UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

LUZIA MAYA KIKUCHI

Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino
fundamental: uma aproximação entre os Obstáculos
Epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais
(Versão corrigida)

São Paulo

2012

LUZIA MAYA KIKUCHI

Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no Ensino Fundamental: uma tentativa de aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elio Carlos Ricardo

São Paulo

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catálogo na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

-
- 372.6 K47o Kikuchi, Luzia Maya
Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no Ensino Fundamental: uma aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais / Luzia Maya Kikuchi; orientação Elio Carlos Ricardo. São Paulo: s.n., 2012.
136 p. ils.; grafs.; tabs.; anexos
- Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.
1. Álgebra 2. Aprendizagem 3. Ensino Fundamental (São Paulo) I. Ricardo, Elio Carlos, orient.
-

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: KIKUCHI, Luzia Maya

Título: Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no Ensino Fundamental: uma tentativa de aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Ciências e Matemática

Aprovado em: 13/08/2012

Banca Examinadora

Prof. Dr.: Elio Carlos Ricardo (presidente)

Instituição: FEUSP

Assinatura: _____

Prof. Dr.: Dario Fiorentini

Instituição: FE-UNICAMP

Assinatura: _____

Prof. Dr.: Vinício de Macedo Santos

Instituição: FEUSP

Assinatura: _____

Dedico este trabalho aos meus pais, que me ensinaram a valorizar a educação e sempre buscar por novos horizontes.

Ao Marcelo, Leila e Wanessa, agradeço pelas contribuições, solidariedade e principalmente pela paciência durante o desenvolvimento desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Ao meu professor e orientador Dr. Elio Carlos Ricardo, que muito me ensinou nesse período de convivência, sempre muito paciente e atento aos detalhes. Mostrando-se sempre amigável e solícito em todos os momentos durante a minha pesquisa.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite para avaliar, sugerir e contribuir com este trabalho.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realizar o curso de mestrado e à Coordenação dos Cursos de Licenciatura da FE-USP por terem servido de ponte para o meu acesso às escolas-campo, sem a qual não poderia ter realizado esta pesquisa.

Aos coordenadores, funcionários e alunos das escolas: E.M.E.F Desembargador Amorim Lima, E.E Prof. Daniel Paulo Verano Pontes e E.E Profª Odete Fernandes Pinto da Silva pela participação na pesquisa.

Aos professores Dr. Maurício Pietrocola, Dra. Myriam Krasilchik e Dr. Nílson José Machado pelas contribuições indiretas com o trabalho durante a realização das disciplinas da pós-graduação e no exame de qualificação de mestrado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro através da concessão da bolsa de mestrado.

E finalmente aos meus alunos, maiores motivadores desta pesquisa, os meus sinceros agradecimentos pelos momentos de aprendizado mútuo e por proporcionar novas reflexões à minha atuação como professora. Reflexões que me ajudam a tornar uma profissional e, principalmente, uma pessoa cada vez melhor.

Face à realidade, o que julgamos saber claramente ofusca
o que deveríamos saber.
(Gaston Bachelard, 1884-1962)

RESUMO

KIKUCHI, L. M. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no Ensino Fundamental: uma aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais.** Dissertação (mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Esta pesquisa tem como objetivo investigar os obstáculos à aprendizagem de Álgebra no Ensino Fundamental com o intuito de ajudar na compreensão das dificuldades envolvidas no aprendizado desse tópico. Para tal efeito, foi feito um levantamento da bibliografia relacionada à construção da ideia de obstáculo, erros e dificuldades relativos à aprendizagem de Matemática no Brasil e no exterior. Através desse levantamento, constatou-se que elevados índices de erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental em países como a Inglaterra e os Estados Unidos, em problemas matemáticos relacionados à Álgebra, aproximam-se da realidade brasileira, como mostram os dados do último relatório fornecido pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas). Para confirmar esses fatos, foi aplicada uma pesquisa entre os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, da rede pública do estado de São Paulo, com questões adaptadas do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). Para efeitos de análise, os obstáculos encontrados foram classificados sob a perspectiva de quatro categorias (Epistemológicos, Didáticos, Psicológicos e Ontogenéticos) definidas por Guy Brousseau para o ensino de Matemática. Utilizou-se também o aspecto conceitual do domínio do funcionamento cognitivo do "*sujeito-em-situação*", cujas bases são advindas e ampliadas da teoria piagetiana de operações lógicas e das estruturas gerais do pensamento, conhecida como a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Esta pesquisa trata do *conhecimento-em-ação* e sua influência no aprendizado de Álgebra, o que é um *teorema-em-ação* e uma *invariante operatória*, além de mostrar o funcionamento dos esquemas. Desta forma, foi possível oferecer alguns indicativos ao professor do que seria necessário para compreender as dificuldades e obstáculos que envolvem o aprendizado de Álgebra e conscientizá-lo de que é relevante um acompanhamento em longo prazo e aprofundado de seus alunos para realmente obter respostas concretas sobre os obstáculos epistemológicos e os aspectos psicológicos envolvidos na aprendizagem, como definidos por Vergnaud (1994).

Palavras-chave: obstáculos epistemológicos, obstáculos de aprendizagem, álgebra, ensino fundamental, teoria dos campos conceituais

ABSTRACT

KIKUCHI, L. M. **Learning obstacles involved in the learning of algebraic concepts in elementary school: an approach between epistemological obstacles and Theory of Conceptual Fields.** Thesis (master's degree) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

The aim of this study is to examine obstacles and understand difficulties involved in the learning of Algebra in elementary school. The work consists in a review of the academic production and theoretical studies concerning the construction of the idea of obstacles, difficulties and errors in the learning of Mathematics in Brazil and overseas. The analyses of the studies revealed that a high level of errors made by students in elementary school in some countries, such as England and the United States, on mathematical problems related to Algebra, are close to the Brazilian reality, as shown by the data of the last report provided by INEP (National Institute of Studies and Research). Also an empirical study was applied among students in the 9th grade of elementary school, all from public schools of Sao Paulo. The questions applied in this study have been adapted from SARESP (System for Evaluation of Educational Achievement of Sao Paulo). For analysis purposes, the obstacles encountered were classified from the perspective of four categories (Epistemological, Educational, Psychological and Ontogenetic) defined by Guy Brousseau for teaching mathematics in addition to the conceptual aspect in the field of cognitive functioning of "*subject in a situation*", whose bases are arisen and extended from Piaget's theory of logical operations and the general structures of thought, known as Theory of Conceptual Fields (Vergnaud, 1990). This study also treats with *knowledge-in-action* and their influence on the learning of Algebra, what are *theorems-in-action* and *operative invariants* in addition to showing the function of schemes. Thus it was possible to offer some indications for teachers and helping them to understand difficulties and obstacles involving in the learning of Algebra. In addition, it is relevant to keep in mind that a long term and careful tracking of their students must be required. In that way, it is possible to infer answers involving obstacles on the epistemological and psychological aspects, as defined by Vergnaud (1994).

Keywords: epistemological obstacles, learning obstacles, algebra, elementary school, theory of conceptual fields

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 -	Continuidade de segmentos um atrás do outro	p.28
Figura 1.2 -	Segmentos alinhados pelo lado esquerdo.	p.29
Figura 1.3 -	Alinhamento dos segmentos um atrás do outro.	p.29
Figura 1.4 -	Gráficos utilizados para as seguintes questões: Qual dos gráficos acima representa a equação linear $y = 2x$? E qual a equação que representa os outros gráficos?	p.30
Figura 2.1 -	A impressão de que toda grandeza deve ser extensiva pode gerar no aluno problemas na compreensão das escalas de temperatura.....	p.53
Figura 2.2 -	Questão retirada do ENEM, 2006.....	p.55
Figura 2.3 -	Questão retirada do ENEM, 2004.....	p.58
Figura 3.1 -	No exemplo acima, nota-se que o aluno precisou fazer um teste empírico, em vez de elaborar uma expressão algébrica para encontrar o resultado do problema, ao menos conforme se esperava a partir dos conteúdos ensinados.....	p.66
Figura 3.2 -	No exemplo acima, nota-se que o aluno apresentou dificuldade na elaboração de uma expressão algébrica em função de duas variáveis.....	p.67
Figura 3.3 -	O aluno sabia que havia uma relação, no entanto, confundiu as grandezas representadas e a constante da equação.....	p.68
Figura 3.4 -	Não sabemos afirmar qual foi o raciocínio adotado pelo aluno, mas provavelmente ele tentou associar a expressão algébrica com as alternativas	p.69
Figura 4.1 -	Exemplo de um(a) aluno(a) que não conseguiu encontrar uma forma de dividir os vasos entre as três pessoas sem deixar sobrar nenhum. É possível notar que ele se focou nos conteúdos, mas não considerou a condição de que não deveriam sobrar vasos, que era implícita. (Resposta referente à questão 2).....	p.82
Figura 4.2 -	Exemplo em que o aluno confundiu o expoente da variável e colocou-o no coeficiente. (Resposta referente à questão 3).....	p.82

- Figura 4.3 - Exemplo em que o aluno ignorou os graus das variáveis e simplesmente operou com os seus coeficientes (Resposta referente à questão 3)..... p.83
- Figura 4.4 - Exemplo mostrando um provável equívoco nos conceitos de perímetro e área (Resposta referente à questão 6). p.84
- Figura 4.5 - Outro exemplo envolvendo um provável equívoco de conceito de perímetro e área (Resposta referente à questão 6) p.84
- Figura 4.6 – Provável confusão com os nomes. As arestas foram consideradas como áreas (Resposta referente à questão 6) p.85
- Figura 4.7 - Mais um exemplo do equívoco entre aresta e área (Resposta referente à questão 6).....p.85
- Figura 4.8 - O aluno ignorou o fato de que o exercício pedia para que o conteúdo dos 21 vasos não fosse modificado (Resposta referente à questão 2)..... p.86
- Figura 4.9 - Nesse exemplo, não temos certeza absoluta se foi um erro ocasional de cálculo ou se existe outro tipo de equívoco que não conseguimos analisar por alguma das categorias de obstáculos. No entanto, parcialmente, podemos notar ainda a dificuldade de trabalhar com números racionais; logo, podemos classificá-lo também como um obstáculo didático. (Resposta referente à questão 2)..... p.88
- Figura 4.10 - Há uma confusão do que se deveria analisar neste caso: queria se saber se Carlos havia contraído a dengue, mas o aluno respondeu que “é provável que está com febre”. (Resposta referente à questão 1)..... p.91
- Figura 4.11 - Exemplo de uma resposta de um aluno especificando que a origem da dor pode ser diferente da causada pela dengue. No caso acima, o aluno assinalou como resposta a alternativa *c*: *Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença*. (Resposta referente à questão 1)..... p.91
- Figura 4.12 - Neste exemplo, ignorou-se a condição de diagnóstico de dengue que fora dado no enunciado e o aluno tomou a visão cética de que não era possível concluir nada sem fazer um exame mais preciso. Neste caso, foi assinalada a alternativa *d*: *Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio*. (Resposta referente à questão 1)..... p.92
- Figura 4.13 - Aqui o aluno adotou corretamente o diagnóstico para o indivíduo com dengue e ainda considerou o fato de que ter dores musculares pode ser um diagnóstico precoce de dengue. (Resposta referente à questão 1) p.92

- Figura 4.14 - Semelhante ao caso da figura 4.12, o aluno considerou que não era possível concluir nenhum diagnóstico, mas não especificou o motivo. Foi assinalada a alternativa *d*, assim como na figura 4.12: *Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio*. (Resposta referente à questão 1)... p.93
- Figura 4.15 - Exemplo mostrando a tentativa do aluno de distribuir os barris igualmente. (Resposta referente à questão 2)..... p.94
- Figura 4.16 - O aluno respondeu que deveriam ir 4 barris vazios e 3 cheios para cada pessoa e ignorou os barris que estavam preenchidos pela metade. (Resposta referente à questão 2)..... p.94
- Figura 4.17 - O aluno não quis deixar em branco, mas deixou explícito que não tinha certeza de como responder à questão e ainda deixou um provável resultado, baseando-se em algum conhecimento anterior que lembrara no momento. (Resposta referente à questão 6)..... p.95
- Figura 4.18 - Observe que o enunciado pede para que se considere o valor de x como igual a 3, mas o aluno ignorou esse fato e resolveu o exercício da mesma forma como resolvera o exercício 3, no qual se pedia apenas a simplificação das expressões algébricas. (Resposta referente à questão 4)..... p.96
- Figura 4.19 - Esse exemplo também é curioso, pois em nenhum momento se pede que se assinale a alternativa correta. Provavelmente, o aluno olhou os itens e imaginou que bastaria escolher a alternativa correta “no chute”..... p.97
- Figura 4.20 - Esse exemplo é o inverso da figura 4.17. O aluno imaginou que precisaria achar o valor numérico de cada item e não entendeu a diferença da proposta de cada um deles. Mesmo assim, os cálculos não corresponderam à resposta correta..... p.97

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	15
1.1. Motivação pela pesquisa	15
1.2. Revisão bibliográfica.....	17
CAPÍTULO II – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	35
2.1. A noção de obstáculo	35
2.2. A epistemologia genética de Piaget	39
2.3. A teoria dos obstáculos de Guy Brousseau	40
2.3.1. Os erros e os obstáculos	42
2.3.2. As diversas origens dos obstáculos	43
2.3.3. Condições favoráveis para superar obstáculos.....	44
2.4. O conceito de objetivo-obstáculo	46
2.5. A teoria dos campos conceituais	48
2.5.1. Conceitos e esquemas	50
2.5.2. Entendendo os esquemas	51
CAPÍTULO III – METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DO ESTUDO PILOTO E DO ESTUDO FINAL	61
3.1. Descrição do levantamento de dados	61
3.2. Escolha das questões do estudo piloto	62
3.3. Escolha das escolas para o estudo piloto	65
3.4. Resultados do estudo piloto.....	65
3.5. Elaboração do teste final	70
CAPÍTULO IV – ANÁLISE DOS RESULTADOS PELA CATEGORIZAÇÃO DE GUY BROUSSEAU E DA PERSPECTIVA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	73
4.1. O objetivo da categorização	73
4.2. Retomando o conceito de obstáculo segundo Brousseau	74

4.3. Descrições das questões escolhidas para serem aplicadas no teste.....	75
4.4. As categorizações de obstáculos encontrados nos testes	80
4.4.1. Obstáculo epistemológico.....	80
4.4.2. Obstáculo didático	86
4.4.3. Obstáculo psicológico.....	90
4.4.4. Obstáculo ontogenético	95
4.5. Os campos conceituais nas análises dos obstáculos	98
CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
5.1. O tempo de aprendizagem	106
5.2. O estímulo para enfrentar os obstáculos	107
5.3. A consciência de que nem tudo é obstáculo	108
5.4. PISA, SARESP e outras avaliações: desviando do seu verdadeiro caminho	110
5.5. Transpondo para outros tópicos além da Álgebra.....	112
5.6. Abstração: Um tema “proibido”	113
5.7. Novos rumos de pesquisa	114
BIBLIOGRAFIA	117
ANEXOS	123
ANEXO A – CARTA DE APRESENTAÇÃO ANEXADA AO ESTUDO PILOTO	125
ANEXO B - EXEMPLOS DO ESTUDO PILOTO	126
ANEXO C – EXEMPLOS DO TESTE FINAL	136

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO PELA PESQUISA

Minha primeira experiência como professora de Matemática ocorreu em um colégio da rede privada de ensino situado na Zona Sul de São Paulo, lecionando principalmente para os alunos dos últimos anos do atual Ensino Fundamental (oitavo e nono ano). Embora eu já tivesse trabalhado em escolas de idiomas, ensinar em uma escola de ensino regular para alunos pré-adolescentes era um novo desafio. No entanto, apesar das dificuldades enfrentadas, meu entusiasmo para ensinar sempre foi muito grande.

Conforme o tempo foi passando, comecei a perceber as dificuldades dos meus alunos em aprender Matemática, com destaque para a Álgebra. Observei que alguns erros se repetiam entre alunos de diferentes faixas etárias, o que despertou em mim uma curiosidade em pesquisar a respeito desse assunto. Consequentemente, isso me motivou a ingressar no programa de pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP). Porém, mesmo já tendo em mente o tópico de pesquisa para ingressar no programa de pós-graduação, deparei-me com a seguinte questão: Como escrever um projeto de pesquisa? Onde procurar e o que já existe de pesquisa feita nessa área?

Para fazer tal investigação, durante o período que antecedeu o ingresso na pós-graduação, frequentei semanalmente o seminário de ensino de Matemática, organizado pelo professor Nilson José Machado na FE-USP, como forma de tomar contato com novos temas de pesquisa, além de complementar a minha formação. As discussões e as experiências dos participantes do grupo contribuíram para eu começar a pesquisar novas referências na literatura da área para escrever o meu projeto de mestrado.

Primeiramente, investiguei as dissertações e teses brasileiras sobre o Ensino de Álgebra e encontrei muitas referências interessantes. Pesquisas como as de Neves (1995), Ribeiro (2001), Almeida (2006), Bonadiman (2007) e Gil (2008) mostraram que as dificuldades apresentadas pelos meus alunos eram comuns aos alunos das mais diversas

regiões, que vivem em diferentes contextos sociais e tiveram diferentes formações. Nessas dissertações e teses, encontrei os mesmos artigos de pesquisadores no exterior, que foram utilizados como referência para esta pesquisa, e tratam das dificuldades de aprendizagem relacionadas ao conteúdo de Álgebra. Vale ressaltar que também há outros trabalhos importantes sobre Álgebra que foram desenvolvidos por Lins e Gimenez (1997), Pinto (1997), Pinto e Fiorentini (1997), que também tratam das dificuldades de aprendizagem em Álgebra, porém as análises que virão mais adiante serão focadas nos estudos de Neves (1995), Ribeiro (2001), Almeida (2006), Bonadiman (2007) e Gil (2008).

Dentre os pesquisadores no exterior, destacam-se: Booth (1988), Herscovics (1988), Küchemann (1981), Kieran (1981) e Wagner (1981). Em linhas gerais, todos eles levantam a hipótese de que a Álgebra elementar é um dos primeiros tópicos da Matemática que passa a trabalhar com a abstração e, talvez por isso, os alunos apresentam tanta dificuldade, se levarmos em consideração que muitos dos assuntos trabalhados até o final do segundo ciclo do Ensino Fundamental (5º ano) em Matemática trabalham com a Aritmética, que é mais concreta, do ponto de vista de uma criança.

Foi através da leitura dos artigos desses autores, ingleses e canadenses, que construí a hipótese de que o aprendizado de Álgebra não está ligado somente ao modelo educacional do país ou à estrutura da língua-mãe dos estudantes, mas é algo que envolve uma compreensão do funcionamento cognitivo do indivíduo. Entretanto, apesar de muitas pesquisas envolvendo a Álgebra terem sido feitas no Brasil nos últimos anos, intrigou-me o fato de as mesmas não tratarem do tema com um apoio teórico voltado a compreender, de forma aprofundada, a estrutura cognitiva do aprendizado e as consequentes dificuldades dos estudantes em aprender Álgebra.

Algumas questões gerais levantadas por esses motivos anteriores foram:

- Quais são os obstáculos envolvidos no ensino de Álgebra?
- Existe alguma relação entre a formação do professor e o modo como a Álgebra vem sendo ensinada aos alunos?

- O que é necessário entender, em nível cognitivo de aprendizagem, para explicar as dificuldades e erros comuns entre os alunos de diferentes regiões e diferentes formações?
- Será que avaliamos os alunos adequadamente? O que devemos valorizar no processo de aprendizagem dos alunos?
- E de uma forma mais geral, não especificamente em Álgebra, avaliações como SARESP, PISA, ENEM, entre outras, distorcem o trabalho pedagógico?

Foi com esses questionamentos em mente que iniciei a revisão bibliográfica sobre o assunto a fim de orientar a pesquisa.

Vale ressaltar que o levantamento bibliográfico, principalmente das pesquisas brasileiras, foi feito levando em consideração aquelas que tentaram fazer uma abordagem da Teoria dos Campos Conceituais, mesmo que ainda incipiente.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas séries iniciais¹ do Ensino Fundamental, já é possível entender os estudos de uma Pré-Álgebra², apesar do predomínio da aritmética. Os alunos trabalham com problemas simples para descobrir o número que falta para completar a sentença. Um exemplo pode ilustrar:

*Em um ônibus cabem 35 pessoas sentadas e 20 pessoas em pé. Quantas pessoas cabem dentro deste ônibus?*³

Dentro deste ônibus cabem _____ pessoas.

Operação utilizada: _____

¹ Conhecidas como Ensino Fundamental I abrangendo do 1º ao 5º ano.

² Segundo o PCN, a Pré-Álgebra é o que antecede os trabalhos com situações-problema, o reconhecimento de diferentes funções da Álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representar problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) além de conhecer as regras para resolução de uma equação.

³ Exercício disponível no site: <http://www.colegioweb.com.br/matematica-infantil/calculando-com-os-numeros-naturais.html>

Contudo, é nas séries finais⁴ do Ensino Fundamental que os trabalhos algébricos aumentam de complexidade, cabendo ao aluno reconhecer diferentes finalidades da Álgebra, tais como: representar por meio de equações os dados de um problema, conhecer as regras de solução de uma equação e saber interpretar funções e gráficos. Os trabalhos intuitivos feitos no Ensino Fundamental I são muito importantes para prosseguir com esses estudos, mas parece que não são suficientes. O que geralmente ocorre é a estagnação dos alunos nas fases iniciais da Pré-Álgebra e a dificuldade para compreender os estudos mais avançados, começando no Ensino Fundamental II e perdurando até mesmo nos cursos de graduação nas universidades (Clement, 1982). Por isso, há a necessidade de investigação para entender os motivos dos alunos terem tanta dificuldade para prosseguir com os estudos mais aprofundados em Álgebra. Isso se torna ainda mais relevante à medida que competências como elaborar um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, simular os dados dos problemas, realizar tentativas para chegar aos resultados e ainda formular hipóteses), são algumas das expectativas apresentadas pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) para o ensino de Matemática no nível Fundamental. Ao que parece, essas competências não estão sendo construídas.

Embora os PCN tenham a expectativa de que um aluno que conclui o Ensino Fundamental já tenha uma boa desenvoltura nos trabalhos com Álgebra, normalmente isso não ocorre com a maioria, independentemente de serem da rede pública ou privada. Ao menos, assim indicam os resultados dos estudos realizados pelo INEP (Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) através do SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), cuja função é coletar e analisar informações acerca do desempenho dos estudantes brasileiros (INEP/SAEB, 2007)⁵.

A tabela a seguir apresenta a comparação das médias de Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio ao longo dos doze anos em que a avaliação foi aplicada, além dos dados comparativos que já foram consolidados. Lembramos que a avaliação é aplicada na série final de cada ciclo do Ensino Fundamental e Médio e a nota máxima é de 500 pontos. Além disso, ela trata de conteúdos gerais do ensino de matemática e não apenas do tópico de Álgebra.

⁴ Conhecidas como Ensino Fundamental II abrangendo do 6º ao 9º ano.

⁵ Resultados 2005-2007. Disponível em <<http://provaBrasil.inep.gov.br>>

(os números entre parênteses são os respectivos erros padrões) **Fonte: INEP/SAEB**

Série	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007
4ª série do E.F.	190,6 (1,5)	190,8 (1,2)	181,0 (0,9)	176,3 (0,8)	177,1 (0,8)	182,4 (0,9)	189,14
8ª série do E.F.	253,2 (1,9)	250,0 (2,1)	246,4 (1,1)	243,4 (1,2)	245,0 (1,1)	239,5 (1,1)	240,56
3ª série do E.M.	281,9 (2,6)	288,7 (3,0)	280,3 (1,7)	278,7 (1,4)	278,7 (1,4)	271,3 (1,8)	---

Tabela 1.1 - Médias de Proficiência em Matemática no Brasil de 1995 – 2007

Fonte: INEP/SAEB

Gráfico 1 - Médias de proficiência em Matemática no Brasil de 1995 - 2005⁶

Apesar dos resultados representarem a média do desempenho global dos estudantes em todos os tópicos da área de Matemática, e não especificamente no de Álgebra, através desses dados é possível afirmar que o ensino de Matemática no Brasil não é satisfatório, fato que será confirmado por diversas pesquisas de autores brasileiros acerca do ensino de Álgebra.

Neves (1995) fez um levantamento bibliográfico das pesquisas realizadas na época anterior a sua pesquisa (1980 a 1992) e constatou que havia poucos trabalhos aprofundados sobre Álgebra, assim como a escassez de trabalhos apresentados em congressos brasileiros abordando o tema. Miguel et al. (1992), concluiu que, de 1970 a 1992, houve uma grande quantidade de dissertações de mestrado e teses de doutorado tratando do ensino de Matemática, mas nenhuma delas sobre o ensino de Álgebra. Ainda segundo Miguel et al. (1992), considerando os três primeiros encontros nacionais da época, que ocorreram,

⁶ Os dados de 2007 ainda não foram acrescentados no gráfico comparativo disponibilizado pelo INEP/SAEB.

respectivamente, em São Paulo, Maringá e Natal, apenas seis comunicações orais abordavam o ensino de Álgebra, contra trinta e dois de Aritmética e quarenta e dois sobre Geometria.

Por outro lado, nas últimas décadas, a abordagem sobre o ensino de Álgebra tem aumentado nas dissertações e teses, além das apresentações orais em congressos de Ensino de Matemática. De acordo com Melo (2006), somente na UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), há dezenove trabalhos que têm como foco principal o cotidiano das aulas de matemática em sala de aula e, dentro deles, são enfatizados os tópicos ligados ao ensino de Álgebra.

Neves (1995) aponta as discussões de Piaget e Vygotsky como pressupostos importantes para entender as dificuldades de aprendizagem de Álgebra, apesar de suas teorias não serem específicas para esse fim, já que cada um tomou um objeto de estudo diferente. Enquanto Piaget tratou do sujeito epistêmico, Vygotsky investigou a aprendizagem mediada pela linguagem. No entanto, suas contribuições ajudam a compreender o desenvolvimento do sistema cognitivo de uma criança e o funcionamento da aquisição de uma nova linguagem, respectivamente. Neves, tomando esses autores como referência, propõe alternativas de trabalho em relação às operações com números, aritmética generalizada, manipulação de fórmulas, resolução de equações e cálculo algébrico.

