UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ALESSANDRO EMILIO TERUZZI

**A produção de sentido na aula de matemática:
a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio**

São Paulo
2017

ALESSANDRO EMILIO TERUZZI

**A produção de sentido na aula de matemática:
a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio**

Versão Original

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em Educação

Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Pietrocola

São Paulo

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catálogo na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3
T332p

Teruzzi, Alessandro Emilio

A produção de sentido na aula de matemática : a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio / Alessandro Emilio Teruzzi; orientação Mauricio Pietrocola. São Paulo: s.n., 2017.
200 p. ; ils.; gráficos ; tabelas

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. História da matemática 2. Matemática (estudo e ensino) 3. Matemática (educação) 4. Narrativa I. Pietrocola, Mauricio, orient.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: TERUZZI, Alessandro Emilio

Título: A produção de sentido na aula de matemática: a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em Educação

Aprovado em: ____/____/2017

Banca Examinadora

Prof. Dr.: _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr.: _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr.: _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

AGRADECIMENTOS

Desde a minha juventude fui um grande estimador dos piratas: em um primeiro momento, pelo fascínio das aventuras, pelo *glamour* dos filmes e, sucessivamente, por aquilo que os piratas representavam – uma tentativa de rebelião frente a um mundo extremamente violento e injusto. Nas leituras que acompanharam este percurso, dentre as inúmeras coisas que golpearam a minha imaginação, uma em particular ficou marcada na minha memória. Quando a tripulação de um navio queria se rebelar contra o capitão e contra as violências praticadas, escrevia uma carta que a comprometia ao ato de rebelião: quem estava de acordo teria que assinar. Caso o motim não desse certo, a fim de evitar que o primeiro abaixo-assinante fosse considerado culpado e o único responsável, os futuros piratas assinavam em círculo, ao invés de cima pra baixo, com a finalidade de impedir que o chefe, o iniciador do motim, fosse distinguido. Gostei da ideia! E por este motivo os nomes das pessoas às quais o meu trabalho é devedor serão escritos à moda dos piratas do Caribe!

Além disso, tal como afirmava Fabrizio DeAndré, “Há bem pouco merecimento na virtude e bem pouca culpa no pecado”, o que para mim sempre significou que, apesar de acharmos que somos grande coisa, somos muito pouco e o pouco que somos, no bem e no mal, depende quase nada de nós, mas sim, quase tudo d’aquilo que está ao nosso redor: pessoas, ambientes, ideias, situações, oportunidades etc. Eu, ao escrever esta pesquisa, fui um Chico Xavier da vida, quase somente me limitando a (psico)grafar ideias, propostas e conexões que outras pessoas, em diferentes situações, sussurraram ao meu ouvido. Da origem de muitos desses sussurros, provavelmente não tenho memória – assim como os livros de história mantêm o nome de César, mas não dos vivandeiros que o acompanharam na Gallia e na Bretanha. E a tod@s el@s, peço desculpas. Dos que me lembrei, deixei o nome gravado à moda pirata. Com uma única exceção.

Ela é a pessoa que, nos últimos sete anos, ficou junto comigo. SEMPRE. Foi a pessoa sem a qual dificilmente teria me adaptado a viver em um país diferente, sem trabalho, sem saber “como rodava a fumaça”. Foi quem me aconselhou sobre a licenciatura em matemática (para poder ter acesso ao ensino formal), e, posteriormente, acerca da possibilidade de realizar o mestrado. Guiou-me na burocracia e nos mecanismos intrínsecos à universidade para alcançar este objetivo. Foi a pessoa com quem chorei a perda do meu avô. Comemos “arroz com arroz” nos dias de dificuldades. Ela leu e releu os meus trabalhos, as minhas redações, os

diferentes e variados textos que produzi, corrigindo cada vez mais o meu incerto português. Muito mais que isso: cada ideia que eu colocava no papel era discutida anteriormente com ela, elaborada junto com ela. Na verdade, pelo suporte emocional, intelectual e prático, esta dissertação poderia bem ser considerada como escrita a quatro mãos.

Além de tudo isso, e mais do que tudo isso: o mundo que construímos ao longo dos milênios e no qual vivemos atualmente é um mundo violento. É violento porque há guerra em toda parte. Mas é violento, também, porque há miséria e desespero em toda parte. Porque tudo tende a ser reduzido a mercadoria. Porque o forte sempre oprime e vexa quem não pode se defender. É um mundo difícil de se viver. Sem ela para compartilhar a dor, o sofrimento, a raiva que este mundo gera, teria sido condenado ao desespero e à resignação: eu e ela não nos encaixamos NESTE mundo. Precisamos de um mundo diferente, mais solidário, um pouco mais justo, mais humanizado e acolhedor. Você tem que dançar conforme a música que toca: eu já vi o que acontece quando você fica solto no mundo... acaba se acostumando com a mesma música de todos. Juntos, eu e ela, fugimos do desespero e mantivemo-nos firmes em nossos propósitos, com nossa moral minoritária sobre a qual bate sem parar o vento do conformismo e a tempestade da resignação. Juntos, mantivemo-nos íntegros: o mundo não conseguiu nos quebrar. Ela, que é a minha esposa, a minha amante, a minha companheira, sem a qual este trabalho não existiria, merece um lugar de destaque na minha *lista pirata*.

