensão do conceito de área e volume em uma das atividades, conforme os exemplos a seguir:

Figura 5.23 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

¹⁰ Esta nomenclatura é utilizada na atual BNCC (Base Nacional Curricular Comum) de 2017. No PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) de 1997, era conhecido como *bloco de conteúdos* e categorizados da seguinte forma: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Série VII – Os problemas a seguir são semelhantes, mas seus resultados são representados de formas diferentes. Apresente a resolução para cada um deles.

- a. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de 4 quartos iguais a esse?

Figura 5.24 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

Série VII – Os problemas a seguir são semelhantes, mas seus resultados são representados de formas diferentes. Apresente a resolução para cada um deles.

- a. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de 4 quartos iguais a esse?

A minha lógica foi multiplicar a altura $\times 4$, comp $\times 4$, 4 que no caso são a quantidade de quartos. Que no caso deu 24 comp e 12 m de altura.

Figura 5.25 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

Na resolução dos três estudantes é possível observar que o conceito de volume não está consolidado. Embora o estudante 13 tenha conseguido esboçar a figura em questão, e identificado as respectivas dimensões, não há uma evidência de compreensão do conceito de volume. Inclusive, há um equívoco sobre o cálculo de área, que também não está completa. Caso a atividade requeresse esse cálculo, uma das formas de calcular a área total dessa figura geométrica seria calcular cada uma de suas seis faces e somá-las. No caso do paralelepípedo, as faces paralelas entre si possuem a mesma área¹¹ (superior com inferior, direita com esquerda, traseira com frontal), resultando em três pares de faces paralelas. Assim, seria suficiente calcular a área de uma das faces de cada par e multiplicar por dois. Por fim, somar a área de cada par para obter a área total.

No caso desse paralelepípedo, em especial, é composto por quatro faces de mesma área ($3\text{m} \times 6\text{m} = 18\text{m}^2$) e mais duas faces paralelas entre si, com outra medida de área ($3\text{m} \times 3\text{m} = 9\text{m}^2$). Logo, bastaria multiplicar a primeira área por quatro ($4 \times 18\text{m}^2 = 72\text{m}^2$) e a outra por

¹¹ No caso do cubo ou hexaedro, todas as faces possuem a mesma área.

dois ($2 \times 9 \text{ m}^2 = 18 \text{ m}^2$). Somando esses resultados obtém-se uma área total de 90 m^2 . Resultado não evidenciado em nenhuma das resoluções.

Ainda no estudo piloto, aplicaram-se as seguintes perguntas-modelo para esses estudantes. Não necessariamente foram aplicadas todas elas para cada um deles.

H2 ¹²	VII	C	Como você calcula a área de um retângulo?
H2	VII	C	Como você calcula o perímetro de um retângulo?
H2	VII	C	Você consegue explicar a diferença entre um quadrado e um cubo?

A seguir, observam-se as respostas¹³ dos estudantes 13 e 20¹⁴, respectivamente, com a pergunta-modelo que foi aplicada a cada um deles.

H2	VII	C	Como você calcula o perímetro de um retângulo?
----	-----	---	--

Figura 5.26 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

H2	VII	C	Como você calcula a área de um retângulo?
----	-----	---	---

Figura 5.27 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

H2	VII	C	Como você calcula a área de um retângulo?
H2	VII	C	Você consegue explicar a diferença entre um quadrado e um cubo?

¹² Essa codificação segue os detalhes do quadro que se encontra no Anexo B.

¹³ Para fins de comparação de suas resoluções, pediu-se aos estudantes que as respostas posteriores fossem complementadas no mesmo local, sem apagar a anterior. Nas figuras estão destacadas apenas as respostas correspondentes à pergunta-modelo.

¹⁴ O estudante 3 não respondeu essas perguntas-modelo.

Figura 5.28 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade A – Série VII (estudo piloto).

No caso do estudante 13 (Figura 5.26), observa-se que o perímetro - medida de um contorno de uma figura geométrica plana - é calculado como se fosse a área. Assim, percebe-se que nem o conceito de área nem o de perímetro estão claros para aquele aluno.

Já na resposta do estudante 20 (Figuras 5.27 e 5.28), não fica claro que tipo de associação faz ao afirmar “*comprimento com comprimento e largura com largura*”. Na terceira tentativa, ao ser questionado novamente com a mesma pergunta, afirma genericamente “*pela altura e largura*”. No entanto, ao ser questionado se saberia distinguir a natureza dimensional do quadrado e do cubo, ele responde corretamente. Assim, o aluno parece saber demonstrar a distinção entre essas duas figuras geométricas, não a tratando como figuras equivalentes. Todavia, saber essa distinção não foi suficiente para aplicar outros conceitos como área, perímetro e volume, como é possível notar em sua resposta na figura 5.25.

Comparando, portanto, os esquemas mobilizados por esses três estudantes, concluiu-se que são diferentes inclusive em seus invariantes operatórios. Por exemplo, o estudante 13 é capaz de visualizar o esboço dessa figura geométrica em questão.

Já o estudante 3 não demonstrou nenhum esboço, mas parece mobilizar algum esquema de multiplicar a área da base pela altura, que é a forma de calcular o volume de um prisma, e o paralelepípedo também é um prisma. No entanto, acaba multiplicando essa área por dois e, por último, multiplicando por quatro.

Por fim, o estudante 20 considerou as dimensões como se fossem um objeto, ainda considerando apenas duas delas (comprimento e altura), multiplicando cada uma por quatro, apresentando como resposta (figura 5.25), respectivamente, 24 m e 12 m. Assim, não é possível observar a mobilização de um esquema que demonstre a compreensão do aspecto tridimensional da figura geométrica em questão.

5.3.1.3 Modelo 3 – Classes e ordens

Um dos primeiros algoritmos aprendidos nas séries iniciais do Ensino Fundamental é o da soma. Eles são popularmente conhecidos como “continhas” ou “conta armada”, como no exemplo da atividade 4:

O sistema numérico decimal é composto com algarismos de 0 a 9 e os seus agrupamentos são feitos de 10 em 10.

Observe a casa da unidade desta conta:

$$\begin{array}{r} 39 \\ + 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

Em termos práticos, isso significa que 39 são formados por 3 dezenas e 9 unidades. Se somamos com 3 unidades, o resultado é formado por 4 dezenas e 2 unidades. Pois cada dezena representa 10.

Partindo dessa explicação, tente explicar porque usamos o algoritmo do “sobe 1” quando obtemos resultados maiores que 9 na soma de uma das casas.

Embora os algoritmos estejam presentes, de alguma forma, desde cedo no currículo de Matemática dos educandos, poucos realmente sabem, de forma consciente, o motivo pelo qual aquele algoritmo funciona.

Por isso, elaborou-se essa atividade para que os estudantes pudessem expressar, com suas próprias palavras, as regras do algoritmo da soma. Classificou-se esse modelo de **classes e ordens**¹⁵ por ser justamente o conceito exigido para sua explicação.

No estudo piloto, foi aplicada uma atividade similar na qual os estudantes eram desafiados a completarem os dígitos faltantes na conta apresentada:

¹⁵ No sistema de numeração decimal, cada algarismo, contado da direita para a esquerda, representa uma ordem. E o agrupamento composto pela ordem da unidade, dezena e centena é chamado de classe.

Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma.

$$\begin{array}{r} 4 \quad _ \\ + \quad _ \quad _ \quad 2 \\ \hline _ \quad _ \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Na primeira tentativa, poucos conseguiram resolver. Somente com a introdução de uma *pergunta-modelo*, alguns foram capazes de completar a atividade.

É interessante salientar que, no estudo piloto, as habilidades exigidas (raciocínio lógico e algébrico) foram um pouco além desta atividade 4 que será analisado em sequência.

ESTUDANTE 3:

Antes de partir para a análise da resolução deste estudante, é necessário salientar que houve um problema técnico nesta atividade, quando foi aplicado no primeiro dia do estudo piloto.

Os espaços vazios do resultado da conta (correspondendo à ordem da centena e do milhar) não apareceram na impressão, como é possível observar na figura 5.29. Isso pode ter confundido muitos alunos, em um primeiro momento. Já no segundo dia, os espaços faltantes foram completados e o equívoco esclarecido aos estudantes. Ainda assim, poucos conseguiram resolver essa atividade.

Partindo para a análise das respostas do estudante 3, pode-se observar que, na figura 5.29, ele chegou muito perto da resposta correta. Imaginou-se, inicialmente, que o problema da impressão tenha dificultado a resolução. Por isso, na sua segunda tentativa de resolução, foi apresentada apenas uma orientação para concluir o raciocínio conforme iniciado na figura 5.29. Para os demais estudantes, aplicaram-se as seguintes *perguntas-modelo*:

H2	IX	A	Relembre o processo aditivo. Qual o resultado desta conta $18 + 2$? Agora tente pensar nesta conta armada como no exercício.
H2	IX	A	Que número somado a 2 resulta em um outro que termina com dígito 1?

b. Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma.

$$\begin{array}{r}
 10 + (-9) = 1 \quad 49 \\
 + (-9) \quad \quad \quad + (-152) \\
 \hline
 49 + \quad \quad \quad 49 \\
 \quad \quad \quad 49 \quad 49 \\
 \quad \quad \quad 03 \quad 01
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 49 \\
 + 52 \\
 \hline
 101
 \end{array}$$

Figura 5.29 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

b. Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma.

$$\begin{array}{r}
 10 + (-9) = 1 \quad 49 \\
 + (-9) \quad \quad \quad + (-152) \\
 \hline
 49 + \quad \quad \quad 49 \\
 \quad \quad \quad 49 \quad 49 \\
 \quad \quad \quad 03 \quad 01
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 49 \\
 + 52 \\
 \hline
 101
 \end{array}$$

Figura 5.30 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

Já no estudo final, o estudante 3 apresentou uma explicação superficial do algoritmo da soma, na qual se utilizou do recurso esquemático para demonstrar o seu raciocínio, conforme é possível observar na figura 5.31.

Figura 5.31 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade 4 (estudo final).

Por isso, partiu-se para um diálogo para tentar compreender outros invariantes operatórios mobilizados pelo estudante nessa atividade.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 139 A 162

Linha 139	P: (...) Então, vamos para a atividade 4, que é um sistema métrico decimal. O que você achou dessa atividade?
Linha 140	E3: ((Silêncio)) Ah.. eu... ((pausa)) nunca tive dificuldade em soma.
Linha 141	P: Aham.
Linha 142	E3: Então eu sempre entendi que não dava para... assim baixar o 1... porque, se não, aumentaria... uma casa.
Linha 143	P: Certo. Porque lembra que quando você está lá no Ensino Fundamental I, eles sempre falam: "Sobe..."
Linha 144	E3: ...sobe 1, sobe 2, sobe 3...
Linha 145	P: Mas porque esse "sobe 1(um)"?
Linha 146	E3: ((Silêncio, tenta falar alguma coisa, mas pausa e respira profundamente)) É difícil de explicar...
Linha 147	P: Aham.
Linha 148	E3: Eu não sei fazer...
Linha 149	P: Pode tentar explicar da (sua) forma assim... Eu vejo que você fez um esquema aqui, não é? Falando que não pode ficar 2 números aqui em baixo...
Linha 150	E3: É, porque aqui (é) dezena e passa para centena.
Linha 151	P: Certo... senão, ficaria 312 o resultado, não é? Se você colocasse o 1 do lado...
Linha 152	E3: Sim.
Linha 153	P: ...tá, então, por isso, tem que subir 1. Mas é justamente isso?
Linha 154	E3: ...Isso é o que você quer que eu explique.
Linha 155	P: É... Por que a gente usa essa notação? É porque o nosso sistema, normalmente, é dividido em dezenas. Certo?
Linha 156	E3: Sim.
Linha 157	P: ...que é 10 em 10. Mas, por exemplo, se fosse dividido de 20 em 20 aí seria um outro sistema. Você não subiria o 1, mas a cada 20. Então, toda vez que você tiver até 20, você poderia colocar do lado. ((Pausa)) Por exemplo, seria um outro sistema de soma e isso funciona para a regra de agrupar de 10 em 10, por isso que a gente divide as casas em unidades, dezenas, centenas, milhar...
Linha 158	E3: Sim.

Linha 159	P: E é por isso que a gente faz esse algoritmo. Vamos supor que a gente não soubesse armar essa conta. Como que você faria essa conta de soma sem armar?
Linha 160	E3: ((Respira fundo)) É que $39 + 3$ é um número pequeno, então dá para resolver de cabeça.
Linha 161	P: Isso.
Linha 162	E3: Mas, se fosse um número maior... ((Silêncio))

É possível observar que, por meio desse diálogo, o estudante é capaz de aplicar o algoritmo, mas não consegue explicar, de forma concisa, por qual motivo esse algoritmo é aplicado dessa maneira. Portanto, foi necessário sugerir outros exemplos para que ele pudesse discorrer, com mais detalhes, o seu pensamento. Veja-se a continuação do diálogo. A figura 5.32 representa a sua resolução:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 163 A 195

Linha 163	P: Por exemplo, se fosse $143 + 521$.
Linha 164	E3: Humn... ((Silêncio)) Não pode usar calculadora, não é? (rs)
Linha 165	P: Não... Você pode até rabiscar, desde que a regra seja não armar a conta. ((Pausa)) Como você faria essa conta? Se você quiser até anotar para fazer...
Linha 166	E3: Tá bom. Qual é o número?
Linha 167	P: $143 + 521$. ((pausa)) Sem armar!
Linha 168	E3: ((Silêncio)) Sem armar... do tipo... sem subir?
Linha 169	P: Isso, sem fazer essa armação, sem esse dispositivo.
Linha 170	E3: Ah tá.
Linha 171	P: Tem que estar na horizontal, que nem (quando) você bate na calculadora: $143 + \dots$
Linha 172	E3: ...+ 521.
Linha 173	P: Isso.
Linha 174	E3: ((Silêncio)) Não pode fazer assim?
Linha 175	P: Humn... Isso pode.
Linha 176	E3: Tá. ((Silêncio)) Deu errado... (rs)
Linha 177	P: ((Silêncio)) Deu errado?
Linha 178	E3: Aham. ((Silêncio))
Linha 179	P: Quanto deu aí?
Linha 180	E3: 666.
Linha 181	P: Humn.
Linha 182	E3: Humn... ((Silêncio))
Linha 183	P: O que está errado?
Linha 184	E3: ((Silêncio)) Porque aqui já daria 4...
Linha 185	P: Aham.
Linha 186	E3: ... e não 5... ((Silêncio)) Deixe-me ver aqui o que está errado... ((murmurando)): "1 deu 5, 4, deu 2 e 3... desse jeito não deu..." ((silêncio e depois começa a cantarolar baixinho: "hum... hum... hum... hum"))).
Linha 187	P: Confere a conta armando... Quanto dá?
Linha 188	E3: ((confere a conta em silêncio))
Linha 189	P: Certo. Então só está (errado) por uma unidade. O que você errou aí?
Linha 190	E3: Ah... multipliquei aqui... ah tá... ((pausa)) Deu certo sim.
Linha 191	P: Deu certo. Beleza, mas também você deu sorte, não é? Eu peguei uns números que...
Linha 192	E3: ... que não...
Linha 193	P: ...que não sobe a casa, não é? Então vamos supor $148 + 523$.
Linha 194	E3: Certo. ((silêncio e murmura)): O mesmo não é? 6... 6 ... ((Silêncio)) e aqui daria 11... Se eu subisse aqui... que deu 11 e eu passasse esse para cá...
Linha 195	P: Perfeito. Certinho.

Figura 5.32 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade 4 (estudo final).

É interessante notar que o estudante 3 utilizou um sistema semelhante à propriedade distributiva para demonstrar a conta de adição, sem a necessidade de organizar a conta na vertical. Embora seja possível notar que, em um trecho do diálogo, houve um equívoco no resultado do primeiro exemplo (666, no lugar de 664) e, por isso, sugeriu-se a conferência da conta montando-a na vertical, como de costume. Por essa razão, é possível observar duas somas com parcelas iguais na figura 5.32.

No segundo exemplo ($148 + 523$), o estudante demonstra a compreensão dos agrupamentos por ordens. Portanto, é possível constatar que, em sua resposta, inicialmente representada como 6611, na verdade, representa 671, correspondendo ao resultado correto.

Veja-se o próximo estudante deste Grupo 1.

ESTUDANTE 13:

No estudo piloto, este foi um dos poucos estudantes que conseguiu resolver a atividade de completar os dígitos faltantes, embora tenha sido na segunda tentativa. Na primeira tentativa, que corresponde à figura 5.33, ele havia completado apenas até a ordem da centena.

b. Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma.

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 + 52 \\
 \hline
 201
 \end{array}$$

Figura 5.33 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

Já na figura 5.34 é possível observar que foi capaz de completar corretamente os dígitos faltantes.

Assim como no caso do estudante 3, não se apresentou uma *pergunta-modelo* específica para ajudar na resolução. Só foi feita a orientação para seguir o mesmo raciocínio para terminar o cálculo apresentado.

b. Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma.

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 + 352 \\
 \hline
 1001
 \end{array}$$

Figura 5.34 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

No estudo final, o estudante 13 optou por explicar de forma discursiva, diferente do estudante 3 que optou por *esquemas*. Na figura 5.35 é possível notar que o aluno utiliza um vocabulário matemático como “unidade” e “dezena” em sua explicação.

Partindo dessa explicação, tente explicar porque usamos o algoritmo do “sobe 1” quando obtemos resultados maiores que 9 na soma de uma das casas.

Para aumentarmos mais os números de casas para conseguirmos concluir o conto, pois irei passar de 9 que seria 9 unidades, e tornarei 10 que é 1 dezena, 0 unidade.

$$\begin{array}{r} \text{Ex: } 99 \\ + 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Figura 5.35 – Resposta estudante 13: Resolução da atividade 4 (estudo final).

Veja-se o diálogo referente à atividade 4 para compreender o raciocínio utilizado pelo estudante 13.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 176 A 187

Linha 176	P: Então, a próxima atividade é o sistema numérico decimal, não é?
Linha 177	E13: Aham.
Linha 178	P: Então, você entendeu essa parte da divisão de agrupamentos de 10 em 10?
Linha 179	E13: Sim. É dezena, unidade, centena.
Linha 180	P: Isso. Aqui, você explicou direitinho. Eu acho que está bem. Mas e esse aqui? Se eu não tivesse esse recurso para “armar”? Porque a gente aprende, quando está na primeira série, que “vem e sobe uma casa”. Mas, se eu não tivesse esse recurso, como seria uma outra forma de fazer a soma? Como você faria?
Linha 181	E13: Seria aqui, tipo, três dezenas, e... uma unidade. Soma mais 9 unidades. Aí eu ia trocar a dezena por 4, ter que ativar o 9, o 1 da própria unidade.
Linha 182	P: Aham.
Linha 183	E13: Porque seria 31, então é 3 dezenas e 1 unidade. Aí soma as unidades e vira dezena.
Linha 184	P: Certo.
Linha 185	E13: Então, 9 mais 1 dá 10 e 10 é uma dezena e ele uma unidade.
Linha 186	P: Aham.
Linha 187	E13: E ficaria 4 dezenas.

Observando o diálogo, é possível notar que o estudante 13 compreende o conceito de classe e ordem, mas cometeu pequenos equívocos em relação à utilização da palavra “unidade”. Em uma parte do diálogo, o estudante refere-se à unidade com conotação de **ordem**, por exemplo, quando afirma “(...) Soma mais 9 **unidades**. Aí eu ia trocar a dezena por 4, ter que ativar o 9 (...)”. Em outros momentos, refere-se à palavra unidade com conotação de **conjunto** como nesse trecho: “Então, 9 mais 1 dá 10 e 10 é uma dezena e **ele uma unidade**”.

Mitigando esses equívocos, pode-se notar diferentes níveis de invariantes operatórios entre os estudantes 3 e 13. É perceptível que este último estudante parece mobilizar mais invariantes operatórios do que o estudante 3, por exemplo, utilizando-se do vocabulário matemático para explicar o algoritmo da soma, sem se limitar apenas a *esquemas* para demonstrar o seu raciocínio. Lembrando que, segundo Vergnaud (2014, p. 313) a explicação é a última fase de compreensão de um conceito.

Embora muitos estudantes, nos anos finais do Ensino Fundamental, sejam capazes de realizar um cálculo de soma sem muitas dificuldades, a explicação do algoritmo exige um outro tipo de habilidade, raramente trabalhada durante as aulas.

Veja-se agora as atividades do estudante 20.

ESTUDANTE 20:

Este estudante foi o que mais apresentou dificuldades para realizar essa atividade, comparado aos outros dois deste mesmo Grupo 1, tanto no estudo piloto quanto no final. No estudo anterior, conforme pode-se observar na figura 5.36, na primeira tentativa, ele sequer conseguiu resolver a atividade.

Figura 5.36 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

Já na segunda tentativa (figura 5.37), com a aplicação da seguinte *pergunta-modelo* para esta questão, ele conseguiu completar parte dos cálculos. Sua resposta está anotada no canto superior direito como “O dígito 9”.

H2	IX	A	Que número somado a 2 resulta em um outro que termina com dígito 1?
----	----	---	---

Figura 5.37 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

Como o estudante parece ter compreendido parte do problema, foi feita uma terceira aplicação utilizando a seguinte *pergunta-modelo*:

H2	IX	A	Relembre o processo aditivo. Qual o resultado desta conta $18 + 2$? Agora tente pensar nesta conta armada como no exercício.
----	----	---	---

Sua resolução resultou na figura 5.38, na qual é possível observar que não houve um avanço no cálculo inicial em si, apenas apresentou a resposta da pergunta “Qual o resultado desta conta $18 + 2$?” no canto inferior esquerdo da figura. É interessante notar que o estudante respondeu novamente à *pergunta-modelo* anterior nessa terceira tentativa, que já estava correta na segunda vez.

Figura 5.38 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade B – Série IX (estudo piloto).

No estudo final, o estudante 20 também apresentou uma justificativa bastante confusa, como pode-se notar na figura 5.39:

Figura 5.39 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade 4 (estudo final).

Sendo assim, analisar-se-á o diálogo com o estudante para compreender, com um pouco mais de detalhes, quais são suas eventuais dificuldades em relação a esse conceito.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 422 A 435

Linha 422	P: (...) Vamos fazer essa (atividade) quatro aqui. Então, aqui, é o sistema numérico decimal, né? Ela explica um pouco sobre a adição. E aí? O que você entendeu?
Linha 423	E20: Posso ser bem realista?
Linha 424	P: Pode, claro!
Linha 425	E20: Assim, eu lembro... que tinha uma conta parecida, ano passado. Eu acho...
Linha 426	P: Aham.
Linha 427	E20: E... a primeira... o primeiro número que eu pensei foi o 1.
Linha 428	P: Humn.
Linha 429	E20: Porque eu acho que o 1... ele... cada vez (que for) somado, pode formar qualquer número.
Linha 430	P: Humn...
Linha 431	E20: É um número... é o número mais acessível que tem... Se eu quero fazer o 9, posso pegar, é... “noves” 1 e...
Linha 432	P: Aham...
Linha 433	E20: (...) e formar... realmente... tipo o 9 mesmo. O resultado seria 9. Então, acho que o número mais acessível realmente é o 1. Porque... é... por ser... ele sempre somar de 1 em 1...
Linha 434	P: Humn...
Linha 435	E20: (...) e sempre ter um resultado... sabe? “A mais”, vamos dizer.

Nesse primeiro trecho do diálogo, referente a essa atividade, o estudante iniciou explicando o seu raciocínio no estudo piloto, realizado no ano anterior. Ele não utiliza a palavra unidade para se referir ao número um, mas pela sua justificativa de que “somar de 1 em 1” chega-se até o nove. Continuando o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 436 A 455

Linha 436	P: Certo. Bom, por exemplo, aqui, o que você entendeu desse “sobe 1”? Porque aí você está tentando me explicar que tem várias unidades, certo? Então, por exemplo, a cada agrupamento de 10, então, acho que você está tentando me explicar que tem vários “números 1” e um monte de agrupamento de 1...
Linha 437	E20: ...um monte de agrupamento de 1... forma talvez o resultado que eu queira.
Linha 438	P: Isso. Está mais ou menos nessa direção.

Linha 439	E20: (rs)
Linha 440	P: Agora, por exemplo, se a gente aprendeu que “armando” essa conta $39 + 3$: “ <i>Primeiro, a casa da unidade: $9 + 3$... 12</i> ”...
Linha 441	E20: Depois vem o 3...
Linha 442	P: ...“ <i>só que o 12, não pode colocar 12 aqui, sobe 1...</i> ”.
Linha 443	E20: Sim...
Linha 444	P: Aí, o que você subiu 1 tinha que somar com 3. Aí vira 42 aqui, não é? Agora, se eu não tivesse esse recurso, e tivesse que fazer a soma, como você faria?
Linha 445	E20: Se eu não tivesse esse recurso de “subir 1”??
Linha 446	P: É... esse “recurso” de montar a conta... Se você pudesse... Se você tivesse que fazer a conta, mas sem “armar” dessa forma. Sem usar esse “truque”, vamos dizer, como é que você faria uma soma?
Linha 447	E20: Quando você diz questão de “montá-lo”, assim, escrita? Ou na mente? Ou qualquer...
Linha 448	P: Você pode montar no papel, mas desde que você não use esse recurso. De montar a conta e usar esse algoritmo de: “ <i>Ah! Primeiro a casa da unidade, depois a casa da dezena...</i> ”. Desse jeito “montado” que a gente já sabe.
Linha 449	E20: Eu acho que faria tudo na forma... como se fosse uma expressão mesmo...
Linha 450	P: Mostra para mim como você faria.
Linha 451	E20: Por exemplo, humn... ((pausa)) Por exemplo, $39 + 3$...
Linha 452	P: Aham.
Linha 453	E20: Eu saberia que daria um resultado que... eu poderia confundí-lo com 142... 412!
Linha 454	P: Aham.
Linha 455	E20: ((Pausa)) Nossa... Mas como eu iria saber que não era esse resultado?

Nesse diálogo, esclareceu-se ao estudante que ele está sendo desafiado a resolver a soma sem utilizar o recurso de “armar a conta”. Assim, ele sugere que poderia ser utilizada uma expressão numérica para calculá-la. No entanto, nas três linhas finais do diálogo, ele se depara com um problema: como diferenciar a unidade da dezena no resultado? Ou seja, embora ele tenha utilizado a estratégia da expressão numérica, o que é válida em uma conta simples como $39 + 3$, fica evidenciado o equívoco das ordens (unidade e dezena) no momento de representar o seu resultado. O nove somado ao três resulta em doze, o que significa que há uma dezena e duas unidades. Logo, essa dezena deve ser somada às três dezenas já existentes e não colocadas lado a lado, como o estudante indaga. Veja-se a continuação desse diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 456 A 477

Linha 456	P: É, por exemplo, se você não fizesse a conta, você consegue fazer essa soma sem montar a conta assim? Desse jeito?
Linha 457	E20: ((gagueja um pouco)) Dá... Ia dar 42.
Linha 458	P: Isso. Como você fez essa conta na mente?
Linha 459	E20: Eu... simples... ((pausa e hesita)) Sei lá... é automático, eu pensei...
Linha 460	P: Eu vi você contando aí...
Linha 461	E20: ...sim, eu tenho... seria uma péssima mania, mas $39 + 3$... ((mostra os dedos da mão))
Linha 462	P: Aham, você foi somando, não é?
Linha 463	E20: Somando até dar o resultado 42...
Linha 464	P: Certo... Está certo, esse é um jeito de fazer a soma, não está errado. Pode fazer assim.
Linha 465	E20: Sim...
Linha 466	P: Só que você só tem 10 dedos na mão, não é? Se for mais que 10 dedos da mão como você vai fazer essa conta?

Linha 467	E20: Eu fazia isso direto. Então... eu sempre gravava quantas vezes eu já usei... as duas mãos.
Linha 468	P: Certo...
Linha 469	E20: Usei o 10, por exemplo, é... teria que ser... 30, por exemplo. Aí, eu vi que já dava 10, eu gravava na minha mente que... ou eu anotava assim, ó ((faz um risco na folha da atividade)), que já foi uma vez.
Linha 470	P: Ah... legal. Aham.
Linha 471	E20: Aí eu fazia de novo, marcava outra vez...
Linha 472	P: Aham.
Linha 473	E20: ...marcava por exemplo... 2...
Linha 474	P: Certo.
Linha 475	E20: ... fiz outra vez, marcava três e aí eu sabia quantas vezes (já) foi.
Linha 476	P: Ah... entendi. Interessante. ((aviso sonoro de término da aula)) Ainda quero retomar essa atividade com você, tudo bem? Mas como bateu o sinal, a gente vai parar por aqui, mas a gente retoma, tá bom?
Linha 477	E20: (rs) Tá bom!

Nesse trecho do diálogo, fica mais evidente a estratégia utilizada pelo estudante para realizar o cálculo, sem o uso do algoritmo da soma. De forma constrangida, ele afirma “(...) *seria uma péssima mania, mas...*” e mostra os dedos das mãos¹⁶. É comum que, nos últimos anos do Ensino Fundamental, muitos professores de Matemática desencorajem o uso dos dedos das mãos para fazer cálculos. Tal tipo de recurso é esperado, tipicamente, em crianças pequenas e, por isso, é compreensível o constrangimento do estudante. A noção de sequência numérica na criança pode ocorrer em dois níveis diferentes: o da recitação e o da contagem (VERGNAUD, 2014, p.126). E, neste último, há uma correspondência do objeto com o número (no caso, o dedo da mão com o número). Conforme o amadurecimento dos níveis de abstração de um indivíduo, o recurso dos dedos da mão passa a ser cada vez menos requisitado. Porém, ainda é comum que alunos, com treze a quatorze anos de idade, utilizem tal recurso. Isso ocorre devido ao fato do processo de desenvolvimento cognitivo do ser humano não ser linear. A sua capacidade de abstração depende de fatores externos e intrínsecos, que não se pode generalizar a todos os casos.

Continuando a análise do diálogo, indagou-se ao estudante como fazer uma soma com números maiores que dez. Ele afirma que, nesse caso, utiliza o recurso adicional de memorizar ou fazer marcações no papel a cada nova dezena. Porém, a explicação foi interrompida pelo término da aula e foi retomada no encontro seguinte. Segue a continuação do diálogo:

¹⁶ Embora o áudio não registre imagens, o gesto foi recuperado pelos registros de memória da pesquisadora.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 478 A 523

Linha 478	P: Bom. Então, retomando a atividade que a gente estava fazendo na semana passada. Nós tínhamos começado essa atividade quatro, não é? A discussão era sobre o sistema numérico decimal, de como ela se divide. Você lembra um pouquinho como era?
Linha 479	E20: Lembro. É... Como eu contava antigamente, só nos dedos, sem ter que utilizar nenhuma conta.
Linha 480	P: Isso. Aí aqui tem o exemplo de uma conta armada, que tem 39 mais 3, mostrando que dá 42. E aí, ele faz uma pergunta de como usamos esse algoritmo do “sobe um”? Por que a gente usa isso? E aí você começou a explicar quando a gente encerrou a entrevista. Então (vamos) tentar retomar o que você estava pensando.
Linha 481	E20: É... Eu lembro que a gente estava... tinha parado, que... Como eu conto nos dedos, nós temos só dez dedos.
Linha 482	P: Aham.
Linha 483	E20: E aí, caso fosse um número a mais de dez, o que eu faria?
Linha 484	P: Isso.
Linha 485	E20: E eu falei que a cada... Dez... Dez números eu anotava quantas vezes...
Linha 486	P: Humn.
Linha 487	E20: ... já foram e dava um resultado que eu queria.
Linha 488	P: Isso. Aí você vai contando, de 10 em 10, não é?
Linha 489	E20: Sim.
Linha 490	P: Mas e se forem números muito grandes? Por exemplo, 5 mil e tanto, como você faria sem montar, por exemplo?
Linha 491	E20: Como eu faria sem montar?
Linha 492	P: É.
Linha 493	E20: Sim... Nossa, ((acha graça)) sem montar iria ser bem difícil para mim. Fazer algum tipo de multiplicação na cabeça talvez, pegar um número muito alto e multiplicá-lo.
Linha 494	P: Humn.
Linha 495	E20: É... Referente a tipo 1.000, 2.000, 5... 5.000 não, que já ((acha graça)) chega, eu pegaria 2.000 vezes 2.000 que daria 4.000 já, então. E assim eu somaria com mais 1.000 ((acha graça)) porque é fácil, porque só tem zeros.
Linha 496	P: Certo.
Linha 497	E20: Então seria bem mais fácil do que se fosse... Por exemplo, 150.000... E 399.
Linha 498	P: Aham.
Linha 499	E20: Então, já ficaria mais difícil.
Linha 500	P: Aham.
Linha 501	E20: Agora, com zeros, é bem mais fácil.
Linha 502	P: Sim. É verdade. Com zeros fica mais fácil. Mas, por exemplo, escreve aí na sua folha uma conta assim: 523... Vamos lá.
Linha 503	E20: Um exemplo, só?
Linha 504	P: É. Um exemplo: 523... Mais, é... deixa eu ver, 89.
Linha 505	E20: ((Silêncio))
Linha 506	P: Como é que você faria essa conta sem fazer essa montagem, assim, na vertical?
Linha 507	E20: ((Silêncio)) bom. Eu acho que... Eu meio que montaria na minha cabeça mesmo. Eu a imaginaria montada na minha cabeça. Ou talvez eu pegaria... Como eu sei que o 9 ficaria debaixo do 3 e o 8 ficaria debaixo do 2, eu faria um de cada vez.
Linha 508	P: Tá.
Linha 509	E20: Por exemplo, é... 3 mais 9, 12. Certo?
Linha 510	P: Ok.
Linha 511	E20: Certo? Aí, eu teria que subir 1. Guardava o 1 na minha cabeça. Pegaria 8 + 2, 10. Então ficaria 11. Só que o problema é que já esqueci o primeiro resultado. ((acha graça))
Linha 512	P: Certo.
Linha 513	E20: Não, eu lembrei.
Linha 514	P: Tá.
Linha 515	E20: Então ficaria... Eu falei 11, sim. Então embaixo eu teria 12, aí eu ia subir o 1.
Linha 516	P: Aham.
Linha 517	E20: Então ia dar 612?
Linha 518	P: Humn, parece que sim. Vamos confirmar? Tente montar a conta e verifique se está certa essa conta.

Linha 519	E20: ((silêncio)) Vou contar nos dedinhos só para ter certeza. ((acha graça))
Linha 520	P: Pode contar. Não tem problema nenhum.
Linha 521	E20: Porque da primeira vez eu não contei nos dedinhos, eu fui na... tudo na minha cabeça mesmo.
Linha 522	P: Então tá bom. Não é proibido usar os dedinhos ((acha graça)).
Linha 523	E20: ((silêncio)) Ih, ((acha graça)) acertei.

A resolução que resultou desse diálogo pode ser visualizada na figura 5.40 a seguir:

Partindo dessa explicação, tente explicar porque usamos o algoritmo do “sobe 1” quando obtemos resultados maiores que 9 na soma de uma das casas.

Figura 5.40 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade 4 (estudo final).

Por meio do diálogo e da figura 5.40 é possível verificar que o estudante realizou a conta mentalmente (mesmo montando a expressão na folha de respostas). Depois, realizou a verificação do resultado, pelo algoritmo da soma, e chegou ao mesmo resultado. Ele alerta que vai utilizar os dedos, para ter certeza da contagem, e concluiu que chegou ao resultado correto.

É importante salientar que não é condenável o uso dos dedos para o recurso da contagem. Acredita-se que, conforme a prática, essa ação será cada vez menos utilizada de acordo com o amadurecimento no nível de compreensão de sequência numérica. Vergnaud (2014, p. 172) contextualiza que o grande problema de aprendizagem, na regra da adição, está na relação entre a escrita do número com a quantidade que ele representa. É muito comum, no ensino, observar a ênfase na técnica¹⁷, para ensinar o algoritmo da soma, mas pouca associação da operação com os objetos, por exemplo, utilizando outras bases além da decimal.

¹⁷ Faz-se uma ressalva neste ponto a respeito do uso do material dourado, proposto por Maria Montessori, nos ciclos iniciais do Ensino Fundamental, que se tornou cada vez mais comum em algumas escolas (MENEGETTI e BEGA, 2016) contrariando a unanimidade do ensino apenas por técnicas. Quando esses tipos de materiais são trabalhados com os alunos, eles têm a oportunidade de compreender o processo das quatro principais operações, sem depender apenas de algoritmos formais descritivos. No entanto, há ainda uma falta de domínio, por parte dos professores, no uso de tais recursos, limitando-se à função ilustrativa, na maioria das vezes, como aponta o trabalho de Passos e Takahashi (2018).

Entre os três estudantes desse Grupo 1, esse estudante é o que teve mais dificuldade para explicar o algoritmo da soma. No entanto, há uma diferença de compreensão de sequência numérica comparado a um outro estudante do Grupo 2, que será analisado no tópico 5.3.2.

5.3.1.4 Modelo 4 – Conjuntos

Por fim, chega-se à última atividade desse grupo, no qual os estudantes foram desafiados a provar a partir de uma definição. Provar é uma das atividades essenciais na rotina de um matemático. Consiste em verificar a validade de um teorema, partindo de algumas afirmações consideradas como verdadeiras. Muitas vezes, são nos cursos de ensino superior, como em Matemática e áreas correlatas, que o estudante tem o primeiro contato com atividades que verifica a validade de um teorema por meio de provas. Enquanto no ensino básico as atividades são majoritariamente concentradas em aplicação de fórmulas e teoremas, no ensino superior o aluno deverá ser capaz não só de aplicar como de verificar a validade dessas fórmulas e teoremas.

Nesta atividade 5, que consistia no enunciado a seguir, os estudantes são apresentados a algumas definições a respeito de conjuntos (números inteiros) e também sobre números consecutivos. Partindo delas, deverá provar que a soma de três números inteiros consecutivos sempre será divisível por três. Segue o enunciado:

5. *Números consecutivos são aqueles que vêm em uma sequência. E números inteiros são os números naturais incluindo os números negativos.*

Divisível significa que a divisão dá um resultado com resto zero. Por exemplo: 12 é divisível por 4, pois:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Sabendo dessas definições, prove que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por 3.

Classificaram-se as seguintes respostas dos estudantes dentro do modelo de conjuntos, pois nota-se que há dois conceitos essenciais que eles precisam compreender para que possam desenvolver essa atividade:

- I. Saber o conjunto dos números inteiros;
- II. Definir exemplos de números consecutivos dentro desse conjunto (que forma um subconjunto);

Sabendo desses dois conceitos, é necessário executar a capacidade de generalizações que envolve conceitos algébricos e lógicos. Analisar-se-ão as respostas de cada um desses estudantes comparando o estudo piloto com o final.

ESTUDANTE 3:

No estudo piloto, aplicou-se uma atividade similar aos estudantes na qual eles deveriam definir a fórmula geral para um número ímpar.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top right, there is a formula: $P_1 + 15 + P_2 = 2$. Below this, the question is written: "b. Qual a fórmula geral de um número ímpar?". The word "fórmula" is circled. In the center, the student has written the formula: $2X - 1$. Below this, there are four calculations verifying the formula for the first four odd numbers:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2 - 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 &= 4 - 1 = 3 \\ 3 \cdot 2 &= 6 - 1 = 5 \\ 4 \cdot 2 &= 8 - 1 = 7 \end{aligned}$$

Figura 5.41 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade B – Série VIII (estudo piloto).

Pode-se observar na figura 5.41 que o estudante 3 não teve problemas para encontrar a fórmula geral para um número ímpar. Embora ele não tenha demonstrado a verificação com números inteiros, a fórmula serve também para esses; mesmo porque não havia deixado essa condição explícita no enunciado.

Já no estudo final, pela entrevista, fica mais claro que o estudante 3 apresentou algumas dúvidas em relação à ideia de **generalização**. É possível observar na figura 5.41, referente ao estudo anterior, que o estudante já havia marcado com um ponto de interrogação na palavra

fórmula geral. Possivelmente, ele não tinha clareza do que é generalizar. Segue o trecho da entrevista:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 199 A 212

Linha 199	P: É que você fez com alguns números, não é? Se você tentasse generalizar, por exemplo, $x...$, $2x...$
Linha 200	E3: Humn.
Linha 201	P: Você conseguiria fazer isso? ((pausa)) Em Matemática, a gente costuma provar com números genéricos, não é? Então, se vale para alguns exemplos, então, teria uma fórmula que generaliza essa regra.
Linha 202	E3: Sim.
Linha 203	P: Como você tentaria provar com o x ? Usando um número que eu não sei...
Linha 204	E3: $x...$ mas... não pode colocar... tipo... $+ 2x + 3x$?
Linha 205	P: Poder até pode. Só que, se esse x está referenciado ao mesmo x , não é? Aqui $2x$ significa “o dobro” (do número desconhecido).
Linha 206	E3: ((hesita um pouco e responde)) Eh... sim.
Linha 207	P: Então, aqui você está falando matematicamente...
Linha 208	E3: ... Mas olha: se esse x aqui for 1 + ... ((Silêncio)). Dá a mesma coisa!
Linha 209	P: Humn... entendi. Isso, mas aqui você está definindo se o x tiver um número, certo?
Linha 210	E3: Certo.
Linha 211	P: Agora, será que vale para qualquer número? Aqui para 1 parece que ele vale para os números consecutivos, mas será que para outro número também vale?
Linha 212	E3: ((Silêncio)) Acho que sim...

Foi feito o questionamento em relação à generalização por conta da resolução que ele apresentou, na figura 5.42. Observa-se que a regra de números consecutivos vale apenas quando o x vale 1:

$$x + 2x + 3x$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Figura 5.42 – Resposta estudante 3: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Ao verificar para outros números, o estudante constatou que existe uma sequência, mas para um subconjunto especial. Veja-se a continuação do diálogo e a figura 5.43.

$$2 + 2.2 + 3.2 = 12 \div 3 = 4$$

$$3 + 2.3 + 3.3 = 18 \div 3 = 6$$

Figura 5.43 – Resposta estudante 3: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 213 A 240

Linha 213	P: Vamos testar.
Linha 214	E3: 2 ... ((Silêncio)).
Linha 215	P: 2, 4 e 6 são números consecutivos?
Linha 216	E3: ((Silêncio)). Depende... Se eu quisesse uma ordem...
Linha 217	P: O que significa consecutivo? É um...
Linha 218	E3: ... um atrás do outro.
Linha 219	P: Não é?
Linha 220	E3: Mas aqui, por exemplo, não está um atrás do outro... Tem um número no meio...
Linha 221	P: Humn.
Linha 222	E3: Isso é uma sequência.
Linha 223	P: Aham.
Linha 224	E3: Não é uma sequência... consecutiva, porque tem uma aqui no meio, mas é uma sequência.
Linha 225	P: Aham.
Linha 226	E3: E aqui, são aqueles que vêm de uma sequência. Isso aqui é uma sequência, isso aqui é uma sequência... É uma sequência de números... pares.
Linha 227	P: Aham. Isso. Se for esta condição: números pares. Se você pensar em uma sequência genérica, aí estaria certo.
Linha 228	E3: Mas é sequência só de... "um atrás do outro"?
Linha 229	P: Isso.
Linha 230	E3: Mas não daria?
Linha 231	P: Não sei...
Linha 232	E3: Porque aqui dá 12. 12 dividido por 3, quatro!
Linha 233	P: Sim... mas será que vale para todos?
Linha 234	E3: ((Silêncio)) Humn... 3, 6 e 9, também é uma sequência!
Linha 235	P: Aham.
Linha 236	E3: ((Silêncio)) É para... responder?
Linha 237	P: Aham. Dá...
Linha 238	E3: 18 e... ((sussura bem baixo)) ... dá 16...
Linha 239	P: Certo.
Linha 240	E3: Que dá... Aí não dá.

Nesse diálogo, o estudante demonstra que a sequência obtida - dois, quatro e seis além de três, seis e nove (figura 5.43) – é de números pares consecutivos. Porém, o enunciado pede para que seja obtida uma soma de três números inteiros consecutivos **quaisquer**, ou seja, os números pares fazem parte de um subconjunto, por isso a regra também é válida.

É importante salientar que, durante as entrevistas, evitou-se induzir qualquer tipo de raciocínio. Apenas questionaram-se algumas partes de sua resolução, respondendo a dúvidas pontuais e estimulando o próprio aluno a verificar se atendeu a todos os requisitos do enunciado.

Continua-se o diálogo com o estudante para que ele pudesse chegar ao resultado esperado, por meio de questionamentos sucessivos:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 253 A 270

Linha 253	P: Isso. Supondo que o x seja um número... natural. Supondo que esse x seja um número inteiro, por exemplo, um número negativo. Será que vai valer também a regra?
Linha 254	E3: ((Respira fundo)) Humn... ((Silêncio)) ... é isso mesmo? e... 2... ((Silêncio)). E aí... eu poderia dividir... por um número negativo também?
Linha 255	P: É... O número negativo quando é dividido por um positivo vira negativo, não é?
Linha 256	E3: Aham.
Linha 257	P: Mas... esse não é o problema. O problema seria se o número é um número inteiro ou não.
Linha 258	E3: Tá, não deu.
Linha 259	P: Não deu!
Linha 260	E3: Não precisa apagar, não é?
Linha 261	P: Não, não precisa, pode deixar.
Linha 262	E3: Tá, então esse aqui não dá.
Linha 263	P: Esse aí só dá para qual condição?
Linha 264	E3: In...teiro...
Linha 265	P: Isso. É um número natural, na verdade não é?
Linha 266	E3: Natural! Inteiro é quando tem positivo e negativo.
Linha 267	P: Isso.
Linha 268	E3: ((Silêncio))
Linha 269	P: Então deve ter alguma outra fórmula que você pode representar números consecutivos, que valha para mais casos, então.
Linha 270	E3: Humn...

Nesse ponto, o aluno já foi capaz de perceber qual a característica de um número inteiro. Assim, percebeu que a fórmula geral que ele havia expressado ($x + 2x + 3x$) não funciona para números negativos ou o próprio zero. Vergnaud (2014, p.33) nomeia essas tentativas de resolução de problemas como “cálculo relacional”. No caso, são contestações sobre a realidade para verificar se elas podem ser inferidas ou aceitas. Por exemplo, o autor exemplifica o algoritmo para soltar uma peça de um quebra-cabeça como na figura 5.44 a seguir:

Figura 5.44 – Esquema de barras. Fonte: VERGANUD, 2014, p. 34.

Nesse esquema, o desafio é encontrar um algoritmo para soltar a barra A. Vergnaud (2014, p. 34) explica que, se a criança é capaz de entender a relação de encaixes, ela poderá adotar uma conduta simples que seria verificar que a barra A está presa à barra F, esta por sua vez à barra B, que está presa à barra D e, por fim, à barra C. O autor também afirma que essa regra de conduta por regressão de cada passo não é utilizada por crianças com menos de cinco anos de idade. No entanto, já se presenciou que esse tipo de conduta também não é necessariamente desenvolvido em pessoas adultas¹⁸, caso não sejam estimuladas.

Voltando à análise da resolução do estudante 3, nota-se que ele vai percebendo o problema da lógica que ele adotou, sem considerar outras condições. Continua-se o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 271 A 280

Linha 271	P: Porque aqui, algebricamente, você está falando que o número mais o dobro mais o triplo está dando... uma sequência, não é?
Linha 272	E3: Então... o dos números naturais está certo.
Linha 273	P: Isso, natural está certo.
Linha 274	E3: Tá... então...
Linha 275	P: Porque aqui ele quer números consecutivos inteiros, ele não quer só os naturais, ele quer os inteiros. Então, isso significa que se eu substituir por um número inteiro. Ele também tem que valer.
Linha 276	E3: ((Silêncio)) Essa sequência... também é de... também não é consecutiva? Mas...
Linha 277	P: Aí você está colocando $x + x$ ao quadrado + x ao cubo?
Linha 278	E3: Aham. Mas aí... ((Silêncio)) É! Porque se você for assim... com o número negativo, por exemplo, quando ele está $a + a$ ao quadrado, se fosse fazer "ao cubo" já... iria continuar negativo...
Linha 279	P: Aham.
Linha 280	E3: ((Silêncio)) Mas... nesse caso aqui... ficaria $2 + 4$, seis, + (-6). Que vai dar zero... TAMBÉM ESTÁ ERRADO! Então "ao quadrado" não dá... Não é que não dá, mas ficaria a mesma coisa do que... o natural... ((Silêncio))

¹⁸ Durante o II Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais, no qual o teórico esteve presente, que foi realizado em Porto Alegre em 2017, foi aplicada uma atividade similar ao da figura 5.44 aos professores presentes. Algumas pessoas que não tinham uma formação específica em Exatas, por exemplo, tiveram mais dificuldade para utilizar a regressão logo na primeira tentativa. Foi comum usar a "tentativa e erro", retirando peça por peça, até que a peça chave pudesse ser solta. Inclusive, peças que não tinham relação alguma com a peça principal foram retiradas. Porém, muitas só perceberam posteriormente que algumas barras não precisariam ser removidas.

$$2 + 2^2 + 2^3$$

$$2 + 4 + 8 = 14$$

Figura 5.45 – Resposta estudante 3: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Observa-se que o estudante, dessa vez, adota a estratégia de elevar os números, respectivamente, por 1, 2 e 3 ($x + x^2 + x^3$), mas logo nota que também não chegará ao resultado esperado. Inicialmente, ele acredita que o raciocínio estaria correto, já que os números negativos elevados ao cubo continuam negativos. A atividade foi interrompida neste ponto, pois o tempo da aula havia se esgotado. Na aula seguinte, que ocorreu na semana seguinte, retomou-se o que o aluno havia feito com o diálogo a seguir:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 282 A 300

Linha 282	P: Bom, Na semana passada, a gente tinha trabalhado com essa atividade, não é? Que vai até (a) número 5. E nós tínhamos conversado da atividade 1 até 4, não é? E nós paramos na 5. Bom, você lembra o que a gente estava trabalhando nessa atividade 5?
Linha 283	E3: Sim.
Linha 284	P: O que era exatamente? Fale um pouquinho da atividade.
Linha 285	E3: Bom, era uma sequência que... você somava três números em sequência
Linha 286	P: Aham.
Linha 287	E3: ...que... dividido por 3, dava um número exato.
Linha 288	P: Isso.
Linha 289	E3: ... (que é) sempre divisível por 3.
Linha 290	P: Aí você tinha verificado que realmente acontece isso.
Linha 291	E3: Sim.
Linha 292	P: Só que ele pede para provar que a soma de três números consecutivos inteiros, ou seja, o que são números inteiros?
Linha 293	E3: ((Silêncio)) Ué? 1, 2...
Linha 294	P: Sim, porque os naturais são todos os positivos, não é? Por exemplo, 1, 2, 3, 4... infinito, não é?
Linha 295	E3: Aham.
Linha 296	P: E os inteiros são aqueles que têm os negativos também. Então, -1, -2, -3... mas sempre são números "redondos", digamos assim. Então, a gente tinha que achar uma forma genérica para provar que isso está certo. Porque, com números, a gente já verificou que isso está certo. Como a gente consegue provar colocando uma fórmula? Usando um x , por exemplo... É aí que a gente tinha parado, não é?
Linha 297	E3: É.
Linha 298	P: Bom, você tinha começado com x , $2x$, $3x$... certo? E tinha verificado que alguns dão certo...
Linha 299	E3: ... funciona, mas só nos números naturais.

Linha 300	P: Isso. Só que agora a gente tem que ver como faz para funcionar com os números inteiros também, tá? Então vamos lá. Vamos retomar isso aqui.
------------------	--

É muito importante que, ao retomar a atividade, o próprio estudante faça essa regressão do que foi feito e continue seu raciocínio de onde havia parado. Vale ressaltar que as atividades não ficaram com os estudantes e foram devolvidas apenas durante a aplicação da entrevista. Logo, pelo diálogo anterior, há bons indícios de que o estudante lembra dos seus passos anteriores e o que não havia funcionado. A seguir, continua o diálogo no qual ele esboça uma nova estratégia:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 301 A 325

Linha 301	E3: ((Silêncio e som de reorganizar as anotações)) Tá... Eu tentei com $x + 2x + 3x...$
Linha 302	P: Aham.
Linha 303	E3: $x + x^2 + x^3$
Linha 304	P: Aham.
Linha 305	E3: ... que também não dá...
Linha 306	P: Aham.
Linha 307	E3: Humn... ((Silêncio))
Linha 308	P: Se você pensar na sequência. Por exemplo, se você quer falar que um número é sequencial, ele sempre segue uma lógica, não é? Por exemplo, 2, 4 e 6 é uma sequência... Só que é uma sequência de números pares, por exemplo.
Linha 309	E3: Sim.
Linha 310	P: Agora, se fosse uma sequência de números, um atrás do outro mesmo, de números naturais, seria 1, 2, 3 ou 10, 11, 12... Então, de acordo com essa característica que você precisa montar esse x .
Linha 311	E3: De 1, 2, 3, não é?
Linha 312	P: Isso... por exemplo.
Linha 313	E3: Então... Um número acrescentado mais um... sempre... Então...
Linha 314	P: Isso...
Linha 315	E3: ... $x...$ ((Silêncio)) + ...
Linha 316	P: $x + 1$, aham.
Linha 317	E3: ((Silêncio)) Eu não sei se... Porque esse.... ((Silêncio)).
Linha 318	P: Aham.
Linha 319	E3: Tá... mas eu não sei se isso funcionaria para todos os números...
Linha 320	P: Vamos testar! Bom, você escreveu então x , $x + 1 + x + 2$, certo?
Linha 321	E3: Certo. Colocando que o x vale 1, ou (seja), 1, $1 + 1$, dois, $1 + 2$, dá certinho: 1, 2 e 3...
Linha 322	P: Aham... Agora tente usar um número inteiro então.
Linha 323	E3: Se 2... Se x fosse 2... mais... 3 mais 4 ... É uma sequência.
Linha 324	P: Aham.
Linha 325	E3: ... $3 + 4...$ $3 + 2...$ 3, 4, 5! É... acho que deu certo!

Observou-se que o estudante adota um caminho bastante promissor para encontrar o resultado esperado. Testando inicialmente com números naturais, ele verifica que a fórmula funciona. Sua resolução consta na figura 5.46.

$$\begin{array}{l}
 X + X + 1 + X + 2 \\
 (1 + (1+1) + 1+2) = \\
 2 + 3 + 4 \\
 3 + 4 + 5
 \end{array}$$

Figura 5.46 – Resposta estudante 3: Quarta tentativa da atividade 5 (estudo final).

Continua-se, então, o diálogo para que ele verificasse com os números inteiros e o seu resultado pode ser visto na figura 5.47, na sequência:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 326 A 339

Linha 326	P: Isso, com os naturais deu certo. Use um número inteiro agora. O que é um número inteiro mesmo?
Linha 327	E3: Tanto natural... ops, tanto positivo quanto negativo.
Linha 328	P: Isso.
Linha 329	E3: Então... -2 +... -2 + 1... + (-2) + 2.
Linha 330	P: Aham.
Linha 331	E3: Dá... -2 + (-1) + 0.
Linha 332	P: Deu certo?
Linha 333	E3: Deu. Porque se você for... Eu não lembro o nome disso aqui...
Linha 334	P: É a reta numérica?
Linha 335	E3: Isso! É só isso mesmo? Eu pensei que tinha um nome difícil... Do zero para à direita é 1, 2, 3, 4. Do zero para à esquerda (é) -1 e -2...
Linha 336	P: Ok.
Linha 337	E3: zero, -1 e -2!
Linha 338	P: Aham. Certinho. Então ele está numa sequência negativa ou decrescente, não é? Porque ele está indo do menor para o maior também.
Linha 339	E3: Então é isso.

$$\begin{array}{l}
 (-2) + (-2+1) + (-2+2) \\
 -2 + (-1) + 0
 \end{array}$$

Figura 5.47 – Resposta estudante 3: Quinta tentativa da atividade 5 (estudo final).

O estudante, após a conclusão dessa atividade, levantou um questionamento se essa definição (a soma de três números consecutivos quaisquer sempre é divisível por três) valeria para números não consecutivos. Isso foi bastante positivo, pois, de alguma forma, despertou-se sua curiosidade de verificar definições. Segue o trecho do diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 3 – LINHA 341 A 347

Linha 341	E3: ((Silêncio)) Isso funcionaria nessa sequência também? Que não seja consecutiva?
Linha 342	P: Boa pergunta! Faça um teste!
Linha 343	E3: Tá... mas aí... Teria que ser um número só...
Linha 344	P: Então, o que você descobriu aí? Então, essa fórmula aqui seria...
Linha 345	E3: ... a fórmula da soma dos números inteiros consecutivos.
Linha 346	P: Isso...
Linha 347	E3: Tá.

Para não se estender mais as análises, que fugiriam um pouco do propósito principal deste trabalho, a análise do estudante 3 será encerrado por aqui. O diálogo completo pode ser conferido no anexo.

ESTUDANTE 13:

Esse estudante demonstrou que compreendeu o conceito de sequência, mas não soube criar uma fórmula genérica para expressá-la. Sua demonstração foi basicamente empírica com números naturais, escolhidos ao acaso. Não houve um teste sequer com números negativos, parte dos números inteiros. Assim, ele havia apresentado inicialmente a resolução da figura 5.48. Segue o diálogo referente a esta resolução inicial:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 190 A 203

Linha 190	P: Essa daqui é um pouquinho mais difícil, não é? Bom, o que você entendeu sobre números consecutivos? De acordo com a explicação?
Linha 191	E13: São números... um atrás do outro. Por exemplo, 7-8-10 são números consecutivos. Não, 7-8-9.
Linha 192	P: Tá.
Linha 193	E13: Aí eu fiz a conta do 7 mais 8 mais 9, deu 24. E 24 é divisível por... é divisível por 3. Dá... dá 8.
Linha 194	P: Aham.
Linha 195	E13: Aí depois eu fiz a conta. 13-14-15, que já muda um pouco, que tem a... aí possui a... casa da dezena.
Linha 196	P: Aham.
Linha 197	E13: Aí fica 42. E 42 dividido por 3 dá 14. Então é divisível.
Linha 198	P: Ok.
Linha 199	E13: Porque... sobra zero.
Linha 200	P: Aham. Tá. Agora, e se eu quisesse mostrar de uma forma genérica isso?
Linha 201	E13: Genérica?

Linha 202	P: É.
Linha 203	E13: Aí eu não sei.

Figura 5.48 – Resposta estudante 13: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Ao questionar-se sobre os números negativos, trecho do diálogo a seguir, ele fez inicialmente um teste com três números, escolhidos ao acaso, mas que respeitam a condição de serem consecutivos, para verificar que a definição é verdadeira (figura 5.49).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 206 A 211

Linha 206	P: Isso. Então, será que, se você usar números negativos, vai dar certo? Três números negativos consecutivos, será que vai dar certo também?
Linha 207	E13: Não sei. Espera aí. ((silêncio)) Dá.
Linha 208	P: Dá certo?
Linha 209	E13: Dá certo.
Linha 210	P: Aham. Tá. Então, sabendo os números, você conseguiu provar que realmente dá certo.
Linha 211	E13: Sim.

Figura 5.49 – Resposta estudante 13: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final).

Quando desafiou-se o estudante a tentar generalizar essa regra, sem escolher arbitrariamente os números, ele inicia assumindo uma incógnita, mas acaba fixando uma parte da sequência, o que pode ser observado na figura 5.50.

The image shows a square box containing four handwritten mathematical expressions stacked vertically. The first expression is x . The second is $x+1$. The third is $x+2$. The fourth is $x+8+9$.

Figura 5.50 – Resposta estudante 13: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Mas essa estratégia logo é verificada, pelo próprio estudante, que não é a mais apropriada, que pode ser observado no trecho do diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 216 A 223

Linha 216	P: Isso. São números diferentes. Só que... se você colocar x , y e z , você não tem controle de nenhum número, não é?
Linha 217	E13: Então poderia ser – sei lá – x, y, 10.
Linha 218	P: Humn.
Linha 219	E13: Ou então... x, 8, 9.
Linha 220	P: Poderia ser. Vamos fazer o teste? Tente escrever isso.
Linha 221	E13: x mais 8 mais 9.
Linha 222	P: Aham.
Linha 223	E13: Que aí é igual o... ((silêncio)) Nossa... Estou me “embananando”... Agora vou transformar o x. ((silêncio)) ((tsc)) Não sei.

Para que ele pudesse continuar o seu raciocínio, foi dada uma pequena dica de partir de um número conhecido e definir as suas características:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 224 A 239

Linha 224	P: Eu vou te dar uma dica. Você começa pelo x , pense assim: quando você está formando os números consecutivos, escolhe um número, não é? Você escolheu 7.
Linha 225	E13: Sim.
Linha 226	P: Aí, (para achar) o consecutivo você está partindo do 7 e vendo o próximo. Como você descobre o próximo número? Você começou do 7. Como você sabe que o 8 é o próximo?
Linha 227	E13: Porque ele é consecutivo.
Linha 228	P: Tá. E para achar o consecutivo, qual operação que você está fazendo “de cabeça”?
Linha 229	E13: Soma.
Linha 230	P: Soma de...?
Linha 231	E13: Soma de 1.
Linha 232	P: 1. Então sempre está aumentando 1, não é?
Linha 233	E13: Aham.
Linha 234	P: Então, que tal se você fizer isso com o x ? Vamos supor que eu começo com um x . Esse x é um número, não é?
Linha 235	E13: Tá.
Linha 236	P: Qual é o próximo número do x ?
Linha 237	E13: Seria x mais 1.
Linha 238	P: Isso. x mais 1. E o próximo?
Linha 239	E13: É x mais 2.

Verificou-se que o desenvolvimento do seu raciocínio foi rápido. A dica fornecida é semelhante à conduta de regressão apresentada na figura 5.44: partir de um resultado e verificar todas as condições que dão característica à aquela definição. Assim, o estudante conseguiu definir que três números consecutivos podem ser escritos de forma genérica por $x, x + 1, x + 2$. Faltava verificar a soma entre elas, que pode ser confirmado no diálogo a seguir. Como o estudante chegou rapidamente a prova, sugeriu-se que ele simplificasse a fórmula geral.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 13 – LINHA 264 A 282

Linha 264	P: Não tem problema, se parar por aí. Então agora vamos ver se dá certo. Se essa fórmula que criou aqui estiver certa, então você substitui o x por algum número e tem que dar certo. Tem que dar um resultado que seja divisível por 3. Faz um teste, chute um número para x .
Linha 265	E13: Para x? 4. $3 \times 4 + 1 + 2...$ Acho que não vai dar certo, não. ((silêncio)) 3×4. ((silêncio)) $12 + 1...$
Linha 266	P: $(12) + 1 + 2$, ok? Então...
Linha 267	E13: Ah! 3 dividido... ((silêncio)) 15 dividido por 3, deu 5, 0. Ah, dá certo.
Linha 268	P: Opa, parece que dá certo, não é?
Linha 269	E13: Sim.
Linha 270	P: Tente um número negativo agora.
Linha 271	E13: ((silêncio)) $3 \times (-2) + 1 + 2$. $3 \times (-2)$ igual a... -6. $+ 1 + 2 - 3$. -3 dividido por 3, então (resto) 0.
Linha 272	P: Deu certo também.
Linha 273	E13: Deu certo.
Linha 274	P: Então parece que essa é a fórmula, não é? E13: É.
Linha 275	P: Então você achou a fórmula. A única coisa que você simplificaria seria isso, olha: aqui, $1 + 2$ não pode ser somando?
Linha 276	E13: Pode. Ah, tem x mais 3.
Linha 277	P: Isso. Então vai ficar...?
Linha 278	E13: $3x...$ mais 3.
Linha 279	P: Isso. Aí você achou a fórmula para achar qualquer número consecutivo inteiro que seja divisível por 3.
Linha 280	E13: É assim?
Linha 281	P: É assim.
Linha 282	E13: Nossa. Legal.

Os estudantes 3 e 13 são os que tiveram mais facilidade, no geral, para resolver as atividades, mas é interessante observar a diferença entre suas habilidades. Por exemplo, o estudante 3 questionou se os números consecutivos pares também se encaixariam na definição dada pelo enunciado. Já o estudante 13 foi direto ao ponto e nem chegou a levantar essa possibilidade. Essa observação é relevante, pois, muitas vezes, quando se elabora uma questão para avaliação, espera-se que o estudante percorra um raciocínio que está na mente de quem desenvolve a atividade. No entanto, pelo motivo de cada indivíduo ter o seu próprio invariante operatório, dependendo das variáveis que ele levar em consideração, poderá demorar ou até mesmo não conseguir resolver a questão. Isso não significa que ele não saiba o conteúdo, mas para uma avaliação objetiva, na qual avalia-se apenas a resolução escrita, o professor estaria

deixando de observar todo o raciocínio exposto pelo aluno. Inclusive, pode-se até observar, em alguns casos, estudantes que encontram o resultado correto rapidamente, mas não necessariamente são capazes de efetuar um raciocínio lógico e abstrato para outros casos.

The image shows handwritten work on a piece of paper. At the top, there are two lines of algebraic expressions: $x + (x + 1 + x + 2)$ and $x + x - 1 + x + 2$. Below these, the expressions are simplified to $3x + 1 + 2$ and then $3x + 3$. To the right of these, there is a division problem: $3 \cdot 4 = 1 + 2$ followed by a long division of 15 by 3, resulting in 5. Below this, there is another division problem: $12 : 1 = 2$. At the bottom, there is a subtraction problem: $3 - 2 + 1 + 2$ followed by $-6 + 1 + 2$ and finally -3 . To the right of this, there is another long division: $-3 \overline{) 9}$ resulting in 01 .

Figura 5.51 – Resposta estudante 13: Quarta tentativa da atividade 5 (estudo final).

Segue agora o estudante 20, último desse Grupo 1.

ESTUDANTE 20:

Esse estudante começou utilizando a estratégia de encontrar resultados da tabuada do três (pois o enunciado diz que a soma é divisível por três). Assim, ele escolheu números que fossem resultados dessa tabuada, mas não levou em consideração que apenas a **soma** deve ser divisível por três, e não necessariamente cada um dos números consecutivos, como pode-se observar neste diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 524 A 539

Linha 524	P: (...) Bom, esse aqui é sobre números consecutivos, o que fala nessa atividade?
Linha 525	E20: Espera aí. Já dei uma esquecida, porque ((acha graça)) como (já) faz tempo...
Linha 526	P: Não tem problema. Você pode ler e tentar me explicar o que fala a atividade.
Linha 527	E20: ((silêncio)) Por 3. Então, isso me complicou muito, porque aqui meio (que)... me vem na cabeça (que) eram todos os resultados do... da... a... tabuada do 3.
Linha 528	P: Aham...
Linha 529	E20: Que eu sei que todos que eu dividi por 3 sempre vai dar um resultado inteiro.
Linha 530	P: Certo.
Linha 531	E20: E, para mim, eu só entendi isso na minha cabeça. Agora, eu não sei se isso foi o que a questão quis dizer.
Linha 532	P: Aham.
Linha 533	E20: Não é? Porque para mim está meio... ((silêncio))
Linha 534	P: Tá.
Linha 535	E20: ((estudante lê o enunciado)) “Prove que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por três”.
Linha 536	P: Aham.
Linha 537	E20: Eu só conseguia pensar 6-9, aí vinha... 12 e assim por diante.
Linha 538	P: Isso. Você já está pensando no resultado em si, né?
Linha 539	E20: Resultado. É. ((acha graça))

Na continuação desse diálogo, fica mais evidente de que há uma dúvida em relação à definição de números consecutivos. Informou-se que ele deveria pensar em três números cuja soma resulta nesse número divisível por três. Porém, fica claro que seu equívoco ainda continua por insistir em pensar na sequência resultante da tabuada.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 540 A 549

Linha 540	P: Você teria que pensar na sequência, então, quais são os três números que somados dá esse resultado, por exemplo, 12?
Linha 541	E20: Quais os três números que formariam 12?
Linha 542	P: Isso. Somados entre eles dá 12.
Linha 543	E20: Três vezes? Ou não?
Linha 544	P: Soma. Então, some três. Soma esse, esse e esse.
Linha 545	E20: ((silêncio)) então eu sei que... por duas vezes consecutivas seria o 6, porque 6 mais 6 é 12.
Linha 546	P: Isso.
Linha 547	E20: Então... ((silêncio)) também não daria. Caramba. ((silêncio)) O 4, talvez.
Linha 548	P: O 4? Sim.
Linha 549	E20: O 4 (somado) três vezes, consecutivamente, daria 12.

Para tentar ajudá-lo a sair do raciocínio em círculo, perguntou-se diretamente o que significa números consecutivos. Para tal surpresa, ele foi capaz de dar um exemplo de uma sequência correta. Mas, mesmo com essa informação, ainda teve uma dúvida se essa sequência resultaria em um número divisível por três. Veja-se o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 550 A 561

Linha 550	P: Isso. Só que, aqui, está falando de uma outra coisa: que não podem ser iguais, têm que ser consecutivos. O que significa consecutivo?
Linha 551	E20: 4-5-6.
Linha 552	P: Isso.
Linha 553	E20: Nossa... Que daria o número 12?
Linha 554	P: É. 12 é um número que você pegou, mas não precisa ser 12.
Linha 555	E20: Ser 12?
Linha 556	P: Isso. Tem que ser algum resultado, né? A soma desses números consecutivos cujo resultado vai ser divisível por 3.
Linha 557	E20: Por 3.
Linha 558	P: Isso.
Linha 559	E20: Sim. Por exemplo, eu vou tentar 3... 4 e 5. Então 5... 9... 10-11-12.
Linha 560	P: Humn.
Linha 561	E20: Achei um! ((acha graça))

Empiricamente, ele conseguiu encontrar a primeira sequência e depois conseguiu obter duas sequências que podem ser observadas na figura 5.52.

The image shows three handwritten equations on a piece of paper:

$$3 + 4 + 5 = 12 \div 3$$

$$8 + 9 + 10 = 27 \div 3$$

$$5 + 6 + 7 = 18 \div 3$$

Figura 5.52 – Resposta estudante 20: Primeira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Após provar a definição, passou-se então para mais um conceito que estava faltando na interpretação desse estudante: os números devem ser inteiros. Para verificar se ele realmente compreende quais números fazem parte desse conjunto, pediu-se a ele que fosse justificado. No entanto, por meio desse diálogo, surgiu uma nova dúvida no estudante: a operação com números negativos. Segue o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 588 A 599

Linha 588	P: Certo. Então, aí você está provando, com três exemplos, que eles realmente seguem essa regra né?
Linha 589	E20: Sim.
Linha 590	P: Só que tem mais um detalhe. Ele fala que tem que ser a soma de três números consecutivos inteiros. E aqui ele fala que números inteiros são aqueles que...
Linha 591	E20: “São os números naturais incluindo os negativos”.
Linha 592	P: Isso. Isso significa que você tem que pegar três números consecutivos que sejam negativos também e tem que dar certo. Então tente pegar três números negativos em sequência, consecutivos, e veja se ele é divisível por 3.
Linha 593	E20: Tipo -3, -2 e -1?

Linha 594	P: Isso.
Linha 595	E20: Nossa. Mas não seria a mesma coisa?
Linha 596	P: Por quê?
Linha 597	E20: Porque... eles têm a mesma sequência.
Linha 598	P: Humn.
Linha 599	E20: Certo? E... bom... ((silêncio)) mas ele é negativo. Então, será que tem aquela regrinha do menos com menos, mais, e mais com menos é menos, e menos com menos é mais?

A “regrinha” que o estudante se refere é em relação à regra de sinais¹⁹ que é aplicada em operações de multiplicação com números negativos, atribuído a Diofanto de Alexandria, na forma como se conhece nos dias atuais (MORETTI, 2012, p.692). Contudo, como se trabalha com uma soma, essa regra não seria necessária. Porém, o estudante só se convence depois de realizar as operações empiricamente, que pode ser observado no seguinte trecho, e na figura 5.53 a sua resolução correspondente:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 609 A 634

Linha 609	E20: Olha, por exemplo... -3, -4 e -5.
Linha 610	P: Aham.
Linha 611	E20: Isso tem que virar uma soma e uma soma depende de sinais.
Linha 612	P: Humn.
Linha 613	E20: Então, menos com menos... ah, não. Está certo. Menos com menos é menos, e menos com menos, é menos.
Linha 614	P: Humn.
Linha 615	E20: Certo?
Linha 616	P: Humn.
Linha 617	E20: Certo?? Então como eu somaria esse se tudo é negativo? Será que eu teria que colocar... mas não tem como... Eu acho que... colocar em parênteses e... e... ((silêncio)) simplesmente...
Linha 618	P: É. Para mim, isso aqui que você escreveu já está certo. -3, -4 e -5. Para mim, você já fez a distributiva dos sinais.
Linha 619	E20: Sim...
Linha 620	P: Mas se você quiser se expressar, para não se confundir que se trata de uma soma, qual é a opção? A gente não pode ter dois sinais diferentes um do lado do outro, né?
Linha 621	E20: Sim.
Linha 622	P: Então tem que colocar os parênteses. Então...
Linha 623	E20: Parênteses.
Linha 624	P: ... como é que você faria usando parênteses?
Linha 625	E20: ((silêncio, escrevendo no papel))
Linha 626	P: Aham.
Linha 627	E20: ((silêncio escrevendo no papel))
Linha 628	P: Isso.
Linha 629	E20: Então, não é... realmente uma soma, é só uma junção dos números.
Linha 630	P: Humn...
Linha 631	E20: Significa que eu vou... porque...
Linha 632	P: Humn.
Linha 633	E20:... eu estou confusa. Se está falando para somar, para dar um resultado...
Linha 634	P: Certo.

¹⁹ A regra estabelece que a multiplicação entre dois números negativos resulta em um número positivo e a multiplicação de um número negativo com um positivo resulta em um número negativo.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, the expression $(-3) + (-4) + (-5)$ is written. Below it, the calculation $-3 - 4 - 5 = -12 \div 3 = -4$ is written. The student has used a plus sign between the parentheses in the first line and minus signs in the second line.

Figura 5.53 – Resposta estudante 20: Segunda tentativa da atividade 5 (estudo final).

É possível observar que, na figura 5.53, a forma como o estudante escreveu a expressão entre parênteses, ainda gera dúvidas sobre a multiplicação de sinais. Por isso, o sinal de adição foi colocado posteriormente, localizado mais abaixo da expressão. No trecho do seguinte diálogo, o aluno explica a sua dúvida:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 635 A 643

Linha 635	E20:... o número é negativo. Então teria que excluir os sinais e só colocar o resultado dos números e só acrescentar o negativo depois?
Linha 636	P: Humn. Quase lá. Olha: aqui, quando você colocou (os) parênteses, o que é esse sinalzinho que você colocou aqui?
Linha 637	E20: É a multiplicação.
Linha 638	P: Mas por que vira multiplicação se a gente está falando de soma?
Linha 639	E20: É porque eu me confundo se não tiver nada, nada para separá-los.
Linha 640	P: Isso. Se é nada, é multiplicação. Você está certinha. Só que é soma. Então, você tem que colocar um +.
Linha 641	E20: Teria que colocar um +.
Linha 642	P: É, escreve embaixo para deixar esse aqui. Isso. É +, não é?
Linha 643	E20: É que fica tão estranha essa conta. Porque o que eu... nunca fiz. Três números entre parênteses e neles dois, entre eles ter o sinal de adição.

Percebe-se, por meio desse diálogo, que o estudante apresenta uma dúvida em relação à soma com números negativos. Essa incerteza é mais comum quando os alunos começam a aprender números inteiros. Para isso, uma alternativa seria apresentar alguns exemplos do cotidiano que expresse a ideia de negativos (por exemplo, temperatura e reta numérica). Nesse caso, começou-se tentando explicar pela ideia de reta numérica, que não ajudou na compreensão do estudante. Segue o trecho:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 646 A 655

Linha 646	P: Tem o zero no meio, e aqui, o que é? ((mostrando um esquema na folha)) O que isso está representando na reta numérica? Então, você tem o menos 3, certo? ((suspiro)) Se ele fala: “ $(-3) + (-4)$ ”. Ou seja, + significa que você está somando, não é?
Linha 647	E20: Sim

Linha 648	P: Então, você vai andar, se você ficar + (-4), você tem que andar para a direita do zero, ou para a esquerda do zero?
Linha 649	E20: Humn... + (-4)?
Linha 650	P: Isso.
Linha 651	E20: Eu acho que ((silêncio)) para a direita.
Linha 652	P: Direita, para cá, então? Então eu teria que andar quatro casas para cá? 1-2-3-4?
Linha 653	E20: ((silêncio)) Nossa... A sua lógica está... ((acha graça)) ((silêncio))
Linha 654	P: Está confusa, assim?
Linha 655	E20: Muito. Porque... ((silêncio))

Como a explicação não surtiu efeito, usou-se então o exemplo do termômetro, que nada mais é do que representar a reta numérica na vertical. A simples mudança de representação facilitou a compreensão do estudante, que percebe a ideia de somar números negativos, como pode ser comprovado no trecho seguinte:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 666 A 675

Linha 666	P: Então, por exemplo, zero, eu somo 1, um positivo, você vai continuar andando para a direita. Certo? 1-2-3, ele não vai aumentando? Talvez, se eu colocar na vertical, será que fica mais claro para você? Assim, como se fosse um termômetro. Porque no termômetro, normalmente, para cima do zero são (números) positivos, não é?
Linha 667	E20: Aham.
Linha 668	P: E negativos é para baixo do zero, certo?
Linha 669	E20: Certo.
Linha 670	P: Será que te ajuda mais dessa forma?
Linha 671	E20: Então... eu acho que sim. Porque se fosse... como vou somando negativo com negativo, o resultado óbvio que vai dar negativo.
Linha 672	P: Humn.
Linha 673	E20: Então, vai ser uma continuidade. Por exemplo, se eu somar algum número e der 37, números negativos, vai dar 37 negativo.
Linha 674	P: Isso!
Linha 675	E20: Ah, entendi o que você quis dizer.

Após o esclarecimento sobre a soma com números negativos, voltou-se para o objetivo da atividade em si que consistia em verificar se um número negativo é divisível por três. Entretanto, o estudante apresentou uma nova dúvida: o que acontece com um número negativo dividido por três positivo?