Posteriormente, chama-nos a atenção a pesquisa de Ribeiro (2001) sobre o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, baseada nos dados do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). Nesse trabalho, o autor realizou sua pesquisa com alunos do nono ano (antiga oitava série), aplicando as próprias questões do SARESP e fazendo um levantamento das estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas algébricos. Em sua análise, o autor procura associar o índice de acerto obtido com o do SARESP e identificar quais foram os alunos que utilizaram a estratégia matematicamente correta para chegar ao resultado. Ribeiro (2001) ressalta a importância de um instrumento de avaliação ter as seguintes características:

- 1) Útil: no sentido de poder julgar, dentro de um processo educativo, o que vai bem ou o que pode ser melhorado.

- 2) Factível: para avaliar o rigor dos procedimentos adotados pelos participantes de acordo com a situação que está sendo avaliada.
- 3) Ético: para assegurar o direito dos participantes e a probidade de seus resultados.
- 4) Exato: para garantir a lisura e o rigor no julgamento de seus resultados, nos procedimentos de aplicação do exame.

Embora o exame do SARESP tivesse boas intenções no sentido de ajudar a entender e subsidiar melhor o nosso sistema educacional, as análises do autor mostraram que a forma como o exame é elaborado e aplicado são insuficientes para realizar uma análise mais detalhada em relação aos erros cometidos pelos alunos e avaliar os procedimentos utilizados por ele. Isso significa, por exemplo, que dois alunos podem não ter chegado à resposta correta, mas cada um pode ter cometido erros diferentes, ter passado por obstáculos de aprendizagem diferentes. Pelo fato do exame ter questões fechadas, que não dão abertura para discussão, cabe ao professor utilizar-se dos resultados da avaliação como ferramenta para investigar os obstáculos de seus alunos e conscientizar-se de que a sua postura em sala de aula pode mudar o desempenho de seus alunos. O autor valoriza o fato de que trabalhos em grupo, nos quais os alunos possam discutir estratégias de resolução, seriam uma das maneiras de contribuir para enriquecer a aprendizagem do aluno.

Contudo, Barbosa (2005) critica a maneira como o SARESP avalia os alunos. O autor questiona principalmente a maneira reducionista como são tratados os sujeitos envolvidos, embora concorde que os resultados da avaliação sirvam como ponto de partida para uma revisão dos processos de ensino em um sentido amplo. Apesar desse trabalho de Barbosa não ser especificamente voltado ao campo da Matemática, mas à área de linguagem, sua análise crítica em relação ao SARESP também é aplicável à Matemática, especialmente no que se refere à supervalorização do acúmulo de conteúdos e na mecanização de cálculos e fórmulas fora do contexto. A Matemática continua sendo tratada no mesmo paradigma de que quanto mais conteúdos e mais cálculos automáticos o aluno souber, mais ele conhece sobre o conteúdo. Isso pode não ser verdade. A crítica em relação à metodologia utilizada no SARESP também serve para a Matemática.

Outros trabalhos mais recentes já abordam temas como os procedimentos adotados pelas crianças na construção de modelos e esquemas. Dois exemplos são as pesquisas de Almeida (2006) e Bonadiman (2007), respectivamente da UnB (Universidade de Brasília) e da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul). As duas pesquisadoras tomam como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud⁷, levando em consideração o aspecto psicológico-cognitivo da aprendizagem matemática. Embora Vergnaud tenha desenvolvido sua teoria na década de 90, apenas em pesquisas mais atuais a sua teoria vem sendo mencionada com mais frequência, porém, de forma ainda pouco aprofundada.

Ainda que os trabalhos das duas autoras tenham objetivos semelhantes, a diferença entre ambas é que Bonadiman (2007) desenvolveu um material manipulativo para ajudar na compreensão de atividades algébricas. A autora acredita que o uso de um material concreto ajuda na resolução de problemas algébricos, que são essencialmente abstratos. No entanto, conclui dizendo que os alunos aplicam a estratégia do material apenas quando é explicitamente solicitado em um exercício. Em outros casos, deixam de utilizar o material e continuam a fazer uso de estratégias mais mecânicas, como a resolução algébrica e por tentativa e erro. O fato de que exemplos concretos limitam a aprendizagem de Matemática foi também discutido em um artigo de Kaminsky et al. (2008), publicado na revista *Science*⁸, intitulado *The Advantage of Abstract Examples in Learning Math* (A vantagem de utilizar exemplos abstratos na aprendizagem de Matemática). O artigo traz resultados de testes feitos com alunos de um curso de graduação para saber qual o aproveitamento dos estudantes que aprenderam um conceito matemático de duas maneiras diferentes: o primeiro grupo utilizou uma série de exemplos concretos, enquanto o segundo apoiou-se no uso de generalizações ou da linguagem simbólica ou abstrata. Os resultados mostraram que o abuso da utilização de exemplos concretos pode esconder estruturas matemáticas relevantes, prejudicando o aprendizado. Kaminsky et al. (2008) mostram também que os alunos têm dificuldade de transpor exemplos concretos para generalizações, principalmente quando mais novos, pois têm menos habilidade de controlar a sua atenção do que os adultos.

⁷ Gérard Vergnaud é um teórico francês que desenvolveu a teoria psicocognitiva conhecida como a Teoria dos Campos Conceituais.

Embora o artigo ressalte que não tem a intenção de recomendar aos professores que abandonem os exemplos concretos, aconselha-se evitar o seu uso excessivo por limitar a aplicabilidade em situações múltiplas. Desse modo, os autores incentivam o uso de exemplos genéricos já na introdução de um conceito matemático, para que os alunos, desde cedo, tornem-se aptos a aplicar os conhecimentos em situações diversificadas.

Algo em comum encontrado entre esses autores brasileiros pesquisados foi o fato de todos tomarem como referência pesquisas feitas fora do Brasil, principalmente na Inglaterra e nos Estados Unidos, a saber, Booth (1988) e Kieran (1981)⁹. Nessas pesquisas estrangeiras, afirma-se que a Álgebra é o tópico que apresenta o maior índice de obstáculo na aprendizagem; o mesmo ocorre para a realidade brasileira, como constatado por Neves (1995), Miguel (1992), Ribeiro (2001), Almeida (2006) e Bonadiman (2007). O fato de crianças pertencentes a diferentes contextos e classes sociais terem dificuldades semelhantes, mostra que esse tipo de pesquisa possui um alto grau de relevância e merece ser investigado mais a fundo. Segundo Booth, em seu artigo *Children's difficulties in beginning algebra* (BOOTH, 1988), testes feitos com alunos do Reino Unido de diferentes faixas etárias e de diferentes níveis de experiência com Álgebra mostram que os erros cometidos por cada um deles são muito similares. Quatro desses aspectos mais comuns levantados por Booth foram:

- 1) O foco da atividade algébrica e a indução natural das respostas;
- 2) O uso da notação e da convenção em Álgebra;
- 3) O significado das letras e das variáveis;
- 4) A estreita relação com o método utilizado na aritmética.

Para os alunos, a estreita relação com o método utilizado na aritmética influencia em sua compreensão e na posterior forma de resolução de problemas desconhecidos. Consequentemente, para enfrentar um novo desafio, eles tomam esse método como base, constroem e transformam um conhecimento anterior adquirido.

Por exemplo, quando o aluno se depara com uma sentença aberta do tipo $3 + n$ sendo n um número genérico, essa resolução somente terá sentido se ele conseguir descobrir quanto vale n . Logo, parece-lhe estranho respostas como $3n$ ou mesmo o próprio $3 + n$, pois aparenta

⁹ Essas pesquisas foram reeditadas em *As idéias da álgebra*, traduzido por Hygino H. Domingues, 1995.

a necessidade de encontrar um valor para a variável. Esse tipo de dificuldade decorre da extensão das ideias aritméticas que o aluno carrega como experiência de anos anteriores. O conceito da aritmética é mais concreto para o aluno, pois qualquer cálculo feito no dia a dia tem um resultado numérico, não sendo algébrico. Se o aluno não consegue descobrir e associar nenhum valor para n , então muitos irão concluir que não é possível responder apropriadamente esse tipo de questão.

Já em questões do tipo $3x + 2y$, os alunos tendem a simplificar a resposta como $5xy$, pois não compreendem que x e y podem assumir valores diferentes e, conseqüentemente, os seus coeficientes não podem ser somados. Na realidade, esse tipo de erro é induzido pela necessidade de ter uma resposta fechada ou também causado pelo contrato didático¹⁰, no qual o aluno sente a necessidade de obter uma resposta final fechada. Deixar um resultado como forma de soma é difícil de ser aceito pelos iniciantes em Álgebra, ou para aqueles que não compreenderam o conceito de resposta aberta. Dificuldades semelhantes foram encontradas em trabalhos de Collis (1974), Matz (1979), Davis (1975), além de Cortés e Kavafian (1999).

Outro tipo de erro é a justaposição de números no lugar das variáveis. Utilizando o mesmo exemplo anterior, um aluno pode assumir que, se a variável n vale numericamente 14, então, ele poderá simplesmente substituir este valor no lugar de n e ignorar o sinal da operação da adição, resultando, assim, em $3 + n = 314$. Esse tipo de erro está relacionado ao uso da notação e convenção em Álgebra, que é a forma como os alunos interpretam os símbolos. Booth (1988) enfatiza que a instrução para evitar esse tipo de equívoco de justaposição na soma do tipo $2 + 3$ deve ser enfatizada como “*adicione 2 ao 3*” e não apenas como “*some 2 e 3*”. Tal tipo de equívoco, provavelmente, é consequência das ideias advindas da Aritmética.

Ao contrário disso, muitos professores utilizam o clássico exemplo “*quanto dá 3 bananas mais 2 maçãs?*”, o que pode ser algebricamente representado como $3b + 2m$. No entanto, esse exemplo, além de não ajudar o aluno a entender o conceito de soma algébrica, ainda pode confundi-lo sobre o uso de variáveis e transmitir ideia de que é necessário usar a inicial do objeto em questão como variável, concluindo, por exemplo, que o total será “*5 frutas*”. Isso se aproxima do problema já apontado por Kaminsky et al. (2008) e ocorre por

¹⁰ Ref. Brousseau (2000).

ser a única forma dos alunos contornarem essa soma aparentemente impossível de ser calculada ao olhar deles, que não se familiarizaram ainda com o conceito algébrico de resposta aberta ou da forma $x + y$.

Booth (1988) e Kieran (1981) ressaltam essas hipóteses, afirmando que existem diversos tipos de razões naturais para os alunos cometerem tais tipos de equívocos. Uma delas é a maneira como os estudantes interpretam os símbolos matemáticos: os alunos acreditam que o resultado de um cálculo sempre seja uma expressão fechada e sentem-se incomodados com a presença de uma sentença aberta do tipo $2a + 5b$, ficando com a impressão de que a resposta está “incompleta”.

A outra razão seria a falta de precisão nas notações aprendidas em aritmética nas séries iniciais, o que acaba se estendendo para a Álgebra. Simples imprecisões como acreditar que a divisão apresenta comutatividade como na adição ou, simplesmente, acreditar que o número maior é sempre dividido pelo número menor ilustram o problema. Esses tipos de raciocínios vêm, muitas vezes, como dicas de professores bem-intencionados, que acreditam que essa simplificação na notação facilitaria a compreensão do aluno, mas que trazem consequências negativas para o aprendizado de Álgebra no futuro (BOOTH, 1994).

Além de Booth (1994), Herscovics (1994) também destacou em seu artigo intitulado *Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra* (1994), observações sobre o ensino de Álgebra:

Estudos realizados tanto na Grã-Bretanha (Hart, 1981) como nos Estados Unidos (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist e Reyes, 1981) indicam que a Álgebra é um grande obstáculo para os estudantes da segunda fase do Ensino Fundamental. Apenas uma minoria deles consegue completar o curso introdutório e uma quantidade menor ainda desses estudantes dominam suficientemente o conteúdo para um bom desempenho nesta disciplina no Ensino Médio. É necessária uma análise cuidadosa para investigar as possíveis causas da continuidade dessas dificuldades ao longo da vida escolar desses estudantes. (HERSCOVICS, 1994, p.60)

Tais afirmações são corroboradas através de testes realizados por Küchemann (1978, 1981) com 3000 alunos britânicos entre treze, quatorze e quinze anos de idade. Seus experimentos verificaram o nível de compreensão e a capacidade de construção de uma equação utilizando duas variáveis, além de medir a habilidade de traduzir os dados de um

problema para uma linguagem algébrica. Para realizar o teste, Küchemann aplicou a seguinte questão para todas as faixas etárias escolhidas:

Comprei uma quantidade x de lápis azuis e y de lápis vermelhos que custam, respectivamente, 5 e 6 centavos. Se eu paguei 90 centavos no total, o que você pode dizer sobre x e y ? (HERSCOVICS, 1994, p.63)

Os resultados dessa questão mostraram um índice de acerto de 2%, 11% e 13%, respectivamente, nas faixas etárias citadas anteriormente. O erro mais comum apresentado dentro dos grupos estudados (cerca de 17%) foi expressar a equação do problema na forma $x + y = 90$. Esse tipo de erro, segundo o autor, indica que a maioria dos estudantes tem a tendência de representar os símbolos literalmente como conjuntos, ou seja, sendo x como a quantidade total de lápis azuis adquiridos e y a de vermelhos.

O problema a seguir foi aplicado a um grupo de estudantes de 17 anos de idade, considerado de um nível mais simples que o anterior:

Carol ganha D dólares por semana. Se ela gastou C dólares para roupas e F dólares para comida, escreva uma expressão que expresse a quantia restante utilizando as variáveis D , C e F . (HERSCOVICS, 1994, p. 64)

Esse problema deveria ser trivial para alunos de dezessete anos de idade, que já possuem ao menos um ou dois anos de experiência com Álgebra. No entanto, um terço dos estudantes que tinham um ano de experiência e um quarto dos que tinham dois anos de estudo de Álgebra não conseguiu apresentar uma resolução aceitável (CARPENTER et al., 1981).

Tais pesquisas nos mostram que os problemas envolvendo um processo de tradução para linguagem algébrica não é uma dificuldade restrita apenas aos iniciantes. Ela persiste ao longo dos anos, inclusive entre estudantes considerados com um bom nível de habilidade em matemática. Pesquisas realizadas em conjunto com outros autores entre os anos de 1979 e 1982 apontam resultados similares para os seguintes testes:

Escreva uma equação utilizando as variáveis S e P para representar a seguinte afirmação: “Existem 6 vezes mais alunos do que professores nesta universidade”. Utilize S para o número de estudantes e P para o número de professores. (CLEMENT, 1982; CLEMENT et al apud HERSCOVICS, 1994)

Escreva uma equação utilizando as variáveis C e S para representar a seguinte afirmação: “No restaurante da Mindy, para cada quatro pessoas que comem cheesecake, existem cinco pessoas que comem strudel.” Represente por C, o número de cheesecakes e S para o número de strudels. (CLEMENT, 1982; CLEMENT et al apud HERSCOVICS, 1994)

Esses testes foram aplicados a 150 calouros de um curso de engenharia para observar se eles apresentariam os mesmos tipos de equívocos na interpretação do problema como os alunos do Ensino Fundamental e do Médio.

Surpreendentemente, foram apresentados 63% de acertos para o primeiro teste e apenas 27% para o segundo. Presumindo que os alunos do curso de engenharia possuem habilidades adequadas de cálculos algébricos, esse resultado mostra que existem problemas que vão além das habilidades técnicas, e levanta a hipótese de que existe um obstáculo cognitivo na aprendizagem e interpretação dos problemas de Álgebra.

Para confirmar essa hipótese, Lockhead (1980) aplicou esses mesmos testes para 202 estudantes universitários e 148 professores do Ensino Médio e obteve 35% e 47% de respostas incorretas, respectivamente. Isso mostra que o estudo das dificuldades em Álgebra é muito mais complexo do que se pode imaginar, ao menos é o que os resultados obtidos por essas pesquisas indicam.

No entanto, mesmo com todos esses resultados, o principal questionamento que se levanta a partir deste momento é: por onde iniciar a nossa investigação? Herscovics (1994, p.61) sugere a perspectiva de analisar as dificuldades em Álgebra através de sua origem epistemológica, isto é, ligada ao estudo crítico e histórico da Ciência, particularmente no que se refere ao desenvolvimento do saber ao longo do tempo. Isso se aproxima da noção de Revolução Científica de Thomas Kuhn (1970), para quem a Ciência não é um mero acúmulo de saberes, mas um conflito intenso entre revoluções intelectuais no qual um conceito ou ideia é substituído por um novo, depois de muita discussão e investigação.

Ao mesmo tempo, Bachelard refere-se aos obstáculos epistemológicos como a tendência do ser humano em apoiar-se em experiências intuitivas equivocadas, a tendência de generalizar os eventos, o que pode esconder a particularidade de cada um e os obstáculos causados pela própria linguagem falada. Porém, o autor aborda essas características a respeito

dos obstáculos epistemológicos sob o contexto da história da Ciência e, consequentemente, não se refere especificamente às experiências individuais de aprendizagem de cada pessoa. Por outro lado, essa definição dada por Bachelard ajuda a compreender o processo natural de aprendizagem de um indivíduo. Nesse caso, para compreender novos conceitos, é compreensível que o aluno passe por obstáculos cognitivos no início, mas que não deixa de ser importante para a construção dos novos saberes.

Os obstáculos cognitivos na aprendizagem não estão apenas presentes nas formulações de equações algébricas, ocorrendo também nas interpretações de gráficos e funções. Carpenter (1981) observou em suas pesquisas que, apesar dos alunos serem capazes de localizar os pares ordenados em um plano cartesiano, a grande maioria não entende a relação existente entre as equações e seus respectivos gráficos, mesmo nas equações lineares mais simples. Esses resultados mostram que a noção de eixo e escala são mais complexas do que é imaginado pelos professores.

Vergnaud e Errecalde (1980) conduziram uma pesquisa que visou a investigar a forma como 150 estudantes dos últimos anos do Ensino Fundamental I e os dois primeiros anos do Ensino Fundamental II representam os dados em uma reta numérica. Os tipos de dados utilizados foram: peso de bebês, idade de crianças, data de aniversário, pontos obtidos em tiro ao alvo. Os grupos foram divididos em dois tipos, de acordo com as respostas dadas pelas crianças: os estudantes que ordenaram os dados do problema em uma escala e os estudantes que os representaram em comprimentos de um segmento de reta. Nesse último grupo, foram encontrados os seguintes níveis:¹¹

- 1) Aqueles que ainda se encontravam em um nível primitivo, que representaram os comprimentos em segmentos separados, do que se conclui, portanto, que eles ainda não compreendem a noção de eixo.
- 2) As primeiras evidências de compreensão da noção de eixo apareceram entre estudantes que representaram cada comprimento em um segmento separado, mas agora os conectando em sequência, um atrás do outro.

¹¹ As figuras 1, 2, e 3 foram recriadas a partir dos modelos apresentados na página 69 do artigo de Herscovics (1994).

Figura 1.1 - Continuidade de segmentos um atrás do outro.

- 3) As primeiras evidências de compreensão da necessidade de iniciar os segmentos a partir de uma mesma origem foram encontradas em trabalhos de estudantes que desenharam um segmento para cada tipo de dado, mas alinharam todos os segmentos pelo lado esquerdo.

Figura 1.2 - Segmentos alinhados pelo lado esquerdo.

- 4) Nesse nível, os estudantes já são capazes de representar diferentes conjuntos de dados na mesma reta, mas ainda encontram a necessidade de indicar o início e o fim de cada segmento através de um esquema.

Figura 1.3 - Alinhamento dos segmentos um atrás do outro.

Pelas conclusões de Vergnaud e Errecalde (1980), antes dos alunos serem capazes de utilizar corretamente a ideia de escala, eles precisam desenvolver uma nova maneira de pensar,

ou seja, de compreender a representação de um ponto em uma reta, pois, sem a compreensão desse conceito, a noção de representação de um plano cartesiano torna-se ainda mais complexa.

Kerslake (1981) conduziu um estudo para observar a compreensão dos estudantes acerca da representação de uma equação linear em forma de gráfico. Nessa pesquisa, os alunos foram abordados com a seguinte pergunta: “Qual dos gráficos da figura 1.4 representa a equação linear $y = 2x$?”. A identificação do gráfico $y = 2x$ foi relativamente fácil, no entanto, quando se pede para dizer qual é a equação linear que representa os outros gráficos, muitos não souberam responder corretamente.

Fonte: HERSCOVICS, 1994, p. 71

Figura 1.4 - Gráficos utilizados para as seguintes questões: Qual dos gráficos acima representa a equação linear $y = 2x$? E qual a equação que representa os outros gráficos?

Janvier (1978, 1981a) observou em suas pesquisas que os alunos da segunda fase do Ensino Fundamental interpretam gráficos essencialmente como uma figura representada por união de pontos, ignorando as características mais globais apresentadas. Aparentemente, a conclusão mostrada pela pesquisa é de que os obstáculos envolvendo gráficos ficam ainda maiores quando se pede ao aluno, por exemplo, para que identifique o intervalo de uma função.

Nas palavras gerais de Herscovics (1994), mesmo os alunos de graduação apresentam pouca compreensão sobre o uso dos símbolos para representar as variáveis e quais são os papéis que eles exercem nas funções. Por exemplo, quando se pede aos alunos para que escrevam algebricamente uma função correspondente aos dados da tabela a seguir, muitos não conseguem encontrar a relação geral que dá origem a esta função.

Fonte: HERSCOVICS, 1994, p. 76

X	1	3	4	7	n
Y	8		11	14	

Tabela 1.2: Tabela em que se pede ao aluno para completar com os dados que estão faltando de acordo com uma lógica estabelecida e identificar a função que a descreve.

Segundo Herscovics (1994), alguns pesquisadores argumentam que a tarefa de completar uma tabela de dados de uma função é uma forma abstrata e, de alguma maneira, artificial de representar uma relação entre o meio em que se vive e as ciências naturais. Talvez a função passe a ter um significado mais concreto para o aluno somente quando as variáveis utilizadas representarem situações mais relevantes do cotidiano, tais como o aumento do peso de uma pessoa em função da idade, por exemplo. Nesse caso, o fato dos alunos terem aprendido ou não os conceitos algébricos parecem ter pouca influência na resolução da função. Ou seja, mesmo que os alunos saibam resolver o problema e encontrar a resposta correta, não significa necessariamente que eles tenham compreendido o conceito de função na fórmula que calcula o peso em função da idade, como citado no exemplo.

Wagner (1981) ressalta que os estudantes de Álgebra não compreendem a arbitrariedade das letras utilizadas para representar as variáveis das funções. Consequentemente, os alunos acreditam que, se em vez do símbolo x utilizar-se o z para representar a mesma função, os resultados não serão mais os mesmos. A autora mostrou para seus alunos uma tabela com uma função na qual se utilizavam como variáveis as letras B e C. Posteriormente, perguntou a eles qual seria a consequência de trocar a variável C por A. Dos quatorze alunos que já tinham algum conhecimento de Álgebra, quatro deles responderam que a troca resultaria em uma função diferente. Eles acreditavam que a troca de variáveis resultaria em outros valores na função.

Portanto, através dessas pesquisas, é possível encontrar indícios de que o aprendizado de Álgebra envolve obstáculos induzidos através das instruções, assim como de natureza epistemológica e, ainda, os que estão relacionados ao processo de acomodação do aprendizado.

Em relação à teoria da aprendizagem e à construção do novo conhecimento, Piaget (1974) defende a ideia de que o indivíduo passa por várias etapas de desenvolvimento ao longo de sua vida. Para o autor, o conhecimento passa por fases de desequilíbrio e equilíbrio. Quando ocorre um desequilíbrio, ou seja, uma informação nova que não se adapta a um esquema antigo, torna-se necessário um tempo de adaptação, na qual se passa por dois processos: de assimilação e de acomodação. O primeiro processo está ligado à correlação da estrutura cognitiva antiga com a nova e se percebe que há uma necessidade de acomodar a nova informação, readaptando a antiga estrutura. O processo de acomodação consiste na tentativa de adaptar uma nova estrutura cognitiva para diferenciá-la da antiga. Quando esses dois processos são consolidados, ocorre a adaptação e, consequentemente, o equilíbrio do conhecimento.

Cury (2008) levanta um questionamento acerca da maneira como os professores ensinam operações algébricas: Será que eles são capazes de compreender a noção de estrutura algébrica e dominá-las? Um teste feito com professores de Ensino Médio por Hoch e Dreyfus (2004), envolvendo as mesmas questões propostas aos estudantes, constatou que apenas 50% dos professores dominavam o sentido de estrutura. Esses indicadores nos permitem levantar a hipótese de que os alunos não conseguirão desenvolver o conjunto de habilidades esperadas para o sucesso na aprendizagem de Álgebra, já que os professores não dominam esses “sentidos”¹² e, portanto, não sabem transmiti-los aos seus alunos, ensinando as operações algébricas de forma padronizada, repetitiva e tediosa (CURY, 2008).

Diante dos problemas apresentados até aqui acerca das dificuldades de aprendizagem de Álgebra, o objetivo desta pesquisa é identificar e analisar os obstáculos à aprendizagem de Álgebra no Ensino Fundamental que foram evidenciados no pensamento algébrico dos alunos. Para isso, utilizaremos a metodologia de classificação e análise dos obstáculos encontrados na aprendizagem de Álgebra, partindo dos quatro tipos de obstáculos definidos por Guy Brousseau (1983) para o Ensino de Matemática, que são classificados sob os aspectos Epistemológicos, Didáticos, Psicológicos e Ontogenéticos. Essas classificações servirão de referência para uma melhor compreensão dos obstáculos que envolvem o aprendizado, mas não têm a intenção de fechar um diagnóstico sobre eles.

¹² Sentido de estrutura algébrica significa compreender as operações, relações, funções e axiomas que envolvem os problemas algébricos.

Posteriormente, será utilizada a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud para realizar uma análise conceitual do domínio do funcionamento cognitivo do "*sujeito-em-situação*", cujas bases são advindas e ampliadas da teoria piagetiana de operações lógicas e das estruturas gerais do pensamento.