Adriana

RESUMO

TERUZZI, Alessandro Emilio. **A produção de sentido na aula de matemática**: a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio. 2017. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

O ensino da matemática aglutina uma série de questões abertas, em parte, compartilhadas e transversais ao complexo mundo da educação e, em parte, específicas. Por exemplo, uma experiência bastante comum entre professores de matemática é ouvir dos próprios alunos a seguinte pergunta: “Mas para que serve isso?”. Nem sempre a resposta consiste em mostrar esta utilidade, mas, com certeza, sempre o(a) professor(a) tem que se preocupar com o sentido daquilo que está ensinando. A pergunta, então, é: como construir esse sentido ao trabalhar os tópicos da matemática? Nas últimas décadas (e com precursores que remontem ao final do século XIX), a história da matemática como elemento importante (central?) para construir a atividade de ensino- aprendizagem ganhou força em âmbito acadêmico, segundo várias (e complementares) vertentes: anedotas, reconstrução do contexto, redescobrir técnicas e métodos, analisar e comparar diferentes concepções, etc. À luz disso, o caminho que a presente pesquisa, de cunho teórico e baseada em pesquisa bibliográfica, explora é analisar quais contribuições a história da matemática pode propiciar visando à construção de significado em sala de aula. Para contextualizar esta pesquisa, são analisados os conceitos de sentido e significado: assim, o sentido é percebido no âmbito de uma visão construtivista, em que os conceitos e as ideias se interligam numa rede de conhecimentos, e por meio da qual se dá uma relação dialética entre os vários sentidos pessoais e individuais, que pode levar à emergência de algo compartilhado, o significado. A construção do sentido se dá por meio de narrativas, que constituem o lugar em que a construção e o entrelaçamento de ideias acontecem; além disso, tais narrativas nunca acontecem no “vácuo”, mas são sempre situadas social e historicamente (o trabalho de Paulo Freire é seminal a este respeito). Ademais, são exploradas algumas possibilidades que a história da matemática proporciona ao ensino, destacando-se, dentre outros fatores, a importância das ideias fundamentais e a perspectiva de interdisciplinaridade (a este respeito, o trabalho de Bento de Jesus Caraça é considerado marco fundamental). Por fim, são elaborados dois critérios para avaliar o papel que, numa determinada construção de narrativa, desempenha a história da matemática: o potencial narrativo e o potencial histórico. O primeiro aspecto remete ao enredo que um fato histórico apresenta e ao interesse que ele pode desempenhar em sala de aula; o segundo remete ao quanto uma abordagem histórica pode permitir explorar relações tanto com outros assuntos da matemática quanto com outras questões exteriores a ela (transdisciplinaridade). Independentemente dessas duas vertentes, existe sempre a possibilidade de vasculhar a história em busca das ideias fundamentais que caracterizam a descoberta de um novo assunto. Três casos de estudos são propostos para ilustrar estes aspectos: o jovem Gauss e a soma das parcelas de uma progressão aritmética; o nascimento dos logaritmos; e a análise de círculo e esfera feita por Arquimedes. Um último caso – o surgimento da lei de gravitação universal proposta por Newton – é levado em conta para destacar vários elementos, dentre os quais, o papel do experimento mental e o processo de unificação.

Palavras-chave: História e ensino da matemática. Sentido da matemática. Ideias fundamentais. Narrativa. Matemática como cultura. Matemática para todos.

ABSTRACT

Research on mathematics education shows a number of open problems, some of them shared with the general issue of education and, others, specific of mathematics education. For example, an experience very usual among mathematical teachers is to listen some students ask: “But, what is the use of this?”. Not always the answer is to show some use, but, surely, always the teacher have to care about the meaning of what he’s teaching. So, the question is: how to build up this meaning working with mathematical topics? In the lasts decades (and with precursors in the end of the XIX century), the history of mathematics as a important (maybe central) element to plan and build up educational activities gain strength in academic researches, accordingly some different (and complementary) slopes: anecdotes, context reconstruction, technics and method discovery, discussion among different conceptions,, etc. So, this theorethical and bibliographical research is about to analyze what kind of contribution mathematical history can provide, looking for building up the meaning with the students. To give a context to this study, the concept of meaning and signification are analyzed: so, the meaning is perceived in a constructivist scope, in witch concept and ideas are related each other in a network of knowledges. By a dialectic interaction among of different personal meanings, there is the hope that something shared by all may be appear: the signification. The construction of meaning happens by narrations, that are the scenario where the construction and linking of ideas take place; besides, such narrations never occur in the “void”, but always in a social end historic defined context (the research of Paulo Freire are seminal about this). In addition, some possibilities about history of mathematics and teaching relations are discussed, underlining, among various elements, the relevance of fundamental ideas and interdisciplinary subjects,(about this, Bento de Jesus Caraça researches’ are considered a milestone). Finally, two criteria are elaborated to discuss the role that have history of mathematics in the construction of a narrative in the classroom: narrative potential and historical potential. The first one is about the plotline that an historical fact has and how much it could be interesting for pupils; the second one is about the possibility to perceive, by historical analysis, the relations with other topics of mathematics and the relations with topic external to mathematics (transdisciplinary). Independently of this two slopes, always exist the possibility to research history looking for fundamentals ideas embedded in the born of a mathematical concept. Three cases of study are presented to illustrate such aspects: young Gauss who discover how to sum the terms of arithmetic progression; the born of logarithm; and the analyses of circle and sphere proposed by Archimedes. There is one last case – the born of Universal Gravity Law by Newton – discussed to show the importance of a number of fundamental ideas, such as, the mental experiment and the aim of unification.

Keyword: History and teaching of mathematics. Meaning in mathematics. Fundamentals Ideas. Narrative. Mathematics as culture. Mathematics for all.