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 682 A 693

Linha 682	P: Então, indiretamente você já estava fazendo a conta certa. Agora, a pergunta do exercício: quanto vai dar esse resultado, -3, -4, -5?
Linha 683	E20: 12 negativo.
Linha 684	P: 12 negativo. E ele é divisível por três?
Linha 685	E20: Eu não sei se números negativos dá para dividir.
Linha 686	P: Por quê?
Linha 687	E20: ((silêncio)) Ai... por que? Talvez porque o número 3, ele seja um número positivo e não negativo para dividir.
Linha 688	P: Humn. ((tsc))
Linha 689	E20: Multiplicação eu acho que é até possível.

Linha 690	P: Humn.
Linha 691	E20: É possível, na verdade.
Linha 692	P: Aham.
Linha 693	E20: Mas divisão nunca estudei, um negativo com positivo, dividindo.

Aqui novamente o estudante volta à dúvida da regra de sinais. Embora seja importante compreender essa regra para realizar a divisão, para verificar a divisibilidade, o fato do número ser negativo seria indiferente nesse caso. No entanto, acredita-se ser importante esclarecer essa dúvida que é explicada no seguinte diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 694 A 701

Linha 694	P: Na verdade, ele dá. Porque, quando você está fazendo a divisão, sempre está fazendo (conta) no (sinal) positivo e o sinal prevalece só no final. Então, nesse caso, -12. Então, esqueça, por enquanto, o menos e fique só com o 12.
Linha 695	E20: Dividido por 3. Ia dar um resultado negativo.
Linha 696	P: Isso. Então vai ficar o resultado...?
Linha 697	E20: ((silêncio)) Menos...? ((silêncio)) -4?
Linha 698	P: -4. Certo? Porque, na multiplicação, se você multiplicar um número negativo com um positivo dá negativo, não é?
Linha 699	E20: Aham.
Linha 700	P: Então, na divisão, é a mesma coisa. Se você divide um número negativo por positivo vai dar negativo. Se você dividir o número positivo por um número negativo vai dar negativo também, não é? Então são essas regrinhas que ele está lá no fundo. Porque, a multiplicação com a divisão, elas são opostas, não é? Inversas.
Linha 701	E20: Sim.

Depois de esclarecer outros tópicos relacionados, mas que não faziam parte do objetivo principal da atividade, tentou-se retornar ao assunto do enunciado. Iniciou-se explicando o que é provar e generalizar em Matemática. Depois, ofereceu-se um ponto de partida no qual o estudante pudesse começar o seu raciocínio:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 710 A 731

Linha 710	P: Uma dica: você pode começar pelo X.
Linha 711	E20: x. Isso.
Linha 712	P: É.
Linha 713	E20: É a primeira coisa que eu estou pensando. Agora como vou fazer que dê para entender que é sequentemente (uma sequência).
Linha 714	P: Humn. Isso. Aí é que está o desafio. Vamos ver?
Linha 715	E20: Porque se eu colocasse x mais y, mais alguma letra n, talvez, não sei...
Linha 716	P: Aham.
Linha 717	E20:... eu não sei se isso demonstraria que seria... ((silêncio))
Linha 718	P: ((suspiro)) Está, mas não está deixando explícita a regra.
Linha 719	E20: Ou eu poderia porque... se fosse eu, o aluno, e eu... e o professor passasse para demonstrar que é sequentemente (na sequência), eu colocaria $a... b + c$. $a + b + c$.
Linha 720	P: Certo.
Linha 721	E20: Porque eu, como aluno, entenderia que aquilo iria ser uma sequência.
Linha 722	P: Por que você tem certeza que é uma sequência, se você colocar $a + b + c$?

Linha 723	E20: Ah, porque vem desde o jardim de infância, olha... a... Alfabet... a... ((tsc)) desculpa, eu tenho a língua presa.
Linha 724	P: ((riso))
Linha 725	E20: Bom. Você entendeu.
Linha 726	P: Alfabeto.
Linha 727	E20: É. Porque aí vem sequentemente (na sequência) a, b, c, d, e, e isso vem se... que nem o professor, eu acho que a equação é de segundo grau, primeiro grau, que tem... $a + b + c$ que é igual... a tanto.
Linha 728	P: Certo.
Linha 729	E20: Então para mim isso é uma sequência.
Linha 730	P: Humn, certo. Interessante. Então isso significa que a, b e c , por serem sequenciais no alfabeto...
Linha 731	E20: Poderia ser sequencial em Matemática.

Uma observação interessante que se pode notar nesse diálogo é a interpretação das incógnitas como uma própria sequência. Ou seja, A, B e C é uma sequência, de acordo com a ordem alfabética. Não é a primeira vez que se observa alunos dessa faixa etária apresentando tal tipo de associação quando começam a estudar Álgebra. Booth (1995, p. 25), na década de 80, conduziu uma pesquisa que apontou um mesmo tipo de associação em alunos britânicos. Ou seja, é um obstáculo muito comum, não limitado apenas a estudantes brasileiros.

Um ponto curioso ao analisar as respostas do estudante 20 é que, quanto mais se avança na entrevista, descobrem-se mais conceitos frágeis em seu aprendizado envolvendo a Álgebra que não se limita ao que se pede na atividade 5.

No seguinte trecho, ele começa, finalmente, a esboçar uma expressão que representaria uma soma de números consecutivos, mas se depara com um problema de notação ao escrever as incógnitas (figura 5.54). Os índices de uma incógnita sempre devem aparecer em subscrito (x_1, x_2, x_3) em vez de sobrescrito (x^1, x^2, x^3), para não confundir com a notação de potência.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 736 A 759

Linha 736	P: Isso. Não é isso que eu quero. Eu quero usar qualquer letra e descobrir, só de “bater” o olho, por causa do formato: <i>“ah, isso aqui é um número sequencial, essa aqui é uma sequência”</i> .
Linha 737	E20: Nossa. Como faria isso? Deus do céu. Eu não poderia colocar tipo $x_1 + x_2 + x_3$?
Linha 738	P: Humn, está quente.
Linha 739	E20: “Sub” (subscrito) assim?
Linha 740	P: Pode ser. Tenta escrever, escrevendo fica mais claro, o que você está pensando.
Linha 741	E20: x_1...
Linha 742	P: Humn.
Linha 743	E20:... ((silêncio)) mais... $x_2 + x_3$.
Linha 744	P: Certo.
Linha 745	E20: Tipo assim.
Linha 746	P: Humn.
Linha 747	E20: ((silêncio))
Linha 748	P: E aí, o que está me indicando que isso é consecutivo?
Linha 749	E20: E se...
Linha 750	P: Humn?
Linha 751	E20: Deixe-me pensar.

Linha 752	P: Porque olha: o que acontece?
Linha 753	E20: Aqui pode ser ao quadrado.
Linha 754	P: Pode.
Linha 755	E20: ((sobreposição de vozes))
Linha 756	P: Isso. Pode confundir com o quadrado e com o cubo. Mas tem uma outra coisa. Se eu substituir o x por qualquer número, ele tem que me dar automaticamente a sequência “na hora”. Então, ou seja, se eu substituir por 3, aqui já teria que me dar o 4 e aí teria que dar o 5 quando eu substituo. Só que aqui não, se eu colocar x , é 3, vai ficar 3, 3, 3. Ou seja x_2 não me dá nenhuma informação. Então pode ser qualquer número, então é 6, é 9, é 12. Então você viu que não tem controle?
Linha 757	E20: Sim...
Linha 758	P: Você tem que fazer alguma coisa que só de substituir já te dá o resultado.
Linha 759	E20: ((silêncio)) E se eu (colocasse) x ao quadrado + x ao quadrado + ((acha graça)) x ao quadrado?

$$x^1 + x^2 + x^3$$

$$x^2 + x^2 + x^2$$

Figura 5.54 – Resposta estudante 20: Terceira tentativa da atividade 5 (estudo final).

Ao sugerir que a soma poderia ser representada por soma de quadrados, rapidamente verifica-se que a sequência gerada não é de números consecutivos. Assim, a próxima hipótese a ser testada é a soma $x + 2x + 3x$, assim como fez o estudante 3, na mesma atividade. Parece que quando se fala de consecutivos, a Aritmética parece atrapalhar a compreensão de incógnitas para formular o conceito de consecutivo (o aluno relaciona que, como 1, 2, 3 são consecutivos, então, por analogia, $x + 2x + 3x$ também deve ser). No caso do estudante 13, a definição de número consecutivo parecia estar mais clara, por isso, conseguiu chegar ao resultado em poucos passos. Os invariantes operatórios que se mobilizam para responder a uma pergunta pode ter muito mais passos do que o necessário.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 760 A 779

Linha 760	P: Dá para testar. Vamos testar para ver se dá certo, isso.
Linha 761	E20: ((silêncio)) x ao quadrado + x ao quadrado + x ao quadrado. Só que o x não vai me mostrar nada, e nem ao quadrado vai mostrar nada.
Linha 762	P: É. Porque vamos supor um número aí.
Linha 763	E20: De... 5.
Linha 764	P: 5. 5 ao quadrado é quanto?
Linha 765	E20: 5 ao quadrado? 5 ao quadrado é 25.
Linha 766	P: Isso. E aí aqui vai ser 5 ao quadrado, 25. 5 ao quadrado, 25.
Linha 767	E20: Sim.
Linha 768	P: Vai ficar 25-25-25, não é sequência.
Linha 769	E20: ((silêncio)) Porque... meu, não sei se eu poderia colocar tipo... um x, $2x$, $3x$... ((acha graça))

Linha 770	P: Vamos tentar, vamos lá?
Linha 771	E20: $1x + \dots$ ((silêncio))
Linha 772	P: Aham.
Linha 773	E20: $2x$.
Linha 774	P: $2x \dots$ Ahn? $3x$. Ok.
Linha 775	E20: Seria igual a x ((acha graça)) que é igual a ((acha graça)) x dividido por 3. ((acha graça))
Linha 776	P: Humn.
Linha 777	E20: Não, né? Nunca vi uma expressão que já teria (um) número assim, tipo logo de cara.
Linha 778	P: Não, é que aqui já está terminando. Esquece essa parte. Você tem que se concentrar só nessa primeira parte da igualdade. Então, tem que ser... Bom, vamos testar. Chuta um número para o x .
Linha 779	E20: Eu esqueço que o x pode ser um número.

Pode-se observar, na última fala desse trecho, que o estudante tem dificuldade em associar a incógnita a um número qualquer. Esse tipo de dificuldade é muito comum nos estudantes iniciantes em Álgebra, pois a Aritmética ainda está muito enraizada em seu processo lógico de resolução de problemas. Para romper e superar essa dificuldade, enfatizou-se que é necessário pensar que cada incógnita assume apenas um número e, portanto, é necessário definir um algoritmo para que a sequência obedeça as regras impostas pelo enunciado. Porém, como a representação da incógnita usando letras acaba sendo o próprio obstáculo na compreensão do estudante, utilizou-se a estratégia de pensar como se fossem quadrados vazios que devem ser preenchidos com números quaisquer. A explicação consta nesse diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 939 A 950 E 972

Linha 939	P: Que é o x , tá? Aqui eu vou usar o quadradinho. Aí, esse número, que eu não sei, pode assumir qualquer um. Então, pode ser zero, 1-2-3-4... Tá? Quando eu sei que o número é 3, eu sei que o próximo número é 4, não é?
Linha 940	E20: Sim.
Linha 941	P: E o próximo é 5. Daqui para cá, do 3 para o 4 eu somei 1, certo? Do 4 para o 5 eu somei...? 1. E do 3 para o 5? ((silêncio)) Somou quanto?
Linha 942	E20: 2.
Linha 943	P: 2, né? Ou seja, aqui eu não sei que número que é, mas eu sei que tenho que somar 1. ((silêncio)) Certo?
Linha 944	E20: Sim.
Linha 945	P: Então, concorda que aqui poderia ser o quadradinho mais 1, ((silêncio)) certo? Mais... Quadradinho, do quadradinho para cá soma quanto mesmo, como eu fiz aqui?
Linha 946	E20: 2.
Linha 947	P: 2. O quadradinho mais 2? Isso aqui é do (momento) [00:08:46]. Então agora chuta um número.
Linha 948	E20: É... 5.
Linha 949	P: 5, né? Se quadradinho vale 5, então é 5 mais 1 que é 6. Certo? E quadradinho vale 5, 5 mais 2, 7. ((silêncio)) Ficou mais claro?
Linha 950	E20: Eu vou tentar fazer na... na minha base, para eu ver o que eu entendi.
Linha 972	E20: Como é possível chegar nesse... Não! Como... Vai, ô, gente. Mas... Como é que fica... sequentemente (sequencial)? Qualquer número que eu colocar vai ficar em sequência?

Após a compreensão da ideia de incógnita, que parece ter êxito após o uso do quadrado no lugar de letras, o estudante passa a se questionar como poderá obter a sequência seguindo essa lógica. Assim, nesse ponto, chegou-se a explicação similar que foi feito com o estudante 13 que, após a terceira tentativa, já deduziu a sequência geral e concluiu a atividade. No caso do estudante 20, ele só chegou a essa conclusão após muitas tentativas a mais. Primeiro, ele obteve a lógica para sequência par e depois para sequência ímpar. No entanto, o enunciado pede para que sejam quaisquer números inteiros. Questionou-se o estudante o que acontece quando se multiplica um número por dois? E por três? O que aconteceria quando se multiplica um número ímpar com um par? E um ímpar com ímpar?

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 1073 A 1100

Linha 1073	P: É. Só que aí você está começando com número ímpar. Se você colocar um número par, provavelmente ele vai te dar número par aqui, não é? Tem que ser uma fórmula que não importa o número que você colocar, ele vira, e ele se transforma.
Linha 1074	E20: Não tem como! Gente, não existe nenhum número mutante!
Linha 1075	P: O que acontece se você multiplica um número, por exemplo?
Linha 1076	E20: Se eu multiplico?
Linha 1077	P: Aham.
Linha 1078	E20: Dobro o (preço) dele? O valor.
Linha 1079	P: Depende, né? Se você multiplicar por 3, ele...?
Linha 1080	E20: É. Ele faz... É o triplo.
Linha 1081	P: É o triplo, né? Agora, o que acontece, por exemplo, se eu multiplicar é... 2, que é um número par por um número ímpar?
Linha 1082	E20: 2×3...
Linha 1083	P: Aham.
Linha 1084	E20: Vai dar o resultado de número ímpar.
Linha 1085	P: 2 vezes 3 é quanto?
Linha 1086	E20: 6.
Linha 1087	P: 6. Então ele transforma em um número par.
Linha 1088	E20: Par. É.
Linha 1089	P: Então a multiplicação parece que tem isso, né? Você pega dois números que são diferentes: um par e outro é ímpar...
Linha 1090	E20: Mas então sempre sai...
Linha 1091	P: É. Agora será que isso vale sempre? E se multiplicar número ímpar por ímpar?
Linha 1092	E20: Tipo 3 vezes 3?
Linha 1093	P: Isso.
Linha 1094	E20: Ia dar um número ímpar, 9.
Linha 1095	P: Humn. E se eu multiplicar 1×3 também dá ímpar? E se eu multiplicar 3×5 ?
Linha 1096	E20: Vai dar um número ímpar.
Linha 1097	P: Ímpar. Então o segredo parece que está aí. De mexer alguma coisa de multiplicar número par ou ímpar, ou ímpar com ímpar ou par com par. Quando multiplico par com par, qual é o resultado?
Linha 1098	E20: Par.
Linha 1099	P: Par. Então, ou seja, você tem que brincar com isso, né?
Linha 1100	E20: É.

O diálogo continua até que ele compreende o processo de obter uma sequência e a diferença entre sequências pares e ímpares. Porém, ele ainda continua, sem sucesso, a obter

uma sequência sem ancorar o primeiro número ao próximo (figura 5.55). Assim, foi necessário intervir para que ele pudesse chegar ao resultado:

$$\begin{array}{l} (2+1) + (4x+1) + (8x+1) \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ 5 + 9 + 14 \\ \\ (2x+1) + (4x-1) + (5x-1) \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ 5 + 7 + 9 \\ \\ (1x) \\ (2x+1) + (4x+1) + (5x-1) \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ 7 + 11 + 14 \end{array}$$

Figura 5.55 – Resposta estudante 20: Sexta tentativa da atividade 5 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 20 – LINHA 1217 A 1224 / LINHA 1255 A 1274

Linha 1217	P: É. Sabe qual é o problema? Porque você tem que sempre pensar em ancorar alguma coisa no primeiro número. Tudo bem você achar $4x - 1$, $5x - 1$. Só que eles não dizem nada a respeito do primeiro número. Porque lembra que, para você achar uma sequência, sempre têm que estar em relação a aquele anterior. Então ele tem sempre uma informação do anterior sendo carregada. Então, você tem que mexer alguma coisa a partir desse número aqui. Então, se eu sei que $2x + 1$ sempre está dando um número ímpar, então, aqui já está dado que eu sempre vou achar um número ímpar. Só que, partindo que isso aqui é um número ímpar, por exemplo: 7, qual é o próximo número ímpar?
Linha 1218	E20: Próximo número ímpar? 9.
Linha 1219	P: 9. E o próximo número ímpar depois do 9?
Linha 1220	E20: 11.
Linha 1221	P: Quanto que eu estou fazendo de operação para achar o próximo número aí?
Linha 1222	E20: De 2 em 2.
Linha 1223	P: De 2 em 2. Então o que será que eu tenho que fazer no próximo aqui? O que eu tenho que somar?
Linha 1224	E20: ((silêncio)) Meu Deus do céu, eu entendi a lógica, mas eu não... ((silêncio))
(...)	
Linha 1255	P: $2x + 5$. Então, $2x + 3$... ((silêncio)) $2x + 5$ parece que são os números sequenciais de $2x + 1$, porque você está acrescentando de 2 em 2, porque você está carregando uma informação da anterior. Agora vamos tentar o seu número. Você tinha substituído x por 3. Certo?
Linha 1256	E20: Sim.
Linha 1257	P: Então, esse aqui vai ficar quanto? 2×3 mais 1. Que dá?
Linha 1258	E20: Vezes 3 + 1... é 7.
Linha 1259	P: 7. Esse aqui? $2 \times 3 + 3$.
Linha 1260	E20: É igual a... 7-8-9, 10. Não. 6, 7-8-9.
Linha 1261	P: 9. E este? $2 \times 3 + 5$?
Linha 1262	E20: 11.
Linha 1263	P: 11. ((silêncio)) Quer testar se ele funciona para todo mundo? Chuta agora um outro número x .
Linha 1264	E20: É... 4.
Linha 1265	P: 4. $2 \times 4 + 1$?
Linha 1266	E20: ((silêncio)) 8... 9.

Linha 1267	P: $9. 2 \times 4 + 3?$
Linha 1268	E20: 8... 11.
Linha 1269	P: $11. 2 \times 4 + 5?$
Linha 1270	E20: ((silêncio)) 13.
Linha 1271	P: 13. Parece que deu certo, né? Então você entendeu? A informação sempre tem que estar ancorada no primeiro para você achar uma sequência, né? Claro que esse aqui é uma regra porque a gente está querendo achar uma sequência consecutiva.
Linha 1272	E20: Aham.
Linha 1273	P: Se fosse, por exemplo, só pares ou ímpares, o que você fez aqui já estaria perfeito. Então, o segredo é sempre tentar pensar qual é a operação que você tem que fazer para achar o próximo. Só que sempre lembrando da informação anterior. Daí você consegue achar o próximo. Gostou?
Linha 1274	E20: ((silêncio)) É complicado, ((acha graça)) mas eu entendi sim, a sua... a lógica assim. Entendi.

Como o diálogo é muito longo, sintetizou-se uma parte da conversa que resultou na resolução representada pela figura 5.56 e, conseqüentemente, na resposta correta 5.57:

Handwritten mathematical work showing a sequence of expressions with arrows indicating the progression of terms. The expressions are:

$$3(x+2) + (x+3)$$

$$3(x+2) + (x+4) = F$$

$$4(x+2) + (x+4) =$$

$$13(x+2) + (x+4) =$$

Below these, a sequence of terms is shown with arrows indicating the progression:

$$(x+2) \rightarrow (x+4) \rightarrow (x+6) \rightarrow (x+8) \rightarrow (x+3)$$

Figura 5.56 – Resposta estudante 20: Sétima tentativa da atividade 5 (estudo final).

Handwritten mathematical expression showing a sequence of terms with arrows indicating the progression:

$$x + (x+1) + (x+2)$$

Figura 5.57 – Resposta estudante 20: Oitava tentativa da atividade 5 (estudo final).

Nos quadros a seguir, estarão sintetizadas as atividades analisadas do Grupo 1 e seus respectivos esquemas mobilizados, por campo conceitual envolvido em cada modelo. Lembrando que esses esquemas são relativos a aqueles que o estudante mobilizou de forma autônoma, sem ajuda da pesquisadora durante a entrevista.

Quadro 5.2 - Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 1 – Aritmética ²⁰			
Estrutura multiplicativa	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Multiplicação de dois termos iguais.	SIM	SIM	SIM
Estrutura algébrica	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Multiplicação de dois termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO
Comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos.	SIM	SIM	NÃO
Multiplicação entre a soma de dois termos algébricos.	SIM	SIM	SIM
Soma de termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO
Compreensão do coeficiente de uma variável.	SIM	NÃO	NÃO
Compreensão da função dos parênteses.	SIM	NÃO	NÃO

Quadro 5.3 - Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 2 – Geometria			
Estrutura multiplicativa	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Multiplicação de dois termos iguais.	SIM	SIM	NÃO
Estrutura algébrica	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Multiplicação de dois termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO

²⁰ Dividiu-se esse esquema em estruturas algébricas e multiplicativas, valendo-se das propriedades aritméticas.

Quadro 5.4 - Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 3 – Classes e ordens			
Estrutura aditiva²¹	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Duas medidas que se compõem para resultar em uma terceira.	SIM	SIM	SIM
Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.	SIM	SIM	NÃO

Quadro 5.5 - Esquemas mobilizados pelo Grupo 1: Modelo 4 – Conjuntos			
Estrutura aditiva	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.	SIM	SIM	SIM
Estrutura multiplicativa	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Multiplicação de dois termos iguais.	SIM	SIM	SIM
Multiplicação de dois termos diferentes.	SIM	SIM	SIM
Noção de múltiplo e divisor.	SIM	SIM	SIM
Estrutura algébrica	Estudante 3	Estudante 13	Estudante 20
Soma de termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO
Multiplicação de dois termos algébricos iguais.	SIM	NÃO	NÃO
Compreensão da função dos parênteses.	SIM	SIM	NÃO

²¹ No caso das estruturas aditivas, utilizaram-se as categorias definidas por Vergnaud (2014, p. 200)

5.3.2 Respostas do Grupo 2

Neste grupo, os três estudantes foram nomeados como 6, 27 e 32 desde o estudo piloto. Já a escolha do perfil desses alunos, para representar o Grupo 3, baseou-se nos seguintes critérios:

1. Resolveu quase todo o protocolo do estudo piloto;
2. Mesmo após o contato com as *perguntas-modelo* do estudo piloto, não conseguiram elaborar ou melhorar suas respostas;
3. Apresentou receptividade para dar continuidade à próxima fase da pesquisa.

Vale ressaltar que, conforme descrito no quadro 5.1, o Grupo 2 é composto por estudantes que apresentaram evidências de problemas de interpretação de texto e dificuldades de expressão na escrita. Portanto, o protocolo elaborado tenta elucidar o nível de interpretação de texto de cada um desses estudantes, além de comparar um ou outro modelo encontrado em comum com o Grupo 1. Embora as atividades não sejam exatamente iguais entre os dois grupos, elas possuem relativamente o mesmo tema e conceito em questão, com utilização de um recurso diferenciado, como o jogo digital, por exemplo.

Na etapa 1 do protocolo, apresentou-se um jogo digital, que apresenta como tema as equações, para que os estudantes jogassem, durante 30 minutos, antes de iniciar a responder as questões da atividade. Após o término do tempo, os três estudantes opinaram que o jogo é interessante, intuitivo e que, de alguma forma, ajuda a entender o conceito de equações. No entanto, dois deles afirmaram que conseguiram passar de uma fase para a outra do jogo, sem saber exatamente o que estavam fazendo em sua operação. Ou seja, manipularam de forma mecânica²². Isso é uma fragilidade encontrada em jogos digitais, já que o usuário pode utilizar o processo de “tentativa e erro” até obter o resultado correto, não necessariamente garantindo que houve a compreensão da operação realizada. Mas também se relevou esse ponto, neste caso específico do nosso estudo, já que o tempo de contato com o jogo foi muito curto. Assim, ressalta-se a importância do uso crítico e consistente dos recursos digitais como material didático complementar por parte do professor.

Seguem as análises dos modelos encontrados neste grupo, nos subtópicos a seguir.

²² Embora seja relevante, por não ser tema central desta pesquisa, optamos por não desenvolver em detalhes a discussão sobre a utilização de jogos digitais no ensino de Matemática.

5.3.2.1 Modelo 1 – Aritmética

Na etapa 2 do protocolo, foram apresentadas quatro atividades (1 a 4) nas quais o estudante deveria, basicamente, fazer a operação de soma de um dos lados da igualdade para obter o valor da variável x . No entanto, em cada uma dessas atividades, foi apresentada uma explicação breve sobre a definição de variável e constante. Esse tipo de artifício foi utilizado para verificar o nível de leitura e compreensão dos estudantes, embora não fosse essencial para a resolução desse exercício. A verificação da leitura foi feita durante a entrevista, por meio de questionamentos sobre a própria resposta elaborada pelos alunos ou pedindo a eles que explicassem o objetivo da atividade com suas próprias palavras. Quanto à resolução das atividades de 1 a 4, os três participantes responderam corretamente como se pode observar nas figuras 5.58 a 5.63 a seguir:

1. Quanto vale o x ? Some os números "2" do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 2$$

Resposta: A Resposta vai ser 4 x

2. x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 4$$

Resposta: o Valor de x é: 6

Figura 5.58 – Resposta estudante 6: Atividades 1 e 2 (estudo final).

3. x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 10 + 2$$

Resposta: o Valor de x vai ser 12

4. Os números "3" e "7" são "constantes". Ou seja, qualquer número por si só é chamado de "constante". Encontre o valor de x na equação abaixo.

$$x = 3 + 7$$

Resposta: o Valor de x é: 10

Figura 5.59 – Resposta estudante 6: Atividades 3 e 4 (estudo final).

1. Quanto vale o x ? Some os números "2" do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 2$$

Resposta: $x = 4$

2. x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 4$$

Resposta: $x = 6$

Figura 5.60 – Resposta estudante 27: Atividades 1 e 2 (estudo final).

3. x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 10 + 2$$

Resposta: $x = 12$

4. Os números "3" e "7" são "constantes". Ou seja, qualquer número por si só é chamado de "constante". Encontre o valor de x na equação abaixo.

$$x = 3 + 7$$

Resposta: $x = 10$

Figura 5.61 – Resposta estudante 27: Atividades 3 e 4 (estudo final).

1. Quanto vale o x ? Some os números "2" do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 2$$

Resposta: $x = 4$

2. x é uma variável. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 4$$

Resposta: $x = 6$

Figura 5.62 – Resposta estudante 32: Atividades 1 e 2 (estudo final).

Figura 5.63 – Resposta estudante 32: Atividades 3 e 4 (estudo final).

Já no estudo piloto, em atividades utilizando o conceito de distributiva e de expressões algébricas, esses estudantes demonstraram dificuldades semelhantes ao do Grupo 1. No entanto, o nível de desenvolvimento das suas respostas no estudo piloto como um todo foi mais incipiente do que os do primeiro grupo. Também se destacou o fato de que nenhum deles conseguiu melhorar ou completar a resposta após o contato com as *perguntas-modelo* aplicadas em um segundo momento do estudo piloto. Por isso, esses alunos foram separados em um novo grupo com atividades diferenciadas e mais simples.

Conforme já citado, no Capítulo 1, Astolfi, apoiando-se em Martinand (1986), sugere um tratamento didático, com a noção de *objetivo-obstáculo*. Desse modo, os obstáculos à aprendizagem, já familiarizados, passariam a ter sua superação como objetivos didáticos. Isso significa elaborar aulas que considerem as dificuldades que possam levar à má utilização de fórmulas e às compreensões equivocadas de conceitos.

Vejam-se as figuras de 5.64 a 5.66 em comparação com o Grupo 1.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = 2 + 2 = 8.$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 = 1 + \frac{1}{2} + 3^3 + 2^2 = 28.$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 = 2^2 + 2^2 = 16$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$
 $(\frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3) \cdot 2 \times 2 = 4$
 $\frac{4}{3}$
 $\times \frac{3}{3}$
 $\frac{4}{12}$

Figura 5.64 – Resposta estudante 6: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto).

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = 2a + ab + ba + 2b =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Não muito fácil, não me lembro muito bem como resolver esse problema.

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Os números se repetem, alguns parenteses não estão, mas cada um os conta e os fornece.

Figura 5.65 – Resposta estudante 27: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto).

Série V: Os problemas a seguir estão separadas em seção B1 e B2.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$ *a diferença entre ambos e que uma e a conta e a outra o resultado.*

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Figura 5.66 – Resposta estudante 32: Primeira tentativa da atividade B1 – Série V (estudo piloto).²³

Já nas atividades 5 e 6, exigiu-se a compreensão das explicações apresentadas nos enunciados anteriores para que pudessem ser concluídas com sucesso. Sobretudo a atividade 6, na qual o estudante deveria responder se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa** de acordo com a equação apresentada. Porém, a atividade 5, especialmente o item *b*, foi a que possibilitou a elaboração de alguns questionamentos acerca do nível de compreensão de leitura de cada um desses estudantes. Segue os diálogos correspondentes:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 37 A 51

Linha 37	P: Então aqui ele fala: x é igual a 12. Então o x é igual a qual valor? O que significa isso?
Linha 38	E6: Então, daí eu fiz multiplicando. 6×2, que daí achei o resultado, que era 12.
Linha 39	P: Aham. Isso, você foi além. Ele só pediu assim: “ <i>O x é igual a qual valor?</i> ”. Se ele te deu que o x é igual a 12, então x é 12. Você foi além e representou de uma outra forma. Está certinho também. Agora ele fala: “ <i>tente representar uma soma que dá o mesmo (valor) de x do item A</i> ”.
Linha 40	E6: É o que eu somei.
Linha 41	P: Isso.
Linha 42	E6: $6 + 6 = 12$.
Linha 43	P: Isso, perfeito. Qual seria uma outra? Você consegue pensar em outra além de $6 + 6$? ((silêncio))
Linha 44	E6: ((suspiro)) humn... ((silêncio)) Não sei. Não sei se...
Linha 45	P: É só $6 + 6$ que dá 12? Você consegue pensar em outros dois números que dá 12 o resultado?
Linha 46	E6: 6×2.
Linha 47	P: É, mas só com soma.
Linha 48	E6: Com soma? ((silêncio)) $10 + 2$?

²³ Transcrição literal da resposta: “A diferença entre ambos e (é) que uma e (é) a conta e a outra (o) resultado”.

Linha 49	P: $10 + 2$. Perfeito. Tem outra?
Linha 50	E6: Ah, deixa eu ver. ((fala baixo)) ((silêncio)) $8 + 4$?
Linha 51	P: 8 mais 4. Perfeito, está ótimo.

Figura 5.67 – Resposta estudante 6: Atividade 5 (estudo final).

O estudante 6 respondeu de forma correta o item *a* (vide figura 5.67) da atividade 5, embora tenha ido além ao apresentar uma operação de multiplicação em sua resposta. No entanto, no item *b*, no qual se pedia para representar uma soma, apresentou um pouco de dificuldade em variar o exemplo que já tinha apresentado no item anterior. Também é interessante ressaltar que, antes desse trecho do diálogo, houve uma dificuldade de passar a noção de **constante** para esse estudante que, mesmo com alguns exemplos práticos, oscilou sua resposta de diversas maneiras. Veja-se o trecho:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 25 A 34

Linha 25	P: Por exemplo, 3 não pode ter outro 3. 3 é (igual a) 3, não é? No caso do x , não. Se você fala: “O número é um x ”, o x pode ser qualquer número. Você pode pensar no 1, o seu colega pode pensar no 10, no 11, pode assumir qualquer valor. Quando você fala que (algo) é constante, qual é o significado que você tem fora da Matemática? O que você entende por constante? ²⁴
Linha 26	E6: ((silêncio))
Linha 27	P: Se eu falar que... “aquela pessoa lá é constante”. Ou: “ela está constantemente fazendo algo”. O que você entende?
Linha 28	E6: Que está repetindo aquela coisa.
Linha 29	P: Repetindo? Sim. Então, de certa forma, se falamos de velocidade como: “aquele carro seguiu uma velocidade constante de 60 quilômetros por hora”. O que significa isso?
Linha 30	E6: Que estava andando muito rápido.
Linha 31	P: Muito rápido? Mas, do que você me explicou antes, está um pouco diferente o significado, não é? Será que constante é o que muda ou o que permanece?
Linha 32	E6: ((Silêncio)) Permanece.
Linha 33	P: Permanece? Então, por exemplo, quando você fala que uma pessoa é constante, ela é sempre...?

²⁴ A explicação feita neste trecho em relação ao conceito de incógnita não é a mais adequada. Porém, mantivemos a transcrição fiel ao que foi gravado no dia da entrevista, para ressaltar a dificuldade de manter um tom de conversa mais informal, com menos uso de vocabulário técnico, para facilitar a compreensão do aluno.

Linha 34	E6: Ela sempre fica naquele lugar, fazendo as atividades?
-----------------	--

Esse trecho pode indicar que muitos dos equívocos cometidos por estudantes, mesmo em atividades de Matemática, são originados pela falta de compreensão do próprio significado das palavras do enunciado, mesmo quando elas não sejam palavras técnicas, relacionadas ao vocabulário matemático. Não compreender o que se lê também é um obstáculo relevante para o aprendizado dessa disciplina.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 27 – LINHA 43 A 54

Linha 43	P: A atividade... 7, não é? Deixe-me ver só as outras aqui. Ah e essa do verdadeiro ou falso?
Linha 44	E27: Ah... é, basicamente, você... faz, tipo, você tem (o fato de) que os dois lados precisam ser iguais.
Linha 45	P: Aham.
Linha 46	E27: Então o resultado... você tem o resultado de um lado, ou do outro, e aí precisa somar os números para obter o mesmo valor que o outro lado.
Linha 47	P: Aham.
Linha 48	E27: Se... não for o mesmo valor, é falso.
Linha 49	P: Certo.
Linha 50	E27: Se for, os dois derem o mesmo valor, é verdadeiro.
Linha 51	P: Aham... Isso porque... o sinal de igual ele representa...
Linha 52	E27: ((Silêncio))
Linha 53	P: Por que você tem que fazer o valor igual dos dois lados da igualdade?
Linha 54	E27: Não sei... não sei explicar... (rs) está difícil... É... ah eu não vou saber te explicar não, professora...

No diálogo com o estudante 27, a explicação inicia-se de forma promissora, pois ele parece ter compreendido o objetivo da atividade 6 (indicar se a equação é verdadeira ou falsa) e relata, com as próprias palavras, o que deve ser feito. No entanto, quando se questionou um fato essencial de uma definição de equação (o significado do sinal de igualdade), o estudante já demonstra hesitação e afirma que não sabe responder. Por esse motivo, voltou-se para a atividade 5 e questionou-se a forma como o estudante apresentou sua resolução.

Figura 5.68 – Resposta estudante 27: Atividade 5 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 27 – LINHA 55 A 72

Linha 55	P: Ah, você fez certinho aqui. Então vamos ver a atividade 5, por exemplo.
Linha 56	E27: Humn.
Linha 57	P: Ele fala assim que a igualdade tem uma equação. Na equação, normalmente você tem um valor desconhecido, que é o x ...
Linha 58	E27: É.
Linha 59	P: E ele está representado por um valor constante do outro lado da igualdade. Então x é igual a qual valor? Aqui ele já está expresso.
Linha 60	E27: 12...
Linha 61	P: É... E aí, ele pede para representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item A. Então, você deu, por exemplo, $8 + 2 = 5 + 5$.
Linha 62	E27: Aham.
Linha 63	P: Essa condição está certa? Por que? ((pausa)) Porque 8 mais 2 é igual a...
Linha 64	E27: 10... E 5 + 5 igual a 10.
Linha 65	P: Igual a 10. Só que ele pede para que dê o mesmo valor de x no item A. Qual é o valor de x no item A?
Linha 66	E27: 12.
Linha 67	P: 12. Então, qual seria a outra expressão que você teria que representar?
Linha 68	E27: Teria que ser 12? Então faria, tipo, 8 + 4 que daria 12.
Linha 69	P: Isso.
Linha 70	E27: Igual a 5... ((Silêncio)) Não... 5? ((Silêncio)) 5 + 7 que daria 12 também.
Linha 71	P: Isso. Então, ou seja, tem várias formas, porque tem outras somas que podem representar 12, certo?
Linha 72	E27: Tem... tem...

É possível observar na figura 5.68 que o estudante respondeu de forma parcialmente correta o item *b*, mas não se atentou ao fato de que deveria apresentar o resultado 12 na soma e não 10. No entanto, ele só corrigiu o equívoco quando se retomou a atividade e se questionou passo a passo sua resposta. Ou seja, há mais um indício de que os estudantes que foram escolhidos para compor este grupo apresentam, como característica em comum, o fato de compreenderem de forma fragmentada os objetivos da atividade por meio da leitura individual. Contudo, se são feitas questões objetivas e direcionadas, ainda são capazes de compreender e responder corretamente o que se espera nessas atividades. Posteriormente, será apresentado o exemplo do estudante 4 que foi escolhido para classificá-lo tanto no Grupo 2 quanto no 3, para termos um parâmetro das diferenças dos níveis de compreensão, mesmo naqueles grupos de estudantes com mais dificuldade para resolver problemas matemáticos.

Veja-se o diálogo com o estudante 32 para exemplificar outro indício de compreensão parcial das atividades, mesmo tendo respondido corretamente *a priori*.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 32 – LINHA 21 A 36

Linha 21	P: Então aqui você representou $x = 6 + 6$. Ok, agora, se você fizesse uma representação parecida com essa do... item 6. Como você faria?
Linha 22	E32: Humn... ((Silêncio)) Como assim?? (rs)
Linha 23	P: Por exemplo, aqui você falou que $x = 6 + 6$. Está certo?
Linha 24	E32: Aham.

Linha 25	P: Mas, aqui, está vendo que no 6 está representando uma equação? Por exemplo, $6 + 3 = 9$. Em vez de usar o x , se usasse números, como ficaria aqui?
Linha 26	E32: Colocasse $6 + 6 = 12$?
Linha 27	P: Isso! Aí, sem usar o 12, que outra opção eu teria além do 12? $6 + 6$ é igual a quanto?
Linha 28	E32: ((Silêncio)) Eu não estou entendendo ainda... (rs)
Linha 29	P: Qual (seria) uma outra soma que dá o mesmo resultado 12?
Linha 30	E32: Ah! O 12 positivo com 12 negativo?
Linha 31	P: Humn... sim... Mas aí 12 positivo com 12 negativo dá zero, não é? Se somar...
Linha 32	E32: Ah é! (rs)
Linha 33	P: Então, quantas outras somas? Não tem só $6 + 6$ que dá 12, não é? Que outra soma dá 12, aqui, de resultado?
Linha 34	E32: É... $7 + 5$... ((Silêncio)) $7 + 5$?
Linha 35	P: $7 + 5$, consegue pensar em outra?
Linha 36	E32: É... $8 + 4$.

Figura 5.69 – Resposta estudante 32: Atividade 5 (estudo final).

Se essa sequência de atividades fosse apenas corrigido, sem interagir com o estudante posteriormente, tender-se-ia a acreditar que o estudante 32 compreendeu os objetivos dessas tarefas. No entanto, bastou modificar um parâmetro e questioná-lo a respeito para verificar que sua compreensão ainda é parcial. É possível que ele tenha se concentrado em responder as atividades de forma fragmentada, sem pensar em sua continuidade, o que é comum na maior parte dos estudantes. É um contrato didático²⁵: há uma pergunta e devo respondê-la.

Por isso, é importante que o professor tenha um olhar atento a essas nuances de aprendizagem de seus alunos. Muitas vezes, há uma tendência a “generalizar” que um aluno simplesmente não sabe e não aprende Matemática. Por outro lado, pode-se criar a ilusão de que ele aprendeu somente pelo fato de ter apresentado uma resposta correta em uma sequência de atividades. Os dois exemplos dos estudantes 6 e 27 apresentados mostraram que as duas perspectivas podem ser equivocadas. O fato de terem respondido corretamente as quatro

²⁵ Contrato didático, segundo Brousseau (2000, p. 51), é uma situação didática na qual “o professor tenta transmitir ao aluno aquilo que pretende que ele faça”.

primeiras atividades do protocolo não garantiu a compreensão das atividades que surgem em seguida, mesmo sendo continuação do mesmo assunto. Isso porque o nível profundo de aprendizagem, ou seja, aquele no qual o estudante é capaz de explicar e reproduzir em diversos contextos sempre é um desafio. São os invariantes operatórios e esquemas que trabalham em níveis diferentes (do mais básico ao mais avançado). Consequentemente, é importante variar os métodos de avaliação de aprendizagem na escola, não se limitando apenas a avaliações em formatos de provas com resolução de exercícios, mas também com atividades orais ou em grupo, para que o aluno possa ter oportunidades diferentes de expressar o seu pensamento.

Dando continuidade às análises, na atividade 6, apenas o estudante 6 apresentou alguns equívocos para realizar a soma, chegando à conclusão errada sobre a equação correspondente. Porém, todos os estudantes desse grupo compreenderam o objetivo principal da atividade. Seguem as figuras 5.70 a 5.72 e as respectivas explicações dos alunos:

Figura 5.70 – Resposta estudante 6: Atividade 6 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 51 A 68

Linha 51	P: (...) Então agora vamos para o verdadeiro ou falso. Então, aqui você tem que responder se é verdadeiro ou falso as seguintes equações. A letra <i>a</i> fala que $6 + 3$ é igual a 9. Verdadeiro. Por que é verdadeiro?
Linha 52	E6: Porque... ah, não sei, só sei fiquei fazendo a soma.
Linha 53	P: Aham.
Linha 54	E6: Nos dedos, contando $6 + 3$, daí o resultado vai dar o 9.
Linha 55	P: Aham. E (isso) significa que 9 é igual a 9, certo?
Linha 56	E6: Aham.
Linha 57	P: E a letra <i>b</i> , 14 é igual a $7 + 7$. Por que é verdadeiro?
Linha 58	E6: Porque 7 mais 7 dá 14.
Linha 59	P: Isso. E a (letra) <i>c</i> , $3 + 3 = 1 + 5$. Por que é falso?
Linha 60	E6: Porque os resultados aqui, a conta não dá exata, dá diferente.
Linha 61	P: E qual é o resultado dela se você fizer as contas?
Linha 62	E6: Aqui, olha: $3 + 3$ vai dar 6.
Linha 63	P: Aham.
Linha 64	E6: Agora... ((silêncio)) deu errado agora.
Linha 65	P: Errou a conta? Não tem problema. Então marca aqui do ladinho. Então é verdadeiro. Certo. E a letra <i>d</i> ?
Linha 66	E6: Igual em cima ((sussurra)).
Linha 67	P: Verdadeiro também. E a letra <i>e</i> ? $13 + 3 = 6$?
Linha 68	E6: ((silêncio)) Essa daqui está errada, porque $13 + 3$ vai dar 16 e não 6.

6. Responda se é verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes equações:

a. $6 + 3 = 9$ (✓)

b. $14 = 7 + 7$ (✓)

c. $3 + 3 = 1 + 5$ (✓)

d. $1 + 4 = 2 + 3$ (✓)

e. $13 + 3 = 6$ (✗)

Figura 5.71 – Resposta estudante 27: Atividade 6 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 27 – LINHA 73 A 80

Linha 73	P: E é isso que (se) faz no item 6. E aí você marcou quais são verdadeiras e qual é a falsa.
Linha 74	E27: Isso.
Linha 75	P: E como que você conseguiu verificar isso?
Linha 76	E27: Porque assim... eu... simplesmente somei, aqui para somar, e um exemplo... esse aqui: $6 + 3$ igual a 9. Aí eu tenho que somar 6 com 3 que vai dar 9. E aí, igual a 9 que eu sei que os dois... os dois lados vão ser iguais...
Linha 77	P: Certo.
Linha 78	E27: E aí eu coloco verdadeira. Essa aqui de baixo é falsa. Porque $13 + 3$ é 16 e não 6.
Linha 79	P: Certo.
Linha 80	E27: Então, não é igual... e é falso.

6. Responda se é verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes equações:

a. $6 + 3 = 9$ (✓)

b. $14 = 7 + 7$ (✓)

c. $3 + 3 = 1 + 5$ (✓)

d. $1 + 4 = 2 + 3$ (✓)

e. $13 + 3 = 6$ (✗)

Figura 5.72 – Resposta estudante 32: Atividade 6 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 32 – LINHA 37 A 50

Linha 37	P: Aí, você entendeu essencialmente aqui, para classificá-lo (como) verdadeiro e falso. Como você classificou isso como verdadeiro ou falso? Como você verificou?
Linha 38	E32: Ah... fui fazendo a primeira conta, né? Dos (itens) de mais (+) aqui... Aí aqui era ao contrário...
Linha 39	P: Aham.
Linha 40	E32: Aí eu vi aqui que $13 + 3$ não daria 6.
Linha 41	P: Certo. $13 + 3$ daria quanto?
Linha 42	E32: Dá trez... dezesseis!
Linha 43	P: Dezesseis. Por isso que elas não são iguais e, por isso, é falsa.
Linha 44	E32: Sim...
Linha 45	P: E na letra c e d, por exemplo, que tem soma dos dois lados?
Linha 46	E32: c e d foi... é que aqui ele faz duas representações que daria o mesmo resultado, né?
Linha 47	P: Aham.
Linha 48	E32: Então é verdadeiro, porque $3 + 3$ dá 6, $5 + 1$ também dá 6.
Linha 49	P: Aham.
Linha 50	E32: E aqui é a mesma coisa: $1 + 4$ dá 5 e $2 + 3$ dá 5 também.

É interessante salientar que foram escolhidos números com valores de 1 (um) até 20 para possibilitar um rápido cálculo mental, sem muita dificuldade. Erros de soma com números menores que dez são esperados em crianças na fase inicial da contagem, mas foi possível perceber que tais equívocos podem estar presentes em estudantes que já estejam em um nível, teoricamente, mais avançado do ensino básico escolar. Ou seja, seria importante investigar o motivo pelo qual algumas crianças têm mais dificuldade que outras para desenvolver o raciocínio abstrato²⁶.

Na atividade 7 verificava-se a compreensão da operação com números negativos e a regra de sinais. Essa atividade também foi resolvida sem muitas dúvidas pela maioria, na parte das operações, como se pode observar nas figuras 5.73 e 5.74.

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2 = 5$$

Qual é o resultado dessa equação?

Resposta: $7 + (-2) = 7 - 2$
 $7 - 2 = 5$

Calcule o resultado das seguintes equações:

a. $2 + (-2) = 2 - 2 = 0$
 b. $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$
 c. $8 + (-5) = 8 - 5 = 3$
 d. $33 + (-12) = 33 - 12 = 21$
 e. $2 + (-8) = 2 - 8 = -6$

Figura 5.73 – Resposta estudante 27: Atividade 7 (estudo final).

²⁶ No estudo realizado por Golbert e Salles (2010), com grupos de crianças com, aproximadamente, oito anos de idade, constatou-se que considerável porcentagem desse grupo (48%) apresentou dissociações entre competência aritmética e de leitura/escrita. Isto é, competência em uma das habilidades não necessariamente aponta um bom desempenho na outra e vice-versa. Assim, o estudo sugere que existem habilidades básicas que podem estar subjacentes aos domínios linguísticos e aritméticos.

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2 = 5$$

Qual é o resultado dessa equação?

Resposta: $7 = 7$

Calcule o resultado das seguintes equações:

- a. $2 + (-2) = 0$
- b. $5 + (-3) = 2$
- c. $8 + (-5) = 3$
- d. $33 + (-12) = 23$
- e. $2 + (-8) = -6$

Figura 5.74 – Resposta estudante 32: Atividade 7 (estudo final).

Porém, se for observada a explicação de suas respostas, é possível notar que a compreensão ainda é frágil e denota um equívoco em relação à regra de operação com sinais negativos. Observem-se as figuras 5.75 e 5.76.

O que acontece quando somamos um número negativo com um positivo? Dê o resultado desta expressão e explique a sua resposta.

$$-2 + 5 = -7$$

Buscamos manter o sinal - e + para obter o resultado, mantendo o número e mantendo o sinal.

Figura 5.75 – Explicação estudante 27: Atividade 7 (estudo final).

O que acontece quando somamos um número negativo com um positivo? Dê o resultado desta expressão e explique a sua resposta.

$$-2 + 5 = 3$$

isso acontece porque o 2 está negativo e o 5 positivo, o - com + do +.

Figura 5.76 – Explicação estudante 32: Atividade 7 (estudo final).

Nos diálogos a seguir, os estudantes explicam sobre a atividade.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 27 – LINHA 81 A 124

Linha 81	P: Certo. Ok, então acho que a gente pode seguir para o próximo. Então o exercício 7 fala sobre a soma de um número positivo com o negativo. E aí, ele representa a diferença de sinais aqui pelos parênteses, não é?
Linha 82	E27: Aham.
Linha 83	P: Em separado, porque não podem ficar juntos os dos sinais. E aí pede para calcular. Então, nesse caso, $7 + (-2)$ dá $7 - 2$ que é igual a 5, certo?
Linha 84	E27: Humn.
Linha 85	P: Não é? E você calculou certinho. Aí, pede para calcular as outras equações. Então, você fez certinho: $2 - 2$, $5 - 3$, $8 - 5$, $33 - 12$... Aí, chegou nesse aqui: $2 - 8 - 6$, certo? Então, eu vejo que você não tem nenhuma dúvida sobre subtração de um número negativo. E aqui? O que acontece nessa atividade? Quando somamos um número negativo com um positivo?
Linha 86	E27: Eu... fiquei, realmente, meio... perdida... porque eu falei: “nossa... eu não lembro...”. Aí eu... eu achei que... tipo assim... eu não lembrava de jeito nenhum, eu fiquei até mais tempo, tipo, respondi tudo, chegou aqui eu simplesmente travei. Aí eu falei: “nossa... e agora?”.
Linha 87	P: Aham.
Linha 88	E27: Aí eu fui e... pelo que eu (entendi)... “ah, vou colocar isso” para não deixar em branco, porque eu não consegui responder, professora... Eu esqueci... Simplesmente saiu da minha mente.
Linha 89	P: Tá...
Linha 90	E27: Aí eu não consegui responder.
Linha 91	P: Está ok. Aí você respondeu aqui -7 . Tá, vamos pensar no seguinte então: ali no $2 - 8$, você respondeu que é -6 , não é? Por que você sabe que é -6 ?
Linha 92	E27: Aonde?
Linha 93	P: Na letra <i>e</i> do item anterior.
Linha 94	E27: Porque, assim, é... 8 vai ser um número negativo.
Linha 95	P: Aham.
Linha 96	E27: É... $2 + 8$ seria 10.
Linha 97	P: Aham.
Linha 98	E27: Só que, se eu tenho 2 e eu vou tirar 8 do 2, (que) é positivo, e 8, (que) é negativo. Eu vou tirar 8 de 2, vai ficar faltando o 6...
Linha 99	P: Certo...
Linha 100	E27: E aí eu mantive o sinal do 8 e ficou 6...
Linha 101	P: Certo, esse raciocínio que você fez de “tirar”, é semelhante ao que você tem que fazer aqui no $-2 + 5$. Então, imagina assim, está faltando 2, não é?
Linha 102	E27: Humn.
Linha 103	P: E você... acrescentou mais 5. ((Silêncio)) Então, qual é a conta que você tem que fazer nesse caso?
Linha 104	E27: Eu... está faltando para mim 2 então?
Linha 105	P: Isso.
Linha 106	E27: Aí eu vou acrescentar mais 5?
Linha 107	P: Isso.
Linha 108	E27: Aí vai ficar 3... então?
Linha 109	P: Aham. 3 positivo ou negativo?
Linha 110	E27: Positivo.
Linha 111	P: Positivo. Por que?
Linha 112	E27: Porque eu tinha dois e... eu devia dois.
Linha 113	P: Aham.
Linha 114	E27: E aí... se eu tenho cinco para pagar eu vou dar os dois que eu devia... e eu fico com 3.
Linha 115	P: Isso, perfeito.
Linha 116	E27: E aí eu errei e coloquei... ((ri nervosamente))
Linha 117	P: Não, não tem problema (rs). Está certinho.
Linha 118	E27: Nossa... eu... está vendo? Eu... nossa... ((tom de indignação)) Se eu pudesse fazer de novo...
Linha 119	P: Mas só foi um detalhe, não é?
Linha 120	E27: É... eu nossa... eu nem vi..

Linha 121	P: É, mas está certinho. Quer corrigir do outro lado? Pode deixar essa resposta, mas coloque a resposta certa.
Linha 122	E27: Vou colocar. ((barulho de lápis e folhas sendo paginadas)) ((Silêncio)). Eu nem lembro o que eu fiz o ano passado, professora...
Linha 123	P: ((ri, achando graça do comentário))
Linha 124	E27: Eu devo ter feito tudo errado... Tudo errado... Meu Deus... ((Silêncio)).

Foi possível notar, por meio desse diálogo, que o estudante 27 compreendia parcialmente as operações com números negativos. Observa-se que ele é capaz de aplicar a regra de sinais quando dois sinais diferentes estão lado a lado e quando o primeiro número da operação é sempre positivo. No entanto, na segunda parte dessa atividade, apresenta-se um número negativo primeiro e depois um positivo. Nesse caso, o estudante se confundiu na soma e ainda aplicou de forma equivocada a regra de sinais, subtraindo o 5 de -2, como é possível notar em sua própria explicação da figura 5.75.

Depois de esclarecido o equívoco, o aluno corrigiu e anotou a resposta correta, conforme orientado no diálogo, o que pode ser visto na figura 5.77, no lado esquerdo. A resposta anterior foi mantida propositalmente para fins de análise.

Figura 5.77 – Explicação estudante 27: Atividade 7 – com resposta corrigida (estudo final).

Já no caso do estudante 32, embora tenha realizado corretamente a operação, sua explicação é muito similar ao do estudante 27, apresentando um equívoco da regra de sinais. Além disso, sua resposta contém um $7 = 7$, na qual não fica clara a lógica dessa resposta. Segue o diálogo correspondente:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 32 – LINHA 51 A 115

Linha 51	P: Certo... perfeito. Você entendeu a essência aqui. Agora o 7, o que você entendeu dessa atividade aqui?
Linha 52	E32: Eu entendi que... eu preciso... ((Silêncio)) É... ele me pergunta o porquê de usar o positivo e... ((pausa)) É... coisa assim... ((Silêncio)) É, ele quer saber quando eu somo positivo com negativo...

Linha 53	P: Aham.
Linha 54	E32: Ele fala sobre isso e aí ele... começa a dizer... o que seria o positivo com o negativo, qual é o resultado.
Linha 55	P: Isso. E aí, qual é o resultado?
Linha 56	E32: Aqui na... deu zero. $2 + 2$ negativo.
Linha 57	P: Aham.
Linha 58	E32: Na 5... na B deu 2. É $5 + 3$ negativo.
Linha 59	P: Aham.
Linha 60	E32: Na 8, a (letra) c deu 3. Que é 8 mais 5 negativo... A (letra) d deu 21 que é $33 + 12$ negativo. E a (letra) e deu 6 negativo que é $2 + 8$ negativo...
Linha 61	P: Certo, e... aqui... porque você deu $7 = 7$? No item acima?
Linha 62	E32: ((Silêncio)) É... eu estou vendo agora que tá errado... (rs)
Linha 63	P: Qual que é o resultado certo?
Linha 64	E32: Aqui... seria 7... 7 que dá 3. $7 = 3$.
Linha 65	P: $7 = 3$? Por que $7 = 3$?
Linha 66	E32: ((Silêncio)) Ah não! (rs) $7 = 5$.
Linha 67	P: Humn... O resultado do $7 - 2$ é igual a 5. Agora, o que eu não estou entendendo é por que você está falando que $7 = 5$?
Linha 68	E32: Aqui. Ficaria $7 = 5$.
Linha 69	P: É, só que 7 é um número, né? É uma constante. Ele só pode ser 7. E 7 não pode ser igual a um outro número, a não ser que você represente por uma soma, por exemplo, $7 = 3 + 4$ ou $7 = 1 + 6$. Aí está certo. Mas 7 só pode ser 7.
Linha 70	E32: ((Silêncio))
Linha 71	P: Então você não pode falar que o 7 é igual a 5.
Linha 72	E32: ((Silêncio))
Linha 73	P: Certo?
Linha 74	E32: Aham...
Linha 75	P: Certo ou não? (rs)
Linha 76	E32: Certo... (rs)
Linha 77	P: Não é porque eu estou dizendo que você tem que concordar! (rs) Você tem que dizer, se tiver em dúvida.
Linha 78	E32: Não... mas... não teria outro jeito (rs).
Linha 79	P: Humn, porque o resultado aqui, na verdade, você vai só escrever 5, né?
Linha 80	E32: Aham.
Linha 81	P: Você não precisa escrever $7 = 5$. Talvez você esteja em dúvida por causa do x , não é? Porque você sempre tem que achar o x .
Linha 82	E32: ((Silêncio))
Linha 83	P: Aí você está acostumada a escrever “ x é igual a tanto”.
Linha 84	E32: É...
Linha 85	P: Aí como aqui não tem o x , aí você viu o 7 aqui no começo...
Linha 86	E32: Ah! É! É mesmo!
Linha 87	P: É isso?
Linha 88	E32: Quando tem o x você precisa eliminar esse número, né?
Linha 89	P: Isso. ((Silêncio)) É isso que você pensou?
Linha 90	E32: Ah, entendi! ((tom de compreensão)) É! É sim! Entendi o que você quis dizer (rs).
Linha 91	P: Certo. Então é isso. Então, beleza. Então isso aqui você confundiu com o x , né?
Linha 92	E32: Sim...
Linha 93	P: Tá, então o resultado correto é?
Linha 94	E32: ((Silêncio)) Aqui eu colocaria... (sussurrando fazendo os cálculos) Seria 5! (rs)
Linha 95	P: 5, perfeito.
Linha 96	E32: Apaga aqui?
Linha 97	P: ((Silêncio)) Aí aqui... é “igual a 5”, né?
Linha 98	E32: É...
Linha 99	P: Aqui? Isso? Igual a 5 negativo ou positivo?
Linha 100	E32: Não, é que aqui eu fui fazer o...
Linha 101	P: Ah tá...
Linha 102	E32: Mas é 5, né?
Linha 103	P: Tá, 5. Ok. E aí? Aqui, o que acontece quando somamos um número negativo com um positivo?

Linha 104	E32: Ele vira positivo?
Linha 105	P: Aham. Por que?
Linha 106	E32: Porque o negativo com positivo dá nega... dá positivo... (rs).
Linha 107	P: Humn... você está confundindo aquela regrinha da multiplicação... Essa é da multiplicação. Negativo com negativo dá positivo. Nesse caso, não. Por exemplo, como você sabe que aqui dá menos 6? Se $2 + (-8)$ dá -6?
Linha 108	E32: Porque o 8 é negativo.
Linha 109	P: Aham.
Linha 110	E32: Aí o... 8 negativo mais o 2 positivo vai dar -6.
Linha 111	P: Tá, e aqui? Qual que é a diferença? $-2 + 5$?
Linha 112	E32: ((Silêncio))
Linha 113	P: Ele também é negativo com positivo. Por que aqui fica como positivo?
Linha 114	E32: Porque um número positivo é maior do que o negativo?
Linha 115	P: Ah! Perfeito, é isso.

De acordo com o diálogo anterior, aparentemente, o estudante confundiu a representação do x pelo número 7, por isso, a sua resposta $7 = 7$ em vez de $x = 7$. No entanto, quando questionado sobre sua resposta, é possível também notar que ele não compreende bem o significado do sinal de igualdade, pois faz outras representações como $7 = 3$ ou $7 = 5$. A hipótese para tal é que o sinal de igualdade esteja sendo interpretado como uma abreviação da sentença “A resposta é...”. Isso se deve a uma prática, comumente utilizada em atividades escolares, na qual o estudante inicia a sentença “A resposta é...” ou ainda repete parte do próprio enunciado²⁷ para elaborar sua resposta. Após o esclarecimento, o estudante 32 indicou a alteração da sua resposta, como pode ser observada na figura 5.78, com uma indicação da variável x acima do número 7 circulado.

Figura 5.78 – Resposta estudante 32: Atividade 7 – corrigida (estudo final).

Nas oito linhas finais do diálogo anterior, o estudante explica, de forma intuitiva, porque sabe fazer os cálculos corretamente. Embora a sua explicação escrita sobre a resolução, representada pela figura 5.76, esteja equivocada, oralmente, o aluno explicou como chegou ao resultado correto. Em sua justificativa oral, afirma que o sinal do resultado é determinado

²⁷ Esse tipo de padrão pode ser observado também nas respostas do estudante 6, nas figuras 5.58 e 5.67.

comparando os dois números que estão sendo somados ou subtraídos. Vergnaud (2014) explica esse fato à multiplicidade de representações que um sujeito utiliza para raciocinar. No caso desse estudante, há uma representação algébrica no sentido de comparar os módulos dos números de cada parcela para determinar o sinal do resultado. Veja-se o seu raciocínio:

$$\Rightarrow 2 + (-8) = -6$$

- Regra de sinais: + com – igual a –. Logo, o resultado deve ser –.
- $-8 + 2 = -6$

$$\Rightarrow -2 + 5 = 3$$

- Regra de sinais: – com + igual a –. Logo, o resultado deve ser –.
- Mas, $5 - 2 = 3$ (contradição)

Ou seja, o estudante percebe a contradição de seu segundo raciocínio e, por isso, hesita em uma parte do diálogo dizendo *“Porque o negativo com positivo dá nega... dá positivo... (rs)”*. Ele realiza o cálculo invertendo o minuendo²⁸ ou subtraindo e aplicando a regra de sinais conforme necessário. Com essa inversão, ora a operação passa a ser de adição ora de subtração e é válida desde que os sinais e as operações sejam equivalentes. Como as operações foram invertidas de forma correta, seus resultados também estão todos corretos na atividade. Porém, o estudante não sabe explicar o motivo pelo qual sua técnica funciona. Este exemplo trabalha perfeitamente dentro da noção de invariante operatório, no qual a criança não desenvolve todas as invariâncias de funcionamento tais como conceitos, imagens e signos ao mesmo tempo. Elas podem passar por etapas progressivas e serem adquiridas por associações lógicas relacionadas ou não ao conteúdo matemático. A título de exemplo, Vergnaud (2014) cita os diferentes níveis para o conceito de “pai”, que as crianças desenvolvem em tempos diferentes.

1. “Pai” no sentido de “o meu próprio pai, objeto único”.
 2. “Pai” no sentido de relação “é o pai de”.
 3. “Pai” no sentido de ser pai, característica da classe de “todos os pais”.
 4. “Pai” no sentido religioso do termo.
 5. “Pai” no sentido metafórico de “é um verdadeiro pai para mim”, etc.
- (VERGNAUD, 2014, p. 304)

²⁸ Minuendo é o valor inicial da subtração e subtraendo é o valor que será subtraído do minuendo.

Deixou-se a análise da atividade 7 do estudante 6 por último, por esta conter muitos elementos interessantes comparados aos outros participantes desse Grupo 2.

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2$$

$$9 + 5 = 14$$

Qual é o resultado dessa equação?

Resposta:

Figura 5.79 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – primeira parte (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 69 A 78

Linha 69	P: (...) Agora, (o exercício) 7. Aqui você tem que falar sobre números positivos somados com números negativos. E, aqui, ele fala assim: $7 + (-2)$ é igual à $7 - 2$. Qual é o resultado disso?
Linha 70	E6: Esse daqui eu fico com um pouco de dúvida, porque eu não consegui fazer, daí eu fiz do jeito que eu consigo entender.
Linha 71	P: Tá.
Linha 72	E6: Porque $7 + 7$ vai dar 14.
Linha 73	P: Tá.
Linha 74	E6: Agora só olhando esses dois... números.
Linha 75	P: Aham.
Linha 76	E6: Daí eu fiz 9. Olha, eu peguei aqui. É... $2 + 2$... é... ((silêncio)) Eu fiz $9 + 5$, daí o resultado me deu 14 também. 7... ((silêncio)) Ah, professora... fiz $9 + 5$, daí deu 14.
Linha 77	P: Tá.
Linha 78	E6: Provavelmente devia ter colocado 13, troquei só os sinais.

É possível notar pelo diálogo anterior, e pela figura 5.79 correspondente à atividade, que há diversos equívocos cometidos pelo estudante 6. Primeiro, a operação $7 + (-2)$ foi feita ignorando-se o sinal negativo do 2 resultando em 9. O segundo erro está em somar o resultado 9 com o 5, desprezando-se o sinal de igualdade. Mesmo pelo diálogo com o estudante, não fica evidente qual foi o raciocínio realizado pelo aluno. Ele inclusive acha que houve um erro no cálculo decorrente apenas de uma troca de sinais. Assim, diferente dos outros estudantes, este apresentou muito mais dificuldades em relação ao conceito de equação.

Na tentativa de compreender os valores apresentados, foi feita uma pergunta específica para cada um deles:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 79 A 88

Linha 79	P: Tá. Agora, eu quero tentar entender por que você respondeu 9? E por que você respondeu 5?
Linha 80	E6: ((silêncio))
Linha 81	P: Onde você achou esse 9? Qual foi a conta que você fez?
Linha 82	E6: Eu fiz esse também ((acha graça)). Ai, falta uma coisa aqui. ((silêncio)). Ai eu peguei e somei esses dois, $7 + 2$ na mão.
Linha 83	P: ok. ((silêncio))
Linha 84	E6: Depois eu peguei $7 - 2$ e me deu 5.
Linha 85	P: ok.
Linha 86	E6: E aí eu peguei e fiz 9, ah não... ((silêncio)) humn... ((silêncio)). Aí depois eu peguei e somei. $9 + 5$ aqui já vai dar 14.
Linha 87	P: Tá. Agora, por que você está somando, se aqui ele está falando que essa parte $7 + (-2)$ é igual a $7 - 2$? Por que apareceu sinal de +?
Linha 88	E6: É, mas é por causa daqui, olha: deu $7 + \dots$ deu aqui, eu não entendi essa parte.

Mesmo com a explicação mais detalhada, ainda é muito confuso o raciocínio que o estudante tentou expressar nessa atividade. No entanto, fica evidente que o conceito de igualdade entre expressões foi ignorado e esse formato até criou um certo “desconforto” ao aluno que expõe essa sensação dizendo “*ai, falta uma coisa aqui*”. É possível que a causa da “estranheza” esteja relacionada ao fato de não ser uma expressão aberta que espera por um resultado como um $7 - 2 = ?$.

Nesse estágio, foi necessário recorrer à atividade 6 para que o estudante pudesse compreender o conceito de igualdade. Veja-se a continuação do diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 89 A 108

Linha 89	P: Humn. É. Leia de novo o enunciado. Ele está explicando alguma coisa aqui. Leia para mim.
Linha 90	E6: “Quando você soma um número positivo com um número negativo, você está aplicando uma subtração”.
Linha 91	P: Veja, aí ele mostra isso, não é?
Linha 92	E6: Aham.
Linha 93	P: Aí ele pergunta qual é o resultado dessa equação.
Linha 94	E6: Daí é 14. ((falou baixo))
Linha 95	P: Que é 14. Humn. É... aqui, ele está explicando que $7 + (-2)$ é a mesma coisa, igual significa a mesma coisa que $7 - 2$. Então, isso significa que o lado esquerdo da igualdade tem que ficar igual ao lado direito da igualdade, que nem o que você fez na seis. Não fica igual?
Linha 96	E6: Aham.
Linha 97	P: $3 + 3$ é igual a 6, não é?
Linha 98	E6: Aham.
Linha 99	P: $1 + 5$ é igual a 6. 6 é igual a 6, então por isso que é verdadeiro. Aqui você está fazendo a mesma coisa. Então você tem que resolver ou este lado ou esse lado. E ele só está te mostrando que é a mesma coisa.
Linha 100	E6: Tá. Entendi. ((fala baixa))
Linha 101	P: Então, qual é o resultado dessa equação?
Linha 102	E6: ((silêncio)) Vai ser 5, não é? ((fala baixa))
Linha 103	P: 5? Por quê?

Linha 104	E6: Porque... é... você falou para mim que eu poderia escolher entre resolver essa e essa.
Linha 105	P: Isso.
Linha 106	E6: 7 - 2 é igual a 5.
Linha 107	P: Isso. Ai é 5, o resultado. Certo?
Linha 108	E6: Certo.

Após essa explicação, há um tom de compreensão do estudante em relação ao conceito de igualdade, principalmente, pelo trecho de sua fala *“Porque... é... você falou para mim que eu podia escolher entre resolver essa e entre resolver essa”*. Obviamente, em sua fala, fica evidente que se apoia na autoridade da pesquisadora para afirmar o que deve ser feito. Até o momento, não houve uma internalização do conceito, mas um indício de que é possível comparar os dois lados da igualdade para verificar se a expressão é verdadeira ou falsa.

Em contrapartida, quando se retomou a ideia da regra de sinais, que é exigida na segunda parte dessa atividade, ainda há muitos equívocos. Veja-se a figura 5.80 e a respectiva explicação dada pelo estudante.

Calcule o resultado das seguintes equações:

a. $2 + (-2) = 4$
b. $5 + (-3) = -8$
c. $8 + (-5) = -13$
d. $33 + (-12) = 45$
e. $2 + (-8) = -10$

Figura 5.80 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 109 A 124

Linha 109	P: ok. Ai você fez os outros?
Linha 110	E6: Aham.
Linha 111	P: Então, 2 é + (-2). Ai você respondeu que é -4.
Linha 112	E6: É, -4.
Linha 113	P: Está certinho, isso?
Linha 114	E6: Eu acho que sim, professora.
Linha 115	P: Pense de novo: faça igualzinho o que está explicado aqui no exemplo. Será que dá certo? Porque você está subtraindo direto aqui: 2 - 2, e está colocando - 4. Será que é isso mesmo?
Linha 116	E6: Esse é positivo.
Linha 117	P: Positivo?
Linha 118	E6: É.
Linha 119	P: Então vai ficar +4?
Linha 120	E6: Aham.
Linha 121	P: Por quê?

Linha 122	E6: Porque $2 + 2$ vai dar 4.
Linha 123	P: Aham. Mas e esse número negativo, ele está de enfeite?
Linha 124	E6: Tem que ser $4 - 2$?

Fica evidenciado, por meio desse diálogo, o fato de que a regra de sinais está sendo ignorada para realizar as operações. Observe-se o seu raciocínio:

$$\Rightarrow 2+(-2) =$$

- $2 + 2 = 4$ (ignora-se o sinal de negativo da segunda parcela).
- Regra de sinal $+$ com $-$ é igual a $-$. Logo, resultado final é $-$.
- Resultado: $- 4$

$$\Rightarrow 5+(-3) =$$

- $5 + 3 = 8$ (ignora-se o sinal de negativo da segunda parcela).
- Regra de sinal $+$ com $-$ é igual a $-$. Logo, resultado final é $-$.
- Resultado: $- 8$

E, assim, sucessivamente, foi aplicado para os itens seguintes. No diálogo a seguir tenta-se explicar quais eram os equívocos que o aluno estava cometendo nesses cálculos.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 125 A 137

Linha 125	P: Por que $4 - 2$?
Linha 126	E6: Por que somei os dois, duas vezes... dá 4...
Linha 127	P: Aham.
Linha 128	E6: Daí vai ter que tirar esse 2.
Linha 129	P: Humn... entendi. Eu acho que você está confundindo distributiva com soma. Talvez é isso que está confundindo para você colocar essa operação. Você está pensando “+ com - é -”, não é? Eu acho que é isso que você está confundindo. Olha, aqui você tem que pensar, assim: se eu tenho 2 e somo com algo que está negativo, pensar como se fosse uma temperatura. Você está com 2 graus. Mas se ele manda tirar, somando com 2 graus negativos, vai ficar com zero.
Linha 130	E6: Aham.
Linha 131	P: Então, aqui, quando você tem o $+$ na frente dos parênteses, e dentro tem o $-$, então no fundo é como você estivesse falando “tire esse número”, $7 - 2$. Toda vez que você ver essa notação aqui, é a mesma coisa que $7 - 2$. Nesse caso seria 2...?
Linha 132	E6: ((silêncio)) Menos 2.
Linha 133	P: Menos 2. Então, reescreve aqui do lado.
Linha 134	E6: ((silêncio))
Linha 135	P: Isso. Que dá?
Linha 136	E6: ((silêncio e murmura algo))
Linha 137	P: Zero.

Após essas orientações, o estudante começou a reescrever os seus resultados. No entanto, quando chegou no item *e*, surgiu uma dúvida em relação à ordem das parcelas.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 138 A 153

Linha 138	P: Agora, tente conferir os outros itens da mesma forma com o mesmo raciocínio.
Linha 139	E6: ((silêncio)) Esse aqui fiz ontem mesmo. ((silêncio)) Esse daqui?
Linha 140	P: Pode fazer.
Linha 141	E6: ((silêncio)) Aqui vai ser... 8 menos 2?
Linha 142	P: Aí que está a dúvida: você tem que sempre seguir a mesma ordem. Você não pode inverter.
Linha 143	E6: ((fala baixo)) Então eu não sei...
Linha 144	P: Humn.
Linha 145	E6: Aqui nem sabia que... com 2 - 8 vai dar.
Linha 146	P: Você está subtraindo um número que é menor do que o que você está subtraindo, né?
Linha 147	E6: Aham.
Linha 148	P: Então como fica? Escreve da mesma forma que você escreveu aqui. Como ficaria essa conta sem os parênteses? Que nem você estava fazendo aqui.
Linha 149	E6: ((silêncio)) Ficaria 2 - 8.
Linha 150	P: Ficaria 2 - 8? Aí, aqui você ficou com a dúvida. O que acontece quando somamos o número negativo com o positivo? Que é mais ou menos parecido com o que está acontecendo aqui, só que é diferente, não é?
Linha 151	E6: Quando somamos um número negativo com um número positivo, ele continua sendo negativo. Leva sinais iguais...
Linha 152	P: Humn.
Linha 153	E6: ... positivos. Sinais diferentes, acho que por isso é negativo?

É possível notar que o fato do subtraendo ser um número maior que o minuendo causou “estranheza” ao estudante. Mesmo que, nessa fase do ensino, seja esperado que os alunos tenham familiaridade em trabalhar com resultados negativos. Contudo, nesse diálogo fica evidente a dúvida do aluno e seu equívoco em relação à regra de sinais, similar aos outros estudantes desse grupo. Para esclarecer esse conceito de número negativo, partiu-se para um exemplo concreto, como se pode visualizar no diálogo a seguir.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 154 A 171

Linha 154	P: De novo, você está confundindo a regra de sinais quando é da multiplicação. Então pense assim: vamos pensar primeiro nesse item E, tá?
Linha 155	E6: Humn.
Linha 156	P: Bom. Então você está subtraindo 2. Oito de dois.
Linha 157	E6: Aham.
Linha 158	P: Vamos supor que você tem duas laranjas. E você quer subtrair oito. Tem como? Quanto você vai ficar devendo?
Linha 159	E6: Tenho três laranjas.
Linha 160	P: Duas.
Linha 161	E6: Ah, é.
Linha 162	P: Duas laranjas e você tem que dar oito.
Linha 163	E6: ((silêncio)) Tem que dar seis.
Linha 164	P: Tem que dar seis. Aham. Mas seis não é seis positivos, porque seis positivos significam que você tem os seis.
Linha 165	E6: 6 negativo?
Linha 166	P: Isso. Então ficaria seis negativos. Então qual é o resultado desse item?
Linha 167	E6: ((silêncio)) é...
Linha 168	P: Faça a continha com os dedos.

Linha 169	E6: Seis.
Linha 170	P: Só seis?
Linha 171	E6: Seis negativos.

A correção dos resultados pode ser observada, na figura 5.81, na inscrição feita à lápis, do lado direito e após o item *e*. As respostas anteriores, feitas à caneta, foram conservadas para fins de análise.

Figura 5.81 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte – segunda tentativa (estudo final).

Percebe-se que, no último item, em vez de escrever a expressão $2 - 8 = -6$, o estudante preferiu escrever de forma dissertativa o resultado. Por questões de padrão, pediu-se a ele que fizesse a correção, de acordo com os outros itens. Observe-se o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 172 A 179

Linha 172	P: Seis negativos.
Linha 173	E6: ((silêncio))
Linha 174	P: Seis negativos, sem usar palavras, como eu represento? Só com número, número e sinal?
Linha 175	E6: ((silêncio)) Seis menos...
Linha 176	P: Tá. Como escreve?
Linha 177	E6: ((fala baixinho)) Como assim?
Linha 178	P: É só escrever o número. Como eu represento os seis negativos em número e sinal. Sem usar palavras. Isso! Menos seis, não é?
Linha 179	E6: Aham.

Figura 5.82 – Resposta estudante 6: Atividade 7 – segunda parte – item E reescrito (estudo final).

Fica bastante evidente que o conceito de números negativos ainda não se preserva em nível simbólico pelo estudante. Comparado aos outros estudantes, analisados até o momento, é o que se encontra ainda no nível dos números naturais, sendo o conjunto dos números inteiros ainda pouco compreendido.

Vale destacar que, esse estudante em particular, além de realizar cálculos com o auxílio dos dedos da mão, também utiliza riscos agrupados para realizar as operações de soma ou subtração. Veja-se a figura 5.83.

Figura 5.83 – Resposta estudante 6: Riscos usados para auxiliar nas operações de adição ou subtração (estudo final).

Questionou-se o aluno o motivo pelo qual ele utiliza esse recurso para realizar os cálculos e este foi o diálogo correspondente:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 218 A 229

Linha 218	P: Eu só queria que você me explicasse uma última coisa: por que você fez aqui os palitinhos para fazer a conta? Explique para mim o que você pensou.
Linha 219	E6: É porque... ((silêncio)) eu não sei, tipo assim, contar de cabeça os números grandes.
Linha 220	P: Certo.
Linha 221	E6: E aí eu acho que fazer assim, pauzinhos, para mim, facilita.
Linha 222	P: Tá. E como você fez esse pauzinho? O que você representou com esses pauzinhos aí, para fazer a conta $33 + (-2)$?
Linha 223	E6: Eu coloquei 33, eu coloquei até o 33...
Linha 224	P: Tá.
Linha 225	E6: E depois eu fui riscando.
Linha 226	P: Ah. Entendi.