A justificativa para o uso da teoria dos obstáculos de Brousseau (1983) como apoio teórico para as análises é o fato de que as categorias facilitam a leitura e ajudam a iluminar os possíveis obstáculos envolvidos na aprendizagem de conceitos algébricos nos alunos do Ensino Fundamental. Mesmo assim, estávamos cientes de que essas categorias não eram suficientes para categorizar todos os tipos de obstáculos que viriam aparecer dentro de uma situação de aprendizagem. Muitos dos resultados não puderam ser enquadrados diretamente e de forma precisa nessas categorias e, portanto, as classificações foram feitas por hipóteses, de acordo com as minhas experiências pessoais e por relatos de alunos no momento da aplicação dos testes. Por isso, utilizamos um segundo apoio teórico, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), para ajudar a levantar hipóteses de outros aspectos não abordados ou que não puderam ser enquadrados de forma precisa pelas categorias de Brousseau (1983).

Mesmo que as classificações feitas aqui não tenham o objetivo de oferecer diagnósticos conclusivos, podendo ser reenquadrados, caso por caso, de acordo com a experiência de quem vive na sala de aula, com o contexto escolar e com a vivência de cada turma, a pesquisa tem o intuito de fazer uma tentativa de aproximação entre essas duas teorias para que seja possível refletir e abrir discussões sobre o ensino de conceitos algébricos no Ensino Fundamental.

No capítulo seguinte, será apresentada a fundamentação teórica desta pesquisa, que servirá de base principal para compreensão e aplicação das teorias que serão utilizadas na análise da sequência didática. Além disso, os teóricos citados serão apresentados com mais profundidade.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para entender o conceito de obstáculo, é necessário entender como ele surgiu na história da Ciência. O primeiro a mencionar a noção de obstáculo epistemológico foi Bachelard em sua obra *La formation de l'esprit scientifique* (1938/1983). Claramente, quando o autor se utilizou deste termo na época, não se referia ao obstáculo epistemológico encontrado na sala de aula, que é tema desta pesquisa, mas buscava apresentar as rupturas do conhecimento científico com relação ao senso comum, de forma geral ou dentro da evolução (avanço) do próprio conhecimento científico. Logo, a intenção deste capítulo é apresentar ao leitor como a noção de obstáculo veio sendo desenvolvida ao longo da história da Ciência por diferentes autores até chegar ao que é conhecido hoje na pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Ciência e Matemática. É importante ressaltar que não é intenção deste capítulo apresentar a obra completa de cada um dos autores a seguir, mas mostrar as contribuições significativas de cada um, para construir o conceito de obstáculo que será trabalhado nesta pesquisa.

2.1. A NOÇÃO DE OBSTÁCULO

Gaston Bachelard (1884–1962), filósofo, foi quem desenvolveu a noção de obstáculo epistemológico. Suas análises eram dedicadas à concepção de rupturas entre o conhecimento comum e científico ou dentro da sua própria evolução. Ou seja, experiências passadas que impedem um sujeito, ou uma determinada comunidade de cientistas¹, de prosseguir e compreender um novo conhecimento científico. Dizemos que o obstáculo se apresenta em forma de resistência a aceitar um novo conhecimento o que estagna o progresso do pensamento humano.

Para que exista esse avanço, Bachelard (1938/1983) afirma que é preciso desenvolver primeiro um espírito científico que se motive a analisar as causas que o impedem de superar o estado de estagnação. Depois, buscar caminhos para entender conceitos mais avançados do

¹ Na perspectiva de Thomas Kuhn (1970).

que ele adquiriu anteriormente e, quando necessário, até substituir aqueles que foram mal estabelecidos. Desse modo, Bachelard nomeou esse estado de estagnação que impede o avanço na ciência de obstáculo epistemológico.

Em sua obra *La formation de l'esprit scientifique* (1938/1983), a noção de obstáculo epistemológico é caracterizada como a tendência do ser humano em estagnar-se em experiências passadas ou de não identificar possíveis obstáculos. O autor propõe que, para a superação de um obstáculo epistemológico, é preciso entender que a ciência é diferente do senso comum por ser construída através da descontinuidade e da transformação dos conhecimentos. Por outro lado, o senso comum é construído à base de opiniões e da experiência cotidiana de cada um, que não podem ser considerados como um conhecimento científico.

Se traçarmos um paralelo dessas características descritas por Bachelard com o ensino, é sugerido que, para ocorrer a aprendizagem, o aluno precisa romper ou desconstruir o senso comum adquirido anteriormente, quando se perceber que este o impede de compreender uma situação nova à qual ele nunca tenha sido exposto antes.

Podemos investigar, assim, através do ponto de vista de Bachelard, a ideia do erro que tanto aflige a vida de um aluno. Para o autor, o erro não significa o fracasso e sim um passo importante para que se avance em um conhecimento novo, o que, muitas vezes, não acontece no ensino: quando o aluno erra, na visão do professor, ele não aprendeu. E não significa necessariamente isso; pode ser um equívoco ou um conceito mal compreendido que está levando ao erro. As avaliações que apenas analisam se o aluno chegou ou não chegou à resposta final não estão avaliando de fato o que foi desenvolvido durante o seu aprendizado. Se na Ciência o erro é uma desconstrução do que se acredita como verdade e é um passo para sua revolução² e evolução, por que o mesmo não poderia acontecer no ensino? Por que deveríamos avaliar os alunos exclusivamente pelos resultados finais apresentados em uma avaliação com conteúdos que nós, professores, julgamos serem importantes naquele momento para eles?

² Termo utilizado por Kuhn.

Logo, a avaliação de um aluno deve levar em conta o seu desenvolvimento global, ou seja, avaliar até que ponto ele conseguiu evoluir em relação ao conteúdo que carrega dos anos anteriores. Se existir mesmo um obstáculo, que o impede de prosseguir na compreensão do novo conceito, é necessário estimulá-lo a investigar até que se chegue à superação desse obstáculo. Bachelard nomeia como espírito científico a capacidade de desconstruir um assunto que é novo no momento, a qual vem como resultado de uma evolução que ocorre em longo prazo. Para entender um pensamento científico, é necessário abstrair conceitos e ter capacidade de avaliar fenômenos sem se prender apenas ao concreto, habilidades que são desejáveis no aprendizado em Matemática, por exemplo. Assim, é esperado que o aluno, depois de um longo período de reflexão, faça o mesmo que um espírito científico faz: desconstrói, abstrai, para finalmente incorporar o novo conhecimento como válido.

Desse modo, o professor não deve recriminar um aluno que comete um erro ou equívoco, mas mostrar caminhos que levem à compreensão do erro que necessita ser retificado, para se chegar a uma conclusão aceita como correta. É necessário entender o erro como um motivador para se querer superar o obstáculo. Se não houver erro, não se perceberá a existência de um obstáculo, o que poderá originar um novo no futuro, cujas causas estarão na falta de compreensão de um conceito do passado, mas que não foi considerada naquele momento.

Tomando como referência as ideias de Bachelard, é possível afirmar então que o professor é o responsável por guiar o aluno e criar a necessidade de ruptura com o senso comum para compreender o pensamento científico, tornando-o, assim, um sujeito reflexivo capaz de desconstruir o conhecimento adquirido, para transformá-lo em ciência. O professor também deve estar ciente de que se trata de um processo longo, descontínuo, mas que, sem ele, não seria possível levar o aluno a uma nova cultura científica.

É importante mais uma vez salientar que Bachelard desenvolveu a sua teoria para compreender o processo da construção do conhecimento científico, sem considerar o contexto de uma sala de aula. A aproximação está sendo feita pela similaridade com o que ocorre no processo de aprendizagem, para entender o conceito de obstáculo e apresentar autores que contribuíram significativamente para a construção da noção de obstáculo, que será trabalhada nessa pesquisa. Poderemos, assim, prosseguir com as contribuições de Piaget com a sua teoria

da aprendizagem e a construção do “conhecimento novo”, já que foi ele quem iniciou uma aplicação mais próxima ao sujeito como aprendiz, abordando o aspecto psicológico do desenvolvimento cognitivo, dando sequência às teorias de Bachelard, embora não exista uma filiação teórica direta entre os dois.

Em sua teoria da Epistemologia Genética, Piaget afirma que o sujeito constrói o pensamento através da interação homem-objeto. O autor entende que esse processo constitui um fenômeno que tem um caráter essencialmente universal, ou seja, de igual ocorrência para todos os indivíduos da espécie humana, porém, passível de variações conforme o contexto cultural em que o indivíduo está inserido. Segundo esse esquema, o ser humano assimila e adapta para si, os dados que obtém do exterior, uma vez que já tem uma estrutura mental para receber e compreender os novos conhecimentos dando-se a acomodação da informação. Tomando como base essas informações, parece ser relevante investir em atividades principalmente em Álgebra, que levem à assimilação do conteúdo matemático através de adaptações em cada fase de desenvolvimento do aluno, valorizando a assimilação concreta do novo conteúdo.

Astolfi (1997, p.123) também enfatiza que é possível realizar uma transposição das pesquisas de Bachelard e Piaget ao nível didático, pensando-se nas retificações que devem ser feitas para fazer evoluir o saber ao longo da escolaridade, sobretudo porque o aluno não é uma espécie de tábula rasa: ele carrega consigo os conhecimentos adquiridos ao longo da vida, que sobreviveram aos questionamentos de sua experiência pessoal e, portanto, são difíceis de serem substituídos apenas pelo desejo do professor. Para convencê-lo de realizar as devidas substituições e superações, é necessário utilizar representações que se apoiem e se reforcem mutuamente e que sejam boas o suficiente para superar seu senso comum, pois este se constitui numa rede de explicações funcionais.

Nessa altura, pode-se ficar com a falsa impressão de que as teorias de Bachelard e Piaget se complementam, o que de forma alguma é o que se deseja nesta pesquisa. Porém, é possível dizer que seus trabalhos possuem alguma aproximação e que ajudam a compreender os fatores que devem ser considerados dentro de um processo de aprendizagem. Da mesma forma, Astolfi (1997, p.123) afirma que a epistemologia do obstáculo de Bachelard responde alguns aspectos psicológicos de Piaget. No entanto, devemos entender que esses teóricos

utilizaram objetos de estudo diferentes, apresentando, cada um deles, um objetivo específico para responder às necessidades de sua época. A intenção desse capítulo, portanto, é levantar tais aspectos que, a meu ver, são relevantes e ajudam a compreender melhor o suporte teórico utilizado.

2.2. A EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE PIAGET

Este tópico tem como objetivo apresentar os principais aspectos da teoria de Piaget que se aproximam das ideias de que vêm sendo discutidas até este momento.

Os trabalhos de Piaget³ tiveram enfoque no processo de equilíbrio, baseado nos mecanismos da assimilação e da acomodação de um sujeito no aspecto do desenvolvimento cognitivo humano. Dentro desse processo, classificou ainda esses mecanismos em dois principais fatores: os invariantes e os variantes.

- Os fatores invariantes são a sequência de estruturas biológicas que o indivíduo adquire ao nascer. Na teoria Piagetiana, o indivíduo carrega em si marcas inatas e a tendência natural à organização e à adaptação, mas que vão se desenvolvendo em várias etapas de sua vida.
- Os fatores variantes são as influências do meio sobre o sujeito. A teoria psicogenética mostra que a inteligência é algo construído em função das interações do indivíduo com o meio, tanto físico como social. Entende-se aqui como inteligência, um conjunto de relações que existe entre o sujeito e o meio⁴. Os recém-nascidos, por exemplo, adquirem a inteligência de sobrevivência através do choro ou do grito, pois assim entenderam que poderão chamar a atenção de um adulto que atenderá a sua necessidade naquele momento. Assim, ao contrário das estruturas biológicas, a inteligência não é algo herdado geneticamente, mas construída através da interação do indivíduo com o seu meio.

³ Para saber mais sobre a Epistemologia Genética de Piaget, consulte a bibliografia no final.

⁴ Para Piaget, meio é o mundo onde se vive. Todo ambiente com o qual o sujeito entra em contato.

A assimilação é quando existe a tentativa de integrar uma série de experiências, aos esquemas previamente estruturados, para haver uma compreensão da realidade em que o sujeito está inserido no momento. A acomodação, por sua vez, consiste na concepção de ruptura com o conhecimento do passado, provocando uma série de transformações nas informações que acomodara anteriormente para dar lugar à nova informação. Logo, esses mecanismos distintos sempre atuam juntos e de forma complementar.

Desse modo, é possível pensar que a noção de obstáculo de Bachelard e a teoria da Epistemologia Genética de Piaget ajudam a compreender a construção do conhecimento e as ideias acerca dos obstáculos epistemológicos para serem aplicados ao ensino de Matemática, embora nenhum deles tenham explicitamente trabalhado com conteúdos matemáticos. O primeiro que aplicou esses conceitos concretamente à Didática da Matemática foi Guy Brousseau, como apresentaremos a seguir.

2.3. A TEORIA DOS OBSTÁCULOS DE GUY BROUSSEAU

Guy Brousseau, inspirado nas teorias de Piaget, aplicou o conceito de obstáculo epistemológico de Bachelard à Didática da Matemática.

Para Brousseau (1976), um obstáculo epistemológico manifesta-se através dos erros, sendo resultado de um conhecimento mal adquirido no passado, que traz ideias contraditórias e falsas. Mas, apesar disso, o aluno resiste às contradições que esse obstáculo produz na aquisição de um novo conhecimento. Logo, obstáculo é um conhecimento que, se utilizado em situações fora do contexto em que se adquiriu, passa a oferecer respostas incorretas e ineficazes para a solução de um novo problema. O autor ainda afirma que, para ocorrer a aprendizagem, parte-se do ensino do saber⁵, passando por processos de reorganização didática e de possíveis erros e contradições, para então se chegar à desconstrução dos conhecimentos precedentes. Porém, isso não indica que o obstáculo é apenas manifestado por meio dos erros,

⁵ Para os franceses, há uma diferença sutil entre saber e conhecimento. Para eles, *saber* é o conteúdo científico que se deve ensinar. Já *conhecimento* é o resultado de um processo de aprendizagem de um indivíduo.

“mas também pela impossibilidade de enfrentar certos problemas ou de resolvê-los de maneira satisfatória” (GOMES, 2006, p.80).

A constatação, por parte do professor, de erros e impossibilidades recorrentes entre as diversas turmas, ou recorrentes em um mesmo sujeito, pode ser um forte indício de obstáculo. Dessa forma, a teoria dos obstáculos constitui uma das ferramentas que podem ajudá-lo a interpretar esse fenômeno didático para, então, buscar soluções. De acordo com Brousseau (2001, p.66), não podemos *“deixar que a instituição convença os alunos de que fracassam porque são idiotas – ou doentes - porque nós não queremos enfrentar nossas limitações”*.

Sendo assim, o professor deve criar mecanismos para que os alunos tomem parte de um problema como se fossem enfrentá-los em uma situação na vida real, mas isso não significa que as atividades necessariamente tenham uma ligação direta com uma situação do cotidiano. Basta apenas que crie no aluno o desejo de encarar o problema como algo para si, que ele se interesse em solucionar o desafio proposto. Suas respostas devem partir de uma reflexão pessoal, em vez de servirem apenas para atender a um desejo do professor (BROUSSEAU, 2001).

No entanto, o autor alerta que é uma tarefa difícil para o professor dar um sentido aos saberes a ensinar, sobretudo em definir, de uma forma canônica, tudo que se ensina. O motivo desse problema está ligado às razões sociais de cada momento, fazendo que o contexto social modifique o sentido do que se ensina, mudando constantemente os valores e sua importância e, conseqüentemente, modificando também a sua didática (BROUSSEAU, 2001). Logo, surgem os questionamentos: o que devemos realmente ensinar? E como ensiná-los de maneira significativa? Porém, antes de tentar responder a esses questionamentos, vamos aprofundar um pouco mais a discussão sobre os erros e os obstáculos.

2.3.1. OS ERROS E OS OBSTÁCULOS

Um obstáculo pode se manifestar através de erros persistentes. Quando um mesmo tipo de erro propaga-se em alunos de diferentes contextos sociais e culturais, então pode ser considerado como um obstáculo e precisa ser investigado. Qual seria a sua origem? É algum conhecimento do senso comum que impede o aluno de prosseguir? Através dos erros dos alunos, podemos ter pistas para entender a sua compreensão acerca dos conteúdos de matemática?

Para compreender esses questionamentos, Brousseau (1976/1983)⁶ considera o obstáculo como um conhecimento constituído por objetos, relações, métodos de aprendizagem, previsões das evidências, das consequências do esquecimento e das ramificações imprevisíveis. Sendo assim, para um sujeito superá-lo, é necessário que ele passe por um processo de desestabilização e de acomodação, como constatado anteriormente por Piaget. Também é necessário para superação de um obstáculo um trabalho de rejeitá-lo implicitamente para que se dê lugar ao novo conhecimento, o que seria semelhante ao abandono do senso comum pelo conhecimento científico, assim como propôs Bachelard. Neste caso, seria ensinar o saber matemático para que ele se torne um conhecimento matemático.

De forma similar a Piaget, Brousseau acredita que o conhecimento é fruto de uma interação do aluno com o meio⁷. Mais precisamente, com uma situação que torna o conhecimento mais interessante para ele. Durante essa interação do homem com o meio, é inevitável que surjam concepções errôneas que precisarão ser retificadas em um momento oportuno. No entanto, essas concepções não deixam de ser algo importante para levantar pistas dos obstáculos que poderão surgir no futuro.

⁶ A obra original foi escrita em 1976 e passou por várias reedições em anos posteriores.

⁷ Para Brousseau, meio significa o contexto do cotidiano ou um conhecimento adquirido no passado. (Ref.: BRUM, 2000, p. 89).

2.3.2. AS DIVERSAS ORIGENS DOS OBSTÁCULOS

As causas e origens dos obstáculos podem ser das mais diversas, mas iremos considerar as principais que surgem dentro de um sistema educacional. Como citado anteriormente, os obstáculos podem surgir através das diferentes interações do sujeito com o meio, mas é difícil encontrar uma origem específica ou até mesmo colocar a responsabilidade apenas em um único sistema de interação. Brousseau (1976/1983) afirma que a noção de obstáculo epistemológico tende a ser chamada assim como consequência do erro do professor no momento de ensinar, da própria dificuldade do sujeito que aprende ou até mesmo da dificuldade intrínseca do próprio conhecimento. Contudo, para distinguir um obstáculo e sua origem, devemos descobrir qual sistema de interação utilizar para evitar tais obstáculos, considerando que esses sistemas não são tão facilmente superados, conforme apontam as pesquisas sobre as concepções alternativas, por exemplo.

Dentro desse contexto, Brousseau classificou os obstáculos em quatro tipos de categorias que são as seguintes:

1) Epistemológicos

Estão ligados às dificuldades conceituais, por vezes também constatadas na história da Ciência⁸. Ou seja, tal obstáculo decorre da falta de conhecimento aprofundado do conteúdo ou da compreensão do seu processo de desenvolvimento ao longo da História.

2) Didáticos

Originados, em geral, quando professores (na maioria dos casos, bem-intencionados) simplificam um conceito muito abstrato ou complexo usando-se de restrições (como de conjuntos numéricos) ou de excesso de simplificações (Efeito Topázio⁹). Ainda pode-se

⁸ Na concepção de Bachelard, por exemplo.

⁹ Efeito que ocorre quando o professor reconhece de antemão a resposta que o aluno deve fornecer. É uma tentativa de facilitar a tarefa dando dicas, de modo que os alunos sejam levados quase que de imediato a respondê-las. Segundo Brousseau, é um dos possíveis efeitos do Contrato Didático.

originar por criação abusiva de metáforas (Efeito Jourdain¹⁰) como uma única forma de assimilar um conceito.

3) Psicológicos

Estão ligados à natureza afetiva do sujeito ou às crenças da comunidade em que ele está inserido. Se um aluno tem uma família cujos pais ou irmãos sempre tiveram dificuldades em Matemática, há a tendência de ele carregar seus medos e o “rótulo” de que seja uma disciplina difícil e de pouca compreensão.

4) Ontogenéticos

Ocorrem quando a maturidade mental não é suficiente para compreender o conceito novo ou quando outras dificuldades do desenvolvimento psicogenético do sujeito o impedem de compreendê-lo. Ele precisa adquirir essa maturidade para compreender um assunto, a qual, não necessariamente, precisa estar ligada à idade cronológica.

Os respectivos exemplos das categorias acima serão ilustrados mais adiante neste capítulo.

2.3.3. CONDIÇÕES FAVORÁVEIS PARA SUPERAR OS OBSTÁCULOS

Brousseau (1976/1983) acredita que discutir um problema consiste em encontrar uma situação a partir da qual o aluno construa uma sucessão de trocas relativas a uma mesma questão que é considerada um obstáculo por ele e sobre a qual deverá se apoiar, apropriar e construir um novo conhecimento. Assim, o professor deve escolher um conjunto de situações que possa ser transferida rapidamente para o contexto do aluno, de modo que este, por si só, consiga readequar o novo conhecimento de acordo com os seus conhecimentos prévios. Isso porque o processo de superação de um obstáculo está necessariamente ligado às interações do sujeito com o meio, as quais, constituirão uma fase para a significação e compreensão do

¹⁰ Ref. Brousseau (2000, p.42-43) – Efeito Jourdain é outra consequência do Contrato Didático que se assemelha ao Efeito Topázio. Porém, está relacionado ao comportamento do professor em relação ao conhecimento do aluno. O aluno apreende um conceito em forma de metáfora e o professor o considera como um saber sábio, próximo do que é aprendido na comunidade científica.

conteúdo novo. Da mesma forma, os contextos criados para a passagem do obstáculo devem ser interessantes o suficiente para que o aluno entre no “jogo” do aprendizado e queira buscar a resposta para o problema proposto.

Essas interações com o meio podem ser interpretadas como uma troca de mensagens e, através delas, tanto o professor quanto o aluno serão capazes de formular hipóteses para antecipar os resultados e, conseqüentemente, suas ações. Também, através dessa troca, é que se formulam as asserções e as negações de um determinado resultado, criando um diálogo entre o aluno e o novo conhecimento, construindo um sistema que tenha significado para ele.

Para o funcionamento desse sistema, Brousseau (1976/1983) formula três tipos de processos que controlam uma situação didática¹¹: a validação, a formulação e a ação.

Validação

Neste processo, o aluno deve estabelecer a validade de uma afirmação, dirigindo-se a um sujeito como um ser suscetível de aceitar ou recusar suas afirmações, de pedir por provas que os antecedem e ainda se opor às outras afirmações. É nesse tipo de troca que as teorias matemáticas são explicitadas, construindo uma dialética da validação como: utilizar-se de modelos que respondem muito bem a sua pergunta inicial e deixar de utilizá-las no momento adequado. No processo da validação, está mais envolvida a questão da comparação e avaliação do que a rejeição de provas que necessitam de demonstração.

Formulação

Para um processo de validação, o pensamento deve primeiramente se apoiar em formulações prévias. A formulação ainda é um processo menos específico que o da validação, semelhante ao que ocorre com a linguagem. No processo da linguagem, a comunicação tem um grande papel independente, mas, em parte, importante para chegar à validação. Se não existe uma boa pergunta, não é possível verificar a validade de uma questão.

¹¹ Aqui, Situação Didática refere-se ao contexto da relação didática entre professor e aluno. Esta pesquisa não tem a intenção de aprofundar-se na teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

Ação

No processo da ação é que se definem as adequações para se tomar uma decisão. O sistema de elaboração dessa decisão pode ser algo totalmente implícito, assim como a sua justificativa. Não existe nenhuma restrição que dependa de formulação e de validação. É o processo mais geral entre os três. É na ação que também se termina na construção, no sujeito, nas regularidades, nos esquemas, nos modelos de ação inconsciente ou implícitos.

Em síntese, para a elaboração de uma boa ação, é necessária uma boa formulação. Por exemplo, quando se usa uma linguagem que faz um recorte de uma situação que seja bastante pertinente ao aluno, ela passa a se tornar uma forma conveniente para estruturar o seu pensamento. No entanto, quando se formula através de uma linguagem demasiadamente fácil, ela também se torna uma ação inútil para estruturar uma explicação e, conseqüentemente, pode gerar outros obstáculos que perdurarão por muito tempo, necessitando de uma reformulação desse pensamento no futuro. Assim, para entender um obstáculo, é necessária uma reformulação dos modelos de ação, da linguagem e do sistema de justificação das decisões. Porém, todo esse processo deve favorecer a ruptura com a crença antiga para entender o novo conhecimento. Brousseau (1976/1983) também alerta que é necessário um estudo específico sobre obstáculos para entender as relações recíprocas entre os obstáculos e os problemas.

2.4. O CONCEITO DE OBJETIVO-OBSTÁCULO

Para organizar as situações de aprendizado, é preciso reconhecer adequadamente os obstáculos e diagnosticar se eles são transponíveis no nível e no momento em questão. Martinand (1986) sugere que a superação de alguns obstáculos já identificados pode se tornar um objetivo a ser alcançado, configurando-se a noção de objetivo-obstáculo. Os dados apresentados podem auxiliar o professor na elaboração de suas aulas, no intuito de lidar com tais dificuldades, que podem gerar a má utilização de fórmulas matemáticas e de compreensões equivocadas de conceitos, por exemplo. Seguindo o mesmo raciocínio, Astolfi (1997) afirma que os trabalhos relativos às representações dos alunos permitem que seja feito o reconhecimento destes obstáculos através de duas maneiras:

- a) quando já se conhecem as representações-obstáculos;
- b) quando se dispõe de maneiras para fazê-los emergir.

No entanto, chama a atenção, em seu próprio artigo, a constatação de Philippe Meirieu (1988) sobre a maneira de transformar o objetivo-obstáculo em “obstáculo-objetivo”. Meirieu afirma que tal método de trabalho pode fazer que os alunos passem a contornar os obstáculos ao invés de transpô-los, criando assim a falsa impressão de que o problema fora resolvido. Por isso, na hora de elaborar uma atividade, o professor deve se atentar em fornecer ao aluno ferramentas suficientes para que ele possa enfrentar o problema proposto, mesmo não tendo o domínio suficiente do assunto. O maior objetivo na hora de investigar um obstáculo são os meios que conduziram o raciocínio e não o resultado final. Logo, se o aluno contornasse o obstáculo para que pudesse atender a uma demanda do professor, o trabalho não teria validade ou esta seria bastante reduzida.