RIASSUNTO

L'insegnamento della matematica è oggetto di un certo numero di questioni aperte, alcune condivise e trasversali del complesso mondo dell'educazione, altre specifiche della disciplina. Per esempio, una esperienza abbastanza comune per gli insegnanti di matematica è sentirsi rivolgere dai propri alunni la domanda: "Ma a cosa serve questo?". Non necessariamente la risposta consiste nel mostrare un'utilità, ma sicuramente l'insegnante deve avere l'obiettivo di mostrare un senso per quello che sta spiegando. La domanda, quindi, è: come costruire questo senso mentre si propongono argomenti di matematica agli studenti? Negli ultimi decenni (con antesignani che risalgono alla fine del secolo XIX), la storia della matematica come elemento importante, forse addirittura centrale per costruire l'attività educativa, ha acquisito forza in campo accademico, seguendo differenti e complementari versanti: aneddotica, ricostruzioni di contesto, riscoperta di tecniche e metodi, analisi di differenti concezioni, ecc. Alla luce di ciò, la traiettoria della presente ricerca, di tipo teorico e bibliografico, è analizzare quali contributi può offrire la storia della matematica in vista della costruzione di significato in classe. Per contestualizzare la ricerca, vengono analizzati i concetti di senso e significato: così, il senso è percepito nell'ambito di una visione costruttivista, nella quale i concetti e le idee si collegano in una rete di conoscenze; attraverso una relazione dialettica dei vari sensi personali di diversi individui, si ha la speranza di poter giungere a un nucleo condiviso, il significato. La costruzione del senso avviene per mezzo di narrazioni, che costituiscono il luogo in cui avviene la relazione e la connessione delle idee; inoltre, è necessario considerare che tali narrazioni non vengono prodotte nel "vuoto", ma sono sempre contestualizzate storicamente e socialmente (la ricerca di Paulo Freire è basilare rispetto a quest'ultimo tema). In seguito, sono analizzate alcune possibilità didattiche che la storia della matematica offre nel campo dell'insegnamento, evidenziando, particolarmente, la rilevanza delle idee fondamentali e la discussione di questioni interdisciplinari (a riguardo, la ricerca di Bento de Jesus Caraça è considerata una pietra miliare). Infine, sono proposti due criteri per valutare il ruolo che assume la storia della matematica in una determinata costruzione narrativa: il potenziale narrativo e il potenziale storico. Il primo aspetto ha a che fare con l'intreccio che un fatto storico presenta e il relativo interesse che può suscitare in aula; il secondo valuta quanto un'impostazione storica possa indagare e fare emergere le relazioni, tanto con altri argomenti matematici, quanto con tutta una serie di questioni esterne alla matematica, in un'ottica di transdisciplinarietà. Indipendentemente da questi due approcci, esiste sempre la possibilità di studiare la storia della matematica ricercando le idee fondamentali che caratterizzano la scoperta di nuovi concetti. Al fine di illustrare ed esemplificare i temi sopra esposti, vengono presentati i seguenti tre casi di studio: il giovane Gauss e la somma dei termini di una progressione aritmetica; la nascita del logaritmo; l'analisi del cerchio e della sfera elaborata da Archimede. Un ultimo caso – la nascita della legge di gravitazione universale a opera di Newton – è analizzato per sottolineare vari elementi, tra cui il ruolo dell'esperimento mentale e il concetto di unificazione.

Parole chiave: Storia e insegnamento della matematica. Senso della matematica. Idee fondamentali. Narrativa. Matematica come cultura. Matematica per tutti.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O significado cria-se num plano de acordo com duas dimensões: a espacial e a temporal	19
Figura 2 - Objetos sólidos com buracos e proeminências utilizados para treinamento da técnica de pintura chiaroscuro	23
Figura 3 - Papel da história em destaque.	25
Figura 4 - Sentido e significado.....	30
Figura 5 - Calvin explica o “sentido” da matemática para Haroldo	36
Figura 6 - “O homem narrativa”	39
Figura 7 - Dois (entre vários) pares que podem ser construídos entre as ideias de Platão e Aristóteles.....	52
Figura 8 - A escola de Atenas (<i>La scuola di Atene</i>), particular	59
Figura 9 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°	60
Figura 10 - Conhecimento subjetivo e objetivo	64
Figura 11 - O tetraedro proposto por Fried.....	78
Figura 12 - Valor do uso da história na matemática.....	92
Figura 13 - Programa airodump-ng	106
Figura 14 - Sistema de segmentos em equilíbrio.....	119
Figura 15 - Segmento de parábola e triângulo “pesados” por Arquimedes.....	123
Figura 16 - "Fatiamento" do círculo	125
Figura 17 - Conhecimento concreto e abstrato.	132
Figura 18 - Aprendizagem: concreto x abstrato.	134
Figura 19 - O círculo em rotação: a esfera.	143
Figura 20 - Sólidos em equilíbrio.....	145
Figura 21 - Decomposição da esfera.	146

Figura 22 - Considerações de Valerio sobre o volume da esfera e do cone.	148
Figura 23 - Divisão de temas.....	151

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	QUESTÕES DE ESTILO... ..	26
2	O ENSINO DA MATEMÁTICA: O PROBLEMA DA “FALTA DE SENTIDO”	29
2.1	SENTIDO E SIGNIFICADO: QUAIS RELAÇÕES?	29
2.2	“PROFESSOR, PARA QUE SERVE ISSO?”	36
2.3	EM BUSCA DE SENTIDO: UMA LONGA “NARRAÇÃO”	39
3	CONCEPÇÕES DA MATEMÁTICA E ENSINO: ARISTÓTELES, PLATÃO E CIA.....	50
3.1	CALIPSO TOMANDO BANHO NO <i>LÉTHÊ</i>	51
3.2	PLATÃO: O MUNDO DAS FORMAS.....	54
3.3	ARISTÓTELES: AS FORMAS DO MUNDO	56
3.4	A MATEMÁTICA: HUMANA, DEMASIADA HUMANA.....	61
4	CONCEPÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO	67
4.1	FILOGENESE E ONTOGENESE: “ <i>LES LIAISONS DANGEREUSES</i> ”	67
4.2	A HISTÓRIA COMO LUGAR DE CRIAÇÃO DE SENTIDO	75
4.3	A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO MEDIADORA ENTRE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	78
4.4	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE: UMA RELAÇÃO NATURAL	80
4.5	À MODA DE SÍNTESE.....	87
5	HISTÓRIA E NARRATIVA	89
5.1	HISTÓRIA E NARRATIVAS: UMA VIA DE MÃO DUPLA.....	89
5.2	UMA PROPOSTA: EIXOS DE TRABALHO	91