Linha 227	E6: 12 números.
Linha 228	P: Então você riscou 33 palitinhos e depois foi tirando 12?
Linha 229	E6: Aham.

No estudo piloto, esse mesmo estudante realizou cálculos de soma sem respeitar a ordem e classe de cada número, como se pode visualizar na figura 5.84 a seguir.

Figura 5.84 – Resposta estudante 6: Série II (estudo piloto).

Portanto, os estudantes, mesmo que estejam na mesma etapa do ensino, podem apresentar diferentes significados²⁹ dos conteúdos escolares aprendidos até aquele momento. Não se sabe ao certo o motivo pelo qual o desempenho em Aritmética de alguns estudantes pode ficar aquém do esperado para o nível. Porém, assim como foi mencionado anteriormente no estudo de Golbert e Salles (2010), isso não significa uma correlação de desempenho equivalente para leitura/escrita, por exemplo. Portanto, é relevante o papel do professor em variar estratégias didáticas tais como trazer alguns exemplos concretos ou próximas à realidade do aluno, quando possível, e também avaliá-lo de formas distintas. Dessa forma, dá-se

²⁹ Utiliza-se “significados” no sentido utilizado por Vergnaud (2014, p. 300) sobre as diferentes representações do pensamento, nas quais são abrangidos os conceitos e pré-conceitos de níveis diferentes.

oportunidade ao estudante de expressar seu pensamento, de maneiras variadas, e de criar novos invariantes operatórios para o nível que se espera para aquela etapa de ensino.

Continuando a análise, para a parte final da atividade 7 do estudante 6, utilizou-se um exemplo do cotidiano para que o aluno pudesse compreender o significado de $-2 + 5$. Observe-se o diálogo correspondente:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 180 A 217

Linha 180	P: Beleza. Nesse exemplo, 5 é maior que -2. Então, isso significa que você estava devendo 2, e ganhou 5. Com quanto você vai ficar agora?
Linha 181	E6: ((silêncio)) Eu ganhei 2?
Linha 182	P: Você estava devendo 2. Vamos supor que você estava devendo 2 reais para a sua mãe.
Linha 183	E6: Aham.
Linha 184	P: E ela te deu 5 reais.
Linha 185	E6: ((silêncio)) Aí vai ficar 3.
Linha 186	P: 3?
Linha 187	E6: Aham.
Linha 188	P: Positivo ou negativo?
Linha 189	E6: É positivo.
Linha 190	P: Positivo. Por quê?
Linha 191	E6: Porque eu estava precisando de 2.
Linha 192	P: Isso.
Linha 193	E6: Só tinha 2.
Linha 194	P: Isso.
Linha 195	E6: E ela foi lá e me deu mais 5.
Linha 196	P: Aham.
Linha 197	E6: Daí foi lá, e paguei à minha mãe.
Linha 198	P: Isso, aí você está com 3 agora.
Linha 199	E6: Aham.
Linha 200	P: Isso. Só que se, por exemplo, fosse um número negativo maior, vamos supor que você estava devendo 10 e ela só te deu 5. Você conseguiu pagar essa dívida?
Linha 201	E6: Não.
Linha 202	P: Quanto que você ainda está devendo?
Linha 203	E6: Fica devendo mais 5.
Linha 204	P: Fica devendo 5, que seria, em número, como eu daria o resultado?
Linha 205	E6: ((silêncio)) + 5.
Linha 206	P: +5 se eu não estou devendo.
Linha 207	E6: É.
Linha 208	P: Se eu estou devendo, como é que eu represento?
Linha 209	E6: -5.
Linha 210	P: -5.
Linha 211	E6: ((silêncio))
Linha 212	P: Certo. Então esse aqui o resultado certo é?
Linha 213	E6: ((silêncio)) 3.
Linha 214	P: 3. Positivo ou negativo?
Linha 215	E6: Negativo.
Linha 216	P: Certeza? Positivo ou negativo?
Linha 217	E6: Positivo.

É interessante observar que o recurso de utilizar o dinheiro elucida melhor a ideia de ganho e perda para os estudantes, mesmo para aqueles que não compreendem os números

negativos. Aquela noção parece ser mais eficiente do que a ideia de temperatura, por exemplo. Isso possivelmente é explicado pelo fato do Brasil apresentar poucas regiões com temperaturas negativas, enquanto o dinheiro está presente, de forma constante, no cotidiano.

A atividade 8 é a última desse protocolo que consiste em apresentar um passo a passo de resolução de equações. Vale ressaltar que no jogo *Jabara* utilizado pelos estudantes antes de iniciar as atividades, conforme o aluno avança de nível, a solução passa a exigir mais passos para que ele encontre o valor da variável. Observe-se a figura 5.85:

8. Observe a equação a seguir:

$$x + 2 = 5$$

Você precisa isolar o x , ou seja, deixar um lado da igualdade apenas com o x e o outro lado apenas com constantes. Para fazer isso, você precisa eliminar (zerar) a constante do lado que está o x . Veja:

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$
$$x + 0 = 5 - 2$$

Perceba que quando eu subtraio uma constante dos lados da igualdade, eu tenho que fazer o mesmo do outro lado. Por isso, subtraímos 2 do lado onde está o 5.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Figura 5.85 – Apresentação da atividade 8 (estudo final).

Nessa atividade, retoma-se essa explicação brevemente e depois se apresenta duas equações para serem resolvidas. Os estudantes 27 e 32 conseguiram solucionar, com sucesso, a atividade, como podem ser observadas nas figuras 5.86 e 5.87, com exceção do estudante 6 (figura 5.91). Analisou-se os respectivos diálogos dos dois primeiros estudantes e, novamente, o estudante 6 por último, para comparar os níveis de interpretação de cada um deles.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Resposta: $x = 3$

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo-a-passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$

$$x + 12 - 12 = 20 - 12$$

$$x + 0 = 20 - 12$$

$$x = 8$$

b. $-6 + x = 30$

$$x + (-6) + 6 = 30 + 6$$

$$x + 0 = 30 + 6$$

$$x = 36$$

Figura 5.86 – Resposta estudante 27: Atividade 8 (estudo final).

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 27 – LINHA 147 A 164

Linha 147	P: (...) O que você achou desse raciocínio e da regrinha do “ <i>passa para lá e passa para cá</i> ”?
Linha 148	E27: Eu achei... Ai... professora... eu não sei nem o que dizer porque, para mim, a Matemática é muito complicada... (rs).
Linha 149	P: (rs)
Linha 150	E27: Eu poderia muito bem fazer uma conta bem... mais fácil e... Apesar (do fato) de que, essa conta em si, não é muito difícil, não é? Mas... sei lá... não é uma coisa muito... difícil...
Linha 151	P: Aham.
Linha 152	E27: Eu achei que... tipo assim, é... se você me perguntasse isso o ano passado, eualaria: “ <i>Meu Deus! É inglês! É... chinês e eu não entendo.</i> ”.
Linha 153	P: (rs)
Linha 154	E27: Mas, é... eu achei que, tipo assim, não foi... Embora seja desnecessário mas... não foi uma coisa muito difícil de fazer...
Linha 155	P: Certo.
Linha 156	E27: E o que ajuda muito são os exemplos, não é?
Linha 157	P: Aham.
Linha 158	E27: ((Silêncio))
Linha 159	P: Então, você acha que, o exemplo, o formato da atividade ajudou a resolver os exercícios?
Linha 160	E27: ((Silêncio)) Ajudou... apesar (do fato) de que... se não tivesse, acho que eu conseguiria também, mas... ajuda sim.
Linha 161	P: É? ((pausa)) E entre o jogo e a atividade? As explicações da atividade? Qual você acha mais intuitivo?
Linha 162	E27: ((Silêncio)) Acho que é a atividade...
Linha 163	P: A atividade? Por quê?
Linha 164	E27: ((Silêncio)) Porque, no jogo, é tudo muito... é tudo muito... mecânico, né? Você simplesmente vai, junta lá e pronto! Deu seu número, você não precisa fazer a conta, você não precisa somar nada. Ele simplesmente... você só coloca o número e tal e junta os dois e ele te dá o resultado. Só que o que você tem que pensar: que você vai além, não é? Você tem que somar, você tem que subtrair...

Nesse diálogo, é possível notar que o estudante se sentiu seguro em resolver a atividade 8, mas faz uma ressalva de que os exercícios eram razoavelmente simples. Também se leva em

consideração o fato de que, segundo o estudante, houve um avanço na compreensão de alguns conteúdos comparado ao ano anterior. Da mesma forma, é interessante observar que, quando se questiona qual das duas estratégias utilizadas como explicação do conceito de equações (entre a atividade escrita e o jogo) é a melhor, o estudante considerou as explicações por escrito mais intuitivas do que o jogo. Ele justifica que, no jogo, tudo é muito mecânico e as ações tomadas nele não são necessariamente feitas de forma consciente. Por isso, o aluno acredita que, em termos formais, o aprendizado e a compreensão do conceito tenha sido lograda por meio da atividade escrita.

Embora seja crescente a literatura a respeito de utilização de jogos, nas aulas de Matemática, a saber, os trabalhos de Itacarambi (2013), Smole, Diniz e Milani (2007), Lara (2003), o relato do estudante 27 reforça a importância de saber utilizar os recursos de forma cautelosa e crítica. Todo recurso, até mesmo o próprio livro didático, quando não é utilizado de forma consistente, com um objetivo pedagógico bem definido, pode tornar-se improfícuo em sua função, mesmo que seja um material de altíssima qualidade e de propósito pedagógico bem fundamentado. Por isso, destaca-se a necessidade de orientar os futuros professores de Matemática quanto à utilização adequada dos recursos didáticos durante a sua formação, nos cursos de licenciatura em Matemática³⁰.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Resposta: $x = 3$

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo-a-passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$

$$x + 12 - 12 = 20 - 12$$

$$x + 0 = 8$$

$$x = 8$$

b. $-6 + x = 30$

$$-6 + 6 + x = 30 + 6$$

$$0 + x = 36$$

$$x = 36$$

Figura 5.87 – Resposta estudante 32: Atividade 8 (estudo final).

30 Foi publicado recentemente um trabalho com esta temática por Oliveira e Kikuchi (2018) com o título “O laboratório de matemática como espaço de formação de professores” no periódico Cadernos de Pesquisa, da Fundação Carlos Chagas.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 32 – LINHA 115 A 128

Linha 115	P: (...) Agora o (exercício) 8. O que o 8 explicou aqui? O que você entendeu?
Linha 116	E32: Ele... ele... faz uma demonstração para a gente isolar o x, né? Para colocar o negativo para tirar o positivo...
Linha 117	P: Aham. Isso...
Linha 118	E32: Aí aqui... ((sussurra baixinho)) foi o que eu fiz...
Linha 119	P: Isso. A resposta está certinha, mas... Aqui, é basicamente ele está explicando aquela regrinha do “passa para um lado positivo, passa para o outro negativo”...
Linha 120	E32: Aham.
Linha 121	P: Em vez de ser aquela regrinha “maluca” que, às vezes, você fica em dúvida, pense que a equação é uma balança. Então, se é uma balança, você sempre tira de um lado e tem que tirar do outro para mantê-la equilibrada. Se você acrescenta de um lado, você tem que acrescentar do outro para continuar equilibrada. A ideia é essa, não é? E acho que você entendeu bem, porque você fez certinho a letra a e a letra b .
Linha 122	E32: Foi...
Linha 123	P: Certo, agora a pergunta que não me cala agora: porque você não conseguiu fazer quase nada da atividade do ano passado? (rs) O que aconteceu? (rs)
Linha 124	E32: (rs) Ah... geometria para mim o ano passado estava muito confuso...
Linha 125	P: Humn.
Linha 126	E32: Ah... não sei... estava muito confuso para mim. É talvez porque eu perdi algumas aulas de... explicação... Mas... eu não entendia como... aqueles... fórmulas... eu faria essa conta com aqueles números da fórmula....
Linha 127	P: Certo...
Linha 128	E32: Hoje eu já entendo... Mas o ano passado estava bem confuso... (rs)

Não foi aprofundada, durante esse diálogo, a questão sobre a resolução da atividade em si, apenas a indagação sobre a dificuldade que o aluno demonstrou no ano anterior, durante o estudo piloto. Comparando o seu desempenho com este estudo final, nota-se uma grande diferença. No estudo anterior, o estudante deixou muitas questões em branco ou, quando escreveu algo, deixou respostas como “*Não é possível resolver. Não está especificado*” ou “*Não entendi*”. Vejam-se alguns exemplos das respostas de seu estudo piloto nas figuras 5.88 e 5.89:

Figura 5.88 – Resposta estudante 32: Série II (estudo piloto).

Figura 5.89 – Resposta estudante 32: Série VII – Itens A e B (estudo piloto).

É pertinente comentar que o estudante 32 não conseguiu concluir todas as atividades do estudo piloto. Além disso, no diálogo anterior, ele afirma que tinha muita dificuldade com o conteúdo de Geometria no ano anterior. De fato, havia uma questão envolvendo esse tópico no estudo, mas o estudante sequer conseguiu esboçar uma resposta na ocasião.

Acredita-se que, pelo fato de termos concentrado em poucas habilidades e reduzido consideravelmente a necessidade de pré-requisitos de certos conteúdos, o estudo final passou a ser algo muito mais factível para os estudantes 27 e 32, como os próprios constatarem em suas falas.

No caso do estudante 32, consultou-se no início da atividade sua opinião sobre o jogo. Diferente do estudante 27, que fez uma avaliação mais crítica sobre a utilidade do recurso, este só considerou que as explicações foram úteis para entender e passar de nível, mas não fez uma associação com a atividade do protocolo em si. Observe-se o seguinte trecho:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 32 – LINHA 1 A 14

Linha 1	P: Bom, o que você achou da atividade? Primeiro sobre o jogo. O que você achou dele?
Linha 2	E32: Ah, eu achei ele interessante, estava bem facinho (facilzinho)...
Linha 3	P: É? E equações? Você tem dificuldade?
Linha 4	E32: Ah, mais ou menos, quando é bem avançado, mas essas assim mais básicas, são fáceis.
Linha 5	P: É? E o jogo? Você acha que ele te ajudou em alguma coisa que você não entendia?
Linha 6	E32: Ajudou até... ajudou. Ele foi dando explicações... e eu fui entendendo e fazendo.
Linha 7	P: Certo... E agora essa atividade, depois de fazer o jogo por 30 minutos, o que você achou?
Linha 8	E32: Ficou mais fácil...
Linha 9	P: É?
Linha 10	E32: É...
Linha 11	P: E comparada à atividade que você tentou fazer o ano passado? O que você achou? (rs)
Linha 12	E32: Achei que essa aqui é BEM mais fácil! (rs)
Linha 13	P: Bem mais fácil? O que tem de diferente? O que te ajudou bastante nessa atividade?

Pelo trecho anterior, segundo o aluno, as atividades do estudo final ficaram mais fáceis por exigir mais operações básicas, enquanto o do ano anterior exigia outros conteúdos além daquelas. Logo, pode-se notar dois estudantes, que tiveram desempenhos semelhantes nesse estudo final, mas que possuem diferentes níveis de criticidade em suas opiniões. Somente por meio de um estudo com essa característica – com entrevistas que questionam cada uma das atividades, abrindo espaço para o diálogo e expressão de suas ideias e opiniões – é possível diferenciar os diferentes níveis dos estudantes, mesmo dentro de um grupo considerado razoavelmente similar no início. Também é relevante o papel dos Modelos Organizadores do Pensamento, pelo fato de categorizar os dados apenas após os dados serem coletados, o que torna as categorias mais coerentes com o resultado obtido.

Por fim, será feita a última análise deste grupo, com o caso do estudante 6.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Resposta: $x + 2 = 5$

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo-a-passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$
 $X - 6. 2 = 12$
 $X - 10 - 10 = 20$

b. $-6 + x = 30$
 $X - 6. 5 = 30$

Figura 5.90 – Resposta estudante 6: Atividade 8 (estudo final).

Pela figura 5.90, já é possível constatar vários equívocos que, *a priori*, não são facilmente dedutíveis. Não se trata apenas de um erro de cálculo, equívoco no sinal ou de supressão de algum passo, como ocorre, na maioria das vezes, na resolução de equações. Ao transformar a operação de adição para a multiplicação, nota-se um erro conceitual na resolução dessa atividade.

Antes de partir para o diálogo, destaca-se que esse estudante não compreendia a ideia de balança. Mesmo quando se tentou explicar de forma abstrata ou por desenhos. Por isso, utilizou-se a estratégia de construir uma balança de pratos³¹, com material reciclável, para demonstrar ao aluno, de forma concreta, o conceito de igualdade. Nas figuras 5.91 e 5.92, é possível conferir a balança e os respectivos objetos que foram usados para demonstração da ideia de equilíbrio e desequilíbrio.

Fonte: arquivo pessoal da autora.

Figura 5.91 – Imagem da balança construída com material reciclável.

Fonte: arquivo pessoal da autora.

Figura 5.92 – Imagem das bolinhas de gude utilizadas na balança.

O diálogo a seguir demonstra a comparação do funcionamento da balança com as equações.

³¹ Este material pode ser construído de várias maneiras e que podem ser facilmente encontradas em repositórios educacionais, numa busca pelo Google, com as seguintes palavras-chave: “balança, equações, materiais recicláveis para crianças”.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 234 A 253

Linha 234	P: Lembrando o que a gente fez ontem, no nosso último encontro. Estávamos falando ainda dessa atividade oito, de como montar uma equação. Lembra que eu comecei a fazer alguns exemplos? Até tentei te mostrar que a equação é sempre uma balança e que ela se equilibra? Você lembra disso?
Linha 235	E6: Sim.
Linha 236	P: Hoje eu trouxe uma balança para você ver se consegue entender melhor esse conceito, tá bom? Então levante-se um pouquinho. ((silêncio)). Aqui, olha: É uma balança, tá? É como se fosse uma balança de prato. Eu não sei se você já viu alguma vez uma balança de prato? Já? Então. O que acontece? Você vê que não tem nada nesses pratos.
Linha 237	E6: Sim.
Linha 238	P: Então ela está equilibrada. Assim, a equação é como se fosse essa balança. Aqui, é como se tivesse um sinal de igualdade. Esse lado esquerdo, quando ela for igual do lado direito, está equilibrado. Certo?
Linha 239	E6: Aham.
Linha 240	P: Então é isso que ele indica. Se, por exemplo, eu vou pegar aqui três bolinhas de gude que aparentemente são idênticas, certo?
Linha 241	E6: Aham.
Linha 242	P: Se eu colocar uma bolinha aqui, o que aconteceu com essa balança?
Linha 243	E6: Abaixa de um lado.
Linha 244	P: Abaixou do lado esquerdo, né?
Linha 245	E6: Aham.
Linha 246	P: Se eu colocar duas bolinhas...
Linha 247	E6: Vai abaixar.
Linha 248	P: Acho que abaixou mais ainda. Elas continuam iguais, essas duas balanças? Não, certo? Eu tenho duas bolinhas aqui do lado esquerdo. De quantas bolinhas que eu preciso para deixar essa balança equilibrada de novo?
Linha 249	E6: Duas bolinhas.
Linha 250	P: Duas bolinhas. Infelizmente eu só tenho uma. Então, qual ainda continua pesada? Esquerda ou direita?
Linha 251	E6: A esquerda.
Linha 252	P: A esquerda, certo? Então equação é isso. Agora, quantas bolinhas que eu preciso tirar da esquerda para que essa balança fique equilibrada? Uma... certo? Então, se eu tiro uma daqui, ela volta a ser equilibrada, certo?
Linha 253	E6: Certo.

Nesse diálogo, o estudante conseguiu visualizar a dinâmica da ideia de equilíbrio e desequilíbrio como uma metáfora para o funcionamento das equações. Dessa forma, conseguiu-se, finalmente, partir para a atividade 8. Continua-se com o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 254 A 281

Linha 254	P: Então, a equação é isso. Vamos voltar para ver a sua equação aqui na folha. Você tem uma equação aqui $x + 12$ igual a 20, certo?
Linha 255	E6: Sim.
Linha 256	P: Então, imagina que... Esqueça o x , por enquanto.
Linha 257	E6: Certo.
Linha 258	P: 12 é igual a 20?
Linha 259	E6: ((silêncio))
Linha 260	P: Não é, certo? Mas eu tenho que fazer alguma coisa para que essa equação fique equilibrada.
Linha 261	E6: Aham.

Linha 262	P: E se eu tenho 12 aqui e, vamos supor, lembre-se que a regra é deixar o x de um lado sozinho, sem número e sem nada, certo?
Linha 263	E6: Aham.
Linha 264	P: Tem que deixar o x sozinho em um lado da igualdade. Só que eu tenho esse + 12 “atrapalhando”. Se eu tirar 12 daqui, você concorda que essa balança vai mudar, que nem a gente fez com a bolinha?
Linha 265	E6: Vai mudar.
Linha 266	P: Certo. Então se eu tirar 12 daqui, quanto eu tenho que tirar do outro lado?
Linha 267	E6: ((silêncio)) Tem que tirar 12.
Linha 268	P: Tem que tirar 12 também. Então vamos fazer isso na equação? Vamos ver se você consegue terminar, então?
Linha 269	E6: ((silêncio)) É aqui. ((silêncio)) Ela tira 12... ((fala baixa))
Linha 270	P: Isso.
Linha 271	E6: Tiro isso, mais... é, dá 10, né? 10 de cada lado?
Linha 272	P: Não tenta fazer direto, tenta escrever mesmo. “ $x + 12 - 12$ ”...
Linha 273	E6: $x + 12 - 12$.
Linha 274	P: Isso.
Linha 275	E6: ((silêncio)) $-12 + 12$ vai dar zero.
Linha 276	P: Isso.
Linha 277	E6: ((silêncio)) Mais um.
Linha 278	P: Isso, só que você esqueceu de mexer essa parte do 20, não é?
Linha 279	E6: Aham.
Linha 280	P: Então, tem que continuar. Aqui, está certinho. Só que faltou fazer a outra parte da igualdade. Tem que ser $x + 12 - 12$ igual a quanto?
Linha 281	E6: Mais 20. ((silêncio)) Que vai ser igual a 10.

A resposta correspondente a esse diálogo está representada na figura 5.93.

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo-a-passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$

$$x + 12 = 20$$

$$x + 12 - 12 = 20 - 12$$

$$x = 10$$

Figura 5.93 – Resposta estudante 6: Segunda tentativa da atividade 8 - item a (estudo final).

No entanto, há ainda um equívoco na solução: o estudante concluiu que o valor de x é igual a 10. Por isso, questionou-se o motivo de ter chegado nessa conclusão e retomou-se a ideia de balança explicada anteriormente.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 282 A 291

Linha 282	P: Por que 10?
Linha 283	E6: ((silêncio)) Eu não estou achando... é $10 + 10$ vai dar 20?
Linha 284	P: Aqui você tirou quanto?
Linha 285	E6: $12 - 12$.

Linha 286	P: Isso. Você já tinha 12 e está tirando 12. Só que lembra da balança: se eu tirei 12, para continuar equilibrada quanto eu tenho que tirar daqui? Do 20?
Linha 287	E6: 12 também.
Linha 288	P: 12 também. Então vai ficar 20...?
Linha 289	E6: Menos 12.
Linha 290	P: 20 - 12. Muito bem. Então x é igual a quanto?
Linha 291	E6: ((silêncio)) x é igual a oito.

Embora o estudante, nesse momento, tenha logrado encontrar a resposta certa, não se sabe o motivo que o levou à representar o número vinte numa soma de duas parcelas de dez. Uma hipótese seria a interpretação equivocada da própria explicação dessa atividade. Por exemplo, em um dos passos, deve-se subtrair o valor que se encontra junto à variável x , no mesmo lado da igualdade, para que se possa isolá-la. Mas, para isso, também é necessário retirar o mesmo valor do outro lado da igualdade, veja-se a seguinte representação:

$$x + 2 = 5$$

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

No início do diálogo anterior, o aluno diz em um trecho “(...) *10 mais 10 vai dar 20?*”. É possível que ele tenha interpretado, pela ideia de equilíbrio, que cada número representado na equação precisa ser dividido em duas parcelas iguais. Ou seja, ele não está observando a equação como um todo, mas cada número. Novamente, trata-se de uma hipótese que não foi confirmada. Vergnaud (2014) faz um alerta sobre a ideia de hierarquia entre representações simbólicas. Basicamente, seria adotar procedimentos e representações que mais favoreçam a solução de um problema. Nesse caso, seria o equivalente a adotar a representação como a ideia de equação por balanças. É claro que, no começo, o estudante se confunde, pois há outros esquemas já mobilizados em seu aprendizado para esse conceito. Mas, ao longo do diálogo, é possível notar o progresso de sua compreensão sobre o conceito.

$$\begin{aligned}
 x + 12 &= 20 \quad \text{a. } x + 12 = 20 \\
 x + 12 - 12 &= 20 - 12 \\
 x &\neq 0 \\
 x &= 20 - 12 \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$

Figura 5.94 – Resposta estudante 6: Terceira tentativa da atividade 8 - item *a* (estudo final).

Continuando a análise do último item, no diálogo a seguir, fica evidente que o estudante ainda tem muita dificuldade para compreender o conceito que foi explicado até o momento. Como referência, observe-se a figura 5.90, que foi apresentada como solução antes da discussão a seguir.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 292 A 301

Linha 292	P: (...) Muito bem. Vamos ver se você consegue fazer a letra <i>b</i> agora? Na mesma ideia.
Linha 293	E6: Tá. ((silêncio)) Essa aqui já complicou um pouquinho. Por que não tem número aqui. $6 + x$.
Linha 294	P: É, só que ele está invertido de posição, não é? Por exemplo, se esse x vier antes, como vai ficar?
Linha 295	E6: 6×6 é igual a 30, né?
Linha 296	P: Humn.
Linha 297	E6: Agora vou...
Linha 298	P: Mas 6 é igual a 30?
Linha 299	E6: É que eu peguei 6. Aí depois somar o x.
Linha 300	P: Humn. Só que 6 é um número, certo?
Linha 301	E6: Certo.

$$\begin{aligned}
 \text{b. } - 6 + x &= 30 \\
 - 6 + x &= 30 \\
 6 &= 30 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Figura 5.95 – Resposta estudante 6: Segunda tentativa da atividade 8 - item *b* (estudo final).

Observa-se que o estudante ainda não compreendeu as regras de sinais e da soma de uma variável com uma constante. Assim, na figura 5.95, é possível notar que ele resolve a equação como se fosse $6x = 30$ e conclui que o x vale cinco, embora tenha escrito $6 = 30$. Ou seja, há três equívocos principais. Primeiro, o estudante aglutinou o 6 com o x , ignorando o sinal de soma entre eles. O segundo equívoco foi suprimir o sinal negativo do 6 e o terceiro é o fato de omitir a variável x e, mesmo assim, concluir que o valor daquela é igual a cinco. Por isso, questionou-se essa resposta e continuou-se com o diálogo.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 302 A 311

Linha 302	P: Seis só pode ser igual a 6. Seis não pode ser igual a outro número, não é?
Linha 303	E6: ((silêncio))
Linha 304	P: Então está faltando alguma coisa aí. ((acha graça))
Linha 305	E6: ((silêncio)) Vai ser $6x + 30$?
Linha 306	P: É. Se for $6x$, você está juntando o x com o 6, né? Só que aqui tem um + no meio. Então, você não pode só sumir com o +. Tem que continuar com ele.
Linha 307	E6: ((silêncio)) $6 + x = 30$?
Linha 308	P: $6 + x$? Sim. Só que, o que aconteceu com esse menos?
Linha 309	E6: Ficou mais.
Linha 310	P: Mas, por que você transformou em mais?
Linha 311	E6: Porque menos com mais dá menos.

Novamente, pelo trecho supracitado, evidencia-se o mesmo equívoco, cometido anteriormente pelo estudante, na aplicação da regra de sinais. Para tentar elucidar o problema, sugeriu-se a mudança da posição das parcelas, como se pode observar no trecho seguinte:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 312 A 323

Linha 312	P: Humn. Entendi. Só que aí você está usando - 6 com + x que são coisas totalmente diferentes. Você não pode juntar entre eles, tá? Então, vamos fazer o seguinte? Vamos mudar de lugar o -6 com o x , só trocar de lugar. Como vai ficar?
Linha 313	E6: ((silêncio)) Fica + x...
Linha 314	P: Aham.
Linha 315	E6: ... -6...
Linha 316	P: Isso.
Linha 317	E6: Igual a 30.
Linha 318	P: Isso. Ótimo. Veja se agora fica mais claro, lembrando que eu tenho que deixar o x sozinho, certo?
Linha 319	E6: Aham.
Linha 320	P: Só que eu tenho -6 aqui. Para esse menos 6 virar 0, que nem você fez aqui, o 12: Você tirou 12, virou 0, né? O menos 6, quanto é que eu tenho que fazer de operação para ele virar 0?
Linha 321	E6: 6 menos 6.
Linha 322	P: 6 menos 6? Isso. Se o 6 fosse positivo, só que ele é negativo. Então do negativo para o 0, quantas casas eu tenho que andar para virar 0?
Linha 323	E6: ((silêncio)) Não sei.

Vergnaud (2014) esclarece sobre as diferentes etapas das estruturas aditivas no aprendizado de soma e subtração nas quais a operação inversa é mais complexa do que uma proposição do tipo “Tenho 6 balas. Se eu der 6 para o meu irmão, com quantas balas vou ficar?” é diferente de “Minha irmã me deu 6 balas. Fiquei com 6 no total. Quantas balas eu tinha?”. Veja-se que o raciocínio é semelhante, porém são operações inversas. Esse tipo de silogismo não é tão simples, como observou-se na dificuldade do estudante em deduzir a operação que permite zerar o seis negativo. Assim, ele tenta apenas repetir mecanicamente o processo do item anterior, que foi a subtração, mas não se atentou ao fato de que subtrair o número seis de um seis negativo, não dá zero.

Por esse motivo, optou-se por trazer um exemplo mais concreto como recurso, já utilizado anteriormente: o dinheiro. Veja-se o trecho a seguir:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 324 A 355

Linha 324	P: Por exemplo, se você está devendo um real, quanto você tem que devolver para ficar com zero de dívida?
Linha 325	E6: Tem que devolver o dinheiro que eu peguei.
Linha 326	P: Isso. Então, aqui é como se você estivesse devendo 6. Então, quanto eu tenho que devolver?
Linha 327	E6: 6.
Linha 328	P: 6. Então, é - 6...? Qual é a operação? É “mais” ou é “menos”?
Linha 329	E6: Mais.
Linha 330	P: Mais. Isso. Então, vai ficar...?
Linha 331	E6: + 6...
Linha 332	P: Aham.
Linha 333	E6: ((silêncio)) Igual a 30?
Linha 334	P: De novo, 6 não é igual a 30. 6 é um número, 6 só pode ser igual a 6 ou 6 pode ser igual a 3 mais 3, 2 mais 4, não é? Outros que dão o mesmo resultado.
Linha 335	E6: Mais 6 - x?
Linha 336	P: Não. De novo, olha o que você fez aqui. Você não fez $x + 12 - 12$?
Linha 337	E6: Aham.
Linha 338	P: Aqui é a mesma coisa. Você tem que repetir o x primeiro, certo? Então como vai ficar? Aqui, x ...
Linha 339	E6: $-x + x... + 6...$ ((silêncio))
Linha 340	P: Tá. $x + 6$, ok. O que mais?
Linha 341	E6: ((silêncio))
Linha 342	P: Esse 6 tem que virar 0, não é?
Linha 343	E6: ((silêncio)) + 6...
Linha 344	P: Só que você já tem mais 6.
Linha 345	E6: ... - 6!
Linha 346	P: Isso.
Linha 347	E6: - 6.
Linha 348	P: Isso.
Linha 349	E6: Igual a 30.
Linha 350	P: Só que aqui, a balança desequilibrou. Então o que você tem que fazer agora no 30?
Linha 351	E6: Tirar 6.
Linha 352	P: Só que você já tinha tirado 6. Você está somando 6, para ele poder virar 0, certo?
Linha 353	E6: Certo.

Linha 354	P: Então você tem que fazer a mesma coisa do outro lado, lembra? Você tira, você tem que tirar do outro lado também.
Linha 355	E6: 30 - 30.

Embora o diálogo pareça ser promissor, ainda notou-se que o estudante realiza as operações “na tentativa e erro”, sem muita compreensão do que escreve.

Sabe-se que um aprendizado não ocorre em pouco tempo, principalmente, quando a interação se resume a poucos minutos. No entanto, por meio da análise desse estudante 6, pode-se inferir que há uma grande lacuna de habilidades e pré-requisitos esperados para a idade, fase escolar e, também, nesse grupo a que pertence o aluno. Ou seja, seus esquemas mobilizados para os problemas apresentados são muito mais incipientes, em termos de conteúdo e de técnicas, comparados aos esquemas de outros estudantes. Por isso, é tão difícil para um professor identificar uma didática “universal” que atenda todos os estudantes de uma única turma, mesmo dentre aqueles que possuem dificuldades. Há a necessidade de elaborar caso a caso.

No caso do estudante 6, teve-se que utilizar diversos recursos, desde exemplos contextualizados com a realidade até um dispositivo concreto como uma balança. Aparentemente, o último parece ser mais efetivo para a compreensão desses conceitos por esse aluno, mesmo que ainda tenha algumas dificuldades para transpor ao contexto abstrato. Veja-se uma das partes finais do diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 356 A 397

Linha 356	P: Tá. Vamos ver na balança de novo. ((silêncio)) Por exemplo, esses carrinhos, eles têm pesos diferentes. Mas vamos supor que eu vou por esse aqui. Aqui já tem duas bolinhas, está vendo que desequilibrou?
Linha 357	E6: Aham.
Linha 358	P: Vou tirar aqui as duas bolinhas. Vou colocar um outro carrinho do outro lado. ((silêncio)) Vamos ver se equilibra? Olha: equilibrou mais ou menos, não é? Está quase igual, só que parece que um lado está um pouquinho mais pesado. Qual lado parece que está pesado?
Linha 359	E6: ((silêncio)) Esse lado.
Linha 360	P: O esquerdo, não é?
Linha 361	E6: Aham.
Linha 362	P: Então. Aí o que a gente fez? Aqui, quando eu tinha uma bolinha de cada lado, ela estava equilibrada, certo?
Linha 363	E6: Certo.
Linha 364	P: Só que você tirou de um lado. Por exemplo, se você tira de um lado, ela desequilibrou, certo?
Linha 365	E6: Certo.
Linha 366	P: O que eu tenho que fazer do outro lado?
Linha 367	E6: Tirar um.
Linha 368	P: Tirar também. Se eu pôr o carrinho vai desequilibrar também. Aí eu não pus um outro carrinho do outro lado para equilibrar?
Linha 369	E6: Aham.

Linha 370	P: Foi o que aconteceu. Então, voltando para a sua equação, aqui você já tinha - 6. Já estava devendo 6. Você pôs + 6 para ele virar 0. Então, o que você tem que fazer agora do lado do 30 também? Para ele continuar equilibrado como antes?
Linha 371	E6: ((silêncio)) Ele vem... estou tentando entender o que eu fiz aqui, para fazer ((fala baixa)) Aqui eu tinha tirado 10, não é?
Linha 372	P: Isso.
Linha 373	E6: Isso, não é?
Linha 374	P: Não. Quanto é esse?
Linha 375	E6: 12.
Linha 376	P: 12.
Linha 377	E6: Tem que tirar do 12 também?
Linha 378	P: Isso.
Linha 379	E6: ((silêncio)) Aqui eu tenho que tirar 6 de 30.
Linha 380	P: É. Só que aqui você já não tinha 6. É que você inverteu. Talvez seja isso que está confundindo. Porque já estava $x - 6$. Aí você colocou + 6 para poder zerar esse aqui, certo?
Linha 381	E6: Certo.
Linha 382	P: Então, se você fez mais 6 de um lado, o que você tem? Olha: você colocou mais 6, esse lado ficou mais pesado. Então, o que você tem que fazer do outro lado para ele continuar equilibrado?
Linha 383	E6: Acrescentar mais 6.
Linha 384	P: Isso.
Linha 385	E6: ((silêncio)) Vai ficar... ((silêncio))
Linha 386	P: Não, pode colocar aqui mesmo, porque você está igualando.
Linha 387	E6: Mais... 6.
Linha 388	P: Isso. Agora sim.
Linha 389	E6: Mais...
Linha 390	P: Agora você sabe descobrir quanto é que vale x .
Linha 391	E6: x vale 6 + 6... esse aqui não tem?
Linha 392	P: Isso. Isso acabou. Zero. Isso.
Linha 393	E6: ((silêncio)) 36. 36.
Linha 394	P: Isso. Então x é igual a...?
Linha 395	E6: A 36.
Linha 396	P: 6. Perfeito. ((silêncio)) deu para entender melhor essa parte da equação?
Linha 397	E6: Deu.

Depois dessa explicação, a figura 5.96 representa a resolução que o estudante apresentou em sua atividade.

$$\begin{array}{l}
 -6 + x = 30 \\
 +x - 6 = 30 \\
 x + 6 - 6 = 30 + 6 \\
 x = 36
 \end{array}$$

Figura 5.96 – Resposta estudante 6: Terceira tentativa da atividade 8 - item b (estudo final).

Embora fique constatado que boa parte da resolução foi conduzida pela entrevistadora, podendo até ser citado um dos paradoxos didáticos de Brousseau (2007) conhecido como o

efeito Topázio³², houve o cuidado de realizar mais um teste para verificar se existe algum aprendizado para o aluno após sucessivas explicações, utilizando-se de exemplos diversificados. Essa é a parte final do diálogo e da análise desse estudante.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 6 – LINHA 398 A 434

Linha 398	P: Deu? Então vamos fazer um último teste. Eu quero que você faça a mesma coisa, só que vou colocar mais uma equação aqui. Quero que você resolva este aqui para mim. $x + 3$ igual a 10.
Linha 399	E6: ((silêncio))
Linha 400	P: Como eu faço?
Linha 401	E6: ((silêncio)) $x + 3$ igual a (10) ((fala baixa)) ((silêncio))
Linha 402	P: Sempre lembre o passo a passo. Eu tenho que deixar o x sozinho, certo?
Linha 403	E6: Humn.
Linha 404	P: Então quem está aí de intruso junto com o x ?
Linha 405	E6: O 10... Não, o 3.
Linha 406	P: O 3, certo?
Linha 407	E6: Aham.
Linha 408	P: E o 3, o que eu tenho que fazer com ele? Ele tem que virar quanto?
Linha 409	E6: Zero.
Linha 410	P: Zero. Então vai ficar...?
Linha 411	E6: Menos 3...
Linha 412	P: Aham.
Linha 413	E6: Com menos 3.
Linha 414	P: Humn.
Linha 415	E6: Igual a 3.
Linha 416	P: Tá. A balança desequilibrou. Você tirou 3. Então o que você tem que fazer do outro lado?
Linha 417	E6: x é igual... a 3.
Linha 418	P: Isso. Tirar 3.
Linha 419	E6: 3.
Linha 420	P: Isso. Só que só tem um detalhe. Aqui você tem $+ 3$, não é?
Linha 421	E6: Aham.
Linha 422	P: Você está tirando 3. Porque você já não tem 3, se tirar mais... tirar outro 3, vai ficar - 6 aqui. Tem que mudar o sistema.
Linha 423	E6: ((fala baixinho))
Linha 424	P: Isso.
Linha 425	E6: Mais 6 - 3.
Linha 426	P: Isso. Aí vai ficar quanto?
Linha 427	E6: - x... Esse aqui já não tem mais...
Linha 428	P: Isso.
Linha 429	E6: ... mas você tem ((fala baixa)) $3 + 3$, 6. ((silêncio))
Linha 430	P: 6? Tem certeza? Confere a conta.
Linha 431	E6: $10 - 3$... Olha! 7.
Linha 432	P: 7. Isso.
Linha 433	E6: ((silêncio))
Linha 434	P: Certinho. Ok, perfeito. Então, de atividade nós terminamos.

³² Efeito Topázio é um paradoxo didático, elaborado por Guy Brousseau (2007), no qual o professor conduz o raciocínio do aluno para que ele chegue na resposta esperada, a fim de ter por evitar um fracasso iminente.

$$\begin{array}{l}
 x + 3 = 10 \\
 x + \underline{3-3} = 10 - 3 \\
 x = 7
 \end{array}$$

Figura 5.97 – Resposta estudante 6: Atividade 8 - extra (estudo final).

Como foi possível observar, os invariantes operatórios mobilizados pelo Grupo 2 variou até mesmo entre os seus membros. Se for realizada uma análise do ponto de vista de um cenário maior, pode-se notar algumas similitudes e linhas condutoras de pensamento característicos de cada grupo, mas mesmo entre os componentes há uma variedade. No quadro 5.6, é possível observar os diferentes esquemas mobilizados entre esses estudantes. Já no quadro 5.11 pode-se compará-los com os diferentes níveis de invariantes operatórios do Grupo 1.

5.3.2.2 Caso especial: estudante 4

O estudante 4 foi um caso no qual se optou por agrupá-lo tanto no Grupo 2 quanto no Grupo 3. O motivo pelo qual foi feita tal escolha foi o resultado do estudo piloto desse aluno que demonstraram algumas dúvidas e evidências, de que seria interessante analisá-las, tanto do ponto de vista do conteúdo matemático quanto no ponto de vista sociocultural, no qual se focou apenas o Grupo 3. A figura 5.98 representa as respostas que se chamou a atenção.

Figura 5.98 – Resposta estudante 4: Atividades B1 e B2 – Série V (estudo piloto).³³

Pode-se dizer, inicialmente, que esse estudante é muito parecido com o último analisado (estudante 6), em termos de dificuldades e de alguns esquemas mobilizados, mas com a diferença de que foi muito mais difícil obter suas respostas e até houve uma certa indiferença em colaborar com a pesquisa. Isso é muito curioso, já que, em nenhum momento, foi imposta a participação dos estudantes no estudo. O convite foi feito e a cooperação seria de forma voluntária, sem usar nenhum tipo de constrangimento ou insistência, caso o estudante se recusasse em participar. É possível que parte da resistência seja apenas insegurança ou medo de apresentar uma resposta incorreta para a pesquisadora que não o conhece. De qualquer forma, extraiu-se o essencial para realizar nossa análise.

Observou-se que, em vários trechos do diálogo, uma característica predominante desse estudante 4 é a resposta evasiva. Respostas pouco elaboradas como “Achei legal...”, “Não sei” ou ambíguas como “algumas coisas estavam difíceis, algumas coisas estavam fáceis...”, “mais ou menos” foram frequentes, o que dificultou bastante a análise em termos de conteúdo matemático. Mas, como são os diferentes níveis de invariantes operatórios que estão sendo analisados, ainda assim, foram interessantes em termos de comparação com os outros estudantes. Veja-se o diálogo inicial:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 - LINHA 1 A 16

Linha 1	P: Bom, então vamos lá. Eu queria que você falasse um pouquinho do jogo. O que você achou?
Linha 2	E4: Eu achei o jogo legal, só que... um pouco difícil...
Linha 3	P: É? Por que é difícil?

³³ Transcrição não literal das respostas: Atividade B1: “Eu não consegui entende (entender). Eu queria muito resolver esses problemas. Dá vontade de chorar, mas eu queria fazer muito mesmo.”. Atividade B2: “Eu acho que tem que resolver o de cima e o de baixo e eu esqueci como que faz.”.

Linha 4	E4: Porque na vinte ((fase 20)) eu não consegui passar. Aí fiquei, tipo, pensando, pensando... Aí... eu fui lá e consegui, aí eu pensei, aí eu consegui passar. Só que na vinte... quando eu cheguei na vinte quatro também consegui. Aí na vinte e cinco estava difícil... Aí... você parou o jogo...
Linha 5	P: Entendi. E você achou que o jogo te ajudou a entender a atividade?
Linha 6	E4: ((Silêncio)) Mais ou menos...
Linha 7	P: Mais ou menos. Por quê?
Linha 8	E4: Porque... eu não entendi muita coisa do jogo...
Linha 9	P: Humn... E a atividade? O que você achou dessa atividade (comparada) com aquela que você fez no ano passado?
Linha 10	E4: ((Pausa)) Eu achei... legal...
Linha 11	P: Legal? ((Pausa)) O que você achou legal, por exemplo?
Linha 12	E4: ((Silêncio)) Ai... Tipo... é... algumas coisas ((Silêncio)).
Linha 13	P: Algumas coisas... o quê? (rs)
Linha 14	E4: Algumas coisas estavam difíceis, algumas coisas estavam fáceis.
Linha 15	P: Aham. Por exemplo, essa primeira aqui, o que você achou? Aqui ele fala para descobrir o valor de x . E fala assim que você precisa... O que você escreveu?
Linha 16	E4: “Precisa colocar o zero”.

Figura 5.99 – Resposta³⁴ estudante 4: Atividade 1 (estudo final).

A figura 5.99, que representa o último trecho do diálogo apresentado anteriormente, é um exemplo de que o estudante não compreendeu o enunciado do exercício. Embora a instrução seja bem direta, ele respondeu explicando que é “*preciso colocar o zero para sumir o x* ”.

No entanto, Vergnaud (2014) explica que a noção de complexidade não se dá de forma linear. Além disso, o autor faz a distinção de tais noções para o matemático, que buscará axiomas mais abrangentes e eficazes, enquanto o professor de Matemática procurará por relações e formas mais simples para a criança e, mesmo assim, ainda não serão compreendidas de forma imediata por esta. Assim, continua-se o diálogo para analisar-se mais elementos que possam esclarecer algumas dificuldades que esse aluno apresenta em relação ao conteúdo trabalhado nessas atividades.

³⁴ Transcrição literal da resposta: “*Que você precisa coloca (sic) o zero para sumir o x* ”.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 17 A 27

Linha 17	P: Colocar o zero, e sumir o x . Tá. Só que, aí, ele quer o resultado. Aqui ele está falando que você precisa somar dos dois lados, certo? Quero dizer, somar de um lado. Precisa somar o 2 com 2. Porque lembra que a primeira atividade do jogo você tinha que arrastar os quadradinhos, aí virava um só? Quanto ficaria aqui?
Linha 18	E4: ((Silêncio)) Ficaria quatro eu acho.
Linha 19	P: Quatro. Isso, não é? Então aqui era só colocar o resultado.
Linha 20	E4: ((Silêncio))
Linha 21	P: Não é? E, da mesma forma, os outros também. Esse dois, por exemplo, quanto ficaria?
Linha 22	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Seis.
Linha 23	P: Seis. Perfeito. E aí, e a três?
Linha 24	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Doze.
Linha 25	P: Doze. Ok, quatro?
Linha 26	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Dez?
Linha 27	P: Dez. Isso.

Pelo diálogo anterior, após a explicação verbal, o estudante conseguiu responder corretamente as atividades subsequentes (2 até 4). Para ilustrar as respostas que foram dadas antes dessa explicação, observem-se as figuras 5.100 a 5.102. Pode-se notar que suas resoluções giram em torno da mesma explicação dada na atividade 1, com exceção da atividade 4.

Figura 5.100 – Resposta³⁵ estudante 4: Atividade 2 (estudo final).

Figura 5.101 – Resposta³⁶ estudante 4: Atividade 3 (estudo final).

³⁵ Transcrição literal da escrita: “Que você precisa soma (sic) os dois lados”.

³⁶ Transcrição literal da escrita: “Que você tem que fazem (sic) nas (?) a mesma coisa soma do (sic) dois lados”.

Figura 5.102 – Resposta³⁷ estudante 4: Atividade 4 (estudo final).

É curioso notar que, embora as atividades de 1 a 4 sejam semelhantes, é somente na atividade 4 que o estudante fornece o valor da equação em questão. É possível que a resposta a essa indagação esteja na forma como o enunciado foi produzido. Veja-se que é somente na última atividade que há a seguinte instrução: “Encontre o valor de x na equação abaixo”. Um formato relativamente comum em atividades envolvendo cálculos de equações. Talvez, para o aluno, dentro dos seus conhecimentos-em-ação, a procura de uma pergunta direta tenha sido a chave para responder à atividade.

Ressaltou-se, de forma intencional, as reações físicas do estudante entre dois parênteses para evidenciar a diferença de comportamento do aluno em relação à forma como responde às perguntas da pesquisadora. Quando eram perguntas que ele tem confiança, respondeu em um tom de voz normal e claro. Porém, quando não tinha certeza da solução, mostrou muita timidez em um tom de voz quase inaudível. Pelo fato desse estudante ter demonstrado um comportamento muito diferente dos outros, achou-se relevante ressaltar essas características na transcrição.

Antes de prosseguir-se com o diálogo, é importante destacar que o estudante 4 só conseguiu responder até a atividade 4, pulou a atividade 5, respondeu parcialmente as atividades 6 e 7 e a atividade 8 entregou praticamente em branco. Portanto, algumas figuras que serão apresentadas mais adiante, correspondeu às respostas dadas após a interação com a pesquisadora. No diálogo a seguir, há uma explicação do conceito de igualdade em equações.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 27 A 50

Linha 27	P: Aí chega no número cinco. O que você resolveu até agora chamam-se equações. E a equação está mostrando sempre duas coisas iguais. De um lado de cá da igualdade e do outro lado. Aqui ele já está te dando: “ $x = 12$ ”. Isso significa que o x é igual a quanto?
Linha 28	E4: ((Pausa)) A zero?
Linha 29	P: Por que zero?
Linha 30	E4: ((fala bem baixinho)) Ah, não sei.
Linha 31	P: ((Silêncio)) Onde você tirou o zero? O que você pensou para achar que é zero?

³⁷ Transcrição literal da escrita: “Dá 10 (sic) é o número abaixo”.

Linha 32	E4: ((Pausa)) Isso aqui?
Linha 33	P: Aham. Só que isso aqui, ele está falando em relação a isso. Ele está falando que x é igual a doze, certo?
Linha 34	E4: Aham.
Linha 35	P: Então qual é o valor de x , nisso aqui?
Linha 36	E4: ((Silêncio))
Linha 37	P: Porque igualdade o que é? ((Pausa)) Quando você fala que alguma coisa é IGUAL? ((Pausa)) O que significa?
Linha 38	E4: ((Silêncio e fala baixinho)) Não sei...
Linha 39	P: Se eu falar, por exemplo, que a minha blusa é igual a sua.
Linha 40	E4: ((Silêncio)) Então é igual.
Linha 41	P: Sim, igual. Igual significa, por exemplo, que a minha blusa é igual a sua?
Linha 42	E4: ((Silêncio)) Não...
Linha 43	P: Não. O que você viu que elas não são iguais?
Linha 44	E4: Que a sua é branca e a minha é preta...
Linha 45	P: Isso. A minha é branca e a sua é preta. A minha calça é igual a sua?
Linha 46	E4: Não.
Linha 47	P: Não também. Agora, e essa carteira? Esquece os rabiscos, a carteira em si, é igual a essa?
Linha 48	E4: É.
Linha 49	P: Por que?
Linha 50	E4: ((Pausa)) Porque é igual!

Foi possível notar, por meio dessa interação, que a noção predominante de significante desse estudante é a de representação por imagem. Ou seja, quando se fala de símbolos (como os números), isso não produz nenhum significado para o aluno. No entanto, quando foram dados exemplos com objetos que ele enxerga, o estudante consegue identificar se os objetos são iguais ou não, embora não consiga explicar como constrói este significado em seu pensamento. Constatação que pode ser vista em sua última fala: “*Porque é igual!*”.

Vergnaud (2014) afirma que o pensamento trabalha com a ajuda de diferentes sistemas simbólicos (linguagem, representação de imagens, etc.) e elas podem ser utilizadas em níveis variados ao mesmo tempo. No caso desse estudante, elementos visuais como cores e formas ajudaram a criar uma classe de objetos que possam ser consideradas como iguais ou diferentes. Esses tipos de invariantes são chamados de relacionais e classificatórios. O fato do estudante não conseguir definir com clareza o motivo pelo qual duas carteiras (escrivatinhas da sala de aula) podem ser consideradas iguais, independente do estado de conservação delas, é uma dificuldade de expressar a noção de invariante relacional. Vergnaud (ibidem) traz um exemplo da noção de paternidade para uma criança. Para ela, é confusa a ideia de que a relação entre pai e filho é verdadeira tanto para sua própria relação com o pai quanto para a relação de seu pai com seu avô. Obviamente, aqui se trabalha com objetos diferentes, mas se pode indicar a noção do invariante relacional como um obstáculo para o entendimento do estudante 4 sobre o conceito de igualdade.

Continuando o diálogo, tentou-se dar mais elementos como exemplos para que o aluno pudesse responder à questão 5 e às demais que ficaram em branco. Após a utilização do recurso

didático da balança de pratos, já citado anteriormente, ele conseguiu responder à atividade 5. Veja-se o diálogo:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 51 A 71

Linha 51	P: O que você vê que é igual?
Linha 52	E4: ((Pausa)) Os detalhes?
Linha 53	P: Os detalhes! Isso. No caso dos números, aqui, ele só está expressando isso. Então, o sinal de igual, está falando isso: que um lado tem a mesma característica do outro. E o x é um valor que eu não sei. Mas eu sei que ele é igualzinho a 12. ((Pausa)) Então qual é o valor de x ?
Linha 54	E4: ((Silêncio e fala baixinho)) Não sei...
Linha 55	P: Não sabe? Então vou fazer o seguinte: eu vou pegar um aparato ³⁸ . Deixe-me só pausar... ((O DIÁLOGO É INTERROMPIDO PARA EXPLICAR VISUALMENTE A IDEIA DE IGUALDADE POR MEIO DO APARATO))
Linha 56	P: Com essa explicação que eu fiz, da balança, você consegue agora entender? Por exemplo, vamos supor que esse x seja esse carrinho aqui.
Linha 57	E4: Aham.
Linha 58	P: Então x vale quanto?
Linha 59	E4: ((Pausa)) Vale doze?
Linha 60	P: Vale doze! É doze a resposta. Então, já estava ali a resposta. Quer colocar a resposta?
Linha 61	E4: ((Silêncio))
Linha 62	P: Põe a resposta (rs)
Linha 63	E4: Vou ter que colocar aqui embaixo?
Linha 64	P: Isso.
Linha 65	E4: ((Silêncio))
Linha 66	P: Isso... doze. Agora, quais outras somas que dão (resultado) doze? Me fale dois números que, somados, o resultado dá doze.
Linha 67	E4: ((Silêncio)) Zero menos x?
Linha 68	P: Zero menos x ? Humn... Só que, o x , você não sabe o número. Tem que ser com o número que você já sabe. ((Pausa)) Pegue dois números que você já sabe e que, somando, vai dar doze.
Linha 69	E4: Dez... mais dois.
Linha 70	P: Isso! Dez mais dois. Pode colocar... dez mais dois. ((Silêncio)) $10 + 2$, né? Não vírgula... isso, $10 + 2$...
Linha 71	E4: Aham.

³⁸ Para ajudar na compreensão dos estudantes, sobre a ideia de igualdade, foi criada uma balança utilizando dois copos descartáveis e um cabide. Cada copo ficou suspenso em um lado do cabide, por meio de fios de barbante, no qual, utilizando-se de bolinhas de gude, de tamanhos iguais, ou miniaturas de carros, em cada lado da balança, mostrei a ideia de equilíbrio e desequilíbrio como forma de expressar a noção de equação, conforme podem ser vistas nas figuras 5.91 e 5.92.

5. O que você resolveu até agora chamam-se "equações". Uma equação mostra que duas coisas são iguais. Veja:

$x = 12$

a. O x é igual a qual valor?

Resposta: 12 1

b. Tente representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item a.

Resposta: 10+2

Figura 5.103 – Resposta estudante 4: Atividade 5 (estudo final).

A figura 5.103 representa a resolução do estudante 4, após a explicação que corresponde ao diálogo imediatamente anterior. Nota-se que a representação visual é um recurso ainda muito eficaz para estudantes que tem dificuldades de representar noções abstratas.

Por meio dessas atividades, conseguiu-se avançar um pouco na compreensão dessas ideias para que o aluno pudesse, ao menos, responder à atividade corretamente.

Já na atividade 6, o estudante conseguiu responder todas as questões, mas apresentou alguns equívocos. Neste diálogo subsequente, há a explicação do raciocínio empregado pelo aluno e, na figura 5.104, o resultado correspondente, após o diálogo.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 72 A 113

Linha 72	P: Isso. Ok. Agora pensando nisso aqui, vamos para essa atividade seis. Aqui você falou que $6 + 3 = 9$ é falsa. Por que que você concluiu que é falsa?
Linha 73	E4: ((Pausa)) Porque... eu contei... e não deu o mesmo valor...
Linha 74	P: É? 6 mais 3 não é igual a 9?
Linha 75	E4: Não...
Linha 76	P: Quanto que é $6 + 3$?
Linha 77	E4: É oito.
Linha 78	P: Oito? Tem certeza?
Linha 79	E4: ((Silêncio))
Linha 80	P: Faz de novo a conta, seis mais três (rs).
Linha 81	E4: ((Sussurrando fazendo a conta)) Espera... ((Silêncio)) Ah, é nove.
Linha 82	P: É nove. Então, ela é verdadeira. Né?
Linha 83	E4: ((Silêncio))
Linha 84	P: Verdadeira... Perfeito. Aí a b está certa, $14 = 7 + 7$. A ((letra)) c : $3 + 3$ é igual a $1 + 5$? ³⁹
Linha 85	E4: ((Silêncio)) É.
Linha 86	P: Por que?
Linha 87	E4: Porque aqui é... ((sussurra))
Linha 88	P: Humn?

³⁹ Aqui está sendo trabalhado com o conceito de equivalência.

Linha 89	E4: Porque aqui é igual?
Linha 90	P: Sim. Quanto que é?
Linha 91	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Aqui dá seis.
Linha 92	P: Perfeito.
Linha 93	E4: ((Pausa)) E aqui dá seis?
Linha 94	P: Isso!
Linha 95	E4: Então está... verdadeira.
Linha 96	P: Verdadeira, isso. Perfeito. Aí o outro: $1 + 4 = 2 + 3$. Certinho. E o ((item)) E, por que é falso?
Linha 97	E4: ((Pausa)) Porque... eu contei... e não deu nenhuma soma...
Linha 98	P: Sim, porque $13 + 3$ é quanto?
Linha 99	E4: ((Silêncio)) Dezoito?
Linha 100	P: Conte treze. Memorize treze, aí conte três.
Linha 101	E4: ((Silêncio)) Dezesesseis.
Linha 102	P: Dezesesseis. Dezesesseis é igual seis?
Linha 103	E4: ((Pausa)) É...
Linha 104	P: Dezesesseis?
Linha 105	E4: ((interrompe a pesquisadora)) Não! Não...
Linha 106	P: Por que?
Linha 107	E4: ((Pausa)) Porque não é!
Linha 108	P: Seis não é dezesesseis, não é?
Linha 109	E4: É...
Linha 110	P: Seis é seis.
Linha 111	E4: É.
Linha 112	P: Então...
Linha 113	E4: Sim.

Figura 5.104 – Resposta estudante 4: Atividade 6 (estudo final).

Com exceção do item *a* e *c* nos quais, por meio do diálogo, o estudante se equivocou nos cálculos, o restante foi respondido corretamente. Vale ressaltar em um trecho do diálogo, novamente, a falta do significado do conceito de igualdade entre números quando se questionou o estudante “*Por que dezesesseis não é igual a seis?*” e ele responde “*Por que não é!*”.

Muitos estudantes acreditam que a Matemática se resume em atividades de “memorização” e “repetição”. Talvez, em alguns casos, como a aplicação de lemas e axiomas, uma dessas constatações seja verdadeira. No entanto, a Matemática não se resume a isso. E, esse tipo de compreensão, por parte dos alunos, pode ser a consequência da forma como a disciplina foi didatizada na escola. É possível que trabalhos mais empíricos de investigação, como a metodologia de resolução de problemas, como exemplo, o trabalho de Onuchic et al.

(2014), pudessem tirar um pouco o estigma de que a Matemática é uma mera acumulação e aplicação de regras “inquestionáveis”.

Na atividade 7, demonstrou-se uma forma de aplicação da regra de sinais: quando há um sinal positivo com um negativo, isso resulta em uma subtração. Após a aplicação da regra de sinais, a equação torna-se uma subtração simples. Porém, conforme se pode observar na figura 5.105, o estudante 4 respondeu que o resultado da operação $7 - 2$ é nove.

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2$$

Qual é o resultado dessa equação?

Resposta: 9

Figura 5.105 – Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade 7 - primeira parte (estudo final).

Veja-se o diálogo correspondente à atividade:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 114 A 127

Linha 114	P: Essa é falsa, certo? Ok... agora, a ((atividade)) sete. $7 + -2$ que é igual a $7 - 2$. Aí você respondeu aqui...
Linha 115	E4: É nove.
Linha 116	P: Nove? É... Qual é a conta que você fez aqui?
Linha 117	E4: ((Pausa)) Eu... dividi?
Linha 118	P: Dividiu? Dividir 7 por 2 dá 9?
Linha 119	E4: ((Silêncio))
Linha 120	P: Não?
Linha 121	E4: Não... ((Silêncio))
Linha 122	P: ((Pausa)) Não... E $7 - 2$ é quanto?
Linha 123	E4: ((Silêncio)) É oit... nove?
Linha 124	P: Aí você está somando dois né? Você tem sete e está somando dois, aí dá nove. Só que você está tirando, em vez de somar...
Linha 125	E4: ((Silêncio)) Dá dez?
Linha 126	P: Dez? Por que dez?
Linha 127	E4: ((Pausa)) Porque está somando?

O que foi possível notar, pelo trecho anterior, é que o estudante parece não compreender as operações que realiza na atividade. Há uma incerteza em suas respostas e parece responder de forma aleatória, por exemplo, quando afirma que aplicou uma divisão para apresentar o resultado nove. Porém, quando foi questionado se a divisão de sete por dois, realmente, resultaria em nove, o estudante recuou dizendo que não, embora tenha ficado em silêncio em

um primeiro momento. Mesmo tentando explicar o equívoco cometido, o aluno parece não compreender que a operação a ser realizada deve ser de subtração em vez da adição.

O que dificulta ainda mais a análise é o fato das resoluções desse estudante serem limitadas a respostas monossilábicas ou até mesmo de silêncio, como é possível notar em diversos trechos do diálogo com a pesquisadora, o que se limita a tentar entender o possível raciocínio adotado pelo aluno. Na continuação do diálogo, haverá mais elementos que indicam o nível de dificuldade com as operações do estudante 4.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 128 A 141

Linha 128	P: Humn... só que você está tirando, né? Ele está falando que isso aqui é igual a 7 menos 2 você tem que tirar 2 de 7.
Linha 129	E4: ((Silêncio)) Dois de sete... ((pausa e sussurra baixinho)) Não entendi...
Linha 130	P: Se você tem sete carrinhos e tira dois, com quantos carrinhos você fica?
Linha 131	E4: ((Pausa)) Se eu tiro... quanto?
Linha 132	P: Você tem sete carrinhos e tira dois, com quanto que você fica de carrinho?
Linha 133	E4: Sete.
Linha 134	P: Você tinha sete, não é? ((Pausa)) Vamos pensar em um outro número. Se você tinha três carrinhos e tira dois. Com quanto que você fica?
Linha 135	E4: ((Pausa)) Um.
Linha 136	P: Um. Então agora pense: se você tem cinco carrinhos e tira três, dá quanto?
Linha 137	E4: ((Pausa)) três.
Linha 138	P: Três... Você tinha cinco.... e tira três... Quanto dá?
Linha 139	E4: ((Pausa)) Cinco tira três... ((Silêncio)) Dois.
Linha 140	P: Dois. Agora você tem sete e tira dois, quanto dá?
Linha 141	E4: Eu tinha sete... e tira dois, cinco!

Nesse diálogo, foi utilizada uma estratégia de complexidades sucessivas, de um mesmo tipo de operação, para que o estudante finalmente chegasse à resposta correta. Vergnaud (2014) faz uma observação importante sobre o papel do professor em casos como o desse aluno, no qual não se têm elementos suficientes para deduzir qual seria a dificuldade dos alunos.

“(...) é tarefa do professor, e mesmo que ele não disponha de qualquer outro testemunho se não aquele fornecido pela observação dos comportamentos da criança, buscar a parte das relações que ela, criança, bem compreendeu, a parte que ela compreendeu de modo confuso, e a parte daquelas que ela ignora pura e simplesmente. Em todo caso, é um enorme erro pedagógico considerar, sob o pretexto de que o ensino é necessariamente feito de demasiados exercícios de caráter repetitivo, de que consista ele, ensino, na aquisição, por simples condicionamento, de hábitos ou de procedimentos já prontos” (VERGNAUD, 2014, p. 313).

Além disso, Vergnaud reforça que as regras só serão adquiridas pelas crianças quando elas perceberem as ligações que aquelas mantêm com a estrutura relacional dos problemas aos quais são aplicados. Ou seja, ao notar que o estudante 4 não conseguia associar os números

apenas na forma cardinal, utilizou-se a estratégia de associar a um objeto concreto. Mesmo assim, foi necessário reduzir a uma quantidade limitada, a saber, os dedos de uma mão, inicialmente, para que depois se pudesse chegar a uma quantidade maior, que era o resultado que se queria.

Na figura 5.106 consta a resposta correta registrada pelo aluno após o diálogo.

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2$$

Qual é o resultado dessa equação?

Resposta: 29 5

Figura 5.106 – Resposta estudante 4: Segunda tentativa da atividade 7 - primeira parte (estudo final).

Com a aparente compreensão inicial das operações, solicitou-se ao estudante para que verificasse suas respostas na continuação dessa mesma atividade, como se pode observar na figura 5.107.

Calcule o resultado das seguintes equações:

a. $2 + (-2) = 3$

b. $5 + (-3) = 9$

c. $8 + (-5) = 13$

d. $33 + (-12) = 21$

e. $2 + (-8) = 15$

Figura 5.107 – Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade 7 - segunda parte (estudo final).

Segue o diálogo correspondente para verificar como o estudante retificou suas respostas.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 144 A 163

Linha 144	P: Cinco. ((Pausa)) Agora, estes daqui, é a mesma coisa, então quando está entre parênteses o + e o - você tira e ele vai ficar só com -. Então vai ficar 2 - 2. Não é?
Linha 145	E4: Aham.
Linha 146	P: Aqui vai ficar 5 - 3, 8 - 5, 33 - 12 e 2 - 8. Quanto vai dar essas contas?
Linha 147	E4: ((Silêncio)) Aqui vai dar dois?
Linha 148	P: Aí vai dar dois? Qual a conta que você fez?

Linha 149	E4: ((Pausa)) É... pela... pelo negócio que você me falou?
Linha 150	P: É... A mesma coisa que aqui. Isso. Só que aqui vai ficar 2 – 2, né? Quanto que dá 2 – 2?
Linha 151	E4: ((Pausa)) Dois?
Linha 152	P: Por quê?
Linha 153	E4: Dois?
Linha 154	P: Por que dois?
Linha 155	E4: ((Silêncio))
Linha 156	P: Você tem dois... tira dois.
Linha 157	E4: ((Pausa)) Então dois... tiro dois? É zero?
Linha 158	P: Zero!
Linha 159	E4: Aham.
Linha 160	P: E aí, esse aqui, cinco tira três.
Linha 161	E4: Cinco... e tira três... Cinco.
Linha 162	P: Cinco tira três... ó, 5 tira 3 ((demonstrando com objetos)).
Linha 163	E4: Dois.

Observou-se que a dúvida inicial ainda continua. Foi necessário reforçar a estrutura relacional com os objetos concretos para que o estudante compreendesse as operações que realiza.

Devido ao limite de tempo⁴⁰, não foi possível dar continuidade ao restante das atividades 7 e 8. Para fins de registro, o estudante 4 não conseguiu responder nenhuma parte da atividade 8, entregando-a praticamente em branco (figura 5.111), exceto, a resposta da primeira parte da atividade, como se pode observar na figura 5.110. Na figura 5.108 ficaram os registros das respostas retificadas após o diálogo. E, na figura 5.109, a terceira e última parte correspondente à atividade 7.

Calcule o resultado das seguintes equações:

a. $2 + (-2) = 3-0$

b. $5 + (-3) = 9-2$

c. $8 + (-5) = 13$

d. $33 + (-12) = 21$

e. $2 + (-8) = 15$

Figura 5.108 – Resposta estudante 4: Segunda tentativa da atividade 7 - segunda parte (estudo final).

⁴⁰ No dia que foi aplicado este protocolo com o estudante 4, já era a última aula do dia e também o último disponível para a aplicação dessa pesquisa na escola. Por isso, foi necessário interromper a entrevista referente ao protocolo um pouco antes do término.

Figura 5.109 – Resposta estudante 4: Atividade 7 - terceira parte (estudo final).

Figura 5.110 – Resposta estudante 4: Atividade 8 - primeira parte (estudo final).

Figura 5.111 – Resposta estudante 4: Atividade 8 - segunda parte (estudo final).

Será novamente sintetizado em um quadro, as atividades analisadas do Grupo 2 e seus respectivos esquemas mobilizados por campo conceitual envolvido em cada modelo. Salienta-se que, no caso do Grupo 2, o único modelo que se encontrou de forma predominante foi o da Aritmética. Isso se deve à própria característica do protocolo elaborado para esse grupo, mas também pela complexidade de raciocínio apresentada pelos estudantes.

Conforme enuncia a própria Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento, não se tem como prever o modelo que surgirá nas análises antecipadamente. Por isso, é natural que aconteça a predominância de um modelo em detrimento de outro entre os grupos analisados

nesta pesquisa. Esse resultado também é um indicativo de que há uma diferença no nível de compreensão em relação ao próprio conteúdo matemático, como se queria evidenciar ao se classificar os estudantes em diferentes grupos.

Ressalta-se que o estudante 4, indicado com um sinal de asterisco, faz parte tanto do Grupo 2, quanto do Grupo 3, que será analisado a seguir.

Quadro 5.6 - Esquemas mobilizados pelo Grupo 2: Modelo 1 – Aritmética				
Estrutura aditiva	Estudante 6	Estudante 27	Estudante 32	Estudante 4*
Duas medidas se compõem para resultar em uma terceira.	SIM	SIM	SIM	SIM
Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.	SIM	SIM	SIM	NÃO
Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação	NÃO	SIM	NÃO	NÃO
Estrutura algébrica	Estudante 6	Estudante 27	Estudante 32	Estudante 4*
Compreensão do coeficiente de uma variável.	NÃO	SIM	SIM	NÃO
Compreensão da função dos parênteses.	NÃO	SIM	SIM	NÃO

5.3.3 Respostas do Grupo 3

Conforme explicado no início deste capítulo, no subtópico 5.2.3, a análise do Grupo 3 não está focada em tópicos matemáticos, mas em questões socioculturais como sua afinidade com a Matemática, preferências de disciplinas na escola, lazer e como consideram uma aula de boa qualidade. Essas perguntas foram elaboradas na tentativa de trazer elementos que ajudem na compreensão das dificuldades dos estudantes em relação à disciplina de Matemática, mas que não estejam ligadas apenas às questões explícitas do conteúdo, mas em possíveis causas subjacentes. Vergnaud (2007) também considera como relevante, citando alguns trabalhos de Vygotski, o peso das relações culturais apropriadas pela criança como uma forma de influenciar no aprendizado desta.

Por isso, elaboraram-se cinco questões nas quais os estudantes foram instruídos a responderem por escrito e, posteriormente, conduziu-se uma entrevista semiestruturada para obter mais detalhes de suas respostas. O mesmo procedimento adotado nos protocolos dos dois grupos anteriores.

Os escolhidos para este grupo foram os estudantes 19 e 22, além do estudante 4, que também pertenceu ao Grupo 2, conforme explicado anteriormente.

Embora não tenha sido elaborado questões relacionadas ao conteúdo matemático, manteve-se a mesma metodologia de análise adotada para esta pesquisa, ou seja, as respostas dos estudantes foram agrupadas em modelos que, de acordo com a análise de suas respostas, mostraram-se como predominantes. No entanto, ressalta-se que esses modelos a seguir não têm o mesmo conteúdo dos anteriores e não se relacionam diretamente com o conteúdo de Matemática. Porém, considerou-se que são elementos adicionais importantes para ajudar na compreensão das dificuldades dos estudantes em relação à aprendizagem daquele conteúdo.

Antes de realizar a entrevista com cada um dos estudantes, foi feita uma análise prévia de suas respostas no questionário por escrito. E, de acordo com os elementos que mais se chamou a atenção, direcionou-se a conversa para se obter mais detalhes sobre aspectos relevantes encontrados em suas respostas. No entanto, as anotações constantes nas figuras 5.112 e 5.114 serviram apenas de referência para a condução da entrevista pela pesquisadora e não foram mostradas aos alunos.

Para fins de organização, manteve-se a numeração sequencial anterior.

5.3.3.1 Modelo 5 - Matemática

Na opinião dos três estudantes, a disciplina de Matemática foi classificada como “difícil”. Embora a considere como difícil, o estudante 19, por exemplo, diz ter um sentimento positivo em relação à disciplina, devido à importância dela no cotidiano. Já o estudante 22 afirma que gosta da disciplina, mas que há alguns conteúdos que realmente não entende. No caso do estudante 4, ele só afirma que precisa de muita ajuda para acompanhar a disciplina. Nas figuras 5.112, 5.113 e 5.114, pode-se observar as respostas dadas pelos estudantes 19, 22 e 4, respectivamente. Nessas imagens, também é possível observar algumas anotações que foram destacadas para serem elaboradas durante a entrevista. Devido a legibilidade da escrita, foi feita uma transcrição não literal das respectivas respostas, em nota de rodapé, para uma melhor compreensão.

Figura 5.112 – Resposta estudante 19: Questionário sociocultural – questão 1⁴¹.

Figura 5.113 – Resposta estudante 22: Questionário sociocultural – questão 1⁴².

Figura 5.114 – Resposta estudante 4: Questionário sociocultural – questão 1⁴³.

⁴¹ Transcrição não literal da resposta: “O meu sentimento pela matemática é boa porque ensina muita coisa. Se você não souber alguma coisa na matemática, não tem como você fazer muitas coisas. Eu, no futuro, quero ser engenheiro. E, para ser engenheiro, eu preciso fazer cursos e muitas coisas sobre matemática. A matemática faz muita parte da nossa vida nem para tudo (sic). Mas, em algumas coisas, a matemática precisa ser usada. Se você não souber a matemática, você não consegue trabalhar em um mercado e loja e etc. E é o que eu acho sobre a matemática.”

⁴² Transcrição não literal da resposta: “Eu gosto de matemática, mas realmente há algumas questões que, realmente, não entendo. Talvez, em minha opinião, seja a maneira pela qual estão me explicando.”

⁴³ Transcrição não literal da resposta: “Minha relação em matemática que é (sic) muito difícil as atividades. Eu preciso muito de ajuda, etc.”

Para compreender um pouco melhor essas respostas, foi feito um diálogo com cada um dos estudantes conforme a sequência a seguir.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 19 – LINHA 1 A 22

Linha 1	P: Eu vi o seu questionário e você está falando um pouco sobre o seu sentimento em relação à disciplina de Matemática no qual você falou que é “bom”. Daí você fala que tem o sonho de ser engenheiro. De onde vem esse sonho? Tem alguma influência?
Linha 2	E19: É que eu gosto de desenhar... prédio, casa... essas coisas.
Linha 3	P: Então você quer ser engenheiro civil?
Linha 4	E19: Aham.
Linha 5	P: Legal. Tem alguém na sua família que trabalha com isso?
Linha 6	E19: ((silêncio)) Não.
Linha 7	P: Não?
Linha 8	E19: ((muxixa)) tsc tsc.
Linha 9	P: E você fala que a Matemática é importante na sua vida, mas em que aspecto ela é importante?
Linha 10	E19: Ah, se na minha profissão, eu quero ser engenheiro, e você não sabe Matemática, você não tem como ser engenheiro.
Linha 11	P: Sim.
Linha 12	E19: Não é? Porque você tem que calcular... as coisas lá, não é? Os tamanhos... centímetros... Ah, a Matemática é importante em tudo, para mim.
Linha 13	P: Certo. E você tem dificuldade em Matemática?
Linha 14	E19: Tenho.
Linha 15	P: Em que aspecto que você tem dificuldade?
Linha 16	E19: É... em álgebra. Álgebra e equações do segundo grau...
Linha 17	P: Aham.
Linha 18	E19: Eu tenho dificuldade...
Linha 19	P: Certo. E tem alguma parte da Matemática que você tem mais facilidade?
Linha 20	E19: Ah... acho que... não.
Linha 21	P: Não? Então, no geral, álgebra é o que você tem mais dificuldade?
Linha 22	E19: É.

Como se pode observar nesse diálogo, o estudante 19 tem a percepção da importância da Matemática para sua futura profissão que almeja como engenheiro. Embora tenha dificuldade para acompanhar a disciplina, é interessante o fato do aluno não descartar a utilidade da Matemática no cotidiano. Nota-se que há um “desejo” de aprender, devido a sua relevância, mas não sabe como atingir esse objetivo. Na continuação desse diálogo, o estudante dá um outro exemplo do motivo pelo qual se deve aprender a Matemática.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 19 – LINHA 45 E 46

Linha 45	P: (...) E (em relação à) Matemática você respondeu: “ <i>nós precisamos aprender a Matemática</i> ”. Mas, por quê? É só por causa da sua profissão ou tem mais algum sentido?
Linha 46	E19: Não. Porque você vai trabalhar em... vamos supor... um mercado. Você vai ser (operador de) caixa. Se você não souber a Matemática, não tem como você saber dar o troco, saber quanto que fica... Então, essas coisas...

Por meio de sua fala, fica evidente que a importância dada à Matemática é utilitária, ou seja, de ordem prática para sobrevivência. Por exemplo, ir ao mercado fazer compras é uma rotina presente quase que na totalidade das pessoas do mundo moderno, independente da ocupação. O estudante utiliza como exemplo a profissão de operador de caixa para justificar que não é apenas o engenheiro que precisa saber Matemática, mas até mesmo em atividades que exigem menos qualificação técnica.