Também é necessário ter em mente que o fato do primeiro impulso do aluno de querer descobrir apenas o algoritmo para chegar ao resultado é algo totalmente natural. Nesse sentido, Meirieu (1988) reforça que isso acontece porque o trabalho a ser realizado é a única realidade palpável para o aluno naquele momento, pois é ela que mobiliza e que orienta suas atividades, dando-lhe uma representação do objetivo a ser alcançado. O autor termina reforçando a ideia de que a situação-problema¹² deve ser construída de uma forma que o aluno possa encarnar a operação mental requisitada e possa representá-la no papel sem ter o pleno domínio dela.

Assim, Astolfi (1997) recomenda que, para a transposição de um obstáculo, é necessário criar um desafio intelectual desestabilizante, ou seja, criar um trabalho nem fácil nem difícil demais, pois, no primeiro caso, não existiria o obstáculo e, no segundo, os alunos não seriam capazes de transpô-lo. Nesse ponto, o autor relembra os trabalhos de Vygotski, no que diz respeito à zona de desenvolvimento proximal. Consiste em um trabalho didático que busca ultrapassar os obstáculos, mas sem forçar em excesso a maturação das estruturas cognitivas. Astolfi incentiva ainda uma visão positiva em relação ao erro e que este seja uma ferramenta poderosa para trabalhar a favor de uma didática que leve ao sucesso do aluno e até mesmo repensar nossas práticas como professores. Esse mesmo ponto de vista é reforçado por

¹² Situações-problema, na definição de Meirieu, relacionam um objetivo a ser atingido, um obstáculo a ser transposto e um trabalho a ser cumprido (Meirieu, 1998).

Cury (2008), afirmando que, apesar da prática de discutir os erros não ser uma das tarefas mais fáceis, nem por isso ela deve ser evitada. Os professores devem estar preparados para lidar com os erros dos alunos, reagindo aos mesmos de uma maneira positiva, já que estes normalmente temem ser punidos por seus equívocos e optam por esconder as suas dificuldades. Aceitar um erro ou utilizar uma questão com a qual os alunos possam superar as suas dificuldades não é o mesmo que dar uma questão mais fácil. Esse tipo de pensamento, embora errôneo, é muito comum entre professores. Desse modo, é importante diferenciar entre trabalhar o erro de uma questão e dar questões que são muito fáceis, pois, nesse último caso, não existiria o obstáculo e, assim, poderia estar ocorrendo uma *ilusão didática* (PAIS, 1999).

Cury (2008), por outro lado, levanta a hipótese de que tais comportamentos podem advir dos próprios medos e inseguranças que cada um já sentiu em algum momento da vida nas situações em que errou, levando esse sentimento para o campo pedagógico. Além disso, essa sensação é um fator de nossa sociedade: as pessoas são constantemente pressionadas a não cometerem erros, sob o risco de serem punidas severamente. Porém, no campo pedagógico, o tratamento deve ser dado sob outra perspectiva. A partir deste ponto, é necessário entender um aspecto psicológico e cognitivo da Didática para entender melhor as estruturas cognitivas envolvidas na aprendizagem e, inclusive, para uma melhor compreensão de como lidar com os obstáculos propriamente ditos.

2.5. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

De acordo com os levantamentos feitos, suspeitamos de que existam fatores intrapsíquicos envolvidos na aprendizagem da Matemática, nos quais o professor deve se atentar para não correr o perigo de dizer que apenas cumprir estas etapas é suficiente para que o aluno desenvolva um espírito científico que o faça internalizar o aprendizado, sendo capaz de ser autônomo para aplicá-lo em sua vida cotidiana. Quem trouxe essa perspectiva psicológica da aprendizagem em matemática foi Gérard Vergnaud (1994). O autor enfatiza a função do professor nos seguintes aspectos:

- Identificar e diferenciar quais são os conhecimentos que seus alunos já têm explícitos e usam de forma correta;
- Saber diferenciar aqueles alunos que até usam de forma correta, mas não internalizaram o aprendizado a ponto de associar e aplicar os conhecimentos a uma situação-problema instantaneamente.

Segundo palavras de Vergnaud (1993), os algoritmos são conhecidos por ele como esquemas. Estes passam por uma fase de adaptação e assimilação pelo aluno através do método da tentativa e do erro. Se há pouca assimilação do conceito, isso pode levar a uma utilização inadequada dos esquemas, pois um bom esquema é constituído pelos *conhecimentos-em-ação* e os *teoremas-em-ação*, segundo Vergnaud. Se o aluno domina esses dois conceitos, ele os transforma em invariantes operatórias, sendo capaz de aplicar o esquema em diversas situações da mesma classe, resultando em uma generalização. Se há o divórcio entre os elementos do esquema, cria-se o que é chamado de mecanização do aprendizado. Brousseau também acrescenta que, na aprendizagem dos procedimentos matemáticos, há uma dimensão da psicologia social, assim como na epistemologia e na psicologia matemática. Desse modo, quando um educador propõe-se a estudar e elaborar projetos didáticos para uma aprendizagem mais significativa de matemática, não deve se esquecer desses pressupostos. Vergnaud nomeou essa teoria de Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990).

Apesar de ter sido inicialmente proposta no campo da Matemática, podendo ser aplicada nos processos de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, estruturas multiplicativas, relações número-espço e da Álgebra, essa teoria pode ser transposta para outras áreas, como a área de Ciências (MOREIRA, 2002). Um aspecto interessante dos Campos Conceituais é a teoria psicodidática dos conceitos e esquemas, os quais iremos abordar no tópico a seguir.

2.5.1. CONCEITOS E ESQUEMAS

De acordo com Vergnaud (1990), um conceito nunca pode ser reduzido a sua definição. O autor enfatiza que é através das situações¹³ e de problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Vergnaud ainda separa essas situações em duas classes:

a) Classe de situações para as quais o sujeito dispõe de um repertório de competências

Nessa classe, em um dado momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, o sujeito adquiriu competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.

b) Classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências

Já nessa segunda classe, pelo fato do sujeito não possuir as competências necessárias, isso o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas abortadas e o conduz, eventualmente, ao êxito ou ao fracasso.

Para se trabalhar com os dois casos citados, aplica-se o conceito de esquema. Embora o seu funcionamento seja diferente em cada uma das classes de situações, um esquema pode ser elaborado de acordo com as condutas relativamente automatizadas pelo sujeito ou advindas de um conjunto de tentativas de recategorizações, levando a um processo de descoberta do novo conhecimento. Quando uma organização torna-se uma invariante de conduta para uma dada classe de situações, ela é conhecida como esquema.

¹³ Para Vergnaud, uma situação é qualquer tarefa a realizar. Difere, portanto, da noção de Situação de Brousseau que se refere a interação professor-aluno e mais restrito ao contexto da sala de aula.

2.5.2. ENTENDENDO OS ESQUEMAS

Um bom esquema, segundo Vergnaud (1990), é formado pelos *conhecimentos-em-ação* e os *teoremas-em-ação*. O primeiro corresponde às ações que realizamos para uma determinada tarefa, mas não somos capazes de explicitar pelo fato de sermos ainda muito iniciantes naquilo. Por exemplo, um sujeito que trabalha em uma fábrica de peças e que nunca recebeu uma educação erudita, mas é especialista em resolver um determinado problema que ocorre durante a produção. Apesar de saber aplicar muito bem e conhecer suficientemente sobre o assunto, ele não é capaz de explicitar qual o algoritmo para resolver o problema. Logo, isso é chamado de *conhecimento-em-ação*. Porém, quando ele já é capaz de organizar um algoritmo, de transmitir o conhecimento aplicado no conserto de peças para outras pessoas e de generalizar a ação para qualquer tipo de peça semelhante, então isso já se tornou um *teorema-em-ação*. Consequentemente, se este último e os *conhecimentos-em-ação* trabalham juntos, então ele é um bom esquema e torna-se assim uma invariante operatória.

Uma invariante operatória é quando os dois conceitos trabalham de forma que o aluno seja capaz de aplicá-la em qualquer outro problema. Ou seja, é capaz de desmembrar uma questão, aplicar um conceito já aprendido e estendê-lo, sabendo o modo e quando este conceito será necessário.

Logo, o ideal em um projeto de ensino é fazer com que os alunos sejam capazes de transformar seus *conhecimentos-em-ação* e *teoremas-em-ação* em invariantes operatórias.

O próprio Vergnaud, durante uma conferência dada em São Paulo¹⁴, afirma que a Teoria dos Campos Conceituais não é capaz de responder a todos os tipos de problemas enfrentados no campo da Educação. Porém, o autor alerta que é de responsabilidade do professor estar atento ao funcionamento da aprendizagem dos conceitos abstratos pelos alunos, o que é frequente na Matemática. Portanto, é necessário compreender todos os aspectos psicológico-didáticos envolvidos na compreensão de conceitos abstratos. O termo

¹⁴ Conferência realizada em Julho de 2010 em São Paulo no VI ENAS/EIAS (Encontro Nacional/Internacional de Aprendizagem Significativa).

psicológico-didático é utilizado pelo próprio Vergnaud para caracterizar a Teoria dos Campos Conceituais.

Nesse mesmo encontro dado em São Paulo, Vergnaud também ministrou um minicurso sobre Aprendizagem Significativa e os Campos Conceituais, mostrando um exemplo da compreensão do tópico de Grandezas e Medidas por crianças da faixa etária de dez a doze anos de idade. Esse tópico tornar-se um esquema ou uma invariante operatória pelas crianças. Não é trivial.

O teste foi feito há cerca de trinta anos, com um grupo de aproximadamente oitocentas crianças. Consistia em analisar a compreensão da relação de Grandezas e Medidas pelas crianças, pedindo para que elas representassem em uma tira de papel, a massa, o tempo, a medida escalar e a idade dos colegas de sala. Vergnaud mostrou várias tiras com as respostas desses alunos que responderam utilizando apenas a sua intuição e o seu conhecimento prévio. Analisando essas tiras, nota-se que muitos se equivocaram e não sabiam como ordenar de uma forma lógica e associar as grandezas (massa, tempo, medida escalar e idade) em uma reta numérica. Em um segundo momento, foi explicado às crianças que não era possível representar algumas Grandezas em apenas uma reta e o teste foi refeito. No entanto, o resultado surpreendeu, pois mesmo sendo explicado o fato de que eles não podiam representar todas as grandezas em uma só reta, a dificuldade ainda persistiu. Vergnaud concluiu que o conceito de Grandezas e Medidas não é algo tão simples de ser compreendido pelas crianças e o professor, no momento de ensinar, precisa ter ciência disso, da mesma forma como em Álgebra. As dificuldades encontradas pelos alunos nesses dois tópicos são semelhantes quando vistas pelo olhar da Teoria dos Campos Conceituais.

Esses resultados obtidos através do teste feito por Vergnaud também foram constatados em nossa experiência docente com alunos do Ensino Médio. Reunimos alguns exercícios típicos de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) sobre Grandezas e Medidas e os separamos em grupos e categorias de obstáculos. A seguir, iremos mostrar os ¹⁵obstáculos mais comuns encontrados no tópico de Grandezas e Medidas para posteriormente ajudar a compreender os obstáculos de aprendizagem em Álgebra.

¹⁵ Uma análise preliminar desses obstáculos foi apresentada no XIV EBRAPEM realizado em Campo Grande, MS em 2010. Consultar bibliografia final em KIKUCHI e TREVIZAN (2010).

Obstáculo 1 - O raciocínio proporcional

A proporção, aqui compreendida como uma relação de igualdade entre duas ou mais razões, é de fundamental importância para a compreensão das Medidas, bem como de diversos outros temas que permeiam o ensino e as necessidades do mundo real.

Para Piaget, é no nível operatório formal (doze anos em diante) que o sujeito pode construir vários esquemas operacionais, entre eles o de proporção. Desse modo, alguns obstáculos na aprendizagem de Grandezas e Medidas podem ser causados pela necessidade de compreensão da proporcionalidade numa fase anterior do desenvolvimento. Nesse caso, consideramos a proporção como um obstáculo *ontogenético*.

A proporção pode ser considerada ainda um obstáculo *didático*, quando o professor induz a generalização desse conceito, levando o aluno a acreditar que a proporção vale sempre, entre quaisquer Grandezas. Ela pode ser ainda obstáculo *didático* quando o aluno não é levado a diferenciar Grandezas diretamente proporcionais de Grandezas inversamente proporcionais, ou ainda Grandezas intensivas de Grandezas extensivas.

Vejamos como, por exemplo, as Grandezas extensivas podem operar como obstáculos na aprendizagem de uma grandeza intensiva. Sabemos que uma grandeza é dita extensiva quando exprime extensão, quantidade (comprimento, volume, energia), sua medida tem a origem (o zero) bem determinada. Já a grandeza intensiva exprime intensidade (temperatura e potencial elétrico) e não é adicionável. Exemplo: não é possível afirmar que uma temperatura é o dobro da outra, pois isso depende da escala adotada.

Temperatura	Valor da temperatura na escala		
	Celsius	Fahrenheit	Kelvin
A	5°C	41°F	278 K
B	10°C	50°F	283 K

Figura 2.1 - A impressão de que toda grandeza deve ser extensiva pode gerar no aluno problemas na compreensão das escalas de temperatura.

Obstáculo 2 – Os conjuntos numéricos.

Podemos considerar *epistemológico* um obstáculo como o conjunto dos números racionais, porque, na história da Matemática, ele também aparece como um obstáculo. Os gregos, até cinco séculos antes de Cristo, desenvolviam a Matemática sem aceitar a existência de segmentos incomensuráveis. Quando o aluno não compreende o conjunto dos números irracionais, como o número π (pi), torna-se difícil aceitar a relação existente, por exemplo, entre as medidas do diâmetro e do perímetro de uma circunferência, cujo cálculo somente é possível adotando um número aproximado.

Obstáculo 3 – Medidas enunciadas

Nota-se que no cotidiano escolar dificilmente se faz medição concreta. A realidade só é evocada nos enunciados. Isso gera um obstáculo *didático*, pois, ao deparar-se com a necessidade de fazer uma medida efetivamente, o aluno pode não saber selecionar e/ou manusear os recursos apropriados.

Obstáculo 4 – Grandezas discretas

Outro obstáculo *didático* pode surgir dessa vez como resultado da simplificação dos exercícios para facilitar os cálculos ou adaptar-se aos conhecimentos do aluno em termos de conjuntos numéricos. São fornecidas sempre medidas exatas (preferencialmente, inteiras) que levam o aluno a desconsiderar a natureza contínua de grande parte das Grandezas estudadas (comprimento, massa, tempo etc.).

Obstáculo 5 – A representação do objeto

Passaremos a analisar a figura como um obstáculo *didático* que, frequentemente, surge num trabalho com Medidas. É comum, na didatização de um tema geométrico, a utilização de figuras que ilustram o que está enunciado em palavras. Consensualmente, são válidas apenas

as informações fornecidas no enunciado, ou explícitas na figura, através de símbolos. No entanto, para o aluno, nem sempre é clara a distinção entre a representação (figura) e o objeto que está sendo tratado de fato. Isso porque o aluno está acostumado com outro tipo de representação, na qual as informações podem ser desprendidas das próprias figuras, as quais é possível observar, medir, e assim por diante.

Vejamos um caso em que surgiu este obstáculo:

Figura 2.2 - Questão retirada do ENEM, 2006.

Ao responder a questão¹⁶ anterior, uma de nossas alunas do 3º ano do Ensino Médio procedeu do seguinte modo: mediu com uma régua a parte do corrimão que representa 30 cm e verificou que essa medida corresponde a quatro vezes na parte inclinada. Com isso, a aluna concluiu que a parte inclinada do corrimão media 120 cm. Logo, respondeu que o comprimento total do corrimão era de 180 cm, ou seja, 1,8 m (alternativa a). Foi difícil convencê-la de que a figura era apenas uma representação do objeto analisado, nem sequer proporcional a este objeto. A escada de que se perguntava não estava ali no papel, era um objeto abstrato, do qual se conheciam as propriedades explícitas no enunciado e, numericamente, na figura. Para responder esta questão, era necessário lançar mão de um conhecimento que ela possuía – o Teorema de Pitágoras. Para fins do presente trabalho, no

¹⁶ Questão retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2006.

entanto, é interessante constatar o fato de que a representação do objeto pode constituir-se em um obstáculo *didático* para a resolução de um problema, quando um professor deixa de esclarecer aos seus alunos que, em certos problemas matemáticos envolvendo cálculos de medidas de uma figura, trata-se de uma representação sem escala. Por isso, a necessidade da utilização de conceitos que permitam o cálculo da medida representada na figura, sem utilizar um instrumento de medida, como a régua. Apesar disso, é pertinente ressaltar que, em outras atividades como Engenharia, Arquitetura e Desenho Técnico, é muito importante que as figuras representadas sejam precisas e apresentem uma escala correta.

Obstáculo 6 – Precisão

O estudo do erro instrumental é fundamental num tópico como o de Grandezas e Medidas. Em “Os diferentes papéis do professor”, o próprio Brousseau transcreve uma aula de Medidas e Grandezas, na qual pudemos observar a presença de um obstáculo de natureza *didática*.

A professora leva para a sala de aula um recipiente vazio, um copo, uma balança e um balde de água e realiza com os alunos a pesagem de três copos de água. No decorrer, das pesagens, ela faz perguntas e não as responde.

O peso¹⁷ do primeiro copo, os alunos “chutam” como numa brincadeira de adivinhação. O peso do segundo copo, eles multiplicam por dois. Ao perceber que os dois copos pesam menos que o dobro de um, eles são induzidos a pensar que essa diferença é o peso do recipiente. Por isso, ao estimar o peso do terceiro copo, eles somam apenas o peso correspondente à água de um copo. No entanto, a experiência lhes garante um fracasso, pois, feita a pesagem, percebem que os cálculos não correspondem à realidade.

A professora não lhes dá explicação sobre o resultado obtido. Um dos alunos se pronuncia: “O copo não está cheio exatamente do mesmo modo, cada vez”. Mas não é levado em conta. A precisão de seu instrumento de medida (copo) não é discutida. Os alunos concluem que várias pesagens de um mesmo objeto não oferecem o mesmo valor. Este

¹⁷ O texto usa o termo peso para referir-se à medida de massa.

equivoco ocorre, pois para o aluno está subentendido que toda medição é precisa, como nos enunciados dos exercícios, e ele não percebe que, na realidade, precisamos levar em consideração tais imprecisões e, por isso, a importância de fazer várias medições para obter um grau de incerteza sobre a medição, como feito em testes de laboratório.

Obstáculo 7 – Conjunto objeto

Analisemos o caso em que, na transformação da unidade cm^2 para m^2 , o aluno divide a medida por 100. Notoriamente, a compreensão das propriedades de um CONJUNTO OBJETO (o das figuras unidimensionais) tornou-se obstáculo *didático* para a compreensão de outro CONJUNTO OBJETO (o das figuras bidimensionais).

Obstáculo 8 – Conjunto medida

Escolher a unidade de medida incorreta ou adicionar medidas, sem fazer a conversão de unidades, são erros que apontam para um obstáculo *didático*.

No ensino, é importante que se dê oportunidade ao aluno de efetuar medições de forma intuitiva, com o emprego de unidades não convencionais e próximas de seu dia-a-dia. Tais atividades podem contribuir para a compreensão do caráter arbitrário da unidade e para desenvolver a habilidade de adequar a unidade à grandeza a ser medida. (LIMA 2004, p.13)

Obstáculo 9 – Conjunto grandeza

A confusão entre Grandezas por parte do aluno aponta para um obstáculo que pode ser considerado:

- *Psicológico*, no caso de confundir peso e massa. Na comunidade em que está inserida, sua família, seus pais, provavelmente chamam de peso a medida que realizam na balança. Portanto, para ele há uma relação natural com essa nomenclatura, que pode constituir um obstáculo para a compreensão do conceito científico de massa e peso.

- *Epistemológico*, nos demais casos, como confundir área e perímetro, massa e volume e assim por diante.

- *Epistemológico* ainda no caso em que a compreensão das Grandezas diretas tornam-se obstáculos para a compreensão de Grandezas deriváveis, tais como a velocidade, que depende de outras Grandezas diretas (comprimento e tempo). É difícil aceitar a razão ou o produto de duas Grandezas diferentes, pois que sentido pode ter $90 \text{ km} / 2 \text{ h} = 45 \text{ km/h}$, ou ainda, $2\text{N} \times 3\text{m} = (2 \times 3)\text{J} = 6\text{J}$ (“dois newtons vezes três metros é igual a 6 joules”)? Este tipo de obstáculo aparece também na história, quando Euclides afirma: “*a razão é uma relação entre duas magnitudes homogêneas*” (EUCLIDES apud SIERPINSKA, 1989 – tradução livre).

Veja a seguir um exemplo de um obstáculo *epistemológico* originado pela falta de compreensão da grandeza área.

Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

- (A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
- (B) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
- (C) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
- (D) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
- (E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

Figura 2.3 - Questão retirada do ENEM, 2004.

Ao aplicarmos essa questão¹⁸ numa sala de 3º ano do Ensino Médio, uma das alunas sentiu grande dificuldade em resolver o exercício. A princípio, pensávamos que era um desconhecimento das fórmulas ou da sua forma de aplicação, mas percebemos que não era essa a dificuldade. Mesmo recebendo orientações para calcular a área do quadrado e do círculo separadamente, a aluna não sabia o que fazer com essas medidas. Ainda que disséssemos que, para calcular a área da sobra, bastava calcular a área do quadrado e subtrair a área do círculo, a aluna não conseguia compreender que sentido havia nessa operação. Isso porque não lhe era claro o conceito da grandeza área, ou melhor, a transformação que leva cada objeto em sua área.

Essa transformação pode ser ainda considerada um obstáculo *epistemológico*, quando se confunde o objeto com a Grandeza. Por exemplo, o termo círculo refere-se à figura ou à sua área? Para Euclides, era natural referir-se a essas duas coisas pelo mesmo nome. Este mesmo obstáculo pode ser também *didático*, quando se pergunta para o aluno quanto vale o círculo, por exemplo. Além disso, também pode ser considerado como obstáculo *didático* originado pela maneira de formulação da questão, que pode ter causado um equívoco de interpretação por parte dessa aluna. Já que a situação apresentada, embora tenha o objetivo de ser contextualizada, não é uma situação muito comum para o cotidiano dos alunos.

Obstáculo 11 – RELAÇÃO GRANDEZA-MEDIDA

A medição é um processo complexo, envolve a escolha de uma unidade de medida e o emprego de procedimentos apropriados, muitos deles apoiados em instrumentos – réguas, relógios, balanças, recipientes graduados, entre muitos outros. Nesse processo, atribui-se, a uma grandeza, um número, que é a medida da grandeza na unidade escolhida. A história desses processos de medição tem estreita ligação com a evolução tecnológica e científica das culturas humanas. (LIMA 2004, p.13)

Portanto, é natural surgirem obstáculos no momento de efetuar medições, ou de compreender o significado dessas medidas numéricas. Ainda mais quando se aprendem duas escalas diferentes para medir a mesma grandeza, por exemplo, ângulos. Os graus podem ser obstáculos para o entendimento dos radianos, e vice-versa.

¹⁸ Questão retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2004.

Pode-se concluir com os exemplos dados acima, que muitos dos obstáculos envolvem o esquema. Ou seja, o aluno possui o *conhecimento-em-ação*, mas não conseguiu desenvolver o suficiente para chegar a um *teorema-em-ação* e conseqüentemente torná-lo numa *invariante operatória*. Lembramos que os exemplos anteriores foram trabalhados no conteúdo de Grandezas e Medidas, mas não deixa de ser aplicável ao ensino de Álgebra como iremos tratar no Capítulo IV deste trabalho.

No capítulo seguinte, vamos descrever a metodologia de aplicação do estudo piloto e estudo final que elaboramos para esta pesquisa.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DO ESTUDO PILOTO E DO ESTUDO FINAL

3.1. DESCRIÇÃO DO LEVANTAMENTO DE DADOS

Para obter um levantamento de dados que trouxesse resultados consistentes, decidimos primeiramente conduzir um estudo piloto com quatro questões de múltipla escolha e uma questão aberta envolvendo conhecimentos de Álgebra, que foram retiradas de uma das avaliações dos anos anteriores do SARESP.

O teste foi aplicado em três escolas da rede pública do estado de São Paulo com alunos do nono ano do Ensino Fundamental. A escolha dessa faixa etária escolar deve-se ao fato dos alunos já não serem mais iniciantes em Álgebra e espera-se que já tenham trabalhado de um a dois anos com esse conteúdo. Inclusive tivemos o cuidado de escolher as questões que envolvessem diferentes habilidades dentro da Álgebra, para que pudéssemos ter um panorama geral dos tipos de dificuldades que os alunos poderiam enfrentar.

Posteriormente, de acordo com os resultados, foi desenvolvido um estudo final com questões envolvendo Lógica, Álgebra, Estatística e Geometria para que fossem confirmadas as hipóteses observadas no teste piloto. No entanto, no teste final, apenas uma das escolas que participou no primeiro teste realizou a atividade. A justificativa para tal escolha foi feita de acordo com a espontaneidade e motivação do grupo de alunos que se dispuseram a tentar responder todas as questões aplicadas na pesquisa, evitando deixar as questões em branco, atendendo aos requisitos solicitados pela pesquisadora¹. Tal disposição nos ajudou a obter resultados mais relevantes para a pesquisa.

Através dessa investigação, pretendemos chegar a pistas dos obstáculos envolvidos no erro do aluno, sob a perspectiva de Guy Brousseau, as quais podem nos levar a uma reflexão da nossa metodologia de ensino para ajudar a gerir e a superar os obstáculos que comprometem a aprendizagem.

¹ Pesquisadora refere-se à autora desta dissertação.