6	TRÊS CASOS (E MEIO) PARA UMA DISCUSSÃO	96
6.1	PROGRESSÃO ARITMÉTICA: GAUSS E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA.....	96
6.2	LOGARITMOS, NAPIER E OS COMÉRCIOS NAVAIS: TÃO LONGE, TÃO PERTO!	102
6.3	ARQUIMEDES: EM BUSCA DO <i>INÉDITO VIÁVEL</i>	113
6.3.1	Arquimedes e as fatias da pizza	114
6.3.2	A circunferência e π	139
6.3.3	A esfera desnuda	144
6.3.4	O primeiro processo de unificação na ciência: círculo, circunferência, esfera, π	150
6.4	NEWTON, A MAÇÃ, A LUA: NARRATIVAS REALÍSTICAS (INVENTADAS) E EXPERIMENTOS MENTAIS (REAIS).....	166
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	175
	NOS PRÓXIMOS EPISÓDIOS.....	178
	REFERÊNCIAS	180

1 INTRODUÇÃO

É uma experiência bastante comum para os docentes de Matemática do ensino básico ouvir a pergunta: “Professor, mas para que serve isso?” De alguma maneira, pode-se dizer que este tipo de questionamento expressa uma inquietude do aluno a respeito do conteúdo que está sendo trabalhado em sala de aula. Mas, talvez tal inquietude pudesse ser proposta pela afirmativa: “Professor, não vejo sentido nisso tudo”.

Às vezes, o aluno pode perceber certo incômodo na aula de matemática porque aquilo que o professor apresenta e a maneira como o propõe não fazem sentido e ele, provavelmente influenciado pelo utilitarismo que permeia a sociedade (e a escola), busca uma utilidade¹ para dar significado às atividades propostas.

Em uma “macroescala”, cada assunto da Matemática tem – ou, pode-se apostar, terá – aplicação prática em algum campo específico, mas isto não ajuda muito na sala de aula. Saber que os números complexos são uma potente ferramenta para o estudo de fenômenos elétricos pode não ser a chave para despertar o interesse do aluno e envolvê-lo na dinâmica da aula.

A questão de fundo é que nem tudo o que se ensina tem utilidade prática imediata no mundo do aluno: isso é “natural”, tanto quanto o fato de ler um poema de Carlos Drummond de Andrade ou os aforismos de Nietzsche não “servirem para nada”, prática e imediatamente. E está certíssimo assim! A educação básica não pode ser reduzida a saberes imediatamente utilizáveis praticamente, mas deve abranger ideias mais profundas, cujo valor é cultural, estético, poético, social.

Aquilo que não pode faltar não é necessariamente o aspecto pragmático, mas sim *o sentido*: os assuntos debatidos, as dinâmicas desenvolvidas em sala de aula podem faltar em aplicações práticas, mas com certeza devem estar ancoradas na construção de um significado que permita ao aluno perceber que existe sentido na execução da atividade proposta.

A questão, então, que o docente deve colocar-se ao preparar suas aulas está justamente na elaboração de uma didática que contribua na construção de um significado que faça sentido para a aluna.

¹ Ao pé da letra, uma utilidade poderia ser enxergada em vários níveis: teórico, intelectual, emotivo, prático... Nesta pesquisa, a acepção utilizada compreende o termo “utilidade” sempre ligado ao aspecto prático-imediato, considerando as outras “utilidades” ligadas a outros campos da vida (laços emocionais, prazer contemplação...).

De acordo com Bruner (1997, 2014), as estruturas narrativas permitem a criação de sentido: na sala de aula, o professor deve utilizar uma dinâmica que, de alguma maneira, represente uma narração que motive o aluno e seja para ele significativa.

Ao longo desta pesquisa, far-se-á referência às ideias de “significado” e de “sentido”, assim como apresentadas em Machado (2013b, 2015). Para ele o sentido é característico do âmbito pessoal, enquanto o significado representa o “núcleo compartilhado” entre as várias pessoas com diferentes sentidos. Em ambos os casos, trata-se de uma relação reticular entre conceitos, feixes de ligações que se juntam de diferentes maneiras (semelhança, oposição, contiguidade lógica etc.).

No ensino da matemática, cada vez mais o uso de sua história tem-se apresentado com certa relevância: a partir do início do século XX, por alguns matemáticos e educadores matemáticos – Gino Loria (cf. RADFORD, 2014, p. 99), Poincaré e Felix Klein (cf. FURINGHETTI, 2005, p. 366, FUNRIGHETTI; RADFORD, 2008, p. 633-634), somente para citar alguns –, tendo reforçada sua centralidade nos últimos 40 anos, pela crescente presença em estudos acadêmicos, na implantação de diretrizes políticas, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e em congressos temáticos².

Ao longo de todo este arco de tempo, a utilização da história da matemática no ensino sofreu mudanças, reelaborações, enriquecimentos: propostas como a da recapitulação³ sofreram várias críticas enquanto outras, como a de utilizar fontes primárias em sala de aula, ganharam apoiadores.

A reflexão “filosófica” sobre a Matemática e seu ensino também se foi modificando e incorporando sua história como elemento em destaque: Furinghetti (2007) chegou a propor, em um curso para futuros professores, a história da ciência como mediadora entre o conhecimento e o ensino da matemática.

O presente estudo, que se insere neste debate, visa a analisar as possibilidades de construir um sentido para os tópicos de matemática mediados pela história da Matemática como fonte primária para a produção de narrativa, no âmbito do ensino médio.

Propõe-se a utilização da história da Matemática como percurso para encontrar as ideias fundamentais (CARAÇA, 1941) que estão na raiz⁴ de determinado assunto, para usá-las

² Interessante pela abrangência é o *handbook* do ICME *History in Mathematics Education* (FAUVEL; VAN MAANEN, 2000).

³ A ontogênese recapitula a filogênese, no sentido de que as etapas percorridas pelo indivíduo são as mesmas pelas quais passou a espécie.