Já no caso do estudante 22, que será analisado a seguir, não há nenhuma menção em relação à importância dada à disciplina, embora ele relate que goste dela. Em seu diálogo, pode-se observar apenas os motivos pelos quais a Matemática é tão difícil para ele.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 22 – LINHA 27 A 46

Linha 27	P: (...) como você se sente em relação à matéria de Matemática?
Linha 28	E22: (rs) Então, Matemática, eu não... tem coisas que eu entendo e sou boa.
Linha 29	P: Humn.
Linha 30	E22: Tem coisas que, se eu não entendo, eu sou péssima.
Linha 31	P: Certo.
Linha 32	E22: Então, tecnicamente, eu acho que, tem gente que fala que, é o modo da pessoa me explicar, então eu tento achar outros meios de aprender aquilo que eu não aprendi ainda.
Linha 33	P: E você consegue me dar algum exemplo? De, por exemplo, uma matéria da Matemática que você acha fácil, que você domina, e que você não tenha problema?
Linha 34	E22: Eu gosto bastante de divisão, multiplicação, adição... soma e tal... eu gosto bastante também é... de frações.
Linha 35	P: Aham.
Linha 36	E22: Eu não sou muito boa para esse negócio de x, y.
Linha 37	P: De álgebra?
Linha 38	E22: ((suspira angustiada)) É... Nem um pouquinho boa.
Linha 39	P: Entendi. Qual é a sua dificuldade em álgebra? O que tem de diferente na álgebra?
Linha 40	E22: Por que, uma vez, muitos professores já me disseram que “se não tem número, não é Matemática”. (rs)
Linha 41	P: Aham.
Linha 42	E22: Então, eu não consigo. (rs) Se tem um x eu já fico “meu Deus, o que eu faço da minha vida?”
Linha 43	P: Entendi. Você não consegue lidar com o fato de não ter um número ali?
Linha 44	E22: É. (rs)
Linha 45	P: É não saber o número que te dá aquela angústia?
Linha 46	E22: Isso.

Como já é esperado, o estudante relata que sua maior dificuldade é com a Álgebra. Segundo a justificativa do aluno, sua dificuldade se deve por conta da seguinte afirmação feita por um professor de Matemática: “Se não tem número, não é Matemática”. Não se sabe ao certo o contexto utilizado por esse professor para fazer uma afirmação de tal tipo, mas é notável que criou um obstáculo na aprendizagem do conteúdo de Álgebra nesse estudante.

Este relato demonstra o quanto o professor deve ter cautela em suas afirmações e definições, já que isso pode criar uma generalização equivocada e gerar um futuro obstáculo para os estudantes.

No último trecho do diálogo, também se nota a angústia do estudante ao lidar com sentenças abertas que não têm valor numérico definido. Esse tipo de dificuldade já é bastante conhecido na literatura pertinente ao assunto⁴⁴.

Já o estudante 4, relata poucos detalhes sobre a sua dificuldade em Matemática. Apenas afirma que recorre a vídeos do YouTube⁴⁵ para tentar sanar as suas dúvidas. Veja-se o seu diálogo:

SEGUNDO DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 1 A 12

Linha 1	P: Eu olhei o seu questionário e queria que me falasse um pouco sobre o que respondeu em relação à disciplina de Matemática: você disse que acha ela muito difícil e que precisa de muita ajuda. Você tem alguém que possa te ajudar?
Linha 2	E4: Não tenho...
Linha 3	P: Não? Ninguém na sua casa ou algum amigo...
Linha 4	E4: ((silêncio)) Só na internet...
Linha 5	P: Na internet? Você costuma ver na internet quando tem dúvida essas coisas?
Linha 6	E4: Sim.
Linha 7	P: Onde você procura na internet?
Linha 8	E4: No youtube.
Linha 9	P: No youtube? Canais que explicam...
Linha 10	E4: ((silêncio))
Linha 11	P: Isso é só em relação à Matemática ou qualquer matéria?
Linha 12	E4: ((silêncio)) Só em Matemática.

No próximo modelo, serão analisados trechos dos diálogos nos quais os estudantes relacionam suas dificuldades de aprendizagem com a dinâmica da aula dos professores.

5.3.3.2 Modelo 6 - Professor

Neste modelo, identificou-se a atribuição da figura do professor como um grande responsável pelo sucesso do aprendizado, segundo os estudantes. Nas figuras 5.115 a 5.117, é possível observar suas respostas descrevendo uma aula de boa qualidade. Para fins de análise,

⁴⁴ Em Coxford e Shulte (1995) há inúmeros artigos que relatam tais tipos de dificuldades. E, também na pesquisa de Ponte, Branco e Matos (2009, p.98).

⁴⁵ YouTube é uma plataforma digital de compartilhamento de vídeos na qual o usuário pode encontrar conteúdos diversos, inclusive, de professores que ensinam conteúdos escolares.

destacou-se e as observações nas respostas, para que, posteriormente, fosse possível obter mais detalhes durante a entrevista.

Figura 5.115 – Resposta estudante 19⁴⁶: Questionário sociocultural – questão 4.

Figura 5.116 – Resposta estudante 22⁴⁷: Questionário sociocultural – questão 4.

Figura 5.117 – Resposta estudante 4⁴⁸: Questionário sociocultural – questão 4.

É possível observar que a disciplina da turma e a forma como o professor explica parecem ser fatores bastante relevantes para os estudantes. Veja-se, nos respectivos diálogos de cada estudante, a forma como elaboraram suas respostas.

⁴⁶ Transcrição não literal da resposta: “Uma boa aula é quando o professor consegue desenvolver a aula. Quando os alunos prestam atenção na aula. Isso, para mim, é uma boa aula”.

⁴⁷ Transcrição literal da resposta: “Aquele onde todos os alunos possam interagir com a aula, possa ser um pouco mais animada.”.

⁴⁸ Transcrição não literal da resposta: “Uma aula boa é aquela sala em silêncio, que o professor ensina bem.”.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 19 – LINHA 97 A 110

Linha 97	P: Entendi. E, falando nisso, o que você considera uma boa aula? Você explicou um pouco aqui dizendo que é um professor que consegue “desenvolver”. Mas, o que é “conseguir desenvolver a aula”? Explique um pouquinho melhor.
Linha 98	E19: Ah... tipo, o professor explica. Tem gente que não consegue entender a explicação. Se ele consegue explicar melhor, e dá para entender, isso já é um avanço. É a parte boa da aula. Para mim, na minha opinião.
Linha 99	P: Certo.
Linha 100	E19: É... uma aula boa? É um professor desenvolver, como eu falei, conseguir explicar, passar a matéria que ele precisa... Porque, a professora de Português, ela tem dificuldade de nos passar a matéria, ela não consegue desenvolver, por causa da bagunça da sala... Ela não consegue desenvolver as aulas.
Linha 101	P: Entendi...
Linha 102	E19: Já o professor Edgar⁴⁹ ele consegue desenvolver a aula dele toda.
Linha 103	P: Aham.
Linha 104	E19: Porque ele é mais “grosso”, sabe? Ele brinca com a gente, mas, na hora da aula, ele não gosta de bagunça e já a professora de Português não consegue segurar (a bagunça).
Linha 105	P: Entendi. Daí por causa da bagunça você acha que a aula não rende?
Linha 106	E19: É, a aula não rende. Ela não consegue explicar, não consegue passar a lição. E é isso que eu acho...
Linha 107	P: Aham. Mas é só a aula de Português que é mais crítica assim?
Linha 108	E19: Só a de Português.
Linha 109	P: E a de Matemática e as outras? Dá para desenvolver?
Linha 110	E19: Não. Dá para desenvolver.

O estudante 19 descreve duas características, segundo sua avaliação, sobre o papel de um bom professor: a capacidade de saber explicar de diferentes formas um mesmo conteúdo, preocupando-se com a aprendizagem do aluno, e saber controlar a indisciplina da sala de aula.

Já o estudante 22 afirma que aulas mais dinâmicas poderiam ser mais interessantes para um bom aproveitamento. Ele cita, por exemplo, alguns tipos de gincanas, nas quais os alunos devem responder à pergunta no menor tempo possível, que poderiam ser mais estimulantes e tirariam a monotonia da aula. Veja-se o trecho:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 22 – LINHA 113 A 134

Linha 113	P: (...) E o que você considera uma boa aula?
Linha 114	E22: Ah, eu acho que... ((silêncio)) os alunos interagirem com o professor e tal. Esse... bate-papo assim.
Linha 115	P: Aham.
Linha 116	E22: Que às vezes não tem, pelo fato da sala mesmo não se... adaptar a isso.
Linha 117	P: Entendi.
Linha 118	E22: Mas também acho bem legal isso. É interessante porque todo mundo fica, se eu errar... eu... eu vou errar na frente de todo mundo. Não é nem na prova, assim, na prova ninguém vai ver. Mas...
Linha 119	P: Aham.
Linha 120	E22: ...na frente de todo mundo: “vamos ver se eu erro, se eu acerto...”
Linha 121	P: Entendi.

⁴⁹ Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

Linha 122	E22: Aí isso... eu gosto bastante.
Linha 123	P: Então, por exemplo, para a aula de Matemática ser boa, como teria que ser a dinâmica da aula?
Linha 124	E22: Ah, fazer, vamos supor é... um... ((silêncio)) Perguntas aleatórias, tipo ah, vai: “É x vezes isso ou aquilo? Dá quanto?”. E apontar uma pessoa e ela tem que responder na lata. Se não, ela perde.
Linha 125	P: Aham.
Linha 126	E22: Se fizer assim com “pontos” tipo um jogo?
Linha 127	P: Sei, sei. Aham.
Linha 128	E22: Seria legal. (rs)
Linha 129	P: Entendi. Mas aí você não vai se expor? Porque se você responder errado, aí todo mundo vai saber.
Linha 130	E22: ((muxixa)) ah, mas... Todo mundo erra. (rs)
Linha 131	P: Ah.
Linha 132	E22: Todo mundo é humano, todo mundo pode errar.
Linha 133	P: Ah, então, no contexto do jogo, aí tudo bem? Assim?
Linha 134	E22: É.

No trecho seguinte, o estudante 22 relata que a indisciplina também pode ser consequência da falta de motivação dos estudantes, já que as aulas são pouco interativas e, por vezes, alguns professores sequer explicam o conteúdo exposto na lousa.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 22 – LINHA 161 A 182

Linha 161	P: (...) E aqui, como são as aulas?
Linha 162	E22: Aqui, os professores passam na lousa e às vezes no livro e a gente tem que copiar, às vezes, eles explicam. Mas quase não tem muita (explicação), porque a sala é muito bagunceira.
Linha 163	P: Entendi. Então, não tem muita interação com o professor?
Linha 164	E22: Não, não. Tem muito pouco.
Linha 165	P: Entendi. E comparando (os professores)? Porque vocês mudaram de professor (de Matemática), não é?
Linha 166	E22: Isso.
Linha 167	P: No ano passado vocês estavam com a professora Ângela... e esse ano com o professor Xavier. ⁵⁰
Linha 168	E22: É.
Linha 169	P: E de um ano para outro, mudou a dinâmica da aula?
Linha 170	E22: De Matemática? Sim, bastante.
Linha 171	P: É? Em que aspecto?
Linha 172	E22: Porque assim, a professora Ângela, ela tem... tem cara de ser rígida, mas ao mesmo tempo ela é legal.
Linha 173	P: Aham.
Linha 174	E22: Então, ela fazia o que eu falei que seria legal, tipo pegar uma pessoa para fazer ela responder a uma questão, fazer a pessoa ir lá na lousa responder. Já o professor... esqueci o nome...
Linha 175	P: Xavier?
Linha 176	E22: O Xavier já não é assim. Ele passa na lousa...
Linha 177	P: Aham.
Linha 178	E22: Explica e, às vezes, ele vai explicar pessoalmente para o aluno...
Linha 179	P: Aham.
Linha 180	E22:... mas não tem muito essa... coisa. Tem gente que nem faz porque fica... por aí bagunçando na sala de aula.
Linha 181	P: Humn. Entendi, então falta um pouco dessa dinâmica da aula, não é?

⁵⁰ Os nomes utilizados são fictícios para preservar o anonimato.

Linha 182 **E22: Isso.**

O estudante 4, assim como o estudante 19, acredita que o principal motivo que gera a indisciplina na sala é a falta de uma postura firme de alguns professores e não a falta de motivação, como relatado pelo estudante 22, observe-se o trecho:

SEGUNDO DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 51 A 68

Linha 51	P: (...) E o que você acha que é uma boa aula?
Linha 52	E4: ((silêncio)) É uma sala silenciosa que... o professor explica bem, sabe? Tipo, ele te ajuda, essas coisas...
Linha 53	P: Certo... E o que você acha que falta para a turma fazer silêncio?
Linha 54	E4: ((silêncio))
Linha 55	P: Como a turma faz silêncio? Tem algum professor que consegue fazer silêncio na turma?
Linha 56	E4: Sim, o Edgar⁵¹.
Linha 57	P: Certo. E o que ele tem de diferente que a turma faz mais silêncio na aula dele?
Linha 58	E4: Ele é bravo. E, tipo, se ele fala para a sala silenciar, a sala fica quieta.
Linha 59	P: Aham.
Linha 60	E4: A sala respeita ele e a gente respeita também.
Linha 61	P: Entendi... mas porque ele é bravo?
Linha 62	E4: Sim.
Linha 63	P: E os outros professores não são bravos?
Linha 64	E4: Tem, a Lidia⁵² ... tem... só.
Linha 65	P: E...
Linha 66	E4: ...tem a Lídia, a professora de ciências... deixe-me ver... ((silêncio)). Não lembro mais.
Linha 67	P: E o pessoal faz silêncio na aula desses professores?
Linha 68	E4: Sim.

5.3.3.3 Modelo 7 - Lazer

A última pergunta que foi feita aos alunos, neste protocolo, foi em relação ao lazer, ou seja, o que costumam fazer em suas horas livres. Essa pergunta gerou o modelo com o mesmo nome, já que, dentre todas as citadas, houve uma atividade em comum na maioria: ir ao *shopping center* com a família e a leitura. Embora, nesta última, exista uma ressalva que será explicada mais adiante.

Sabe-se que passear no *shopping center* é um tipo de atividade usualmente citada como a preferida, já que, pela pouca oferta de parques públicos que ofereçam uma boa infraestrutura, ou até mesmo pela sensação de insegurança que sentem ao andar em vias públicas, o centro de

⁵¹ Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

⁵² Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

compras acaba sendo o lugar mais atraente para boa parte dos moradores de regiões urbanas. Embora até exista muitos museus de acesso gratuito ou a preços relativamente populares, deslocar-se para a capital paulista (onde há mais ofertas de atividades culturais) não costuma ser um hábito muito comum das famílias que moram na grande São Paulo. Nisso ainda se acrescenta o alto custo de deslocamento em veículo particular (estacionamento e combustível) e a escassez de alternativas de transporte público eficiente em muitos casos. Além disso, segundo o diálogo com os estudantes desse grupo, a maioria tem a figura paterna como o principal provedor do sustento da família, muitas vezes, com uma dupla jornada de trabalho com poucos dias de descanso. Isso implica que, comumente, as mães ficam como responsáveis por cuidar da casa e, por vezes, de sair com as crianças. Sendo assim, o *shopping center* acaba sendo uma opção bastante cômoda para o lazer dessas famílias.

No entanto, o estudante 19 citou que já foi ao museu do Catavento⁵³ com a família e que gostou muito dessa experiência. Curiosamente, esse foi o único aluno que, embora apresente dificuldades com o conteúdo de Matemática, cita a importância de aprender essa disciplina, ainda que suas concepções sejam um pouco ingênuas, baseadas em aplicações utilitárias da Matemática, como citadas anteriormente. Além do museu do Catavento, esse estudante também citou o interesse em visitar um outro museu: o do Futebol. Isso vai ao encontro com suas disciplinas preferidas, conforme se pode observar na figura 5.118. Na sequência, veja-se o trecho do diálogo correspondente:

Figura 5.118 – Resposta estudante 19⁵⁴: Questionário sociocultural – questão 2.

⁵³ O Centro Catavento Cultural ou Museu do Catavento, localizado na região central da capital paulista, é um local com atividades interativas para estimular a curiosidade pela ciência nas crianças. Detalhes estão disponíveis no endereço <http://www.cataventocultural.org.br/>

⁵⁴ Transcrição não literal da resposta: “Educação física: porque eu gosto de fazer esporte... Português: é porque eu gosto de aprender a falar as coisas certas (sic). O português é importante em nossas vidas. Matemática: nós precisamos aprender Matemática.”.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 19 – LINHA 145 A 190

Linha 145	P: Certo. A sua mãe trabalha fora ou ela cuida só da casa?
Linha 146	E19: Não, só da casa. Só meu pai que trabalha na casa.
Linha 147	P: Entendi. E o seu pai trabalha o dia todo?
Linha 148	E19: O dia todo. É das quatro às oito.
Linha 149	P: Final de semana vocês têm um tempo juntos?
Linha 150	E19: Sim. No dia de domingo.
Linha 151	P: Ah domingo? Então ele trabalha até sábado?
Linha 152	E19: É.
Linha 153	P: Entendi...
Linha 154	E19: Ele trabalha um dia sim e um dia não. Ele trabalha em dois empregos, daí, no dia de domingo, quando tem as folgas, ele fica em casa.
Linha 155	P: Ah, entendi...
Linha 156	E19: Daí nós saímos...
Linha 157	P: Certo. E o que você gosta de fazer junto com a família?
Linha 158	E19: Ah... sair...
Linha 159	P: Sair mesmo?
Linha 160	E19: É... mais sair.
Linha 161	P: Tem algum lugar em específico?
Linha 162	E19: Ah... para o shopping porque (é para onde) eu gosto mais de ir é o shopping.
Linha 163	P: E parque ou museus? Vocês costumam ir?
Linha 164	E19: Aham. Em parque...
Linha 165	P: Vocês já foram em quais?
Linha 166	E19: Já fui no museu do Catavento... Na cidade mirim... que é uma cidade de bicicletas. Acho que só...
Linha 167	P: Do Catavento, o que você achou de lá?
Linha 168	E19: Ah é legal o Catavento...
Linha 169	P: O que você mais gostou de lá?
Linha 170	E19: Era tipo umas telas que têm na parede, aí nós tínhamos que ficar sentados, parados, em frente a ela, olhando... Aí ela ficava, tipo, mudando, te hipnotizando... Aí, eu achei “da hora” isso aí.
Linha 171	P: Legal... Tem mais algum lugar que você gostaria de visitar? Algum museu? Porque tem bastante em São Paulo além do Catavento...
Linha 172	E19: É, o museu do futebol.
Linha 173	P: Ah, o museu do futebol é legal!
Linha 174	E19: Aham. Eu queria visitar lá.
Linha 175	P: Legal. E futebol? Você torce para algum time?
Linha 176	E19: Aham, São Paulo.
Linha 177	P: São Paulo, legal. Você acompanha os jogos?
Linha 178	E19: Aham, todo dia.
Linha 179	P: E na sua casa todo mundo é são paulino?
Linha 180	E19: Só minha mãe que é paulistana.
Linha 181	P: Ah, entendi...
Linha 182	E19: Meu pai e meu irmão são “são paulinos”.
Linha 183	P: Então seu pai te influenciou ou você escolheu?
Linha 184	E19: Não... eu era corinthiano... mas é que o meu tio me deu uma camiseta do São Paulo (futebol clube) e me levou para assistir um jogo do São Paulo.
Linha 185	P: Humn...
Linha 186	E19: E eu achei legal... o jogo. Daí torci para o São Paulo, comecei a torcer.
Linha 187	P: Entendi...
Linha 188	E19: Mas eu torcia para o Corinthians, mas não era tão fã do Corinthians...
Linha 189	P: Certo...
Linha 190	E19: Não ia a nenhum jogo.... Do São Paulo eu vou aos jogos.

Observe-se agora o diálogo do estudante 22, que relata a rotina de seus pais e, em sequência, o do estudante 4.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 22 – LINHA 249 A 272

Linha 249	P: Legal. E na rotina da sua casa? Você me contou um pouco, que o seu pai trabalha muito, não é?
Linha 250	E22: Sim.
Linha 251	P: Ele trabalha até um período ⁵⁵ e é difícil estar em casa.
Linha 252	E22: Isso.
Linha 253	P: E a sua mãe, ela fica em casa?
Linha 254	E22: Ela fica, mas ela é manicure.
Linha 255	P: Ah, tá.
Linha 256	E22: Ela faz (a unha) na casa das pessoas. E as pessoas vem na minha casa para fazer.
Linha 257	P: Ah, entendi. Então ela também tem essa rotina?
Linha 258	E22: É. Tem essa (rotina)...
Linha 259	P: E o seu irmão, ele é mais novo?
Linha 260	E22: Sim. Ele tem 5 anos.
Linha 261	P: Cinco anos. E ele já está estudando na escolinha?
Linha 262	E22: É. Está, ele está no período intermediário, das 11h às 3h (da tarde).
Linha 263	P: Ah, entendi. Então agora ele fica com a sua mãe?
Linha 264	E22: Sim. Com a minha mãe. No caso, hoje, ele está na casa da minha vó.
Linha 265	P: Ah, entendi. Então, no período que está todo mundo fora de casa, você está aqui?
Linha 266	E22: Isso. É... eu estou...
Linha 267	P: Então não tem ninguém.
Linha 268	E22: Meus pais devem estar no mercado agora.
Linha 269	P: Ah, entendi.
Linha 270	E22: Então... A gente tem essa rotina. Eu não saio muito, só vou da igreja para casa, da escola para casa. E geralmente, de vez em quando, dou uma saída, umas fugidas com os meus amigos.
Linha 271	P: Ah, entendi. E isso que você costuma fazer de final de semana, você sai com os amigos?
Linha 272	E22: É. Meio que escondido... porque minha mãe tem medo, pelo fato de eu ter problema de visão.

SEGUNDO DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 83 A 92

Linha 83	P: (...) E o que vocês gostam de fazer em família?
Linha 84	E4: ((silêncio)) Meu pai, ele não sai muito comigo, tipo, com a gente. Meu pai não gosta, ele só fala assim para minha mãe sair com a gente. Meu pai nunca saiu com a gente.
Linha 85	P: Ah é? Por quê? Ele está cansado?
Linha 86	E4: Não sei, porque ele sempre trabalha de domingo a domingo.
Linha 87	P: Ah entendi, então ele trabalha bastante. Então deve estar cansado, não é?
Linha 88	E4: Sim...
Linha 89	P: E para onde vocês costumam sair?
Linha 90	E4: Shopping.
Linha 91	P: Shopping? E parque, museus, vocês vão?
Linha 92	E4: Não.

No caso do estudante 22, o seu problema de visão é um dos motivos pelo qual sua mãe evita que ele saia de casa. Durante o diálogo, não ficou claro o que ele costuma fazer de atividade de lazer junto à família. No entanto, os amigos parecem ter um papel muito importante

⁵⁵ Em um trecho do diálogo, o estudante citou o trabalho de seu pai: “Meu pai mesmo é taxista, então ele não fica em casa. Ele sai às 5 da manhã e volta à meia-noite.”.

na independência e autoconfiança desse aluno, mesmo com as limitações que sua deficiência visual impõe.

Já no caso do estudante 4, ele relata que seu pai trabalha muito e costuma não querer participar das atividades de lazer com a família. No caso desse aluno, também é citado o *shopping center* como o local preferido para os passeios com seus familiares.

Nas figuras 5.119 a 5.121, pode-se observar as outras atividades preferidas pelos estudantes em suas horas de lazer.

Figura 5.119 – Resposta estudante 19⁵⁶: Questionário sociocultural – questão 5.

⁵⁶ Transcrição não literal da resposta: “Ah, nas minhas horas livres, eu gosto de fazer muita coisa como: jogar videogame, jogar futebol e, de vez em quando, ler algum gibi. Na minha hora livre, eu ainda fico andando pelas ruas, pelo condomínio, sair para o shopping, sair para comer alguma coisa, ficar entre (a) família (sic). E é isso que eu gosto.”.

Figura 5.120 – Resposta estudante 22⁵⁷: Questionário sociocultural – questão 5.

Figura 5.121 – Resposta estudante 4⁵⁸: Questionário sociocultural – questão 5.

Como é possível observar nessas últimas figuras (5.119 a 5.121), há a citação da leitura como um lazer em comum. No entanto, ao se dialogar com os respectivos estudantes, o estudante 22 é o único que parece realmente ter preferência por livros. No caso do estudante 19, a leitura predominante é de gibis. E, no caso do estudante 4, embora tenha citado que gosta de ler, ao ser questionado, não soube descrever que tipo de leitura que gosta. É possível que o fato do tempo de aula ter se esgotado, tenha apressado o entrevistado com as respostas. Vejam-se nos respectivos diálogos:

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 19 – LINHA 31 A 44

Linha 31	P: Por exemplo, você gosta de fazer alguma leitura específica?
Linha 32	E19: É, leitura.
Linha 33	P: Que tipo de coisa você lê?
Linha 34	E19: Gibi.
Linha 35	P: Gibi? Turma da Mônica? Essas coisas?
Linha 36	E19: É. Turma da Mônica jovem... livros...
Linha 37	P: Humn... Que tipo de livro você lê?
Linha 38	E19: Ah... qualquer livro que me der eu leio.
Linha 39	P: Tem algum estilo ou algum autor de sua preferência?
Linha 40	E19: Não.
Linha 41	P: Qualquer tipo de livro?
Linha 42	E19: Qualquer tipo de livro.
Linha 43	P: Ciência? Ficção...
Linha 44	E19: Aham.

⁵⁷ Transcrição não literal da resposta: “Eu gosto de jogar RPGs online, assistir vídeos de jogos no YouTube, gosto de ver séries (televisivas), tudo isso, envolvendo coisas místicas. Também gosto de ler.”.

⁵⁸ Transcrição não literal da resposta: “Fico escutando música e lendo livro e fico quieto”.

DIÁLOGO COM ESTUDANTE 22 – LINHA 5 A 9

Linha 5	P: Ah, entendi. E o que é que você gosta de fazer nas suas horas livres?
Linha 6	E22: Ah, eu gosto de ler livros, em específico de vampiros (rs).
Linha 7	P: Estou vendo. Está lendo o que? O Diário de um Vampiro?
Linha 8	E22: O Diário de um Vampiro.
Linha 9	P: Legal.

SEGUNDO DIÁLOGO COM ESTUDANTE 4 – LINHA 93 A 111

Linha 93	P: Não? Então mais shopping mesmo? Legal... E nas suas horas livres... Eu não entendi o que você escreveu... o que você escreveu aqui?
Linha 94	E4: Quietos.
Linha 95	P: Quietos? Você fica quieto por quê?
Linha 96	E4: ((silêncio)) Ah porque eu fico quieto... (rs)
Linha 97	P: Mas, você fica fazendo o quê? Você fica que nem uma “estátua” assim? (rs)
Linha 98	E4: ((silêncio))
Linha 99	P: É isso?
Linha 100	E4: É.
((O SINAL DA ÚLTIMA AULA DO DIA TOCA AO FUNDO))	
Linha 101	P: Nossa... E livros? Quais tipos você costuma ler?
Linha 102	E4: Eu vou embora.
Linha 103	P: Já estou terminando, só essa última pergunta.
Linha 104	E4: Eu vou ter que ir porque meu amigo está me esperando...
Linha 105	P: Só me responde que tipo de livro que você costuma ler. Já acabou a entrevista.
Linha 106	E4: Não, eu não gosto de livro.
Linha 107	P: Mas... (rs) você falou que lê livros... ((referindo a resposta escrita do questionário))
Linha 108	E4: Ah, eu leio... romances...
Linha 109	P: Romance? De que tipo?
Linha 110	E4: Ah sei lá!
Linha 111	P: Tá bom... estudante 4 ⁵⁹ , obrigada!

No caso desse último estudante, é possível perceber uma contradição entre o que havia escrito no questionário e sua resposta na entrevista. Também questionou-se o que ele quis dizer ao responder que costuma ficar “quieto”, mas também não houve resposta. Particularmente, obter respostas do estudante 4 foi mais difícil entre todos os estudantes, pois, muitas vezes, ele permanecia em silêncio ou respondia de forma evasiva.

Chega-se ao final das análises do Grupo 3 e, nos quadros a seguir, há um resumo descritivo dos modelos encontrados nesse grupo.

Quadro 5.7 - Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 5 – Matemática			
Elementos	Estudante 19	Estudante 22	Estudante 4*
Difícil	SIM	SIM	SIM
Boa	SIM	NÃO	NÃO
Importante	SIM	NÃO	NÃO

⁵⁹ O nome foi substituído para garantir o anonimato.

Quadro 5.8 - Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 6 – Professor			
Elementos	Estudante 19	Estudante 22	Estudante 4*
Controle da indisciplina.	SIM	SIM	SIM
Interação com os estudantes.	NÃO	SIM	NÃO
Utilização de uma variedade de recursos didático-pedagógicos ⁶⁰ .	SIM	SIM	NÃO

Quadro 5.9 - Elementos organizadores do Grupo 3: Modelo 7 – Lazer			
Elementos	Estudante 19	Estudante 22	Estudante 4*
Leitura	SIM	SIM	NÃO
Passear no <i>shopping center</i> com a família.	SIM	NÃO	SIM
Museus e parques.	SIM	NÃO	NÃO
Passear com os amigos.	SIM	SIM	NÃO

No próximo tópico, serão discutidos sobre os possíveis invariantes operatórios encontrados em cada grupo.

5.4 Os níveis de invariantes operatórios

De acordo com as análises realizadas nos tópicos anteriores, serão feitos dois tipos de quadros. O primeiro (quadro 5.10) é um painel que resume todos os esquemas encontrados nas atividades dos Grupos 1 e 2 em todos os modelos, lembrando que o Grupo 2 apresentou apenas o modelo 1 (Aritmética) com representatividade em suas respostas.

Os nomes dos estudantes estarão abreviados no formato E# sendo:

⁶⁰ Os recursos “didático-pedagógicos” os quais se referem seriam elementos como: saber explicar um mesmo conteúdo utilizando contextos diversificados, utilizar recursos metodológicos variados para o ensino de Matemática, tais como jogos, dinâmicas em aula, etc.

- E: estudante
- #: número de identificação dado a ele conforme visto nas análises.

Também serão representados como N/A as categorias que não se enquadrarem no respectivo modelo.

No segundo (quadro 5.11), serão representados os possíveis invariantes operatórios, por três tipos de níveis:

Nível 1 – REPRESENTAÇÃO VERBAL

Nível 2 – REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMAS

Nível 3 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA OU ALGÉBRICA

Esses níveis serão classificados dentro dos modelos identificados em cada um dos grupos e serão indicados com símbolos de + para identificar o grau mais predominante em cada nível.

Após os quadros, no Capítulo 6, serão feitas as considerações finais e serão apresentadas algumas perspectivas de pesquisa deste trabalho.

Quadro 5.10: Resumo descritivo de todos os esquemas apresentados por cada grupo em cada modelo																	
ESQUEMAS	ARITMÉTICA						GEOMÉTRICA	CLASSES E ORDENS						CONJUNTOS			
	GRUPO 1			GRUPO 2				GRUPO 1			GRUPO 1			GRUPO 1			
	E3	E13	E20	E6	E27	E32		E4*	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E3	E13	E20
Estrutura aditiva ¹	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	SIM	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
Duas medidas que se compõem para resultar em uma terceira. Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A
Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação.	N/A	N/A	N/A	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Estrutura multiplicativa	E3	E13	E20	E6	E27	E32	E4*	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E20
Multiplicação de dois termos iguais.	SIM	SIM	SIM	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	SIM
Multiplicação de dois termos diferentes.	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	SIM
Noção de múltiplo e divisor.	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM
Estrutura algébrica	E3	E13	E20	E6	E27	E32	E4*	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E20
Multiplicação de dois termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	SIM	NÃO	NÃO	NÃO
Comutatividade na multiplicação de dois termos algébricos.	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Multiplicação entre a soma de dois termos algébricos.	SIM	SIM	SIM	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Soma de termos algébricos iguais.	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	NÃO
Compreensão do coeficiente de uma variável.	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Compreensão da função dos parênteses.	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	NÃO	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	SIM	SIM	SIM	NÃO

¹ No caso das estruturas aditivas, utilizamos as categorias definidas por Vergnaud (2014, p. 200).

Quadro 5.11: Possíveis invariantes operatórios mobilizados pelos grupos por modelo																
NÍVEIS	ARITMÉTICA						GEOMETRIA				CLASSES E ORDENS				CONJUNTOS	
	GRUPO 1			GRUPO 2			GRUPO 1				GRUPO 1				GRUPO 1	
	E3	E13	E20	E6	E27	E32	E4*	E3	E13	E20	E3	E13	E20	E3	E13	E20
1 - REPRESENTAÇÃO VERBAL	++	++	+++	++	++	+++	+	+	++	+++	+	++	+++	+	++	+++
2 - REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMAS	+	+	++	+++	-	-	-	++	++	++	+++	-	-	+	-	++
3 - REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA OU GEOMÉTRICA	+++	+++	+	+	+++	++	-	+++	++	+	++	++	+	+++	+++	+

Legenda:

Grau	Descrição
+++	Nível mais predominante.
++	Nível predominante.
+	Nível pouco predominante.
-	Não houve representação desse tipo.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE PESQUISA

6.1 Habilidades e conteúdos

A proposta inicial foi criar sugestões de atividades nas quais o professor de Matemática possa reforçar habilidades que ainda não foram desenvolvidas nos estudantes, pois, sem o domínio daquelas, o aprendizado de qualquer conteúdo matemático pelos alunos seria comprometido. Além disso, foi proposto o incentivo para utilizar a análise de erros como ferramenta metodológica para a orientação de propostas didáticas de ensino para o professor.

Por meio da análise do estudo piloto, notou-se que existem alguns tipos de habilidades que são essenciais para a correta compreensão de uma atividade como: a capacidade de leitura e interpretação de texto, além da expressão por meio da escrita. Essas habilidades, que foram baseadas nas pesquisas de Krutetskii (1976), mostraram-se mais importantes que o próprio conhecimento sobre o conteúdo específico. Tal fato pode ser justificado por alguns exemplos de atividades nos quais não se requeria nenhum conhecimento específico de álgebra, mas de leitura e interpretação de texto. Resultados do PISA e SARESP apontam, há muitos anos, que os alunos no geral estão com a capacidade de leitura e escrita muito aquém do esperado. Como consequência, muitos estudantes não tiveram sucesso nas atividades, limitando-se a responder com “*Não sei*” ou “*Eu esqueci, mas a professora explicou no começo do ano*”.

Para corroborar com a hipótese de que a dificuldade com os conteúdos não está apenas relacionado ao fato de não o ter aprendido, mas também na limitação da capacidade de expressão escrita, aplicou-se um questionário de três perguntas, no qual os alunos poderiam descrever livremente o que fazem em seu cotidiano fora da escola, o que mais gostam de fazer e como se auto descrevem. Durante a aplicação dessa atividade, alguns estudantes não compreendiam o intuito dela e esperavam por instruções explícitas para que pudessem direcionar o que deveriam escrever. Mesmo sendo esclarecido que se tratava de opinião pessoal e, portanto, não havia uma resposta certa ou errada, ainda assim, muitos não souberam o que descrever na folha.

Embora seja natural que esse tipo de atividade suscite bastante dúvida nos estudantes, já que eles estão acostumados a resolver propostas mais direcionadas e poucas de natureza

crítico-reflexiva, foi um pouco surpreendente observar que alguns alunos não são capazes de descreverem o seu cotidiano fora da escola. Pressupõe-se que tal relato não necessitaria de muito esforço intelectual para realizá-lo, mas, assim como nas atividades do estudo piloto, conforme apresentado no Capítulo 4, que não exigiam necessariamente o conhecimento de conteúdo algébrico, muitos tiveram dificuldades para interpretar e expressar o seu raciocínio ou o seu pensamento a respeito daquela atividade.

No Capítulo 5, realizou-se uma análise mais aprofundada de alguns estudantes selecionados e separados por grupos, baseando-se nos resultados obtidos no estudo anterior. Com isso, foi possível identificar e inferir diferentes níveis de possíveis invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes, envolvendo o conteúdo de álgebra.

Vergnaud (2014) avalia que muitos algoritmos ensinados aos alunos, para a resolução de operações, por exemplo, a soma, são muito difíceis de serem compreendidos. Nas análises, a afirmação do teórico ficou evidente na atividade 4, do Grupo 1, na qual os estudantes deveriam explicar a lógica do algoritmo da soma e, muitos deles, apresentaram bastante dificuldade para explicitar o seu raciocínio. Levando em consideração que os alunos pesquisados são dos anos finais do Ensino Fundamental, é indagado, portanto, se o algoritmo da soma seria o melhor método para ensinar os conceitos de soma aos iniciantes do ensino básico, como ocorre frequentemente.

No entanto, no Capítulo 2, também mostrou-se que tais dificuldades dos estudantes podem ser explicadas, segundo Vergnaud (1990), pelo conjunto Γ pertencente à ternária $C(S, I, \Gamma)$ referente às maneiras de explicar os conceitos. O Γ representa as formas linguísticas e não linguísticas que permitem descrever simbolicamente o conceito e também faz parte do processo de aprendizagem. Logo, ao analisar os diálogos dos respectivos estudantes, pode-se notar alguns aspectos de verbalização voluntária, principalmente no estudante 20 do Grupo 1, ou de explicações prolixas como encontradas majoritariamente no Grupo 2. Isso, na visão de Vergnaud (idem), é um indício de que há uma lacuna no aprendizado e o conceito formal ainda não foi internalizado. Por isso, nesta pesquisa, por meio da análise desses diálogos, foi possível exemplificar alguns casos, nos quais os estudantes foram capazes de apresentar um resultado correto, mas mostraram que ainda não internalizaram totalmente tais conceitos. Mas, o que os alunos pensam a respeito dessas dificuldades em Matemática?

Segundo a visão deles, muito do que se ensina nessa disciplina é resumido em fórmulas e algoritmos “sem sentido”. Esse ponto de vista fica ainda mais evidente durante o diálogo com alguns estudantes em respostas como “(...) *alguma coisa está errada, mas eu não vou saber explicar o que está errado...*” do estudante 20, após tentar resolver uma expressão da soma do

quadrado de dois termos na atividade 1, apenas tentando seguir o algoritmo apresentado. Ou seja, será que os alunos estão sendo preparados para “mimetizar” a Matemática ou para realmente compreendê-la?

Também notou-se que as características em comum dos estudantes que têm mais facilidade para resolver problemas matemáticos é a resiliência e o interesse pelas atividades matemáticas. Na atividade 5 do Grupo 1, o estudante 3 mostrou essa característica que já é citada nos trabalhos de Krutetskii (1976). Segundo esse autor, as crianças que são consideradas “talentosas” possuem um grande senso de curiosidade e criatividade, além da resiliência para resolver problemas. No caso do estudante em questão, há um trecho final do diálogo no qual se questiona se a propriedade funcionaria para os números ímpares. Essa verificação não fazia parte da atividade, mas ele se mostrou interessado em realizar essa constatação e foi incentivado para tal.

Nos Grupos 2 e 3, principalmente no último, por meio das análises dos diálogos, notou-se que a dificuldade de aprendizagem do conteúdo de Álgebra vai muito além do conhecimento deste conteúdo em si. Existem outros fatores correlacionado, os quais discutiremos a seguir.

6.2 O fator emocional no aprendizado

Sabe-se que cada indivíduo tem o seu próprio tempo de aprendizagem e o tempo expresso pelo calendário dos currículos escolares não corresponde ao tempo que se leva para ocorrer o aprendizado, o que justifica a perpetuação de dificuldades elementares. Mas também entende-se que há estudos que apontam aspectos emocionais como obstáculos de aprendizagem. Veja-se um exemplo do estudante 4 (figura 6.1) e do estudante 15 (figura 6.2), os quais responderam da seguinte forma a atividade B1 e B2, respectivamente, que foi analisado no Capítulo 4:

Figura 6.1 - Resposta estudante 4: Primeira tentativa da atividade B1 (1ª parte - estudo piloto).¹

No estudante 4, que pertence ao caso especial analisado no estudo final, foi possível notar algumas características em seu comportamento que podem influenciar em sua aprendizagem, tais como: insegurança, timidez e até uma certa apatia. Esses três atributos tornaram-se mais evidentes no protocolo do Grupo 3 no qual os estudantes deveriam contar um pouco de suas preferências e rotinas. Respostas vagas como “Não sei”, “Achei legal...” ou idiossincrasias como “Fico quieto” quando questionado sobre o que gosta de fazer em suas horas livres. Esse tipo de comportamento não seria muito típico, ao menos esperado, de um adolescente típico, na faixa dos treze aos quinze anos de idade. Nesta pesquisa, não se entrou no mérito de investigar os detalhes dos motivos que podem causar os supostos “bloqueios” emocionais, mas sabe-se o quanto esse tipo de obstáculo pode estar relacionado ao aprendizado. Vigotski (2000, p. 28) afirma que “a natureza da atenção voluntária e qualquer função superior não pode deduzir-se da psicologia individual”, ou seja, um sujeito é um produto das relações com o seu meio histórico-cultural. Portanto, uma possibilidade de continuidade desta pesquisa seria nesse âmbito.

Figura 6.2 - Resposta estudante 15: Primeira tentativa da atividade B2.

¹ Transcrição não literal da resposta: “Eu não consegui entende (sic). Eu queria muito resolver esses problemas. Dá vontade de chorar, mas eu queria fazer muito mesmo.”.

No caso da resposta do estudante 15, pode-se observar também um tipo de obstáculo muito comum nos estudantes que seria o “medo” de expressarem suas respostas equivocadas, ainda que não sejam avaliadas por elas.

Mencionou-se, no Capítulo 2, uma discussão feita por Hadamard (1945 apud CURY, 2008) que o erro cometido pelos estudantes se difere daquele cometido pelos matemáticos, mas, na escola, há um tratamento similar entre os dois tipos de sujeitos, dando um excesso de valorização do rigor e do resultado correto em detrimento do processo de ensino-aprendizagem do aluno. Esse tipo de pensamento é o que leva os estudantes a responderem de forma similar ao estudante 15 da figura 6.2.

Por isso, a opção pela Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento, como apoio metodológico, para evidenciar as individualidades, mesmo dentro de um coletivo, foi essencial para ajudar a realizar a ponte das habilidades cognitivas trazidas pela Teoria dos Campos Conceituais. Com a categorização em *perguntas-modelo*, deixou-se de analisar o conteúdo apresentado, mas de algumas evidências cognitivas na resolução das atividades propostas. Esse seria o meio de elucidar quais habilidades estão eventualmente em falta e quais já estão desenvolvidas. Veja-se o exemplo do estudante 19, no qual a *pergunta-modelo* ajudou a trazer mais informações sobre o que ele pensou ao tentar realizar a seguinte atividade B1:

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$ Eu não vou responder essa seguinte pergunta

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$ Eu não vou responder porque eu tenho dificuldades
nessas conta que envolve letras juntas com números,
você consegue resolver essa expressões?

Pois não porque elas envolve letras eu tenho dificuldades
Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir,
comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$! Não vou resolver

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

Figura 6.3 - Resposta estudante 19: Segunda tentativa da atividade B1.

Na primeira tentativa de resolução da atividade B1, ele respondeu que não sabe responder às perguntas, pois tem dificuldades em lidar com contas que envolvem números e letras. Isso poderia ser um indicativo de que a dificuldade está apenas nas expressões algébricas, mas não nas aritméticas. No entanto, quando foi aplicada a *pergunta-modelo* questionando se

ele seria capaz de resolver algumas expressões aritméticas e outras apenas com incógnitas, o estudante reitera a mesma resposta, indicando que a dificuldade não é apenas na habilidade algébrica, mas em outras anteriores, como mostrado na figura 6.3.

O estudante 15 não foi selecionado para fazer parte de nenhum grupo do estudo final, pois suas respostas, no estudo prévio, não revelaram traços suficientemente importantes para uma análise mais detalhada. No entanto, serviu como um exemplo de resposta dada por muitos estudantes analisados inicialmente no estudo preliminar.

6.3 A relevância do papel do professor

Nas análises dos diálogos do Grupo 3, boa parte deles mencionou que a qualidade do seu aprendizado em Matemática parece estar relacionada à maneira como o professor explica o conteúdo. O estudante 22, por exemplo, cita que sua dificuldade com Álgebra é o fato de existir letras e números juntos. Em sua concepção, não faz sentido existirem letras na Matemática. Essa noção, segundo ele, vem da seguinte afirmação dada por um professor: *“se não tem número, não é Matemática”*. Isso revela o cuidado que um docente deve ter no momento de explicar e formular conceitos. Conforme já indicado por Brousseau (2001), há a necessidade de contextualização e descontextualização do saber; de produzir um conhecimento cultural utilizável. Uma afirmação equivocada, sem esse tipo de trabalho, pode gerar um futuro obstáculo no aprendizado dos alunos.

Além disso, foi mencionado por esses estudantes que um professor deve ser capaz de controlar a indisciplina da sala de aula, pois isso compromete a qualidade do aprendizado. No entanto, foi ponderado que isso não significa ser um docente autoritário. Pelo contrário, demonstrar-se interessado pelos alunos parece ser o ponto-chave para que os alunos façam silêncio nos momentos necessários. Os dois professores que foram mencionados pelos alunos possuem tais características, incluindo-se, a docente que nos motivou a conduzir a pesquisa nesta escola. Ou seja, novamente um fator emocional vinculado às relações humanas são primordiais para que a relação professor-aluno, na sala de aula, seja bem-sucedida.

Por isso, mostra-se cada vez mais importante nos cursos de formação de professores enfatizar tais aspectos e preparar os licenciandos para lidar também com a interação social com os seus estudantes. Isso não significa se tornar o melhor amigo deles. Porém, o professor deve

desenvolver a sensibilidade para interagir com os seus estudantes, levando em consideração de que o aluno não é um “depósito de conhecimento” no qual o professor, supostamente, deposita parte do seu próprio, como a já denominada “educação bancária”. Ideia já contestada por Paulo Freire em sua obra *Pedagogia do Oprimido* (1987).

Outro ponto que se chamou a atenção no diálogo desses alunos é a menção da necessidade de tornar a aula mais “dinâmica”, ou seja, menos passiva. Isso significa que os estudantes almejam uma aula na qual eles possam participar ativamente nas atividades desenvolvidas em sala e não apenas copiar o conteúdo da lousa.

No trabalho de Oliveira e Kikuchi (2018), é mencionada a importância do desenvolvimento do laboratório de matemática como um espaço de aprendizagem. Isso tem um significado além de apenas desenvolver materiais didáticos para aprendizagem de Matemática, mas ser um espaço de debate e construção do conhecimento. Embora o artigo esteja focado no Ensino Superior, esse tipo de ambiente poderia ser construído também na Escola Básica. Talvez essa seria uma forma de tornar o conteúdo de Matemática mais atraente para alunos e até mesmo a disciplina deixe de ser considerada tão temerosa pelos estudantes.

6.4 Importância da aproximação universidade-escola

Quando se elaborou o estudo final, também era uma das intenções incluir as contribuições da docente da escola participante para elaborar esse estudo, como ocorreu no estudo piloto. Mas, infelizmente, por intercorrências administrativas² na escola, isso acabou não acontecendo. Com essas ações, o intuito era realizar uma pesquisa que permitisse uma maior aproximação da Universidade com a escola, isto é, uma cooperação de duas vias: das contribuições práticas do professor e dos conhecimentos teórico-metodológicos do pesquisador. Com isso, as experiências advindas do contexto escolar, por meio do professor que atua em sala de aula, ajudariam o pesquisador a analisar e sugerir um segundo olhar sobre o mesmo ambiente

² No ano seguinte, quando se retornou para dar continuidade ao estudo piloto, houve uma mudança na distribuição de aulas e a professora referida não lecionava mais para esses alunos que participaram do piloto, além de sua aposentadoria estar prestes a ser homologada neste mesmo ano, inviabilizando a continuidade da pesquisa com sua participação.

ou situação. E, dessa forma, tanto o professor quanto o pesquisador trabalharemos em prol de um mesmo interesse: a aprendizagem do aluno.

Esse tipo de aproximação também deve ser incentivado desde cedo na formação de professores, por meio dos estágios supervisionados, pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e pelas disciplinas de metodologias ou práticas de ensino das respectivas áreas. Somente com o incentivo dessa aproximação é que se poderia superar as “barreiras” entre o meio acadêmico e as escolas, com o intuito de focar em formas de melhorar a aprendizagem e superar as dificuldades dos estudantes que aprendem, ou querem aprender, Matemática.

Outro ponto nevrálgico seria incentivar a colaboração entre áreas correlatas, não se limitando apenas à disciplina em questão. Isso também se estende para a área de pesquisa em Educação, que pode receber contribuições das pesquisas em Psicologia, Ciências Humanas (Filosofia, Ciências Sociais, etc.) e, em alguns casos, até na forma de condução de pesquisas das áreas de Ciências Médicas. Incentiva-se muito a interdisciplinaridade na escola, mas será que as pesquisas acadêmicas também não precisariam de mais interações com as outras áreas? Isso já ocorre, de certo modo, mas ainda é muito tímido se for pensado, de fato, nos resultados que poderiam atingir a escola ou a comunidade em geral.

Obviamente, para obter esses resultados, não basta a pesquisa ter essas interligações. É necessário que haja uma mudança na forma como a sociedade vê a ciência. E isso é algo que demanda tempo e depende do contexto histórico e sociocultural que cada povo está vivendo naquele momento. Porém, se não existir a preocupação constante da Universidade em trazer mais contribuições para a sociedade, especialmente, tratando-se das instituições públicas de ensino, que são custeadas pelo dinheiro proveniente dos impostos pagos pela população, será cada vez mais difícil a aproximação universidade-escola. Sem esse cuidado, aprofundar-se-ia o abismo existente entre as pessoas que têm “privilégios” de acessar uma Universidade pública, enquanto boa parte da população sequer sabe da possibilidade de ingressar em uma delas. Sem esse esforço, boa parte da sociedade continuará sem ter a noção da importância das pesquisas científicas para o desenvolvimento do país. E, isso poderia culminar, no próprio “sucateamento” das universidades públicas.

6.5 Perspectivas de pesquisa

Na análise do estudo final, apresentada no Capítulo 5, tentou-se obter alguns indicadores de como os estudantes de diferentes níveis de aprendizagem resolvem problemas.

Por meio dos quadros 5.10 e 5.11, resumiu-se quais tipos e níveis de invariantes operatórios são utilizados para que possam mobilizar um determinado tipo de esquema, por grupo. Nas respectivas análises, observam-se que, mesmo dentro de um grupo, é possível criar diferentes graus de invariantes operatórios. Ou seja, dentro de um modelo encontrado, em um mesmo grupo, o campo conceitual pode ser mobilizado em diferentes níveis e graus, não exigindo necessariamente o domínio de uma para a compreensão de outra. Pode-se observar esse dado no quadro 5.10, correspondente ao modelo 1 de Aritmética, nos últimos esquemas mobilizados dentro do campo conceitual de estruturas algébricas.

Comparando os Grupos 1 e 2, que estão divididos entre alunos com mais facilidade em Matemática e outros com menos, respectivamente, pode-se verificar que alguns estudantes do primeiro grupo não foram capazes de mobilizar alguns esquemas, mas que foram encontrados no Grupo 2, teoricamente, classificado com menos habilidade matemática. Isso mostra que a existência de um esquema não garante a existência de outro e vice-versa. No entanto, se os invariantes operatórios são analisados, compreende-se melhor a tendência de representação da atividade cognitiva dos indivíduos, de acordo com o nível de complexidade de seu aprendizado. Por isso, os invariantes operatórios parecem oferecer um panorama da representação de tais diferenças, pois, analisando apenas os esquemas, poder-se-ia ter conclusões equivocadas, em alguns casos, sob o aspecto do aprendizado dos alunos.

O questionamento que se levanta, após essas análises, é: *“como o estudante adquire ou desenvolve certos tipos de invariantes operatórios?”*. A resposta não seria tão simples, mas uma perspectiva futura de pesquisa seria analisar aspectos socioculturais, a saber, formações de seus responsáveis, influências culturais, hábitos de lazer e as classes sociais de um indivíduo como uma possível correlação do desenvolvimento desses invariantes operatórios.

Krutetskii (1976), conforme apresentado no Capítulo 2, já apontou em sua pesquisa que não há fatores únicos determinantes para desenvolver as capacidades matemáticas, mas uma combinação desses aspectos. Se esse pressuposto for considerado, esta pesquisa aparentemente já estaria finalizada. Contudo, se for pensado o contexto de escola pública, onde pode haver maior diversidade de origem dos alunos, seria interessante investigar aspectos da atuação do

professor de Matemática nesse ambiente. Abordar questões de como o docente pode avaliar melhor os seus estudantes e também de auxiliar no desenvolvimento das habilidades matemáticas desses alunos.

Vale ressaltar que o protocolo aplicado ao Grupo 3 foi uma tentativa de levar tais considerações para análise. Embora tenha sido aplicado esse questionário também para os outros grupos, optou-se por não associar a essa análise, já que o intuito principal desta pesquisa foi levantar os invariantes operatórios levando em consideração as atividades que um professor de matemática típico aplicaria em sala de aula. Mesmo que seja importante o fato do docente da escola básica levar em consideração aspectos socioculturais dos alunos, sabe-se que dificilmente ele terá espaço e tempo para fazer uma análise minuciosa desse aspecto. Por isso, para essa fase desta pesquisa, definiu-se por enfatizar primeiramente os aspectos do conteúdo matemático em si. No entanto, isso não impede de prosseguir com uma nova pesquisa de viés sociocultural.

Além disso, seria possível também desenvolver pesquisas voltadas para a formação de professores associando aspectos cognitivos e socioculturais na aprendizagem dos alunos. Sabem-se das dificuldades dos alunos em Matemática, mas estão sendo formados professores que saibam lidar com esses obstáculos? As disciplinas didático-pedagógicas dos cursos de Licenciatura em Matemática estão preparadas para lidar com essa diversidade da sala de aula? São as questões de reflexão deixadas como perspectivas de pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, E. O. **Como as crianças constroem procedimentos matemáticos: reconhecendo o fazer matemática na escola entre modelos e esquemas**. Orientador: Cristiano Alberto Muniz. 2006. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- ASTOLFI, J. P. El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos. **Enseñanza de las Ciencias**, 12(2), p. 206-216, 1994.
- ASTOLFI, J. P. **L’erreur, un outil pour enseigner**. 3. ed. Paris: ESF, Collection Pratiques & enjeux pédagogiques, 1999. 127 p.
- BACHELARD, G. **O racionalismo aplicado**. Rio de Janeiro: Zahar, 1977. 244 p.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico : contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro : Contraponto, 1996. 316 p.
- BOGOVICH, M. C. **La libre elección y la diversificación en la enseñanza de idiomas nativos y extranjeros**. 2013. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Educación) - Universidade Siglo XXI, Argentina, 2013. Disponível em: http://pt.slideshare.net/mcbog2/libre-eleccion-de-idiommas-ciclo-basico?from_action=save. Acesso em: 27 set. 2015.
- BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental: Produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas**. Orientação: Elisabete Zardo Burigo. 2007. 300 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- BOOLE, G. **The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning**. London: George Bell, 1847.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. (org.) **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 23-37, 1995.
- BORASI, R. **Reconceiving Mathematics Instruction: a focus on errors**. Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1996. 321 p.
- BRASIL. **Ministério da Educação**. Secretaria de Educação Básica. Ampliação do ensino fundamental para nove anos: 3º relatório do programa / Secretaria de Educação Básica. Brasília: DF, 2006. 16 p.
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 4.2, p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistemologiques et la didactique des mathématiques. In: BEDNARZ, N., GARNIER, C. **Construction des savoirs, Obstacles et Conflits**, Montreal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc Inc. p. 41-63, 1989. Texto disponível em: <http://guy-brousseau.com/618/les-obstacles-epistemologiques-et-la-didactique-des-mathematiques-1989/>. Acesso em: 19 jun. 2017.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUM, J. (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 2000.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: C. Parra; & I. Saiz, (org.), **Didáctica da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BROUSSEAU, G. La théorie des situations didactiques, 1997. Disponível em: <http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne>. Acesso em: 29 abr. 2019.

BUENO FILHO, M. A. **Conhecimento estereoquímico na aceção da teoria dos campos conceituais**. 2010. Orientadora: Liliana Marzorati. 282 f. Tese (Doutorado em Química Orgânica) - Instituto de Química, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/46/46135/tde-16062010-094810>. Acesso em 27 set. 2015.

CAMPOS, A. **A conceitualização do princípio de conservação da energia mecânica: os processos de aprendizagem e a teoria dos campos conceituais**. Orientador: Elio Carlos Ricardo. 2014. 541 f. Tese (Doutorado em Ensino de Física) – Interunidades de Ensino de Ciências (Física, Química e Biologia), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-02122014-152425>. Acesso em: 07 set. 2015.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A., 1991. 196 p.

CLEMENT, J.; LOCHHEAD, J.; MONK, G. Translations difficulties in learning mathematics. **American Mathematical Monthly**, 88, p. 286-290, 1981.

CLEMENT, J. Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. **Journal for Research in Mathematics Education**, 13, p. 16-30, 1982.

COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. **As ideias da algebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, 285 p.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 1. ed., Coleção: Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 112 p.

DE LA TORRE, S.; ROSA, E.; HORN, M. G. S. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança**. Porto Alegre: Artmed, 2007. 240 p.

FISCHER, S. R. **História da leitura**. Tradução de Claudia Freire. São Paulo: UNESP, 2006.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Orientadora: Ruth Portanova. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GOLBERT, C. S., SALLES, J. F. Desempenho em leitura/escrita e em cálculos aritméticos em crianças de 2ª série. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**. São Paulo, V. 14, n. 2, p. 203-210, Jul. Dez. 2010.

HADAMARD, J. **An essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princeton: Princeton University Press, 1945. 145 p.

HERSCOVICS, N. Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In: WAGNER, S.; KIERAN, C. (org.) **Research issues in the learning and teaching of algebra**. Reston, VA: NCTM, p. 60-86, 1989.

ITACARAMBI, R. R. **O jogo como recurso pedagógico** para trabalhar matemática na escola básica. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

JOHNSON-LAIRD, P. La théorie des modèles mentaux. In: EHRLICH, M. F.; TARDIEU, H.; CAVAZZA, M. (org.) **Les modèles mentaux: approche cognitif des représentations**, Introducció, Paris: Masson, p. 1-20, 1993.

JONNAERT, P. Dévolution versus contre-dévolution! Un tandem incontournable pour le contrat didactique. In: RAISKY, C.; CAILLOT, M. (org.). **Au-delà des didactiques, le didactique: débats autour de concepts fédérateur**. Belgium: De Boeck & Larcier S.A. 1996. 278 p.

KAMINSKY, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A. F. The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. **Science**, v. 320, p. 454-455, Apr. 2008.

KARAM, R. A. S.; PIETROCOLA, M. Habilidades Técnicas versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 181-205, Jul. 2009.

KIKUCHI, L. M. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental**: uma tentativa de aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a teoria dos campos conceituais. Orientador: Elio Carlos Ricardo. 2012. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23102012-131046>. Acesso em: 19 jun. 2017.

KIKUCHI, L. M.; TREVIZAN, W. A. Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de grandezas e medidas na escola básica. EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Ensino de Matemática), 14, 2010, Campo Grande. Anais [...]. Campo Grande: UFMS, 2010. CD-ROM.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.**

Tradução de Joan Teller. Chicago: The University of Chicago Press, 1976. 417 p.

LARA, I. C. M. de. **Jogando com a Matemática** de 5ª a 8ª série. São Paulo: Rêspel, 2003.

LOCHHEAD, J. Faculty interpretations of simple algebraic statements : The professor's side of the equation. **Journal of Mathematical Behavior**. 3(1), p. 28-37, 1980.

LUNA, S. V de. **Planejamento de pesquisa: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 2007. 108 p.

MARTINAND, J. L. **Connaître et transformer la matière : des objectifs pour l'initiation aux sciences et techniques.** New York: Peter Lang, 1986. 315 p.

MENEGHETTI, R. C. G., BEGA, M. F. Sobre a utilização de materiais didáticos manipuláveis na educação básica na visão dos professores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 45, p. 24-43, Mar. 2016.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Revista Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. (1)7, p. 39-54, 1992.

MOREIRA, M. A. A Teoria Dos Campos Conceituais De Vergnaud, O Ensino De Ciências E A Pesquisa Nesta Área (Vergnaud's conceptual field theory, science education, and research in this area). **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, V.7(1), p. 7-29, 2002.

MORENO, M. Introdução (Prefácio do livro). In: MORENO, M.; SASTRE, G.; BOVET, M.; LEAL, A. (org.) **Conhecimento e mudança: os modelos organizadores na construção do conhecimento.** Tradução de Ana Venite Fuzzato. Campinas: Unicamp; São Paulo: Moderna, p. 15-19, 2000a.

MORENO, M. A Psicologia Cognitiva e os Modelos Mentais. In: MORENO, M.; SASTRE, G.; BOVET, M.; LEAL, A. (org.) **Conhecimento e mudança: os modelos organizadores na construção do conhecimento.** Tradução de Ana Venite Fuzzato. Campinas: Unicamp; São Paulo: Moderna, p. 35-53, 2000b.

MORENO, M.; SASTRE, G.; BOVET, M.; LEAL, A. **Conhecimento e mudança: os modelos organizadores na construção do conhecimento.** Tradução de Ana Venite Fuzzato. Campinas: Unicamp; São Paulo: Moderna, 2000c. 399 p.

MORETTI, M. T. A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**. Rio Claro, v. 26, n.42b, p. 691-714, Abr. 2012.

NEVES, P. S. O. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem de Álgebra.** Orientador: Nilson José Machado. 1995. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

OLIVEIRA, Z. V., KIKUCHI, L. M. O laboratório de matemática como espaço de formação de professores. **Cadernos de Pesquisa**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, v. 48, n. 169, p. 802-829, 2018.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M.
Resolução de Problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco editorial, 2014, 158 p.

OTERO, M. R. La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud. In: OTERO, M. R.; FANARO, M. A.; SUREDA, P.; LLANOS, V. C.; ARLEGO, M. (org.) **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización: en el aula de matemática y física.** Buenos Aires: Dunken, p. 15-31, 2014.

OSTERMANN, F. A epistemologia de Kuhn. **Caderno Catarinense de Ensino de Física.** Florianópolis, v. 13, n. 3, p. 184-196, Dezembro 1996.

PASSOS, E.O, TAKAHASHI, E. K. Recursos didáticos nas aulas de matemática nos anos iniciais: critérios que orientam a escolha e o uso por parte de professores. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos.** Brasília, v. 99, n. 251, p. 172-188, Jan. Abr. 2018

PINTO, R. A.; FIORENTINI, D. Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para “a coisa”. **Zetetiké.** Campinas: FE-UNICAMP-CEMPEM, V. 5(8), p. 45-71, 1997.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, 2009, 180 p.

QUINTILIANO, L. C. **Conhecimento declarativo e de procedimento na solução de problemas algébricos.** Orientadora: Márcia Regina Ferreira de Brito. 2005. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Análise de erro em uma questão sobre função: uma forma de desvendar as dificuldades dos alunos. **Revista de Educação, Ciências e Matemática.** Rio de Janeiro, v.4, n.3, p. 13-24, set.dez. 2014a.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2º grau. **REVEMAT.** Florianópolis, v.9, n. 1, p. 27-42, 2014b.

RIBEIRO, J. A. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base de dados do SARESP.** Orientadora: Tânia Maria Mendonça Campos. 2001. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

ROUSSEAU, J. J. **Ensaio sobre a origem das línguas.** Tradução de Fulvia M. L. Moretto. Campinas: Unicamp, 2015. 183 p.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental.** 2007. Orientadora: Ana Regina Lanner de Moura. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V.; MILANI, E. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano**: ensino fundamental. Porto Alegre: Artmed, 2007. 102 p.

TAUCEDA, K. C., DEL PINO, J. C, NUNES, V. M. O estudo da célula através de situações-problema relacionados a enzima: uma proposta para aprendizagem significativa no referencial dos campos conceituais com alunos do Ensino Médio. **Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**. Girona, n. extra, p. 754-758, 2013. Comunicação.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987. 175 p.

UTSUMI, M. C. **Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos**: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Orientadora: Márcia Regina Ferreira de Brito. 2000. 252 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: LESH, R. A.; LANDAU, M. (org.) **The acquisition of mathematics concepts and processes**. London: Academic Press. Developmental Psychology Series. p. 127-174, 1983.

VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. **RDM**, 10 (23), p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. En qué sentido la TCC puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 12(2), p. 285-302, 2007.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. In: NUCCI, L. (org.) **Human Development**, Berkeley: Karger, p. 83-94, 2009.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Ed. Rev. Curitiba: UFPR, 2014, 322 p.

VIGOTSKI, L. S. Manuscrito de 1929. **Educação e Sociedade**. Campinas, v. 21, n. 71, p. 21-44, 2000.

ANEXOS

Categoria	Grupo de habilidades		Série de atividades		Conteúdo		Características a serem estudadas	
	Nº.	Descrição	Nº. ¹	Descrição	Cód. ²	Designação	Objetivo principal	Objetivo secundário
Coleta de informações	H1	Percepção (Interpretação de um problema)	I	Problemas com enunciados indeterminados	A	Aritmética	Percepção das relações e os fatos concretos de um problema.	
			II	Problemas com informações incompletas	B	Algébrica	Percepção das relações e os fatos concretos de um problema.	
			III	Problemas com informações excedentes	A	Aritmética	Percepção das relações e os fatos concretos de um problema.	
Processamento de informações	H2	Generalização de conceitos matemáticos	V	Sistemas de problemas de um tipo único	B	Algébrica	Generalização e contextualização apoiado em conceitos.	Simplificação de processos de raciocínio.
			VII	Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato	C	Mista	Capacidade de generalizações.	Memória matemática.
			VIII	Composição de problemas de um tipo apresentado previamente	A	Aritmética	Capacidade de generalizações; Percepção generalizada de um problema.	
					B	Algébrica		
					D	Lógica		
			IX	Problemas para provar	A	Algébrica	Capacidade de generalizar um raciocínio; Desenvolver o raciocínio lógico; Perceber processos de raciocínio simplificado.	Tipos de habilidades matemáticas
Tipologia	H3	Reversibilidade do processo mental	X	Composição de equações usando os termos de um problema	B	Algébrica	Capacidade de generalizar um raciocínio; Desenvolver o raciocínio lógico; Perceber processos de raciocínio simplificado; Perceber as relações e os fatos concretos de um problema.	Flexibilidade do pensamento.
			XVII	Problemas diretos e inversos	A	Aritmética	Capacidade para inverter os processos mentais.	
					B	Algébrica		
			XIX	Problemas de compreensão e raciocínio lógico	E	Geral	Utilizar o raciocínio lógico; Memória matemática; Perceber processos de raciocínio simplificado	Simplificação de processos de raciocínio.
			XXIV	Problemas com formulações visuais e verbais	D	Lógica	Tipos de habilidades matemáticas	Generalizações; Simplificação de processos de raciocínio; Memória matemática.

Anexo A - Categorias de análise dos problemas a serem aplicados no estudo. (Adaptado de Krutetskii, 1976).

¹ Mantivemos a mesma numeração definida pelo autor, mas selecionamos apenas as séries que serão incluídas na pesquisa.

² Fizemos uma mudança no código e designação da categoria do problema para fins de melhor compreensão.

Categoria	Cód. Hab	Hab.	Cód. Sub. Hab.	Sub. Hab.	Série	Campos Conceituais	Conceitos envolvidos
Coleta de informações	H1	Percepção (Interpretação de um problema)	A	Aritmética	I	Estruturas aditivas	Operações de soma e subtração
			B	Algébrica	I	Estruturas algébricas	Incógnitas
			A	Aritmética	II	Estruturas aditivas Estruturas multiplicativas	Operações de soma e subtração Operações de multiplicação
			A	Aritmética	III	Estruturas aditivas Estruturas algébricas	Operações de soma e subtração Operações de multiplicação Equações algébricas
Processamento de informações	H2	Generalização de conceitos matemáticos	A	Aritmética	VIII	Estruturas multiplicativas	Proporções múltiplas Produto das medidas
			A	Algébrica	IX	Estruturas algébricas Estruturas multiplicativas	Incógnitas Operações com incógnitas Expressões algébricas
			B	Algébrica	V	Estruturas algébricas	Incógnitas Operações com incógnitas
			B	Algébrica	VIII	Estruturas algébricas	Operações com incógnitas
			B	Algébrica	X	Estruturas algébricas	Incógnitas Operações com incógnitas Expressões algébricas Resolução de equações
			C	Mista	VII	Estruturas multiplicativas Estruturas algébricas	Produto das medidas Operações com incógnitas
			D	Lógica	IX	Estruturas aditivas	Operações de soma e subtração Operações de multiplicação
			A	Aritmética	XVII	Estruturas multiplicativas	Operações de multiplicação e divisão
			B	Algébrica	XVII	Estruturas algébricas	Expressões algébricas
			D	Lógica	XIX	Estruturas aditivas	Operações de soma e subtração
Tipologia	H4	Compreensão; Raciocínio e Lógica	E	Geral	XIX	Estruturas multiplicativas	Operações de multiplicação e divisão
			A	Algébrica	XXIV	Estruturas algébricas	Expressões algébricas
Tipologia	H5	Tipos de habilidades matemáticas	A	Algébrica	XXIV	Estruturas algébricas	Expressões algébricas

Anexo B – Tabela relacionando habilidades e conceitos.

ANEXO C

Carta de apresentação do protocolo

Caro(a) aluno(a):

A seguinte série de atividades faz parte de um projeto de pesquisa da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP) e tem como objetivo investigar as formas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental. O propósito é meramente investigativo e você não será avaliado(a) e nem julgado(a) pelo que responder nestas atividades. Portanto, é muito importante que todas as questões sejam respondidas da forma mais completa possível. Se não conseguir resolver alguma, registre a sua principal dúvida. Todo tipo de informação que registrar será valiosa para a pesquisa.

Também pedimos que faça a sua identificação com nome e data de realização da atividade para que possamos dar continuidade nas próximas fases da pesquisa. Mas, não se preocupe, pois seu anonimato será garantido.

Agradecemos desde já pela sua colaboração que auxiliará pesquisadores e professores a compreender melhor o ensino de Matemática no Brasil.

Boa atividade!

Luzia M. Kikuchi
(Doutoranda do PPG/FEUSP)

ANEXO D

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE

Por este instrumento declaro estar de acordo e autorizar a participação de meu/minha filho/a _____ em entrevista e gravação em áudio durante as atividades realizadas pela pesquisadora **Luzia Maya Kikuchi** desenvolvida junto à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Estou ciente de que participam das atividades alunos da **Escola Estadual Antônio de Ré** com a colaboração da professora de matemática da instituição e supervisão do professor livre docente **Elio Carlos Ricardo**.

Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

_____, _____ de _____ de 2017.

Nome do responsável por extenso: _____

Assinatura: _____

Pesquisadores responsáveis¹:

Luzia Maya Kikuchi

Prof. LD. Elio Carlos Ricardo (orientador)

¹ Informações e alterações podem ser solicitadas por e-mail luzia.kikuchi@usp.br / elioricardo@usp.br ou pelo telefone (11) 3091-8260.

ANEXO E – PROTOCOLO DO ESTUDO PILOTO

Nome:

Data: ____ / ____ / ____

Caro(a) aluno(a):

A seguinte série de atividades faz parte de um projeto de pesquisa da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP) e tem como objetivo investigar as formas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental. O propósito é meramente investigativo e você não será avaliado(a) e nem julgado(a) pelo que responder nestas atividades. Portanto, é muito importante que todas as questões sejam respondidas da forma mais completa possível. Se não conseguir resolver alguma, registre a sua principal dúvida. Todo tipo de informação que registrar será valiosa para a pesquisa.

Também pedimos que faça a sua identificação com nome e data de realização da atividade para que possamos dar continuidade nas próximas fases da pesquisa. Mas, não se preocupe, pois seu anonimato será garantido.

Agradecemos desde já pela sua colaboração que auxiliará pesquisadores e professores a compreender melhor o ensino de Matemática no Brasil.

Boa atividade!

Luzia M. Kikuchi
(Doutoranda do PPG/FEUSP)

Série I: Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.

- 1) Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para o outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres.

- 2) Um homem viveu por x meses.

Série II: Leia o problema a seguir. Você notou algo de diferente? Explique.

Uma escola recebeu 80 notebooks separados em dois tipos de modelo. O mais simples custa 800 reais e o modelo mais avançado 1.000 reais. Quantos notebooks de cada tipo a escola recebeu?

Nome:

Data: ____ / ____ / ____

Série III: Leia e resolva o problema a seguir. As informações expressas são suficientes? Explique quais você utilizou.

Existem 40 veículos em um estacionamento entre carros e motocicletas. Ao todo existem 100 rodas e 40 *volantes*. Quantos veículos de cada tipo há neste estacionamento?

Série V: Os problemas a seguir estão separadas em seção B1 e B2.

B1 – Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos.

a. $(a + b)^2 =$

b. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$

Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex.: item a com item 1.

1. $a^2 + b^2 =$

2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$

B2 – Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê.

a. $(a + b)^2$

b. $a + b^2$

c. $a + 2b^2$

d. $a^2 + b^2$

Nome:

Data: ____ / ____ / ____

Série VII – Os problemas a seguir são semelhantes, mas seus resultados são representados de formas diferentes. Apresente a resolução para cada um deles.

- a. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de 4 quartos iguais a esse?
- b. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede x m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?

Nome: _____

Data: ____ / ____ / ____

Série IX – Nos problemas a seguir, você será desafiado a provar as condições apresentadas pelos problemas ou resolver utilizando a lógica. Nos problemas para provar, tente explicar da forma mais detalhada possível o que você pensou.

- a.** Pense em um número qualquer, multiplique-o pelo número que é 6 unidades maior que o número que você tinha pensado inicialmente. Finalmente, adicione 9 a esse produto. Prove que o resultado é um número quadrado.

- b.** Complete com os dígitos que estão faltando nesta soma:

$$\begin{array}{r}
 4 \quad _ \\
 + \quad _ \quad _ \quad 2 \\
 \hline
 0 \quad 1
 \end{array}$$

Série X – Resolva problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.

A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o seu resultado por 12. Por sorte, chegou no mesmo resultado. Em qual número ela pensou?

Nome: _____

Data: ____ / ____ / ____

Série XVII – Nas atividades a seguir, você deverá tentar resolver os problemas da forma como está apresentada no verso A. Se tiver dificuldade, você pode optar em resolver o verso B. No final, justifique qual foi a dificuldade que o(a) impossibilitou de resolver o verso A.

Verso A

Um tanque com capacidade de 80 litros foi preenchido com $\frac{2}{5}$ de seu volume. Quantos litros foram preenchidos nesse tanque?

Apresente a forma fatorada das seguintes expressões: $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$.

Verso B

Um tanque foi preenchido com dezesseis litros de água preenchendo $\frac{2}{5}$ da sua capacidade total. Qual é o volume total desse tanque?

Desenvolva as seguintes expressões: $(a - b)^2$ e $(a + b)(a - b)$.

Nome:

Data: ____ / ____ / ____

Série XIX – Resolva os problemas a seguir colocando o máximo de detalhes do raciocínio que usou para resolvê-lo.

- a. Em uma olimpíada de matemática, foram propostos 10 problemas. Cada participante receberá 5 pontos para cada problema resolvido corretamente e perde 3 pontos se for resolvido de forma incorreta. Quantos problemas foram resolvidos corretamente para um aluno que recebeu 34 pontos no final? E para quem recebeu 10 pontos?

- b.** A vegetação está cobrindo um terreno baldio. A cada dia essa área coberta pela vegetação está dobrando. No oitavo dia, metade desse terreno já está coberto pela vegetação. Em que dia a vegetação cobrirá o terreno todo?

Nome: _____

Data: ____ / ____ / ____

Série XXIV – Nas atividades a seguir, você deverá explicar verbalmente ou montar a expressão algébrica conforme necessário. Tente inserir o máximo de detalhes do seu raciocínio.

- a.** Explique, com suas próprias palavras, o que é um coeficiente. Depois, indique quais são os coeficientes das seguintes expressões algébricas.

i. $3a^2$

ii. $3b \cdot 2$

iii. $\frac{3}{7}x^3$

iv. $\frac{4}{5}ab\frac{5}{4}2y^n$

- b.** Nas expressões algébricas a seguir, quais são os expoentes correspondentes a cada incógnita? Em seguida, dê uma definição apropriada para o que é um expoente.

i. $2a^3$

ii. $-3x^2y^2$

iii. $\frac{1}{2}mn$

iv. z

- c. Escreva a expressão algébrica correspondente aos que estão a seguir, mas de forma que os seus coeficientes sejam iguais a 1.
- i. $3abc$
 - ii. $4m^2n^3$

ANEXO F - PROTOCOLO DO ESTUDO FINAL GRUPO 1

Nome: _____ Turma: _____

Esta atividade é uma continuação da pesquisa sobre as formas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental. Ela tem como objetivo verificar a sua compreensão sobre alguns processos de resolução de equações e conteúdos relacionados à Álgebra.

Não se esqueça de se identificar com seu nome e turma, para que seja possível dar continuidade nas próximas fases da pesquisa, mas fique tranquilo(a) que em nenhum momento você está sendo avaliado ou julgado pelo que responder. Suas respostas serão utilizadas, de forma anônima, apenas para fins de pesquisa.

Muito obrigada pela sua colaboração!

Luzia

1. Na atividade anterior, você havia se deparado com a seguinte expressão algébrica:

$$(a + b)^2$$

Essa expressão pode ser desenvolvida das seguintes formas:

- I. Aplicando a fórmula do *quadrado da soma de dois termos* que diz o seguinte:

“O quadrado do primeiro termo somado ao dobro da multiplicação do primeiro e segundo termo somado ao quadrado do segundo termo”.

Isso resulta em:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- II. Outra forma de chegar a esse resultado é aplicando a distributiva do termo que está elevado ao quadrado:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2\end{aligned}$$

Veja que ab é a mesma coisa que ba , pois “a ordem dos fatores não altera o produto”. Lembre-se que ab é uma multiplicação. Por exemplo, $2 \cdot 3$ dá o mesmo resultado de $3 \cdot 2$, certo?

Como eles são termos iguais, podemos soma-los, resultando em $2ab$.