3.2. ESCOLHA DAS QUESTÕES DO ESTUDO PILOTO

Baseando-nos em testes de pesquisas aplicadas por Booth (1981) e Kieran (1988), fizemos uma seleção de exercícios abrangendo prioritariamente conteúdos de Álgebra para realizar o estudo piloto, acreditando que os exercícios escolhidos eram os que poderiam trazer mais chances de apresentar dificuldades e obstáculos para serem analisados. Além disso, foram escolhidas as questões do SARESP, pois, pelo fato de ser um exame de abrangência estadual, que passa por uma prévia seleção e ajustes feitos por uma equipe já especializada no assunto, a relevância dos exercícios propostos estaria de acordo com a realidade do que se espera dos alunos paulistas e, possivelmente, brasileiros.

A seguir, seguem as habilidades e os exercícios escolhidos para serem investigados através do estudo piloto. Foi escolhido um tipo de exercício do SARESP que melhor se enquadraria em cada uma das habilidades, com exceção do último exercício que foi elaborado especialmente para a habilidade que queríamos analisar. Em algumas imagens, serão feitas as transcrições literais das respostas para facilitar a leitura.

Habilidade 1) Usar procedimentos para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando propriedades conhecidas.

Considere as expressões: (Resposta correta: alternativa c)

$$A = +3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que $A + B$ equivale a

a) $-6x^4$

b) $+6x^4 + 2$

c) $-4x^2$

d) 0

Habilidade 2) Resolver uma situação-problema utilizando equação do 2º grau como uma das formas de resolver o problema.

Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era: (Resposta correta: alternativa d)

a) 1

b) 2

c) 5

d) 6

Habilidade 3) Expressar por meio de uma sentença algébrica a relação existente entre a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais.

*Denominado **a**, o número de saltos, e **b** a distância alcançada por um jovem que se exercita, qual das tabelas indica, de forma correta, a relação entre **a** e **b** dada pela sentença algébrica **b = 1,5 a**. (Resposta correta: alternativa b)*

(A)	Número de saltos	6	12	24	48
	Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0

(B)	Número de saltos	2	4	6	8
	Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0

(C)	Número de saltos	3	6	15	18
	Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0

(D)	Número de saltos	4	8	10	20
	Distância (m)	2,0	5,0	8,0	10,0

Habilidade 4) Identificar, num sistema de eixos cartesianos, gráficos que representam variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais.

O gráfico seguinte representa a distância s , em quilômetros, percorrida por um veículo em horas, rodando a uma velocidade constante. Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas s e t são tais que: (Resposta correta: alternativa a).

- a) $s = 95t$
- b) $s = 190t$
- c) $t = 95s$
- d) $t = 190s$

Habilidade 5) Representar uma sentença algébrica em função de variáveis.

Observe o retângulo a seguir. Sabendo que x e y representam as arestas² demarcadas na figura, represente a área do retângulo em função de x e y .

² Errata: Leia-se: “lados”, por tratar-se de uma imagem bidimensional.

3.3. ESCOLHA DAS ESCOLAS PARA O ESTUDO PILOTO

Para a escolha das escolas participantes, priorizamos as escolas da rede estadual e municipal de São Paulo, pois dessa forma teríamos, em certa medida, uma amostra mais próxima da realidade do país, já que, mesmo cada uma das escolas tendo suas particularidades, todas seguem um currículo comum sugerido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. No caso das escolas particulares, cada uma possui um currículo pedagógico diferenciado de acordo com o perfil do público que deseja atender, o que tornaria inviável obter resultados mais abrangentes.

As três escolas escolhidas são estabelecimentos conveniados com a Faculdade de Educação da USP, portanto, mais propícias para realização de estágios e pesquisas, já que há educadores contratados pela Faculdade de Educação, responsáveis por encaminhar pesquisadores e estagiários às respectivas escolas de interesse. Tal fato facilitou muito o nosso trabalho, pois os próprios alunos já estão acostumados a participar de pesquisas e pré-dispostos a colaborar. Para efeito de organização, nomearemos as escolas pesquisadas no estudo piloto aleatoriamente de ESCOLA A, ESCOLA B e ESCOLA C.

3.4. RESULTADOS DO ESTUDO PILOTO

O teste foi aplicado a todos os alunos presentes, no dia da aplicação da pesquisa, sendo-lhes previamente explicado o propósito do estudo, que a participação seria totalmente anônima e que não seriam avaliados individualmente pelo que sabem ou não sabem. Também lhes foi informado que não estávamos interessados em analisar a quantidade de erros e acertos, mas como um aluno tentaria resolver os exercícios propostos. Em todas as escolas, inicialmente os alunos se sentiram intimidados em escrever o seu raciocínio livremente, temendo que estivesse errado, mesmo sendo alertados de que não seriam analisados por essa perspectiva. Com o passar do tempo, os alunos foram, pouco a pouco, sentindo-se mais à vontade para escrever explicitamente o que pensavam e, até mesmo, para dizer honestamente que não sabiam resolver a questão e os seus motivos.

Na escola A, escolhemos os alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Das três escolas pesquisadas, foi a que teve o menor número de participantes na pesquisa, com quatorze alunos, uma vez que a aplicação da pesquisa ocorreu em véspera de feriado, quando, normalmente, ocorre uma baixa frequência de estudantes, segundo a professora de Matemática responsável pela turma.

No entanto, com essa amostra já foi possível detectar alguns tipos de dificuldades que deixaram pistas para a elaboração dos exercícios do teste final. As principais encontradas foram:

- Dificuldade para montar uma equação de segundo grau para resolver uma situação-problema;
- Problemas na elaboração de uma expressão algébrica em função de outra variável.

Segue abaixo alguns exemplos que mostram as dificuldades citadas acima:

2. Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era:

a) 1
b) 2
☒ c) 5
d) 6

Resolução ou explicação:

$5x = x^2 - 6 \text{ uni}$

$5 \times 4 = 20 - 6 = 14 \times$
 $5 \times 2 = 10 - 6 = 4$
 $5 \times 1 = 5 - 6 = -1$
 $5 \times 5 = 25 \quad 5^2 = 25 - 6$

Porque
 $5^2 = 25$ e $5 \cdot 5 = 25$

Figura 3.1 – No exemplo acima, nota-se que o aluno precisou fazer um teste empírico, em vez de elaborar uma expressão algébrica para encontrar o resultado do problema, ao menos conforme se esperava a partir dos conteúdos ensinados.

5. Observe o retângulo abaixo. Sabendo que x e y representam as arestas demarcadas na figura, represente a área do retângulo em função de x e y .

Resolução ou explicação:

$$3 = 6xy = 8xy$$

mas não sei

se esta Certo

Transcrição literal: “ $3 = 6xy = 8xy$ ”; “mas não sei se esta (sic) Certo”

Figura 3.2. – No exemplo acima, nota-se que o aluno apresentou dificuldade na elaboração de uma expressão algébrica em função de duas variáveis.

Outras dificuldades também foram encontradas, mas entendemos que foram problemas mais pontuais, já que essa turma havia ficado muito tempo sem ter aulas de Matemática com um professor especialista na disciplina permanente na escola. Portanto, os conteúdos que inicialmente supomos que eles já haviam aprendido, ou pelo menos teriam trabalhado, ainda não tinham sido estudados.

Na escola B, também foram pesquisados os alunos do nono ano do Ensino Fundamental. O número de alunos foi um pouco superior ao da escola A (vinte e um alunos no total) e as dificuldades apresentadas foram semelhantes às da primeira, exceto pelo fato de que, nessa escola, surgiu uma nova dificuldade que não havia aparecido na primeira:

- Equívocos na identificação de um sistema de eixos cartesianos com as unidades correspondentes a cada tipo de grandeza representada nos eixos.

Observe o exemplo a seguir:

Transcrição literal: “Conforme o gráfico sempre a barra de s é a que representa a de como exemplo (sic)”.

Figura 3.3. – O aluno sabia que havia uma relação, no entanto, confundiu as grandezas representadas e a constante da equação.

A escola B também enfrentava problema semelhante ao da escola A, cuja rotatividade de professores especialistas em Matemática provocou uma lacuna nos conteúdos que deveriam ser ensinados naquele nível escolar. No entanto, em relação ao conteúdo, os alunos já haviam parcialmente trabalhado nos tópicos que escolhemos para a pesquisa.

E, finalmente, na escola C, foram pesquisadas duas turmas: alunos do nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. Resolvemos pesquisar também os alunos do primeiro ano do Ensino Médio nessa escola, pela oportunidade que nos foi proporcionada das duas turmas estarem disponíveis no horário em que a pesquisa foi aplicada. Além disso, por se tratar de um teste piloto, foi interessante pesquisar os alunos do primeiro ano do Ensino Médio para termos um parâmetro das diferenças de desempenho do grupo da série seguinte a que nos propusemos pesquisar. Possibilitou também analisar aspectos como o

amadurecimento em relação às aplicações e aos problemas evoluindo as operações algébricas e também em relação aos conteúdos que já foram estudados.

Nessa última escola, houve um número maior de alunos em relação às duas escolas anteriores (no total de vinte e nove alunos), mas os resultados foram semelhantes, não apresentando dificuldades diferentes às das duas primeiras na turma de nono ano. Já na turma de Ensino Médio (com um mesmo número de alunos do nono ano), a principal dificuldade apresentada, diferente das anteriores, foi:

- Dificuldade de expressar, por meio de uma sentença algébrica, a relação existente entre a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais.

Observe o exemplo de um aluno que, provavelmente, apenas copiou a sentença algébrica dada no enunciado $b = 1,5a$ e, de acordo com a sentença, tentou relacionar com as alternativas disponíveis.

3. Denominado a , o número de saltos, e b a distância alcançada por um jovem que se exercita. Indique a tabela que possui a relação correta entre a e b dada pela sentença algébrica $b = 1,5a$.

(A)

Número de saltos	6	12	24	48
Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0

(B)

Número de saltos	2	4	6	8
Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0

(C)

Número de saltos	3	6	15	18
Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0

(D)

Número de saltos	4	8	10	20
Distância (m)	2,0	6,0	8,0	10,0

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

a - D SALTO b - D DISTÂNCIA
 $b = 1,5a$

Escolhi a alternativa C pois acho que é a mais correta.

Transcrição literal: “Escolhi a alternativa C pois acho que é a mais correta”.

Figura 3.4. – Não sabemos afirmar qual foi o raciocínio adotado pelo aluno, mas provavelmente ele tentou associar a expressão algébrica com as alternativas.

Foi possível notar que os alunos do Ensino Médio, em relação aos do nono ano de Ensino Fundamental, apresentaram mais persistência para resolver os exercícios, enquanto os alunos do nono ano desistiram na primeira dificuldade. Isso pode ter acontecido devido a uma diferença de contexto de sala de aula que cada turma enfrentava no momento da aplicação da pesquisa. Quando cheguei nessa escola, fui apresentada pela coordenadora à turma do nono ano, que estava sem professor. Foi explicado rapidamente o propósito da pesquisa, que eles não estariam sendo avaliados de forma alguma e tudo que eles respondessem serviria para ajudar no levantamento de dados dessa pesquisa. Talvez a minha falta de vínculo com os alunos e com a escola tenha causado a impressão de que a atividade não precisaria ser realizada com tanto compromisso. Assim, eles estariam mais interessados em terminar rapidamente a tarefa para que pudessem voltar ao que estavam fazendo antes de eu chegar à sala de aula, já que nenhum professor da turma estava acompanhando as suas atividades.

Já no caso do Ensino Médio, o professor da turma encontrava-se na sala de aula no momento da aplicação da pesquisa e ficou o tempo todo monitorando as atividades feitas pelos seus alunos. Talvez esse tenha sido um dos motivos que levaram os mesmos a responderem de forma mais persistente às questões da atividade, sendo poucos os alunos que realmente enfrentaram a dificuldade e, somente por fim, desistiram, explicando que não conseguiram resolver determinado teste, diferente daquela turma do nono ano nesta mesma escola. É claro que isso pode variar de uma escola para outra, porém, na escola C que foi pesquisada, pudemos notar essa grande diferença entre as turmas e também em relação às outras escolas pesquisadas.

3.5. ELABORAÇÃO DO TESTE FINAL

Através dos resultados obtidos no estudo piloto, notamos que era necessário simplificar muito os exercícios utilizados no primeiro teste, sem perder a essência dos conteúdos que gostaríamos de analisar. Para isso, elaboramos seis exercícios semelhantes, com questões mais pontuais sobre o que gostaríamos de investigar, para termos condição de descobrir se as dificuldades foram originadas por problemas na interpretação das questões ou pelo fato dos alunos não terem visto o conteúdo. Além disso, vale destacar que, inicialmente, fomos relutantes em diminuir o grau de dificuldade das questões para a pesquisa, mas isso se

mostrou necessário, a fim de que obtivéssemos dados dos alunos para além de resoluções mecânicas e sem a exposição de seu raciocínio. A diminuição do grau de dificuldade e as reformulações feitas permitiram a exposição do raciocínio e/ou das dúvidas dos alunos, ainda que simplificados, conforme será visto no capítulo seguinte³.

Para a aplicação do teste final, decidimos escolher a escola B, na qual os alunos tiveram maior receptividade e colaboração com o teste, respondendo com a maior seriedade, sem desistir facilmente de resolver as questões propostas. Atitudes como fazer perguntas ao professor e questionar a si mesmo se o que fez era realmente o que fora pedido pelo enunciado foram características da turma que nos motivaram a elegê-la para a aplicação do estudo final.

Cabe ressaltar que a falta de professor na escola em algumas disciplinas como Física, Química e Matemática é comum. Tal fato interfere na sequência dos conteúdos que deveriam ser ensinados aos alunos dessa faixa etária, comprometendo seu aprendizado, de modo que, por vezes, os alunos não haviam aprendido assuntos pertinentes à nossa análise. Mesmo assim, decidimos manter a amostra dessas escolas, pois refletem o cenário do nosso sistema de ensino.

No capítulo seguinte, iremos mostrar os resultados encontrados no teste final juntamente com a análise das questões, de acordo com as dificuldades encontradas. Nos anexos, podem ser encontrados alguns resultados do estudo piloto e do teste final das escolas pesquisadas, para possibilitar um panorama geral dos tipos de respostas obtidas pela maioria dos alunos que participaram da pesquisa. Em uma delas, há observações escritas por mim, após entrevista com o aluno, com o intuito de tentar entender melhor o raciocínio desenvolvido por ele.

Os resultados utilizados na análise dos tipos de obstáculos, no capítulo seguinte, foram aqueles que nos possibilitaram inferir hipóteses e dificuldades associadas à resolução de questões envolvendo Álgebra.

³ Em minha prática docente como professora de matemática, mesmo depois desta pesquisa, essa grande dificuldade dos alunos se mostrou verdadeira, o que reforça o acerto do caminho metodológico tomado.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS PELA CATEGORIZAÇÃO DE GUY BROUSSEAU E DA PERSPECTIVA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

4.1. O OBJETIVO DA CATEGORIZAÇÃO

A ideia da categorização dos obstáculos envolvendo os conceitos algébricos tem o principal intuito de ajudar a criar grupos de obstáculos gerados por certos tipos de exercícios de Álgebra. Quais são os conceitos e raciocínios requeridos por que geram tanto erro e frustração por parte dos estudantes? Quais são as prováveis origens? Questões como essas nortearam esta pesquisa.

Todavia, de pouco servirá essa categorização se ela não ajudar a clarear a visão do professor e fornecer pistas de como trabalhar com determinados conceitos. Tais pistas poderiam ser por exemplo, ter um olhar atento para observar quais cuidados que deveriam ser tomados na hora de abordar certos conteúdos, além de prever os possíveis obstáculos que o aluno enfrentará ao se deparar com os mesmos. Ou, ainda, gerar uma reflexão em relação à necessidade de transpor uma ideia ou senso comum que o aluno desenvolvera anteriormente para compreender o conteúdo, ou se eles geram um novo tipo de obstáculo.

Como já apresentado no Capítulo I, o motivo pelo qual foi escolhida a análise em forma de categorias deve-se ao fato de que a categorização facilita a leitura e ajuda a esclarecer os possíveis obstáculos envolvidos na aprendizagem de conceitos algébricos por alunos do Ensino Fundamental, além de favorecer a compreensão dos outros aspectos cognitivos que podem estar envolvidos naqueles exemplos de respostas que não puderam ser enquadradas em uma das categorias de Brousseau (1983).

Para o matemático Ronnie Brown¹, é importante que o professor, quando se prepara para ensinar ou comunicar algo, repense, reflita e reformule a compreensão acerca do assunto que irá expor, já que, quando se ensina, o professor é confrontado com questões que não haviam surgido quando se encontrava na posição de estudante aprendiz do conteúdo. O pesquisador também destaca que, se não existir a intenção de fazer novas sugestões práticas de como se deve ensinar matemática, essa disciplina não pode ser ensinada de uma forma eficaz. Brousseau (2001) complementa também que é papel do pesquisador prever os efeitos das propostas didáticas, antes de aplicarmos o estudo de campo em sala de aula. Somente depois de feita a investigação inicial é que podemos analisar as hipóteses e compará-las com os resultados obtidos.

4.2. RETOMANDO O CONCEITO DE OBSTÁCULO SEGUNDO BROUSSEAU

Assim como já foi descrito na fundamentação teórica deste trabalho, Guy Brousseau (1983) desenvolveu uma teoria para trabalhar com os obstáculos encontrados na aprendizagem de matemática. Em seu artigo *Os diferentes papéis do professor* (2001, p.65) o autor aponta várias formas de lidar com os obstáculos, que são:

- Rejeitá-los implicitamente a cada vez;
- Ignorá-los (e expor novamente a teoria, como se todo erro fosse decorrente do desconhecimento da teoria apresentada mais recentemente);
- Aceitá-los sem os reconhecer;
- Analisá-los com os alunos;
- Reconhecê-los, expô-los e dar-lhes explicitamente um lugar no projeto de ensino.

Brousseau (2001) ainda enfatiza que o efeito da didática na pesquisa não depende, essencialmente, de oferecer um modelo pronto para o ensino, mas de criar questões para

¹ Este comentário foi feito durante uma conferência da ICMI Study Conference, em Washington (1996), cuja referência consta no capítulo final escrito por Sierpiska e Kilpatrick (1998). Consultar bibliografia no final.

diálogo em situações de ensino, assim como ampliar e corrigir as situações que forem produzidas.

Relembrando, Brousseau definiu, dentro da Didática da Matemática, quatro tipos de obstáculos, a saber, **Epistemológicos, Didáticos, Psicológicos e Ontogenéticos**, cujas descrições de cada tipo de obstáculo encontram-se no Capítulo II deste trabalho.

Além de compreender os quatro tipos de obstáculos definidos por Brousseau, acreditamos que existam ainda os fatores intrapsíquicos (definidos por Vergnaud) que estejam ligados ao processo de aprendizagem das estruturas algébricas pelos alunos. Como já explicado no Capítulo II, os fatores intrapsíquicos são esquemas que passam pelo processo de *conhecimento-em-ação* e *teorema-em-ação* que, quando dominados, transformam-se em invariantes operatórias, em que o aluno é capaz de aplicar o esquema em diversas situações da mesma classe resultando em uma generalização. Compreender esses dois processos é essencial para que o professor seja capaz de identificar e diferenciar quais são os conhecimentos que seus alunos já têm explícitos e usam de forma correta, além de saber diferenciar aqueles que até usam de forma correta, mas não internalizaram o aprendizado a ponto de associar e aplicar os conhecimentos a uma situação problema instantaneamente. Somente assim, o professor será capaz de diferenciar o que é um obstáculo, uma dificuldade e, conseqüentemente, saber quais são as concepções envolvidas em cada uma delas e como tratá-las. Esses conceitos serão tratados no teste final realizado nesta pesquisa, no qual tentaremos categorizar os tipos de obstáculos mais comumente encontrados.

4.3. DESCRIÇÕES DAS QUESTÕES ESCOLHIDAS PARA SEREM APLICADAS NO TESTE

De acordo com os resultados encontrados no pós-teste piloto, resolvemos redefinir seis tipos de questões envolvendo Álgebra, Geometria e Raciocínio Lógico-Dedutivo, acreditando que tais tipos de conteúdos eram relevantes para podermos analisar os obstáculos que envolvem o aprendizado de Álgebra propriamente dito. Embora Geometria e Raciocínio

Lógico-Dedutivo não estejam explicitamente ligados ao conteúdo de Álgebra, resolvemos aumentar a abrangência dos tipos de questões a serem aplicados, já que, em conjunto, elas auxiliam na compreensão do tópico em questão e, através do estudo piloto, constatou-se que escolher questões envolvendo apenas Álgebra não era suficiente para compreendermos a dificuldade ou obstáculo que um aluno enfrenta no momento de resolver um problema.

O seguinte teste final foi aplicado em uma das três escolas (a escola B) que participou do teste piloto, na mesma turma de nono ano do Ensino Fundamental, pois acreditamos que os resultados apresentados foram mais significativos e também houve uma melhor pré-disposição e colaboração dos alunos envolvidos com a pesquisa, conforme foi mencionado anteriormente.

Segue abaixo a descrição das questões que foram aplicadas no teste final.

Questão 1:

(IBMEC-2008) Para responder a essa questão, considere que todo indivíduo que contrai dengue apresenta febre alta e dores musculares.

Carlos e Sílvio deram entrada num hospital com suspeita de dengue. Carlos apresentava febre alta e dores musculares, enquanto Sílvio se queixava de dores musculares, mas não apresentava febre. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

- a) Carlos e Sílvio certamente contrairam dengue.*
- b) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio pode ou não ter contraído a doença.*
- c) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.*
- d) Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio.*
- e) Carlos pode ou não ter contraído dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.*

O que se desejava analisar: Raciocínio lógico - Investigar se o aluno compreende as funções das condicionais “E” e “OU” e o “somente se”:

Questão 2:

Dividir 21 vasos por três pessoas, sendo 7 cheios de vinho, 7 meio cheios de vinho e 7 vazios, de forma que cada pessoa receba o mesmo número de vasos e o mesmo volume de vinho, sem alterar o conteúdo dos vasos.

O que se desejava analisar: O problema, que foi retirado de um dos livros de Malba Tahan², traz um desafio corriqueiro no dia a dia do aluno: realizar a divisão em quantidades iguais de objetos entre certo número de pessoas, respeitando algumas condições propostas pelo exercício. Por não ser uma questão de múltipla escolha, os alunos são desafiados a justificar a solução através de um texto, por cálculos ou por diagramas. Desse modo, é possível analisar qual é o tipo de raciocínio mais adotado pelos alunos.

³Questão 3: *Resolva as seguintes expressões:*

a) $5x + x =$

b) $4x^2 - x^2 =$

c) $2x - 1 =$

d) $3x^2 + x^2 + 12x =$

O que se desejava analisar: Nessa questão, é esperado que os alunos apliquem o conceito operacional algébrico de soma/subtração de coeficientes das variáveis de mesmo grau.

² Malba Tahan é o pseudônimo utilizado pelo escritor e matemático Júlio César de Mello e Souza. Com esse pseudônimo, o autor criou obras que tratam de matemática, didática, contos orientais, contos infantis, teatro, moral religiosa, temas brasileiros, entre outras. O seu livro mais conhecido é *O homem que calculava*, que conta a história de um árabe que resolve problemas do cotidiano usando a Matemática. A obra foi premiada pela Academia Brasileira de Letras em 1972.

³ Questão elaborada pela autora desta pesquisa.

4ª Questão 4:

Sabendo que $x = 3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x =$

b) $4x^2 - x^2 =$

c) $2x - 1 =$

d) $3x^2 + x^2 + 12x =$

O que se desejava analisar: Nesta quarta questão, foi proposto ao aluno resolver as mesmas operações algébricas do exercício anterior, mas conhecendo o valor da variável ($x = 3$). Nesse caso, esperava-se obter o resultado numérico da expressão algébrica.

Questão 5:

(SARESP-2007) Para saber quais eram os tipos de revistas esportivas mais lidas, foi feita uma pesquisa em um determinado bairro.

Tabela: Tipo de revista mais lido

Frequência porcentual	40	30	15	15
Tipo de revista	semanal	mensal	bimestral	trimestral

Qual o gráfico que representa os dados acima apresentados?

(A)

(B)

⁴ Questão elaborada pela autora desta pesquisa.

(C)

(D)

O que se desejava analisar: Nessa questão, desejava-se verificar se o aluno é capaz de analisar uma tabela de dados e associar a um gráfico referente a ela. Essa questão foi a única em que não se observou nenhum tipo de obstáculo e houve 100% de acertos.

Questão 6:

(SARESP-2007) Uma caixa de sapato fechada tem as seguintes dimensões: 6 m, 2 m e 4 m. Qual é a área total⁵ desta caixa?

O que se desejava analisar: Na questão acima, desejava-se investigar se o aluno possui visão espacial e compreende o conceito de área no tópico de Geometria para que consiga generalizar o cálculo de áreas na forma algébrica.

⁵ Sugere-se inserir “da superfície” após “área total”.

4.4. AS CATEGORIAS DE OBSTÁCULOS ENCONTRADAS NOS TESTES

Nem todos os resultados obtidos foram enquadrados em uma das quatro categorias de obstáculos, pois em alguns casos o problema apresentado foi mais pontual, sendo facilmente corrigido por uma abordagem direta, sem passar por uma categoria de obstáculo. Aqui também, assim como feito no Capítulo III, serão feitas as transcrições literais das imagens para facilitar a leitura.

4.4.1 Obstáculo epistemológico

Quando um exercício pode ser resolvido pela utilização de raciocínio lógico-dedutivo, espera-se que, inicialmente, o sujeito se baseie nos *conhecimentos-em-ação* para solucionar o problema. No entanto, nem sempre nesse tipo de raciocínio se está longe de evitar os obstáculos, já que os alunos podem se confundir exatamente pelos *conhecimentos-em-ação* que construíram ao longo do tempo. Por exemplo, não é incomum que os alunos tenham a tendência em acreditar que todas as divisões de objetos reais devam resultar em números naturais, que, nas palavras deles, significam números exatos. Isso acontece porque o conceito de números racionais ainda não está internalizado. Vergnaud (1994) enfatiza que é função do professor identificar e diferenciar quais são os conhecimentos que seus alunos já têm explícitos e usam de forma correta ou aqueles que até usam de forma correta, mas não internalizaram o aprendizado a ponto de associar e aplicar os conhecimentos a uma situação-problema instantaneamente.