⁴ Furinghetti (RADFORD et al., 2014; FURINGHETTI, 2005) usa várias vezes a expressão *cognitive roots*, sustentando que a história da Matemática permite recuperar as raízes cognitivas das ideias matemáticas e que

possivelmente, junto com outros aspectos, históricos ou não, a fim de criar uma narração em sala de aula que permita aos alunos construir uma trajetória pedagógica e didática à conquista do sentido.

Esta perspectiva de abordagem traz consigo algumas fecundas consequências didático-epistemológicas que serão discutidas ao longo deste estudo.

Uma abordagem histórica reforça o caráter “humano” da Matemática. De maneiras diferentes, alguns autores destacaram essa característica ao longo do século XX: Caraça, Ernest, Freudenthal, Hersh, Lakatos, entre outros. Apesar de esta visão ser hoje em dia bastante aceita no mundo acadêmico, na escola e no senso comum⁵ a Matemática ainda é vista – e muitas vezes ensinada – como a ciência “dura” por antonomásia, um campo de saber imutável e independente das atividades humanas.

Não se trata, neste âmbito, de tomar partido entre aristotélicos e platonistas, coisa que demandaria um trabalho específico, mas sim de destacar que, pensando a Matemática tanto como uma abstração a partir do campo empírico (aristotelismo) quanto como a descoberta de alguma coisa que existe num plano superior/ideal (platonismo), o “holofote” tem de estar ligado e centrado na figura dos seres humanos que inventaram e descobriram estes conceitos. Os sujeitos que “descobrem” ideias matemáticas ou que “criam” tais ideias são seres humanos, o que, em extrema síntese, torna a Matemática uma produção humana, social e histórica (este assunto será abordado no item 3).

Outro aspecto que pode trazer benefícios por intermédio de uma abordagem histórica, atualmente colocada sempre em destaque pelos PCN e pelas diretrizes públicas de ensino, é a transdisciplinaridade. Por um lado, a busca das ideias fundamentais no contexto histórico procede porque as ideias fundamentais são justamente aquelas que, por essência, transcendem o “fechamento” em uma única disciplina e transbordam para outras (este assunto será abordado no item 4.4).

Nos estudos de Arquimedes sobre círculo e esfera, emerge com clareza o *mecanismo de unificação*: um processo muito importante em todas as ciências, no qual teorias, fenômenos, fórmulas que a princípio parecem diferentes, após vários estudos, demonstram ser formas particulares de um mesmo princípio. Também, os trabalhos de Arquimedes são

esses conceitos são a base, as “ideias sustentadoras” (FURINGHETTI, 2004b, p. 14) para construir o significado em sala de aula e, a partir deles, seria possível expandir tal significado, passando por generalizações e formalizações.

⁵ De acordo com Santos (2008, p. 28), algumas expressões frequentes de alunos são: “a matemática é difícil”, ‘a matemática é chata’, ‘eu não consigo entender’, ‘tenho horror da matemática’, ‘é o bicho-papão da escola’. A própria experiência do presente pesquisador como professor confirma este cenário.

exemplos que destacam um uso intuitivo das ideias do cálculo integral, quase 2 mil anos antes das intuições de Leibniz e Newton, e sem o formalismo desenvolvido sucessivamente por Dedekind e Weierstrass.

Resgatar as origens históricas de um conceito matemático possibilita relacionar tal descoberta com a cultura, a sociedade, a visão de mundo da época, propiciando conexões com a literatura, a ciência, a religião nas quais os matemáticos estavam mergulhados.

A análise de alguns tópicos da Matemática permitirá esclarecer uma proposta para realizar tal tarefa e fornecerá – espera-se – elementos para avaliá-la. Serão analisados: o conceito de logaritmo (com seu surgimento ligado ao desenvolvimento dos comércios marítimos e, conseqüentemente, à necessidade de facilitar as contas com grandes números), o de progressão aritmética (e a “historinha” do jovem Gauss), bem como as ideias, matemáticas ou não, contidas nos estudos de Arquimedes sobre o círculo e a esfera. Cada um destes tópicos apresenta características diferentes e originais que permitem destacar as várias modalidades de utilização da história da Matemática como fonte de narrativas para a abordagem do assunto em sala de aula.

Figura 1 - O significado cria-se num plano de acordo com duas dimensões: a espacial e a temporal

Fonte: Autoria própria.

A metodologia seguida no presente trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica sobre vários autores e fontes secundárias que tratam do ensino da Matemática, da epistemologia e da história da Matemática. Por meio da análise de várias posições (por exemplo, sobre a visão filosófica da Matemática e sobre a relação entre a história e o ensino da Matemática) presentes na literatura específica, tentar-se-á discutir as diferentes visões à luz

de uma proposta de utilização da história como base de construção de narrações em sala de aula.

Do ponto de vista epistemológico, o processo de “conhecer” remete ao significado: conhecer é conhecer o significado, entendido como uma relação “em rede” em que os conceitos se entrelaçam, conectando-se de acordo com vários tipos de ligações: analogia, consequência temporal (*post hoc*), consequência lógica (*propter hoc*), oposição...⁶

Tal construção de significado apresenta pelo menos duas dimensões de atuação: a diacrônica e a sincrônica. A dimensão sincrônica remete diretamente ao fato de o significado ser uma construção social, enquanto a dimensão temporal (diacrônica) pode mostrar que (e com quais modalidades) a construção de significado é um processo “vivo”, em permanente estado de atualização e ressignificação.