Continuando a resolução, temos:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

III. Uma terceira forma seria somando as áreas das seguintes figuras que formam um quadrado:

Para calcular a área de um retângulo, basta multiplicar um lado pelo outro.

$$\begin{aligned}
 A1 &= a \cdot b = ab \\
 A2 &= a \cdot b = ab \\
 A3 &= a \cdot a = a^2 \\
 A4 &= b \cdot b = b^2
 \end{aligned}$$

A área total desse quadrado é igual a soma de todas essas áreas A1, A2, A3 e A4 que ficaria:

$$\begin{aligned}
 A_{total} &= A1 + A2 + A3 + A4 \\
 A_{total} &= ab + ab + a^2 + b^2 \\
 A_{total} &= 2ab + a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

Escolha uma das três formas de desenvolvimento mostradas anteriormente e tente desenvolver as seguintes expressões:

a. $(c + 1)^2$

b. $(3 + b)^2$

c. $(5x + y)^2$

2. Levando em consideração algum dos exemplos de resolução da atividade anterior, tente explicar, com suas próprias palavras, a seguinte pergunta:

$$(a + b)^2 \text{ é o mesmo que } a^2 + b^2?$$

3. Um número quadrado é aquele que resulta da multiplicação da medida dos dois lados de um quadrado.
- a. Qual a principal característica sobre os lados de um quadrado?
 - b. Desenhe 3 exemplos de quadrados de medidas diferentes.
 - c. Agora dê 3 exemplos de números quadrados.

4. O sistema numérico decimal é composto com algarismos de 0 a 9 e os seus agrupamentos são feitos de 10 em 10.

Observe a casa da unidade desta conta:

$$\begin{array}{r} 39 \\ + 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

Em termos práticos, isso significa que 39 são formados por 3 dezenas e 9 unidades. Se somamos com 3 unidades, o resultado é formado por 4 dezenas e 2 unidades. Pois cada dezena representa 10.

Partindo dessa explicação, tente explicar porque usamos o algoritmo do “sobe 1” quando obtemos resultados maiores que 9 na soma de uma das casas.

5. Números consecutivos são aqueles que vêm em uma sequência. E números inteiros são os números naturais incluindo os números negativos.

Divisível significa que a divisão dá um resultado com resto zero. Por exemplo: 12 é divisível por 4, pois:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Sabendo dessas definições, prove que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por 3.

ANEXO G – PROTOCOLO DO ESTUDO FINAL GRUPO 2

Nome: _____ Turma: _____

Esta atividade é uma continuação da pesquisa sobre as formas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental. Ela tem como objetivo verificar a sua compreensão sobre alguns processos de resolução de equações e conteúdos relacionados à Álgebra.

Não se esqueça de se identificar com seu nome e turma, para que seja possível dar continuidade nas próximas fases da pesquisa, mas fique tranquilo(a) que em nenhum momento você está sendo avaliado ou julgado pelo que responder. Suas respostas serão utilizadas, de forma anônima, apenas para fins de pesquisa.

Muito obrigada pela sua colaboração!

Luzia

ETAPA 1

Nessa primeira etapa, você utilizará um jogo digital de Matemática que te ensinará alguns processos de resolução de equações. O seu objetivo é conseguir avançar o maior número de fases em 30 minutos.

ETAPA 2

Na segunda etapa, você resolverá alguns exercícios semelhantes aos apresentados no jogo para verificar se você conseguiu entender o conceito aprendido no jogo.

1. Quanto vale o x ? Some os números “2” do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 2$$

Resposta:

2. x é uma variável¹. As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 2 + 4$$

Resposta:

3. x é uma variável². As variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade.

$$x = 10 + 2$$

Resposta:

4. Os números “3” e “7” são “constantes”. Ou seja, qualquer número por si só é chamado de “constante”. Encontre o valor de x na equação abaixo.

$$x = 3 + 7$$

Resposta:

5. O que você resolveu até agora chamam-se “equações”. Uma equação mostra que duas coisas são iguais. Veja:

$$x = 12$$

- a. O x é igual a qual valor?

Resposta:

- b. Tente representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item a.

Resposta:

¹ Aqui foi usado o termo “variável” com o significado de termo desconhecido. Se for seguida a definição matemática, o correto seria chamá-lo de incógnita, neste exemplo.

² Mesma nota do rodapé anterior.

6. Responda se é verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes equações³:

- a. $6 + 3 = 9$ ()
- b. $14 = 7 + 7$ ()
- c. $3 + 3 = 1 + 5$ ()
- d. $1 + 4 = 2 + 3$ ()
- e. $13 + 3 = 6$ ()

7. Quando você soma um número positivo com um negativo, você está aplicando uma subtração. Veja:

$$7 + (-2) = 7 - 2$$

Qual é o resultado dessa equação⁴?

Resposta:

Calcule o resultado das seguintes equações⁵:

- a. $2 + (-2) =$
- b. $5 + (-3) =$
- c. $8 + (-5) =$
- d. $33 + (-12) =$
- e. $2 + (-8) =$

³ Aqui deve ser utilizado “expressões” no lugar de equações.

⁴ Aqui deve ser utilizada “expressão” no lugar de equação.

⁵ Aqui deve ser utilizado “expressões” no lugar de equações.

O que acontece quando somamos um número negativo com um positivo? Dê o resultado desta expressão e explique a sua resposta.

$$- 2 + 5 =$$

8. Observe a equação a seguir:

$$x + 2 = 5$$

Você precisa isolar o x , ou seja, deixar um lado da igualdade apenas com o x e o outro lado apenas com constantes. Para fazer isso, você precisa eliminar (zerar) a constante do lado que está o x . Veja:

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x + 0 = 5 - 2$$

Perceba que quando eu subtraio uma constante dos lados da igualdade, eu tenho que fazer o mesmo do outro lado. Por isso, subtraímos 2 do lado onde está o 5.

Agora falta encontrar o valor de x . Responda quanto é o valor de x ?

Resposta:

Agora faça o mesmo com as equações a seguir. Apresente o passo-a-passo do processo para encontrar o x .

a. $x + 12 = 20$

b. $-6 + x = 30$

ANEXO H – PROTOCOLO DO ESTUDO FINAL – GRUPO 3

Nome: _____ Turma: _____

O seguinte questionário é uma continuação da pesquisa sobre as formas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental. Ele tem como objetivo conhecer um pouco melhor sobre a sua trajetória como aluno e que será dividida em duas etapas.

Nessa primeira etapa, peço para que você tente responder com o **maior número possível de detalhes** este questionário. Também peço que faça a sua identificação com nome e turma para que seja possível dar continuidade nas próximas fases da pesquisa.

Na segunda etapa, vamos conversar a respeito de suas respostas, em formato de entrevista, que será gravada em áudio, para que possamos entender melhor sobre você.

Fique tranquilo(a) que em nenhum momento você está sendo avaliado ou julgado pelo que responder. Suas respostas serão utilizadas, de forma anônima, apenas para fins de pesquisa.

Agradeço mais uma vez pela sua colaboração!

Luzia

QUESTIONÁRIO

1. Tente explicar qual o seu sentimento em relação à disciplina de Matemática.

2. Diga quais as matérias que você gosta explicando o por quê.

3. Diga quais as matérias que você **não** gosta explicando o por quê.

4. Descreva o que você considera uma “boa aula”.

5. O que você gosta de fazer nas suas horas livres?

ANEXO I

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 13

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E13: ESTUDANTE 13

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom. Então, você terminou aqui a atividade. O que você achou dessa comparada com a do ano passado?
Linha 2	E13: Mais fácil.
Linha 3	P: Tá. Em que aspecto?
Linha 4	E13: Mais simples, mais simplificado e mais explicativa.
Linha 5	P: Tá. E aí, a primeira atividade. Explica para mim o que fala a primeira atividade.
Linha 6	E13: Aqui fala para... para expressão algébrica $a + b$ elevado ao quadrado.
Linha 7	P: Aham.
Linha 8	E13: Aí mostra as opções (que você pode usar) aplicando fórmula do quadrado dos dois termos que diz o seguinte: o quadrado de um termo adicionado ao dobro da multiplicação do primeiro pelo segundo termo adicionado ao quadrado do segundo termo. Fica $a + b$ ao quadrado igual a a ao quadrado mais $2ab + b$ ao quadrado. Aí, o segundo valor, a segunda fórmula de chegar a esse resultado é aplicando a distributiva do termo que isso é elevado ao quadrado. Seria $a + b$ ao quadrado é igual $a + b \times a + b$, que é igual a a ao quadrado + $ab + ba + b$ ao quadrado. Que $a + b...$ que a e b, mas ba é a mesma coisa que $a...$ ordem dos produtos não altera o fa... a ordem dos fatores não altera o produto.
Linha 9	P: Ok.
Linha 10	E13: Aí fica $a + b$ ao quadrado igual a $a + b + a + b$ igual a a ao quadrado + $ab + ba + b$ ao quadrado, que é igual a a ao quadrado mais $ab + ab + b$ ao quadrado. Que também é igual a a ao quadrado mais $2ab + b$ ao quadrado.
Linha 11	P: Certo.
Linha 12	E13: Aí na terceira forma seria somando as áreas das seguintes figuras que formam o quadrado. Seria $a + b$, $a...$ não, $a \times b$, $a \times a \times b$ e $a \times b$. Que A1 é igual a $a \times b$ igual a b. Aí A2 é igual a $a \times b$ que é igual a b também. A3 que é igual a $a \times a$ igual a a elevado ao quadrado. E A4 é igual $ab \times b$ igual a b ao quadrado. Então o total desse quadrado é igual à soma de todas as áreas A mais A1, A2, A3 e A4. Então o total seria A1 mais A2, A3 e A4, que é $ab + ab + a$ ao quadrado mais b ao quadrado $\times ab + a$ ao quadrado, b ao quadrado.
Linha 13	P: Tá. E aí você escolheu qual dessas três formas para resolver?
Linha 14	E13: Eu escolhi a... ((silêncio)) a segunda.
Linha 15	P: Tá.
Linha 16	E13: Que é a que eu acho mais fácil. Que é a que eu fazia na minha outra escola.
Linha 17	P: Tá.
Linha 18	E13: Que é fazer $(a + b) \times (a + b)$.
Linha 19	P: Tá. E por que você acha mais fácil essa da distributiva?
Linha 20	E13: É que... eu acho mais simples, porque é mais fácil pegar. Vamos supor, o $(a + b) \times (a + b)$: você pega o $a \times a$ que dá a ao quadrado, e $a \times b$ que dá ab.

Linha 21	P: Tá.
Linha 22	E13: Aí depois pega o $b \times a$ que é ba, e $b \times b$ que é b ao quadrado.
Linha 23	P: Aham.
Linha 24	E13: Fica na mesma, mas eu acho que fica mais fácil para mim.
Linha 25	P: Tá. E o que você achou de diferença? Tem três itens, não é? Tem o A... o B e o C. Em níveis de dificuldade, eles têm alguma diferença?
Linha 26	E13: Não. Não achei não.
Linha 27	P: Tá. E13: Para mim eu achei que isso ficou a mesma coisa.
Linha 28	P: Tá. A letra C, por exemplo, ele tem alguma coisa de diferente entre A e B?
Linha 29	E13: Sim.
Linha 30	P: Qual é a diferença?
Linha 31	E13: O x e o y. Enquanto um só tem o $c + 1$, e o B é $3 + b$. Daí esse daqui $5x + y$. Não está especificando um número. Só tem... aí você tem que escrever o x e o y. E o outro tem que escrever só o b e o outro é só o c.
Linha 32	P: Certo.
Linha 33	E13: Então assim é mais difícil. Porém para... só montar a conta... é a mesma coisa.
Linha 34	P: Aham. E você acha que está certinho o que você fez aí de distributiva?
Linha 35	E13: Eu acho que sim.
Linha 36	P: Ok. Por exemplo, esse $5x$ são dois termos ou é um termo só?
Linha 37	E13: Um termo.
Linha 38	P: Ok. Então, na regra aqui, você vai multiplicar todo o primeiro termo pelo outro primeiro termo, não é? Será que está todo mundo multiplicado no que você fez aqui? Você colocou como $25x$.
Linha 39	E13: $5x \times 5x$, dá 25... aí depois $5x \times y$ para 5... xy?
Linha 40	P: Aham.
Linha 41	E13: Aí depois $y \times 5x$ que é o $5xy$...
Linha 42	P: Aham.
Linha 43	E13: $y \times y$ que é o y ao quadrado.
Linha 44	P: Isso. Mas e o $5x \times 5x$? Está todo mundo multiplicado?
Linha 45	E13: Não.
Linha 46	P: O que não está multiplicado?
Linha 47	E13: Agora eu não entendi.
Linha 48	P: Aqui, olha: você multiplicou o 5 com o 5, certo?
Linha 49	E13: Sim.
Linha 50	P: Deu 25. E o x ? O $x \times x$ é quanto?
Linha 51	E13: É o x ao quadrado.
Linha 52	P: Aham.
Linha 53	E13: Ah! Entendi! Aqui. Tem que ter “ao quadrado”.
Linha 54	P: Isso. É.
Linha 55	E13: Ah, entendi.
Linha 56	P: Certo.
Linha 57	E13: São dois termos.
Linha 58	P: Isso. São dois termos juntos que está formando um termo só. Está certo?
Linha 59	E13: Dois termos que formam um.
Linha 60	P: Isso. Certo? É isso que tem que tomar cuidado, na hora de fazer a distributiva, pois às vezes pode esquecer, tá?
Linha 61	E13: Tá bom.
Linha 62	P: Agora, o que você achou da terceira parte? A terceira forma de resolver isso aqui, ainda nessa atividade?
Linha 63	E13: A terceira forma?
Linha 64	P: Isso. Que é geometricamente.
Linha 65	E13: Isso aqui?
Linha 66	P: Você tinha visto essa explicação, já?
Linha 67	E13: Essa aqui? Eu acho que já. Eu acho que foi na minha antiga escola.
Linha 68	P: Humn.

Linha 69	E13: Que você... multiplica os lados. Aí depois você só soma.
Linha 70	P: Ah, tá.
Linha 71	E13: Aí você... tipo, soma esses dois, aí soma com esses dois, soma com esse e com esse.
Linha 72	P: Sim... e você acha que é fácil dessa forma?
Linha 73	E13: ((silêncio)) É. É fácil. Mas eu acho que é mais fácil de... complicar. De se confundir um pouquinho.
Linha 74	P: Aham.
Linha 75	E13: Que pode ser que chegue alguém e eu acabe somando em vez de multiplicar.
Linha 76	P: Ah, sim.
Linha 77	E13: E pode ser que as pessoas se confundam mais.
Linha 78	P: Aham. É. A ideia dessa explicação geométrica é saber por que se chama “quadrado”...
Linha 79	E13: Sim.
Linha 80	P: Então, é um quadrado de lado $a + b$. Por isso que, quando você está calculando essa soma aqui, nada mais é do que calcular a área de um quadrado que mede $a + b$. Então, é mais ou menos isso, ok? Vamos passar para a próxima atividade?
Linha 81	E13: ((silêncio))
Linha 82	P: Beleza. Bem, nesse aqui. Qual é a diferença do $a + b$ ao quadrado e a ao quadrado mais b ao quadrado? Você explicou direitinho, com (um) exemplo, falando que eles são diferentes, e aplicou um número fictício, não é?
Linha 83	E13: Sim. Nesse sentido. Como se já soubesse o... ((silêncio))
Linha 84	P: Certo.
Linha 85	E13: Como se, por exemplo, fosse a ao quadrado + b ao quadrado. Aí eu vou trocar o a pelo 2 e o b pelo 4. Ficaria 2 ao quadrado + 4 ao quadrado. Então, ficaria $4 + 16$ que é igual a 20. Agora, se pegasse $a + b$ ao quadrado, ele fica $(a + b) \times (a + b)$. Então ia ficar $(2 + 4) \times (2 + 4)$. E, 2×2, quatro, e 2×4, oito. 4×2, oito. E 4×4, dezesseis. Se somar tudo, dá 36. Então realmente o... resultado muda.
Linha 86	P: Certo. Então você conseguiu provar que eles são diferentes por causa dos resultados, não é? Se você não soubesse os números, qual seria uma outra forma de explicar que elas são diferentes?
Linha 87	E13: Eu não sei. Porque antes a gente poderia até falar que eles são iguais.
Linha 88	P: Humn.
Linha 89	E13: Porque seria... multiplicar o a elevado a 2, então ia dar a ao quadrado, e b elevado a 2 que ia dar b ao quadrado.
Linha 90	P: Aham.
Linha 91	E13: Então acaba ficando assim.
Linha 92	P: Sim.
Linha 93	E13: Se eu soubesse os números.
Linha 94	P: Mas você sabe que, isso aqui, quando você desenvolve, não fica a ao quadrado mais b ao quadrado, não é? Ele tem alguma coisa diferente. O que ele tem de diferente?
Linha 95	E13: Não lembro... Não sei nem como faz...
Linha 96	P: Tenta desenvolver esse a mais b ao quadrado. Quando você desenvolve, qual é o resultado que fica?
Linha 97	E13: Fica a ao quadrado mais $2ab$ mais b ao quadrado.
Linha 98	P: Isso. E qual é a diferença com esse aqui?
Linha 99	E13: Esse aqui já... ((silêncio)) só tem número elevado ao quadrado, então... ((fala baixa))
Linha 100	P: E o outro, ele tem?
Linha 101	E13: Tem... é... tem um... dois números elevados ao quadrado, e tem um que é três termos, que formam um termo.
Linha 102	P: Ah, certo. Que é o...?
Linha 103	E13: Que é o $2ab$.
Linha 104	P: Isso. Perfeito. Vamos passar para a terceira atividade. Aqui seria explicar um pouco sobre a característica do quadrado, não é?
Linha 105	E13: Sim.
Linha 106	P: Então eles possuem o mesmo tamanho?
Linha 107	E13: Sim.
Linha 108	P: Certo.
Linha 109	E13: Os lados possuem o mesmo tamanho.

Linha 110	P: Aham. Todos eles?
Linha 111	E13: Sim.
Linha 112	P: Sim?
Linha 113	E13: É um quadrado.
Linha 114	P: Certo. E aí você desenhou três exemplos de quadrados. Por que você desenhou dessa forma?
Linha 115	E13: Porque é... todos os quadrados possuem os lados do mesmo tamanho.
Linha 116	P: Aham.
Linha 117	E13: Então, como eles possuem o mesmo tamanho, é... não importa o que você faz, se eu aumentar um lado vai aumentar do outro.
Linha 118	P: Aham.
Linha 119	E13: Então eu pus um que é... 5 por 5 e outro que é 10 por 10, e o outro é 2,5 por 2,5.
Linha 120	P: Aham.
Linha 121	E13: Porque não importa que você mude, se é o quadrado, vai continuar sendo igual os lados.
Linha 122	P: Certo. E qual é a unidade desses quadrados? A medida desses quadrados?
Linha 123	E13: Seria 5... ((silêncio))
Linha 124	P: Por exemplo, é 5... o que? Porque quando a gente mede a gente tem uma unidade, não é?
Linha 125	E13: 5 ao quadrado. Mede o quadrado.
Linha 126	P: Não. A unidade. O que é unidade? É (unidade de) centímetros, metros, quilômetros...
Linha 127	E13: Ah, tá. ((silêncio)) Esse daqui? Seria em... centímetros.
Linha 128	P: É centímetros? Por que você escolheria centímetros?
Linha 129	E13: Porque é o que... seria, que cabe dentro da folha. De acordo.
Linha 130	P: Humn. E se...
Linha 131	E13: Mas poderia representar tipo um... um prédio.
Linha 132	P: Aham.
Linha 133	E13: O teto de um prédio. Então aí já seria em metros.
Linha 134	P: Certo.
Linha 135	E13: Aí se fosse uma cidade, já é... já é quilômetros.
Linha 136	P: Certo. Aí você teria...?
Linha 137	E13: Medidas diferentes.
Linha 138	P: Medidas diferentes, mas que estão representadas... no papel?
Linha 139	E13: É. No papel.
Linha 140	P: É. Só que ela não significa ter exatamente a mesma medida, não é?
Linha 141	E13: Sim.
Linha 142	P: Então, por exemplo, a planta de uma casa...
Linha 143	E13: ... É diferente de um... de um apartamento ou de uma escola.
Linha 144	P: Sim. Aí, se eu quisesse desenhar a planta da sua casa, que tem metros de comprimento, no papel, você precisaria de metros de papel para desenhá-la?
Linha 145	E13: Não.
Linha 146	P: Tá.
Linha 147	E13: Poderia representar... aqui em centímetros, mas formando um metro. Usando uma medida de metro, só que em centímetros.
Linha 148	P: Certo. Então, você faz uma correspondência?
Linha 149	E13: Sim.
Linha 150	P: Vocês aprenderam a escala?
Linha 151	E13: Escala... eu acho que sim.
Linha 152	P: Eu acho que, normalmente, vocês veem muito em geografia. Por exemplo, aqui, nesse mapa, cada centímetro está valendo um quilômetro.
Linha 153	E13: Sim, sim.
Linha 154	P: 5 quilômetros.
Linha 155	E13: É mais geografia, isso daí.
Linha 156	P: Isso. Aí isso também vale para matemática. Então, se você for fazer alguma escala de uma planta, por exemplo, você poderia usar essa escala. Se você prestar atenção naqueles folders de prédio e apartamento...
Linha 157	E13: Sim, sim.
Linha 158	P: ... à venda, você vai ver que tem a escala.
Linha 159	E13: Tem a escala.

Linha 160	P: Não é?
Linha 161	E13: Sim.
Linha 162	P: Legal. Vamos passar para a próxima. Aí você me deu três exemplos...
Linha 163	E13: ... quadrados.
Linha 164	P: Certo. Que aí você pegou um número, elevou ao quadrado?
Linha 165	E13: Aí pus o resultado.
Linha 166	P: Isso. E qual é o número quadrado?
Linha 167	E13: É o 4. 4 ao quadrado.
Linha 168	P: Aham. Tá. Mas o 4 é um número quadrado?
Linha 169	E13: Não ((silêncio)) Eu acho que não. Eu acho que seria o 16, o número quadrado.
Linha 170	P: Certo. Por quê?
Linha 171	E13: Porque o 4 está elevado ((ênfatisou)) ao quadrado.
Linha 172	P: Humn.
Linha 173	E13: O resultado que é ao quadrado.
Linha 174	P: Isso. Perfeito. Então o outro, o outro exemplo qual é o número quadrado?
Linha 175	E13: É o 100 e o outro é o 25.
Linha 176	P: Então, a próxima atividade é o sistema numérico decimal, não é?
Linha 177	E13: Aham.
Linha 178	P: Então, você entendeu essa parte da divisão de agrupamentos de 10 em 10?
Linha 179	E13: Sim. É dezena, unidade, centena.
Linha 180	P: Isso. Aqui, você explicou direitinho. Eu acho que está bem. Mas e esse aqui? Se eu não tivesse esse recurso para “armar”? Porque a gente aprende, quando está na primeira série, que “ <i>vem e sobe uma casa</i> ”. Mas, se eu não tivesse esse recurso, como seria uma outra forma de fazer a soma? Como você faria?
Linha 181	E13: Seria aqui, tipo, três dezenas, e... uma unidade. Soma mais 9 unidades. Aí eu ia trocar a dezena por 4, ter que ativar o 9, o 1 da própria unidade.
Linha 182	P: Aham.
Linha 183	E13: Porque seria 31, então é 3 dezenas e 1 unidade. Aí soma as unidades e vira dezena.
Linha 184	P: Certo.
Linha 185	E13: Então, 9 mais 1 dá 10 e 10 é uma dezena e ele uma unidade.
Linha 186	P: Aham.
Linha 187	E13: E ficaria 4 dezenas.
Linha 188	P: Perfeito. Está certinho. Vamos passar para a próxima.
Linha 189	E13: Essa daqui...
Linha 190	P: Essa daqui é um pouquinho mais difícil, não é? Bom, o que você entendeu sobre números consecutivos? De acordo com a explicação?
Linha 191	E13: São números... um atrás do outro. Por exemplo, 7-8-10 são números consecutivos. Não, 7-8-9.
Linha 192	P: Tá.
Linha 193	E13: Aí eu fiz a conta do 7 mais 8 mais 9, deu 24. E 24 é divisível por... é divisível por 3. Dá... dá 8.
Linha 194	P: Aham.
Linha 195	E13: Aí depois eu fiz a conta. 13-14-15, que já muda um pouco, que tem a... aí possui a... casa da dezena.
Linha 196	P: Aham.
Linha 197	E13: Aí fica 42. E 42 dividido por 3 dá 14. Então é divisível.
Linha 198	P: Ok.
Linha 199	E13: Porque... sobra zero.
Linha 200	P: Aham. Tá. Agora, e se eu quisesse mostrar de uma forma genérica isso?
Linha 201	E13: Genérica?
Linha 202	P: É.
Linha 203	E13: Aí eu não sei.
Linha 204	P: Aqui você está pegando exatamente esses números. Só que, ele está falando assim, ele quer três números consecutivos inteiros quaisquer. E o que é número inteiro, pela explicação que ele está dando?
Linha 205	E13: É, número... completo, tipo 1, 2, 3 ou menos 1, menos 2...
Linha 206	P: Isso. Então, será que, se você usar números negativos, vai dar certo? Três números negativos consecutivos, será que vai dar certo também?

Linha 207	E13: Não sei. Espera aí. ((silêncio)) Dá.
Linha 208	P: Dá certo?
Linha 209	E13: Dá certo.
Linha 210	P: Aham. Tá. Então, sabendo os números, você conseguiu provar que realmente dá certo.
Linha 211	E13: Sim.
Linha 212	P: Agora, falta tentar achar uma fórmula genérica para mostrar isso: por x . Vamos supor que você vai chamar de x , esse número que você não sabe. Aí você tem que representar o consecutivo desse x . Como você representaria esses consecutivos?
Linha 213	E13: x, sei lá, y, z?
Linha 214	P: Pode ser.
Linha 215	E13: Porque são números diferentes.
Linha 216	P: Isso. São números diferentes. Só que... se você colocar x , y e z , você não tem controle de nenhum número, não é?
Linha 217	E13: Então poderia ser – sei lá – x, y, 10.
Linha 218	P: Humn.
Linha 219	E13: Ou então... x, 8, 9.
Linha 220	P: Poderia ser. Vamos fazer o teste? Tente escrever isso.
Linha 221	E13: x mais 8 mais 9.
Linha 222	P: Aham.
Linha 223	E13: Que aí é igual o... ((silêncio)) Nossa... Estou me “embananando”... Agora vou transformar o x. ((silêncio)) ((tsc)) Não sei.
Linha 224	P: Eu vou te dar uma dica. Você começa pelo x , pense assim: quando você está formando os números consecutivos, escolhe um número, não é? Você escolheu 7.
Linha 225	E13: Sim.
Linha 226	P: Aí, (para achar) o consecutivo você está partindo do 7 e vendo o próximo. Como você descobre o próximo número? Você começou do 7. Como você sabe que o 8 é o próximo?
Linha 227	E13: Porque ele é consecutivo.
Linha 228	P: Tá. E para achar o consecutivo, qual operação que você está fazendo “de cabeça”?
Linha 229	E13: Soma.
Linha 230	P: Soma de...?
Linha 231	E13: Soma de 1.
Linha 232	P: 1. Então sempre está aumentando 1, não é?
Linha 233	E13: Aham.
Linha 234	P: Então, que tal se você fizer isso com o x ? Vamos supor que eu começo com um x . Esse x é um número, não é?
Linha 235	E13: Tá.
Linha 236	P: Qual é o próximo número do x ?
Linha 237	E13: Seria x mais 1.
Linha 238	P: Isso. x mais 1. E o próximo?
Linha 239	E13: É x mais 2.
Linha 240	P: Isso. Então, agora eu já tenho essa informação: é $x + 1$ e $x + 2$ e o outro era x , certo?
Linha 241	E13: Sim.
Linha 242	P: Tá. Agora, como eu faço para descobrir essa fórmula genérica?
Linha 243	E13: A fórmula genérica?
Linha 244	P: Isso.
Linha 245	E13: ((silêncio)) $x + 8... + 9$. Sabe que $x + 1$ dá 8, que $x + 2$ dá 9, então pega $x - 1$ que dá $7x - 2$ que dá $7x - 2 + 9$ que dá $x... 7$.
Linha 246	P: Humn. Tá. Mas aí você já está definindo 8 e 9, não é?
Linha 247	E13: Aham.
Linha 248	P: Mas sem definir, só trabalhando com x , $x + 1$ e $x + 2$ porque ele está pedindo a soma de três números consecutivos, não é?
Linha 249	E13: Aham.
Linha 250	P: Esses números não seriam três números consecutivos? Só que (são) números que eu não sei. Pode ser qualquer número. O x pode assumir qualquer número que seja natural ou qualquer outro que seja inteiro, não é?
Linha 251	E13: Aham.
Linha 252	P: Então, qual é a operação que eu tenho que fazer agora?

Linha 253	E13: Pior que eu não lembro... ((silêncio)) O certo seria isso aqui, olha: $x + x + 1 + x + 2$, assim?
Linha 254	P: Isso. Que dá quanto?
Linha 255	E13: ((silêncio)) x mais 1... x mais 5... ((silêncio)) $3x + 1 + 2$.
Linha 256	P: Aham. Dá para simplificar mais essa conta?
Linha 257	E13: ((silêncio)) Eu tenho que por igual, não é?
Linha 258	P: Não precisa.
Linha 259	E13: Não precisa?
Linha 260	P: É, porque aqui você não tem igual, não é? Você só achou porque são números.
Linha 261	E13: Sim.
Linha 262	P: Mas aqui você não tem nenhuma igualdade. Então você trabalha com esses números mesmo.
Linha 263	E13: Então, $x + 1 + 2$. ((silêncio)). Eu acho que vai acabar parando por aí.
Linha 264	P: Não tem problema, se parar por aí. Então agora vamos ver se dá certo. Se essa fórmula que criou aqui estiver certa, então você substitui o x por algum número e tem que dar certo. Tem que dar um resultado que seja divisível por 3. Faz um teste, chute um número para x .
Linha 265	E13: Para x? 4. $3 \times 4 + 1 + 2$... Acho que não vai dar certo, não. ((silêncio)) 3×4. ((silêncio)) $12 + 1$...
Linha 266	P: $(12) + 1 + 2$, ok? Então...
Linha 267	E13: Ah! 3 dividido... ((silêncio)) 15 dividido por 3, deu 5, 0. Ah, dá certo.
Linha 268	P: Opa, parece que dá certo, não é?
Linha 269	E13: Sim.
Linha 270	P: Tente um número negativo agora.
Linha 271	E13: ((silêncio)) $3 \times (-2) + 1 + 2$. $3 \times (-2)$ igual a... -6. $+ 1 + 2 - 3$. -3 dividido por 3, então (resto) 0.
Linha 272	P: Deu certo também.
Linha 273	E13: Deu certo.
Linha 274	P: Então parece que essa é a fórmula, não é? E13: É.
Linha 275	P: Então você achou a fórmula. A única coisa que você simplificaria seria isso, olha: aqui, $1 + 2$ não pode ser somando?
Linha 276	E13: Pode. Ah, tem x mais 3.
Linha 277	P: Isso. Então vai ficar...?
Linha 278	E13: $3x$... mais 3.
Linha 279	P: Isso. Aí você achou a fórmula para achar qualquer número consecutivo inteiro que seja divisível por 3.
Linha 280	E13: É assim?
Linha 281	P: É assim.
Linha 282	E13: Nossa. Legal.
Linha 283	P: Bacana, não é?
Linha 284	E13: Aham.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO J

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 3

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E3: ESTUDANTE 3

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom, então, você que resolveu essas atividades, o que achou comparadas com as que fez no ano passado?
Linha 2	E3: Humn... mais fácil... Eu acredito... que esteja certo....
Linha 3	P: Ok. O que você achou mais fácil nessa atividade?
Linha 4	E3: A parte... prática... Porque... passar o que eu estou pensando... pro papel... é meio complicado.
Linha 5	P: Aham.
Linha 6	E3: É mais fácil você resolver na sua cabeça... Eu... entendo, mas aí explicar o que eu entendo...
Linha 7	P: ...é mais difícil.
Linha 8	E3: É.
Linha 9	P: Tá. E..., por exemplo, nessa primeira atividade aqui, o que você entendeu? O que ele está falando nessa primeira atividade? O que era para fazer? Fale um pouquinho para mim.
Linha 10	E3: Era para...resolver uma expressão...
Linha 11	P: Aham. E... era só isso? Ele só pede para resolver a expressão e é isso?
Linha 12	E3: Não, ele mostra três jeitos de fazer... E eu particularmente achei mais fácil o segundo, que é multiplicando... $(a + b) \times (a + b)$. Porque... tem uma fórmula... do... quadrado da soma de dois termos... que é: o quadrado do primeiro, somado ao dobro da multiplicação do primeiro e o segundo termo, somado ao quadrado do segundo termo. Porém, para aplicar isso... Eu... nunca consegui. Então, eu acho mais fácil multiplicar $(a + b) \times (a + b)$.
Linha 13	P: Certo... E nessa parte aqui, quando você faz essa multiplicação, percebeu que aparecem dois termos que são iguais?
Linha 14	E3: Sim, sempre tem um igual.
Linha 15	P: Aham.
Linha 16	E3: Porque quando você multiplica $a \times a$, $a \times b$, depois... quando você for fazer a segunda parte da soma... é a mesma coisa. Então... se repete.
Linha 17	P: Certo. Por exemplo, esse ab e o ba são iguais?
Linha 18	E3: Sim.
Linha 19	P: Por quê?
Linha 20	E3: Ué? Porque... não altera... É como está escrito...
Linha 21	P: Humn... Mas por que ele não altera?
Linha 22	E3: ... ab e ba... acredito que seja a mesma coisa, como diz o exemplo três: 2×3 é 6, 3×2 é igual a 6, não altera a ordem.
Linha 23	P: Certo. Então ab e ba está fazendo algum tipo de operação? Que tipo de operação que ele faz para que ele não mu....
Linha 24	E3: Multiplica... multiplicação.
Linha 25	P: Multiplicação, legal. Por exemplo, se fosse um número... 23. Se você tivesse escrito 23 e depois escreve 32, eles são a mesma coisa?

Linha 26	E3: ((Silêncio)) Como assim? (rs)
Linha 27	P: O número, por exemplo, vamos supor que a é 2 e o b seja 3. Daí, você coloca um do lado do outro...
Linha 28	E3: Ah! Sim, aí seria diferente! Mas... quando... tem... duas letras... ou uma letra e um número, ele não tá sozinho... tem um sinal imaginário (rs).
Linha 29	P: Isso.
Linha 30	E3: ...entre eles.
Linha 31	P: Ok, que é a multiplicação no caso?
Linha 32	E3: É, a multiplicação.
Linha 33	P: OK, e o que você achou desse terceiro exemplo, que é uma explicação geométrica para essa fórmula?
Linha 34	E3: ((Silêncio)). Eu entendi, mas... é... por exemplo, eu tenho... uma amiga e ela não é muito boa em geometria. Então, eu acho que isso aí só ia confundir mais.
Linha 35	P: Ah é?
Linha 36	E3: Aham.
Linha 37	P: Humn... E você acha que essa fórmula se chama "quadrado" por acaso? Aqui ele está expressando porque se chama quadrado...
Linha 38	E3: ... Eu entendi, faz sentido, porque se um la..., no quadrado, tem os 4 lados e os 4 são iguais. E, como você eleva um número ao quadrado, é um... é ele vezes ele mesmo. Um lado do quadrado vezes o mesmo.
Linha 39	P: Aham. E você falou que tem uma amiga que tem dificuldade em geometria, mas você tem dificuldade em geometria?
Linha 40	E3: ((hesitação)) Sim.
Linha 41	P: Sim? Qual parte da geometria você tem dificuldade?
Linha 42	E3: Acho que é mais humn... quando envolve triângulo...
Linha 43	P: Humn... Por exemplo? Você consegue me dar um exemplo?
Linha 44	E3: ((Pensa um pouco)) Tales... O teorema de Tales eu... ((Silêncio)). Só dei... ((pausa)) É... o professor passou uma explicação bem... rasa...
Linha 45	P: Humn.
Linha 46	E3: ...então eu não consegui entender... bem o que era pra fazer....
Linha 47	P: Entendi... E (seria) só (o Teorema de) Tales ou, por exemplo, cálculo de áreas... essas coisas... Você consegue (resolver)?
Linha 48	E3: É... o básico sim. Agora, quando se coloca, por exemplo, 3... raiz quadrada de... de outro número aí já complica um pouquinho...
Linha 49	P: Humn... Entendi... Então, dependendo do número...
Linha 50	E3: ... É.
Linha 51	P: ...pode ficar mais difícil de calcular? Entendi... Por exemplo, aqui, você viu que o cálculo é de uma área, não é? De um retângulo?
Linha 52	E3: Humn.
Linha 53	P: Você conseguiu perceber isso?
Linha 54	E3: ((Silêncio)) Aqui, um retângulo?
Linha 55	P: É. Aqui, dentro desse quadrado tem os retângulos, certo?
Linha 56	E3: 2 quadrados...
Linha 57	P: Aham.
Linha 58	E3: ...e dois retângulos.
Linha 59	P: Isso, não é?
Linha 60	E3: Certo.
Linha 61	P: Daí... Como se forma? Com a soma de todas essas áreas? Essas pequenas áreas coloridas...
Linha 62	E3: ...forma a área total.
Linha 63	P: Isso, que é o do quadrado, certo?
Linha 64	E3: Tá. Aham.
Linha 65	P: Que aí você conseguiu ver que dá o a ao quadrado mais b ao quadrado mais $2ab$, não é?
Linha 66	E3: Sim.
Linha 67	P: Tá. Agora vamos ver. Então, como você já tinha me explicado anteriormente, você preferiu a segunda forma.
Linha 68	E3: Sim.

Linha 69	P: Para fazer isso, não é? Tá... E aí você fez a distributiva, aplicou e depois somou os termos semelhantes, certo?
Linha 70	E3: Certo.
Linha 71	P: Aham. E você acha que está tudo certinho?
Linha 72	E3: Acredito que sim (rs).
Linha 73	P: É? Vamos ver: a primeira parece que está certa, a segunda também... Ok... E o que você achou da letra c dessa atividade?
Linha 74	E3: Humpf... ((Silêncio)) É igual as outras.
Linha 75	P: Aham... é completamente igual?
Linha 76	E3: Não... ((hesitação))
Linha 77	P: O que é que tem de diferente?
Linha 78	E3: Nos outros o... o número. Esse estava sozinho, e aí no último é... $5x + 5y$. Então tem... duas incógnitas...
Linha 79	P: Aham... Sim... E como você soube que esse $5x$ é o termo a ? No caso, se fosse uma fórmula genérica.
Linha 80	E3: ((Silêncio e depois muxoxa)) Ah... Intuição...
Linha 81	P: Tá. Aqui você já considerou o termo inteiro porque muitos alunos costumam confundir quando tem um número na frente do x . Eles acabam aplicando só no x , por exemplo. Aí aplica-se só o x ao quadrado...
Linha 82	E3: ... Não... mas o x está junto do 5.
Linha 83	P: É.
Linha 84	E3: Se fosse $5 + x + y$...
Linha 85	P: Pois é... Então tem essas dúvidas, não é? Mas aqui deu para ver que essa parte da aplicação da distributiva você domina bem. Então, vamos para a próxima atividade. ((Silêncio)) Na outra atividade, levando em consideração um dos exemplos, você precisa explicar se a soma dos quadrados é o mesmo que $(a + b)^2$. O que você acha?
Linha 86	E3: Não.
Linha 87	P: Por que não?
Linha 88	E3: Ahn... $a + b$ ao quadrado, como eu falei, está multiplicando o conjunto $(a + b)$. É $(a + b) \times (a + b)$. E $a^2 + b^2$ é só a ao quadrado + b (ao) quadrado, não tenho multiplicação de $a \times a \times b$.
Linha 89	P: Humn... certo. Então, O que está faltando aí? Tem alguma coisa faltando em um dos dois?
Linha 90	E3: Ah sim, humn... aqui, não tem... parênteses.
Linha 91	P: Só os parênteses?
Linha 92	E3: Quando o... quadrado está fora do parênteses, ele está multiplicando tudo que está dentro. Como aqui não tem, está multiplicando só... esse... termo.
Linha 93	P: Aham. Mas quando eu desenvolvo esse $a + b$ que está nos parênteses ao quadrado, não tem uma parte que fica bem parecido com o a ao quadrado + b ao quadrado?
Linha 94	E3: Fica mas... falta o meio...
Linha 95	P: Humn... Falta o meio... Tá... e por que será que acontece isso?
Linha 96	E3: ((Silêncio)) Ué? Aqui tá multiplicando... ((Silêncio))... esse vezes esse, esse vezes esse, esse vezes esse e esse vezes esse. E esse só está...
Linha 97	P: Aham.
Linha 98	E3: ...elevando ao quadrado do primeiro... Não tem multiplicação...
Linha 99	P: Certo.
Linha 100	E3: Então não tem como extrair um outro termo...
Linha 101	P: Aham... Agora, se a gente pensar assim: vamos supor que esse a e b sejam números, tá?
Linha 102	E3: Certo.
Linha 103	P: Você pode pensar em algum número. Qual dá o resultado maior? O $a + b$ elevado ao quadrado? ou a ao quadrado + b ao quadrado?
Linha 104	E3: ((Silêncio)) Imaginado que... o a seja 2 e o... b seja 16. Dá 4... oh! dá... o b é 4. Aí fica 16 e os dois ficam 4, então dá 20. O a ao quadrado + b ao quadrado. Agora... se for o mesmo... 2 + 4 ficaria 6. Só que, como não tem... letra, aí a gente somaria aqui dentro mesmo e depois elevaria ao quadrado. Então ficaria o 2 + 4... 6. 6 elevado ao quadrado é 12 e nesse aqui deu 20. Então esse aqui é maior!
Linha 105	P: Aham... 6 elevado ao quadrado é...

Linha 106	E3: Ah não! $6 \times 6 = 36$.
Linha 107	P: Ah... ((admiração positiva))
Linha 108	E3: Ah! Esse aqui é maior.
Linha 109	P: Ok. É isso. Então, agora vamos para a atividade 3. Ele fala assim: o número quadrado é aquele que resulta da multiplicação da medida dos dois lados de um quadrado. ((Silêncio)) Certo?
Linha 110	E3: Aham.
Linha 111	P: E qual a principal característica sobre os lados de um quadrado? Você falou...
Linha 112	E3: ...que são iguais.
Linha 113	P: São iguais. E como elas são iguais, isso significa que qualquer um dos lados são iguais. Então (se) ele tem quatro lados...
Linha 114	E3: ... Sim.
Linha 115	P: ...então você pega qualquer um deles...
Linha 116	E3: ...todos os lados são iguais. De um quadrado.
Linha 117	P: Isso. Se você multiplicar entre eles, sempre vai gerar um número ao quadrado. É daí que vem esse número quadrado. Não se chama quadrado à toa.
Linha 118	E3: Aham.
Linha 119	P: ...É porque ele está representado geometricamente no quadrado.
Linha 120	E3: Tá.
Linha 121	P: Tá? Ai você me deu três exemplos diferentes aqui, não é?
Linha 122	E3: Aham.
Linha 123	P: Um quadrado de 1 metro e outro de 2 metros e de 3 metros. Por que você desenhou?
Linha 124	E3: ((Silêncio)) Por que eu desenhei? ((intrigada))
Linha 125	P: Aham.
Linha 126	E3: Humn... está... pedindo para desenhar... (rs)
Linha 127	P: Aham. Mas por que você desenhou dessa forma?
Linha 128	E3: ((Silêncio)) Bom... quando alguém passa um exercício... na lousa, por exemplo, ele... faz um quadrado e coloca que tem 10 metros. ((Silêncio)) Um lado.
Linha 129	P: Aham.
Linha 130	E3: Obviamente, você desenhando o quadrado, na lousa ou num caderno, não tem 10 metros. É... o desenho, é... figurativo.
Linha 131	P: Humn... certo... Então, não importa...
Linha 132	E3: ...não importa o tamanho que eu desenhei. Importa (o valor da) medida que eu coloquei. Por exemplo, esse aqui eu coloquei... ((pausa)) O de 2 e 3 metros têm uma pequena diferença... de tamanho.
Linha 133	P: Aham.
Linha 134	E3: O de 1 metro é um pouquinho menor... que o de 2, (que é) um pouco... maior... que o de 3, em relação ao segundo. Mas isso não significa que ele tenha 1 metro e que o outro tenha 2 metros, eu poderia colocar a medida que eu quisesse.
Linha 135	P: Certo... porque é só uma representação então?
Linha 136	E3: Sim.
Linha 137	P: Ok. E Agora você deu três exemplos de números quadrados, não é? Perfeito... Então você elevou 2 ao quadrado $2 \times 2 = 4$, 3 ao quadrado... Então você já sabe que, nos quadrados, é sempre a multiplicação...
Linha 138	E3: ... Sim.
Linha 139	P: ...de 2 números. Então, aqui não tem problema. Muita gente confunde fazendo 2×2 aqui, não é? Ou 3×2 . Este é um erro comum, mas vejo que, para você, isso não é um problema. Então, vamos para a atividade 4, que é um sistema métrico decimal. O que você achou dessa atividade?
Linha 140	E3: ((Silêncio)) Ah.. eu... ((pausa)) nunca tive dificuldade em soma.
Linha 141	P: Aham.
Linha 142	E3: Então eu sempre entendi que não dava para... assim baixar o 1... porque, se não, aumentaria... uma casa.
Linha 143	P: Certo. Porque lembra que quando você está lá no Ensino Fundamental I, eles sempre falam: "Sobe..."
Linha 144	E3: ...sobe 1, sobe 2, sobe 3...
Linha 145	P: Mas porque esse "sobe 1(um)"?

Linha 146	E3: ((Silêncio, tenta falar alguma coisa, mas pausa e respira profundamente)) É difícil de explicar...
Linha 147	P: Aham.
Linha 148	E3: Eu não sei fazer...
Linha 149	P: Pode tentar explicar da (sua) forma assim... Eu vejo que você fez um esquema aqui, não é? Falando que não pode ficar 2 números aqui em baixo...
Linha 150	E3: É, porque aqui (é) dezena e passa para centena.
Linha 151	P: Certo... senão, ficaria 312 o resultado, não é? Se você colocasse o 1 do lado...
Linha 152	E3: Sim.
Linha 153	P: ...tá, então, por isso, tem que subir 1. Mas é justamente isso?
Linha 154	E3: ...Isso é o que você quer que eu explique.
Linha 155	P: É... Por que a gente usa essa notação? É porque o nosso sistema, normalmente, é dividido em dezenas. Certo?
Linha 156	E3: Sim.
Linha 157	P: ...que é 10 em 10. Mas, por exemplo, se fosse dividido de 20 em 20 aí seria um outro sistema. Você não subiria o 1, mas a cada 20. Então, toda vez que você tiver até 20, você poderia colocar do lado. ((Pausa)) Por exemplo, seria um outro sistema de soma e isso funciona para a regra de agrupar de 10 em 10, por isso que a gente divide as casas em unidades, dezenas, centenas, milhar...
Linha 158	E3: Sim.
Linha 159	P: E é por isso que a gente faz esse algoritmo. Vamos supor que a gente não soubesse armar essa conta. Como que você faria essa conta de soma sem armar?
Linha 160	E3: ((Respira fundo)) É que $39 + 3$ é um número pequeno, então dá para resolver de cabeça.
Linha 161	P: Isso.
Linha 162	E3: Mas, se fosse um número maior... ((Silêncio))
Linha 163	P: Por exemplo, se fosse $143 + 521$.
Linha 164	E3: Humn... ((Silêncio)) Não pode usar calculadora, não é? (rs)
Linha 165	P: Não... Você pode até rabiscar, desde que a regra seja não armar a conta. ((Pausa)) Como você faria essa conta? Se você quisesse até anotar para fazer...
Linha 166	E3: Tá bom. Qual é o número?
Linha 167	P: $143 + 521$. ((pausa)) Sem armar!
Linha 168	E3: ((Silêncio)) Sem armar... do tipo... sem subir?
Linha 169	P: Isso, sem fazer essa armação, sem esse dispositivo.
Linha 170	E3: Ah tá.
Linha 171	P: Tem que estar na horizontal, que nem (quando) você bate na calculadora: $143 + \dots$
Linha 172	E3: ...+ 521.
Linha 173	P: Isso.
Linha 174	E3: ((Silêncio)) Não pode fazer assim?
Linha 175	P: Humn... Isso pode.
Linha 176	E3: Tá. ((Silêncio)) Deu errado... (rs)
Linha 177	P: ((Silêncio)) Deu errado?
Linha 178	E3: Aham. ((Silêncio))
Linha 179	P: Quanto deu aí?
Linha 180	E3: 666.
Linha 181	P: Humn.
Linha 182	E3: Humn... ((Silêncio))
Linha 183	P: O que está errado?
Linha 184	E3: ((Silêncio)) Porque aqui já daria 4...
Linha 185	P: Aham.
Linha 186	E3: ... e não 5... ((Silêncio)) Deixe-me ver aqui o que está errado... ((murmurando)): "1 deu 5, 4, deu 2 e 3... desse jeito não deu..." ((silêncio e depois começa a cantarolar baixinho: "hum... hum... hum... hum"))).
Linha 187	P: Confere a conta armando... Quanto dá?
Linha 188	E3: ((confere a conta em silêncio))
Linha 189	P: Certo. Então só está (errado) por uma unidade. O que você errou aí?
Linha 190	E3: Ah... multipliquei aqui... ah tá... ((pausa)) Deu certo sim.
Linha 191	P: Deu certo. Beleza, mas também você deu sorte, não é? Eu peguei uns números que...

Linha 192	E3: ... que não...
Linha 193	P: ...que não sobe a casa, não é? Então vamos supor $148 + 523$.
Linha 194	E3: Certo. ((silêncio e murmura)): O mesmo não é? 6... 6 ... ((Silêncio)) e aqui daria 11... Se eu subisse aqui... que deu 11 e eu passasse esse para cá...
Linha 195	P: Perfeito. Certinho. É isso aí. Então você entendeu, não é? Por isso que a gente arma a conta e faz o " <i>sobe 1</i> ". Que, na verdade, está subindo uma casa da dezena. Perfeito. Agora, por último, esse aqui é dos números consecutivos. O que você achou dessa atividade?
Linha 196	E3: ((Silêncio)) Eu... não sabia que... qualquer soma consecutiva dividido por três daria... exato.
Linha 197	P: Humn...
Linha 198	E3: Foi... acho que mais uma curiosidade. Por que... para que eu vou usar isso?
Linha 199	P: É que você fez com alguns números, não é? Se você tentasse generalizar, por exemplo, $x...$, $2x...$
Linha 200	E3: Humn.
Linha 201	P: Você conseguiria fazer isso? ((pausa)) Em Matemática, a gente costuma provar com números genéricos, não é? Então, se vale para alguns exemplos, então, teria uma fórmula que generaliza essa regra.
Linha 202	E3: Sim.
Linha 203	P: Como você tentaria provar com o x ? Usando um número que eu não sei...
Linha 204	E3: $x...$ mas... não pode colocar... tipo... $+ 2x + 3x$?
Linha 205	P: Poder até pode. Só que, se esse x está referenciado ao mesmo x , não é? Aqui $2x$ significa "o dobro" (do número desconhecido).
Linha 206	E3: ((hesita um pouco e responde)) Eh... sim.
Linha 207	P: Então, aqui você está falando matematicamente...
Linha 208	E3: ... Mas olha: se esse x aqui for $1 + ...$ ((Silêncio)). Dá a mesma coisa!
Linha 209	P: Humn... entendi. Isso, mas aqui você está definindo se o x tiver um número, certo?
Linha 210	E3: Certo.
Linha 211	P: Agora, será que vale para qualquer número? Aqui para 1 parece que ele vale para os números consecutivos, mas será que para outro número também vale?
Linha 212	E3: ((Silêncio)) Acho que sim...
Linha 213	P: Vamos testar.
Linha 214	E3: 2 ... ((Silêncio)).
Linha 215	P: 2, 4 e 6 são números consecutivos?
Linha 216	E3: ((Silêncio)). Depende... Se eu quisesse uma ordem...
Linha 217	P: O que significa consecutivo? É um...
Linha 218	E3: ... um atrás do outro.
Linha 219	P: Não é?
Linha 220	E3: Mas aqui, por exemplo, não está um atrás do outro... Tem um número no meio...
Linha 221	P: Humn.
Linha 222	E3: Isso é uma sequência.
Linha 223	P: Aham.
Linha 224	E3: Não é uma sequência... consecutiva, porque tem uma aqui no meio, mas é uma sequência.
Linha 225	P: Aham.
Linha 226	E3: E aqui, são aqueles que vêm de uma sequência. Isso aqui é uma sequência, isso aqui é uma sequência... É uma sequência de números... pares.
Linha 227	P: Aham. Isso. Se for esta condição: números pares. Se você pensar em uma sequência genérica, aí estaria certo.
Linha 228	E3: Mas é sequência só de... "um atrás do outro"?
Linha 229	P: Isso.
Linha 230	E3: Mas não daria?
Linha 231	P: Não sei...
Linha 232	E3: Porque aqui dá 12. 12 dividido por 3, quatro!
Linha 233	P: Sim... mas será que vale para todos?
Linha 234	E3: ((Silêncio)) Humn... 3, 6 e 9, também é uma sequência!
Linha 235	P: Aham.
Linha 236	E3: ((Silêncio)) É para... responder?

Linha 237	P: Aham. Dá...
Linha 238	E3: 18 e... ((sussura bem baixo)) ... dá 16...
Linha 239	P: Certo.
Linha 240	E3: Que dá... Aí não dá.
Linha 241	P: ((Silêncio)) Dá quanto?
Linha 242	E3: ((Silêncio)) 6×3 é 9.. 7×3 é 21! ((Silêncio)) Tem coisa errada! (rs) Tá... espera...
Linha 243	P: O 3×7 estava certo. É 21.
Linha 244	E3: É... mas... 6, 12, 18... 6×2... 6×3... 6×4... Então, é 4, não é?
Linha 245	P: Aham.
Linha 246	E3: ((Silêncio)) Não... espera... 6×4, vinte e quatro.
Linha 247	P: Aham.
Linha 248	E3: Mais... 6... ((Silêncio)) 2!
Linha 249	P: Não, não. Você dividiu por três.
Linha 250	E3: Putz... (risos) Estava confundindo um pouco...
Linha 251	P: (risos) Não, não tem problema! Mas você está certa. Aí valeu para suas...
Linha 252	E3: ((aluna murmura algo, inaudível))
Linha 253	P: Isso. Supondo que o x seja um número... natural. Supondo que esse x seja um número inteiro, por exemplo, um número negativo. Será que vai valer também a regra?
Linha 254	E3: ((Respira fundo)) Humn... ((Silêncio)) ... é isso mesmo? e... 2... ((Silêncio)). E aí... eu poderia dividir... por um número negativo também?
Linha 255	P: É... O número negativo quando é dividido por um positivo vira negativo, não é?
Linha 256	E3: Aham.
Linha 257	P: Mas... esse não é o problema. O problema seria se o número é um número inteiro ou não.
Linha 258	E3: Tá, não deu.
Linha 259	P: Não deu!
Linha 260	E3: Não precisa apagar, não é?
Linha 261	P: Não, não precisa, pode deixar.
Linha 262	E3: Tá, então esse aqui não dá.
Linha 263	P: Esse aí só dá para qual condição?
Linha 264	E3: In...teiro...
Linha 265	P: Isso. É um número natural, na verdade não é?
Linha 266	E3: Natural! Inteiro é quando tem positivo e negativo.
Linha 267	P: Isso.
Linha 268	E3: ((Silêncio))
Linha 269	P: Então deve ter alguma outra fórmula que você pode representar números consecutivos, que valha para mais casos, então.
Linha 270	E3: Humn...
Linha 271	P: Porque aqui, algebricamente, você está falando que o número mais o dobro mais o triplo está dando... uma sequência, não é?
Linha 272	E3: Então... o dos números naturais está certo.
Linha 273	P: Isso, natural está certo.
Linha 274	E3: Tá... então...
Linha 275	P: Porque aqui ele quer números consecutivos inteiros, ele não quer só os naturais, ele quer os inteiros. Então, isso significa que se eu substituir por um número inteiro. Ele também tem que valer.
Linha 276	E3: ((Silêncio)) Essa sequência... também é de... também não é consecutiva? Mas...
Linha 277	P: Aí você está colocando $x + x$ ao quadrado + x ao cubo?
Linha 278	E3: Aham. Mas aí... ((Silêncio)) É! Porque se você for assim... com o número negativo, por exemplo, quando ele está $a + a$ ao quadrado, se fosse fazer "ao cubo" já... iria continuar negativo...
Linha 279	P: Aham.
Linha 280	E3: ((Silêncio)) Mas... nesse caso aqui... ficaria $2 + 4$, seis, + (-6). Que vai dar zero... TAMBÉM ESTÁ ERRADO! Então "ao quadrado" não dá... Não é que não dá, mas ficaria a mesma coisa do que... o natural... ((Silêncio))
Linha 281	P: Vamos fazer o seguinte: vamos parar por aqui e a gente retoma só essa atividade depois, pode ser?

--- Retomada ---

Linha 282	P: Bom, Na semana passada, a gente tinha trabalhado com essa atividade, não é? Que vai até (a) número 5. E nós tínhamos conversado da atividade 1 até 4, não é? E nós paramos na 5. Bom, você lembra o que a gente estava trabalhando nessa atividade 5?
Linha 283	E3: Sim.
Linha 284	P: O que era exatamente? Fale um pouquinho da atividade.
Linha 285	E3: Bom, era uma sequência que... você somava três números em sequência
Linha 286	P: Aham.
Linha 287	E3: ...que... dividido por 3, dava um número exato.
Linha 288	P: Isso.
Linha 289	E3: ... (que é) sempre divisível por 3.
Linha 290	P: Aí você tinha verificado que realmente acontece isso.
Linha 291	E3: Sim.
Linha 292	P: Só que ele pede para provar que a soma de três números consecutivos inteiros, ou seja, o que são números inteiros?
Linha 293	E3: ((Silêncio)) Ué? 1, 2...
Linha 294	P: Sim, porque os naturais são todos os positivos, não é? Por exemplo, 1, 2, 3, 4... infinito, não é?
Linha 295	E3: Aham.
Linha 296	P: E os inteiros são aqueles que têm os negativos também. Então, -1, -2, -3... mas sempre são números "redondos", digamos assim. Então, a gente tinha que achar uma forma genérica para provar que isso está certo. Porque, com números, a gente já verificou que isso está certo. Como a gente consegue provar colocando uma fórmula? Usando um x , por exemplo... É aí que a gente tinha parado, não é?
Linha 297	E3: É.
Linha 298	P: Bom, você tinha começado com x , $2x$, $3x$... certo? E tinha verificado que alguns dão certo...
Linha 299	E3: ... funciona, mas só nos números naturais.
Linha 300	P: Isso. Só que agora a gente tem que ver como faz para funcionar com os números inteiros também, tá? Então vamos lá. Vamos retomar isso aqui.
Linha 301	E3: ((Silêncio e som de reorganizar as anotações)) Tá... Eu tentei com $x + 2x + 3x$...
Linha 302	P: Aham.
Linha 303	E3: $x + x^2 + x^3$
Linha 304	P: Aham.
Linha 305	E3: ... que também não dá...
Linha 306	P: Aham.
Linha 307	E3: Humn... ((Silêncio))
Linha 308	P: Se você pensar na sequência. Por exemplo, se você quer falar que um número é sequencial, ele sempre segue uma lógica, não é? Por exemplo, 2, 4 e 6 é uma sequência... Só que é uma sequência de números pares, por exemplo.
Linha 309	E3: Sim.
Linha 310	P: Agora, se fosse uma sequência de números, um atrás do outro mesmo, de números naturais, seria 1, 2, 3 ou 10, 11, 12... Então, de acordo com essa característica que você precisa montar esse x .
Linha 311	E3: De 1, 2, 3, não é?
Linha 312	P: Isso... por exemplo.
Linha 313	E3: Então... Um número acrescentado mais um... sempre... Então...
Linha 314	P: Isso...
Linha 315	E3: ... x... ((Silêncio)) + ...
Linha 316	P: $x + 1$, aham.
Linha 317	E3: ((Silêncio)) Eu não sei se... Porque esse.... ((Silêncio)).
Linha 318	P: Aham.
Linha 319	E3: Tá... mas eu não sei se isso funcionaria para todos os números...
Linha 320	P: Vamos testar! Bom, você escreveu então x , $x + 1 + x + 2$, certo?

Linha 321	E3: Certo. Colocando que o x vale 1, ou (seja), 1, $1 + 1$, dois, $1 + 2$, dá certinho: 1, 2 e 3...
Linha 322	P: Aham... Agora tente usar um número inteiro então.
Linha 323	E3: Se 2... Se x fosse 2... mais... 3 mais 4 ... É uma sequência.
Linha 324	P: Aham.
Linha 325	E3: ... $3 + 4$... $3 + 2$... 3, 4, 5! É... acho que deu certo!
Linha 326	P: Isso, com os naturais deu certo. Use um número inteiro agora. O que é um número inteiro mesmo?
Linha 327	E3: Tanto natural... ops, tanto positivo quanto negativo.
Linha 328	P: Isso.
Linha 329	E3: Então... $-2 + \dots -2 + 1 \dots + (-2) + 2$.
Linha 330	P: Aham.
Linha 331	E3: Dá... $-2 + (-1) + 0$.
Linha 332	P: Deu certo?
Linha 333	E3: Deu. Porque se você for... Eu não lembro o nome disso aqui...
Linha 334	P: É a reta numérica?
Linha 335	E3: Isso! É só isso mesmo? Eu pensei que tinha um nome difícil... Do zero para à direita é 1, 2, 3, 4. Do zero para à esquerda (é) -1 e -2...
Linha 336	P: Ok.
Linha 337	E3: zero, -1 e -2!
Linha 338	P: Aham. Certinho. Então ele está numa sequência negativa ou decrescente, não é? Porque ele está indo do menor para o maior também.
Linha 339	E3: Então é isso.
Linha 340	P: Então descobrimos: é $x + x + 1 + x + 2$, certo?
Linha 341	E3: ((Silêncio)) Isso funcionaria nessa sequência também? Que não seja consecutiva?
Linha 342	P: Boa pergunta! Faça um teste!
Linha 343	E3: Tá... mas aí... Teria que ser um número só...
Linha 344	P: Então, o que você descobriu aí? Então, essa fórmula aqui seria...
Linha 345	E3: ... a fórmula da soma dos números inteiros consecutivos.
Linha 346	P: Isso...
Linha 347	E3: Tá.
Linha 348	P: Se fosse, por exemplo, para número par, então, você teria que definir a sequência para pares. Qual é a sequência para pares? De quanto em quanto é a diferença de um número para o outro?
Linha 349	E3: De dois em dois!
Linha 350	P: Dois em dois. Então, você teria que escrever $x + \dots$
Linha 351	E3: ((Silêncio)) Dependendo da... sequência, não é?
Linha 352	P: Sim, vamos começar pelos pares. Aí, como que você escreveria? Se você começa com o x ...
Linha 353	E3: x... Pode usar o $2x$? Se ficasse o $x + 2x + 1$...
Linha 354	P: Aham.
Linha 355	E3: ... $+ 2$... Humn... É! $2x + 2$...
Linha 356	P: Humn... Vamos testar!
Linha 357	E3: Por 2 de novo... $2 + 2$... opa... ((Silêncio)) Humn... Não vai dar certo, porque $2x + 1$, se x for 2 fica 2×2, quatro e mais 1, cinco. E aqui é 2, então fica ímpar... Já não funcionou!
Linha 358	P: Está dando um pouco a mais aí, não é? Então acho que você está colocando alguma coisa a mais...
Linha 359	E3: ((Silêncio)) Mas... ((Silêncio))
Linha 360	P: Humn... Parece que deu certo. Será que funciona para qualquer número?
Linha 361	E3: Não tenho certeza porque foi $x + 2x + 2x + 2$
Linha 362	P: Aham.
Linha 363	E3: Isso... para uma sequência que não seja consecutiva. Então... se fosse para um outro número: $4 + \dots 2 \times 4$, oito, mais 2×4... oito $+ 2$... 10. 4, 8 e 10. Certinho. Por um outro número: 6. 6 mais 2×6, doze, mais 2, quatorze.
Linha 364	P: Mas, ele não está sequencial, não é? Você consegue sempre achar os números pares aí, não é?

Linha 365	E3: Sim...
Linha 366	P: Mas ele só não está sequencial, não é?
Linha 367	E3: É... não é uma sequência, por exemplo, de 2 em 2.
Linha 368	P: Porque aqui, por exemplo, se for o dobro teria que ser 8... 16. Não é o dobro. Se for somando o 4, também não é, porque você soma 4 aqui e ali você está somando 2.
Linha 369	E3: Aham.
Linha 370	P: Então, ele não está seguindo a mesma regra. A sequência tem que seguir a mesma regra, não é?
Linha 371	E3: Humn... ((Silêncio))
Linha 372	P: Ou pode ser, por exemplo, que nem a sequência de Fibonacci. Fibonacci tem uma outra regra: que é sempre somar o (número) anterior. Somar o próximo com o anterior, somar o atual com o anterior, atual com o anterior... Essa é a sequência dela. Então, para qualquer número, tem que ser sempre a mesma regra... E, nesse caso, aparentemente, ele não está seguindo sempre a mesma, não é?
Linha 373	E3: Sim...
Linha 374	P: Por isso que NÃO é uma sequência. Você acha os números pares...
Linha 375	E3: ... Ah, mas... ((Silêncio))
Linha 376	P: ...mas não é sequência.
Linha 377	E3: Se for... ((Silêncio)) Porque sempre o segundo... vai ser o dobro do primeiro.
Linha 378	P: Sim, e quanto ao terceiro?
Linha 379	E3: E o terceiro... vai ser... o segundo + 2!
Linha 380	P: ((risadas))
Linha 381	E3: É uma sequência! (risos)
Linha 382	P: É... humn... parcialmente, não é? Porque tem que ser sempre a mesma regra, senão, não é sequência nesse caso, não é?
Linha 383	E3: Tá bom. Então... Só que, se eu... fizer... fizer $2x + 1$, vai dar ímpar...
Linha 384	P: Humn. Sim. Então que tal se você pensar em...
Linha 385	E3: ... fosse usar...
Linha 386	P: ((completa junto com a estudante)) ...somar em vez de multiplicar?
Linha 387	E3: ((Silêncio)) Tipo, $x + 2 + x + 2 + x$?
Linha 388	P: Humn, por exemplo.
Linha 389	E3: Tá... ((Silêncio)). Só o terceiro que ficaria $2... 2 + x$ mais aqui, porque não... $2 + x... 2 + x + 1 ... 2... dá ímpar. $2 + x...$
Linha 390	P: Aham. É, não pode somar 1 porque isso dá ímpar, não é?
Linha 391	E3: Mas se somar 2 vai dar a mesma coisa que aqui...
Linha 392	P: Sim... mas aí você tinha falado alguma coisa de somar 2... Você está somando 2 aonde?
Linha 393	E3: ((Silêncio)) Ué? Com o x!
Linha 394	P: Com o x . Tá, aí como ficaria essa nova sequência?
Linha 395	E3: ((Silêncio)) $x + 2 + x$ mais aqui.
Linha 396	P: Humn. É... esse aqui é o primeiro termo ou tudo isso aqui?
Linha 397	E3: ((Silêncio)) Esse é o primeiro!
Linha 398	P: Tá, e esse aqui é o segundo?
Linha 399	E3: Isso.
Linha 400	P: Tá.
Linha 401	E3: Esse aqui.
Linha 402	P: Isso. Aí, qual seria o próximo? Lembre-se que sempre tem que aplicar a mesma regra.
Linha 403	E3: ((Silêncio)) Não pode ser 3...
Linha 404	P: Uhum, não pode ser 3.
Linha 405	E3: Não pode ser 1...
Linha 406	P: Não pode ser 1 também. Logo...
Linha 407	E3: 4...
Linha 408	P: Humn... Parece ser um bom chute.
Linha 409	E3: ((Silêncio)) Mas pode ficar muito... diferente...
Linha 410	P: Vamos testar!
Linha 411	E3: ((Silêncio)) Vou testar aqui embaixo: $2 + 2 + 2 + 4 + 2... 2 + 4 + 6... É!$
Linha 412	P: Opa! Deu certo, hein?
Linha 413	E3: Agora parece certo...

Linha 414	P: Humn...
Linha 415	E3: $4 + 4 + 2... + 4 + 4... 8, 6$ e $4... \acute{E}$, agora deu certo!
Linha 416	P: Deu certo. Ou seja, quando s\~ao n\~umeros pares, t\~em que ser: $x + x + 2, x + 4, x + 6...$ Se voc\~e quisesse fazer uma sequ\~encia maior, n\~ao \acute{e}?
Linha 417	E3: E isso funciona para os \acute{im}pares...
Linha 418	P: Isso.
Linha 419	E3: Tipo, $x + ...$ N\~ao, espera... $x, 1...$ ((Sil\~encia)).
Linha 420	P: Humn, $x + x + 3 + x + 5$, \acute{e} isso?
Linha 421	E3: ((Sil\~encia)) x fosse 3 daria... 6! Ent\~ao... se aqui for... ((Sil\~encia)).
Linha 422	P: Humn... A\acute{i} n\~os temos um problema, n\~ao \acute{e}? Porque o 3 ele vira par, n\~ao \acute{e}? Quando...
Linha 423	E3: Vira.
Linha 424	P: (...) depende do n\~umero.
Linha 425	E3: Mas 5 tamb\~em... Se x fosse 1...
Linha 426	P: Sim, 5 tamb\~em, exatamente. Ent\~ao, \acute{e} aquilo que voc\~e estava tentando fazer: multiplicac\~ao. A\acute{i} voc\~e j\~a resolve o problema.
Linha 427	E3: Ah sim...
Linha 428	P: A\acute{i} voc\~e consegue...
Linha 429	E3: ... Faz mais sentido.
Linha 430	P: (...) e garante. \acute{E}...
Linha 431	E3: Ent\~ao, acabou aqui?
Linha 432	P: Uhum, muito bom! Voc\~e foi al\~em, gostei de ver! Porque voc\~e queria ver como ficam as outras sequ\~encias, n\~ao \acute{e}?
Linha 433	E3: Aham.

((FIM DA TRANSCRI\~AO))

ANEXO K

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 20

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E20: ESTUDANTE 20

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom, vamos lá. Primeiro eu queria que você me dissesse um pouco o que você achou dessa atividade, comparada com aquela que fez no ano passado.
Linha 2	E20: Ah... mais fácil, mas eu não garanto, mesmo assim, que eu consegui resolver tudo com sucesso, mas... eu tentei, né? Não sou muito boa em matemática, nunca fui na verdade... Eu gostava antigamente, mas, hoje em dia, eu já tenho bastante dificuldade, mais do que eu já tinha.. Então...
Linha 3	P: Humn... interessante. Então você gostava de matemática e, de repente, você começou a ter dificuldade... Me conte um pouco sobre isso.
Linha 4	E20: Foi... quando eu estudava com a Ângela, parece que era bem mais fácil... Agora eu acho que, por ter mudado de série, pode ter ficado um pouco mais difícil, complicou um pouquinho... Ainda mais que os professores não ficam mais tão “em cima”...
Linha 5	P: Entendi... e o que você tem mais dificuldade dentro do que está estudando agora?
Linha 6	E20: Dificuldade mesmo... é geometria... Tenho muita dificuldade. Vamos dizer que eu não tenho muita dificuldade em álgebra e nem em equação. É questão de treinar mesmo, relembrar, porque eu esqueço as coisas (de maneira) muito fácil.
Linha 7	P: Aham.
Linha 8	E20: Se eu estudo hoje, amanhã eu já não saberia fazer.
Linha 9	P: Entendi...
Linha 10	E20: Mas... eu tento...
Linha 11	P: Entendi, e o que você achou dessa primeira atividade aqui?
Linha 12	E20: ((Silêncio)) Ah... Bom, facilitou um pouco porque eles ajudam, né? Explica bastante, mas... eu não sei se eu tinha que resolver, se eu (deveria) só fazer (a) expressão ou se eu acertei fazendo, mas... deu para entender um pouco melhor do que as antigas.
Linha 13	P: Certo... Ele te deu três exemplos de como desenvolver uma expressão algébrica...
Linha 14	E20: ... Sim.
Linha 15	P: ... como o quadrado da soma, não é? E qual você achou mais fácil de entender?
Linha 16	E20: A primeira porque eu sempre... a professora e o professor sempre ensinaram a primeira.
Linha 17	P: Aham.
Linha 18	E20: Então... deu para relembrar só um pouquinho (rs).
Linha 19	P: Tá e a primeira? o que é mesmo?
Linha 20	E20: É... Álgebra? (rs) Não... é...
Linha 21	P: Não, não, a forma. A primeira forma que ele explica.
Linha 22	E20: Ah tá! É... você faz ao quadrado de $a + b$...
Linha 23	P: Aham...
Linha 24	E20: Certo? Então... tudo vai virar ao quadrado.
Linha 25	P: Humn.
Linha 26	E20: a ao quadrado, b ao quadrado é a soma de $a + b$.
Linha 27	P: Tá...
Linha 28	E20: Também... (rs)
Linha 29	P: Tá, entendi (rs). Então você provavelmente usou essa primeira opção para resolver?

Linha 30	E20: Sim. Pelo menos eu tentei, né? (rs)
Linha 31	P: Tá. Vamos ver aqui. Você colocou ao quadrado, né? Cada um dos termos, o primeiro e o segundo, e...
Linha 32	E20: ... a soma deles.
Linha 33	P: A soma deles?
Linha 34	E20: Isso.
Linha 35	P: Tá... que aí é um c . Mas... porque a soma é um c ?
Linha 36	E20: ((Silêncio)) Porque... bom... não tinha como eu fazer 1 ao quadrado para virar um resultado... Porque 1 ao quadrado vai ser sempre igual a 1.
Linha 37	P: Certo.
Linha 38	E20: Então... não tinha muito o que fazer...
Linha 39	P: Aham... entendi. E a letra B, por exemplo? Tem aqui $3 + p$ tudo elevado ao quadrado.
Linha 40	E20: Sim.
Linha 41	P: Aí você elevou 3 ao quadrado, b ao quadrado e aqui no meio você multiplicou $9 \times b$. Porque é $9 \times b$ aqui?
Linha 42	E20: Porque... como o 3 está dentro do... parênteses, e o parênteses é ao quadrado... Eu acho que eu achei certo porque eu vou fazer 3 ao quadrado que é igual a 9.
Linha 43	P: Certo.
Linha 44	E20: E somei ele com b.
Linha 45	P: Humn... entendi. E a letra C? $5x + y$ tudo elevado ao quadrado.
Linha 46	E20: Sim... ((timidamente ri)).
Linha 47	P: Aí você respondeu $25x + 25xy + y$ ao quadrado.
Linha 48	E20: ... y ao quadrado. Bom... eu acho que o primeiro, eu acho que eu já fui resolvendo, em vez de colocar $5x$ AO QUADRADO, eu resolvi que ia ser igual a $25x$...
Linha 49	P: Ok.
Linha 50	E20: Mas também 5 ao quadrado de novo, só que, como tem duas letras, eu somei as duas...
Linha 51	P: Humn...
Linha 52	E20: (...) e ficaria xy e mais y ao quadrado.
Linha 53	P: Humn... entendi. Tá, então vamos ver. Então pensando no que você resolveu aqui, eu queria que você visse mais uma vez essa parte aqui e olhasse essa expressão. Na primeira explicação, fala assim: o $a + b$, tudo nos parênteses, elevado ao quadrado é igual a a ao quadrado mais $2 \times a \times b + b$ ao quadrado.
Linha 54	E20: Sim.
Linha 55	P: Será que, o que você fez aqui, está representando exatamente o que ele está falando?
Linha 56	E20: ((Silêncio)) É... ((hesitação)) Talvez não...
Linha 57	P: Por quê?
Linha 58	E20: ((Silêncio)) Eu acho que por ter colocado um número, em vez de letra, isso dá uma bagunçada na minha mente...
Linha 59	P: Humn... entendi...
Linha 60	E20: Porque aqui é tudo representado com letra. Aqui ele já coloca números...
Linha 61	P: Sim.
Linha 62	E20: E, pela minha mente, pelo que eu estou (vendo) em equação agora, acho que isso dá uma bagunçada assim, porque tudo na equação tem que, automaticamente, sempre resolver...
Linha 63	P: Aham.
Linha 64	E20: Então... eu acho que deu uma complicada na minha cabeça... (rs)
Linha 65	P: Certo (rs)
Linha 66	E20: Pensando bem agora. Olhando... analisando...
Linha 67	P: Tá...
Linha 68	E20: (...) alguma coisa está errada, mas eu não vou saber explicar o que está de errado...
Linha 69	P: Tá... Mas você conseguiu perceber ONDE tá errado?
Linha 70	E20: Humn... geralmente aqueles “nos meios”...
Linha 71	P: Ah... no meio! Certo...
Linha 72	E20: Sim...
Linha 73	P: Aham, está no caminho certo!
Linha 74	E20: ((risada tímida))
Linha 75	P: Tá, agora o que está errado?
Linha 76	E20: Bom... aí fala que a junção deles ao quadrado...