Da mesma forma, Brousseau (2001) também defende que tais reflexões devem partir do aluno e não apenas para atender a um desejo do professor. Ele acrescenta que este tipo de obstáculo tem origem epistemológica, já que, na própria história da Matemática⁶, isso já se verificou como um obstáculo no passado. Também de acordo com Vergnaud (1993), nesse

⁶ No Capítulo 2 do livro de Boyer (1996) é apresentado o desenvolvimento do conceito de frações unitárias, operações aritméticas e problemas algébricos e as dificuldades de compreensão geradas na época. Consultar referência na bibliografia.

caso, o conceito de números racionais ainda está no estágio de esquema para o aluno, que ainda carece de passar para uma fase de adaptação e assimilação através da tentativa e do erro para, somente depois, passar a se tornar uma invariante operatória, que é um conjunto de operações capazes de aplicar o esquema em diversas situações da mesma classe, resultando em uma generalização.

Portanto, se analisarmos onde podemos encontrar exemplos de números racionais no cotidiano desses alunos, encontraremos em medidas de objetos e até mesmo nos centavos do nosso sistema monetário. Talvez esse último seja o exemplo mais comum dia a dia das pessoas e poucos têm dificuldade de operar com os centavos quando se trata de contagem de moedas. Isso porque a moeda possui uma vantagem: a contagem das moedas é feita na base 10, ignorando-se a sua representação decimal. Em algum momento lhes foi dito que 100 moedas de 1 centavo equivale a 1 Real no nosso sistema monetário. Poucos têm em mente que a representação de 1 centavo equivale a 1 centésimo do Real ou que 10 centavos equivale à décima parte do Real. Se pedirmos para que essas mesmas pessoas representem em forma decimal o valor de 1 centavo ou 10 centavos, possivelmente, muitos irão se confundir nas posições das casas decimais. Ou seja, existe um obstáculo epistemológico, pois não houve a compreensão de um conceito durante a assimilação de números decimais, ou, em outras palavras, não virou ainda uma invariante operatória.

Convergindo na mesma ideia, Pérez (1988) também constatou que os obstáculos encontrados ao se trabalhar com números decimais são de origem epistemológica, já que muitos alunos, e até mesmo professores, persistem nos conhecimentos e características dos números naturais para tentar compreender os números decimais. Tal comportamento é definido por Brousseau (1976) como uma das condições⁷ que envolvem os obstáculos epistemológicos, na qual o sujeito apresenta uma resistência para entender um novo conceito ou resiste à troca do conceito antigo pelo novo.

⁷ Brousseau (1983) definiu quatro tipos de condições para diferenciar “dificuldade” de “obstáculos”. Em primeiro caso, um obstáculo é causado por um conhecimento falso ou incompleto, mas nunca originado pela ausência de um conhecimento. Em segundo caso, um *conhecimento-obstáculo* define as situações em que um conhecimento seja pertinente e adaptado, mas que em outras pode conduzir ao erro. No terceiro caso, há resistência a um novo conhecimento em detrimento de um antigo. E, por último, os obstáculos que podem surgir de fatores culturais, sociais ou econômicos.

Veja a seguir alguns resultados onde apareceram obstáculos epistemológicos.

Transcrição literal: “Vai sobra três vasos 1 cheio 1 meio 1 vazio esse é o único jeito dos três ficar com o mesmo tanto de vinho [sic].”

Figura 4.1 – Exemplo de um(a) aluno(a) que não conseguiu encontrar uma forma de dividir os vasos entre as três pessoas sem deixar sobrar nenhum. É possível notar que ele se focou nos conteúdos, mas não considerou a condição de que não deveriam sobrar vasos, que era implícita. (Resposta referente à questão 2).

Figura 4.2 – Exemplo em que o aluno confundiu o expoente da variável e colocou-o no coeficiente. (Resposta referente à questão 3).

No caso acima, o aluno memorizou mecanicamente o algoritmo de resolução de equações algébricas sem a devida compreensão do processo, ou seja, nas palavras de Vergnaud (1993), ainda falta o esquema tornar-se uma invariante operatória. Também resulta

de obstáculo epistemológico o conceito de que números e letras não podem ficar juntos, pois isso lhes causa uma estranheza. Na visão de Brousseau (1976/1983), tal tipo de dificuldade ocorre em decorrência da falta de conhecimento aprofundado sobre expressões algébricas por parte do aluno, que comete um equívoco ao compará-las com as operações com expressões numéricas, cujo resultado é a junção dos termos semelhantes para obter um único termo como resultado. A variável não é vista como um elemento contido no conjunto dos números pelo aluno.

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 6x$

b) $4x^2 - x^2 = 10$

c) $2x - 1 = 1x$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 19x$

Figura 4.3 – Exemplo em que o aluno ignorou os graus das variáveis e simplesmente operou com os seus coeficientes (Resposta referente à questão 3).

No exemplo acima, o aluno simplesmente realizou as operações de soma ou subtração dos coeficientes de cada variável, ignorando o grau de cada uma delas. A crença de que o resultado final sempre deve conter apenas um único número gera tal tipo de obstáculo, pois o aluno ainda não conseguiu, ou não foi estimulado a, compreender o significado de cada um dos elementos que compõem uma expressão algébrica. Para ele, uma resposta algébrica do tipo $x^2 + 3$ dá a impressão de que a resposta ainda está incompleta e que é necessário chegar a um resultado com um único número.

Transcrição literal: “ $6 + 6 = 12 + 8 = 20$ em metros”.

Figura 4.4 – Exemplo mostrando um provável equívoco nos conceitos de perímetro e área (Resposta referente à questão 6).

Além do exemplo acima, alguns alunos ainda apresentaram resultados da somatória das arestas principais representadas na caixa tridimensional (largura x altura x comprimento). Esse tipo de obstáculo pode ser considerado epistemológico, pois o aluno não internalizou o conceito de arestas e área. Há uma distinção entre medidas e superfícies, mas, para o aluno, os números parecem apenas representar medidas de um objeto.

Transcrição literal: “Por que a base é equivalente a com e altura é equivalente a 4m. E $4m^2$ com $24m^2$ [sic].”

Figura 4.5 – Outro exemplo envolvendo um provável equívoco de conceito de perímetro e área (Resposta referente à questão 6).

Vários alunos ainda confundiram o conceito de perímetro com o conceito de área. Em algum momento de suas vidas, possivelmente, eles realizaram a soma das arestas para obter a soma total das medidas. A noção de área, bem como a noção de perímetro, são entidades diferentes de medida e assim podemos classificá-las também como um obstáculo epistemológico. Veja na figura a seguir o exemplo do obstáculo epistemológico com equívoco de conceito de área e perímetro:

Transcrição literal: “O resultado que eu acho da 12m porque somado as áreas da caixa [sic].”

Figura 4.6 – Provável confusão com os nomes. As arestas foram consideradas como áreas (Resposta referente à questão 6).

Figura 4.7 – Mais um exemplo do equívoco entre aresta e área (Resposta referente à questão 6).

4.4.2 Obstáculo didático

A falta de familiaridade com números racionais também pode ser de origem didática, quando professores elaboram problemas que evitam resultados ou operações que envolvam esses tipos de números. Os alunos têm o hábito de pensar que, se o número não dá exato (ou seja, um número natural), então a resposta provavelmente está errada. Esse tipo de hábito, que acreditamos que ocorra até com boas intenções dos professores, acaba por prejudicar futuramente o aluno, quando este se deparar com problemas que envolvam números racionais. O professor pode até começar com números mais fáceis de serem trabalhados, mas é responsável pela transição contínua do estágio de esquema para que este passe a se tornar uma invariante operatória, na perspectiva de Vergnaud (1990). Também existe a hipótese de que os professores evitam trabalhar com números racionais, por não saberem lidar com as dificuldades dos próprios alunos ou por não encontrarem melhores maneiras de trabalhar com esse conteúdo.

Na figura 4.8 a seguir, é possível notar um exemplo desse obstáculo.

Transcrição literal: *“Tirar a metade dos 7 vasos cheio e colocar nos vasos vazios assim todos os vasos ficaram meio cheio [sic].”*

Figura 4.8 – O aluno ignorou o fato de que o exercício pedia para que o conteúdo dos 21 vasos não fosse modificado (Resposta referente à questão 2).

Na figura 4.8 anterior, é possível notar uma falta de atenção à condição dada pelo exercício: de que não era permitido transferir os conteúdos de um vaso para o outro. Observando a proporção de alunos que responderam dessa maneira, acredita-se que esse tipo de obstáculo seja didático, pois os alunos estão habituados a resolver exercícios de matemática mecanicamente, procurando apenas pelos Algarismos Numéricos dados no enunciado e com eles realizar operações aritméticas até chegar a um resultado. Se no lugar dos Algarismos fossem escritos números por extenso, provavelmente a dificuldade teria sido maior. Podemos considerar essa hipótese pelo fato do aluno não ter notado a restrição da divisão que vem citada logo depois das quantidades que se deseja dividir. Possivelmente, a leitura foi suspensa no momento em que o aluno conseguiu encontrar elementos suficientes para realizar a sua conta. Esse tipo de obstáculo pode ser de origem didática de professores anteriores que habituaram os alunos a analisarem um enunciado de forma mecanizada⁸, que visa apenas a encontrar um resultado numérico, sem criar uma discussão global, ou até mesmo incentivaram os alunos a fazerem inicialmente uma análise do enunciado para, somente então, partirem para os cálculos. O próprio Vergnaud alertou, em uma conferência⁹ realizada na cidade de São Paulo em Julho de 2010, que as crianças devem ser estimuladas desde cedo a confrontar situações novas e a resolver problemas, mas sem se limitar apenas a realizar cálculos e chegar ao resultado. É necessário criar atividades didáticas que as façam enfrentar desafios. Assim, acredita-se que elas desenvolverão uma maturidade para interpretar enunciados de exercícios e enfrentar a resolução de problemas.

⁸ É possível que isso ocorra por conta do Contrato Didático, que é muito comum entre professores de matemática.

⁹ Vergnaud participou como conferencista do VI Encontro Nacional/Internacional de Aprendizagem Significativa sediado na UNIBAN em Julho de 2010.

Vejamos outro exemplo:

Transcrição literal: “Eu pensei assim fazia 7 cheios, 7 meios e 7 vazios [sic].”

Figura 4.9 – Nesse exemplo, não se temos certeza absoluta se foi um erro ocasional de cálculo ou se existe outro tipo de equívoco que não conseguimos analisar por alguma das categorias de obstáculos. No entanto, parcialmente, podemos notar ainda a dificuldade de trabalhar com números racionais; logo, podemos classificá-lo também como um obstáculo didático. (Resposta referente à questão 2).

Observe novamente a figura 4.2 mencionada nos obstáculos epistemológicos, referente à questão 3:

Nesse exemplo, encontramos na operação, $3x^2 + x^2 + 12x$, o resultado $x = 4^2 + 12$, ou seja, a variável foi isolada dos números no outro membro da igualdade, como se tivesse sido posta em evidência, igualando os seus respectivos coeficientes¹⁰. No número 4^2 , nota-se que a

¹⁰ Isso ocorre pelo algoritmo simplificado dado pelos professores, tais como: “tudo que tem “x” para um lado e os que tem só números para o outro.”

potência quadrada da variável x foi equivocadamente transferida para o coeficiente. Esse tipo de obstáculo é semelhante ao encontrado por Booth (1988), quando os alunos ignoram a variável e concatenam dois números com variáveis diferentes, como no exemplo da adição $2a + 5b$, para a qual os alunos apresentam $7ab$ como resposta. Marquis (1988) também listou erros comuns cometidos em Álgebra e, dentre eles, um exemplo semelhante ao citado anteriormente como $(3a)^4 = 3a^4$. O autor reforça também que, mesmo em alunos do nível final do ensino fundamental, ocorre esse tipo de erro. Tais obstáculos são mais comuns do que se imagina e podem ser de origem didática.

Voltemos também à figura 4.5, referente à questão 6 desta pesquisa, que foi mencionada nos obstáculos epistemológicos. O aluno observa a figura da caixa que está fechada e tridimensionalmente representada no papel e outra da mesma caixa planificada. No entanto, essas figuras não são suficientes para associar o conceito de área com a superfície total da caixa. Logo, o aluno observa apenas a face maior e calcula a área de apenas uma das faces da caixa. Veja:

Transcrição literal: “Por que a base é equivalente a com e altura é equivalente a 4 m. E 4 m² com 24 m² [sic].”

Esse tipo de obstáculo é tipicamente didático, pois não se consegue fazer a transposição da representação do objeto real para o objeto representado no papel. Muitos caem na tentação de medir o objeto representado com uma régua, acreditando que aquelas medidas apresentadas na figura expressam um objeto real. Nessa observação, é importante

levar em consideração os trabalhos de Duval (1993) sobre as representações *semióticas*, termo utilizado pelo autor para se referir aos diferentes meios de representação utilizados na Matemática, como figuras, gráficos, símbolos e a própria linguagem de comunicação. É importante que o professor saiba alertar os alunos sobre as diferenças de um objeto matemático com a sua representação, orientando que eles não poderão recorrer a meios concretos de medição (por exemplo, medir o lado de uma figura com a régua) e obter conclusões através dela. Colombo e Moretti (2007) também fazem referência ao trabalho de Duval, sobre a importância da utilização da *semiótica*:

Duval assume que o objeto matemático não pode, nem deve ser confundido com sua representação, uma vez que não é acessível diretamente à percepção e nem à experiência intuitiva. Por essa razão, as atividades sobre o objeto matemático ocorrem sempre pela sua representação semiótica, sendo essa representação, portanto, essencial à atividade cognitiva. (COLOMBO E MORETTI, 2007, p. 4).

4.4.3. Obstáculo psicológico

Na questão 1 do teste final, que requeria apenas o raciocínio lógico-dedutivo, alguns alunos confundiram-se por fatores externos alheios à questão em si. Ou seja, possivelmente uma experiência anterior (um *conhecimento-em-ação*) atrapalhou o raciocínio envolvendo na questão, que poderia ser resolvida diretamente. Um exemplo é quando o aluno não se atenta ao detalhe de que a pessoa que tem dengue, necessariamente, tem dois sintomas: febre alta e dores musculares. É mais plausível considerar que Carlos esteja com a doença, pois há indícios mínimos, mas, no caso de Silvio, é mais provável que ele tenha alguma outra doença. Talvez, o aluno, tenha pensado: “Talvez Silvio ainda não esteja com febre, mas pode apresentar futuramente” ou até mesmo: “Dor muscular pode ter causas distintas, não necessariamente relacionadas à dengue”. No entanto, vale lembrar que a questão toma como base apresentar uma conclusão determinística, fornecendo alternativas com a palavra “certamente”. Assim, a forma como a questão foi elaborada também pode gerar um obstáculo,

considerado didático neste caso. Segue a descrição de algumas das respostas dadas pelos alunos:

Transcrição literal: *“Dois colegas que apresentam sintomas de febre, Carlos é quase provável que esta com febre. E Silvio está com suspeita... [sic]”.*

Figura 4.10 – Há uma confusão do que se deveria analisar neste caso: queria se saber se Carlos havia contraído a dengue, mas o aluno respondeu “é provável que está com febre”. (Resposta referente à questão 1).

Transcrição literal: *“Carlos certamente estava com dengue porque ele apresentava todos sintomas da doença. Silvio só apresentava uma pequena dor muscular que pode ser causada por qualquer pisão errado ou alguma trombada com outra pessoa [sic].”*

Figura 4.11 – Exemplo de uma resposta de um aluno especificando que a origem da dor pode ser diferente da causada pela dengue. No caso acima, o aluno assinalou como resposta a alternativa c: *Carlos certamente contraiu dengue, e Silvio certamente não contraiu a doença.* (Resposta referente à questão 1).

Transcrição literal: “Certamente para ser confirmado a dengue seria necessário vários exames e ficar em observação, mas como não foi confirmado nada não podemos tomar certas decisões [sic].”

Figura 4.12 – Neste exemplo, ignorou-se a condição de diagnóstico de dengue que fora dado no enunciado e o aluno tomou a visão cética de que não era possível concluir nada sem fazer um exame mais preciso. Neste caso, foi assinalada a alternativa d: *Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio*. (Resposta referente à questão 1).

Transcrição literal: “Assinalei a alternativa B, pois a questão explica que o indivíduo que tem febre e dores musculares, é considerado contraído pela doença, e Carlos está com febre alta e dores musculares considerado contraído pela doença, e Sílvio apresenta apenas dores musculares, então ele pode, ou não, ter contraído a doença [sic].”

Figura 4.13 – Aqui o aluno adotou corretamente o diagnóstico para o indivíduo com dengue e ainda considerou o fato de que ter dores musculares pode ser um diagnóstico precoce de dengue. (Resposta referente à questão 1).¹¹

¹¹ Neste caso, seria um exemplo que, embora não seja a resposta correta esperada pelos examinadores, seria uma resposta plausível, se não fosse considerada o ponto de vista determinístico na questão.

Transcrição literal: “*Os dois poderiam ou não ter contraído a dengue e não se tem certeza que eles contraíram [sic].*”

Figura 4.14 – Semelhante ao caso da figura 4.12, o aluno considerou que não era possível concluir nenhum diagnóstico, mas não especificou o motivo. Foi assinalada a alternativa *d* assim, como na figura 4.12: *Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sérgio.* (Resposta referente à questão 1).

Na questão que envolvia a divisão de barris, observa-se que, de acordo com as justificativas dos alunos, o apoio visual foi o principal meio de resolução do exercício, em detrimento dos cálculos. Eles desenharam um esquema em que a primeira linha consiste nos sete vasos cheios, na linha seguinte os sete vasos pela metade e, por último, os sete vasos vazios. Aparentemente, parece ser uma estratégia interessante para a solução do problema, porém, o próprio esquema acaba dificultando o seu raciocínio, quando respondem que cada pessoa deve receber um vaso de cada “coluna”. Se seguirmos rigorosamente a estratégia de resolução do aluno, faltarão colunas para a segunda e a terceira pessoa no terceiro processo de divisão, além de não ser possível uma divisão igualitária de número de barris nem da quantidade dos conteúdos no final. O obstáculo é de origem psicológica, pois, muito provavelmente, o aluno tentou de início imaginar a situação esquematizada, distribuir fisicamente os barris e, por tentativa e erro, chegar ao resultado final. Como podemos perceber no esquema a seguir, não existe um algoritmo preciso para essa distribuição e é provável que o aluno tenha se perdido da linha de raciocínio inicial e tenha deixado desta forma.

Transcrição literal: “Um vaso de cada coluna para cada pessoa”.

Figura 4.15 – Exemplo mostrando a tentativa do aluno de distribuir os barris igualmente. (Resposta referente à questão 2).

Transcrição literal: “Cada um vai receber 4 vazios e três cheios”.

Figura 4.16 – O aluno respondeu que deveriam ir 4 barris vazios e 3 cheios para cada pessoa e ignorou os barris que estavam preenchidos pela metade. (Resposta referente à questão 2).

Agora levantaremos o problema das “questões deixadas em branco”. Apesar de entender que, quando os alunos deixam em branco uma questão, pode-se abrir uma gama de motivos pelos quais o exercício tenha sido abandonado, ao encontrarmos respostas como “Não me lembro como se faz”, temos indícios de que o obstáculo também pode ser psicológico, já que o aluno tem em mente que apenas é capaz de resolver certos tipos de exercícios quando conhece a fórmula para calculá-los. Ou seja, seu conhecimento de mundo

nunca é suficiente para resolver os problemas matemáticos, pois estes são de outra dimensão, fora do mundo real. Nos resultados da nossa pesquisa, também foi comum esse tipo de resposta, principalmente nas questões que envolviam cálculos algébricos e cálculos de perímetros e áreas. Veja a seguir uma resposta de um dos alunos sobre a questão que envolvia áreas e perímetros.

Transcrição literal: “*Eu tenho algumas duvidas sobre a questão mas eu acho que a área é de 6cm [sic].*”

Figura 4.17 – O aluno não quis deixar em branco, mas deixou explícito que não tinha certeza de como responder à questão e ainda deixou um provável resultado, baseando-se em algum conhecimento anterior que lembrara no momento. (Resposta referente à questão 6).

4.4.4. Obstáculo ontogenético

O obstáculo ontogenético, na nossa análise; foi mais raro de ser encontrado. Encontramos tais hipóteses nas questões que abordavam o cálculo de áreas e perímetros e na questão de lógica. No caso das áreas e dos perímetros, o obstáculo pode ser considerado ontogenético se o aluno não vivencia na prática a diferença entre medir a área de uma sala e medir as suas dimensões ou, mesmo que tenha vivenciado na prática, não consegue aplicar este conhecimento no exercício proposto. Já na questão que envolvia o raciocínio lógico, o aluno não entende a diferença da condição mínima dada pelo exercício (quem contraiu dengue tem, no mínimo, febre alta e dores musculares) e compreende que, apresentando as duas características, já é possível diagnosticar como dengue, assinalando a resposta errada. Outros até mesmo interpretaram de forma correta, dizendo que, para o diagnóstico correto, é necessário fazer exames mais completos, no entanto, na hora de assinalar a resposta, acabam

se confundindo. Ou seja, quando um indivíduo já tiver desenvolvido uma maturidade suficiente para lidar com raciocínios abstratos de lógica, ele já não apresentará obstáculos ontogenéticos, o que não está ligado a sua idade cronológica, mas sim a quanto o indivíduo adquiriu de uma destreza específica para enfrentar certos tipos de exercícios que exigem uma vasta experiência e conhecimento aprofundado sobre o assunto. Poderia ser considerado de certa forma um obstáculo ontogenético, quando o sujeito não adquiriu a habilidade de ler um enunciado e compreender o que se pede, a qual não está ligada diretamente à compreensão do conteúdo matemático, mas da habilidade linguística que o impede de compreender o que se pede no exercício. Os exemplos a seguir podem ilustrar o que afirmamos:

4. Sabendo que $x=3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x = 6x$

b) $4x^2 - x^2 = 10x$

c) $2x - 1 = 1x$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 10x$

Figura 4.18 – Observe que o enunciado pede para que se considere o valor de x como igual a 3, mas o aluno ignorou esse fato e resolveu o exercício da mesma forma como resolvera no exercício 3, no qual se pedia apenas a simplificação das expressões algébricas. (Resposta referente à questão 4).¹²

¹² Semelhante à figura 4.2 pode ser considerado também um obstáculo didático, pois o aluno deve ter notado a semelhança das questões 3 e 4 e respondeu a mesma coisa. O hábito de se deparar com questões de tal tipo pode ter levado a uma resposta “automatizada”.

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x =$

~~b)~~ $4x^2 - x^2 =$

c) $2x - 1 =$

d) $3x^2 + x^2 + 12x =$

4. Sabendo que $x=3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x =$

b) $4x^2 - x^2 =$

c) $2x - 1 =$

~~d)~~ $3x^2 + x^2 + 12x =$

Figura 4.19 – Esse exemplo também é curioso, pois em nenhum momento se pede que se assinale a alternativa correta. Provavelmente, o aluno olhou os itens e imaginou que bastaria escolher a alternativa correta “no chute”.

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 3$

b) $4x^2 - x^2 = 2$

c) $2x - 1 = 1$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 14$

4. Sabendo que $x=3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x = 3$

b) $4x^2 - x^2 = 2$

c) $2x - 1 = 1$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 14$

Figura 4.20 – Esse exemplo é o inverso da figura 4.17. O aluno imaginou que precisaria achar o valor numérico de cada item e não entendeu a diferença da proposta de cada um deles. Mesmo assim, os cálculos não corresponderam à resposta correta.

Desta forma, pudemos classificar alguns exemplos de obstáculos que foram apresentados nos nossos testes aplicados nas escolas. É claro que, numa situação de sala de aula, o professor poderá enfrentar outros obstáculos diferentes dos apresentados neste teste. A intenção desse capítulo foi apresentar alguns exemplos de obstáculos para servir de referência, de ponto de partida, para um trabalho didático que possa ajudar os alunos a enfrentarem esses obstáculos. Da mesma forma, não pretendemos fechar o diagnóstico desses problemas apenas com os obstáculos que foram classificados anteriormente. É possível que existam outras classificações diferentes dessas quatro apresentadas por Brousseau (1983), mas neste momento tentamos nos guiar apenas por essas quatro já conhecidas para então identificarmos que há exemplos que não podem ser possível enquadrados em nenhuma delas, levando à conclusão de que seria necessário criar outras formas de análise, como a dos Campos Conceituais que apresentaremos a seguir.

4.5. OS CAMPOS CONCEITUAIS NAS ANÁLISES DOS OBSTÁCULOS

Durante a análise e categorização dos exemplos deste capítulo em quatro tipos de obstáculos definidos por Brousseau, citamos como cada obstáculo poderia ser trabalhado sob a visão da Teoria dos Campos Conceituais. Enquanto a categorização dos obstáculos nos permite ter um plano geral e apontar aspectos didáticos e metodológicos, a teoria dos Campos Conceituais permite compreender a estrutura cognitiva do aprendizado dos alunos. Vergnaud (1990) chama atenção para a importância da verbalização quando se está aprendendo os processos de uma determinada atividade, por exemplo, as manobras de um carro. Um aprendiz no volante verbaliza a sequência que deve obedecer para guiar o carro como: pisar na embreagem antes de trocar a marcha no câmbio, frear levemente antes de pisar na embreagem para parar completamente o carro, entre outras funções realizadas enquanto se dirige. Essa verbalização não será mais necessária a partir do momento em que o sujeito já automatizou o processo. Portanto, mesmo nas Ciências Exatas, a atividade linguística também faz parte do processo de aprendizagem, para elaboração de passos, hipóteses, decomposição de etapas e processos.

Vergnaud (1990) ainda enfatiza a dificuldade de algumas situações serem representadas simbolicamente, por exemplo, as transformações negativas. Nesse caso, inevitavelmente, o processo seria conduzido com o auxílio das operações algébricas. Logo, se o professor quisesse a todo custo evitar a “algebrização” e continuar a representar as transformações em figuras e representações simbólicas, ele precisaria excluir as relações negativas dos problemas que fosse trabalhar, conduzindo assim a um empobrecimento do ensino da Matemática. Em outras palavras, Vergnaud afirma que, para teorizar a aprendizagem de Matemática, deve haver uma mescla do simbolismo e das situações, colocando como chave a organização da conduta, nesse caso os invariantes operatórios, para enfrentar os problemas.