No aspecto social, pode-se raciocinar a respeito do conceito mais amplo de cultura, já que o significado é sempre construído dentro dela. Assim, a ideia de uma cultura como ligada a determinada sociedade, com sua organização social e produtiva e com seus conflitos, é fundamental na obra de Marx; mais recentemente, Sewell Junior (1999) propõe uma definição de cultura baseada na ideia de um sistema de símbolos, significados e práticas.⁷

Sewell Junior (1997, p. 3, tradução nossa) discute a relação dialética que existe entre a análise cultural sob uma perspectiva sincrônica e diacrônica: “Lançaria mão da hipótese de que cada análise cultural necessariamente implica um momento sincrônico, mas também tal momento sincrônico deveria ser dialeticamente relacionado a um momento diacrônico”.⁸

Querendo esquematizar esta complexa relação para a sala de aula, pode-se dizer que o sentido expressa a dimensão subjetiva do conhecimento (em teoria, cada um pode atribuir um sentido diferente para o mesmo objeto, ideia e situação) e, por meio de uma relação articulada – um contraste dialético, um fundo comum, uma dominação etc. –, os vários sentidos concorrem para formar o significado que se torna compartilhado dentro de uma cultura.⁹

⁶ Esta posição é amplamente analisada por Machado (1995) a partir do posicionamento de Dewey: “Compreender é compreender o significado... Aprender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em relação com outras coisas... Contrariamente, aquilo que achamos a coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram aprendidas” (DEWEY apud MACHADO, 1995, p. 35).

⁷ O debate sobre “o que é a cultura” demandaria, por si só, um trabalho inteiramente dedicado. Pretende-se aqui assumir um quadro geral suficientemente amplo para poder discutir a ideia de mudança de sentido. Os textos citados de Sewell Junior retomam e reelaboram os trabalhos do antropólogo Geertz que, por sua vez, constitui uma referência para alguns exemplos oferecidos por Bruner (2014).

⁸ “I would argue that every cultural analyses necessarily entails a synchronic moment of this sort, but I would also argue that the synchronic moment should be dialectically related to an equally diachronic moment.”

⁹ A própria construção do sentido, apesar de ligada à dimensão subjetiva, não acontece no “vácuo”, mas dentro uma sociedade e de uma cultura. Assim, a relação necessariamente é de mão dupla: não somente a dinâmica

Este processo social não acontece de forma instantânea e acabada, mas se atualiza continuamente ao longo do tempo: assim, o estudo da História torna-se o estudo do lugar em que as mudanças de significado acontecem. Dito em outros termos: a História é a fonte para entender o significado das mudanças... de significado!

Na primeira metade do século XX, Ortega Y Gasset (apud AMARAL, 2014, p. 263) elabora a ideia de que a cultura “é um sistema de ideias vivas que cada tempo possui. Melhor: o sistema de ideias a partir das quais um tempo vive [...] é ela [cultura] o plano da vida, a guia dos caminhos ao longo da selva de existência”.

O posicionamento do filósofo espanhol chama a atenção pela contínua referência ao tempo, que aparece duas vezes nesta definição. E não podia ser diferente para quem cunhou o mote “Eu sou eu e a minha circunstância” (ORTEGA Y GASSET, 1914, p. 12)! Na verdade, a definição compõe-se de duas partes, nas quais a mesma ideia de fundo é reelaborada mudando o “ponto” de vista: na primeira, o tempo é dado, fixo, “newtoniano” e, nele, as ideias vivem, mudam, disputam, evoluem; na segunda, a perspectiva se inverte: são as próprias ideias que criam determinado tempo¹⁰.

A exploração da história da Matemática configura-se, assim, como a maneira de resgatar o processo de construção de significado de um assunto, mostrando as ideias fundamentais a ele relacionadas, destacando as experiências corporais e sociais que participaram de sua elaboração, a retomada das metáforas que permitem jogar uma luz diferente sobre o assunto.

Radford et al. (2014) sublinham a profunda interconexão de realidade e história: citando Ilienkov, afirmam que “a realidade não pode ser compreendida sem uma abordagem histórica [...] a realidade não é uma coisa. É um processo; [... consequentemente,] a história é embutida na realidade e a realidade na história” (RADFORD et al., 2014, p. 106, tradução nossa)¹¹. E concluem:

Trazer as histórias no ensino da Matemática pode ajudar-nos e aos nossos alunos a entender que a Matemática somente pode fazer sentido dentro do contexto histórico de sua própria cultura; pode ajudar-nos a enxergar como

entre diferentes sentidos concorre para produzir um significado, mas também o contexto cultural se reflete no processo “individual” de conhecimento.

¹⁰ Neste contexto, a ideia de tempo representa o conceito não no sentido cronológico (o tempo do relógio), mas como sucessão de acontecimentos, de fatos significativos. É interessante ressaltar que “evento” tem a mesma etimologia de *evus*, palavra latina para, justamente, tempo, período, época. Esta ideia do tempo ligado aos eventos é colocada em relação com o *tempo da narração* por Ricœur (2010).

¹¹ “<<A concrete understanding of reality cannot be attained without a historical approach to it.>> [...] Reality is not a thing. It is a process which, without being perceived, discreetly goes back, every moment, to the thoughts and ideas of previous generations. History is embedded in reality and reality in history.”

ela mesma atua nos mecanismos de inclusão/exclusão, de que maneira ela oferece modelos cognitivos. (RADFORD et al., 2014, p. 106, tradução nossa).¹²

Na mesma linha, Furinghetti (2004b, p. 14, tradução nossa) resume: “A história liberta as teorias matemáticas das incrustações, permite-nos sacar as ideias importantes e trabalhar em cima delas”¹³.

Consideradas estas funções da história da Matemática, a proposta deste estudo é usá-la como base para a elaboração de narrativas em sala de aula que possam prover um sentido para os alunos do ensino médio.

Uma referência do ponto de vista histórico será, sem dúvida, a ideia do historiador Ginzburg (1989) acerca do *paradigma indiciário*, de acordo com o qual a atividade do historiador avança como a do investigador Sherlock Holmes, partindo dos simples e, à primeira vista, pouco significativos indícios, para reconstruir os acontecimentos.

Este quadro conceitual possibilita resgatar fatos de notável interesse não somente para fins historiográficos, para entender o porquê de determinados acontecimentos, mas também do ponto de vista da construção de narrativas, permitindo destacar elementos e estabelecer ligações com outros conceitos, não somente matemáticos.