Linha 77	P: Aham... Então vamos ver...
Linha 78	E20: Então... será que... eu teria que ter colocado $5xy$ ao quadrado e não o resultado direto?
Linha 79	P: Humn... O que você está chamando de “quadrado”? Volte lá na fórmula do primeiro exemplo.
Linha 80	E20: Ahn... a B...
Linha 81	P: Aham.
Linha 82	E20: Para mim, é porque é a ao quadrado... (rs)
Linha 83	P: Ah! Então aqui? Acho que é aí que está a confusão. Aqui ele fala assim: a fórmula chama-se “o quadrado do primeiro termo”... Então, quem é o primeiro termo aqui?
Linha 84	E20: O a.
Linha 85	P: O a , não é? Então o “quadrado” é toda vez que você está multiplicando um número por ele mesmo.
Linha 86	E20: Aí dá o dobro...
Linha 87	P: Aí somado ao dobro da multiplicação do primeiro e do segundo termo, que é esse aqui. Então, aqui não é quadrado!
Linha 88	E20: É o dobro!
Linha 89	P: É o dobro, isso... Aí, depois, se o segundo termo é o b , então $+ b$ ao quadrado.
Linha 90	E20: Sim...
Linha 91	P: E agora? Você consegue arrumar o que fez?
Linha 92	E20: ((Silêncio)) Então... seria... o dobro... Dobro de 5 é 10...
Linha 93	P: Aham...
Linha 94	E20: Certo? Então será que eu teria que ter colocado $5xy$? Ou não?
Linha 95	P: Depende. De qual você está falando? Do c ?
Linha 96	E20: Do c.
Linha 97	P: Tá... Os outros estão certos?
Linha 98	E20: ((Silêncio)) Também não... Aqui... aqui eu teria que ter colocado... $2c$.
Linha 99	P: Isso!
Linha 100	E20: O dobro de c.
Linha 101	P: Aham. Isso!
Linha 102	E20: Aqui eu teria que ter... $6b$?
Linha 103	P: Isso!
Linha 104	E20: E aqui $10xy$.
Linha 105	P: Isso!
Linha 106	E20: Porque como tem duas letras...
Linha 107	P: Isso! Muito bem! Aí, é só terminar de desenvolver. Está certo, não é? Então, se você quiser, quer pegar o lápis para arrumar isso aqui?
Linha 108	E20: Sim. Então... eu vou copiar tudo de novo. Aqui seria 6 ao quadrado... ((murmura inaudível)) dobro de c... mais 1 ao quadrado...
Linha 109	P: Isso.
Linha 110	E20: Aí eu tenho que resolver essa expressão, no caso?
Linha 111	P: É, onde der para calcular, por exemplo, c ao quadrado é c ao quadrado!
Linha 112	E20: Sim...
Linha 113	P: Porque não tem nenhum número, então já está resolvido. (No caso do) $2c$, dá para resolver alguma coisa?
Linha 114	E20: Dobro de c vai ser igual a c.
Linha 115	P: Dobro de c ...
Linha 116	E20: ...vai ser igual... a c ao quadrado? Ou não?
Linha 117	P: Não... Na verdade, como o c você não conhece, então o dobro de c é dobro de c !
Linha 118	E20: É!
Linha 119	P: E o 1 ao quadrado?
Linha 120	E20: O 1 ao quadrado vai ser igual a 1.
Linha 121	P: Igual a 1. Então você pode colocar só 1. Não precisa nem colocar o a ao quadrado. Então, aí embaixo você colocaria como?
Linha 122	E20: ((Silêncio)) Se c ao quadrado é igual a c, então poderia excluir...
Linha 123	P: Por que você vai excluir?
Linha 124	E20: ((Silêncio)) Porque não faria sentido eu colocar... apenas... o resultado do c...
Linha 125	P: Humn...
Linha 126	E20: Porque a letra é sempre igual a 1.
Linha 127	P: Ah... Por que é sempre igual a 1?

Linha 128	E20: Bom... é o que umas professoras me ensinaram... (rs)
Linha 129	P: Humn... Depende do caso. Aqui, ele está falando que o c é uma variável, na verdade. Ele não está te falando se o c vale...
Linha 130	E20: ...alguma coisa... Sim...
Linha 131	P: Se ele estiver definido, eu não sei qual foi o contexto que os professores falaram que vale 1. Não está errado, mas, provavelmente, é dentro de um outro contexto. Não é sempre. Aqui, ele não está te falando quanto é o valor de c , então ele continua desconhecido. Você não sabe ainda qual é esse valor. Então ele vai ficar aqui. A única coisa que você vai ter que calcular é o número mesmo. Que é a constante, ou seja, 1 ao quadrado que é 1. Então, aqui, a expressão vai continuar dessa forma: c ao quadrado + $2c$...
Linha 132	E20: ...+ 1!
Linha 133	P: ...+ 1! Isso. Aí, sim, aqui você tem mais um número que você pode calcular alguma coisa.
Linha 134	E20: Então acabaria, tipo, dando uma expressão e não um resultado exato?
Linha 135	P: Isso.
Linha 136	E20: Tipo... continuando...
Linha 137	P: Isso.
Linha 138	E20: ((silêncio, escrevendo no papel)) Então... esse vai ser o resultado da... expressão?
Linha 139	P: Isso. Porque aqui não é uma equação. Se fosse uma, ele estaria “igual a tanto”. Aí, você teria que descobrir o valor de c , né? Mas, aqui, ele não está te dando uma expressão. Então, você calcula ou só desenvolve essa expressão, mas não faz mais nada além disso...
Linha 140	E20: Sim...
Linha 141	P: Certo? Vamos terminar os outros então?
Linha 142	E20: Vamos... Então... bem, primeiramente, eu vou mudar isso aqui só para não confundir muito a cabeça...
Linha 143	P: Ok.
Linha 144	E20: Não... ((silêncio, pensativa)) Então... eu preciso resolver primeiro os números?
Linha 145	P: Isso.
Linha 146	E20: Certo? ((silêncio, pensativa)) Então, vou resolver 3 ao quadrado primeiro que vai ser igual a...9! ((Silêncio)) Estou indo (no caminho) certo? (rs)
Linha 147	P: Está certo!
Linha 148	E20: (rindo) 9... Agora... que estranho... ((silêncio, pensativa)) Será que esse eu vou ter que somar?
Linha 149	P: Esse com esse?
Linha 150	E20: Sim.
Linha 151	P: $9 + 6b$?
Linha 152	E20: É.
Linha 153	P: Mas, se você fosse somá-lo... Você não iria somar aqui também?
Linha 154	E20: ((Silêncio)) É... realmente...
Linha 155	P: Porque...
Linha 156	E20: ...aqui eu não tenho o que dividir e nem o que multiplicar... Não sei... é o resultado mesmo...
Linha 157	P: Sim.
Linha 158	E20: Uma parte da expressão.
Linha 159	P: Aham. Por que você está com essa “vontade” de somar $9 + 6b$? (rs)
Linha 160	E20: Não sei... acho que... pelo histórico, desde quando a gente é pequena, não é? É sempre quando tem no... final de adição, sempre somar e dar um resultado e acabou, realmente, toda a conta.
Linha 161	P: Aham.
Linha 162	E20: Então, isso dá uma vontade sim de somar... (rs)
Linha 163	P: Parece que está incompleto, não é? (rs)
Linha 164	E20: É!
Linha 165	P: Como se fosse “não, a conta não terminou ainda!” (rs)
Linha 166	E20: Parece realmente que está incompleto, mas eu acho que esse é o resultado dessa expressão.
Linha 167	P: Está certo, ok. Vamos terminar o (item) C.
Linha 168	E20: Então aqui vai ser... ((Silêncio)) Agora... ((pausa, pensativa)) Acho que a única coisa que está errada nesse é este aqui.
Linha 169	P: É? Então vamos lá!

Linha 170	E20: ((murmurando as contas, inaudível))
Linha 171	P: Certo... Agora só um adendo...
Linha 172	E20: ... ah não! Espera! Isso aqui iria ser igual a $5x$ ao quadrado. Não o resultado...
Linha 173	P: Humn... ((observa o que o aluno escreveu)) Ah!
Linha 174	E20: Se não, não teria nada para resolver! (rs)
Linha 175	P: Isso! (rs)
Linha 176	E20: Sim... Agora... ((murmurando as contas, inaudível))
Linha 177	P: Agora?
Linha 178	E20: Agora DEU uma complicada na minha cabeça porque eu não sou boa em multiplicação! (rs)
Linha 179	P: (rs)
Linha 180	E20: Então eu sou obrigada a fazer uma continha...
Linha 181	P: Não tem problema!
Linha 182	E20: ((Murmurando as contas, inaudível))
Linha 183	P: ((observa o que a estudante escreve)) Tá...
Linha 184	E20: Eu acho que deu um número muito alto, não?
Linha 185	P: É... Mas por que você está multiplicando 25 com 25?
Linha 186	E20: Porque 25 com... Não! Espera! Eu estou confundindo tudo, DE NOVO! (rs) É 5 ao quadrado! E não 25!
Linha 187	P: Sim...
Linha 188	E20: Então isso aqui vai dar... 10...
Linha 189	P: Humn...
Linha 190	E20: Espera... Deixe-me ver agora se... ((murmura as contas, inaudível)) Tenho uma pergunta: porque... se eu mantiver o x... mesmo já tendo feito “ele” (o x) ao quadrado já? Daí, tipo assim, x ao quadrado, eu mantenho o x?
Linha 191	P: Aham.
Linha 192	E20: Não sei mais nada... (rs)
Linha 193	P: Tá bom. Então...
Linha 194	E20: ((continua murmurando as contas)) Não... espera... Pronto! Acho que essa expressão já... (rs) DEU ou NÃO o resultado? (rs)
Linha 195	P: Olha... É $5x$, não é? Aqui?
Linha 196	E20: Sim...
Linha 197	P: Por que virou 10 aqui?
Linha 198	E20: ((Silêncio))
Linha 199	P: O $5x$ não é elevado ao quadrado?
Linha 200	E20: ((hesitante)) Sim!
Linha 201	P: $5x$ AO QUADRADO não é isso aqui?
Linha 202	E20: 25 então estava certa?! ((tom de indignação))
Linha 203	P: Estava certa, mas por que você achou que é $10x$?
Linha 204	E20: É porque... ((pausa)) Humn... tem alguma... Eu tenho como explicar... ((pausa)) Por causa da adição... Da bendita adição! (rs) Porque, como eles falam... tipo, quando aparece o 2, parece que a gente sempre tem que somá-los... E não dividir ou multiplicar...
Linha 205	P: Aham.
Linha 206	E20: Eu acho que a primeira série ainda está na minha mente um pouquinho... (rs)
Linha 207	P: (rs)
Linha 208	E20: ((silêncio e depois hesitação)) Mas eu achei o valor tão alto...
Linha 209	P: Humn... Eu acho que você está confundindo o que tem que ser elevado ao quadrado. Pense assim: a letra B, você fez certinho. Você não elevou o primeiro termo ao quadrado?
Linha 210	E20: Sim...
Linha 211	P: 3 ao quadrado e você fez aqui: 3×3 que é 9.
Linha 212	E20: Não, espera, então, quer dizer que o $25x$ já é o... resultado?
Linha 213	P: É o resultado, só que aí qual é a diferença do (item) B para o (item) C? Aqui o número 3 está sozinho, né?
Linha 214	E20: Sim... Ele não está acompanhado?
Linha 215	P: Isso. O que acontece quando tem um x acompanhado? O que acontece com esse x ?
Linha 216	E20: ((silêncio e depois hesitação)) Ele não vai virar um número, né?
Linha 217	P: Não, não vai virar um número.
Linha 218	E20: Será que... eu tenho que esquecê-lo?

Linha 219	P: Humn, se você esquecê-lo, vai ficar quanto? Não precisa apagar, pode deixar.
Linha 220	E20: ((fala baixinho: vou deixar aqui só para eu não esquecer...)) ((Silêncio)) Mas... não sei... eu pensei que o x ia continuar... Porque do mesmo jeito que o (item) B continuou...
Linha 221	P: Aham.
Linha 222	E20: ...eu imaginaria que o x também continuaria acompanhado do 25...
Linha 223	P: Ele continua, ele está junto com o 5, então não pode ser abandonado.
Linha 224	E20: Eu vou tentar fazer ele (x) ao quadrado!
Linha 225	P: Isso.
Linha 226	E20: (rs) Mas não daria x de qualquer jeito...
Linha 227	P: Por quê?
Linha 228	E20: Porque... x é igual a x e ele não tem valor exato.
Linha 229	P: É... Mas $x \times x$ tem um valor, não é?
Linha 230	E20: Que é igual a 1? ((ri nervosamente))
Linha 231	P: Não... (rs) Não é 1, porque você não sabe o valor...
Linha 232	E20: ...o valor dele!
Linha 233	P: Aqui você não colocou? Por que y ? Por que y ao quadrado?
Linha 234	E20: ((Silêncio)) Porque é ele multiplicado... por ele mesmo.
Linha 235	P: E o que acontece com o x ?
Linha 236	E20: ((Silêncio)) Então vai ficar x ao quadrado!
Linha 237	P: Isso!
Linha 238	E20: Então, espera! Ficaria... ((escreve algo e mostra para a pesquisadora)) Assim? ((pausa)) Ou não? ((tom hesitante))
Linha 239	P: $25x... + x$ ao quadrado...
Linha 240	E20: ...+ x ao quadrado.
Linha 241	P: Porque você separou $x + x$ ao quadrado?
Linha 242	E20: Porque eu lembro de uma conta antiga que a professora fez e eu lembro que tinha um x ao quadrado separado... Mas eu não sei se foi esse o motivo...
Linha 243	P: Humn...
Linha 244	E20: ...que ela colocou... Porque eu não sei o que faria... Porque se eu colocasse $25x$ ao quadrado, eu teria que multiplicar de novo, será, o 25?
Linha 245	P: Humn... Então, depende... Porque, se fosse 25 aqui, aí sim, você teria que...
Linha 246	E20: ... multiplicar!
Linha 247	P: ...multiplicar o 25 e o 25.
Linha 248	E20: Ou é apenas só o resultado... de um número e de uma letra.
Linha 249	P: Humn...
Linha 250	E20: Por mais que eles estejam acompanhados, estão separados.
Linha 251	P: Humn... Tá...
Linha 252	E20: ((gagueja)) Esse... esse... pode ser o pensamento?
Linha 253	P: Pode, pode ser. Mas, eu quero que você me explique melhor isso. Pode continuar explicando.
Linha 254	E20: Porque... pense: se eles estão realmente acompanhados... o resultado teria que ser feito, ou a conta, com eles juntos.
Linha 255	P: Aham. Isso.
Linha 256	E20: Certo? Tipo, que nem o $5x... ao quadrado... Então é a junção desses números...$
Linha 257	P: Isso!
Linha 258	E20: Os números, não é? Porque é uma letra com um número...
Linha 259	P: Aham.
Linha 260	E20: Mas... Se eu separar o $x... para fazer... multiplico com ele mesmo, então, eu posso separar os dois... Ou não? ((tom hesitante)) Ou o resultado dele vai também interferir no número que eu já fiz...$
Linha 261	P: Aham...
Linha 262	E20: Entendeu?
Linha 263	P: Aham... Entendi.
Linha 264	E20: A minha mente confusa? (rs)
Linha 265	P: Não, eu entendi. Para facilitar (o esclarecimento da) a sua dúvida, o que você pode pensar é assim: aqui, você tem que pensar primeiro quem é o primeiro termo. Aqui, é só o 5 o primeiro termo? É só o x o primeiro termo? Ou é o $5x$?
Linha 266	E20: Pra mim, $5x$ é o primeiro termo...
Linha 267	P: Isso. Então isso aqui é o primeiro termo, certo? E o y , é o segundo termo, não é?

Linha 268	E20: Aham.
Linha 269	P: Então, em vez de você sair calculando, por que você não faz passo a passo como fez aqui? Por que você não aplica todo esse primeiro termo, eleva ao quadrado, mais duas vezes o primeiro, vezes o segundo...
Linha 270	E20: Você prefere que eu faça aqui do ladinho? Para deixar a conta?
Linha 271	P: Pode fazer.
Linha 272	E20: Então, vamos lá... ((murmura a conta, inaudível)) ((Silêncio)) Opa... espere aí... ((Silêncio)) É o dobro desses dois né? ((Silêncio)) Certo...
Linha 273	P: Certo.
Linha 274	E20: Eu vou... ((ri de forma a reprovar de si mesma)) ((Silêncio)) Humn... ((Silêncio)) Espera, aqui eu tinha errado, não é?
Linha 275	P: Não, aqui está certo.
Linha 276	E20: Certo, não é?
Linha 277	P: Está certinho.
Linha 278	E20: Nossa... mas... espera... porque virou 6 “do nada”?
Linha 279	P: Não, aqui, a primeira linha estava errada e depois você fez a segunda linha certa.
Linha 280	E20: Ah tá... (rs) Só para... ((hesitação)) Tem certeza?? (rs)
Linha 281	P: A segunda e a terceira linha está certinha.
Linha 282	E20: Tá bom, vai. Então, vamos continuar então. ((murmura a conta, inaudível))
Linha 283	P: Ok, só uma dúvida: esse termo do meio é 25 ou é 2 vezes 5?
Linha 284	E20: ((hesitação)) Ah! Eu esqueço que é o dobro!
Linha 285	P: É...
Linha 286	E20: Então... é o dobro...
Linha 287	P: Não, você pode deixar assim, só está faltando o sinalzinho de multiplicação, não é?
Linha 288	E20: Humn... entre eles?
Linha 289	P: É, entre o 2 e o 5. Porque é essa conta que você está fazendo no fim, não é? Que deu o x e y ...
Linha 290	E20: ((Silêncio)) Ah, sim! É que aqui continua só o que eu vou acrescentar: o dobro!
Linha 291	P: Isso!
Linha 292	E20: Sim. Nossa... achei uma conta meio confusa... Tá... eu vou deixar o 25 para depois, porque eu sei que o x vai ter que fazer ao quadrado, então...
Linha 293	P: Aham.
Linha 294	E20: Eu... ((murmura a conta, inaudível)) ((Silêncio)) Pronto!
Linha 295	P: Aham.
Linha 296	E20: Aqui já vão dizer que tem metade já, né? É... ((pausa)) Agora, o que eu não estou entendendo é: você falando x ao quadrado, então... eu... colocaria só ao quadrado só?
Linha 297	P: Isso!
Linha 298	E20: Apenas isso?
Linha 299	P: Isso!
Linha 300	E20: Então esse é o resultado?
Linha 301	P: Isso é o resultado.
Linha 302	E20: Não dá vontade de multiplicar e de dividir? (rs)
Linha 303	P: (rs) O número é muito grande, aí parece que está faltando, né?
Linha 304	E20: Sim, sim. Porque é sempre um resultado tão pequeno...
Linha 305	P: Humn, entendi...
Linha 306	E20: (rs)
Linha 307	P: Tá, a dica que eu dou nesses casos é: se você ficar na dúvida, e tiver dois números juntos, é só você colocar entre parênteses. Aqui, isso aqui.
Linha 308	E20: ((tom de compreensão)) Ahh....
Linha 309	P: Porque você vai lembrar que tem que elevar ao quadrado tanto o número, quanto a incógnita.
Linha 310	E20: Eu fazia bastante isso... Só que eu até esqueci...
Linha 311	P: É...
Linha 312	E20: A professora fazia isso para ajudar a gente...
Linha 313	P: É, tem horas que é importante. Por exemplo, aqui, o certo é você colocar entre parênteses. Porque se você terminasse a conta aqui, estaria errado. Porque estaria como se fosse só $5x$ ao quadrado e o 5 não está sendo multiplicado por 5. Né?
Linha 314	E20: Sim...
Linha 315	P: Claro que, depois, se você apresenta essa resposta aqui, a terceira linha, aí (o professor) vai falar: “Ah! Ela entendeu que tinha um parênteses aqui...”

Linha 316	E20: Sim...
Linha 317	P: Mas se você terminasse a conta aqui, já estaria errada. Se você fizesse aqui, ok está certa. Então você viu como os parênteses são importantes.
Linha 318	E20: ... são importantes... Sim...
Linha 319	P: Bom, a segunda atividade aqui. Você tem que explicar se é a mesma coisa o $a + b$, dentro dos parênteses, elevado ao quadrado que o a ao quadrado + b ao quadrado.
Linha 320	E20: ((rindo)) Você quer ler o que eu respondi ou... eu leio?
Linha 321	P: Leia para mim. Você pode ler e já me explica junto.
Linha 322	E20: ((estudante lê a sua resposta)) “Não, pois a expressão entre parênteses tem resultados diferentes. Porque a soma de $a + b$ forma resultado onde é acrescentado 2 (o dobro)”.
Linha 323	P: Aham.
Linha 324	E20: “... por exemplo, a ao quadrado mais o dobro de a e b mais b ao quadrado...” Porque, por exemplo, aqui eu acho que não teria “a soma”... Não teria... não multiplicaria a soma desses dois...
Linha 325	P: Certo.
Linha 326	E20: O dobro desses dois.
Linha 327	P: Aham.
Linha 328	E20: Aqui, no caso, só seria a ao quadrado, b ao quadrado e o resultado disso.
Linha 329	P: Aham.
Linha 330	E20: E não... como diz aqui, colocaria primeiro... faria a ao quadrado... humn... mais eles dois, o dobro deles e b ao quadrado... Por isso eu acho que... não é igual... o resultado.
Linha 331	P: Isso. Está certo, não é igual o resultado. Agora você consegue explicar qual é o maior? Qual dá o resultado maior?
Linha 332	E20: O resultado maior?
Linha 333	P: É.
Linha 334	E20: ((Silêncio)) Poxa... ((Silêncio)) eu acho que é a ao quadrado mais b ao quadrado.
Linha 335	P: Humn, por quê?
Linha 336	E20: Porque eu sei que... eles dois vão dar um resultado...
Linha 337	P: Aham.
Linha 338	E20: Que depois, esse resultado, vai ser somado novamente para dar outro resultado. Talvez... Por exemplo, aqui vai dar um... aqui vai dar um resultado...
Linha 339	P: Aham.
Linha 340	E20: E aqui vai outro.
Linha 341	P: Aham.
Linha 342	E20: Vou somá-los. $b... b...$ Não, espera! ((Silêncio)) Está faltando alguma coisa... ((começa a murmurar as contas: a ao quadrado + b ao quadrado...)) Sim! Aqui vai dar um resultado... E aqui vai dar outro...
Linha 343	P: Certo.
Linha 344	E20: Eles vão ser somados e vai dar... Espera! Então... qual é... qual é a DIFERENÇA? A única diferença é que aqui dá o dobro...
Linha 345	P: Aham.
Linha 346	E20: Então acho que pelo fato de ter número acrescentado acho que o $a + b$, entre parênteses, ao quadrado, daria um resultado maior.
Linha 347	P: Isso.
Linha 348	E20: Pelo fato deles colocarem em dobro...
Linha 349	P: Isso.
Linha 350	E20: Sim.
Linha 351	P: Então tem um termo a mais aí, né?
Linha 352	E20: É.
Linha 353	P: Isso, perfeito.
Linha 354	E20: Por isso mesmo que eu acho, pronto! (rs)
Linha 355	P: Perfeito, é isso mesmo. Tá, então agora vamos para a atividade 3. Que é a explicação do número quadrado.
Linha 356	E20: Sim.
Linha 357	P: Então você explicou qual a característica dos lados de um quadrado...
Linha 358	E20: Para mim, tem sempre... por exemplo, a parte horizontal é do mesmo tamanho e a parte vertical também é.
Linha 359	P: Aham.

Linha 360	E20: Por isso, na B, eu já fiquei indecisa se era (para) pegar o de a ou não.
Linha 361	P: Humn...
Linha 362	E20: Talvez acho que medidas diferentes podem ser... maior, menor, médio.
Linha 363	P: Aham.
Linha 364	E20: Então, eu... me... me inspirei nesse... nesse... nesse exemplo...
Linha 365	P: No exemplo 3, aham.
Linha 366	E20: Para responder o (item) B, porque eu achava que, realmente, não... não tinha como, mas tem como. Porque... até que fiquei olhando partes da sala...
Linha 367	P: Aham.
Linha 368	E20: Porque se é MUITO grande... horizontalmente... Vira um retângulo.
Linha 369	P: Aham.
Linha 370	E20: Tanto vertical, tanto horizontal...
Linha 371	P: Aham.
Linha 372	E20: Então pode virar um retângulo, mas, mesmo assim, tem tamanhos diferentes de quadrado... Por exemplo, o nosso assento é diferente do tamanho de uma borracha quadrada...
Linha 373	P: Aham.
Linha 374	E20: São medidas diferentes. Então eu acho impossível. Por isso que eu disse que... Aqui, vamos dizer que não é “realmente”... É mais a figura mesmo... é um exemplo só...
Linha 375	P: Tá, você colocou aí um quadrado de 15 metros...
Linha 376	E20: ... 15 metros, 1 metro e 5 metros...
Linha 377	P: Isso...
Linha 378	E20: É só apenas um exemplo, só para mostrar que eles são de diferentes tamanhos...
Linha 379	P: Aham. E você está falando aí que “não mede 15m de verdade”, não é?
Linha 380	E20: Sim... ((hesitante))
Linha 381	P: É só uma representação?
Linha 382	E20: ((concorda afirmando)) É, é.
Linha 383	P: Certo. Então, as características do quadrado, só para lembrar aqui, são todos os lados que têm a medida igual, certo? Então não importa se você colocou aqui a nomenclatura, em cima ou na lateral... ou aqui, certo?
Linha 384	E20: ((Silêncio)) Espera! Todos os lados são iguais? Isso que você está falando?
Linha 385	P: É. Essa é a característica do quadrado ou não?
Linha 386	E20: ((Silêncio))
Linha 387	P: Você falou, na sua explicação, que horizontalmente eles têm a mesma medida e verticalmente eles têm a mesma medida, mas, e entre eles? Entre o vertical e o horizontal? Eles têm a mesma medida?
Linha 388	E20: Entre... horizontal e vertical?
Linha 389	P: É.
Linha 390	E20: ((Silêncio)) Têm. Eu acho que sim. Acho que é uma característica muito forte do quadrado porque eu nunca vi um quadrado que em cima ele seja pequeno e dos lados maiores...
Linha 391	P: Porque se ele for assim...
Linha 392	E20: ...ele vira outro... outra forma geométrica...
Linha 393	P: Que é o...?
Linha 394	E20: ((hesitando)) Retângulo?
Linha 395	P: Retângulo! Exatamente...
Linha 396	E20: ... agora fiquei meio indecisa com esse, porque... eu tinha... eu realmente aprendi sobre o número... números quadrados. Só que... eu não tenho a mínima noção do que seja... Eu presumi que seria... isso...
Linha 397	P: Tá... Aham. Deixa eu só dar uma pausa rapidinho.

(A entrevista foi interrompida para recolher a atividade de outro aluno)

Linha 398	P: ((continuando a entrevista depois da pausa)) Bom, então qual a sua dúvida aqui?
Linha 399	E20: Números quadrados... Eu acho que, não sei por que, para mim é todo número multiplicado por 2. O resultado multiplicado por 2.
Linha 400	P: Aham.
Linha 401	E20: Eu não sei se eu estou certa...

Linha 402	P: Humn, está...
Linha 403	E20: Mas eu... a única coisa que me vem à cabeça são os resultados da... da... de todo número multiplicado por... De todo número não, né? Quero dizer, que esteja na tabuada do 2.
Linha 404	P: Aham...
Linha 405	E20: Para mim, é um número quadrado, não sei porquê... Por ser par... Não sei... Não sei explicar...
Linha 406	P: Pode ser, pode ser.
Linha 407	E20: Pode ser...
Linha 408	P: Aham. É a mesma dúvida da primeira atividade. Lembra quando eu te expliquei a diferença entre o quadrado e o dobro?
Linha 409	E20: ((hesita um pouco)) Sim... sim!
Linha 410	P: Então, aí você...
Linha 411	E20: ...será que seria o dobro isso aí? ((Pausa)) Sim, eu fiz o dobro!
Linha 412	P: Sim, você fez o dobro. Para ser o quadrado seria como?
Linha 413	E20: ((Silêncio)) Número multiplicado por ele mesmo...
Linha 414	P: Ah... então está certo. Então corrija aqui embaixo. Não precisa apagar o que você fez. Quais seriam os três exemplos de números quadrados?
Linha 415	E20: Tipo... Ahn... Vamos lá. ((pausa)) 4×4 é 16.
Linha 416	P: Aham.
Linha 417	E20: Então, um eu acertei! (rs)
Linha 418	P: Um você acertou, ok.
Linha 419	E20: Então... vou fazer aqui vai... Vou fazer de outro... um 9, por exemplo.
Linha 420	P: Isso!
Linha 421	E20: Que... é o quadrado de 3. E... deixo pensar... ((Silêncio)) 36! Que é o resultado do quadrado de 6!
Linha 422	P: OK, perfeito, 36, isso aí! Vamos fazer essa (atividade) quatro aqui. Então, aqui, é o sistema numérico decimal, né? Ela explica um pouco sobre a adição. E aí? O que você entendeu?
Linha 423	E20: Posso ser bem realista?
Linha 424	P: Pode, claro!
Linha 425	E20: Assim, eu lembro... que tinha uma conta parecida, ano passado. Eu acho...
Linha 426	P: Aham.
Linha 427	E20: E... a primeira... o primeiro número que eu pensei foi o 1.
Linha 428	P: Humn.
Linha 429	E20: Porque eu acho que o 1... ele... cada vez (que for) somado, pode formar qualquer número.
Linha 430	P: Humn...
Linha 431	E20: É um número... é o número mais acessível que tem... Se eu quero fazer o 9, posso pegar, é... “noves” 1 e...
Linha 432	P: Aham...
Linha 433	E20: (...) e formar... realmente... tipo o 9 mesmo. O resultado seria 9. Então, acho que o número mais acessível realmente é o 1. Porque... é... por ser... ele sempre somar de 1 em 1...
Linha 434	P: Humn...
Linha 435	E20: (...) e sempre ter um resultado... sabe? “A mais”, vamos dizer.
Linha 436	P: Certo. Bom, por exemplo, aqui, o que você entendeu desse “sobe 1”? Porque aí você está tentando me explicar que tem várias unidades, certo? Então, por exemplo, a cada agrupamento de 10, então, acho que você está tentando me explicar que tem vários “números 1” e um monte de agrupamento de 1...
Linha 437	E20: ...um monte de agrupamento de 1... forma talvez o resultado que eu queira.
Linha 438	P: Isso. Está mais ou menos nessa direção.
Linha 439	E20: (rs)
Linha 440	P: Agora, por exemplo, se a gente aprendeu que “armando” essa conta $39 + 3$: “Primeiro, a casa da unidade: $9 + 3$... 12”...
Linha 441	E20: Depois vem o 3...
Linha 442	P: ...“só que o 12, não pode colocar 12 aqui, sobe 1...”.
Linha 443	E20: Sim...

Linha 444	P: Aí, o que você subiu 1 tinha que somar com 3. Aí vira 42 aqui, não é? Agora, se eu não tivesse esse recurso, e tivesse que fazer a soma, como você faria?
Linha 445	E20: Se eu não tivesse esse recurso de “subir 1”??
Linha 446	P: É... esse “recurso” de montar a conta... Se você pudesse... Se você tivesse que fazer a conta, mas sem “armar” dessa forma. Sem usar esse “truque”, vamos dizer, como é que você faria uma soma?
Linha 447	E20: Quando você diz questão de “montá-lo”, assim, escrita? Ou na mente? Ou qualquer...
Linha 448	P: Você pode montar no papel, mas desde que você não use esse recurso. De montar a conta e usar esse algoritmo de: <i>“Ah! Primeiro a casa da unidade, depois a casa da dezena...”</i> . Desse jeito “montado” que a gente já sabe.
Linha 449	E20: Eu acho que faria tudo na forma... como se fosse uma expressão mesmo...
Linha 450	P: Mostra para mim como você faria.
Linha 451	E20: Por exemplo, humn... ((pausa)) Por exemplo, 39 + 3...
Linha 452	P: Aham.
Linha 453	E20: Eu saberia que daria um resultado que... eu poderia confundí-lo com 142... 412!
Linha 454	P: Aham.
Linha 455	E20: ((Pausa)) Nossa... Mas como eu iria saber que não era esse resultado?
Linha 456	P: É, por exemplo, se você não fizesse a conta, você consegue fazer essa soma sem montar a conta assim? Desse jeito?
Linha 457	E20: ((gagueja um pouco)) Dá... Ia dar 42.
Linha 458	P: Isso. Como você fez essa conta na mente?
Linha 459	E20: Eu... simples... ((pausa e hesita)) Sei lá... é automático, eu pensei...
Linha 460	P: Eu vi você contando aí...
Linha 461	E20: ...sim, eu tenho... seria uma péssima mania, mas 39 + 3... ((mostra os dedos da mão))
Linha 462	P: Aham, você foi somando, não é?
Linha 463	E20: Somando até dar o resultado 42...
Linha 464	P: Certo... Está certo, esse é um jeito de fazer a soma, não está errado. Pode fazer assim.
Linha 465	E20: Sim...
Linha 466	P: Só que você só tem 10 dedos na mão, não é? Se for mais que 10 dedos da mão como você vai fazer essa conta?
Linha 467	E20: Eu fazia isso direto. Então... eu sempre gravava quantas vezes eu já usei... as duas mãos.
Linha 468	P: Certo...
Linha 469	E20: Usei o 10, por exemplo, é... teria que ser... 30, por exemplo. Aí, eu vi que já dava 10, eu gravava na minha mente que... ou eu anotava assim, ó ((faz um risco na folha da atividade)), que já foi uma vez.
Linha 470	P: Ah... legal. Aham.
Linha 471	E20: Aí eu fazia de novo, marcava outra vez...
Linha 472	P: Aham.
Linha 473	E20: ...marcava por exemplo... 2...
Linha 474	P: Certo.
Linha 475	E20: ... fiz outra vez, marcava três e aí eu sabia quantas vezes (já) foi.
Linha 476	P: Ah... entendi. Interessante. ((aviso sonoro de término da aula)) Ainda quero retomar essa atividade com você, tudo bem? Mas como bateu o sinal, a gente vai parar por aqui, mas a gente retoma, tá bom?
Linha 477	E20: (rs) Tá bom!
(Atividade continua na próxima aula)	
Linha 478	P: Bom. Então, retomando a atividade que a gente estava fazendo na semana passada. Nós tínhamos começado essa atividade quatro, não é? A discussão era sobre o sistema numérico decimal, de como ela se divide. Você lembra um pouquinho como era?
Linha 479	E20: Lembro. É... Como eu contava antigamente, só nos dedos, sem ter que utilizar nenhuma conta.
Linha 480	P: Isso. Aí aqui tem o exemplo de uma conta armada, que tem 39 mais 3, mostrando que dá 42. E aí, ele faz uma pergunta de como usamos esse algoritmo do “sobe um”? Por que a gente usa isso? E aí você começou a explicar quando a gente encerrou a entrevista. Então (vamos) tentar retomar o que você estava pensando.
Linha 481	E20: É... Eu lembro que a gente estava... tinha parado, que... Como eu conto nos dedos, nós temos só dez dedos.

Linha 482	P: Aham.
Linha 483	E20: E aí, caso fosse um número a mais de dez, o que eu faria?
Linha 484	P: Isso.
Linha 485	E20: E eu falei que a cada... Dez... Dez números eu anotava quantas vezes...
Linha 486	P: Humn.
Linha 487	E20: ... já foram e dava um resultado que eu queria.
Linha 488	P: Isso. Aí você vai contando, de 10 em 10, não é?
Linha 489	E20: Sim.
Linha 490	P: Mas e se forem números muito grandes? Por exemplo, 5 mil e tanto, como você faria sem montar, por exemplo?
Linha 491	E20: Como eu faria sem montar?
Linha 492	P: É.
Linha 493	E20: Sim... Nossa, ((acha graça)) sem montar iria ser bem difícil para mim. Fazer algum tipo de multiplicação na cabeça talvez, pegar um número muito alto e multiplicá-lo.
Linha 494	P: Humn.
Linha 495	E20: É... Referente a tipo 1.000, 2.000, 5... 5.000 não, que já ((acha graça)) chega, eu pegaria 2.000 vezes 2.000 que daria 4.000 já, então. E assim eu somaria com mais 1.000 ((acha graça)) porque é fácil, porque só tem zeros.
Linha 496	P: Certo.
Linha 497	E20: Então seria bem mais fácil do que se fosse... Por exemplo, 150.000... E 399.
Linha 498	P: Aham.
Linha 499	E20: Então, já ficaria mais difícil.
Linha 500	P: Aham.
Linha 501	E20: Agora, com zeros, é bem mais fácil.
Linha 502	P: Sim. É verdade. Com zeros fica mais fácil. Mas, por exemplo, escreve aí na sua folha uma conta assim: 523... Vamos lá.
Linha 503	E20: Um exemplo, só?
Linha 504	P: É. Um exemplo: 523... Mais, é... deixa eu ver, 89.
Linha 505	E20: ((Silêncio))
Linha 506	P: Como é que você faria essa conta sem fazer essa montagem, assim, na vertical?
Linha 507	E20: ((Silêncio)) bom. Eu acho que... Eu meio que montaria na minha cabeça mesmo. Eu a imaginaria montada na minha cabeça. Ou talvez eu pegaria... Como eu sei que o 9 ficaria debaixo do 3 e o 8 ficaria debaixo do 2, eu faria um de cada vez.
Linha 508	P: Tá.
Linha 509	E20: Por exemplo, é... 3 mais 9, 12. Certo?
Linha 510	P: Ok.
Linha 511	E20: Certo? Aí, eu teria que subir 1. Guardava o 1 na minha cabeça. Pegaria 8 + 2, 10. Então ficaria 11. Só que o problema é que já esqueci o primeiro resultado. ((acha graça))
Linha 512	P: Certo.
Linha 513	E20: Não, eu lembrei.
Linha 514	P: Tá.
Linha 515	E20: Então ficaria... Eu falei 11, sim. Então embaixo eu teria 12, aí eu ia subir o 1.
Linha 516	P: Aham.
Linha 517	E20: Então ia dar 612?
Linha 518	P: Humn, parece que sim. Vamos confirmar? Tente montar a conta e verifique se está certa essa conta.
Linha 519	E20: ((silêncio)) Vou contar nos dedinhos só para ter certeza. ((acha graça))
Linha 520	P: Pode contar. Não tem problema nenhum.
Linha 521	E20: Porque da primeira vez eu não contei nos dedinhos, eu fui na... tudo na minha cabeça mesmo.
Linha 522	P: Então tá bom. Não é proibido usar os dedinhos ((acha graça)).
Linha 523	E20: ((silêncio)) Ih, ((acha graça)) acertei.
Linha 524	P: Certinho. Está ok. Então você entende bem essa parte da representação por 10, está ótimo. Então vamos passar para o próximo. Bom, esse aqui é sobre números consecutivos, o que fala nessa atividade?
Linha 525	E20: Espera aí. Já dei uma esquecida, porque ((acha graça)) como (já) faz tempo...
Linha 526	P: Não tem problema. Você pode ler e tentar me explicar o que fala a atividade.

Linha 527	E20: ((silêncio)) Por 3. Então, isso me complicou muito, porque aqui meio (que)... me vem na cabeça (que) eram todos os resultados do... da... a... tabuada do 3.
Linha 528	P: Aham...
Linha 529	E20: Que eu sei que todos que eu dividi por 3 sempre vai dar um resultado inteiro.
Linha 530	P: Certo.
Linha 531	E20: E, para mim, eu só entendi isso na minha cabeça. Agora, eu não sei se isso foi o que a questão quis dizer.
Linha 532	P: Aham.
Linha 533	E20: Não é? Porque para mim está meio... ((silêncio))
Linha 534	P: Tá.
Linha 535	E20: ((estudante lê o enunciado)) “Prove que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por três”.
Linha 536	P: Aham.
Linha 537	E20: Eu só conseguia pensar 6-9, aí vinha... 12 e assim por diante.
Linha 538	P: Isso. Você já está pensando no resultado em si, né?
Linha 539	E20: Resultado. É. ((acha graça))
Linha 540	P: Você teria que pensar na sequência, então, quais são os três números que somados dá esse resultado, por exemplo, 12?
Linha 541	E20: Quais os três números que formariam 12?
Linha 542	P: Isso. Somados entre eles dá 12.
Linha 543	E20: Três vezes? Ou não?
Linha 544	P: Soma. Então, some três. Soma esse, esse e esse.
Linha 545	E20: ((silêncio)) então eu sei que... por duas vezes consecutivas seria o 6, porque 6 mais 6 é 12.
Linha 546	P: Isso.
Linha 547	E20: Então... ((silêncio)) também não daria. Caramba. ((silêncio)) O 4, talvez.
Linha 548	P: O 4? Sim.
Linha 549	E20: O 4 (somado) três vezes, consecutivamente, daria 12.
Linha 550	P: Isso. Só que, aqui, está falando de uma outra coisa: que não podem ser iguais, têm que ser consecutivos. O que significa consecutivo?
Linha 551	E20: 4-5-6.
Linha 552	P: Isso.
Linha 553	E20: Nossa... Que daria o número 12?
Linha 554	P: É. 12 é um número que você pegou, mas não precisa ser 12.
Linha 555	E20: Ser 12?
Linha 556	P: Isso. Tem que ser algum resultado, né? A soma desses números consecutivos cujo resultado vai ser divisível por 3.
Linha 557	E20: Por 3.
Linha 558	P: Isso.
Linha 559	E20: Sim. Por exemplo, eu vou tentar 3... 4 e 5. Então 5... 9... 10-11-12.
Linha 560	P: Humn.
Linha 561	E20: Achei um! ((acha graça))
Linha 562	P: Olha, deu 12.
Linha 563	E20: É.
Linha 564	P: ok.
Linha 565	E20: 3-4-5 então divido por... 3 dividido por... 12 é divisível, certo?
Linha 566	P: Certo.
Linha 567	E20: É... tem que ser 3... ter ser mais que isso?
Linha 568	P: É. Tenta achar três exemplos. Já escreve um, garanta um aí. Antes que você esqueça.
Linha 569	E20: ((silêncio)) 3...4...
Linha 570	P: ok.
Linha 571	E20: Só para não...
Linha 572	P: Aham.
Linha 573	E20: É... deixe-me pensar em outro. Tem que ser realmente consecutivo. Consecutivo, né?
Linha 574	P: Sim. Essa é a regra desse exercício.
Linha 575	E20: É. Então... 6, 7 e 8. Então... 9. 6-7-8-9. 9-10-11... 10-11-12-13-14-15... 15. 16-17-18-19-20-21-22. Não... Se fosse 21 até... até daria.
Linha 576	P: Quais números?

Linha 577	E20: 6-7-9.
Linha 578	P: Ah, mas aí você está quebrando a sequência. Né?
Linha 579	E20: Não, 6-7... ah, é verdade. Humn... ((silêncio)) deixa eu pensar. Então, 8-9-10.
Linha 580	P: Aham.
Linha 581	E20: 8-9-10 ia dar 19... 19. ((silêncio)) 20-21-22-23-24-25-26-27. É um número divisível por 3.
Linha 582	P: Aham.
Linha 583	E20: ((tsc)) Então, ((acha graça)) ((silêncio)) 8-9-10, é igual a...
Linha 584	P: Aham.
Linha 585	E20: ((silêncio)) Só mais um. É... ((silêncio)) ((suspiro)) Poderia pegar o 5, o 6 e o 7. 7... 8-9-10-11-12... ((silêncio)) 12. ((silêncio)) Não, espera. 5, 6 e 7. Caramba... 5, 6, 7, 8-9-10-11... 12-13-14-15-16-17-18. É um número divisível por 3.
Linha 586	P: Aham.
Linha 587	E20: É, não é? ((silêncio))
Linha 588	P: Certo. Então, aí você está provando, com três exemplos, que eles realmente seguem essa regra né?
Linha 589	E20: Sim.
Linha 590	P: Só que tem mais um detalhe. Ele fala que tem que ser a soma de três números consecutivos inteiros. E aqui ele fala que números inteiros são aqueles que...
Linha 591	E20: “São os números naturais incluindo os negativos”.
Linha 592	P: Isso. Isso significa que você tem que pegar três números consecutivos que sejam negativos também e tem que dar certo. Então tente pegar três números negativos em sequência, consecutivos, e veja se ele é divisível por 3.
Linha 593	E20: Tipo -3, -2 e -1?
Linha 594	P: Isso.
Linha 595	E20: Nossa. Mas não seria a mesma coisa?
Linha 596	P: Por quê?
Linha 597	E20: Porque... eles têm a mesma sequência.
Linha 598	P: Humn.
Linha 599	E20: Certo? E... bom... ((silêncio)) mas ele é negativo. Então, será que tem aquela regrinha do menos com menos, mais, e mais com menos é menos, e menos com menos é mais?
Linha 600	P: Tem. Mas não é a parte mais importante aqui.
Linha 601	E20: Entendi. Sim.
Linha 602	P: É. Precisa para você fazer a conta, mas... ((silêncio))
Linha 603	E20: Porque... e se eu pegasse os mesmos números que eu peguei?
Linha 604	P: Humn.
Linha 605	E20: Só que se eu só colocasse, eles virariam negativos, só.
Linha 606	P: Aham. É uma boa... boa pedida. Dá para fazer também.
Linha 607	E20: Mas como sobraria os sinais com parênteses, porque... é uma soma.
Linha 608	P: Humn.
Linha 609	E20: Olha, por exemplo... -3, -4 e -5.
Linha 610	P: Aham.
Linha 611	E20: Isso tem que virar uma soma e uma soma depende de sinais.
Linha 612	P: Humn.
Linha 613	E20: Então, menos com menos... ah, não. Está certo. Menos com menos é menos, e menos com menos, é menos.
Linha 614	P: Humn.
Linha 615	E20: Certo?
Linha 616	P: Humn.
Linha 617	E20: Certo?? Então como eu somaria esse se tudo é negativo? Será que eu teria que colocar... mas não tem como... Eu acho que... colocar em parênteses e... e... ((silêncio)) simplesmente...
Linha 618	P: É. Para mim, isso aqui que você escreveu já está certo. -3, -4 e -5. Para mim, você já fez a distributiva dos sinais.
Linha 619	E20: Sim...
Linha 620	P: Mas se você quiser se expressar, para não se confundir que se trata de uma soma, qual é a opção? A gente não pode ter dois sinais diferentes um do lado do outro, né?

Linha 621	E20: Sim.
Linha 622	P: Então tem que colocar os parênteses. Então...
Linha 623	E20: Parênteses.
Linha 624	P: ... como é que você faria usando parênteses?
Linha 625	E20: ((silêncio, escrevendo no papel))
Linha 626	P: Aham.
Linha 627	E20: ((silêncio escrevendo no papel))
Linha 628	P: Isso.
Linha 629	E20: Então, não é... realmente uma soma, é só uma junção dos números.
Linha 630	P: Humn...
Linha 631	E20: Significa que eu vou... porque...
Linha 632	P: Humn.
Linha 633	E20:... eu estou confusa. Se está falando para somar, para dar um resultado...
Linha 634	P: Certo.
Linha 635	E20:... o número é negativo. Então teria que excluir os sinais e só colocar o resultado dos números e só acrescentar o negativo depois?
Linha 636	P: Humn. Quase lá. Olha: aqui, quando você colocou (os) parênteses, o que é esse sinalzinho que você colocou aqui?
Linha 637	E20: É a multiplicação.
Linha 638	P: Mas por que vira multiplicação se a gente está falando de soma?
Linha 639	E20: É porque eu me confundo se não tiver nada, nada para separá-los.
Linha 640	P: Isso. Se é nada, é multiplicação. Você está certinha. Só que é soma. Então, você tem que colocar um +.
Linha 641	E20: Teria que colocar um +.
Linha 642	P: É, escreve embaixo para deixar esse aqui. Isso. É +, não é?
Linha 643	E20: É que fica tão estranha essa conta. Porque o que eu... nunca fiz. Três números entre parênteses e neles dois, entre eles ter o sinal de adição.
Linha 644	P: Aham. Deixe-me ajudar. Você lembra da reta numérica quando o professor vai explicar negativos?
Linha 645	E20: Sim.
Linha 646	P: Tem o zero no meio, e aqui, o que é? ((mostrando um esquema na folha)) O que isso está representando na reta numérica? Então, você tem o menos 3, certo? ((suspiro)) Se ele fala: “(-3) + (-4)”. Ou seja, + significa que você está somando, não é?
Linha 647	E20: Sim
Linha 648	P: Então, você vai andar, se você ficar + (-4), você tem que andar para a direita do zero, ou para a esquerda do zero?
Linha 649	E20: Humn... + (-4)?
Linha 650	P: Isso.
Linha 651	E20: Eu acho que ((silêncio)) para a direita.
Linha 652	P: Direita, para cá, então? Então eu teria que andar quatro casas para cá? 1-2-3-4?
Linha 653	E20: ((silêncio)) Nossa... A sua lógica está... ((acha graça)) ((silêncio))
Linha 654	P: Está confusa, assim?
Linha 655	E20: Muito. Porque... ((silêncio))
Linha 656	P: Tá. Então vamos...
Linha 657	E20: Daqui...
Linha 658	P: Humn.
Linha 659	E20: Daqui para cá é só negativo. ((apontando na direção do zero à esquerda))
Linha 660	P: Isso.
Linha 661	E20: Então. Se eu for somar 3... -3 + (-4)...? ((silêncio)) por que eu teria que andar?
Linha 662	P: Andar... é...
Linha 663	E20: Porque eu só... eu só... ((acha graça)) os números vão somar, só.
Linha 664	P: Sim. É assim: eu digo “andar” porque você está se orientando na reta para achar que número é.
Linha 665	E20: Sim.
Linha 666	P: Então, por exemplo, zero, eu somo 1, um positivo, você vai continuar andando para a direita. Certo? 1-2-3, ele não vai aumentando? Talvez, se eu colocar na vertical, será que fica mais claro para você? Assim, como se fosse um termômetro. Porque no termômetro, normalmente, para cima do zero são (números) positivos, não é?

Linha 667	E20: Aham.
Linha 668	P: E negativos é para baixo do zero, certo?
Linha 669	E20: Certo.
Linha 670	P: Será que te ajuda mais dessa forma?
Linha 671	E20: Então... eu acho que sim. Porque se fosse... como vou somando negativo com negativo, o resultado óbvio que vai dar negativo.
Linha 672	P: Humn.
Linha 673	E20: Então, vai ser uma continuidade. Por exemplo, se eu somar algum número e der 37, números negativos, vai dar 37 negativo.
Linha 674	P: Isso!
Linha 675	E20: Ah, entendi o que você quis dizer.
Linha 676	P: Isso mesmo. Certinho. Você entendeu bem. Ok. Então, é isso que ele está falando. Então, quando você fala + (-4), está falando assim: <i>"continue andando para o lado negativo..."</i>
Linha 677	E20: ... negativo.
Linha 678	P: Ou você pode deixar aqui com parênteses ou simplesmente você oculta. Mas, para ocultar, um dos sinais tem que prevalecer, não é? Então nesse caso vai ficar o que? O -3 + (-4), ou seja, continua andando para o negativo. Então, menos 4. Porque é isso que você vai fazer, não é? Você está no -3 e continua indo para o negativo.
Linha 679	E20: Aham.
Linha 680	P: E aqui também. Então vai ficar -5, que é o que você já tinha escrito antes.
Linha 681	E20: Sim.
Linha 682	P: Então, indiretamente você já estava fazendo a conta certa. Agora, a pergunta do exercício: quanto vai dar esse resultado, -3, -4, -5?
Linha 683	E20: 12 negativo.
Linha 684	P: 12 negativo. E ele é divisível por três?
Linha 685	E20: Eu não sei se números negativos dá para dividir.
Linha 686	P: Por quê?
Linha 687	E20: ((silêncio)) Ai... por que? Talvez porque o número 3, ele seja um número positivo e não negativo para dividir.
Linha 688	P: Humn. ((tsc))
Linha 689	E20: Multiplicação eu acho que é até possível.
Linha 690	P: Humn.
Linha 691	E20: É possível, na verdade.
Linha 692	P: Aham.
Linha 693	E20: Mas divisão nunca estudei, um negativo com positivo, dividindo.
Linha 694	P: Na verdade, ele dá. Porque, quando você está fazendo a divisão, sempre está fazendo (conta) no (sinal) positivo e o sinal prevalece só no final. Então, nesse caso, -12. Então, esqueça, por enquanto, o menos e fique só com o 12.
Linha 695	E20: Dividido por 3. Ia dar um resultado negativo.
Linha 696	P: Isso. Então vai ficar o resultado...?
Linha 697	E20: ((silêncio)) Menos...? ((silêncio)) -4?
Linha 698	P: -4. Certo? Porque, na multiplicação, se você multiplicar um número negativo com um positivo dá negativo, não é?
Linha 699	E20: Aham.
Linha 700	P: Então, na divisão, é a mesma coisa. Se você divide um número negativo por positivo vai dar negativo. Se você dividir o número positivo por um número negativo vai dar negativo também, não é? Então são essas regrinhas que ele está lá no fundo. Porque, a multiplicação com a divisão, elas são opostas, não é? Inversas.
Linha 701	E20: Sim.
Linha 702	P: Agora, a pergunta é: ele pede para provar. Provar, em matemática, significa achar uma FÓRMULA GERAL que vale para tudo. E, quando você fala de fórmula, tem que usar (uma) variável, ou seja, usar um x , um y , um a . Você tem que achar uma incógnita.
Linha 703	E20: Sim.
Linha 704	P: E quando você substituir por QUALQUER número aquela variável, vai dar essa regrinha aqui. Não precisa achar os números, é como se tivesse ditando: <i>"se seguir essa regrinha aqui, por qualquer número"...</i>
Linha 705	E20: Humn, uma expressão então?
Linha 706	P: Isso. Como eu faço isso?
Linha 707	E20: ((silêncio)) Formar uma expressão para isso? Humn...

Linha 708	P: Aham.
Linha 709	E20:... meu Deus. ((silêncio))
Linha 710	P: Uma dica: você pode começar pelo X.
Linha 711	E20: x. Isso.
Linha 712	P: É.
Linha 713	E20: É a primeira coisa que eu estou pensando. Agora como vou fazer que dê para entender que é sequentemente (uma sequência).
Linha 714	P: Humn. Isso. Aí é que está o desafio. Vamos ver?
Linha 715	E20: Porque se eu colocasse x mais y, mais alguma letra n, talvez, não sei...
Linha 716	P: Aham.
Linha 717	E20:... eu não sei se isso demonstraria que seria... ((silêncio))
Linha 718	P: ((suspiro)) Está, mas não está deixando explícita a regra.
Linha 719	E20: Ou eu poderia porque... se fosse eu, o aluno, e eu... e o professor passasse para demonstrar que é sequentemente (na sequência), eu colocaria $a... b + c$. $a + b + c$.
Linha 720	P: Certo.
Linha 721	E20: Porque eu, como aluno, entenderia que aquilo iria ser uma sequência.
Linha 722	P: Por que você tem certeza que é uma sequência, se você colocar $a + b + c$?
Linha 723	E20: Ah, porque vem desde o jardim de infância, olha... a... Alfabet... a... ((tsc)) desculpa, eu tenho a língua presa.
Linha 724	P: ((riso))
Linha 725	E20: Bom. Você entendeu.
Linha 726	P: Alfabeto.
Linha 727	E20: É. Porque aí vem sequentemente (na sequência) a, b, c, d, e, e isso vem se... que nem o professor, eu acho que a equação é de segundo grau, primeiro grau, que tem... $a + b + c$ que é igual... a tanto.
Linha 728	P: Certo.
Linha 729	E20: Então para mim isso é uma sequência.
Linha 730	P: Humn, certo. Interessante. Então isso significa que a, b e c , por serem sequenciais no alfabeto...
Linha 731	E20: Poderia ser sequencial em Matemática.
Linha 732	P: Poderia ser. O ponto é que na matemática ele não é...
Linha 733	E20: ...Necessariamente.
Linha 734	P: A não ser que fale no enunciado: “ <i>esses números são sequenciais</i> ”. Aí tudo bem. Só que...
Linha 735	E20: ...mas aqui não é o caso.
Linha 736	P: Isso. Não é isso que eu quero. Eu quero usar qualquer letra e descobrir, só de “bater” o olho, por causa do formato: “ <i>ah, isso aqui é um número sequencial, essa aqui é uma sequência</i> ”.
Linha 737	E20: Nossa. Como faria isso? Deus do céu. Eu não poderia colocar tipo $x_1 + x_2 + x_3$?
Linha 738	P: Humn, está quente.
Linha 739	E20: “Sub” (subscrito) assim?
Linha 740	P: Pode ser. Tenta escrever, escrevendo fica mais claro, o que você está pensando.
Linha 741	E20: x_1...
Linha 742	P: Humn.
Linha 743	E20:... ((silêncio)) mais... $x_2 + x_3$.
Linha 744	P: Certo.
Linha 745	E20: Tipo assim.
Linha 746	P: Humn.
Linha 747	E20: ((silêncio))
Linha 748	P: E aí, o que está me indicando que isso é consecutivo?
Linha 749	E20: E se...
Linha 750	P: Humn?
Linha 751	E20: Deixe-me pensar.
Linha 752	P: Porque olha: o que acontece?
Linha 753	E20: Aqui pode ser ao quadrado.
Linha 754	P: Pode.
Linha 755	E20: ((sobreposição de vozes))
Linha 756	P: Isso. Pode confundir com o quadrado e com o cubo. Mas tem uma outra coisa. Se eu substituir o x por qualquer número, ele tem que me dar automaticamente a sequência “na hora”. Então, ou seja, se eu substituir por 3, aqui já teria que me dar o 4 e aí teria que dar o 5 quando

	eu substituo. Só que aqui não, se eu colocar x , é 3, vai ficar 3, 3, 3. Ou seja x_2 não me dá nenhuma informação. Então pode ser qualquer número, então é 6, é 9, é 12. Então você viu que não tem controle?
Linha 757	E20: Sim...
Linha 758	P: Você tem que fazer alguma coisa que só de substituir já te dá o resultado.
Linha 759	E20: ((silêncio)) E se eu (colocasse) x ao quadrado + x ao quadrado + ((acha graça)) x ao quadrado?
Linha 760	P: Dá para testar. Vamos testar para ver se dá certo, isso.
Linha 761	E20: ((silêncio)) x ao quadrado + x ao quadrado + x ao quadrado. Só que o x não vai me mostrar nada, e nem ao quadrado vai mostrar nada.
Linha 762	P: É. Porque vamos supor um número aí.
Linha 763	E20: De... 5.
Linha 764	P: 5. 5 ao quadrado é quanto?
Linha 765	E20: 5 ao quadrado? 5 ao quadrado é 25.
Linha 766	P: Isso. E aí aqui vai ser 5 ao quadrado, 25. 5 ao quadrado, 25.
Linha 767	E20: Sim.
Linha 768	P: Vai ficar 25-25-25, não é sequência.
Linha 769	E20: ((silêncio)) Porque... meu, não sei se eu poderia colocar tipo... um x, $2x$, $3x$... ((acha graça))
Linha 770	P: Vamos tentar, vamos lá?
Linha 771	E20: $1x$ + ... ((silêncio))
Linha 772	P: Aham.
Linha 773	E20: $2x$.
Linha 774	P: $2x$... Ahn? $3x$. Ok.
Linha 775	E20: Seria igual a x ((acha graça)) que é igual a ((acha graça)) x dividido por 3. ((acha graça))
Linha 776	P: Humn.
Linha 777	E20: Não, né? Nunca vi uma expressão que já teria (um) número assim, tipo logo de cara.
Linha 778	P: Não, é que aqui já está terminando. Esquece essa parte. Você tem que se concentrar só nessa primeira parte da igualdade. Então, tem que ser... Bom, vamos testar. Chuta um número para o x .
Linha 779	E20: Eu esqueço que o x pode ser um número.
Linha 780	P: Isso. Tem que ser um número. Então, se for 2, olha, aqui vai ficar quanto? 2×2 ?
Linha 781	E20: 4.
Linha 782	P: 3×2 ?
Linha 783	E20: 3 vezes 2, 6... 9. Não, 6.
Linha 784	P: 6. Então aqui ficou 2-4-6. É uma sequência, mas não são consecutivos, não é? Se fossem consecutivos pares, estaria certo. Porque se é 2-4-6-8-10, isso aqui é uma sequência par, né?
Linha 785	E20: $x + x + x$? ((acha graça))
Linha 786	P: Humn...
Linha 787	E20: Mas como é que eu iria saber que é uma sequência?
Linha 788	P: Então.
Linha 789	E20: Só $x + x + x$?
Linha 790	P: São iguais. Você tem que fazer alguma coisa que modifique o segundo número em relação ao primeiro. E aí não precisa usar só o x .
Linha 791	E20: Colocar letras diferentes?
Linha 792	P: Não. Colocar números, por exemplo.
Linha 793	E20: ((silêncio)) x... +... ((silêncio)) 2?
Linha 794	P: Humn. E aí, como fica?
Linha 795	E20: Ia fica x... ((acha graça)) iria ser... esse aqui poderia ser o 1...
Linha 796	P: Aham.
Linha 797	E20:... 2.
Linha 798	P: Tá. E o terceiro número?
Linha 799	E20: Mais... 3.
Linha 800	P: Humn.
Linha 801	E20: Por exemplo?
Linha 802	P: ok.
Linha 803	E20: Aí a pessoa iria ter que, no caso, desvendar o x.

Linha 804	P: Sim.
Linha 805	E20: Ia dar para perceber que isso seria uma sequência.
Linha 806	P: Isso. Só que o x tem que ser obrigatoriamente 1, nesse caso.
Linha 807	E20: Sim.
Linha 808	P: E tem que ser qualquer número, não só apenas 1. ((silêncio)) Porque aqui só o x está variando, aqui são constantes. 2 e 3 são constantes. Então você está afirmando que uma parte da sequência (está definida) e está falando que só o x é variável. Só que, para isso, aqui para formar uma sequência consecutiva o x tem que ser sempre 1, não é? De números inteiros, no caso.
Linha 809	E20: Sim.
Linha 810	P: Então está quase... Mas não é ainda. Você tem que variar tanto o segundo quanto o terceiro termo.
Linha 811	E20: ((silêncio)) Meu... ((silêncio)) é... e se eu colocasse, deixasse na dúvida? ((acha graça)) Ou colocaria só o 2. Colocaria o x aqui, no caso, não iria... dar em nada, talvez.
Linha 812	P: Onde você colocaria o x ?
Linha 813	E20: $x + 2 + x$... eita.
Linha 814	P: $x + 2x$? Ah, $x + 2 + x$?
Linha 815	E20: É.
Linha 816	P: Humn. Só que aí o x e o x aqui estão iguais. Isso significa que se você colocar 1...
Linha 817	E20: Que os dois... são iguais.
Linha 818	P: Aqui vai ficar 1 também.
Linha 819	E20: Colocasse y? ((acha graça))
Linha 820	P: É. Só que aí você tem que colocar uma regra para o y , em relação ao x . Não é isso que eu quero.
Linha 821	E20: Ai, nossa. Então estou talvez, talvez, talvez, talvez...
Linha 822	P: ((risos))
Linha 823	E20: Está quase, está quase...
Linha 824	P: Pense assim, vamos voltar para os números. Quando você quer achar a sequência, qual é a conta que está fazendo de cabeça para achar o próximo? Por exemplo, você começou com 3. Como você acha o 4?
Linha 825	E20: $3 + 1$.
Linha 826	P: E para achar o 5?
Linha 827	E20: 4 mais 1.
Linha 828	P: Ou seja...? Se você usar o x , o próximo número vai ser...?
Linha 829	E20: 1.
Linha 830	P: O 1? Tá. Aí como você escreve?
Linha 831	E20: ((silêncio)) Aqui como o primeiro número é x...
Linha 832	P: Aham.
Linha 833	E20:... aí vou poder colocar uma... ((silêncio)) é... ((silêncio)) $1x$... $x + 1x$.
Linha 834	P: Humn.
Linha 835	E20: ((silêncio)) +... ((silêncio)) aí ((silêncio)) porque eu sei que, como vou “botar” aqui o x, vai ser igual a esse, então é a mesma coisa que eu somar, por exemplo, aqui significa que é o 3.
Linha 836	P: Aham.
Linha 837	E20: É como se eu pegasse o 3 e somasse mais 1, como aqui é igual.
Linha 838	P: Tá. Só que aqui também é 3, né?
Linha 839	E20: Sim.
Linha 840	P: O primeiro x .
Linha 841	E20: Sim, 3.
Linha 842	P: Aham.
Linha 843	E20: Aí, aqui como o x é igual, então aqui seria 3 também.
Linha 844	P: Isso. Aí vai ficar $3 + 3$.
Linha 845	E20: $3 + \dots 3 + 1$.
Linha 846	P: Por que $+ 1$?
Linha 847	E20: Porque eu coloquei o 1 aqui.
Linha 848	P: Ah, não. Mas aqui, do jeito que você colocou $1x$, significa que você está multiplicando 1, não está somando.
Linha 849	E20: Como que eu provaria para somar? ((acha graça))

Linha 850	P: Não. Está quase. Eu acho que o problema é de notação. Aqui você está escrevendo multiplicação. Escreve isso como soma. Em vez de $1x$, escreve...?
((sinal do término de aula))	
Linha 851	P: Como eu escrevo a soma?
Linha 852	E20: ((silêncio)) $x + \dots$ ((silêncio)) x_1? Ou... $x + x + 1$? Mais...
Linha 853	P: Quase.
Linha 854	E20: Mas é, que nem, eu somei $x + x$, como que se x é igual a 3, então ficaria $3 + 3$.
Linha 855	P: É.
Linha 856	E20: Ah, talvez seja isso e isso.
Linha 857	P: Vamos fazer o seguinte. Como bateu o sinal, a gente termina por aqui. Vamos terminar de novo essa atividade, tá? Aí eu faço a entrevista na próxima aula. Amanhã tem aula, né?
Linha 858	E20: Tem.
Linha 859	P: Tá bom. Então aí amanhã a gente retoma, pode ser?
Linha 860	E20: Tá bom.
((continuação da entrevista))	
Linha 861	P: Bom. Então, retomando o que a gente estava fazendo na segunda-feira, a gente estava no exercício 5. Nós estávamos fazendo o teste de como provar que a soma de três números consecutivos inteiros quaisquer sempre é divisível por três.
Linha 862	E20: Sim.
Linha 863	P: Aí você fez o teste com alguns números, inclusive números negativos e você viu que dá certo, não é? Faltava agora chegar numa fórmula genérica utilizando x . Certo?
Linha 864	E20: Sim.
Linha 865	P: Aí, você tinha feito alguns testes. Por exemplo, $x + x + x$ ou $x + 2x + 3x$. A gente estava QUASE chegando na ideia, não é? Aí agora vamos ver se você...
Linha 866	E20: Vamos retomar.
Linha 867	P: Isso. Vamos ver. Você até tinha feito, por exemplo, ao quadrado: x ao quadrado, não é? Vamos lá.
Linha 868	E20: Então, o mais próximo que eu cheguei foi colocando números.
Linha 869	P: Certo.
Linha 870	E20: ((silêncio)) Então eu acho que... Meu Deus, x... Mas... É mais. Deixe-me ver aqui. ((silêncio)) $+ 4 \dots + \dots$ ((silêncio)) aí, meu Deus, eu não teria nem a mínima noção, ainda.
Linha 871	P: Aqui você tinha terminado. Você tinha feito $x + 2, + 3$.
Linha 872	E20: Sim.
Linha 873	P: Só que eu tinha falado que, se você colocar 2 e 3 aqui, o x sempre tem que ser 1 para dar uma sequência, né?
Linha 874	E20: Sim.
Linha 875	P: E não dá para fazer isso. Então você teria que fazer alguma forma de aparecer x também nesse segundo e no terceiro número. Daí você começou a testar $2x, 3x, x$ ao quadrado, x ao quadrado. Aí eu te dei a dica: “como você sabe qual é o próximo número, sabendo o primeiro?”. Por exemplo, aqui se é o 3, como você sabe que o próximo número é 4?
Linha 876	E20: É... É mais 1.
Linha 877	P: Mais 1. E o próximo?
Linha 878	E20: Mais 1.
Linha 879	P: Mais 1. Então, se você começa com x , então você tem que fazer alguma coisa com... em relação ao x , né?
Linha 880	E20: Sim. Eu acho que... se eu colocar um X, por exemplo?
Linha 881	P: Aham.
Linha 882	E20: ((silêncio)) Não, mas... ((silêncio)) Mas esse número, é igual a esse.
Linha 883	P: Sim. Só tem 1 na frente, o 1 como ele é neutro, ele pode tanto aparecer ou ficar sem. É a mesma coisa. Então x e $1x$ são a mesma coisa.
Linha 884	E20: Mais... ((silêncio)) deixa eu ver... $3X$, no caso.
Linha 885	P: Humn. Tá.
Linha 886	E20: Aí o meu pensamento foi o que eu coloquei nesse número, coloquei mais $1x$...?
Linha 887	P: Aham.
Linha 888	E20: Ai, nossa. Estou totalmente errada.
Linha 889	P: Por quê?
Linha 890	E20: Porque o x é um valor.
Linha 891	P: Aham.

Linha 892	E20: E se eu colocar $x + 1$, não vai ter... $1x$, vai continuar o mesmo valor aqui.
Linha 893	P: Isso. Porque, se o x for 2, vai ficar 2, aqui vai ficar quanto?
Linha 894	E20: Aqui vai ficar... 3.
Linha 895	P: Por que 3?
Linha 896	E20: Não. Espera. Me explique de novo.
Linha 897	P: O x , se ele valer 2, esse x vale quanto?
Linha 898	E20: 2.
Linha 899	P: 2 também. Então vai ficar 2-2... e $3x$. $3x$ significa 3? Que operação que é?
Linha 900	E20: ((silêncio)) É... $3x$?
Linha 901	P: É. $3x$, o que é... Esse x eu sei que é 2, né? Porque se o x vale 2 aqui no primeiro...
Linha 902	E20: ...Multiplicação.
Linha 903	P: Isso. Então aqui vai valer quanto?
Linha 904	E20: Aqui vai valer 3×2? 6.
Linha 905	P: Isso. 6. Então vai ficar 3... olha, 2, 2, 6.
Linha 906	E20: Mas aqui é um exemplo. Você falou que esse aqui valeria 2, né?
Linha 907	P: Isso. Um exemplo. Aí a sequência vai ficar 2-2-6...
Linha 908	E20: Tá, mas como você saberia que seria 2? ((acha graça))
Linha 909	P: Não. Eu estou chutando. Poderia ser 5, por exemplo, não é? Se for 5, ainda dá... Mesmo assim vai dar 5-5 e 15, não é? Então não está dando a sequência que você quer e de números consecutivos, que é um atrás do outro. Então, por isso que você tem que escrever alguma forma para quando substituir um número no x por qualquer número...
Linha 910	E20: Ele multiplicado, vai dar o valor da...
Linha 911	P: Isso. Isso. Multiplicado ou somado, mas tem que aparecer esses números consecutivos, um atrás do outro.
Linha 912	E20: Sim. ((silêncio)) $x + \dots$ ((silêncio)) Mas, que nem, eu tinha feito, tipo $2x$...
Linha 913	P: Aham.
Linha 914	E20: É como se fosse 2×1.
Linha 915	P: Se o x valer 1, né?
Linha 916	E20: Sim.
Linha 917	P: Mas o x pode ser 2, pode ser 3, pode ser 4. Certo?
Linha 918	E20: Eu tento demonstrar que x é 1. ((silêncio))
Linha 919	P: Por isso que você tem que partir desse princípio, que valha para qualquer número que seja o x . Então se você for... achar o número x , 4, então tem que dar sequência 4-5-6. Se for 10, tem que ser 10-11-12, que tem que aparecer na sua sequência. Então como eu faço para transformar isso? ((silêncio)) Para que ele fique nessa sequência bonitinha. Quando é número você já sabe, né?
Linha 920	E20: Humn.
Linha 921	P: Você está somando 1...?
Linha 922	E20: Sim.
Linha 923	P: ... Sempre 1 ao anterior. Se o anterior é x , quanto eu tenho que somar no x ? Para você achar o próximo número?
Linha 924	E20: $x + x$.
Linha 925	P: $x + x$? Só que $x + x$ não é a mesma coisa que $2x$?
Linha 926	E20: Sim.
Linha 927	P: Então, não parece ser $x + x$, não é?
Linha 928	E20: x ao quadrado?
Linha 929	P: x ao quadrado é a mesma coisa que qual operação? $x \dots$?
Linha 930	E20: Vezes o x.
Linha 931	P: Vezes o x , também não é.
Linha 932	E20: Que... Teria que ser $x \times x$ e não x vezes ele mesmo. Não é?
Linha 933	P: Isso. Pensa assim. Por exemplo, se tiver nesse seu raciocínio, ficaria assim: $x \dots$ e aqui é $2x$, então ficaria 3 e 3×2 , 6. Mas não é. Aqui está somando 1. Agora, se for x ao quadrado, se o x é 3, vai ficar 3 ao quadrado, vai ficar 9 aqui. Mas você só está somando 1, em relação ao anterior. Se esse número vale x , então quanto eu tenho que somar no x para achar o próximo número?
Linha 934	E20: Meu, está muito difícil. Já não tenho nem... Não tenho nenhuma ideia, não tenho nenhuma ideia. Não sei... Não consigo entrar na minha cabeça.
Linha 935	P: Vamos fazer o seguinte. Deixa eu fazer um rascunho aqui. ((silêncio)).

Linha 936	E20: Pode ser o 6?
Linha 937	P: Pode. Pense assim, eu tenho um número que eu não sei aqui, certo?
Linha 938	E20: Sim.
Linha 939	P: Que é o x , tá? Aqui eu vou usar o quadradinho. Aí, esse número, que eu não sei, pode assumir qualquer um. Então, pode ser zero, 1-2-3-4... Tá? Quando eu sei que o número é 3, eu sei que o próximo número é 4, não é?
Linha 940	E20: Sim.
Linha 941	P: E o próximo é 5. Daqui para cá, do 3 para o 4 eu somei 1, certo? Do 4 para o 5 eu somei...? 1. E do 3 para o 5? ((silêncio)) Somou quanto?
Linha 942	E20: 2.
Linha 943	P: 2, né? Ou seja, aqui eu não sei que número que é, mas eu sei que tenho que somar 1. ((silêncio)) Certo?
Linha 944	E20: Sim.
Linha 945	P: Então, concorda que aqui poderia ser o quadradinho mais 1, ((silêncio)) certo? Mais... Quadradinho, do quadradinho para cá soma quanto mesmo, como eu fiz aqui?
Linha 946	E20: 2.
Linha 947	P: 2. O quadradinho mais 2? Isso aqui é do (momento) [00:08:46]. Então agora chuta um número.
Linha 948	E20: É... 5.
Linha 949	P: 5, né? Se quadradinho vale 5, então é 5 mais 1 que é 6. Certo? E quadradinho vale 5, 5 mais 2, 7. ((silêncio)) Ficou mais claro?
Linha 950	E20: Eu vou tentar fazer na... na minha base, para eu ver o que eu entendi.
Linha 951	P: Vamos ver.
Linha 952	E20: Aí, você me dá o seu papel... ((acha graça)) assim. ((acha graça))
Linha 953	P: Não.
Linha 954	E20: Então se fosse x, mas...
Linha 955	P: Aham.
Linha 956	E20: Colocou entre parênteses, porque... se não, vai confundir os sinais.
Linha 957	P: Aham.
Linha 958	E20: x ((silêncio)) +... 1.
Linha 959	P: Aham.
Linha 960	E20:... Mais... ((silêncio)) x... + 2.
Linha 961	P: ok.
Linha 962	E20: ((silêncio)) Tá. Então, supondo que aqui... fosse 2.
Linha 963	P: Certo
Linha 964	E20: É, x mais 1...
Linha 965	P: Aham.
Linha 966	E20: Não. Espera. Tá. Aqui é 2?
Linha 967	P: Isso.
Linha 968	E20: Então aqui vai ser 3?
Linha 969	P: Isso.
Linha 970	E20: 2. Humn... Aqui vai ser 4.
Linha 971	P: Isso.
Linha 972	E20: Como é possível chegar nesse... Não! Como... Vai, ô, gente. Mas... Como é que fica... sequentemente (sequencial)? Qualquer número que eu colocar vai ficar em sequência?
Linha 973	P: Sim. Porque o que você está assumindo? Quando você já se baseia num número, você sempre está fazendo uma operação. Então, o segredo aqui é sempre tentar expressar a operação. Depois você varia. Então o x é uma variável. Então, ou seja, qualquer número que ele entrar ali vai obedecer a essa regra, que é essa operação que está fazendo. Por exemplo, se você quisesse achar uma sequência que seja par seria 2-4-6. Não é? Então você teria que fazer essa regrinha. Qual é a regrinha para achar o próximo par? O 2 para o 4, você está somando quanto?
Linha 974	E20: O 2 para o 4? 2.
Linha 975	P: 2, né? E do 4 para o 6?
Linha 976	E20: 2.
Linha 977	P: 2. E do 2 para 6 eu estou somando quanto?
Linha 978	E20: 2... Do 2 para o 6?
Linha 979	P: É.
Linha 980	E20: 3. Não.

Linha 981	P: Mais um pouco.
Linha 982	E20: 4.
Linha 983	P: 4, né? Então você vê que a regra sempre somar 2? Então você coloca a regra. O x está lá. Eu não sei que número, mas se você pegar esse número e sempre somar de 2 em 2, sempre vai achar uma sequência par. Então a regra sempre está na operação. Por exemplo, vamos colocar uma outra regra aqui: se eu quisesse achar a sequência de números ímpares, quais são os números ímpares?
Linha 984	E20: Números ímpares? 1, 3, 1-3-5-7 e assim por diante.
Linha 985	P: Isso. Isso. Se fosse um número ímpar, como é que eu faria essa regra? Tenta rascunhar aqui primeiro.
Linha 986	E20: ((silêncio)) Fosse número ímpar?
Linha 987	P: É. Ok. Escreve essa sequência: 1-3-5 primeiro para ficar mais claro para você.
Linha 988	E20: 1...
Linha 989	P: Isso. Aí, o que está acontecendo de um número para o outro? Do 1 para o 3?
Linha 990	E20: Que está indo de... 2 em 2.
Linha 991	P: 2 em 2. Só que, se você colocar essa regra de 2 em 2, começando pelo número par, né?
Linha 992	E20: Vai dar um número par.
Linha 993	P: Sempre vai dar número par. Então não dá para definir. Aí você teria que colocar na regra utilizando sempre os números pares. Só que não é isso que eu quero. Eu quero que você coloque qualquer número no x e, ainda assim, achar uma sequência ímpar. Então você...
Linha 994	E20: ...qualquer número?
Linha 995	P: Qualquer número.
Linha 996	E20: Vou pegar um número ímpar, só para ver se... né?
Linha 997	P: Aham.
Linha 998	E20: ((Suspira)) ((silêncio)) Tá. Aqui seria 3. Mas... ((silêncio)) isso daria 4, já.
Linha 999	P: Isso. Então, parece que não é a soma de 1 em 1. Né? 1 e 2, né?
Linha 1000	E20: Ah, espera. ((silêncio)) x... Vamos tentar assim.
Linha 1001	P: Aham.
Linha 1002	E20: Não, espera. ((silêncio)) Vamos tentar assim.
Linha 1003	P: Tá.
Linha 1004	E20: É... 3. Vamos montar o 3.
Linha 1005	P: Tá.
Linha 1006	E20: $3 + 2$, 3-4-5. Já deu número ímpar.
Linha 1007	P: Opa, legal.
Linha 1008	E20: ((silêncio))
Linha 1009	P: Isso aqui deu 6. Para olhar...
Linha 1010	E20: Então eu acho que aquela lógica minha que eu ia tentar aqui...
Linha 1011	P: Humn.
Linha 1012	E20: Estava certo, então.
Linha 1013	P: Tá. Qual era a lógica?
Linha 1014	E20: Eu ia colocar 4 em vez de 3. Pode ver que tem o meu tracinho aqui.
Linha 1015	P: Aham. 4?
Linha 1016	E20: 4.
Linha 1017	P: Tá.
Linha 1018	E20: 3. Eita. Esquece. 3-5...
Linha 1019	P: Aham.
Linha 1020	E20: ...Vem para cá. $3 + 4$, 3-4-5-6-7.
Linha 1021	P: Aham.
Linha 1022	E20: Eu pensei nisso porque como é de 2 em 2, então tem que ser 2 em 2 e não sequentemente (sequencialmente). Eu ia colocar só que eu fiquei meio assim.
Linha 1023	P: Aham.
Linha 1024	E20: Então...
Linha 1025	P: Legal. Aí vamos ver. Será que ele vale para qualquer número? Agora, tenta substituir esse x com essa fórmula aqui, tente substituir por um...
Linha 1026	E20: Par?
Linha 1027	P: Um par, por exemplo.
Linha 1028	E20: Mas com essa lógica?
Linha 1029	P: Com essa lógica.