Por exemplo, na figura 4.1, referente à questão sobre a divisão dos conteúdos de barris, podemos analisar as dificuldades que os alunos tiveram partindo do conceito de esquema, pois ele é responsável pelas ações e estratégias utilizadas pelo sujeito em um conjunto de situações específicas, sendo, segundo Vergnaud (1990), um conceito fundamental da psicologia cognitiva e da didática.

Entender o conceito de esquema ajuda a reconhecer a composição de regras e a ser capaz de antecipar ações para realizar uma determinada atividade, mas esse conceito não é, via de regra, composto igualmente por invariantes operatórios (*conhecimentos-em-ação e teoremas-em-ação*) ou por inferências. Cada modelo ou situação utiliza-se de um número adequado de ações. Ou seja, um *teorema-em-ação* pode ser classificado como uma categoria de funções proposicionais. Estas são compostas por regras lógicas e são compostas basicamente por propriedades e relações binárias (ou podem ser até ternárias e quaternárias como no caso das proporções).

Voltando ao exemplo do barril (Figura 4.1), o aluno deveria ter utilizado as informações do próprio problema como funções proposicionais para resolvê-lo:

- Os conteúdos dos barris não são todos iguais;
- Não é permitido alterar o conteúdo de cada barril;
- Todos devem receber o mesmo número de barris;

- São 3 pessoas que devem dividir esses conteúdos;
- Todos devem receber o mesmo conteúdo de vinho;
- Não deve haver resto, ou seja, todos os barris devem ser distribuídos.

Se o aluno seguisse atentamente tais proposições, aproximadamente na ordem em que foram apresentadas, a resolução tornar-se-ia mais simples. A maior parte dos alunos da pesquisa mostrou uma dificuldade em encontrar as quatro proposições e acabou focando-se apenas em duas (número de barris e número de pessoas a dividir). As justificativas dadas por eles ilustraram¹³ essa hipótese.

No caso da figura 4.2, a dificuldade com a resolução de expressões algébricas pode ter sido originada pelos hábitos e *teoremas-em-ação* aprendidos anteriormente, tais como:

- conservar a igualdade e isolar uma das incógnitas;
- conservar a igualdade e dividir ambos os lados;
- é necessário encontrar um valor numérico para a incógnita.

Porém, se esses *teoremas-em-ação* forem utilizados de forma automatizada, sem analisar o que realmente o problema pede, ocorrerão equívocos na sua resolução, como foram encontrados nas figuras 4.2 e 4.3. Vergnaud (1990) afirma que a automatização é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização de uma ação, mas é necessário que essas decisões sejam tomadas de forma consciente, pois, de outro modo, perderiam o significado. Nesse ponto é que está o desafio de um professor: conseguir desenvolver o aluno a ponto de torná-lo capaz de automatizar e tomar decisões conscientes para resolver um problema. Muitas vezes, tem-se a impressão de que resolver uma grande quantidade de exercícios similares, que aumentam gradativamente de dificuldade, seria o suficiente para garantir o aprendizado. No entanto, por experiências anteriores, é possível perceber que, embora os alunos sejam capazes de resolver todos os exercícios tratados naquele momento, se ficarem um tempo sem os retomar e estudarem novos assuntos, aquele conteúdo supostamente aprendido será perdido. Quando isso ocorre, tem-se uma prova de que

¹³ As figuras 8, 9 e 15 servem de referência.

a automatização, por si só, não é suficiente para propiciar o aprendizado. Deve haver uma consciência por parte de quem resolve o problema, ou seja, internalizar os pontos principais de um conteúdo, já que na Matemática os conteúdos são, na maioria, cumulativos.

A dificuldade de se trabalhar com números decimais ou com valores monetários também parte das estruturas aditivas dos números inteiros, ou seja, do conjunto de regras ensinadas para realizar a soma de números inteiros, como:

- começar primeiro pela soma da coluna das unidades, que se encontra mais à direita;
- fazer o mesmo tipo de soma nas colunas seguintes (dezena, centena...);
- quando o total da soma da coluna for inferior a dez, então o resultado pode ser escrito na linha onde se coloca o valor total. Se a soma for igual ou superior a dez, então se conserva apenas o último dígito (a unidade) e os dígitos seguintes são passados para serem somados junto com os valores da próxima coluna.

Para as crianças, explicitar tais regras é, no mínimo, muito difícil, embora sejam capazes de realizar as operações. O professor demonstra no quadro como a operação deve ser feita e a criança aprende a operar por repetição. Porém, se aquelas operações não fazem sentido para elas, não serão capazes de explicitar ou explicar por que tais regras funcionam. Por esse motivo, quando os alunos passam a estudar números decimais ou racionais, cometem muitos equívocos para realizar operações de soma.

As figuras 4.4 e 4.5 envolvem fatos do cotidiano, que é medir a largura de uma sala, e medir o comprimento de um objeto, mas os exemplos mostram que os alunos não conseguiram associar o que aprenderam com algo que é comumente visto no cotidiano. As explicações mostram que eles veem a fórmula para cálculo de área como algo dissociado do que é feito no dia a dia, o que leva também a um equívoco com o perímetro de uma figura. Isso que é um desperdício, pois o professor poderia aproveitar as situações para dar significado ao problema. Provavelmente, os alunos nunca foram estimulados a associar tais conhecimentos com o seu cotidiano, por isso, a dificuldade de identificar a similaridade com tarefas corriqueiras. Associar um esquema com algo que pertence ao cotidiano é também uma

das formas de ajudar o aluno a trabalhar com invariantes operatórias, sendo este um papel importante do professor.

Esses foram alguns exemplos que retrataram o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos, além de demonstrar como um conjunto de esquemas formados anteriormente é trabalhado por cada indivíduo. Obviamente, não queremos fechar um diagnóstico em nenhum desses exemplos, que servem apenas como possíveis hipóteses para mostrar ao professor a quais pontos poderia ou deveria prestar mais atenção. A pesquisa e aplicação da Teoria dos Campos Conceituais ainda são muito recentes no Brasil, embora a teoria em si já tenha mais de vinte anos de existência. Com a atual tendência de a Educação exigir reflexões psicopedagógicas por parte do professor, conhecer o funcionamento cognitivo de um sujeito, por meio da Teoria dos Campos Conceituais, pode ajudar muitos professores a preparar planos didáticos mais adequados e diferentes estratégias metodológicas para um melhor aprendizado dos estudantes.

Uma das principais contribuições da Teoria dos Campos Conceituais é mostrar que o aprendizado não se dá de uma forma linear. Um sujeito utiliza-se de esquemas e invariantes operatórias para resolver um problema e será necessário que ele retome, passe por obstáculos, para então sentir a necessidade de transformar e adaptar o que foi aprendido no passado. O obstáculo, por vezes, não pode ser evitado, mas é necessário que seja mostrado o caminho para ser transposto, cujo papel de orientação é do professor. As situações e as relações aditivas de base trabalhadas por Vergnaud (1990) mostram como as relações¹⁴ são montadas dentro da mente de um Matemático, o que parece muito lógico e prático. Porém, é preciso perceber que, para chegar a tal nível, principalmente com as crianças, é necessário entender o funcionamento cognitivo e psicológico delas, para que, pouco a pouco, cheguem ao nível dessas relações se tornarem automáticas e lógicas. Muitos alunos ficam desanimados ao verem que não são capazes de construir e entender de imediato a relação que o professor construiu e acabam por criar um bloqueio no aprendizado de Matemática, rotulando-a como “disciplina muito difícil” ou “apenas para pessoas inteligentes”. Os professores também

¹⁴ Para entender melhor as relações aditivas a que Vergnaud se refere, consultar o artigo de 1990, 133-170 pp.

precisam se conscientizar de que os alunos necessitam dominar progressivamente os conceitos e são necessários muito tempo e paciência para que ocorra a transposição dos obstáculos.

No capítulo seguinte, serão apresentados alguns indicadores obtidos através da pesquisa e quais os novos rumos que ela poderá tomar.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o título deste capítulo sugira que a pesquisa tenha chegado ao seu fim, os tópicos seguintes mostrarão que ainda há muito para se investigar. O verdadeiro papel desse capítulo é mostrar que toda essa pesquisa fará sentido somente se houver uma reflexão sobre os tópicos a seguir, além de motivar pesquisas futuras.

De modo geral, pudemos observar que os obstáculos epistemológicos surgiram na história da ciência, inicialmente através das ideias de Bachelard, tendo se desenvolvido nas mais diversas áreas, cada uma com suas dificuldades e obstáculos próprios. Posteriormente, inspirando nas ideias de Piaget, Brousseau (1976/1983) desenvolveu essas ideias para a área de Matemática. Para ele, os obstáculos manifestam-se através dos erros, o que, de fato, foi constatado durante a pesquisa - embora seja necessário ter o cuidado de analisar os erros e as dificuldades, já que nem todos eles são originados por obstáculos e podem ser apenas problemas pontuais (por exemplo, a falta de conhecimento do assunto ou equívocos na interpretação de texto). Brousseau acredita que os obstáculos surgem de conhecimentos mal adquiridos no passado e que provocam contradições e dificuldades para compreender um novo conhecimento.

Levando esses aspectos em consideração, observamos que os obstáculos dos alunos que participaram da pesquisa manifestaram-se de diversas formas. Procuramos então distribuí-los nas quatro categorias (Epistemológicos, Didáticos, Psicológicos e Ontogenéticos) nomeadas por Brousseau (1976/1983) e tentar compreender as origens de tais obstáculos e como ajudar a superá-los. No entanto, a maior dificuldade para realizar a análise nesta pesquisa foram as dificuldades dos alunos alheias aos obstáculos, como a resolução mecânica dos exercícios sem compreender os enunciados ou ainda os alunos que simplesmente não conseguiram resolver os exercícios e entregaram em branco. Isso ocorreu apesar de as questões terem sido adaptadas para diminuir essas dificuldades sem perder o objetivo principal, que era obter a maior quantidade de informação possível para analisar o raciocínio de resolução dos alunos e detectar os obstáculos. Na pesquisa, foi possível notar que os alunos têm muita dificuldade em explicar e transcrever o seu raciocínio em palavras. Tal tipo de

difficuldade também foi apontado no estudo exploratório feito por Ricardo e Freire (2007), no qual os alunos do Ensino Médio tiveram dificuldade para se expressar, de forma escrita, no questionário aberto aplicado pelos pesquisadores, o que reforça as evidências de que não é fácil obter respostas precisas e concisas na forma escrita pelos alunos em relação ao raciocínio utilizado. Isso corrobora a importância de entender os *conhecimentos-em-ação* e os *teoremas-em-ação*, para compreender os obstáculos e dificuldades dos alunos em seu aprendizado.

Por essas razões, a pesquisa se apoiou também nos aspectos psicodidáticos trazidos pela Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1990), cuja análise em conjunto com os obstáculos epistemológicos de Brousseau (1976/1983) nos trouxe pistas de como a aprendizagem deveria ser conduzida pelos professores de Matemática.

No entanto, é difícil obter sucesso na transposição dos obstáculos e se utilizar apropriadamente da Teoria dos Campos Conceituais se os aspectos a seguir também não forem levados em consideração.

5.1. O TEMPO DE APRENDIZAGEM

Um professor deveria levar em conta que todo aluno possui um tempo próprio de aprendizagem. Esse tempo está associado à maturidade cognitiva do sujeito, não necessariamente à sua maturidade cronológica. Um aluno que teve um tempo maior para trabalhar um tópico terá mais tempo para amadurecer seus conhecimentos, ou aquele que enfrentou situações diferentes, em quantidade suficiente para aplicar as suas invariantes operatórias, terá um aprendizado melhor se comparado com outros alunos que não tiveram as mesmas condições e, conseqüentemente, levarão mais tempo para aprender novos tópicos. Isso não está relacionado apenas à sua educação em sala de aula, mas também está ligado ao seu cotidiano. Se fora da escola o aluno está inserido em um cotidiano que fornece estímulos para aprender os tópicos ensinados em sala de aula, conseqüentemente ele tem exemplos diversos nos quais aplica os novos conteúdos e aprende mais rápido. Pode-se pensar que, numa sala de aula, não ocorre o ideal e normalmente há uma diversidade na formação prévia dos alunos, portanto, é papel do professor saber lidar com essas diferenças e fazer com que

todos aproveitem a disciplina, desde que os tempos de aprendizagem de cada um sejam considerados.

O tempo de aprendizagem também envolve aspectos do contrato didático. Segundo Jonnaert (1996), para que esta ocorra, o aluno necessita ser confrontado, provocado para uma reposição em julgamento ou uma conformação, até que haja uma adaptação, evolução, uma mudança e uma maior complexidade nessa relação “didática” que cada um mantém com os saberes. Tal relação é mantida através do jogo entre professor e aluno (BROUSSEAU, 1986).

5.2. O ESTÍMULO PARA ENFRENTAR OS OBSTÁCULOS

Assim como foi verificado no Capítulo II desta pesquisa, através das observações de Astolfi (1997) sobre o conceito de objetivo-obstáculo e a criação do desafio intelectual desestabilizante, é necessário criar o estímulo para enfrentar e, sobretudo, transpor os obstáculos que os estudantes irão encontrar em seu caminho para o aprendizado. Para tal estímulo, o professor poderá construir problemas nem muito fáceis nem muito difíceis, mas que sejam suficientemente estimulantes e desafiadores para que a adesão ao projeto de ensino seja assegurada, levando em consideração a *zona de desenvolvimento proximal* proposta por Vygotsky¹ (1985 apud JONNAERT, 1996). O obstáculo não deve ser tratado como algo negativo, mas como um alerta de que, naquele momento, o aluno precisa transpor e reformular algo que já viu no passado para compreender o novo conteúdo. Evitar os obstáculos não trará aprendizagem, pois é através da compreensão e transposição que uma aprendizagem terá significado. Caso contrário, é apenas uma repetição de algo que outra pessoa fez, mas não internalizado pelo sujeito que o realiza.

Também é importante levar em consideração os trabalhos de Vergnaud sob a visão da Teoria dos Campos Conceituais, para que o professor tenha uma dimensão dos aspectos cognitivos envolvidos na aprendizagem do indivíduo, o que ajudará a elaborar exercícios que

¹ Vygotsky, nas palavras de Jonnaert (1996), afirma que a aprendizagem do aluno não coincide com o seu desenvolvimento, mas ativa o seu desenvolvimento mental. Deste modo, esse momento é essencial para desenvolver as características humanas, não naturais, adquiridas no curso do desenvolvimento histórico.

trabalhem e detectem diferentes níveis de obstáculos que o sujeito apresenta até aquele momento, permitindo uma vigilância permanente nos *conhecimentos-em-ação* dos alunos.

Astolfi (1999) traz aspectos importantes sobre como aproveitar os erros dos alunos e utilizar-se deles para trabalhar com diferentes formas didáticas. Cury (2008) também incentiva essa ideia, afirmando que faltam atividades que desafiem o aluno a querer modificar o seu comportamento diante de um erro. Nas palavras de Esteban (2002), falta também ao professor saber identificar o que é erro cometido por falta de conhecimento, por equívoco ou por aplicação inconsistente de algo aprendido no passado. Muitas vezes, é preciso julgar se as respostas apenas memorizadas sem compreender o conteúdo não estariam escondendo obstáculos importantes para adquirir novos conhecimentos.

5.3. A CONSCIÊNCIA DE QUE NEM TUDO É OBSTÁCULO

O objetivo dessa pesquisa foi analisar os principais obstáculos enfrentados na aprendizagem de Álgebra e quais aspectos devem ser levados em consideração para ajudar a compreender alguns aspectos da aprendizagem e como trabalhar com obstáculos, a fim de ajudar a transpô-los. As classificações feitas no Capítulo IV têm o objetivo de ilustrar os exemplos de obstáculos encontrados na pesquisa, mas é possível que, a critério do leitor, os resultados possam ser reclassificados em outras categorias. Podemos citar, por exemplo, as figuras 4.4, 4.7, 4.19 e 4.20, as quais foram classificadas como obstáculos epistemológicos as duas primeiras e ontogenéticos as duas últimas. Porém, se analisarmos sob a perspectiva dos Campos Conceituais, podemos dizer que as respostas dadas não seriam obstáculos, mas consequência de uma utilização inadequada de um esquema.

Embora as análises dos resultados tenham maior ênfase nas categorias de Brousseau (1983), a pesquisa partiu da premissa de mostrar a dificuldade de enquadrar certos casos numa dessas quatro categorias de obstáculos. No entanto, para podermos utilizar a Teoria dos Campos Conceituais com eficácia, seria necessário um novo tipo de abordagem metodológica que também anularia as categorias de Brousseau. Portanto, embora não tenha sido intenção ainda de fazer uma análise com a devida profundidade, sob a perspectiva dos Campos

Conceituais, a pesquisa permitiu mostrar que essa teoria ajudará a analisar aspectos psicocognitivos que não podem ser analisados pela teoria dos obstáculos, mas serve como um ponto de partida para dar início à pesquisa.

Assim, as categorias das análises não têm a intenção induzir a um diagnóstico fechado, mas de criar uma discussão, exemplificar os obstáculos mais comuns e até os casos que não puderam ser enquadrados numa das quatro categorias de Brousseau (1983). É importante ressaltar que diferentes contextos, tais como alunos, a rotina da escola e a metodologia do professor trazem outros resultados gerando, conseqüentemente, novas classificações e novas formas para o professor trabalhar com um mesmo obstáculo. Isso mostra que esse tipo de pesquisa é rico em detalhes e diversidade, não esgotando o tema por aqui. É claro que os obstáculos ainda podem ser expandidos para outras áreas, não se restringindo apenas à Álgebra como foi demonstrado através do estudo final.

Outro cuidado que se deve tomar é que nem tudo é obstáculo. Muitos dos exemplos obtidos podem ser explicados de maneira pontual para alguns alunos, tais como: uma dificuldade na leitura do enunciado, uma pergunta formulada de forma a gerar um equívoco por parte do leitor, termos técnicos não compreendidos e desconhecimento de aplicação de uma técnica para resolver o problema. Tais dificuldades nada têm a ver com obstáculos. Obstáculo é algo que gera um conflito com um conteúdo formado no passado; já dificuldade é algo mais geral ou que pode ser resolvida de forma pontual.

Na realidade, aprender com os obstáculos dos alunos é preparar o professor para ter uma visão mais ampla de como elaborar propostas de aulas que ajudem na construção mais significativa do aprendizado, não somente na Álgebra. Essa construção também não está restrita ao uso de materiais concretos para a aprendizagem de conceitos matemáticos, tampouco à necessidade de relacionar cada assunto com o cotidiano do aluno. É claro que, sempre que possível, seria ideal que ocorresse essa ponte, já que é mais fácil compreender algo que está presente no seu dia a dia.

No entanto, é necessário ter consciência de que certos aspectos do senso comum podem gerar uma compreensão equivocada de alguns conceitos próprios da ciência e da Matemática, podendo originar um obstáculo no futuro. Logo, o professor deveria trabalhar na

didatização dos saberes, estes que já passaram por um processo transpositivo que torna o saber ensinável (CHEVALLARD, 1991).

Também vale lembrar o que é chamado por Brousseau de *ilusão didática*, que consiste em acreditar que uma boa organização ou uma boa metodologia de ensino garante o aprendizado do aluno. Também pode ser considerado como *ilusão didática* acreditar no aprendizado do aluno baseando-se em ótimos resultados em avaliações ou na resolução mecânica de exercícios. É preciso ter cautela ao preparar uma avaliação, já que o resultado pode ser consequência de uma memorização temporária e que, em longo prazo, o conteúdo não tenha mais significado para o aluno. Consequentemente, se no futuro um novo conteúdo depender da compreensão de um assunto antigo, ele poderá não conseguir aprender de forma apropriada, trazendo dificuldades que podem gerar obstáculos que não poderão ser transpostos facilmente. Assim, o professor precisaria ter em mente o que se quer ensinar ou avaliar apenas naquele momento e o que se espera do aluno em etapas posteriores.

Uma forma de evitar esse tipo de “ilusão” seria avaliar o que se chama de esquema (conforme explicado no Capítulo II desta dissertação) ou quais são os *conhecimentos-em-ação* e *teoremas-em-ação* (VERGNAUD, 1990) que os alunos estão utilizando durante o seu aprendizado ou nas estratégias adotadas para a resolução de problemas. Se o esquema é bem aplicado, então eles conseguem tornar suas estratégias uma *invariante operatória*. E se um aluno chega ao estágio de *invariante operatória*, é porque o seu aprendizado foi efetivo e terá uma aplicação em longo prazo para situações diferentes, porém com aplicações semelhantes.

5.4. PISA, SARESP E OUTRAS AVALIAÇÕES: DESVIANDO DO SEU VERDADEIRO CAMINHO

Muitos professores, na maioria, bem-intencionados, acreditam que trabalhar somente com questões utilizadas em avaliações de nível internacional e nacional como PISA e SARESP é uma forma de preparar os alunos para tais avaliações e, consequentemente, superar suas dificuldades e obstáculos. A primeira constatação não deixa de ser verdade, já que, pelo fato dessas provas serem preparadas por uma grande equipe especializada, acredita-se que o

seu conteúdo é relevante e que, por consequência, os alunos que não se saem bem nessas avaliações estão abaixo do nível esperado. No entanto, também é verdade que mesmo aqueles que se saem bem nessas provas não estão livres de apresentarem outros tipos de dificuldades e obstáculos que não se manifestaram naquela prova.

Assim, o professor deve ter em mente o que se quer do aluno: prepará-lo tecnicamente para provas como SARESP e PISA ou avaliar o que o aluno realmente aprendeu do que foi ensinado e o que será capaz de aplicar em diversos contextos, fora das avaliações.

Já se tornou algo comum classificar as escolas e os professores de acordo com os resultados desses exames, mas não necessariamente essa classificação é a mais apropriada para garantir o aprendizado de qualquer tipo de conteúdo.

Infelizmente, o que tem ocorrido é uma distorção na utilização dos resultados das avaliações, que supostamente teriam como objetivo analisar a condição de aprendizagem do aluno até aquele momento. Essas avaliações têm se tornado uma espécie de “camisa de força” para que as escolas adaptem o currículo e o projeto pedagógico de acordo com o que é cobrado nessas provas. No caso do Ensino Médio, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) desencadeou uma grande polêmica quando passou de uma avaliação para medir as habilidades dos alunos ao final do Ensino Médio para uma prova extensa, com questões que apresentam grande quantidade de conteúdos memorizados, além de se transformar em uma prova classificatória, de modo que os melhores resultados garantem vagas nas universidades federais.

A crítica feita aqui não é em relação à prova ser aceita como forma de ingresso nas universidades, mas aos tipos de conteúdos e à forma como a prova está sendo organizada, que pode não ser adequada para escolher os melhores candidatos. De fato, sabe-se que as escolas básicas não estão conseguindo cumprir com um de seus papéis, que é o de preparar os alunos para ingressarem numa universidade e, por conta disso, até cursos preparatórios para o ENEM tem surgido nos últimos anos, devido ao espaço e à importância que o ENEM ganhou. Isso pode indicar um desvio de foco, já que o ENEM não está servindo para melhorar a qualidade de ensino nas escolas básicas, mas apenas servindo como uma espécie de prova classificatória, na qual os (supostamente) mais bem preparados poderão conquistar uma vaga na universidade.

Por esses motivos, os professores também acabam sendo vítimas desses sistemas de avaliações, pois há uma cobrança por parte da escola para preparar os seus alunos para enfrentarem essas provas. Com um tempo restrito, um projeto ideal de ensino, que realmente construa significado, deixa de ser utilizado e torna-se uma memorização constante de vários conteúdos que não fazem sentido e que não serão aproveitados no futuro como conhecimento pelos alunos. Isso gera na sociedade pessoas pouco preparadas para exercer as mais diversas atividades profissionais ou para prosseguirem nos estudos. O papel da escola seria formar um sujeito reflexivo e atuante na sociedade, mas, com a má utilização das grandes avaliações, a escola está perdendo cada vez mais a possibilidade de implementar reorientações em seus projetos formadores.

5.5. TRANSPONDO PARA OUTROS TÓPICOS ALÉM DA ÁLGEBRA

Apesar do tópico escolhido ter sido a Álgebra, muitos dos aspectos levantados aqui não se restringem apenas a ela, podendo ser estendidos para outros tópicos como a Geometria, Grandezas e Medidas, como mostrado nos exemplos do Capítulo II. Vergnaud, em um minicurso dado no VI Encontro Internacional de Aprendizagem Significativa (EIAS), apresentou muitos exemplos de sua teoria voltados principalmente ao tópico de Grandezas e Medidas.

Embora a Teoria dos Campos Conceituais consiga elucidar muitos aspectos do processo cognitivo, Vergnaud, nesse mesmo curso, lembra que a sua teoria por si só não consegue explicar todos os obstáculos de aprendizagem. No entanto, o professor deve ter o cuidado para lidar com as abstrações inerentes da Matemática e entender que é um processo muito longo de construção das invariantes operatórias (ou esquemas) segundo Vergnaud.

Moreira (2002), fazendo referência à Teoria dos Campos Conceituais, também enfatiza a importância de haver continuidade e ruptura com determinados conhecimentos, como por exemplo, a Álgebra, que, embora se apoie na Aritmética, precisa ser dissociada da mesma para que sua compreensão seja possível.

Vergnaud também lembra que cada disciplina tem a sua própria forma de abstração. Portanto, cada disciplina possui seus obstáculos próprios e não faz sentido falar de dificuldades de aprendizagem, sem falar primeiro de obstáculos epistemológicos. Por esse motivo, nessa pesquisa, houve um entrelaçamento entre os obstáculos epistemológicos desenvolvidos por Brousseau (conhecido como o precursor da Didática da Matemática) com a Teoria dos Campos Conceituais, que tem seu embasamento psicológico didático ainda pouco tratado nas disciplinas de Ciências (Biologia, Física e Química) e na Matemática. Moreira (2002) cita um exemplo de dificuldade encontrada na Física, também existente na Álgebra, que é a dificuldade de compreender os significados das representações simbólicas. Tal habilidade não depende somente da capacidade do sujeito em representar as entidades e relações entre elas, mas de elementos conceituais que devem ser levados em consideração como: sistema, estado, interação, transferência, conservação e etc.