Um caso emblemático é representado pelas observações lunares de Galileu com seu (melhorado) telescópio, por meio das quais ele pôde identificar as montanhas e crateras da superfície, abalando fortemente a ideia aristotélico-escolástica segundo a qual o mundo supralunar era perfeito, incorruptível e sem mudanças¹⁴. Um elemento central sobre esta história é relatado e analisado por Lago (2013, p. 65-67), ao retomar algumas das considerações de Holton (1985). Entre os séculos XVI e XVII, outros astrônomos na Europa tiveram acesso às mesmas observações, como é o caso do inglês Harriot, mas nem todos reconheceram aquelas alternâncias de luz e sombra como reveladoras das irregularidades da superfície lunar. O paradigma indiciário socorre o historiador: Holton aponta para o fato de que Galileu estava no meio de uma revolução artística na pintura, em que novas ideias ligadas à perspectiva estavam redefinindo os cânones da arte figurativa (LAGO, 2013, p. 68). Como professor de matemática, Galileu ensinava na Faculdade de Pisa e, sucessivamente, de Pádua,

¹² “Bringing in political histories of mathematics in teaching and learning may help us and our students understand that mathematics can only make sense within the context of a history of its own culture; it can help us see how mathematics operates within the centrifugal forces of society, how it accomplishes inclusion and exclusion, how it offers cognitive templates of development”.

¹³ “La storia libera le teorie matematiche dalle incrostazioni, ci fa ripescare le idee portanti e ci permette di lavorare su di esse”.

¹⁴ Ver item 6.4.

geometria e perspectiva; o historiador Edgerton assinala que “Galileu ensinava e participava de estudos de uma técnica de pintura conhecida como *chiaroscuro* – claro/escuro – que projeta a perspectiva pela alteração de coloração” (LAGO, 2013, p. 66). Ou seja, trabalhava justamente com o estudo da representação de sólidos tridimensionais numa superfície (em 2D), por meio do recurso das sombras. Assim, continua Lago (2013, p. 68):

[...] o italiano, por conta destes estudos e atividades artísticas, tinha um “hábito de visualização” diferente do inglês e o usou como “instrumento de imaginação”. Assim, em 1609, os exercícios de visualizações que Galileu havia treinado alguns anos antes tornaram-se mediadores para a compreensão da observação das crateras lunares.

Figura 2 - Objetos sólidos com buracos e proeminências utilizados para treinamento da técnica de pintura *chiaroscuro*

Fonte: Lago (2013, p. 68).

Desta maneira, dois elementos estão postos: em primeiro lugar, o conceito de imaginação, que ecoa com a ideia de experimento mental¹⁵, remete a uma experiência mental necessária para dar um sentido às observações feitas; em segundo lugar, este detalhe da vida de Galileu é um indício que pode explicar por que o físico e matemático toscano enxergou as coisas de maneira diferente dos outros cientistas seus contemporâneos.

Por último, a ideia do paradigma indiciário será usada para analisar as questões e os retornos dos alunos ao trabalhar determinadas ideias elaboradas e propostas em sala de aula. Isto é, apesar de ser um trabalho de cunho teórico elaborado a partir de uma pesquisa bibliográfica, a pesquisa necessariamente transborda e reverbera na atividade educativa, de acordo com a visão do *professor pesquisador*¹⁶. A integração destes elementos práticos ao trabalho de pesquisa é feita justamente no quadro do paradigma indiciário, pelo qual as contribuições das alunas são recebidas como indícios de questões e assuntos que dialogam

¹⁵ Ver item 6.4.

¹⁶ Também chamado de *professor reflexivo*. Para mais informações, vide Fagundes (2016) e Rausch (2012).

com a pesquisa e que, eventualmente, poderão ser expandidos e aprofundados em desenvolvimentos futuros.

Ao longo deste estudo, serão apresentados vários assuntos e citações que poderão parecer não estritamente ligados aos tópicos principais. Este fato justifica-se pela ideia de que a Matemática é um dos pilares da educação fundamental e quase todos os currículos do ensino básico a contemplam, pela importância e pervasividade de suas ideias fundamentais; assim como a língua materna, as ideias fundamentais da Matemática permeiam a história, a filosofia, as ciências dos seres humanos; de maneira geral, poder-se-ia dizer que elas acompanham as ideias fundamentais das culturas humanas e, assim, a história de uma entrelaça-se com a história da outra (cf. CARAÇA, 1941; D'AMBROSIO, 1990). Esta é uma potente ideia que a escola não somente pode, mas deve explorar, a fim de fortalecer o processo de construção de sentido e significado, de modo a não deixar a sensação de esterilidade ao processo de ensino da Matemática. Como destaca Santos (2008, p. 27-28) com a expressão “consenso contraditório”, é muito comum ter como resposta à pergunta “por que estudar matemática no ensino básico” a afirmação de que a Matemática “é importante”. Desde as leis sobre a educação básica até o senso comum, dentro e fora da escola, ressalta-se a importância da Matemática. Entretanto, quando se pergunta o porquê desta importância, o interlocutor tem dificuldade de responder, mostrando como no ensino básico estas relações ainda são apenas parcialmente exploradas. Bishop, seguindo a mesma perspectiva, introduz a sua pesquisa seminal com as seguintes palavras:

A matemática está na não invejável situação de ser simultaneamente uma das matérias mais importantes para os jovens e uma das menos entendidas. [...] Todos sabem o quanto é importante e todos sabem que é preciso estudá-la. Mas poucos se sentem à vontade com ela. (BISHOP, 1997, p. 3, tradução nossa)¹⁷

A causa desta supracitada contradição justifica o fato de diversos assuntos não estritamente matemáticos serem mencionados ao longo da presente pesquisa.