Linha 1030	E20: ((silêncio)) Vamos para o 4. ((silêncio)) Aqui ficaria 4-5-6... ((silêncio)) daria 8. Então os 2 são números pares.
Linha 1031	P: Humn.
Linha 1032	E20: Mesmo na lógica do ímpar.
Linha 1033	P: Isso. Então parece que aqui a regrinha está valendo na sua sequência. Se você substituir por um número ímpar, você acha a sequência ímpar. E se você substitui por um número par, ele acha a sequência par...
Linha 1034	E20: Ele acha a sequência par...
Linha 1035	P: Mas e se for QUALQUER número. Falta achar um (jeito) mais genérico ainda que é: não importa que número que você substituir no x , vai achar sempre uma sequência ímpar.
Linha 1036	E20: Qualquer número?
Linha 1037	P: É.
Linha 1038	E20: 13!
Linha 1039	P: Humn.
Linha 1040	E20: É qualquer número, né? Pode ser?
Linha 1041	P: Pode ser.
Linha 1042	E20: ((silêncio)) Mas com a lógica do ímpar.
Linha 1043	P: É. Parece que vale tanto para o ímpar quanto para o par, né?
Linha 1044	E20: É. ((silêncio)) Vamos lá. Aqui 13. 14-15. ((silêncio))
Linha 1045	P: Aham.
Linha 1046	E20: Opa... 13. 13... 14-15-16-17... ((silêncio)) Deu número ímpar.
Linha 1047	P: Número ímpar.
Linha 1048	E20: Os dois.
Linha 1049	P: Aham. Mas será que, se eu substituir por um número par, teria que ser alguma coisa que o primeiro também se modifica na hora que você substitui o número, né? Então, por exemplo, eu quero sempre achar um número ímpar independente de que número eu colocar para o x . Isso significa que, no primeiro, ele já tem que se modificar porque você concorda que, como é x , já está assumindo que aquele número que você escolhe já tem uma característica, né? Se ele é par ou ímpar...
Linha 1050	E20: É.
Linha 1051	P: Agora teria que ser algum número aqui, desde o primeiro que substituir, não importa que ele seja par ou ímpar, sempre vai forçar a virar ímpar.
Linha 1052	E20: Um número que faça isso??
Linha 1053	P: É. Na verdade assim, você tem que modificar alguma coisa aqui no x , no primeiro número, para você achar esse ímpar.
Linha 1054	E20: ((silêncio)) No caso deve ter... ser outro número, que esse aqui não dá mais.
Linha 1055	P: É. Aqui, o x não pode ser. Então você tem que fazer, mexer alguma coisa com o x . Talvez você tenha que começar com alguma coisa assim. Não só o x . O primeiro número já tem que somar 2 ou tem que multiplicar, tem que mexer com alguma coisa nele. Não pode ser esse número puro, x .
Linha 1056	E20: ((silêncio)) E... agora?
Linha 1057	P: Você colocou 3. Aí ficou 5? ((silêncio)) 5 e aqui seria 7, né, que o x é 3. É isso?
Linha 1058	E20: Não. É o resultado.
Linha 1059	P: Ah, já é o resultado? Então você pensou no 1?
Linha 1060	E20: 1.
Linha 1061	P: Tá. O 1. Espera aí. 3-5? Isso. E aí qual seria o próximo?
Linha 1062	E20: O próximo?
Linha 1063	P: É. É que a gente está tentando achar sempre três números, né?
Linha 1064	E20: ((silêncio)) Não. Espera aí. ((silêncio)) Não. ((silêncio))
Linha 1065	P: Aqui era 1, né, o número?
Linha 1066	E20: É.
Linha 1067	P: É 3-5, aqui vai ficar 9, né? É 1?
Linha 1068	E20: É 6.
Linha 1069	P: Ah, é 6? Ah, é 6.
Linha 1070	E20: É. Aqui, 2 em 2.
Linha 1071	P: Ah, bom. Isso.
Linha 1072	E20: ((silêncio)) eu acho que já descobri o número. Tudo que faz dá ímpar.

Linha 1073	P: É. Só que aí você está começando com número ímpar. Se você colocar um número par, provavelmente ele vai te dar número par aqui, não é? Tem que ser uma fórmula que não importa o número que você colocar, ele vira, e ele se transforma.
Linha 1074	E20: Não tem como! Gente, não existe nenhum número mutante!
Linha 1075	P: O que acontece se você multiplica um número, por exemplo?
Linha 1076	E20: Se eu multiplico?
Linha 1077	P: Aham.
Linha 1078	E20: Dobro o (preço) dele? O valor.
Linha 1079	P: Depende, né? Se você multiplicar por 3, ele...?
Linha 1080	E20: É. Ele faz... É o triplo.
Linha 1081	P: É o triplo, né? Agora, o que acontece, por exemplo, se eu multiplicar é... 2, que é um número par por um número ímpar?
Linha 1082	E20: $2 \times 3...$
Linha 1083	P: Aham.
Linha 1084	E20: Vai dar o resultado de número ímpar.
Linha 1085	P: 2 vezes 3 é quanto?
Linha 1086	E20: 6.
Linha 1087	P: 6. Então ele transforma em um número par.
Linha 1088	E20: Par. É.
Linha 1089	P: Então a multiplicação parece que tem isso, né? Você pega dois números que são diferentes: um par e outro é ímpar...
Linha 1090	E20: Mas então sempre sai...
Linha 1091	P: É. Agora será que isso vale sempre? E se multiplicar número ímpar por ímpar?
Linha 1092	E20: Tipo 3 vezes 3?
Linha 1093	P: Isso.
Linha 1094	E20: Ia dar um número ímpar, 9.
Linha 1095	P: Humn. E se eu multiplicar 1×3 também dá ímpar? E se eu multiplicar 3×5 ?
Linha 1096	E20: Vai dar um número ímpar.
Linha 1097	P: Ímpar. Então o segredo parece que está aí. De mexer alguma coisa de multiplicar número par ou ímpar, ou ímpar com ímpar ou par com par. Quando multiplico par com par, qual é o resultado?
Linha 1098	E20: Par.
Linha 1099	P: Par. Então, ou seja, você tem que brincar com isso, né?
Linha 1100	E20: É.
Linha 1101	P: Multiplicar número par e ímpar. Então você vai ter que forçar o x a multiplicar com algum número ímpar ou com par.
Linha 1102	E20: Sim. ((silêncio)) Mas é... ((suspiro)) Não. Espera. ((silêncio)) Só tem um número ímpar aqui. Você percebeu?
Linha 1103	P: Humn?
Linha 1104	E20: Só tem um número ímpar aqui.
Linha 1105	P: Um número ímpar?
Linha 1106	E20: É. Um número ímpar. É o 6.
Linha 1107	P: Não, 6 é par.
Linha 1108	E20: Não, é par, né?
Linha 1109	P: É.
Linha 1110	E20: Então, eu teria que mudar esse aqui. Vou tentar aqui.
Linha 1111	P: Tá.
Linha 1112	E20: ((silêncio)) Por exemplo, fazer um só... ((fala baixa)) ((silêncio))
Linha 1113	P: Você ainda está somando, certo?
Linha 1114	E20: Mas a regra não era somar?
Linha 1115	P: Não. Somar, eu digo, quando você quer a sequência. Só que eu preciso achar primeiro esse número. Aí, você viu que a estratégia da soma funcionou para esse caso aqui, não é? Por exemplo, x é $x + 1$ e $x + 2$. Para achar ESSA sequência. Agora, se fosse número ímpar, teria que ser uma outra regrinha. E o que a gente estava falando agora é que, se você multiplicar um número par com um ímpar, vai dar resultado ímpar. Não é?
Linha 1116	E20: Sim.
Linha 1117	P: Então você tem que fazer alguma coisa com esse x para multiplicar por um número par, ou ímpar. Porque dependendo do que você multiplicar aqui, ele vai forçar a virar um outro número.

Linha 1118	E20: Mas como eu vou multiplicar do nada?
Linha 1119	P: Não, você vai definir que nem aqui: você não estava tentando fazer x , $2x$ e $3x$? A mesma coisa, você vai fazer... tentar partir desse princípio. Em vez de começar com x mais alguma coisa, você tentar começar por um $2x$, por exemplo.
Linha 1120	E20: ((silêncio)) Mas aí no... primeiro teria que predominar o x, o número.
Linha 1121	P: Sim. Pense assim: vamos supor que eu fixe o primeiro número: $2x$, tá? E o próximo número, em vez de eu começar com x , eu vou começar com $2x + 1 + 2x + 2$. Na mesma lógica que a gente estava fazendo lá nesse exercício, tá? Então, o que acontece? Chuta um número para x .
Linha 1122	E20: É... ((tsc)) 3.
Linha 1123	P: 3. Aqui vai ficar $2 \times 3 + 2 \times 2$, $+ 1 + 2 \times 2 + 2$. Aqui vai ficar quanto? 2×3 .
Linha 1124	E20: 6.
Linha 1125	P: Mais aqui?
Linha 1126	E20: 4.
Linha 1127	P: Mais 1?
Linha 1128	E20: 5.
Linha 1129	P: 5. Aqui?
Linha 1130	E20: 6.
Linha 1131	P: 6. Ah, então, se eu colocar $2x + 2x + 1 + 2x + 2$, então ele vai me dar três números, 6-5-6.
Linha 1132	E20: Então 2 pares e 1 ímpar.
Linha 1133	P: Aham. Então, ou seja. Se eu deixar como $2x$, se eu substituir por um número ímpar, ele está me dando um número par. Certo?
Linha 1134	E20: Sim.
Linha 1135	P: Agora, aqui, ó: eu substituí por um número ímpar e somei 1, ele está me dando um número ímpar, né? E aqui, substituí por um número ímpar, somei 2, me dá... e está dando número par também. Ou seja, parece que esse é o caminho, né? $2x + 1$.
Linha 1136	E20: ((silêncio)) $2x + 1$? Então eles teriam que ter... Eles... teriam que multiplicar ímpar com par, só que sempre somar mais 1 porque um número par mais 1 é igual a um número ímpar.
Linha 1137	P: Aham.
Linha 1138	E20: Sim. Isso eu entendi. Agora você quer que passe para o papel?
Linha 1139	P: Sim. Se você...
Linha 1140	E20: Pode ser qualquer número que eu predomine?
Linha 1141	P: É... Começa com $2x + 1$, como eu dei aqui na agenda. Vamos fazer aqui na minha agenda esse aí.
Linha 1142	E20: ((silêncio)) Eu vou colocando... vários, tá?
Linha 1143	P: Aham.
Linha 1144	E20: Diferentes. ((silêncio)) Aqui vai ser 2×2, 4-5.
Linha 1145	P: ok.
Linha 1146	E20: Mais 4×2 é igual... 4×2 é igual a 8.
Linha 1147	P: Aham. 8, mais 1.
Linha 1148	E20: Ah, $8 + 1$ é 9. ((silêncio)) Mais $8x \times 2$ é igual a 16, mais 1, 17.
Linha 1149	P: Opa, já está no caminho, hein?
Linha 1150	E20: Precisa de mais coisa?
Linha 1151	P: É, te deu três números ímpares, né?
Linha 1152	E20: Sim.
Linha 1153	P: Eles não estão sequenciais, só.
Linha 1154	E20: Ah, então teria que ser em sequência?
Linha 1155	P: Isso.
Linha 1156	E20: ((silêncio)) Sim. ((silêncio)) Deixa eu pensar. $2x + 1$... Mais... ((silêncio)) espera aí. Aqui não pode subtrair, né? Só somar mesmo?
Linha 1157	P: Poder até pode, se der certo a sequência, pode. Tudo você pode. Você pode somar, subtrair, desde que ele te dê o número que você quer.
Linha 1158	E20: $4x$ menos... 4?
Linha 1159	P: Aham.
Linha 1160	E20: Não. Espera. ((tsc-tsc))
Linha 1161	P: Por que não?
Linha 1162	E20: Porque esse daria o mesmo resultado que esse, daria 5.
Linha 1163	P: Humn... Tá.

Linha 1164	E20: Então, espere aí. A lógica está na cabeça, eu só preciso parar de falar para poder pensar.
Linha 1165	P: ((risos))
Linha 1166	E20: É... ((acha graça)) então ((silêncio)) a sequência de um... De ímpares, né, você quer dizer?
Linha 1167	P: Isso. A sequência de ímpares.
Linha 1168	E20: ((silêncio)) Menos 1.
Linha 1169	P: Humn.
Linha 1170	E20: Mais... ((silêncio)) Eita, agora chegou um. ((acha graça)) ((silêncio)) eita, lasqueira.
Linha 1171	P: ((acha graça))
Linha 1172	E20: Espera. Eu posso ir falando a minha lógica? Porque se não... eu vou esquecer.
Linha 1173	P: Pode. Pode. Aí fica no gravador.
Linha 1174	E20: Tá. Bom, espera. ((silêncio)) se x é 5, então vai ser... Não. x não é 5, x é 2. Então eu poderia fazer algum número que eu multiplicado por 2, É... ((silêncio)) vamos tentar essa lógica.
Linha 1175	P: ok. É $5x$ que você está escrevendo aí, né?
Linha 1176	E20: Sim.
Linha 1177	P: Tá. $5x$.
Linha 1178	E20: É um 5 meio feio, mas é um 5. ((acha graça))
Linha 1179	P: Tá.
Linha 1180	E20: É... 2×2 é igual a 4 mais 1, 5.
Linha 1181	P: Aham.
Linha 1182	E20: Mais 4×2 é igual a 8 - 1, 7.
Linha 1183	P: ok.
Linha 1184	E20: 5×2, 10. Menos 1, 9.
Linha 1185	P: Humn. Parece que deu certo, né?
Linha 1186	E20: Isso é uma sequência.
Linha 1187	P: Sim.
Linha 1188	E20: 5-7-9.
Linha 1189	P: Isso. Parece que está certo.
Linha 1190	E20: Ah, tem mais coisa... (indignada)
Linha 1191	P: Não. O problema é você substituir por... o x por 2. Será que ele funciona para qualquer número? Se ele funcionar para outro número, parece que está certo. Tenta um outro número agora.
Linha 1192	E20: Um número ímpar, por exemplo, pode ser, né?
Linha 1193	P: Pode.
Linha 1194	E20: É... você quebra um pouquinho a cabeça, mas... porém, é... ((silêncio)) 2×3 é igual a 6. Então... então eu poderia colocar 1×3... Ah, desculpa. ((silêncio)) Não consigo me concentrar mexendo em alguma coisa, né?
Linha 1195	P: ((acha graça))
Linha 1196	E20: É. Então, vou escrever $1x$... ((silêncio))
Linha 1197	P: Não, não. Essa sequência que você achou, essa fórmula, para testar se ela vale para tudo, tenta substituir só o x , por um outro número. Faz só o cálculo. Que você substitui por 2...
Linha 1198	E20: Ah, por outro número?
Linha 1199	P: Isso. Porque você substitui por 2 aí, né? E por 2...
Linha 1200	E20: Mas aqui eu teria que abrir a conta de novo, se não eu vou me confundir.
Linha 1201	P: Como assim?
Linha 1202	E20: Ah, não. Essa... Esse aqui: 2-4 e 5 você quis dizer?
Linha 1203	P: Isso.
Linha 1204	E20: Para manter esses números?
Linha 1205	P: Isso. Isso você mantém. Você só substitui o x por um outro número.
Linha 1206	E20: Ah, sim. Tá. Então... eh... ((silêncio)) vou fazer aqui assim igual eu fiz, aí eu resolvo. Se não eu vou me confundir.
Linha 1207	P: Aham.
Linha 1208	E20: ((silêncio)) Aqui então, vai ser... 2×3 é igual a 6, mais 1 é igual a 7.
Linha 1209	P: ok.
Linha 1210	E20: Mais $4x$... 4×3 é igual a 12.
Linha 1211	P: Aham.

Linha 1212	E20: 12 - 1, 11. ((silêncio)) Mais... 5 vezes... 5... 5×3 é igual a 15 - 1, 14.
Linha 1213	P: Aham.
Linha 1214	E20: Não deu na sequência.
Linha 1215	P: Não deu. Sabe qual é o único detalhe aí? É...
Linha 1216	E20:... Só aqui que deu certo.
Linha 1217	P: É. Sabe qual é o problema? Porque você tem que sempre pensar em ancorar alguma coisa no primeiro número. Tudo bem você achar $4x - 1$, $5x - 1$. Só que eles não dizem nada a respeito do primeiro número. Porque lembra que, para você achar uma sequência, sempre têm que estar em relação a aquele anterior. Então ele tem sempre uma informação do anterior sendo carregada. Então, você tem que mexer alguma coisa a partir desse número aqui. Então, se eu sei que $2x + 1$ sempre está dando um número ímpar, então, aqui já está dado que eu sempre vou achar um número ímpar. Só que, partindo que isso aqui é um número ímpar, por exemplo: 7, qual é o próximo número ímpar?
Linha 1218	E20: Próximo número ímpar? 9.
Linha 1219	P: 9. E o próximo número ímpar depois do 9?
Linha 1220	E20: 11.
Linha 1221	P: Quanto que eu estou fazendo de operação para achar o próximo número aí?
Linha 1222	E20: De 2 em 2.
Linha 1223	P: De 2 em 2. Então o que será que eu tenho que fazer no próximo aqui? O que eu tenho que somar?
Linha 1224	E20: ((silêncio)) Meu Deus do céu, eu entendi a lógica, mas eu não... ((silêncio))
Linha 1225	P: $2x + 1$, eu já sei que ele é um número ímpar, certo?
Linha 1226	E20: Ímpar, isso. Sim.
Linha 1227	P: Eu tenho que somar, como você falou, de 2 em 2 para achar os próximos, certo?
Linha 1228	E20: Sim.
Linha 1229	P: Então o que você tem que fazer? Se eu somar esse número, eu não sei, $2x + 1$?
Linha 1230	E20: Eu sei que esse deveria ser 6. Que se está de 2 em 2, o certo é colocar de dois em 2.
Linha 1231	P: Eu estou somando, né? Então aqui $2x + 1$, se eu somar mais 2 vai ficar quanto essa equação aqui?
Linha 1232	E20: O que?
Linha 1233	P: Essa expressão?
Linha 1234	E20: $7 + 2$, no caso.
Linha 1235	P: Não, não. Aqui, no $2x + 1$ mesmo. Pensa o $2x + 1$ como um número. Assim: $2x + 1$, esse aqui eu sei que ele vai dar, um número que eu não sei. Qual que é? Porque depende do x . Mas, se eu somar 2 nessa expressão, se simplificar essa expressão vai ficar quanto?
Linha 1236	E20: Ela vai ficar... Posso manter o 7?
Linha 1237	P: Por que 7? Onde você está vendo 7 aqui?
Linha 1238	E20: É, porque eu virei por 3. Não é?
Linha 1239	P: Ah, você já está substituindo?
Linha 1240	E20: É. Isso.
Linha 1241	P: Esquece a substituição. Só aqui, ó: $2x + 1$?
Linha 1242	E20: Mas como eu vou saber o valor disso? Para poder... somar, resolver a operação?
Linha 1243	P: Aí é que você vai ver o segredo. Por exemplo, aqui eu posso tirar os parênteses?
Linha 1244	E20: ((silêncio))
Linha 1245	P: Para fazer... Vamos supor que você só tenha essa expressão para resolver, essa expressão algébrica, certo? $2x + 1 + 2$. Posso juntar alguma coisa aqui?
Linha 1246	E20: Eh... ((silêncio)) os números que vão com o X?
Linha 1247	P: Isso. Aí vai ficar quanto?
Linha 1248	E20: $2x + 3$.
Linha 1249	P: 3, né? Será que agora dá certo? Porque o que eu estou fazendo? Eu não estou pegando esse número e somando 2, né?
Linha 1250	E20: Sim.
Linha 1251	P: Se eu somar mais 2 nesse número, qual vai ser a próxima expressão? $2x$...
Linha 1252	E20: Mais 3 mais 2.
Linha 1253	P: Que é...?
Linha 1254	E20: x vai ser igual a... $2X$ mais 5.

Linha 1255	P: $2x + 5$. Então, $2x + 3...$ ((silêncio)) $2x + 5$ parece que são os números sequenciais de $2x + 1$, porque você está acrescentando de 2 em 2, porque você está carregando uma informação da anterior. Agora vamos tentar o seu número. Você tinha substituído x por 3. Certo?
Linha 1256	E20: Sim.
Linha 1257	P: Então, esse aqui vai ficar quanto? 2×3 mais 1. Que dá?
Linha 1258	E20: Vezes 3 + 1... é 7.
Linha 1259	P: 7. Esse aqui? $2 \times 3 + 3$.
Linha 1260	E20: É igual a... 7-8-9, 10. Não. 6, 7-8-9.
Linha 1261	P: 9. E este? $2 \times 3 + 5$?
Linha 1262	E20: 11.
Linha 1263	P: 11. ((silêncio)) Quer testar se ele funciona para todo mundo? Chuta agora um outro número x .
Linha 1264	E20: É... 4.
Linha 1265	P: 4. $2 \times 4 + 1$?
Linha 1266	E20: ((silêncio)) 8... 9.
Linha 1267	P: 9. $2 \times 4 + 3$?
Linha 1268	E20: 8... 11.
Linha 1269	P: 11. $2 \times 4 + 5$?
Linha 1270	E20: ((silêncio)) 13.
Linha 1271	P: 13. Parece que deu certo, né? Então você entendeu? A informação sempre tem que estar ancorada no primeiro para você achar uma sequência, né? Claro que esse aqui é uma regra porque a gente está querendo achar uma sequência consecutiva.
Linha 1272	E20: Aham.
Linha 1273	P: Se fosse, por exemplo, só pares ou ímpares, o que você fez aqui já estaria perfeito. Então, o segredo é sempre tentar pensar qual é a operação que você tem que fazer para achar o próximo. Só que sempre lembrando da informação anterior. Daí você consegue achar o próximo. Gostou?
Linha 1274	E20: ((silêncio)) É complicado, ((acha graça)) mas eu entendi sim, a sua... a lógica assim. Entendi.
Linha 1275	P: Esse aqui tinha na primeira atividade que vocês fizeram. A maioria não conseguiu fazer; não conseguiu achar essa fórmula aqui. Eu só pedia essa fórmula aqui, $2x + 1$. Como que eu faço para achar uma fórmula para achar um número ímpar. Era você... A resposta era $2x + 1$. Aí muita gente acabou se confundindo nisso, porque não achava o número, tentava multiplicar, tentava calcular ao quadrado...
Linha 1276	E20: Eu sei que eu quebrei bastante a cabeça, nas atividades que você já deu.
Linha 1277	P: Mas é bem legal porque... eu vi que você já conseguia entender essa lógica. Por isso que eu te testei para ver se você conseguia deduzir.
Linha 1278	E20: É. E desenvolver um pouco mais.
Linha 1279	P: É. Mas eu achei bem legal essa atividade aqui, tá bom? Ok. Então terminamos aqui a gravação da atividade.
Linha 1280	E20: Ah tá, pode ser.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO L

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 27

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E27: ESTUDANTE 27

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom, primeiro eu queria que você me falasse um pouco do jogo. O que você achou dele do que jogou ontem.
Linha 2	E27: Olha... o jogo é, realmente, interessante. E eu não achei, tipo, como tem a explicação, te dá um exemplo, eu não achei muito complexo... nada muito... difícil.
Linha 3	P: Certo. E aí depois passava para atividade 2, que é, mais ou menos, na sequência do jogo. Só que ele vai te falando de uma outra maneira, não é? O que você achou depois de fazer o jogo?
Linha 4	E27: Ah... eu achei que, tipo assim, é... mas tipo... você fala do jogo...
Linha 5	P: Isso, a impressão que você teve depois de jogar e fazer essa atividade.
Linha 6	E27: Acho que tornou mais... fácil fazer depois de eu ter jogado... Porque, no jogo, me deu vários exemplos e, tipo, fui lendo, e fui passando de nível, né? E, conforme você vai passando de nível, você vai... você vai se ligando. Você vai aprendendo. E aí eu achei muito mais fácil fazer... depois do jogo.
Linha 7	P: Certo, e o que você achou dessa atividade com a do ano passado?
Linha 8	E27: ((Silêncio)) Ah... é que o ano passado... (rs) É... tipo... ((Silêncio))... Ah, professora... (rs)
Linha 9	P: É, se você lembrar (rs) Se lembra de alguma atividade...
Linha 10	E27: ...ano passado, eu não conseguia... Não estou falando, não estou jogando, nem nada. Mas é que o ano passado eu não conseguia acompanhar, tipo, a gente tem as nossas dificuldades e tal...
Linha 11	P: Aham.
Linha 12	E27: Só que, no ano passado, eu era muito... não conseguia nem acompanhar...
Linha 13	P: Aham.
Linha 14	E27: Tipo, esse ano eu me esforço mais, né? Só que, ainda assim, eu sou... é mais difícil de acompanhar, mas eu... me esforço e tal e acho que... ano passado eu tinha muito mais dificuldade...
Linha 15	P: Aham. Equação é uma coisa que você tinha dificuldade o ano passado?
Linha 16	E27: ((Silêncio)) Tinha...
Linha 17	P: E esse ano?
Linha 18	E27: Ah... acho que não.... ((Silêncio)) Não... Nem tanto quanto o ano passado.
Linha 19	P: Certo. Então vamos ver as atividades? Então... explique um pouquinho (sobre) essa primeira atividade.
Linha 20	E27: ((Silêncio))
Linha 21	P: O que ele pede para fazer?
Linha 22	E27: Aqui?
Linha 23	P: Isso.
Linha 24	E27: Pede... para somar os dois números do lado oposto do x.
Linha 25	P: Aham.
Linha 26	E27: É... E aí você soma. Você... acha o valor do x.
Linha 27	P: Sim.
Linha 28	E27: Aí você soma 2 com 2 que é 4 e já acha o valor de x.
Linha 29	P: Certo, aí a atividade 2 é semelhante?

Linha 30	E27: Aham.
Linha 31	P: Não é?
Linha 32	E27: Aham. É.
Linha 33	P: Ok, então, basicamente, aí é para achar o x ?
Linha 34	E27: Aham.
Linha 35	P: Certo.
Linha 36	E27: Soma os dois números e acha o x.
Linha 37	P: Ok... Aí a atividade 3 também?
Linha 38	E27: É... ((Silêncio)) essas daqui são iguais...
Linha 39	P: Tá.
Linha 40	E27: Essa daqui eu... ((Silêncio))
Linha 41	P: Aham. Qual é a atividade que muda um pouquinho?
Linha 42	E27: ((Silêncio)) Humn... Acho que essa daqui muda mais, né?
Linha 43	P: A atividade... 7, não é? Deixe-me ver só as outras aqui. Ah e essa do verdadeiro ou falso?
Linha 44	E27: Ah... é, basicamente, você... faz, tipo, você tem (o fato de) que os dois lados precisam ser iguais.
Linha 45	P: Aham.
Linha 46	E27: Então o resultado... você tem o resultado de um lado, ou do outro, e aí precisa somar os números para obter o mesmo valor que o outro lado.
Linha 47	P: Aham.
Linha 48	E27: Se... não for o mesmo valor, é falso.
Linha 49	P: Certo.
Linha 50	E27: Se for, os dois derem o mesmo valor, é verdadeiro.
Linha 51	P: Aham... Isso porque... o sinal de igual ele representa...
Linha 52	E27: ((Silêncio))
Linha 53	P: Por que você tem que fazer o valor igual dos dois lados da igualdade?
Linha 54	E27: Não sei... não sei explicar... (rs) está difícil... É... ah eu não vou saber te explicar não, professora...
Linha 55	P: Ah, você fez certinho aqui. Então vamos ver a atividade 5, por exemplo.
Linha 56	E27: Humn.
Linha 57	P: Ele fala assim que a igualdade tem uma equação. Na equação, normalmente você tem um valor desconhecido, que é o x ...
Linha 58	E27: É.
Linha 59	P: E ele está representado por um valor constante do outro lado da igualdade. Então x é igual a qual valor? Aqui ele já está expresso.
Linha 60	E27: 12...
Linha 61	P: É... E aí, ele pede para representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item A. Então, você deu, por exemplo, $8 + 2 = 5 + 5$.
Linha 62	E27: Aham.
Linha 63	P: Essa condição está certa? Por que? ((pausa)) Porque 8 mais 2 é igual a...
Linha 64	E27: 10... E $5 + 5$ igual a 10.
Linha 65	P: Igual a 10. Só que ele pede para que dê o mesmo valor de x no item A. Qual é o valor de x no item A?
Linha 66	E27: 12.
Linha 67	P: 12. Então, qual seria a outra expressão que você teria que representar?
Linha 68	E27: Teria que ser 12? Então faria, tipo, $8 + 4$ que daria 12.
Linha 69	P: Isso.
Linha 70	E27: Igual a 5... ((Silêncio)) Não... 5? ((Silêncio)) $5 + 7$ que daria 12 também.
Linha 71	P: Isso. Então, ou seja, tem várias formas, porque tem outras somas que podem representar 12, certo?
Linha 72	E27: Tem... tem...
Linha 73	P: E é isso que (se) faz no item 6. E aí você marcou quais são verdadeiras e qual é a falsa.
Linha 74	E27: Isso.
Linha 75	P: E como que você conseguiu verificar isso?
Linha 76	E27: Porque assim... eu... simplesmente somei, aqui para somar, e um exemplo... esse aqui: $6 + 3$ igual a 9. Aí eu tenho que somar 6 com 3 que vai dar 9. E aí, igual a 9 que eu sei que os dois... os dois lados vão ser iguais...
Linha 77	P: Certo.

Linha 78	E27: E aí eu coloco verdadeira. Essa aqui de baixo é falsa. Porque $13 + 3$ é 16 e não 6.
Linha 79	P: Certo.
Linha 80	E27: Então, não é igual... e é falso.
Linha 81	P: Certo. Ok, então acho que a gente pode seguir para o próximo. Então o exercício 7 fala sobre a soma de um número positivo com o negativo. E aí, ele representa a diferença de sinais aqui pelos parênteses, não é?
Linha 82	E27: Aham.
Linha 83	P: Em separado, porque não podem ficar juntos os dois sinais. E aí pede para calcular. Então, nesse caso, $7 + (-2)$ dá $7 - 2$ que é igual a 5, certo?
Linha 84	E27: Humn.
Linha 85	P: Não é? E você calculou certinho. Aí, pede para calcular as outras equações. Então, você fez certinho: $2 - 2$, $5 - 3$, $8 - 5$, $33 - 12$... Aí, chegou nesse aqui: $2 - 8 - 6$, certo? Então, eu vejo que você não tem nenhuma dúvida sobre subtração de um número negativo. E aqui? O que acontece nessa atividade? Quando somamos um número negativo com um positivo?
Linha 86	E27: Eu... fiquei, realmente, meio... perdida... porque eu falei: “nossa... eu não lembro...”. Aí eu... eu achei que... tipo assim... eu não lembrava de jeito nenhum, eu fiquei até mais tempo, tipo, respondi tudo, chegou aqui eu simplesmente travei. Aí eu falei: “nossa... e agora?”.
Linha 87	P: Aham.
Linha 88	E27: Aí eu fui e... pelo que eu (entendi)... “ah, vou colocar isso” para não deixar em branco, porque eu não consegui responder, professora... Eu esqueci... Simplesmente saiu da minha mente.
Linha 89	P: Tá...
Linha 90	E27: Aí eu não consegui responder.
Linha 91	P: Está ok. Aí você respondeu aqui -7. Tá, vamos pensar no seguinte então: ali no $2 - 8$, você respondeu que é -6, não é? Por que você sabe que é -6?
Linha 92	E27: Aonde?
Linha 93	P: Na letra e do item anterior.
Linha 94	E27: Porque, assim, é... 8 vai ser um número negativo.
Linha 95	P: Aham.
Linha 96	E27: É... $2 + 8$ seria 10.
Linha 97	P: Aham.
Linha 98	E27: Só que, se eu tenho 2 e eu vou tirar 8 do 2, (que) é positivo, e 8, (que) é negativo. Eu vou tirar 8 de 2, vai ficar faltando o 6...
Linha 99	P: Certo...
Linha 100	E27: E aí eu mantive o sinal do 8 e ficou 6...
Linha 101	P: Certo, esse raciocínio que você fez de “tirar”, é semelhante ao que você tem que fazer aqui no $-2 + 5$. Então, imagina assim, está faltando 2, não é?
Linha 102	E27: Humn.
Linha 103	P: E você... acrescentou mais 5. ((Silêncio)) Então, qual é a conta que você tem que fazer nesse caso?
Linha 104	E27: Eu... está faltando para mim 2 então?
Linha 105	P: Isso.
Linha 106	E27: Aí eu vou acrescentar mais 5?
Linha 107	P: Isso.
Linha 108	E27: Aí vai ficar 3... então?
Linha 109	P: Aham. 3 positivo ou negativo?
Linha 110	E27: Positivo.
Linha 111	P: Positivo. Por que?
Linha 112	E27: Porque eu tinha dois e... eu devia dois.
Linha 113	P: Aham.
Linha 114	E27: E aí... se eu tenho cinco para pagar eu vou dar os dois que eu devia... e eu fico com 3.
Linha 115	P: Isso, perfeito.
Linha 116	E27: E aí eu errei e coloquei... ((ri nervosamente))
Linha 117	P: Não, não tem problema (rs). Está certinho.
Linha 118	E27: Nossa... eu... está vendo? Eu... nossa... ((tom de indignação)) Se eu pudesse fazer de novo...

Linha 119	P: Mas só foi um detalhe, não é?
Linha 120	E27: É... eu nossa... eu nem vi..
Linha 121	P: É, mas está certinho. Quer corrigir do outro lado? Pode deixar essa resposta, mas coloque a resposta certa.
Linha 122	E27: Vou colocar. ((barulho de lápis e folhas sendo paginadas)) ((Silêncio)). Eu nem lembro o que eu fiz o ano passado, professora...
Linha 123	P: ((ri, achando graça do comentário))
Linha 124	E27: Eu devo ter feito tudo errado... Tudo errado... Meu Deus... ((Silêncio)).
Linha 125	P: Isso. $-2 + 5 = 3$. Isso, pode virar a página... Aí tem essa atividade 8. Bom, aqui ele vai explicar, de fato, qual é o sentido da igualdade, não é? Porque, na equação, você sempre tem que igualar os dois lados da igualdade. A ideia de balança, no caso.
Linha 126	E27: Aham.
Linha 127	P: Então, não tem aquele macete de <i>“passa para lá negativo e passa para cá positivo”</i> ?
Linha 128	E27: Sim...
Linha 129	P: Que é sempre difícil de lembrar essa regrinha, né?
Linha 130	E27: Sim...
Linha 131	P: Aí, aqui, ele está falando, passo a passo. Por exemplo, quando tenho um x ... Eu sempre quero descobrir o valor dele, certo?
Linha 132	E27: É... Da variável...
Linha 133	P: Quando (se) tem números pequenos é fácil de descobrir, né? Por exemplo, nesse caso, que é $x + 2 = 5$. Dá para saber de cabeça quanto que vale x , não é?
Linha 134	E27: Aham.
Linha 135	P: Mas e se fosse um número grande? Qual é o passo a passo que eu faria? Eu tenho que isolar o x . A regra é sempre essa. Aqui, quem está do mesmo lado da igualdade junto com o x ? Que número é esse?
Linha 136	E27: Aqui?
Linha 137	P: É... ou aqui também. Aqui, quem está junto com (o) x ?
Linha 138	E27: O dois.
Linha 139	P: O dois, né? Então, para deixar o x sozinho eu preciso zerar o dois. Lembra(-se) que, no joguinho, tinha umas partes que você tinha que zerar e jogar o número para os dois lados?
Linha 140	E27: Isso.
Linha 141	P: É o que está acontecendo aqui. Então, o $x + 2 - 2$, aqui embaixo, vai ficar $x + 0$, não é? Porque $2 - 2$ é zero.
Linha 142	E27: É...
Linha 143	P: Ok, x ficou sozinho. Só que, eu mexi em um lado da balança, ela ficou desequilibrada. Eu tenho que equilibrar do outro lado. Então, eu faço a mesma coisa.
Linha 144	E27: Menos dois também?
Linha 145	P: Isso. Que aí dá...
Linha 146	E27: Três.
Linha 147	P: Três, isso. Se o $2x$ é igual a 3. É a mesma coisa você tem que fazer aqui no item A e B. Vamos ver. Aí você subtraiu o 12, não é? E aí subtraiu o 12 do outro lado: $20 - 12 = 8$. Perfeito. Nesse caso, é $x + (-6) + 6 = 30 + 6$, perfeito, $x + 0 = 30 + 6$, $x = 36$, perfeito. O que você achou desse raciocínio e da regrinha do <i>“passa para lá e passa para cá”</i> ?
Linha 148	E27: Eu achei... Ai... professora... eu não sei nem o que dizer porque, para mim, a Matemática é muito complicada... (rs).
Linha 149	P: (rs)
Linha 150	E27: Eu poderia muito bem fazer uma conta bem... mais fácil e... Apesar (do fato) de que, essa conta em si, não é muito difícil, não é? Mas... sei lá... não é uma coisa muito... difícil...
Linha 151	P: Aham.
Linha 152	E27: Eu achei que... tipo assim, é... se você me perguntasse isso o ano passado, eualaria: “Meu Deus! É inglês! É... chinês e eu não entendo.”.
Linha 153	P: (rs)
Linha 154	E27: Mas, é... eu achei que, tipo assim, não foi... Embora seja desnecessário mas... não foi uma coisa muito difícil de fazer...
Linha 155	P: Certo.
Linha 156	E27: E o que ajuda muito são os exemplos, não é?
Linha 157	P: Aham.
Linha 158	E27: ((Silêncio))

Linha 159	P: Então, você acha que, o exemplo, o formato da atividade ajudou a resolver os exercícios?
Linha 160	E27: ((Silêncio)) Ajudou... apesar (do fato) de que... se não tivesse, acho que eu conseguiria também, mas... ajuda sim.
Linha 161	P: É? ((pausa)) E entre o jogo e a atividade? As explicações da atividade? Qual você acha mais intuitivo?
Linha 162	E27: ((Silêncio)) Acho que é a atividade...
Linha 163	P: A atividade? Por quê?
Linha 164	E27: ((Silêncio)) Porque, no jogo, é tudo muito... é tudo muito... mecânico, né? Você simplesmente vai, junta lá e pronto! Deu seu número, você não precisa fazer a conta, você não precisa somar nada. Ele simplesmente... você só coloca o número e tal e junta os dois e ele te dá o resultado. Só que o que você tem que pensar: que você vai além, não é? Você tem que somar, você tem que subtrair...
Linha 165	P: Aham. Certo... ((Silêncio)) Na verdade, eu fiquei na dúvida se você estava nesse grupo ou no outro ¹ . Tinha uma outra atividade que eu tinha preparado para você, mas... pelo seu desempenho, na atividade do ano anterior, das dúvidas que você tinha, eu falei “ <i>O que eu faço? Bom, vou colocar nesse grupo e ver</i> ”. Então, confesso que você foi muito bem na atividade. Acho que daria para você estar no outro grupo. Para (poder) te testar mais. Eu acho que queria ver você ter mais dificuldade... (rs)
Linha 166	E27: Ai meu Deus... (rs)
Linha 167	P: ...para testar mais coisas. Mas você foi super bem, tá? Então acho que foi legal, você deveria se orgulhar, se você acha que não tinha confiança em matemática, pode ficar orgulhosa porque foi muito bem na atividade, tudo bem?
Linha 168	E27: Obrigada.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

¹ A pesquisadora refere-se ao grupo 1.

ANEXO M

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 32

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E32: ESTUDANTE 32

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom, o que você achou da atividade? Primeiro sobre o jogo. O que você achou dele?
Linha 2	E32: Ah, eu achei ele interessante, estava bem facinho (facilzinho)...
Linha 3	P: É? E equações? Você tem dificuldade?
Linha 4	E32: Ah, mais ou menos, quando é bem avançado, mas essas assim mais básicas, são fáceis.
Linha 5	P: É? E o jogo? Você acha que ele te ajudou em alguma coisa que você não entendia?
Linha 6	E32: Ajudou até... ajudou. Ele foi dando explicações... e eu fui entendendo e fazendo.
Linha 7	P: Certo... E agora essa atividade, depois de fazer o jogo por 30 minutos, o que você achou?
Linha 8	E32: Ficou mais fácil...
Linha 9	P: É?
Linha 10	E32: É...
Linha 11	P: E comparada à atividade que você tentou fazer o ano passado? O que você achou? (rs)
Linha 12	E32: Achei que essa aqui é BEM mais fácil! (rs)
Linha 13	P: Bem mais fácil? O que tem de diferente? O que te ajudou bastante nessa atividade?
Linha 14	E32: Ah, porque é bem básica, né? Só isso: + ou - ... x (vezes)...
Linha 15	P: Certo... Está te conduzindo melhor, né?
Linha 16	E32: É...
Linha 17	P: Tá. Vamos ver, então a atividade 1, não tem segredo, você fez aqui somando...
Linha 18	E32: É...
Linha 19	P: OK, Ai, você tinha que representar uma soma que dá o mesmo valor de x do item A, né?
Linha 20	E32: Aham...
Linha 21	P: Então aqui você representou $x = 6 + 6$. Ok, agora, se você fizesse uma representação parecida com essa do... item 6. Como você faria?
Linha 22	E32: Humn... ((Silêncio)) Como assim?? (rs)
Linha 23	P: Por exemplo, aqui você falou que $x = 6 + 6$. Está certo?
Linha 24	E32: Aham.
Linha 25	P: Mas, aqui, está vendo que no 6 está representando uma equação? Por exemplo, $6 + 3 = 9$. Em vez de usar o x , se usasse números, como ficaria aqui?
Linha 26	E32: Colocasse $6 + 6 = 12$?
Linha 27	P: Isso! Ai, sem usar o 12, que outra opção eu teria além do 12? $6 + 6$ é igual a quanto?
Linha 28	E32: ((Silêncio)) Eu não estou entendendo ainda... (rs)
Linha 29	P: Qual (seria) uma outra soma que dá o mesmo resultado 12?
Linha 30	E32: Ah! O 12 positivo com 12 negativo?
Linha 31	P: Humn... sim... Mas aí 12 positivo com 12 negativo dá zero, não é? Se somar...
Linha 32	E32: Ah é! (rs)
Linha 33	P: Então, quantas outras somas? Não tem só $6 + 6$ que dá 12, não é? Que outra soma dá 12, aqui, de resultado?
Linha 34	E32: É... $7 + 5$... ((Silêncio)) $7 + 5$?
Linha 35	P: $7 + 5$, consegue pensar em outra?
Linha 36	E32: É... $8 + 4$.
Linha 37	P: $8 + 4$, isso. Ai, você entendeu essencialmente aqui, para classificá-lo (como) verdadeiro e falso. Como você classificou isso como verdadeiro ou falso? Como você verificou?

Linha 38	E32: Ah... fui fazendo a primeira conta, né? Dos (itens) de mais (+) aqui... Aí aqui era ao contrário...
Linha 39	P: Aham.
Linha 40	E32: Aí eu vi aqui que $13 + 3$ não daria 6.
Linha 41	P: Certo. $13 + 3$ daria quanto?
Linha 42	E32: Dá trez... dezesseis!
Linha 43	P: Dezesseis. Por isso que elas não são iguais e, por isso, é falsa.
Linha 44	E32: Sim...
Linha 45	P: E na letra <i>c</i> e <i>d</i> , por exemplo, que tem soma dos dois lados?
Linha 46	E32: <i>c</i> e <i>d</i> foi... é que aqui ele faz duas representações que daria o mesmo resultado, né?
Linha 47	P: Aham.
Linha 48	E32: Então é verdadeiro, porque $3 + 3$ dá 6, $5 + 1$ também dá 6.
Linha 49	P: Aham.
Linha 50	E32: E aqui é a mesma coisa: $1 + 4$ dá 5 e $2 + 3$ dá 5 também.
Linha 51	P: Certo... perfeito. Você entendeu a essência aqui. Agora o 7, o que você entendeu dessa atividade aqui?
Linha 52	E32: Eu entendi que... eu preciso... ((Silêncio)) é... ele me pergunta o porquê de usar o positivo e... ((pausa)) É... coisa assim... ((Silêncio)) É, ele quer saber quando eu somo positivo com negativo...
Linha 53	P: Aham.
Linha 54	E32: Ele fala sobre isso e aí ele... começa a dizer... o que seria o positivo com o negativo, qual é o resultado.
Linha 55	P: Isso. E aí, qual é o resultado?
Linha 56	E32: Aqui na... deu zero. $2 + 2$ negativo.
Linha 57	P: Aham.
Linha 58	E32: Na 5... na B deu 2. É $5 + 3$ negativo.
Linha 59	P: Aham.
Linha 60	E32: Na 8, a (letra) <i>c</i> deu 3. Que é 8 mais 5 negativo... A (letra) <i>d</i> deu 21 que é $33 + 12$ negativo. E a (letra) <i>e</i> deu 6 negativo que é $2 + 8$ negativo...
Linha 61	P: Certo, e... aqui... porque você deu $7 = 7$? No item acima?
Linha 62	E32: ((Silêncio)) É... eu estou vendo agora que tá errado... (rs)
Linha 63	P: Qual que é o resultado certo?
Linha 64	E32: Aqui... seria 7... 7 que dá 3. $7 = 3$.
Linha 65	P: $7 = 3$? Por que $7 = 3$?
Linha 66	E32: ((Silêncio)) Ah não! (rs) $7 = 5$.
Linha 67	P: Humn... O resultado do $7 - 2$ é igual a 5. Agora, o que eu não estou entendendo é por que você está falando que $7 = 5$?
Linha 68	E32: Aqui. Ficaria $7 = 5$.
Linha 69	P: É, só que 7 é um número, né? É uma constante. Ele só pode ser 7. E 7 não pode ser igual a um outro número, a não ser que você represente por uma soma, por exemplo, $7 = 3 + 4$ ou $7 = 1 + 6$. Aí está certo. Mas 7 só pode ser 7.
Linha 70	E32: ((Silêncio))
Linha 71	P: Então você não pode falar que o 7 é igual a 5.
Linha 72	E32: ((Silêncio))
Linha 73	P: Certo?
Linha 74	E32: Aham...
Linha 75	P: Certo ou não? (rs)
Linha 76	E32: Certo... (rs)
Linha 77	P: Não é porque eu estou dizendo que você tem que concordar! (rs) Você tem que dizer, se tiver em dúvida.
Linha 78	E32: Não... mas... não teria outro jeito (rs).
Linha 79	P: Humn, porque o resultado aqui, na verdade, você vai só escrever 5, né?
Linha 80	E32: Aham.
Linha 81	P: Você não precisa escrever $7 = 5$. Talvez você esteja em dúvida por causa do <i>x</i> , não é? Porque você sempre tem que achar o <i>x</i> .
Linha 82	E32: ((Silêncio))
Linha 83	P: Aí você está acostumada a escrever “ <i>x</i> é igual a tanto”.
Linha 84	E32: É...

Linha 85	P: Aí como aqui não tem o x , aí você viu o 7 aqui no começo...
Linha 86	E32: Ah! É! É mesmo!
Linha 87	P: É isso?
Linha 88	E32: Quando tem o x você precisa eliminar esse número, né?
Linha 89	P: Isso. ((Silêncio)) É isso que você pensou?
Linha 90	E32: Ah, entendi! ((tom de compreensão)) É! É sim! Entendi o que você quis dizer (rs).
Linha 91	P: Certo. Então é isso. Então, beleza. Então isso aqui você confundiu com o x , né?
Linha 92	E32: Sim...
Linha 93	P: Tá, então o resultado correto é?
Linha 94	E32: ((Silêncio)) Aqui eu colocaria... (sussurrando fazendo os cálculos) Seria 5! (rs)
Linha 95	P: 5, perfeito.
Linha 96	E32: Apaga aqui?
Linha 97	P: ((Silêncio)) Aí aqui... é “igual a 5”, né?
Linha 98	E32: É...
Linha 99	P: Aqui? Isso? Igual a 5 negativo ou positivo?
Linha 100	E32: Não, é que aqui eu fui fazer o...
Linha 101	P: Ah tá...
Linha 102	E32: Mas é 5, né?
Linha 103	P: Tá, 5. Ok. E aí? Aqui, o que acontece quando somamos um número negativo com um positivo?
Linha 104	E32: Ele vira positivo?
Linha 105	P: Aham. Por que?
Linha 106	E32: Porque o negativo com positivo dá nega... dá positivo... (rs).
Linha 107	P: Humn... você está confundindo aquela regrinha da multiplicação... Essa é da multiplicação. Negativo com negativo dá positivo. Nesse caso, não. Por exemplo, como você sabe que aqui dá menos 6? Se $2 + (-8)$ dá -6?
Linha 108	E32: Porque o 8 é negativo.
Linha 109	P: Aham.
Linha 110	E32: Aí o... 8 negativo mais o 2 positivo vai dar -6.
Linha 111	P: Tá, e aqui? Qual que é a diferença? $-2 + 5$?
Linha 112	E32: ((Silêncio))
Linha 113	P: Ele também é negativo com positivo. Por que aqui fica como positivo?
Linha 114	E32: Porque um número positivo é maior do que o negativo?
Linha 115	P: Ah! Perfeito, é isso. Agora o (exercício) 8. O que o 8 explicou aqui? O que você entendeu?
Linha 116	E32: Ele... ele... faz uma demonstração para a gente isolar o x, né? Para colocar o negativo para tirar o positivo...
Linha 117	P: Aham. Isso...
Linha 118	E32: Aí aqui... ((sussurra baixinho)) foi o que eu fiz...
Linha 119	P: Isso. A resposta está certinha, mas... Aqui, é basicamente ele está explicando aquela regrinha do “passa para um lado positivo, passa para o outro negativo”...
Linha 120	E32: Aham.
Linha 121	P: Em vez de ser aquela regrinha “maluca” que, às vezes, você fica em dúvida, pense que a equação é uma balança. Então, se é uma balança, você sempre tira de um lado e tem que tirar do outro para mantê-la equilibrada. Se você acrescenta de um lado, você tem que acrescentar do outro para continuar equilibrada. A ideia é essa, não é? E acho que você entendeu bem, porque você fez certinho a letra a e a letra b .
Linha 122	E32: Foi...
Linha 123	P: Certo, agora a pergunta que não me cala agora: porque você não conseguiu fazer quase nada da atividade do ano passado? (rs) O que aconteceu? (rs)
Linha 124	E32: (rs) Ah... geometria para mim o ano passado estava muito confuso...
Linha 125	P: Humn.
Linha 126	E32: Ah... não sei... estava muito confuso para mim. É talvez porque eu perdi algumas aulas de... explicação... Mas... eu não entendia como... aqueles... fórmulas... eu faria essa conta com aqueles números da fórmula....
Linha 127	P: Certo...
Linha 128	E32: Hoje eu já entendo... Mas o ano passado estava bem confuso... (rs)
Linha 129	P: Entendi... Beleza... Bom, então ok, terminamos atividade aqui.
Linha 130	E32: Tá bom.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO N

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 6

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E6: ESTUDANTE 6

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Primeiro, eu quero que você me explique, um pouco, o que achou do jogo. O que achou dele?
Linha 2	E6: No começo era fácil, só que, depois, na hora que começou lá na parte do 20 até o... 23... eu não consegui fazer, começou a ficar um pouco complicado.
Linha 3	P: Aham. Que tipo de coisa que estava complicado lá no jogo?
Linha 4	E6: Na hora... ((falando baixo)) que tinha que trocar os números para... equações.
Linha 5	P: Ah... trocar os números...
Linha 6	E6: É.
Linha 7	P: ... De lado?
Linha 8	E6: É.
Linha 9	P: Assim?
Linha 10	E6: Zeros.
Linha 11	P: Certo.
Linha 12	E6: Quando tinha os zeros.
Linha 13	P: Aham. E você acha que o jogo te ajudou a entender algumas coisas de equação?
Linha 14	E6: Ajudou bastante.
Linha 15	P: Ajudou bastante? Legal. E, depois de ficar 30 minutos jogando, você veio para essa atividade. Acha que ficou fácil de entender o que está aqui na segunda parte?
Linha 16	E6: No começo sim, só essas últimas partes que eu fiquei... um pouco na dúvida.
Linha 17	P: Então vamos comentar um por um?
Linha 18	E6: Aham.
Linha 19	P: A primeira atividade aqui da etapa dois. Primeiro, eles falam para descobrir o valor de x . Então ele pede para somar os (dois) números 2 do lado direito da igualdade. Aí você respondeu que é...
Linha 20	E6: 4.
Linha 21	P: 4. Tá, você fez a soma. Aí a segunda atividade: x é uma variável, e as variáveis podem ter diferentes valores. Encontre o valor de x somando os valores do lado direito da igualdade. Aí você também fez a soma, que está direto lá no jogo também, certo?
Linha 22	E6: Aham.
Linha 23	P: Bem simples. Agora na terceira atividade, você viu que ele vale 12, mas na segunda valia 6, na primeira valia 4, não é? Então ela tem diferentes valores. E aqui no quarto (exercício) ele está explicando que os números 3 e 7 são constantes, certo? E o que é um número constante?
Linha 24	E6: Não sei. ((baixo))
Linha 25	P: Por exemplo, 3 não pode ter outro 3. 3 é (igual a) 3, não é? No caso do x , não. Se você fala: “O número é um x ”, o x pode ser qualquer número. Você pode pensar no 1, o seu colega pode pensar no 10, no 11, pode assumir qualquer valor. Quando você fala que (algo) é constante, qual é o significado que você tem fora da Matemática? O que você entende por constante?
Linha 26	E6: ((silêncio))

Linha 27	P: Se eu falar que... <i>“aquela pessoa lá é constante”</i> . Ou: <i>“ela está constantemente fazendo algo”</i> . O que você entende?
Linha 28	E6: Que está repetindo aquela coisa.
Linha 29	P: Repetindo? Sim. Então, de certa forma, se falamos de velocidade como: <i>“aquele carro seguiu uma velocidade constante de 60 quilômetros por hora”</i> . O que significa isso?
Linha 30	E6: Que estava andando muito rápido.
Linha 31	P: Muito rápido? Mas, do que você me explicou antes, está um pouco diferente o significado, não é? Será que constante é o que muda ou o que permanece?
Linha 32	E6: ((Silêncio)) Permanece.
Linha 33	P: Permanece? Então, por exemplo, quando você fala que uma pessoa é constante, ela é sempre...?
Linha 34	E6: Ela sempre fica naquele lugar, fazendo as atividades?
Linha 35	P: É. Ou, por exemplo, ela sempre tem, mais ou menos, o mesmo tipo de comportamento, isso é uma pessoa constante. O que você resolveu até agora chama-se equações. Na equação, mostra-se que duas coisas são iguais. Então a igualdade representa o lado direito e o lado esquerdo e eles têm a mesma quantidade. Certo?
Linha 36	E6: Aham.
Linha 37	P: Então aqui ele fala: x é igual a 12. Então o x é igual a qual valor? O que significa isso?
Linha 38	E6: Então, daí eu fiz multiplicando. 6×2, que daí achei o resultado, que era 12.
Linha 39	P: Aham. Isso, você foi além. Ele só pediu assim: <i>“O x é igual a qual valor?”</i> . Se ele te deu que o x é igual a 12, então x é 12. Você foi além e representou de uma outra forma. Está certinho também. Agora ele fala: <i>“tente representar uma soma que dá o mesmo (valor) de x do item A”</i> .
Linha 40	E6: É o que eu somei.
Linha 41	P: Isso.
Linha 42	E6: $6 + 6 = 12$.
Linha 43	P: Isso, perfeito. Qual seria uma outra? Você consegue pensar em outra além de $6 + 6$? ((silêncio))
Linha 44	E6: ((suspiro)) humn... ((silêncio)) Não sei. Não sei se...
Linha 45	P: É só $6 + 6$ que dá 12? Você consegue pensar em outros dois números que dá 12 o resultado?
Linha 46	E6: 6×2.
Linha 47	P: É, mas só com soma.
Linha 48	E6: Com soma? ((silêncio)) $10 + 2$?
Linha 49	P: $10 + 2$. Perfeito. Tem outra?
Linha 50	E6: Ah, deixa eu ver. ((fala baixo)) ((silêncio)) $8 + 4$?
Linha 51	P: 8 mais 4. Perfeito, está ótimo. Então agora vamos para o verdadeiro ou falso. Então, aqui você tem que responder se é verdadeiro ou falso as seguintes equações. A letra a fala que $6 + 3$ é igual a 9. Verdadeiro. Por que é verdadeiro?
Linha 52	E6: Porque... ah, não sei, só sei fiquei fazendo a soma.
Linha 53	P: Aham.
Linha 54	E6: Nos dedos, contando $6 + 3$, daí o resultado vai dar o 9.
Linha 55	P: Aham. E (isso) significa que 9 é igual a 9, certo?
Linha 56	E6: Aham.
Linha 57	P: E a letra b , 14 é igual a $7 + 7$. Por que é verdadeiro?
Linha 58	E6: Porque 7 mais 7 dá 14.
Linha 59	P: Isso. E a (letra) c , $3 + 3 = 1 + 5$. Por que é falso?
Linha 60	E6: Porque os resultados aqui, a conta não dá exata, dá diferente.
Linha 61	P: E qual é o resultado dela se você fizer as contas?
Linha 62	E6: Aqui, olha: $3 + 3$ vai dar 6.
Linha 63	P: Aham.
Linha 64	E6: Agora... ((silêncio)) deu errado agora.
Linha 65	P: Errou a conta? Não tem problema. Então marca aqui do ladinho. Então é verdadeiro. Certo. E a letra d ?
Linha 66	E6: Igual em cima ((sussurra)).

Linha 67	P: Verdadeiro também. E a letra <i>e</i> ? $13 + 3 = 6$?
Linha 68	E6: ((silêncio)) Essa daqui está errada, porque $13 + 3$ vai dar 16 e não 6.
Linha 69	P: 16 não é igual a 6. Certinho. Perfeito. Agora, (o exercício) 7. Aqui você tem que falar sobre números positivos somados com números negativos. E, aqui, ele fala assim: $7 + (-2)$ é igual a $7 - 2$. Qual é o resultado disso?
Linha 70	E6: Esse daqui eu fico com um pouco de dúvida, porque eu não consegui fazer, daí eu fiz do jeito que eu consigo entender.
Linha 71	P: Tá.
Linha 72	E6: Porque $7 + 7$ vai dar 14.
Linha 73	P: Tá.
Linha 74	E6: Agora só olhando esses dois... números.
Linha 75	P: Aham.
Linha 76	E6: Daí eu fiz 9. Olha, eu peguei aqui. É... $2 + 2$... é... ((silêncio)) Eu fiz $9 + 5$, daí o resultado me deu 14 também. 7... ((silêncio)) Ah, professora... fiz $9 + 5$, daí deu 14.
Linha 77	P: Tá.
Linha 78	E6: Provavelmente devia ter colocado 13, troquei só os sinais.
Linha 79	P: Tá. Agora, eu quero tentar entender por que você respondeu 9? E por que você respondeu 5?
Linha 80	E6: ((silêncio))
Linha 81	P: Onde você achou esse 9? Qual foi a conta que você fez?
Linha 82	E6: Eu fiz esse também ((acha graça)). Ai, falta uma coisa aqui. ((silêncio)). Aí eu peguei e somei esses dois, $7 + 2$ na mão.
Linha 83	P: ok. ((silêncio))
Linha 84	E6: Depois eu peguei $7 - 2$ e me deu 5.
Linha 85	P: ok.
Linha 86	E6: E aí eu peguei e fiz 9, ah não... ((silêncio)) humn... ((silêncio)). Aí depois eu peguei e somei. $9 + 5$ aqui já vai dar 14.
Linha 87	P: Tá. Agora, por que você está somando, se aqui ele está falando que essa parte $7 + (-2)$ é igual a $7 - 2$? Por que apareceu sinal de +?
Linha 88	E6: É, mas é por causa daqui, olha: deu 7 +... deu aqui, eu não entendi essa parte.
Linha 89	P: Humn. É. Leia de novo o enunciado. Ele está explicando alguma coisa aqui. Leia para mim.
Linha 90	E6: “Quando você soma um número positivo com um número negativo, você está aplicando uma subtração”.
Linha 91	P: Veja, aí ele mostra isso, não é?
Linha 92	E6: Aham.
Linha 93	P: Aí ele pergunta qual é o resultado dessa equação.
Linha 94	E6: Daí é 14. ((falou baixo))
Linha 95	P: Que é 14. Humn. É... aqui, ele está explicando que $7 + (-2)$ é a mesma coisa, igual significa a mesma coisa que $7 - 2$. Então, isso significa que o lado esquerdo da igualdade tem que ficar igual ao lado direito da igualdade, que nem o que você fez na seis. Não fica igual?
Linha 96	E6: Aham.
Linha 97	P: $3 + 3$ é igual a 6, não é?
Linha 98	E6: Aham.
Linha 99	P: $1 + 5$ é igual a 6. 6 é igual a 6, então por isso que é verdadeiro. Aqui você está fazendo a mesma coisa. Então você tem que resolver ou este lado ou esse lado. E ele só está te mostrando que é a mesma coisa.
Linha 100	E6: Tá. Entendi. ((fala baixa))
Linha 101	P: Então, qual é o resultado dessa equação?
Linha 102	E6: ((silêncio)) Vai ser 5, não é? ((fala baixa))
Linha 103	P: 5? Por quê?
Linha 104	E6: Porque... é... você falou para mim que eu poderia escolher entre resolver essa e essa.
Linha 105	P: Isso.
Linha 106	E6: $7 - 2$ é igual a 5.
Linha 107	P: Isso. Aí é 5, o resultado. Certo?
Linha 108	E6: Certo.

Linha 109	P: ok. Aí você fez os outros?
Linha 110	E6: Aham.
Linha 111	P: Então, 2 é + (-2). Aí você respondeu que é -4.
Linha 112	E6: É, -4.
Linha 113	P: Está certinho, isso?
Linha 114	E6: Eu acho que sim, professora.
Linha 115	P: Pense de novo: faça igualzinho o que está explicado aqui no exemplo. Será que dá certo? Porque você está subtraindo direto aqui: 2 - 2, e está colocando - 4. Será que é isso mesmo?
Linha 116	E6: Esse é positivo.
Linha 117	P: Positivo?
Linha 118	E6: É.
Linha 119	P: Então vai ficar +4?
Linha 120	E6: Aham.
Linha 121	P: Por quê?
Linha 122	E6: Porque 2 + 2 vai dar 4.
Linha 123	P: Aham. Mas e esse número negativo, ele está de enfeite?
Linha 124	E6: Tem que ser 4 - 2?
Linha 125	P: Por que 4 - 2?
Linha 126	E6: Por que somei os dois, duas vezes... dá 4...
Linha 127	P: Aham.
Linha 128	E6: Daí vai ter que tirar esse 2.
Linha 129	P: Humn... entendi. Eu acho que você está confundindo distributiva com soma. Talvez é isso que está confundindo para você colocar essa operação. Você está pensando “+ com - é -”, não é? Eu acho que é isso que você está confundindo. Olha, aqui você tem que pensar, assim: se eu tenho 2 e somo com algo que está negativo, pensar como se fosse uma temperatura. Você está com 2 graus. Mas se ele manda tirar, somando com 2 graus negativos, vai ficar com zero.
Linha 130	E6: Aham.
Linha 131	P: Então, aqui, quando você tem o + na frente dos parênteses, e dentro tem o -, então no fundo é como você estivesse falando “tire esse número”, 7 - 2. Toda vez que você ver essa notação aqui, é a mesma coisa que 7 - 2. Nesse caso seria 2...?
Linha 132	E6: ((silêncio)) Menos 2.
Linha 133	P: Menos 2. Então, reescreve aqui do lado.
Linha 134	E6: ((silêncio))
Linha 135	P: Isso. Que dá?
Linha 136	E6: ((silêncio e murmura algo))
Linha 137	P: Zero.
Linha 138	P: Agora, tente conferir os outros itens da mesma forma com o mesmo raciocínio.
Linha 139	E6: ((silêncio)) Esse aqui fiz ontem mesmo. ((silêncio)) Esse daqui?
Linha 140	P: Pode fazer.
Linha 141	E6: ((silêncio)) Aqui vai ser... 8 menos 2?
Linha 142	P: Aí que está a dúvida: você tem que sempre seguir a mesma ordem. Você não pode inverter.
Linha 143	E6: ((fala baixo)) Então eu não sei...
Linha 144	P: Humn.
Linha 145	E6: Aqui nem sabia que... com 2 - 8 vai dar.
Linha 146	P: Você está subtraindo um número que é menor do que o que você está subtraindo, né?
Linha 147	E6: Aham.
Linha 148	P: Então como fica? Escreve da mesma forma que você escreveu aqui. Como ficaria essa conta sem os parênteses? Que nem você estava fazendo aqui.
Linha 149	E6: ((silêncio)) Ficaria 2 - 8.
Linha 150	P: Ficaria 2 - 8? Aí, aqui você ficou com a dúvida. O que acontece quando somamos o número negativo com o positivo? Que é mais ou menos parecido com o que está acontecendo aqui, só que é diferente, não é?
Linha 151	E6: Quando somamos um número negativo com um número positivo, ele continua sendo negativo. Leva sinais iguais...

Linha 152	P: Humn.
Linha 153	E6: ... positivos. Sinais diferentes, acho que por isso é negativo?
Linha 154	P: De novo, você está confundindo a regra de sinais quando é da multiplicação. Então pense assim: vamos pensar primeiro nesse item E, tá?
Linha 155	E6: Humn.
Linha 156	P: Bom. Então você está subtraindo 2. Oito de dois.
Linha 157	E6: Aham.
Linha 158	P: Vamos supor que você tem duas laranjas. E você quer subtrair oito. Tem como? Quanto você vai ficar devendo?
Linha 159	E6: Tenho três laranjas.
Linha 160	P: Duas.
Linha 161	E6: Ah, é.
Linha 162	P: Duas laranjas e você tem que dar oito.
Linha 163	E6: ((silêncio)) Tem que dar seis.
Linha 164	P: Tem que dar seis. Aham. Mas seis não é seis positivos, porque seis positivos significam que você tem os seis.
Linha 165	E6: 6 negativo?
Linha 166	P: Isso. Então ficaria seis negativos. Então qual é o resultado desse item?
Linha 167	E6: ((silêncio)) é...
Linha 168	P: Faça a continha com os dedos.
Linha 169	E6: Seis.
Linha 170	P: Só seis?
Linha 171	E6: Seis negativos.
Linha 172	P: Seis negativos.
Linha 173	E6: ((silêncio))
Linha 174	P: Seis negativos, sem usar palavras, como eu represento? Só com número, número e sinal?
Linha 175	E6: ((silêncio)) Seis menos...
Linha 176	P: Tá. Como escreve?
Linha 177	E6: ((fala baixinho)) Como assim?
Linha 178	P: É só escrever o número. Como eu represento os seis negativos em número e sinal. Sem usar palavras. Isso! Menos seis, não é?
Linha 179	E6: Aham.
Linha 180	P: Beleza. Nesse exemplo, 5 é maior que -2. Então, isso significa que você estava devendo 2, e ganhou 5. Com quanto você vai ficar agora?
Linha 181	E6: ((silêncio)) Eu ganhei 2?
Linha 182	P: Você estava devendo 2. Vamos supor que você estava devendo 2 reais para a sua mãe.
Linha 183	E6: Aham.
Linha 184	P: E ela te deu 5 reais.
Linha 185	E6: ((silêncio)) Aí vai ficar 3.
Linha 186	P: 3?
Linha 187	E6: Aham.
Linha 188	P: Positivo ou negativo?
Linha 189	E6: É positivo.
Linha 190	P: Positivo. Por quê?
Linha 191	E6: Porque eu estava precisando de 2.
Linha 192	P: Isso.
Linha 193	E6: Só tinha 2.
Linha 194	P: Isso.
Linha 195	E6: E ela foi lá e me deu mais 5.
Linha 196	P: Aham.
Linha 197	E6: Daí foi lá, e paguei à minha mãe.
Linha 198	P: Isso, aí você está com 3 agora.
Linha 199	E6: Aham.
Linha 200	P: Isso. Só que se, por exemplo, fosse um número negativo maior, vamos supor que você estava devendo 10 e ela só te deu 5. Você conseguiu pagar essa dívida?
Linha 201	E6: Não.

Linha 202	P: Quanto que você ainda está devendo?
Linha 203	E6: Fica devendo mais 5.
Linha 204	P: Fica devendo 5, que seria, em número, como eu daria o resultado?
Linha 205	E6: ((silêncio)) + 5.
Linha 206	P: +5 se eu não estou devendo.
Linha 207	E6: É.
Linha 208	P: Se eu estou devendo, como é que eu represento?
Linha 209	E6: -5.
Linha 210	P: -5.
Linha 211	E6: ((silêncio))
Linha 212	P: Certo. Então esse aqui o resultado certo é?
Linha 213	E6: ((silêncio)) 3.
Linha 214	P: 3. Positivo ou negativo?
Linha 215	E6: Negativo.
Linha 216	P: Certeza? Positivo ou negativo?
Linha 217	E6: Positivo.
Linha 218	P: Positivo. ((silêncio)) Eu só queria que você me explicasse uma última coisa: por que você fez aqui os palitinhos para fazer a conta? Explique para mim o que você pensou.
Linha 219	E6: É porque... ((silêncio)) eu não sei, tipo assim, contar de cabeça os números grandes.
Linha 220	P: Certo.
Linha 221	E6: E aí eu acho que fazer assim, pauzinhos, para mim, facilita.
Linha 222	P: Tá. E como você fez esse pauzinho? O que você representou com esses pauzinhos aí, para fazer a conta $33 + (-2)$?
Linha 223	E6: Eu coloquei 33, eu coloquei até o 33...
Linha 224	P: Tá.
Linha 225	E6: E depois eu fui riscando.
Linha 226	P: Ah. Entendi.
Linha 227	E6: 12 números.
Linha 228	P: Então você riscou 33 palitinhos e depois foi tirando 12?
Linha 229	E6: Aham.
Linha 230	P: Então, beleza. Não precisa apagar não, pode deixar, tá?
Linha 231	E6: Aham.
Linha 232	P: Então semana que vem a gente continua a última atividade.
Linha 233	E6: Tá bom.
((CONTINUAÇÃO DO ESTUDO))	
Linha 234	P: Lembrando o que a gente fez ontem, no nosso último encontro. Estávamos falando ainda dessa atividade oito, de como montar uma equação. Lembra que eu comecei a fazer alguns exemplos? Até tentei te mostrar que a equação é sempre uma balança e que ela se equilibra? Você lembra disso?
Linha 235	E6: Sim.
Linha 236	P: Hoje eu trouxe uma balança para você ver se consegue entender melhor esse conceito, tá bom? Então levante-se um pouquinho. ((silêncio)). Aqui, olha: É uma balança, tá? É como se fosse uma balança de prato. Eu não sei se você já viu alguma vez uma balança de prato? Já? Então. O que acontece? Você vê que não tem nada nesses pratos.
Linha 237	E6: Sim.
Linha 238	P: Então ela está equilibrada. Assim, a equação é como se fosse essa balança. Aqui, é como se tivesse um sinal de igualdade. Esse lado esquerdo, quando ela for igual do lado direito, está equilibrado. Certo?
Linha 239	E6: Aham.
Linha 240	P: Então é isso que ele indica. Se, por exemplo, eu vou pegar aqui três bolinhas de gude que aparentemente são idênticas, certo?
Linha 241	E6: Aham.
Linha 242	P: Se eu colocar uma bolinha aqui, o que aconteceu com essa balança?
Linha 243	E6: Abaixa de um lado.
Linha 244	P: Abaixou do lado esquerdo, né?

Linha 245	E6: Aham.
Linha 246	P: Se eu colocar duas bolinhas...
Linha 247	E6: Vai abaixar.
Linha 248	P: Acho que abaixou mais ainda. Elas continuam iguais, essas duas balanças? Não, certo? Eu tenho duas bolinhas aqui do lado esquerdo. De quantas bolinhas que eu preciso para deixar essa balança equilibrada de novo?
Linha 249	E6: Duas bolinhas.
Linha 250	P: Duas bolinhas. Infelizmente eu só tenho uma. Então, qual ainda continua pesada? Esquerda ou direita?
Linha 251	E6: A esquerda.
Linha 252	P: A esquerda, certo? Então equação é isso. Agora, quantas bolinhas que eu preciso tirar da esquerda para que essa balança fique equilibrada? Uma... certo? Então, se eu tiro uma daqui, ela volta a ser equilibrada, certo?
Linha 253	E6: Certo.
Linha 254	P: Então, a equação é isso. Vamos voltar para ver a sua equação aqui na folha. Você tem uma equação aqui $x + 12$ igual a 20, certo?
Linha 255	E6: Sim.
Linha 256	P: Então, imagina que... Esqueça o x , por enquanto.
Linha 257	E6: Certo.
Linha 258	P: 12 é igual a 20?
Linha 259	E6: ((silêncio))
Linha 260	P: Não é, certo? Mas eu tenho que fazer alguma coisa para que essa equação fique equilibrada.
Linha 261	E6: Aham.
Linha 262	P: E se eu tenho 12 aqui e, vamos supor, lembre-se que a regra é deixar o x de um lado sozinho, sem número e sem nada, certo?
Linha 263	E6: Aham.
Linha 264	P: Tem que deixar o x sozinho em um lado da igualdade. Só que eu tenho esse + 12 “atrapalhando”. Se eu tirar 12 daqui, você concorda que essa balança vai mudar, que nem a gente fez com a bolinha?
Linha 265	E6: Vai mudar.
Linha 266	P: Certo. Então se eu tirar 12 daqui, quanto eu tenho que tirar do outro lado?
Linha 267	E6: ((silêncio)) Tem que tirar 12.
Linha 268	P: Tem que tirar 12 também. Então vamos fazer isso na equação? Vamos ver se você consegue terminar, então?
Linha 269	E6: ((silêncio)) É aqui. ((silêncio)) Ela tira 12... ((fala baixa))
Linha 270	P: Isso.
Linha 271	E6: Tiro isso, mais... é, dá 10, né? 10 de cada lado?
Linha 272	P: Não tenta fazer direto, tenta escrever mesmo. “ $x + 12 - 12$ ”...
Linha 273	E6: $x + 12 - 12$.
Linha 274	P: Isso.
Linha 275	E6: ((silêncio)) $-12 + 12$ vai dar zero.
Linha 276	P: Isso.
Linha 277	E6: ((silêncio)) Mais um.
Linha 278	P: Isso, só que você esqueceu de mexer essa parte do 20, não é?
Linha 279	E6: Aham.
Linha 280	P: Então, tem que continuar. Aqui, está certinho. Só que faltou fazer a outra parte da igualdade. Tem que ser $x + 12 - 12$ igual a quanto?
Linha 281	E6: Mais 20. ((silêncio)) Que vai ser igual a 10.
Linha 282	P: Por que 10?
Linha 283	E6: ((silêncio)) Eu não estou achando... é $10 + 10$ vai dar 20?
Linha 284	P: Aqui você tirou quanto?
Linha 285	E6: $12 - 12$.
Linha 286	P: Isso. Você já tinha 12 e está tirando 12. Só que lembra da balança: se eu tirei 12, para continuar equilibrada quanto eu tenho que tirar daqui? Do 20?
Linha 287	E6: 12 também.
Linha 288	P: 12 também. Então vai ficar 20...?
Linha 289	E6: Menos 12.

Linha 290	P: 20 - 12. Muito bem. Então x é igual a quanto?
Linha 291	E6: ((silêncio)) x é igual a oito.
Linha 292	P: x é igual a 8. Muito bem. Vamos ver se você consegue fazer a letra b agora? Na mesma ideia.
Linha 293	E6: Tá. ((silêncio)) Essa aqui já complicou um pouquinho. Por que não tem número aqui. $6 + x$.
Linha 294	P: É, só que ele está invertido de posição, não é? Por exemplo, se esse x vier antes, como vai ficar?
Linha 295	E6: 6×6 é igual a 30, né?
Linha 296	P: Humn.
Linha 297	E6: Agora vou...
Linha 298	P: Mas 6 é igual a 30?
Linha 299	E6: É que eu peguei 6. Aí depois somar o x.
Linha 300	P: Humn. Só que 6 é um número, certo?
Linha 301	E6: Certo.
Linha 302	P: Seis só pode ser igual a 6. Seis não pode ser igual a outro número, não é?
Linha 303	E6: ((silêncio))
Linha 304	P: Então está faltando alguma coisa aí. ((acha graça))
Linha 305	E6: ((silêncio)) Vai ser $6x + 30$?
Linha 306	P: É. Se for $6x$, você está juntando o x com o 6, né? Só que aqui tem um $+$ no meio. Então, você não pode só sumir com o $+$. Tem que continuar com ele.
Linha 307	E6: ((silêncio)) $6 + x = 30$?
Linha 308	P: $6 + x$? Sim. Só que, o que aconteceu com esse menos?
Linha 309	E6: Ficou mais.
Linha 310	P: Mas, por que você transformou em mais?
Linha 311	E6: Porque menos com mais dá menos.
Linha 312	P: Humn. Entendi. Só que aí você está usando - 6 com $+x$ que são coisas totalmente diferentes. Você não pode juntar entre eles, tá? Então, vamos fazer o seguinte? Vamos mudar de lugar o -6 com o x , só trocar de lugar. Como vai ficar?
Linha 313	E6: ((silêncio)) Fica $+x$...
Linha 314	P: Aham.
Linha 315	E6: ... -6...
Linha 316	P: Isso.
Linha 317	E6: Igual a 30.
Linha 318	P: Isso. Ótimo. Veja se agora fica mais claro, lembrando que eu tenho que deixar o x sozinho, certo?
Linha 319	E6: Aham.
Linha 320	P: Só que eu tenho -6 aqui. Para esse menos 6 virar 0, que nem você fez aqui, o 12: Você tirou 12, virou 0, né? O menos 6, quanto é que eu tenho que fazer de operação para ele virar 0?
Linha 321	E6: 6 menos 6.
Linha 322	P: 6 menos 6? Isso. Se o 6 fosse positivo, só que ele é negativo. Então do negativo para o 0, quantas casas eu tenho que andar para virar 0?
Linha 323	E6: ((silêncio)) Não sei.
Linha 324	P: Por exemplo, se você está devendo um real, quanto você tem que devolver para ficar com zero de dívida?
Linha 325	E6: Tem que devolver o dinheiro que eu peguei.
Linha 326	P: Isso. Então, aqui é como se você estivesse devendo 6. Então, quanto eu tenho que devolver?
Linha 327	E6: 6.
Linha 328	P: 6. Então, é - 6...? Qual é a operação? É “mais” ou é “menos”?
Linha 329	E6: Mais.
Linha 330	P: Mais. Isso. Então, vai ficar...?
Linha 331	E6: + 6...
Linha 332	P: Aham.
Linha 333	E6: ((silêncio)) Igual a 30?