5.6. ABSTRAÇÃO: UM TEMA “PROIBIDO”

Nos últimos tempos, há um movimento de pesquisas e até afirmações de alguns educadores de que a Matemática torna-se difícil pelo excesso de abstração e, portanto, esta deve ser evitada. Todavia, se deixamos de tratar os aspectos abstratos da Matemática, deixamos de trabalhar com muitos conceitos importantes nela envolvidos, limitando-a a uma disciplina que serve apenas para aplicação de cálculos do cotidiano. Muitos conceitos advindos da Matemática dão origem a compreensões mais amplas de outras áreas da Ciência e até mesmo da linguística. Machado (FE-USP), em uma entrevista² concedida durante o Congresso Brasileiro de Matemática, realizado pelo SINPRO (Sindicato dos Professores de São Paulo), faz uma comparação da linguagem matemática com os contos de fada. Para ele,, é importante que conceitos mais complexos sejam simplificados, de forma que sejam compreensíveis no universo da criança naquele momento. Analogamente, o conto de fadas explica assuntos complexos da vida, como os valores morais e princípios, de modo que sejam compreensíveis para uma criança, mas continua a ser abstrato, apesar de simples.

² O endereço eletrônico do vídeo com a entrevista consta na bibliografia desta dissertação.

A abstração é importante para a compreensão do mundo à nossa volta e, mesmo sem perceber, lidamos o tempo todo com situações de abstração como, por exemplo, a tecnologia. Vergnaud, também em uma entrevista³ concedida ao SINPRO no mesmo congresso citado anteriormente, afirma que até a tecnologia é um assunto abstrato, mas as crianças, por estarem envolvidas nesse cotidiano, sabem utilizar, mas não explicitar. Um adulto, por exemplo, tem muito mais dificuldade de operar um aparato tecnológico que uma criança, teoricamente, com menos experiência de vida que ele. Ou seja, a interação com o meio mudou e os estímulos mudam a forma de lidar com o mundo. Portanto, se no ensino de Matemática a abstração for evitada, estamos evitando os estímulos que deveríamos dar aos alunos para que aprendam a lidar com a abstração da disciplina. Desse modo, ela continuará sendo tratada como um assunto muito difícil e de compreensão para poucos.

Kaminsky et al. (2008) publicou uma pesquisa revelando a importância da abstração para a compreensão e construção de novos conceitos, através da comparação de dois grupos distintos de estudantes: no primeiro grupo, um conceito matemático foi explicado por meio da utilização de exemplos concretos e, no segundo grupo, o mesmo conceito foi explicado através da utilização de exemplos abstratos, com linguagens e representações simbólicas. O resultado mostrou que os alunos que se apoiaram em exemplos concretos tiveram muito mais dificuldade para compreender novos conceitos e de generalizar raciocínios lógicos para resolver novos problemas, enquanto o segundo grupo, que trabalhou desde o início com exemplos abstratos, conseguiu desenvolver a capacidade de generalizar soluções para os mais diversos casos.

5.7. NOVOS RUMOS DE PESQUISA

Essa pesquisa não traz conclusões e soluções definitivas sobre como lidar com os obstáculos associados ao ensino de Álgebra. Espera-se que os aspectos levantados sirvam de incentivo e apoio para outras pesquisas dedicadas ao assunto, especialmente envolvendo a Teoria dos Campos Conceituais. Para pesquisas futuras, planeja-se elaborar uma continuação dos aspectos abordados nesta dissertação e construir sequências didáticas utilizando-se de

³ O endereço eletrônico do vídeo com a entrevista consta na bibliografia desta dissertação.

hipóteses e conceitos advindos das análises de obstáculos de Brousseau junto com a Teoria dos Campos Conceituais.

Através dos resultados, também foi possível inferir indícios de que é necessário fazer uma análise mais aprofundada e detalhada com os alunos, para realmente obter respostas concretas sobre os obstáculos epistemológicos e os aspectos psicológicos relacionados à aprendizagem, como definido por Vergnaud (1994). Entende-se que, para compreender os aspectos psicológicos, é necessário criar um vínculo com o aluno, compreender o seu modo de pensar e agir, não sendo possível a sua elucidação em poucos encontros. Somente um tempo longo de convívio permite ao professor compreender tais aspectos.

BIBLIOGRAFIA

- ALMEIDA, E. O. **Como as crianças constroem procedimentos matemáticos: reconhecendo o fazer matemática na escola entre modelos e esquemas.** Dissertação de mestrado – UnB – 2006.
- ASTOLFI, J. P. **Mots-clés de la didactique des sciences: repères, définitions, bibliographies.** Belgique: De Boeck, 1997.
- ASTOLFI, J. P. **L’erreur, un outil pour enseigner.** Collection Pratiques & enjeux pédagogiques. Paris: ESF, 3ª Ed., 1999.
- BACHELARD, G. **La formation de l’esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.** Paris: J. Vrin Editeur, 1938.
- BARBOSA, G. C. **A atividade de avaliar o SARESP.** Dissertação de mestrado – PUCSP – 2005.
- BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental: Produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas.** Dissertação de mestrado – UFRGS – 2007.
- BOOTH, L. R: **Children’s difficulties in beginning algebra.** In: The Ideas of algebra, K-12: NCTM, yearbook, 1988. 20-42 pp.
- BOYER, C. B: **História da Matemática.** Editora Edgard Blücher, 2ª edição, 1996.
- BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques.** Manuscrit auteur, publié dans "La problématique et l'enseignement de la mathématique, Louvain-la-neuve: France, 1976 (version 1 - 10 Sep 2010). 101-117 pp.
- BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologique et les problèmes en Mathématiques.** In: Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 4.2, 1983, 165-198 pp.
- BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques.** In: RDM, Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.
- BROUSSEAU, G. **Os diferentes papéis do professor.** In: C. Parra; & I. Saiz, (Eds.), Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- BROUSSEAU, G. **Fundamentos e métodos da didáctica da matemática.** In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 2000. 35 – 113 pp.
- BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques.** Disponível em: <https://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf>. Acesso em: 16 out. 2011.

- CARPENTER, T. P.; CORBITT, M. K.; KEPNER, H. S. Jr.; LINDQUIST, M. M.; REYS, R. E.; **Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress**. In: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston: VA, 1981.
- CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigner**. Paris, Ed. La Fenseé Sauvage, 1991.
- CLEMENT, J. **Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception**. In: Journal for Research in Mathematics Education, 1982. 16-30 pp.
- COLLIS, K. F. **Cognitive development and mathematics learning**. In: Psychology of mathematics workshop, Centre for Science Education, London: Chelsea College, 1974.
- COLOMBO, J. A. A.; MORETTI, M. T. **Registros de representação semiótica e parâmetros curriculares nacionais: interfaces presentes e possíveis**. Minas Gerais: IX ENEM, Comunicação Científica, 2007.
- CORTÉS, A. ; KAVAFIAN, N. **Les principes Qui guident la pensée dans la resolution des equations**. In: ESA 7021, Cognition et activés finalisées CNPS, Université Paris 8, 1999.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2008.
- DAVIS, R. B. **Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations**. In: Journal of Children's Mathematical Behavior, 1(3), 1975, 7-35 pp.
- DUVAL, R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, 1993, 37-65 pp.
- ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra? Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar**. 3. Ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.
- GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Dissertação de mestrado – PUC-RS, 2008.
- GOMES, M. G. **Obstáculos na aprendizagem matemática: identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais**. Tese de Doutorado – UFSC, 2006.
- HERSCOVICS, N. **Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra**. In: Research issues in the learning and teaching of Algebra, 1994.

HOCH, M.; DREYFUS, T. **Structure sense in high school algebra: the effect of brackets.** In: **Conference of the international group for the psychology of mathematics education.** Bergen, Norway: Proceedings...Bergen: PME, 2004. CD-ROM.

JONNAERT, P. **Dévolution versus contre-dévolution! Un tandem incontournable pour le contrat didactique.** In: RAISKY, C.; CAILLOT, M. (éds) *Au-delà des didactiques, le didactique: débats autour de concepts fédérateur.* Belgium: De Boeck & Larcier S.A. 1996. 278 p.

KAMINSKY, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A. F. **The Advantage of Abstract Examples in Learning Math.** In: *Science Magazine*, V. 320, 25 de Abril de 2008. 454-455pp.

KERSLAKE, D. **Graphs.** In: HART, K. M. (Ed.), *Children's understanding of mathematics.* London: John Murray, 11(16), 1981, 102-119 pp.

KIERAN, C. **Concepts associated with the equality symbol.** In: *Educational Studies in Mathematics* V. 12, 1981. 317-326 pp.

KIKUCHI, L. M.; TREVIZAN, W. A. **Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de grandezas e medidas na escola básica.** Campo Grande: Anais do XIV EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Ensino de Matemática), Ed. UFMS, 2010. CD-ROM.

KÜCHEMANN, D. **Children's understanding of numerical variables.** In: *Mathematics in school*, 4(7), 1978, 23-26 pp.

KÜCHEMANN, D. **Algebra.** In: K. M. Hart (ed.), *children's understanding of mathematics.* London: John Murray, 11-16, 1981, 102-119 pp.

KUHN, T. S. **The structure of scientific revolutions.** Chicago: University of Chicago Press, 2nd ed., 1970.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LOCKHEAD, J. **Faculty interpretations of simple algebraic statements: The professor's side of the equation.** In: *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 1980, 28-37 pp.

MARQUIS, J. **Common mistakes in algebra.** In: A. F. Coxford & A. P. Shuttle (Eds), *The Ideas of Algebra, K-12*, Reston: NCTM, 1988. 204-205 pp.

MARTINAND J. L. **Connaître et transformer la matière: des objectifs pour l'initiation aux sciences et techniques.** In: Bern, Frankfurt/M. New York: Peter Lang, 1986, 315 p.

MATZ, M. **Towards a process model for high school algebra errors.** In: Artificial Intelligence Laboratory. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, working paper number 181, 1979.

MEIRIEU, P. **Apprendre... oui, mais comment?** Augmentée d'un guide méthodologique. Paris: ESF. 3^a éd, 1988.

MEIRIEU, P. **Aprender... sim, mas como.** Trad. Vanise Dresch. Porto Alegre: Artes Médicas, 7^a ed., 1998.

MELO, M. V. **Três décadas de pesquisa em educação matemática na UNICAMP: um estudo histórico a partir de teses e dissertações.** Dissertação de mestrado – FE-UNICAMP - 2006.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIROIM, M. A. **Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?** In: Revista Pro-Posições, vol. 3, n(1)7, 1992.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área.** In: Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), 2002. 7-29 pp.

NEVES, P. S. O. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem de Álgebra.** Dissertação de mestrado – FEUSP – 1995.

PAIS, L. C. **Educação Matemática: Uma Introdução.** São Paulo: EDUC-SP, 1999.

PÉREZ, J. C. **Numeros decimales ¿Por que? ¿Para que?** Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

PIAGET, J.; GRECO, P. **Aprendizagem e conhecimento.** São Paulo: Freitas Bastos, 1974a.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética e a Pesquisa Psicológica.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974b.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino de álgebra: o tratamento dado por professores de 7^a série em aula.** Dissertação de Mestrado em Educação: Educação Matemática. Campinas: FE-UNICAMP, 1997.

PINTO, R. A.; FIORENTINI, D. **Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para “a coisa”.** In: Zetetiké, V.5(8). Campinas: FE-UNICAMP-CEMPem, 1997, 45-71 pp.

RIBEIRO, J. A. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base de dados do SARESP.** Dissertação de mestrado – PUCSP – 2001.

RICARDO, E. C.; FREIRE, J. C. A. **A concepção dos alunos sobre a Física do ensino médio: um estudo exploratório.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 2, 2007, 251-266 pp.

SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Continuing the search**. Mathematics education as a research domain, Dordrecht Kluwer, 1998. 524-548 pp.

VERGNAUD, G.; ERRECALDE, P. **Some steps in the understanding and the use of scales and axis by 10-13 year old students**. In: KARPLUS, R. (Ed.), Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education. Berkeley: University of California, 1980, 285-291 pp.

VERGNAUD, G. **La Théorie des Champs Conceptuels**. RDM, 10 (23), 1990. 133-170 pp.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. In: NASSER, L. (Ed.). Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1993. 1-26 pp.

VERGNAUD, G. **Epistemology and Psychology of Mathematics Education**. In: NESHER & KILPATRICK. Cognition and Practice. Cambridge: Cambridge Press, 1994.

WAGNER, S. **Conservation of equation and function under transformations of variable**. In: Journal for Research in Mathematics Education, 12, 1981, 107-118 pp.

Documentos consultados:

BRASIL. **SAEB – 2005 PRIMEIROS RESULTADOS: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada**. Ministério da Educação Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2007. 7-p. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/SAEB1995_2005.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2011.

COLÉGIO WEB. **Calculando com números naturais**. Disponível em: <<http://www.colegioweb.com.br/matematica-infantil/calculando-com-os-numeros-naturais.html>>. Acesso em: 25 set. 2011.

LIMA, Paulo Figueiredo. **Questões didáticas relativas a Grandezas e Medidas**. Artigo da Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <<http://cie.fc.ul.pt/seminarioscie/Paulo-Figueiredo-Medida.pdf>> Acesso em: 20 fev. 2011.

CONGRESSO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 2011, São Paulo. **Análise sobre o processo de construção do conhecimento e sobre as diversas situações em que os alunos**

são confrontados durante a aprendizagem. Entrevista concedida por Vergnaud ao SINPRO-SP. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=SkPewcaFYw0>>. Acesso em: 20 mar. 2012

_____, 2011, São Paulo. **Os grandes desafios dos professores no ensino de Matemática hoje.** Entrevista concedida por Machado ao SINPRO-SP. Disponível em: <<http://youtu.be/eL-YCxrU5t8>>. Acesso em: 20 mar. 2012.

ANEXOS

ANEXO A – CARTA DE APRESENTAÇÃO ANEXADA NO ESTUDO PILOTO

Caro(a) aluno(a):

Esta atividade faz parte de um projeto de pesquisa da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP) e tem como objetivo investigar as dúvidas mais comuns envolvidas na aprendizagem de álgebra do Ensino Fundamental. Peço para que tente resolver o maior número possível de questões, explicando como chegou à resposta; quando não conseguir resolver alguma, registre a dúvida que teve. O propósito da pesquisa é meramente investigativo e você não será avaliado(a) e nem julgado(a) pelo que responder aqui. Também peço para que se identifique na folha com o seu nome, apenas para que futuramente eu possa localizá-lo(la) caso houver necessidade de realizar uma entrevista que seja relevante para o trabalho. O seu anonimato será garantido e você estará contribuindo para uma pesquisa muito importante, que ajudará pesquisadores e professores a elaborarem um ensino cada vez melhor para o país.

Obrigada pela colaboração e boa atividade!

Luzia M. Kikuchi

(Mestranda do programa de pós-graduação da FE-USP)

ANEXO B - EXEMPLOS DO ESTUDO PILOTO

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. Considere as expressões:

$$A = +3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que $A + B$ equivale a

- a) $-6x^4$
- b) $+6x^4 + 2$
- c) $-4x^2$
- d) 0

Resolução ou explicação:

Professor explica o que não entendi.

2. Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era:

- a) 1
- b) 2
- ☒ c) 5
- d) 6

Resolução ou explicação:

Eu acho que é porque a palavra quádruplo já diz o significado que é 5 vezes alguma coisa por este motivo coloquei que tinha 5 moedas

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

3. Denominado a , o número de saltos, e b a distância alcançada por um jovem que se exercita, qual das tabelas indica, de forma correta, a relação entre a e b dada pela sentença algébrica $b = 1,5 a$.

(A)	Número de saltos	6	12	24	48
	Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0

(B)	Número de saltos	2	4	6	8
	Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0

☒ (C)	Número de saltos	3	6	15	18
	Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0

(D)	Número de saltos	4	8	10	20
	Distância (m)	2,0	5,0	8,0	10,0

Resolução ou explicação:

Porque eu acho que foi a distância que ele alcançada pelo jovem.

4. O gráfico seguinte representa a distância s , em quilômetros, percorrida por um veículo em horas, rodando a uma velocidade constante.

Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas s e t são tais que:

a) $S = 95t$

☒ b) $S = 190t$

c) $t = 95s$

d) $t = 190s$

Resolução ou explicação:

está em dúvida.

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

5. Observe o retângulo abaixo. Sabendo que x e y representam as arestas demarcadas na figura, represente a área do retângulo em função de x e y

Resolução ou explicação:

não aprendi esse problema

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. Considere as expressões

$$A = +3x^4 - 2x^3 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que $A + B$ equivale a

- a) $-6x^4$
- ☒ b) $+6x^4 + 2$
- c) $-4x^2$
- d) 0

Resolução ou explicação:

Explicação: eu ainda não aprendi ainda esse conteúdo

2. Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era:

- a) 1
b) 2
c) 5
d) 6

Resolução ou explicação:

Explicação: Essa questão consigo fazer mais o mesmo
Por Responde

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)

Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

3. Denominado a , o número de saltos, e b a distância alcançada por um jovem que se exercita. Indique a tabela que possui a relação correta entre a e b dada pela sentença algébrica $b = 1,5 a$.

(A)	Número de saltos	6	12	24	48
	Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0
(B)	Número de saltos	2	4	6	8
	Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0
(C)	Número de saltos	3	6	15	18
	Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0
(D)	Número de saltos	4	8	10	20
	Distância (m)	2,0	5,0	8,0	10,0

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

Concluiu porque a é o número de saltos, b ?

4. O gráfico seguinte representa a distância s , em quilômetros, percorrida por um veículo em horas, rodando a uma velocidade constante.

Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas s e t são tais que:

- a) $S = 95t$
- b) $S = 190t$
- c) $t = 95s$
- d) $t = 190s$

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

É o mesmo Permitido Para andar na Rua

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

5. Observe o retângulo abaixo.

Sabendo que x e y , juntos, representam a aresta maior do retângulo, como demarcadas na figura, expresse a área do retângulo em função de x e y .

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

Eu não fazer area de retangulo

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. Considere as expressões:

$$A = +3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que $A + B$ equivale a

- a) $-6x^4$
- b) $+6x^4 + 2$
- ☒ c) $-4x^2$
- d) 0

Resolução ou explicação:

Eu não consigo montar a conta até certo ponto, depois eu me confundo com os sinais.

2. Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era:

- a) 1
- b) 2
- c) 5
- d) 6

Resolução ou explicação:

Eu não consigo resolver.

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

3. Denominado **a**, o número de saltos, e **b** a distância alcançada por um jovem que se exercita. Indique a tabela que possui a relação correta entre **a** e **b** dada pela sentença algébrica **b = 1,5 a**.

(A)

Número de saltos	6	12	24	48
Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0

~~(B)~~

Número de saltos	2	4	6	8
Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0

(C)

Número de saltos	3	6	15	18
Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0

(D)

Número de saltos	4	8	10	20
Distância (m)	2,0	5,0	8,0	10,0

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

Eu anulei a letra B, porque foi a mais próxima que encontrei.

4. O gráfico seguinte representa a distância **s**, em quilômetros, percorrida por um veículo em horas, rodando a uma velocidade constante.

Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas **s** e **t** são tais que:

a) $S = 95t$

~~b) $S = 190t$~~

c) $t = 95s$

d) $t = 190s$

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

Anulei a letra b, eu achei que chegou mais perto das outras alternativas.

5. Observe o retângulo abaixo.

Sabendo que x e y , juntos, representam a aresta maior do retângulo, como demarcadas na figura, expresse a área do retângulo em função de x e y .

Registre aqui a sua resolução do problema ou suas dúvidas:

Eu não sei.

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. Considere as expressões:

$$A = +3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que $A + B$ equivale a

☒ a) $-6x^4$

☐ b) $+6x^4 + 2$

☐ c) $-4x^2$

☐ d) 0

Resolução ou explicação:

Eu sei (chutei aleatoriamente)

2. Do total de moedas que Fausto tinha em sua carteira, sabe-se que: o seu quádruplo era igual ao seu quadrado diminuído de 6 unidades. Assim sendo, o número de moedas que Fausto tinha na carteira era:

- a) 1
b) 2
c) 5
d) 6

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \end{array}} \right\} \text{montou depois da entrevista}$$

Resolução ou explicação:

Eu aprende mais não ~~então eu~~ ~~temo~~

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)

Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

3. Denominado a , o número de saltos, e b a distância alcançada por um jovem que se exercita, qual das tabelas indica, de forma correta, a relação entre a e b dada pela sentença algébrica $b = 1,5 a$.

$$y = 1,5x$$

(A)	Número de saltos	6	12	24	48
	Distância (m)	4,0	8,0	16,0	32,0

(B)	Número de saltos	2	4	6	8
	Distância (m)	3,0	6,0	9,0	12,0

(C)	Número de saltos	3	6	15	18
	Distância (m)	2,0	2,0	5,0	6,0

(D)	Número de saltos	4	8	10	20
	Distância (m)	2,0	5,0	8,0	10,0

Resolução ou explicação:

~~Eu acho que não aponta por que não me lembro.~~ não lembra da relação $y = 1,5x$ não sabe que operação vai.

4. O gráfico seguinte representa a distância s , em quilômetros, percorrida por um veículo em horas, rodando a uma velocidade constante.

Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas s e t são tais que:

- a) $S = 95t$
- b) $S = 190t$
- c) $t = 95s$
- d) $t = 190s$

Resolução ou explicação:

Eu não aprendo isso

Soube mais ou menos identificar o gráfico, porém não soube que tipo de relação ele representa.

5. Observe o retângulo abaixo. Sabendo que x e y representam as arestas demarcadas na figura, represente a área do retângulo em função de x e y .

Resolução ou explicação:

Eu não ~~temo~~ lembro,

$$\begin{array}{r} +3 \\ +3 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} +8 \\ +8 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} +6 \\ +6 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$A = 32$$

Se eu souber a medida do lado maior (8) e lado menor 3, quanto mede a área?

ANEXO C – EXEMPLOS DO TESTE FINAL

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. (IBMEC-2008) Para responder a essa questão, considere que todo indivíduo que contrai dengue apresenta febre alta e dores musculares.

Carlos e Sílvio deram entrada num hospital com suspeita de dengue. Carlos apresentava febre alta e dores musculares, enquanto Sílvio se queixava de dores musculares, mas não apresentava febre. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

- a) Carlos e Sílvio certamente contraíram dengue.
- b) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio pode ou não ter contraído a doença.
- c) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.
- d) Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio.
- ☒ e) Carlos pode ou não ter contraído dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

Porque o dengue tem febre e você vendo o perguntado
direito você vai entender

2. Dividir 21 vasos por três pessoas, sendo 7 cheios de vinho, 7 meio cheios de vinho e 7 vazios, de forma que cada pessoa receba o mesmo número de vasos e mesmo volume de vinho, sem alterar o conteúdo dos vasos.

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

Seu cara ~~17~~^{sete} vasos para as três pessoas

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 3$

b) $4x^2 - x^2 = 2$

c) $2x - 1 = 1$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 14$

4. Sabendo que $x=3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x = 3$

b) $4x^2 - x^2 = 2$

c) $2x - 1 = 1$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 14$

5. Para saber quais eram os tipos de revistas esportivas mais lidas, foi feita uma pesquisa em um determinado bairro.

Tabela: Tipo de revista mais lido

Frequência porcentual	40	30	15	15
Tipo de revista	semanal	mensal	bimestral	trimestral

Qual o gráfico que representa os dados acima apresentados?

6. Uma caixa de sapato fechada tem as seguintes dimensões: 6 m, 2 m e 4 m. Qual é a área total desta caixa?

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

12 fazendo as contas $(6+4+2)$

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (área temática: Ciências e Matemática)

1. (IBMEC-2008) Para responder a essa questão, considere que todo indivíduo que contrai dengue apresenta febre alta e dores musculares.

Carlos e Sílvio deram entrada num hospital com suspeita de dengue. Carlos apresentava febre alta e dores musculares, enquanto Sílvio se queixava de dores musculares, mas não apresentava febre. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

- a) Carlos e Sílvio certamente contraíram dengue.
- b) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio pode ou não ter contraído a doença.
- ☒ c) Carlos certamente contraiu dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.
- d) Carlos pode ou não ter contraído dengue, o mesmo ocorrendo com Sílvio.
- e) Carlos pode ou não ter contraído dengue, e Sílvio certamente não contraiu a doença.

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

Se Carlos estava com dores musculares e febre ele contraiu dengue e Sílvio não pois estava só com febre.

2. Dividir 21 vasos por três pessoas, sendo 7 cheios de vinho, 7 meio cheios de vinho e 7 vazios, de forma que cada pessoa receba o mesmo número de vasos e mesmo volume de vinho, sem alterar o conteúdo dos vasos.

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

É ao pegar os 7 vasos de vinho cheios e dividi-los em metade nos outros 7 vasos vazios para ficarem como o

3. Resolva as seguintes expressões:

a) $5x + x = 6x$

b) $4x^2 - x^2 = 10$

c) $2x - 1 = 1x$

d) $3x^2 + x^2 + 12x = 19x$

4. Sabendo que $x=3$, dê o resultado das expressões abaixo.

a) $5x + x =$

b) $4x^2 - x^2 =$

c) $2x - 1 =$

d) $3x^2 + x^2 + 12x =$

5. Para saber quais eram os tipos de revistas esportivas mais lidas, foi feita uma pesquisa em um determinado bairro.

Tabela: Tipo de revista mais lido

Frequência porcentual	40	30	15	15
Tipo de revista	semanal	mensal	bimestral	trimestral

(B)

(C)

(D)

6. Uma caixa de sapato fechada tem as seguintes dimensões: 6 m, 2 m e 4 m. Qual é a área total desta caixa?

Registre aqui o que você pensou ou as dúvidas sobre a questão:

$$6 + 6 = 12 \times 8 = 20 \text{ metros}$$