Linha 334	P: De novo, 6 não é igual a 30. 6 é um número, 6 só pode ser igual a 6 ou 6 pode ser igual a 3 mais 3, 2 mais 4, não é? Outros que dão o mesmo resultado.
Linha 335	E6: Mais 6 - x?
Linha 336	P: Não. De novo, olha o que você fez aqui. Você não fez $x + 12 - 12$?
Linha 337	E6: Aham.
Linha 338	P: Aqui é a mesma coisa. Você tem que repetir o x primeiro, certo? Então como vai ficar? Aqui, $x...$
Linha 339	E6: $-x + x... + 6...$ ((silêncio))
Linha 340	P: Tá. $x + 6$, ok. O que mais?
Linha 341	E6: ((silêncio))
Linha 342	P: Esse 6 tem que virar 0, não é?
Linha 343	E6: ((silêncio)) + 6...
Linha 344	P: Só que você já tem mais 6.
Linha 345	E6: ... - 6!
Linha 346	P: Isso.
Linha 347	E6: - 6.
Linha 348	P: Isso.
Linha 349	E6: Igual a 30.
Linha 350	P: Só que aqui, a balança desequilibrou. Então o que você tem que fazer agora no 30?
Linha 351	E6: Tirar 6.
Linha 352	P: Só que você já tinha tirado 6. Você está somando 6, para ele poder virar 0, certo?
Linha 353	E6: Certo.
Linha 354	P: Então você tem que fazer a mesma coisa do outro lado, lembra? Você tira, você tem que tirar do outro lado também.
Linha 355	E6: 30 - 30.
Linha 356	P: Tá. Vamos ver na balança de novo. ((silêncio)) Por exemplo, esses carrinhos, eles têm pesos diferentes. Mas vamos supor que eu vou por esse aqui. Aqui já tem duas bolinhas, está vendo que desequilibrou?
Linha 357	E6: Aham.
Linha 358	P: Vou tirar aqui as duas bolinhas. Vou colocar um outro carrinho do outro lado. ((silêncio)) Vamos ver se equilibra? Olha: equilibrou mais ou menos, não é? Está quase igual, só que parece que um lado está um pouquinho mais pesado. Qual lado parece que está pesado?
Linha 359	E6: ((silêncio)) Esse lado.
Linha 360	P: O esquerdo, não é?
Linha 361	E6: Aham.
Linha 362	P: Então. Aí o que a gente fez? Aqui, quando eu tinha uma bolinha de cada lado, ela estava equilibrada, certo?
Linha 363	E6: Certo.
Linha 364	P: Só que você tirou de um lado. Por exemplo, se você tira de um lado, ela desequilibrou, certo?
Linha 365	E6: Certo.
Linha 366	P: O que eu tenho que fazer do outro lado?
Linha 367	E6: Tirar um.
Linha 368	P: Tirar também. Se eu pôr o carrinho vai desequilibrar também. Aí eu não pus um outro carrinho do outro lado para equilibrar?
Linha 369	E6: Aham.
Linha 370	P: Foi o que aconteceu. Então, voltando para a sua equação, aqui você já tinha - 6. Já estava devendo 6. Você pôs + 6 para ele virar 0. Então, o que você tem que fazer agora do lado do 30 também? Para ele continuar equilibrado como antes?
Linha 371	E6: ((silêncio)) Ele vem... estou tentando entender o que eu fiz aqui, para fazer ((fala baixa)) Aqui eu tinha tirado 10, não é?
Linha 372	P: Isso.
Linha 373	E6: Isso, não é?
Linha 374	P: Não. Quanto é esse?
Linha 375	E6: 12.

Linha 376	P: 12.
Linha 377	E6: Tem que tirar do 12 também?
Linha 378	P: Isso.
Linha 379	E6: ((silêncio)) Aqui eu tenho que tirar 6 de 30.
Linha 380	P: É. Só que aqui você já não tinha 6. É que você inverteu. Talvez seja isso que está confundindo. Porque já estava $x - 6$. Aí você colocou $+ 6$ para poder zerar esse aqui, certo?
Linha 381	E6: Certo.
Linha 382	P: Então, se você fez mais 6 de um lado, o que você tem? Olha: você colocou mais 6, esse lado ficou mais pesado. Então, o que você tem que fazer do outro lado para ele continuar equilibrado?
Linha 383	E6: Acrescentar mais 6.
Linha 384	P: Isso.
Linha 385	E6: ((silêncio)) Vai ficar... ((silêncio))
Linha 386	P: Não, pode colocar aqui mesmo, porque você está igualando.
Linha 387	E6: Mais... 6.
Linha 388	P: Isso. Agora sim.
Linha 389	E6: Mais...
Linha 390	P: Agora você sabe descobrir quanto é que vale x .
Linha 391	E6: x vale $6 + 6$... esse aqui não tem?
Linha 392	P: Isso. Isso acabou. Zero. Isso.
Linha 393	E6: ((silêncio)) 36. 36.
Linha 394	P: Isso. Então x é igual a...?
Linha 395	E6: A 36.
Linha 396	P: 6. Perfeito. ((silêncio)) deu para entender melhor essa parte da equação?
Linha 397	E6: Deu.
Linha 398	P: Deu? Então vamos fazer um último teste. Eu quero que você faça a mesma coisa, só que vou colocar mais uma equação aqui. Quero que você resolva este aqui para mim. $x + 3$ igual a 10.
Linha 399	E6: ((silêncio))
Linha 400	P: Como eu faço?
Linha 401	E6: ((silêncio)) $x + 3$ igual a (10) ((fala baixa)) ((silêncio))
Linha 402	P: Sempre lembre o passo a passo. Eu tenho que deixar o x sozinho, certo?
Linha 403	E6: Humn.
Linha 404	P: Então quem está aí de intruso junto com o x ?
Linha 405	E6: O 10... Não, o 3.
Linha 406	P: O 3, certo?
Linha 407	E6: Aham.
Linha 408	P: E o 3, o que eu tenho que fazer com ele? Ele tem que virar quanto?
Linha 409	E6: Zero.
Linha 410	P: Zero. Então vai ficar...?
Linha 411	E6: Menos 3...
Linha 412	P: Aham.
Linha 413	E6: Com menos 3.
Linha 414	P: Humn.
Linha 415	E6: Igual a 3.
Linha 416	P: Tá. A balança desequilibrou. Você tirou 3. Então o que você tem que fazer do outro lado?
Linha 417	E6: x é igual... a 3.
Linha 418	P: Isso. Tirar 3.
Linha 419	E6: 3.
Linha 420	P: Isso. Só que só tem um detalhe. Aqui você tem $+ 3$, não é?
Linha 421	E6: Aham.
Linha 422	P: Você está tirando 3. Porque você já não tem 3, se tirar mais... tirar outro 3, vai ficar $- 6$ aqui. Tem que mudar o sistema.
Linha 423	E6: ((fala baixinho))
Linha 424	P: Isso.
Linha 425	E6: Mais 6 - 3.

Linha 426	P: Isso. Aí vai ficar quanto?
Linha 427	E6: - x... Esse aqui já não tem mais...
Linha 428	P: Isso.
Linha 429	E6: ... mas você tem ((fala baixa)) 3 + 3, 6. ((silêncio))
Linha 430	P: 6? Tem certeza? Confere a conta.
Linha 431	E6: 10 - 3... Olha! 7.
Linha 432	P: 7. Isso.
Linha 433	E6: ((silêncio))
Linha 434	P: Certinho. Ok, perfeito. Então, de atividade nós terminamos.
Linha 435	E6: Tá bom.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO O

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 4

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E4: ESTUDANTE 4

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Bom, então vamos lá. Eu queria que você falasse um pouquinho do jogo. O que você achou?
Linha 2	E4: Eu achei o jogo legal, só que... um pouco difícil...
Linha 3	P: É? Por que é difícil?
Linha 4	E4: Porque na vinte ((fase 20)) eu não consegui passar. Aí fiquei, tipo, pensando, pensando... Aí... eu fui lá e consegui, aí eu pensei, aí eu consegui passar. Só que na vinte... quando eu cheguei na vinte quatro também consegui. Aí na vinte e cinco estava difícil... Aí... você parou o jogo...
Linha 5	P: Entendi. E você achou que o jogo te ajudou a entender a atividade?
Linha 6	E4: ((Silêncio)) Mais ou menos...
Linha 7	P: Mais ou menos. Por quê?
Linha 8	E4: Porque... eu não entendi muita coisa do jogo...
Linha 9	P: Humn... E a atividade? O que você achou dessa atividade (comparada) com aquela que você fez no ano passado?
Linha 10	E4: ((Pausa)) Eu achei... legal...
Linha 11	P: Legal? ((Pausa)) O que você achou legal, por exemplo?
Linha 12	E4: ((Silêncio)) Aí... Tipo... é... algumas coisas ((Silêncio)).
Linha 13	P: Algumas coisas... o quê? (rs)
Linha 14	E4: Algumas coisas estavam difíceis, algumas coisas estavam fáceis.
Linha 15	P: Aham. Por exemplo, essa primeira aqui, o que você achou? Aqui ele fala para descobrir o valor de x . E fala assim que você precisa... O que você escreveu?
Linha 16	E4: “Precisa colocar o zero”.
Linha 17	P: Colocar o zero, e sumir o x . Tá. Só que, aí, ele quer o resultado. Aqui ele está falando que você precisa somar dos dois lados, certo? Quero dizer, somar de um lado. Precisa somar o 2 com 2. Porque lembra que a primeira atividade do jogo você tinha que arrastar os quadradinhos, aí virava um só? Quanto ficaria aqui?
Linha 18	E4: ((Silêncio)) Ficaria quatro eu acho.
Linha 19	P: Quatro. Isso, não é? Então aqui era só colocar o resultado.
Linha 20	E4: ((Silêncio))
Linha 21	P: Não é? E, da mesma forma, os outros também. Esse dois, por exemplo, quanto ficaria?
Linha 22	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Seis.
Linha 23	P: Seis. Perfeito. E aí, e a três?
Linha 24	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Doze.
Linha 25	P: Doze. Ok, quatro?
Linha 26	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Dez?
Linha 27	P: Dez. Isso. Aí chega no número cinco. O que você resolveu até agora chamam-se equações. E a equação está mostrando sempre duas coisas iguais. De um lado de cá da igualdade e do outro lado. Aqui ele já está te dando: “ $x = 12$ ”. Isso significa que o x é igual a quanto?
Linha 28	E4: ((Pausa)) A zero?
Linha 29	P: Por que zero?
Linha 30	E4: ((fala bem baixinho)) Ah, não sei.

Linha 31	P: ((Silêncio)) Onde você tirou o zero? O que você pensou para achar que é zero?
Linha 32	E4: ((Pausa)) Isso aqui?
Linha 33	P: Aham. Só que isso aqui, ele está falando em relação a isso. Ele está falando que x é igual a doze, certo?
Linha 34	E4: Aham.
Linha 35	P: Então qual é o valor de x , nisso aqui?
Linha 36	E4: ((Silêncio))
Linha 37	P: Porque igualdade o que é? ((Pausa)) Quando você fala que alguma coisa é IGUAL? ((Pausa)) O que significa?
Linha 38	E4: ((Silêncio e fala baixinho)) Não sei...
Linha 39	P: Se eu falar, por exemplo, que a minha blusa é igual a sua.
Linha 40	E4: ((Silêncio)) Então é igual.
Linha 41	P: Sim, igual. Igual significa, por exemplo, que a minha blusa é igual a sua?
Linha 42	E4: ((Silêncio)) Não...
Linha 43	P: Não. O que você viu que elas não são iguais?
Linha 44	E4: Que a sua é branca e a minha é preta...
Linha 45	P: Isso. A minha é branca e a sua é preta. A minha calça é igual a sua?
Linha 46	E4: Não.
Linha 47	P: Não também. Agora, e essa carteira? Esquece os rabiscos, a carteira em si, é igual a essa?
Linha 48	E4: É.
Linha 49	P: Por que?
Linha 50	E4: ((Pausa)) Porque é igual!
Linha 51	P: O que você vê que é igual?
Linha 52	E4: ((Pausa)) Os detalhes?
Linha 53	P: Os detalhes! Isso. No caso dos números, aqui, ele só está expressando isso. Então, o sinal de igual, está falando isso: que um lado tem a mesma característica do outro. E o x é um valor que eu não sei. Mas eu sei que ele é igualzinho a 12. ((Pausa)) Então qual é o valor de x ?
Linha 54	E4: ((Silêncio e fala baixinho)) Não sei...
Linha 55	P: Não sabe? Então vou fazer o seguinte: eu vou pegar um aparato ¹ . Deixe-me só pausar... ((O DIÁLOGO É INTERROMPIDO PARA EXPLICAR VISUALMENTE A IDEIA DE IGUALDADE POR MEIO DO APARATO))
Linha 56	P: Com essa explicação que eu fiz, da balança, você consegue agora entender? Por exemplo, vamos supor que esse x seja esse carrinho aqui.
Linha 57	E4: Aham.
Linha 58	P: Então x vale quanto?
Linha 59	E4: ((Pausa)) Vale doze?
Linha 60	P: Vale doze! É doze a resposta. Então, já estava ali a resposta. Quer colocar a resposta?
Linha 61	E4: ((Silêncio))
Linha 62	P: Põe a resposta (rs)
Linha 63	E4: Vou ter que colocar aqui embaixo?
Linha 64	P: Isso.
Linha 65	E4: ((Silêncio))
Linha 66	P: Isso... doze. Agora, quais outras somas que dão (resultado) doze? Me fale dois números que, somados, o resultado dá doze.
Linha 67	E4: ((Silêncio)) Zero menos x?
Linha 68	P: Zero menos x ? Humn... Só que, o x , você não sabe o número. Tem que ser com o número que você já sabe. ((Pausa)) Pegue dois números que você já sabe e que, somando, vai dar doze.
Linha 69	E4: Dez... mais dois.
Linha 70	P: Isso! Dez mais dois. Pode colocar... dez mais dois. ((Silêncio)) $10 + 2$, né? Não vírgula... isso, $10 + 2$...
Linha 71	E4: Aham.

¹ Para ajudar na compreensão dos estudantes, sobre a ideia de igualdade, criei uma balança utilizando dois copos descartáveis e um cabide. Cada copo ficou suspenso em um lado do cabide, por meio de fios de barbante, no qual, utilizando-se de bolinhas de gude, de tamanhos iguais, ou miniaturas de carros, em cada lado da balança, mostrei a ideia de equilíbrio e desequilíbrio como forma de expressar a noção de equação.

Linha 72	P: Isso. Ok. Agora pensando nisso aqui, vamos para essa atividade seis. Aqui você falou que $6 + 3 = 9$ é falsa. Por que que você concluiu que é falsa?
Linha 73	E4: ((Pausa)) Porque... eu contei... e não deu o mesmo valor...
Linha 74	P: É? 6 mais 3 não é igual a 9?
Linha 75	E4: Não...
Linha 76	P: Quanto que é $6 + 3$?
Linha 77	E4: É oito.
Linha 78	P: Oito? Tem certeza?
Linha 79	E4: ((Silêncio))
Linha 80	P: Faz de novo a conta, seis mais três (rs).
Linha 81	E4: ((Sussurrando fazendo a conta)) Espera... ((Silêncio)) Ah, é nove.
Linha 82	P: É nove. Então, ela é verdadeira. Né?
Linha 83	E4: ((Silêncio))
Linha 84	P: Verdadeira... Perfeito. Aí a <i>b</i> está certa, $14 = 7 + 7$. A ((letra)) <i>c</i> : $3 + 3$ é igual a $1 + 5$?
Linha 85	E4: ((Silêncio)) É.
Linha 86	P: Por que?
Linha 87	E4: Porque aqui é... ((sussurra))
Linha 88	P: Humn?
Linha 89	E4: Porque aqui é igual?
Linha 90	P: Sim. Quanto que é?
Linha 91	E4: ((Sussurrando fazendo as contas)) Aqui dá seis.
Linha 92	P: Perfeito.
Linha 93	E4: ((Pausa)) E aqui dá seis?
Linha 94	P: Isso!
Linha 95	E4: Então está... verdadeira.
Linha 96	P: Verdadeira, isso. Perfeito. Aí o outro: $1 + 4 = 2 + 3$. Certinho. E o ((item)) <i>E</i> , por que é falso?
Linha 97	E4: ((Pausa)) Porque... eu contei... e não deu nenhuma soma...
Linha 98	P: Sim, porque $13 + 3$ é quanto?
Linha 99	E4: ((Silêncio)) Dezoito?
Linha 100	P: Conte treze. Memorize treze, aí conte três.
Linha 101	E4: ((Silêncio)) Dezesesseis.
Linha 102	P: Dezesesseis. Dezesesseis é igual seis?
Linha 103	E4: ((Pausa)) É...
Linha 104	P: Dezesesseis?
Linha 105	E4: ((interrompe a pesquisadora)) Não! Não...
Linha 106	P: Por que?
Linha 107	E4: ((Pausa)) Porque não é!
Linha 108	P: Seis não é dezesesseis, não é?
Linha 109	E4: É...
Linha 110	P: Seis é seis.
Linha 111	E4: É.
Linha 112	P: Então...
Linha 113	E4: Sim.
Linha 114	P: Essa é falsa, certo? Ok... agora, a ((atividade)) sete. $7 + -2$ que é igual a $7 - 2$. Aí você respondeu aqui...
Linha 115	E4: É nove.
Linha 116	P: Nove? É... Qual é a conta que você fez aqui?
Linha 117	E4: ((Pausa)) Eu... dividi?
Linha 118	P: Dividiu? Dividir 7 por 2 dá 9?
Linha 119	E4: ((Silêncio))
Linha 120	P: Não?
Linha 121	E4: Não... ((Silêncio))
Linha 122	P: ((Pausa)) Não... E $7 - 2$ é quanto?
Linha 123	E4: ((Silêncio)) É oit... nove?
Linha 124	P: Aí você está somando dois né? Você tem sete e está somando dois, aí dá nove. Só que você está tirando, em vez de somar...

Linha 125	E4: ((Silêncio)) Dá dez?
Linha 126	P: Dez? Por que dez?
Linha 127	E4: ((Pausa)) Porque está somando?
Linha 128	P: Humn... só que você está tirando, né? Ele está falando que isso aqui é igual a 7 menos 2 você tem que tirar 2 de 7.
Linha 129	E4: ((Silêncio)) Dois de sete... ((pausa e sussurra baixinho)) Não entendi...
Linha 130	P: Se você tem sete carrinhos e tira dois, com quantos carrinhos você fica?
Linha 131	E4: ((Pausa)) Se eu tiro... quanto?
Linha 132	P: Você tem sete carrinhos e tira dois, com quanto que você fica de carrinho?
Linha 133	E4: Sete.
Linha 134	P: Você tinha sete, não é? ((Pausa)) Vamos pensar em um outro número. Se você tinha três carrinhos e tira dois. Com quanto que você fica?
Linha 135	E4: ((Pausa)) Um.
Linha 136	P: Um. Então agora pense: se você tem cinco carrinhos e tira três, dá quanto?
Linha 137	E4: ((Pausa)) três.
Linha 138	P: Três... Você tinha cinco.... e tira três... Quanto dá?
Linha 139	E4: ((Pausa)) Cinco tira três... ((Silêncio)) Dois.
Linha 140	P: Dois. Agora você tem sete e tira dois, quanto dá?
Linha 141	E4: Eu tinha sete... e tira dois, cinco!
Linha 142	P: Cinco! Então agora aqui o resultado é...
Linha 143	E4: Cinco.
Linha 144	P: Cinco. ((Pausa)) Agora, estes daqui, é a mesma coisa, então quando está entre parênteses o + e o - você tira e ele vai ficar só com -. Então vai ficar 2 - 2. Não é?
Linha 145	E4: Aham.
Linha 146	P: Aqui vai ficar 5 - 3, 8 - 5, 33 - 12 e 2 - 8. Quanto vai dar essas contas?
Linha 147	E4: ((Silêncio)) Aqui vai dar dois?
Linha 148	P: Aí vai dar dois? Qual a conta que você fez?
Linha 149	E4: ((Pausa)) É... pela... pelo negócio que você me falou?
Linha 150	P: É... A mesma coisa que aqui. Isso. Só que aqui vai ficar 2 - 2, né? Quanto que dá 2 - 2?
Linha 151	E4: ((Pausa)) Dois?
Linha 152	P: Por quê?
Linha 153	E4: Dois?
Linha 154	P: Por que dois?
Linha 155	E4: ((Silêncio))
Linha 156	P: Você tem dois... tira dois.
Linha 157	E4: ((Pausa)) Então dois... tiro dois? É zero?
Linha 158	P: Zero!
Linha 159	E4: Aham.
Linha 160	P: E aí, esse aqui, cinco tira três.
Linha 161	E4: Cinco... e tira três... Cinco.
Linha 162	P: Cinco tira três... ó, 5 tira 3 ((demonstrando com objetos)).
Linha 163	E4: Dois.
Linha 164	P: É dois, não é? ((Pausa)) Isso. Como o tempo está acabando, deixe-me ver só o que você fez nos outros... Não conseguiu fazer os outros?
Linha 165	E4: Não.
Linha 166	P: Então vou parar por aqui e eu pular para o questionário, tá? Que é a entrevista sobre o seu perfil de aluno, tá?

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO P

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 19

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E19: ESTUDANTE 19

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Eu vi o seu questionário e você está falando um pouco sobre o seu sentimento em relação à disciplina de Matemática no qual você falou que é “bom”. Daí você fala que tem o sonho de ser engenheiro. De onde vem esse sonho? Tem alguma influência?
Linha 2	E19: É que eu gosto de desenhar... prédio, casa... essas coisas.
Linha 3	P: Então você quer ser engenheiro civil?
Linha 4	E19: Aham.
Linha 5	P: Legal. Tem alguém na sua família que trabalha com isso?
Linha 6	E19: ((silêncio)) Não.
Linha 7	P: Não?
Linha 8	E19: ((muxixa)) tsc tsc.
Linha 9	P: E você fala que a Matemática é importante na sua vida, mas em que aspecto ela é importante?
Linha 10	E19: Ah, se na minha profissão, eu quero ser engenheiro, e você não sabe Matemática, você não tem como ser engenheiro.
Linha 11	P: Sim.
Linha 12	E19: Não é? Porque você tem que calcular... as coisas lá, não é? Os tamanhos... centímetros... Ah, a Matemática é importante em tudo, para mim.
Linha 13	P: Certo. E você tem dificuldade em Matemática?
Linha 14	E19: Tenho.
Linha 15	P: Em que aspecto que você tem dificuldade?
Linha 16	E19: É... em álgebra. Álgebra e equações do segundo grau...
Linha 17	P: Aham.
Linha 18	E19: Eu tenho dificuldade...
Linha 19	P: Certo. E tem alguma parte da Matemática que você tem mais facilidade?
Linha 20	E19: Ah... acho que... não.
Linha 21	P: Não? Então, no geral, álgebra é o que você tem mais dificuldade?
Linha 22	E19: É.
Linha 23	P: Humn, entendi... E aí, das matérias que gosta mais, você falou que é educação física e que gosta de praticar esporte... Gosta de algum esporte em específico?
Linha 24	E19: Futebol.
Linha 25	P: Futebol. Só futebol?
Linha 26	E19: É futebol, basquete... todo esporte eu gosto... vôlei...
Linha 27	P: Humn... Legal. E Português?
Linha 28	E19: Português, Matemática...
Linha 29	P: Humn, legal. Em Português, do que você gosta?
Linha 30	E19: Ah porque... eu tenho que saber Português, não é? Se não saber falar, né... Como as coisas... tipo... ((silêncio)) Ah... eu não sei explicar...
Linha 31	P: Por exemplo, você gosta de fazer alguma leitura específica?
Linha 32	E19: É, leitura.
Linha 33	P: Que tipo de coisa você lê?

Linha 34	E19: Gibi.
Linha 35	P: Gibi? Turma da Mônica? Essas coisas?
Linha 36	E19: É. Turma da Mônica jovem... livros...
Linha 37	P: Humn... Que tipo de livro você lê?
Linha 38	E19: Ah... qualquer livro que me der eu leio.
Linha 39	P: Tem algum estilo ou algum autor de sua preferência?
Linha 40	E19: Não.
Linha 41	P: Qualquer tipo de livro?
Linha 42	E19: Qualquer tipo de livro.
Linha 43	P: Ciência? Ficção...
Linha 44	E19: Aham.
Linha 45	P: Tudo?? Ah... que legal. E (em relação à) Matemática você respondeu: “ <i>nós precisamos aprender a Matemática</i> ”. Mas, por quê? É só por causa da sua profissão ou tem mais algum sentido?
Linha 46	E19: Não. Porque você vai trabalhar em... vamos supor... um mercado. Você vai ser (operador de) caixa. Se você não souber a Matemática, não tem como você saber dar o troco, saber quanto que fica... Então, essas coisas...
Linha 47	P: Aham, entendi. E, em relação às matérias que você não gosta, você falou que é só inglês. O que você tem mais dificuldade nela?
Linha 48	E19: Ah... eu não consigo falar em inglês.
Linha 49	P: É o “falar” que é difícil?
Linha 50	E19: É, do falar. Eu não consigo aprender inglês.
Linha 51	P: Mas, por exemplo, se você ler, consegue entender o que está escrito?
Linha 52	E19: Não consigo.
Linha 53	P: Também não consegue? E as aulas de inglês? Como elas são?
Linha 54	E19: Ah, normal, mas eu não consigo entrar no ritmo da aula porque eu não sei inglês. Não adianta! Ela pode me explicar, mandar ler o texto em inglês, eu não consigo ler...
Linha 55	P: Entendi... a sua dificuldade é, às vezes, de traduzir?
Linha 56	E19: É, traduzir.
Linha 57	P: Humn... entendi... mas a estrutura da gramática, verbo <i>to be</i> , que é o básico, você consegue pelo menos entender?
Linha 58	E19: Ah... não... Não consigo nada em inglês... Não consigo...
Linha 59	P: Você só estuda inglês aqui ou faz inglês fora (da escola)?
Linha 60	E19: Não, só aqui mesmo.
Linha 61	P: Você já pensou em fazer algum curso de inglês fora (da escola)?
Linha 62	E19: Ah.... já. Pensei já em fazer... Mas, eu não consigo...
Linha 63	P: É? Mas, será que você não criou algum “bloqueio” em inglês? Algum tipo de medo como: “ <i>Ah eu não consigo aprender inglês. É muito difícil!</i> ”.
Linha 64	E19: É... difícil o inglês. Não consigo aprender.
Linha 65	P: Quanto tempo que você começou a estudar inglês aqui na escola?
Linha 66	E19: Desde o ano passado.
Linha 67	P: Ah, o ano passado?? Então ainda é cedo para falar: “ <i>Não! Eu não consigo aprender inglês!</i> ” Acho que você está sendo muito drástico... (rs)
Linha 68	E19: É... Dá para eu aprender ainda, mas... eu não consigo trabalhar... em inglês.
Linha 69	P: E falando em tempo, você sempre estudou aqui nesta escola?
Linha 70	E19: Estudo desde o ano passado só.
Linha 71	P: Ah, desde o ano passado? Onde você estudava antes?
Linha 72	E19: No Lydia Kitz, atrás do Extra.
Linha 73	P: Essa escola é particular?
Linha 74	E19: Não, só quando eu era pequeno que estudei em escola particular.
Linha 75	P: Humn, entendi.
Linha 76	E19: Também participei de uma... olimpíada de Matemática e eu ganhei.
Linha 77	P: Sérioo? Olha, que bacana! Foi nessa escola?
Linha 78	E19: Não, foi em outra, quando eu era pequeno.
Linha 79	P: Ah, entendi. E nessa escola como que era a sua relação com os seus amigos? Você se dava bem?
Linha 80	E19: Ah, sim, me dava. Aqui também me dou bem... É legal.
Linha 81	P: E essa escola (Lydia Kitz) era perto da sua casa? Ou esta (a escola atual) é mais próxima?

Linha 82	E19: Não, a outra era mais próxima de casa, quando eu era pequeno, não é?
Linha 83	P: Humn, sei... E por que você mudou para esta escola?
Linha 84	E19: Ah, porque a minha mãe acha esta escola boa. A disciplina...
Linha 85	P: Certo. E você sente diferença entre a escola que você estudava e esta?
Linha 86	E19: Sim, porque lá era... É que, quando nós éramos pequenos, não bagunçávamos tanto como bagunçamos aqui. Não tinha tanta bagunça lá quanto tem aqui.
Linha 87	P: Certo... E mesmo assim a sua mãe acha que aqui é melhor?
Linha 88	E19: É. ((silêncio))
Linha 89	P: Você sabe o por quê?
Linha 90	E19: Ah... o por que eu não sei...
Linha 91	P: Ela nunca te explicou? (rs)
Linha 92	E19: É... Só que ela acha bom aqui, pois ela costuma ir a um encontro de casais, na igreja, e tem aqui também.
Linha 93	P: Ah, entendi.
Linha 94	E19: E aí como tem nesta escola este encontro, ela acha bom aqui.
Linha 95	P: Certo, entendi. Vai ver ela conhece alguém daqui, não é?
Linha 96	E19: É...
Linha 97	P: Entendi. E, falando nisso, o que você considera uma boa aula? Você explicou um pouco aqui dizendo que é um professor que consegue “desenvolver”. Mas, o que é “conseguir desenvolver a aula”? Explique um pouquinho melhor.
Linha 98	E19: Ah... tipo, o professor explica. Tem gente que não consegue entender a explicação. Se ele consegue explicar melhor, e dá para entender, isso já é um avanço. É a parte boa da aula. Para mim, na minha opinião.
Linha 99	P: Certo.
Linha 100	E19: É... uma aula boa? É um professor desenvolver, como eu falei, conseguir explicar, passar a matéria que ele precisa... Porque, a professora de Português, ela tem dificuldade de nos passar a matéria, ela não consegue desenvolver, por causa da bagunça da sala... Ela não consegue desenvolver as aulas.
Linha 101	P: Entendi...
Linha 102	E19: Já o professor Edgar¹ ele consegue desenvolver a aula dele toda.
Linha 103	P: Aham.
Linha 104	E19: Porque ele é mais “grosso”, sabe? Ele brinca com a gente, mas, na hora da aula, ele não gosta de bagunça e já a professora de Português não consegue segurar (a bagunça).
Linha 105	P: Entendi. Daí por causa da bagunça você acha que a aula não rende?
Linha 106	E19: É, a aula não rende. Ela não consegue explicar, não consegue passar a lição. E é isso que eu acho...
Linha 107	P: Aham. Mas é só a aula de Português que é mais crítica assim?
Linha 108	E19: Só a de Português.
Linha 109	P: E a de Matemática e as outras? Dá para desenvolver?
Linha 110	E19: Não. Dá para desenvolver.
Linha 111	P: É? Legal. E em relação às suas horas livres? O que você costuma fazer?
Linha 112	E19: Ah eu costumo sair, jogar bola, ler gibi, livro... Essas coisas aí... Mas o meu tempo livre mesmo eu jogo mais bola porque eu moro em condomínio, não é? Daí vou para a quadra e jogo mais bola.
Linha 113	P: Aham. E aqui você falou que você gosta de ficar andando pelas ruas... É sozinho ou com os amigos?
Linha 114	E19: Ah com os amigos. Lá do prédio, nós andamos, saímos, vamos para o shopping...
Linha 115	P: Ah para passear mesmo.
Linha 116	E19: É.
Linha 117	P: Legal. E, na sua casa, mora você e quem mais?
Linha 118	E19: Eu, meu irmão, minha mãe e meu pai. Nós quatro.
Linha 119	P: Entendi. E como que você faz as atividades da escola na sua casa?
Linha 120	E19: Ah, em algumas atividades eu tenho dificuldade, daí peço para a minha mãe me ajudar. E Matemática eu não tenho muita dificuldade. Só em álgebra, equação de segundo grau e essas matérias novas que o professor está passando.
Linha 121	P: Certo. E a sua mãe consegue te ajudar?

¹ Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

Linha 122	E19: Consegue. Porque a minha mãe terminou os estudos. Só o meu pai que não terminou os estudos...
Linha 123	P: Certo, entendi... E como você costuma se preparar para as avaliações daqui?
Linha 124	E19: ((silêncio))
Linha 125	P: As provinhas...
Linha 126	E19: Para falar a verdade, eu nem estudo para fazer as provas... Mas, tipo... eu posso até bagunçar, mas na hora que for a explicação eu vou lá para frente, escuto a explicação, presto atenção... Algumas coisas eu consigo desenvolver e algumas não.
Linha 127	P: Humn.
Linha 128	E19: E aí, no dia da prova, vamos dizer que... eu vou “mais ou menos”.
Linha 129	P: Entendi. Dá para garantir uma nota.
Linha 130	E19: Dá para garantir uma nota.
Linha 131	P: Tá... E na matéria que você tem mais dificuldade? Como você faz para se preparar?
Linha 132	E19: ((silêncio)) Matéria que eu tenho dificuldade?
Linha 133	P: É...
Linha 134	E19: Para se preparar? Eu... vou no caderno e leio algumas coisas que o professor passou, na matéria que eu tenho mais dificuldade. E pego algumas explicações.
Linha 135	P: De onde que você pega essas explicações?
Linha 136	E19: Do caderno. Porque o professor de Matemática costuma fazer as explicações, para escrever no caderno, e ele consegue fazer também... ele faz uma conta, tipo, desenvolver e saber fazer a conta. E é assim...
Linha 137	P: Entendi... E na sua casa? Você tem alguma rotina? Tem alguma tarefa que você sempre faz? Como é o dia a dia na sua casa?
Linha 138	E19: Ah... normal... Tipo, eu arrumo o quarto... O que a minha mãe me pedir, eu faço.
Linha 139	P: Entendi. Você ajuda muito em casa? Sua mãe te pede muita ajuda sua?
Linha 140	E19: Não, minha mãe não me pede muito, mas, quando ela pede, eu faço.
Linha 141	P: Humn.
Linha 142	E19: Ela não pede muita... ajuda.
Linha 143	P: E os seus irmãos, por exemplo?
Linha 144	E19: Meu irmão também, ele arruma a parte dele e eu arrumo a minha parte. Aí a minha mãe, tipo, coloca um dia de sábado que eu vou fazer... arrumar o quarto e arrumar a sala. Aí cada um arruma a sua parte. E ela arruma outras partes.
Linha 145	P: Certo. A sua mãe trabalha fora ou ela cuida só da casa?
Linha 146	E19: Não, só da casa. Só meu pai que trabalha na casa.
Linha 147	P: Entendi. E o seu pai trabalha o dia todo?
Linha 148	E19: O dia todo. É das quatro às oito.
Linha 149	P: Final de semana vocês têm um tempo juntos?
Linha 150	E19: Sim. No dia de domingo.
Linha 151	P: Ah domingo? Então ele trabalha até sábado?
Linha 152	E19: É.
Linha 153	P: Entendi...
Linha 154	E19: Ele trabalha um dia sim e um dia não. Ele trabalha em dois empregos, daí, no dia de domingo, quando tem as folgas, ele fica em casa.
Linha 155	P: Ah, entendi...
Linha 156	E19: Daí nós saímos...
Linha 157	P: Certo. E o que você gosta de fazer junto com a família?
Linha 158	E19: Ah... sair...
Linha 159	P: Sair mesmo?
Linha 160	E19: É... mais sair.
Linha 161	P: Tem algum lugar em específico?
Linha 162	E19: Ah... para o shopping porque (é para onde) eu gosto mais de ir é o shopping.
Linha 163	P: E parque ou museus? Vocês costumam ir?
Linha 164	E19: Aham. Em parque...
Linha 165	P: Vocês já foram em quais?
Linha 166	E19: Já fui no museu do Catavento... Na cidade mirim... que é uma cidade de bicicletas. Acho que só...
Linha 167	P: Do Catavento, o que você achou de lá?
Linha 168	E19: Ah é legal o Catavento...

Linha 169	P: O que você mais gostou de lá?
Linha 170	E19: Era tipo umas telas que têm na parede, aí nós tínhamos que ficar sentados, parados, em frente a ela, olhando... Aí ela ficava, tipo, mudando, te hipnotizando... Aí, eu achei “da hora” isso aí.
Linha 171	P: Legal... Tem mais algum lugar que você gostaria de visitar? Algum museu? Porque tem bastante em São Paulo além do Catavento...
Linha 172	E19: É, o museu do futebol.
Linha 173	P: Ah, o museu do futebol é legal!
Linha 174	E19: Aham. Eu queria visitar lá.
Linha 175	P: Legal. E futebol? Você torce para algum time?
Linha 176	E19: Aham, São Paulo.
Linha 177	P: São Paulo, legal. Você acompanha os jogos?
Linha 178	E19: Aham, todo dia.
Linha 179	P: E na sua casa todo mundo é são paulino?
Linha 180	E19: Só minha mãe que é palmeirense.
Linha 181	P: Ah, entendi...
Linha 182	E19: Meu pai e meu irmão são “são paulinos”.
Linha 183	P: Então seu pai te influenciou ou você escolheu?
Linha 184	E19: Não... eu era corinthiano... mas é que o meu tio me deu uma camiseta do São Paulo (futebol clube) e me levou para assistir um jogo do São Paulo.
Linha 185	P: Humn...
Linha 186	E19: E eu achei legal... o jogo. Daí torci para o São Paulo, comecei a torcer.
Linha 187	P: Entendi...
Linha 188	E19: Mas eu torcia para o Corinthians, mas não era tão fã do Corinthians...
Linha 189	P: Certo...
Linha 190	E19: Não ia a nenhum jogo.... Do São Paulo eu vou aos jogos.
Linha 191	P: Aham, entendi... E TV (televisão), você costuma assistir bastante?
Linha 192	E19: Não. Não gosto muito de TV... Não consigo ficar parado... assistindo TV. Só na hora de dormir.
Linha 193	P: E na internet?
Linha 194	E19: Ah na internet... Não muito, porque lá no... condomínio, tem muita coisa para fazer. Mas aí eu jogo mais videogame... lá em casa.
Linha 195	P: E que tipos de jogos você mais gosta no videogame?
Linha 196	E19: Ah... futebol, aventura...
Linha 197	P: Então futebol é com os amigos ou jogando sozinho mesmo?
Linha 198	E19: Ah, com os amigos, com o meu irmão...
Linha 199	P: Ah, legal... Tem mais algum jogo ou atividade que você gosta de fazer com os amigos além de sair? Tem alguma brincadeira que vocês gostam de praticar?
Linha 200	E19: Ah... vôlei. Lá nós jogamos vôlei, futebol, todo dia. Quando tem, nós jogamos.
Linha 201	P: Entendi, então é mais esporte mesmo?
Linha 202	E19: É mais esporte. Eu gosto mais de esporte.
Linha 203	P: Legal. Muito obrigada. Fica por aqui a nossa entrevista. Isso já vai me ajudar bastante na pesquisa.
Linha 204	E19: Tá, obrigado.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

ANEXO Q

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 22

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E22: ESTUDANTE 22

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Eu queria que, antes de a gente começar a ler o que respondeu aqui, me contasse um pouco sobre você. O que você faz no seu dia a dia, na escola?
Linha 2	E22: Ah, em casa eu costumo fazer algumas coisas de casa, tipo arrumar as camas, levar o lixo, varrer a casa, ajudo a minha mãe assim, no geral. Já na escola eu costumo fazer as matérias, assim, com um pouco de dificuldade porque... por causa do meu problema de visão¹...
Linha 3	P: Aham.
Linha 4	E22: E então eu tenho que tirar foto da lousa para poder copiar.
Linha 5	P: Ah, entendi. E o que é que você gosta de fazer nas suas horas livres?
Linha 6	E22: Ah, eu gosto de ler livros, em específico de vampiros (rs).
Linha 7	P: Estou vendo. Está lendo o que? O Diário de um Vampiro?
Linha 8	E22: O Diário de um Vampiro.
Linha 9	P: Legal.
Linha 10	E22: É... eu também gosto de jogar muito jogos de RPG, principalmente online...
Linha 11	P: Certo.
Linha 12	E22: Gosto muito de jogos assim, tal... eu amo ler, jogar, assistir vídeos de pessoas jogando, reagindo a jogos, reagindo a vídeos, músicas que eu gosto também.
Linha 13	P: Aham.
Linha 14	E22: Ouvir música eu gosto bastante, às vezes eu até componho algumas.
Linha 15	P: É mesmo?
Linha 16	E22: É.
Linha 17	P: Ah, mas aí você faz curso, alguma coisa assim?
Linha 18	E22: Não, não faço nada.
Linha 19	P: Ah, então você é autodidata?
Linha 20	E22: É. (rs)
Linha 21	P: Olha! ((admirada)) (rs)
Linha 22	E22: É.
Linha 23	P: E que tipo de composição você já fez?
Linha 24	E22: Eu faço música triste... feliz. Em geral, o que eu estiver sentindo, eu ponho no papel.
Linha 25	P: Ah, legal. E você toca algum instrumento musical?
Linha 26	E22: Não. Mas eu vou começar a fazer aula de música para tocar guitarra.
Linha 27	P: Ah, que legal. E aproveitando que você falou disso, como você se sente em relação à matéria de Matemática?

¹ Já estava ciente de que esta estudante tem baixa visão.

Linha 28	E22: (rs) Então, Matemática, eu não... tem coisas que eu entendo e sou boa.
Linha 29	P: Humn.
Linha 30	E22: Tem coisas que, se eu não entendo, eu sou péssima.
Linha 31	P: Certo.
Linha 32	E22: Então, tecnicamente, eu acho que, tem gente que fala que, é o modo da pessoa me explicar, então eu tento achar outros meios de aprender aquilo que eu não aprendi ainda.
Linha 33	P: E você consegue me dar algum exemplo? De, por exemplo, uma matéria da Matemática que você acha fácil, que você domina, e que você não tenha problema?
Linha 34	E22: Eu gosto bastante de divisão, multiplicação, adição... soma e tal... eu gosto bastante também é... de frações.
Linha 35	P: Aham.
Linha 36	E22: Eu não sou muito boa para esse negócio de x, y .
Linha 37	P: De álgebra?
Linha 38	E22: ((suspira angustiada)) É... Nem um pouquinho boa.
Linha 39	P: Entendi. Qual é a sua dificuldade em álgebra? O que tem de diferente na álgebra?
Linha 40	E22: Por que, uma vez, muitos professores já me disseram que “se não tem número, não é Matemática”. (rs)
Linha 41	P: Aham.
Linha 42	E22: Então, eu não consigo. (rs) Se tem um x eu já fico “meu Deus, o que eu faço da minha vida?”
Linha 43	P: Entendi. Você não consegue lidar com o fato de não ter um número ali?
Linha 44	E22: É. (rs)
Linha 45	P: É não saber o número que te dá aquela angústia?
Linha 46	E22: Isso.
Linha 47	P: Ah, entendi. Você gosta de ler também, não é? Então eu acho que até consigo adivinhar qual matéria que você mais gosta, mas, de qual matéria que você mais gosta?
Linha 48	E22: Português. (rs)
Linha 49	P: Certo. Mas você gosta tudo de português?
Linha 50	E22: Português, eu sou até que boa em português, porque o fato de eu ler bastante me dá uma... uma noção de onde colocar vírgula, ponto, acento...
Linha 51	P: Humn...
Linha 52	E22:... onde colocar cada palavra. Então...
Linha 53	P: Você é boa em gramática?
Linha 54	E22: Sou. (rs)
Linha 55	P: É?
Linha 56	E22: Eu gosto de escrever.
Linha 57	P: É? Eu acho que agora não deve ter uma parte de literatura dividida, não é? Eu acho que talvez até divida lá no livro didático, mas não tem uma matéria específica, não é? Para isso.
Linha 58	E22: Não, não tem não.
Linha 59	P: Mas você gosta dessa parte de interpretação de texto, de redação?
Linha 60	E22: Gosto. Gosto bastante.
Linha 61	P: É?
Linha 62	E22: Também tem o fato de eu gostar de informática, bastante, pena que não tem na escola, mas eu gosto bastante de informática.
Linha 63	P: Ah, não tem na escola? Entendi...
Linha 64	E22: Tanto que eu quero seguir o meu... a minha profissão que quero seguir mesmo é designer de games, então...
Linha 65	P: Ah, interessante.
Linha 66	E22: Eu realmente fico triste porque não tem informática.
Linha 67	P: É, mas, depende da escola, não é?
Linha 68	E22: É.
Linha 69	P: Às vezes, na aula mesmo, você não vai usar muita coisa que vai usar para desenvolvimento.
Linha 70	E22: É.

Linha 71	P: Seria legal você fazer um curso técnico, voltado para jogos. Você já pensou em procurar algum curso?
Linha 72	E22: Já. Eu estou procurando alguns, aí eu estou vendo se eu consigo a vaga porque é bem concorrido o designer de games.
Linha 73	P: Ah, é? Onde você está pensando em fazer?
Linha 74	E22: Ah, eu estou pensando em fazer... aqui perto, só que não tem vaga.
Linha 75	P: Ah.
Linha 76	E22: Aí eu estou procurando. Mais para frente, vamos ver. Vamos indo...
Linha 77	P: Entendi. É um curso pago?
Linha 78	E22: É.
Linha 79	P: Ah, entendi.
Linha 80	E22: E é caro...
Linha 81	P: É caro, não é? Desenvolvimento normalmente é caro mesmo.
Linha 82	E22: É.
Linha 83	P: Entendi. E as matérias que você não gosta?
Linha 84	E22: Ah, ((suspiro)) história e geografia.
Linha 85	P: Por quê?
Linha 86	E22: Essa coisa de data, ano... ((silêncio)) pessoa que já morreu.
Linha 87	P: Humn.
Linha 88	E22: A quin... quintilhões de anos atrás.
Linha 89	P: (rs)
Linha 90	E22: Eu não faço nem ideia (rs).
Linha 91	P: Entendi.
Linha 92	E22: Eu não lembro de nada de história. Eu tenho muita dificuldade em história.
Linha 93	P: Aham.
Linha 94	E22: Geografia, então, meu Deus, me lembra muito história. E eu fico... “qual é qual?” (rs)
Linha 95	P: Aham.
Linha 96	E22: Eu confundo às vezes geografia com história e fica naquela.
Linha 97	P: Humn. É, mas você sabe que, na verdade, geografia, história, até se você começar a estudar literatura, eles se cruzam, não é? Tem coisas que são iguais.
Linha 98	E22: É, cruzam bastante...
Linha 99	P: É. Geografia, só não vai cruzar com história na parte de relevo, talvez, não é?
Linha 100	E22: Não é? (rs)
Linha 101	P: E aí é específico. Mas...
Linha 102	E22: É.
Linha 103	P: E então essa coisa de memorizar datas, nomes?
Linha 104	E22: Eu sou péssima... ((silêncio))
Linha 105	P: Mas você não gosta de ler? Você não grava (os nomes d)as personagens, essas coisas?
Linha 106	E22: Eu li um livro semana passada, já não lembro nem qual é o nome, quando saiu, não lembro de nada. (rs)
Linha 107	P: Humn. (rs) Então eu acho que você gosta mais do contexto, da história?
Linha 108	E22: É. O momento.
Linha 109	P: Ah, entendi. Certo. Então Matemática não está na lista do que você não gosta?
Linha 110	E22: Não muito. Mas... é.
Linha 111	P: Mas? Está no mediano?
Linha 112	E22: Tá entre o meio termo. (rs)
Linha 113	P: Entendi. E o que você considera uma boa aula?
Linha 114	E22: Ah, eu acho que... ((silêncio)) os alunos interagirem com o professor e tal. Esse... bate-papo assim.
Linha 115	P: Aham.
Linha 116	E22: Que às vezes não tem, pelo fato da sala mesmo não se... adaptar a isso.
Linha 117	P: Entendi.
Linha 118	E22: Mas também acho bem legal isso. É interessante porque todo mundo fica, se eu errar... eu... eu vou errar na frente de todo mundo. Não é nem na prova, assim, na prova ninguém vai ver. Mas...

Linha 119	P: Aham.
Linha 120	E22: ...na frente de todo mundo: “vamos ver se eu erro, se eu acerto...”
Linha 121	P: Entendi.
Linha 122	E22: Aí isso... eu gosto bastante.
Linha 123	P: Então, por exemplo, para a aula de Matemática ser boa, como teria que ser a dinâmica da aula?
Linha 124	E22: Ah, fazer, vamos supor é... um... ((silêncio)) Perguntas aleatórias, tipo ah, vai: “É x vezes isso ou aquilo? Dá quanto?”. E apontar uma pessoa e ela tem que responder na lata. Se não, ela perde.
Linha 125	P: Aham.
Linha 126	E22: Se fizer assim com “pontos” tipo um jogo?
Linha 127	P: Sei, sei. Aham.
Linha 128	E22: Seria legal. (rs)
Linha 129	P: Entendi. Mas aí você não vai se expor? Porque se você responder errado, aí todo mundo vai saber.
Linha 130	E22: ((muxixa)) ah, mas... Todo mundo erra. (rs)
Linha 131	P: Ah.
Linha 132	E22: Todo mundo é humano, todo mundo pode errar.
Linha 133	P: Ah, então, no contexto do jogo, aí tudo bem? Assim?
Linha 134	E22: É.
Linha 135	P: É. Legal. E você sempre estudou nessa escola?
Linha 136	E22: Não. Pelo fato que... eu não... eu morava longe. E, no 7º ano, ou foi no 8º, alguma coisa assim, não teve (turma) aqui.
Linha 137	P: Aham.
Linha 138	E22: Foi o 7º que não teve aqui. Então só teve do 6º e o 8º para cima. Então não teve.
Linha 139	P: Mas, você estudava antes então. Saiu e depois voltou?
Linha 140	E22: Não. Eu comecei no 8º.
Linha 141	P: Ah, começou no 8º?
Linha 142	E22: É.
Linha 143	P: Entendi. Onde você estudava antes?
Linha 144	E22: No Presbiteriano.
Linha 145	P: Humn. Então é uma escola particular?
Linha 146	E22: É. Uma escola particular.
Linha 147	P: Aqui perto?
Linha 148	E22: Mais ou menos. É perto. Mas não chega a ser tão perto.
Linha 149	P: Entendi. Então aqui você estuda desde o ano passado?
Linha 150	E22: Isso.
Linha 151	P: E comparando à escola que você estudava antes com aqui, o que você sente de diferença?
Linha 152	E22: O fato dos professores, é... alguns tem mais... vamos dizer, “especialidade”.
Linha 153	P: Aham.
Linha 154	E22: E outros já não tem a mesma.
Linha 155	P: Aham.
Linha 156	E22: E a diferença dos professores assim, de dar aula mesmo.
Linha 157	P: Aham.
Linha 158	E22: Porque os outros... da outra escola, eles faziam perguntas assim, do nada. Chegava assim, ah... uma pergunta. E a pessoa tinha que responder. Se não respondia, ela... ficava tipo com “cara de besta” na frente de todo mundo. Então... (rs).
Linha 159	P: Mas perdia nota?
Linha 160	E22: Não.
Linha 161	P: Não? E aqui, como são as aulas?
Linha 162	E22: Aqui, os professores passam na lousa e às vezes no livro e a gente tem que copiar, às vezes, eles explicam. Mas quase não tem muita (explicação), porque a sala é muito bagunceira.
Linha 163	P: Entendi. Então, não tem muita interação com o professor?

Linha 164	E22: Não, não. Tem muito pouco.
Linha 165	P: Entendi. E comparando (os professores)? Porque vocês mudaram de professor (de Matemática), não é?
Linha 166	E22: Isso.
Linha 167	P: No ano passado vocês estavam com a professora Ângela... e esse ano com o professor Xavier. ²
Linha 168	E22: É.
Linha 169	P: E de um ano para outro, mudou a dinâmica da aula?
Linha 170	E22: De Matemática? Sim, bastante.
Linha 171	P: É? Em que aspecto?
Linha 172	E22: Porque assim, a professora Ângela, ela tem... tem cara de ser rígida, mas ao mesmo tempo ela é legal.
Linha 173	P: Aham.
Linha 174	E22: Então, ela fazia o que eu falei que seria legal, tipo pegar uma pessoa para fazer ela responder a uma questão, fazer a pessoa ir lá na lousa responder. Já o professor... esqueci o nome...
Linha 175	P: Xavier?
Linha 176	E22: O Xavier já não é assim. Ele passa na lousa...
Linha 177	P: Aham.
Linha 178	E22: Explica e, às vezes, ele vai explicar pessoalmente para o aluno...
Linha 179	P: Aham.
Linha 180	E22:... mas não tem muito essa... coisa. Tem gente que nem faz porque fica... por aí bagunçando na sala de aula.
Linha 181	P: Humn. Entendi, então falta um pouco dessa dinâmica da aula, não é?
Linha 182	E22: Isso.
Linha 183	P: Nesse aspecto que é diferente? Entendi. Na sua casa, por exemplo, quando você vai fazer as suas atividades aqui (da escola), tem alguém que te ajuda? Ou você faz sozinha?
Linha 184	E22: É. Eu não costumo pedir ajuda para os meus pais, porque geralmente eles são muito ocupados. Meu pai mesmo é taxista, então ele não fica em casa. Ele sai às 5 da manhã e volta à meia-noite.
Linha 185	P: Aham.
Linha 186	E22: Então, não... não peço muito para o meu pai. Minha mãe está sempre fazendo as coisas de casa e eu tenho um irmão mais novo. Então eu tenho que cuidar dele também.
Linha 187	P: Aham.
Linha 188	E22: Então geralmente eu faço sozinha. Ou então saio para fazer (a tarefa) com meus amigos.
Linha 189	P: Ah, entendi. Então quando você tem dúvida, normalmente, você pede (ajuda) assim?
Linha 190	E22: Eu dou uma escapadinha de casa para ir para...
Linha 191	P: ...para fazer (lição) com os seus amigos?
Linha 192	E22: Para fazer com os meus amigos.
Linha 193	P: Ah, isso é legal, de estudar com os amigos.
Linha 194	E22: É.
Linha 195	P: Vocês aprendem.
Linha 196	E22: É. (São) amigos do prédio.
Linha 197	P: Ah, legal. E eles estudam aqui também?
Linha 198	E22: Não, eles não. Eles estudam em outras escolas.
Linha 199	P: Ah, entendi. E para a prova, como você costuma fazer para estudar para a prova, por exemplo, de Matemática? (rs)
Linha 200	E22: Geralmente, estudo na biblioteca aqui da escola.
Linha 201	P: Aham.
Linha 202	E22: Eu não costumo geralmente estudar em casa, porque eu penso assim: “na escola eu estudo, em casa eu fico tranquila”.
Linha 203	P: Ah, entendi.

² Os nomes utilizados são fictícios para preservar o anonimato.

Linha 204	E22: Então geralmente dou uma organizada. Então, lição de casa mesmo, eu faço, quando dá, na biblioteca.
Linha 205	P: Humn, entendi. E você tem alguma estratégia para estudar para cada tipo de matéria? Por exemplo, como você estuda para Matemática?
Linha 206	E22: Matemática, eu vou pegando alguns exercícios assim, na internet mesmo.
Linha 207	P: Aham.
Linha 208	E22: E... vou pegando a explicação de alguns professores e vou fazendo em cadernos separados.
Linha 209	P: Entendi. E você costuma refazer alguns exercícios que foram feitos em sala?
Linha 210	E22: Não muito. Mas às vezes sim, eu faço.
Linha 211	P: E essa estratégia, você acha que funciona?
Linha 212	E22: Funciona bastante. (rs)
Linha 213	P: É? Você vai bem?
Linha 214	E22: É. Mas, algumas coisas, me dá branco só na hora da prova.
Linha 215	P: Ah, claro.
Linha 216	E22: É muito impressionante...
Linha 217	P: (rs) E para as outras matérias, por exemplo, língua portuguesa? Que você gosta...
Linha 218	E22: ...ah, língua portuguesa, eu fico apenas lendo livros, e etc. Porque, língua portuguesa, não tem muito o que se estudar.
Linha 219	P: Aham.
Linha 220	E22: Então, realmente eu não estudo para língua portuguesa.
Linha 221	P: Entendi.
Linha 222	E22: Porque eu costumo ler bastante, escrever bastante. Então, eu acho que não tem tanta necessidade. Ter (até) tem, mas não tem tanta.
Linha 223	P: Aham.
Linha 224	E22: Então a quantidade de estudo é menor.
Linha 225	P: Entendi. Então é uma outra dinâmica?
Linha 226	E22: É.
Linha 227	P: E para as matérias que você não gosta, por exemplo, história e geografia, qual é a estratégia que você usa para estudar?
Linha 228	E22: Eu dou um... jeitinho de encontrar algum professor no YouTube. (rs)
Linha 229	P: Ah, no YouTube?
Linha 230	E22: Sim. (rs)
Linha 231	P: É? Tem professores que ensinam as matérias?
Linha 232	E22: Tem, tem. Matéria, português, tudo.
Linha 233	P: Tem algum canal específico que você assiste?
Linha 234	E22: Ah, canal... é que eu geralmente não olho o canal, canal é só...
Linha 235	P: Ah, você olha o conteúdo?
Linha 236	E22: É.
Linha 237	P: Ah, legal.
Linha 238	E22: Canal mesmo, eu só pego os que eu gosto mesmo, que é tipo... de jogos, de palhaçadas, essas coisas assim.
Linha 239	P: Certo. Entendi. Legal. E na sua casa você falou que tem o seu pai, a sua mãe e o seu irmão?
Linha 240	E22: E a minha mãe.
Linha 241	P: É, seu pai, a sua mãe e o seu irmão?
Linha 242	E22: Sim, e eu.
Linha 243	P: Vocês são em quatro pessoas?
Linha 244	E22: Só.
Linha 245	P: E vocês têm animais de estimação?
Linha 246	E22: Não, infelizmente não. Mas eu adoraria ter um cachorro. (rs)
Linha 247	P: Entendi. Ah, então moram quatro pessoas na sua casa?
Linha 248	E22: É.
Linha 249	P: Legal. E na rotina da sua casa? Você me contou um pouco, que o seu pai trabalha muito, não é?
Linha 250	E22: Sim.

Linha 251	P: Ele trabalha até um período ³ e é difícil estar em casa.
Linha 252	E22: Isso.
Linha 253	P: E a sua mãe, ela fica em casa?
Linha 254	E22: Ela fica, mas ela é manicure.
Linha 255	P: Ah, tá.
Linha 256	E22: Ela faz (a unha) na casa das pessoas. E as pessoas vem na minha casa para fazer.
Linha 257	P: Ah, entendi. Então ela também tem essa rotina?
Linha 258	E22: É. Tem essa (rotina)...
Linha 259	P: E o seu irmão, ele é mais novo?
Linha 260	E22: Sim. Ele tem 5 anos.
Linha 261	P: Cinco anos. E ele já está estudando na escolinha?
Linha 262	E22: É. Está, ele está no período intermediário, das 11h às 3h (da tarde).
Linha 263	P: Ah, entendi. Então agora ele fica com a sua mãe?
Linha 264	E22: Sim. Com a minha mãe. No caso, hoje, ele está na casa da minha vó.
Linha 265	P: Ah, entendi. Então, no período que está todo mundo fora de casa, você está aqui?
Linha 266	E22: Isso. É... eu estou...
Linha 267	P: Então não tem ninguém.
Linha 268	E22: Meus pais devem estar no mercado agora.
Linha 269	P: Ah, entendi.
Linha 270	E22: Então... A gente tem essa rotina. Eu não saio muito, só vou da igreja para casa, da escola para casa. E geralmente, de vez em quando, dou uma saída, umas fugidas com os meus amigos.
Linha 271	P: Ah, entendi. E isso que você costuma fazer de final de semana, você sai com os amigos?
Linha 272	E22: É. Meio que escondido... porque minha mãe tem medo, pelo fato de eu ter problema de visão.
Linha 273	P: Ah, entendi. O seu problema de visão é fotossensível?
Linha 274	E22: É, sim. Eu tenho baixa visão.
Linha 275	P: Ah, tá.
Linha 276	E22: Astigmatismo e hipermetropia, um monte de coisas, desvio no cone, tenho tanta coisa que nem eu mesma sei.
Linha 277	P: Ah, entendi. Aí você senta na frente?
Linha 278	E22: Sim.
Linha 279	P: Aí você tira foto da lousa?
Linha 280	E22: É.
Linha 281	P: E isso (a foto) você já consegue ver?
Linha 282	E22: Dependendo do dia em que meu celular está com uma boa vontade de tirar foto certa.
Linha 283	P: Ah, entendi. E para você fazer, por exemplo, essas atividades na folha, você precisa de uma fonte um pouco maior? Ou você consegue enxergar?
Linha 284	E22: É. Eu acho que com 24 já está bom. Tamanho 24.
Linha 285	P: Aham.
Linha 286	E22: Do... 15 para o 24 é o tamanho ideal.
Linha 287	P: Certo.
Linha 288	E22: Passou disso, eu já acho um exagero.
Linha 289	P: Ah, entendi. Então, essa fonte aqui eu acho que usei 12. Deve estar pequeno para você, não é?
Linha 290	E22: Até que não. Se eu aproximar certinho, dá para enxergar.
Linha 291	P: Ah, entendi. E para ler livros também, você não sente dificuldade?
Linha 292	E22: Não, eu leio bem de pertinho. O meu problema mesmo é de longe. De perto eu não tenho problema algum em ler.
Linha 293	P: Ah, entendi. Agora me fale um pouco da parte da sua autoestima.

³ Em um trecho do nosso diálogo, o estudante citou o trabalho de seu pai: “*Meu pai mesmo é taxista, então ele não fica em casa. Ele sai às 5 da manhã e volta à meia-noite.*”.

Linha 294	E22: Então, é que assim, a minha autoestima tem... dependendo do assunto, se eu sofro algum tipo de coisa que eu... ((pausa)). Vamos supor, eu recebo uma notícia muito ruim...
Linha 295	P: Sim.
Linha 296	E22: A minha autoestima vai lá para o chão, porque, assim, eu sempre fui excluída de tudo que eu sempre quis fazer, por causa da minha deficiência visual.
Linha 297	P: Aham.
Linha 298	E22: Eu sofri muito <i>bullying</i> na minha vida, e eu, literalmente, ficava no chão.
Linha 299	P: Sei...
Linha 300	E22: Então, eu estou ainda aprendendo... Geralmente, eu encontrei nos jogos, o que eu não tinha encontrado em nada que eu fazia. Encontrei nos jogos, nos livros, o que eu precisava mesmo: que era um pouco mais de... esperança... algo diferente... Tanto que eu gosto bastante dessas coisas místicas. Por quê? Porque eles podem ter qualquer problema impossível, mas estão sempre achando uma solução.
Linha 301	P: Certo.
Linha 302	E22: Então, isso me deixa uma esperança de que eu também posso ter essa solução.
Linha 303	P: Aham, certo.
Linha 304	E22: Então, às vezes, eu até não consigo fazer alguma coisa, tipo em casa ou aqui na escola, porque, às vezes, a minha autoestima está lá no chão. Mas eu faço o possível para que ela volte, para eu poder voltar ao meu ritmo.
Linha 305	P: Aham.
Linha 306	E22: Porque eu sei que, se eu não voltar para o meu ritmo, acabo repetindo de ano.
Linha 307	P: Sim.
Linha 308	E22: Mas, às vezes, a minha autoestima não quer subir. Então... ela fica lá embaixo...
Linha 309	P: Mas que tipo de coisa te deixa “para baixo”? Por exemplo, aqui na escola, você tem algum problema de <i>bullying</i> ou essas coisas?
Linha 310	E22: Não, porque eu aprendi a não me importar com isso mais.
Linha 311	P: Certo.
Linha 312	E22: Mas, mesmo assim, às vezes, algumas coisas... vamos dizer assim, machucam.
Linha 313	P: Claro.
Linha 314	E22: Então, geralmente, eu sou sensível a esse tipo de coisa ainda... Querendo ou não, ainda sou um pouco sensível a isso. Então minha autoestima ainda fica naquele patamar de “desabar”.
Linha 315	P: Entendi... Então, na verdade, você fica “para baixo” não só por questão da baixa autoestima. É que você fica “para baixo” por causa dessas coisas que acontecem?
Linha 316	E22: Exatamente.
Linha 317	P: Daí você não consegue ter força...
Linha 318	E22: ...suficiente para fazer alguma coisa...
Linha 319	P: Entendi.
Linha 320	E22: Até mesmo as coisas que eu gosto, eu perco interesse quando eu estou assim. Porque eu simplesmente quero ficar ali... pensando só naquilo para ver o que eu resolvo. Se eu consigo resolver aquilo sozinha ou se eu preciso de ajuda.
Linha 321	P: Certo. E você já conversou sobre isso com os seus pais?
Linha 322	E22: Geralmente, eu não converso sobre isso com os meus pais, pelo fato que meus pais estão sempre dizendo que eu sou “frescurenta” e que eu sou... “preguiçosa”.
Linha 323	P: Humn.
Linha 324	E22: Mas não é bem assim... Eu mesma falo, de vez em quando: “Eu sou diferente!”. Eu não sou igual a vocês. Eu não tenho o mesmo pensamento que vocês tinham de quando tinham a minha idade.
Linha 325	P: Certo...

Linha 326	E22: Então, tecnicamente, eu sou muito diferente de muita gente por aí. Os cegos, podem falar até que... Me falam assim: “ <i>tem gente muito pior de visão do que você, tipo, cegos</i> ”. Mas os cegos, eles têm a maneira deles de ver as coisas.
Linha 327	P: Certo...
Linha 328	E22: Tipo, quando uma pessoa pergunta para eles: “ <i>O que você tem?</i> ” E eles respondem: “ <i>Ah, eu sou cego</i> ”. Eles podem explicar facilmente. O meu problema de visão, eu não posso explicar, tipo, em uma só palavra. Eu tenho que demorar um pouco para explicar e, às vezes, a pessoa não entende o que eu tenho.
Linha 329	P: Aham.
Linha 330	E22: E isso, às vezes, faz com que a pessoa fique achando que é frescura minha, mas não é...
Linha 331	P: Sim. E você já conseguiu conversar com alguém a respeito disso?
Linha 332	E22: Sim, os meus amigos. Eles entendem bastante. Eu tenho um amigo meu mesmo que ele perdeu uma irmã, em um acidente de carro, e ela tinha baixa visão. Então ele entende muito a minha situação.
Linha 333	P: Certo... Então, você tem, nos seus amigos, alguém para recorrer e para desabafar pelo menos, não é?
Linha 334	E22: Sim, tenho.
Linha 335	P: E aqui na escola você tem amigos?
Linha 336	E22: Eu tenho algumas amigas, posso dizer assim. Eu converso com todo mundo que vem conversar comigo. Eu converso, mas eu tenho a impressão de que eu não sou uma das melhores pessoas para conversar (rs). Porque eu nunca fui muito de conversar, porque ninguém nunca quis vir para falar comigo. Então... pelo fato de que eu sempre me senti, quando era pequena, um “monstrinho” perto de muita gente...
Linha 337	P: Humn...
Linha 338	E22: Então, eu realmente não sou muito de conversar...
Linha 339	P: Entendi. Mas se as pessoas chegarem em você, daí você conversa?
Linha 340	E22: Eu converso. Sou educada, a partir do momento que sejam educados comigo.
Linha 341	P: Claro. É recíproco, não é? (rs)
Linha 342	E22: Eu tenho a personalidade muito forte. E pavio muito curto! (rs)
Linha 343	P: Sei! (rs) Mas então você tem colegas aqui na escola?
Linha 344	E22: Sim, eu tenho. Algumas. São poucas, mas eu tenho.
Linha 345	P: Ah, que bom, pois nada pior do que se sentir sozinha na escola!
Linha 346	E22: Pois é... (rs)
Linha 347	P: E esses seus colegas entendem a sua...
Linha 348	E22: ...sim, tinha a antiga coordenadora, Adelaide ⁴ , que entendia bastante a minha situação. E agora que trocou de direção e de coordenadora, acho que está... ainda vou ter que me acostumar com isso.
Linha 349	P: Sim, na verdade, eu vim (fazer a pesquisa) nesta escola por causa da Adelaide! (rs)
Linha 350	E22: É, eu também vim por causa da Adelaide! (rs)
Linha 351	P: Legal. Bom, acho que é isso. Então, por enquanto, a nossa entrevista fica por aqui.

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))

⁴ O nome utilizado é fictício para manter o anonimato.

ANEXO R

SEGUNDA TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIO – ESTUDANTE 4

CONVENÇÕES ADOTADAS

PALAVRA... = ALONGAMENTO VOCÁLICO, HESITAÇÃO OU INTERRUPÇÃO DE ATO DE FALA.

... PALAVRA = CONTINUAÇÃO DA FALA DO TURNO DO FALANTE QUE FOI INTERROMPIDO.

((PALAVRA)) = COMENTÁRIOS DO TRANSCRITOR.

(PALAVRA) = PALAVRA OMITIDA DA FALA, MAS QUE FOI ACRESCENTADA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DA TRANSCRIÇÃO.

IDENTIFICAÇÃO DE FALANTES

P: PESQUISADOR (A)

E4: ESTUDANTE 4

((INÍCIO DA TRANSCRIÇÃO))

Linha 1	P: Eu olhei o seu questionário e queria que me falasse um pouco sobre o que respondeu em relação à disciplina de Matemática: você disse que acha ela muito difícil e que precisa de muita ajuda. Você tem alguém que possa te ajudar?
Linha 2	E4: Não tenho...
Linha 3	P: Não? Ninguém na sua casa ou algum amigo...
Linha 4	E4: ((silêncio)) Só na internet...
Linha 5	P: Na internet? Você costuma ver na internet quando tem dúvida essas coisas?
Linha 6	E4: Sim.
Linha 7	P: Onde você procura na internet?
Linha 8	E4: No youtube.
Linha 9	P: No youtube? Canais que explicam...
Linha 10	E4: ((silêncio))
Linha 11	P: Isso é só em relação à Matemática ou qualquer matéria?
Linha 12	E4: ((silêncio)) Só em Matemática.
Linha 13	P: Só Matemática? E você fala que gosta de ciências, da parte do corpo humano... O que você gosta de estudar no corpo humano?
Linha 14	E4: ((silêncio)) É... saber mais sobre o corpo?
Linha 15	P: O quê?
Linha 16	E4: Saber mais sobre o corpo.
Linha 17	P: Saber mais sobre o corpo... Como funciona, essas coisas?
Linha 18	E4: É...
Linha 19	P: Ah tá... Fora isso, você gosta mais de alguma matéria?
Linha 20	E4: Não...
Linha 21	P: Só ciências que você gosta?
Linha 22	E4: Só ciências... Ciências e educação física.
Linha 23	P: Ah, educação física? Que legal! E em educação física, do que você gosta?
Linha 24	E4: De correr... essas coisas.
Linha 25	P: Ah correr. Você gosta de atividade física?
Linha 26	E4: Sim...
Linha 27	P: Ah legal... E da matéria que você não gosta, Matemática, é porque você acha muito difícil. Mas, é só por causa disso? Você acha que é difícil porque não entende a matéria ou é o jeito de explicar do professor? O que você acha?
Linha 28	E4: ((silêncio)) Acho que é o jeito do professor. Do jeito que ele passa na lousa e não explica, entendeu? Você tem que ir lá na frente, e pedir ajuda.
Linha 29	P: Certo. E você sempre estudou nessa escola?
Linha 30	E4: Não...
Linha 31	P: Onde você estudava?
Linha 32	E4: No colégio Guarulhos.
Linha 33	P: O colégio Guarulhos é particular ou público?
Linha 34	E4: Particular.

Linha 35	P: E você veio para cá (escola atual) quando?
Linha 36	E4: Ano passado.
Linha 37	P: Ano passado, então no oitavo ano. E você sente alguma diferença desta em relação à escola que estudava antes?
Linha 38	E4: Sim... Lá é muito diferente daqui...
Linha 39	P: Em que aspecto?
Linha 40	E4: É que lá é muito diferente, tipo, os professores explicam, essas coisas.
Linha 41	P: Lá você conseguia entender melhor as matérias?
Linha 42	E4: ((silêncio)) Mais ou menos...
Linha 43	P: Mais ou menos? Humn... e por que você veio para cá (escola atual)?
Linha 44	E4: ((silêncio)) Porque eu não gostava mais da escola e eu ficava chorando. Falava: “mãe, me tira dessa escola”. Aí ela falou: “então vou colocar você em escola pública”. Daí ela me colocou aqui.
Linha 45	P: Ah, entendi. E aqui é perto da sua casa?
Linha 46	E4: Não.
Linha 47	P: Não? É longe?
Linha 48	E4: Mais ou menos...
Linha 49	P: E como você vem para a escola?
Linha 50	E4: Eu pego ônibus.
Linha 51	P: Ah você vem de ônibus? Entendi. E o que você acha que é uma boa aula?
Linha 52	E4: ((silêncio)) É uma sala silenciosa que... o professor explica bem, sabe? Tipo, ele te ajuda, essas coisas...
Linha 53	P: Certo... E o que você acha que falta para a turma fazer silêncio?
Linha 54	E4: ((silêncio))
Linha 55	P: Como a turma faz silêncio? Tem algum professor que consegue fazer silêncio na turma?
Linha 56	E4: Sim, o Edgar¹.
Linha 57	P: Certo. E o que ele tem de diferente que a turma faz mais silêncio na aula dele?
Linha 58	E4: Ele é bravo. E, tipo, se ele fala para a sala silenciar, a sala fica quieta.
Linha 59	P: Aham.
Linha 60	E4: A sala respeita ele e a gente respeita também.
Linha 61	P: Entendi... mas porque ele é bravo?
Linha 62	E4: Sim.
Linha 63	P: E os outros professores não são bravos?
Linha 64	E4: Tem, a Lídia²... tem... só.
Linha 65	P: E...
Linha 66	E4: ...tem a Lídia, a professora de ciências... deixe-me ver... ((silêncio)). Não lembro mais.
Linha 67	P: E o pessoal faz silêncio na aula desses professores?
Linha 68	E4: Sim.
Linha 69	P: Sim? Entendi... E para você estudar para as provas? Como faz?
Linha 70	E4: ((silêncio)) Para estudar para as provas? É... eu vou para o quarto, pego as coisas mais difíceis e vou lendo.... E na hora da prova eu vou lá e faço.
Linha 71	P: Aí essa leitura que você faz são das anotações?
Linha 72	E4: É, eu anoto lá e... fico estudando.
Linha 73	P: Entendi. E tem alguém que te ajuda? Quando você tem dúvida?
Linha 74	E4: Não.
Linha 75	P: Ninguém?
Linha 76	E4: Ninguém.
Linha 77	P: Quem é que mora com você?
Linha 78	E4: Meu pai, minha mãe, minhas duas irmãs.
Linha 79	P: Elas (irmãs) são mais velhas ou mais novas?
Linha 80	E4: Mais velhas.
Linha 81	P: E você convive com elas ou são muito mais velhas que quase não as vê?
Linha 82	E4: Não, a gente mora junto. Uma trabalha e a outra faz faculdade. Então, não tem muito tempo.

¹ Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

² Psuedônimo adotado para preservar o anonimato.

Linha 83	P: Ah, sim, por isso que elas não conseguem te ajudar também, não é? E o que vocês gostam de fazer em família?
Linha 84	E4: ((silêncio)) Meu pai, ele não sai muito comigo, tipo, com a gente. Meu pai não gosta, ele só fala assim para minha mãe sair com a gente. Meu pai nunca saiu com a gente.
Linha 85	P: Ah é? Por quê? Ele está cansado?
Linha 86	E4: Não sei, porque ele sempre trabalha de domingo a domingo.
Linha 87	P: Ah entendi, então ele trabalha bastante. Então deve estar cansado, não é?
Linha 88	E4: Sim...
Linha 89	P: E para onde vocês costumam sair?
Linha 90	E4: Shopping.
Linha 91	P: Shopping? E parque, museus, vocês vão?
Linha 92	E4: Não.
Linha 93	P: Não? Então mais shopping mesmo? Legal... E nas suas horas livres... Eu não entendi o que você escreveu... o que você escreveu aqui?
Linha 94	E4: Quietos.
Linha 95	P: Quietos? Você fica quieto por quê?
Linha 96	E4: ((silêncio)) Ah porque eu fico quieto... (rs)
Linha 97	P: Mas, você fica fazendo o quê? Você fica que nem uma “estátua” assim? (rs)
Linha 98	E4: ((silêncio))
Linha 99	P: É isso?
Linha 100	E4: É.
((O SINAL DA ÚLTIMA AULA DO DIA TOCA AO FUNDO))	
Linha 101	P: Nossa... E livros? Quais tipos você costuma ler?
Linha 102	E4: Eu vou embora.
Linha 103	P: Já estou terminando, só essa última pergunta.
Linha 104	E4: Eu vou ter que ir porque meu amigo está me esperando...
Linha 105	P: Só me responde que tipo de livro que você costuma ler. Já acabou a entrevista.
Linha 106	E4: Não, eu não gosto de livro.
Linha 107	P: Mas... (rs) você falou que lê livros... ((referindo a resposta escrita do questionário))
Linha 108	E4: Ah, eu leio... romances...
Linha 109	P: Romance? De que tipo?
Linha 110	E4: Ah sei lá!
Linha 111	P: Tá bom... estudante 4, obrigada!

((FIM DA TRANSCRIÇÃO))