À luz deste quadro conceitual, no próximo capítulo será tratado o problema da falta de sentido que às vezes o aluno experimenta na aula de matemática: a partir desta inquietude do aluno, analisar-se-á a relação utilidade (prática) e sentido, discutindo-se a ideia de que o sentido é o cerne que fundamenta todo o processo. A aplicação prática de um assunto

¹⁷ “Mathematics is in the unenviable position of being simultaneously one of the most important school subject for today’s children to study and one of the least well understood. [...] Everybody knows how important it is and everybody knows that they have to study it. But few people feel comfortable with it.”

matemático pode não estar presente em uma abordagem, mas não pode faltar-lhe um sentido. O conceito de sentido será analisado numa perspectiva socioconstrutivista, em relação com o conceito de significado: o sentido constitui-se na esfera da pessoa, tendo uma característica eminentemente subjetiva e estando associado a um entrelaçamento entre ideias e experiências do sujeito, no âmbito da metáfora extremamente atual de “rede de conhecimento”; o significado constitui-se como a parte compartilhada entre a dialética dos diferentes sentidos. O lugar em que se encontra esta contínua (re)construção são as narrações: é por meio da narrativa que o sujeito continuamente remolda a própria rede de conhecimentos, acrescentando-a, cortando partes não mais importantes ou dando mais destaque a regiões anteriormente secundárias. Assim, a partir deste quadro epistemológico geral, no terceiro capítulo o foco será direcionado para a matemática, começando com a análise de algumas concepções filosóficas e epistemológicas da Matemática, como aristotelismo, platonismo, consideradas visões arquetípicas a partir das quais derivaram outras visões. A matemática tem uma certa natureza “dualística”, parecendo, às vezes, um campo de descoberta e, em outras ocasiões, mostrando-se como campo de construção: esta dualidade pode ser explorada pelo docente em sala de aula. Atualmente, a visão largamente majoritária na pesquisa é a construtivista e, a sua variante social será discutida e tomada como referência para fundamentar a proposta da presente dissertação: assim, a matemática é entendida como uma criação humana, que faz parte da bagagem cultural de povos e comunidades em várias épocas e lugares. Tal “digressão” sobre a natureza da matemática, mesmo que conduzida de maneira não exaustiva, justifica-se à luz do fato de cada processo de ensino-aprendizagem receber uma grande influência da visão epistemológica que os atores nele envolvido têm, tanto explícita quanto implicitamente.

Figura 3 - Papel da história em destaque

Fonte: Autoria própria.

Nota: Primeiro a abordagem de uma teoria do conhecimento; depois uma visão sobre a matemática; finalmente, uma visão do ensino da matemática

No quarto capítulo, é dado *zoom*¹⁸ para focar a história da Matemática, com algumas concepções e relações entre a história e o ensino da Matemática: a partir de uma análise sobre algumas vertentes existentes (a ideia de recapitulação, a história como elemento narrativo de construção de sentido, a ação mediadora da história entre matemática e educação matemática) será discutida a utilidade da história da matemática em sala de aula, bem como as características possíveis desta relação. Particularmente, a pesquisa e as ideias de Caraça (1941) serão destacadas para valorizar a concepção de uma matemática como algo imprescindível na formação geral do ser humano, centrada nas ideias fundamentais, na capacidade de se conectar com os outros campos do conhecimento (interdisciplinaridade) e no valor formativo da matemática para os “não especialistas”.

Com este quadro teórico, no quinto capítulo será produzida uma proposta de utilização da história da matemática na sala de aula como base para a construção da narrativa e serão discutidos alguns aspectos que podem caracterizar este tipo de atividade: particularmente, será explorado, como primeiro aspecto, o “potencial narrativo” que um acontecimento associado à matemática apresenta, ou seja, o aproveitamento que um certo enredo apresenta do ponto de vista da construção de uma narração cativante, que destaque alguns conceitos relevantes para estudantes. Ademais, será analisado um segundo aspecto, qual seja, o “potencial histórico”: isto é, quando um fato da história da matemática apresenta conexões com outros aspectos do conhecimento humano e como isso pode ser utilizado na aula. No sexto capítulo, serão propostas algumas situações para pensar, a partir de três casos, os conceitos e as ideias elaboradas no capítulo precedente. Um espaço de destaque será reservado à ideia de unificação e da experiência mental em Física, devido à importância que o assunto carrega na história das ciências e, também, pelas possibilidades que abre em sala de aula. Por fim, as considerações finais.

1.1 QUESTÕES DE ESTILO...

Duas questões relativas ao “estilo” desta pesquisa merecem ser destacadas, pelo menos como ato de gentileza ao leitor, para ajudá-lo a situar-se. A primeira tem a ver com o estilo *latu sensu*: apesar do ponto de vista impessoal adotado, em vários momentos o autor utiliza

¹⁸ Este movimento de *zoom* progressivo, começando com uma visão epistemológica geral, passando por uma específica sobre a matemática e posteriormente seguindo por um campo ainda mais específico da história da matemática, é um artifício estilístico que o presente pesquisador tomou de empréstimo da obra-prima “*I promessi Sposi*”, que inicia com uma estrutura parecida, décadas antes do aparecimento do cinema.

um estilo mais coloquial, feito de perguntas retóricas, trocadilhos e outros elementos que se aproximam do registro da língua falada mais do que do da escrita, ainda mais acadêmica.

Isso se deve a uma escolha explícita que remete ao trabalho seminal de Rodríguez (2012), no qual o autor pauta como o trabalho acadêmico deveria posicionar-se em algum ponto entre o texto científico e o ensaio, ou seja, colocando-se entre o rigor ascético e o âmbito da pessoalidade. Esta não fácil “relação dialética” entre as duas polaridades pode, de repente, por um lado alcançar as ideias típicas do mundo “científico”, tais como a reprodutividade e a fundamentação teórica, entre várias outras; por outro, pode garantir mais facilmente que o autor não precise “esconder” seu posicionamento social e cultural, o que, de qualquer maneira, seria uma tarefa impossível. Ainda, o âmbito do ensaio é relativo à prática inventiva e criativa do autor, fazendo emergir e enfatizando tais características originais. O objetivo do ensaio, nas palavras de Rodríguez (apud MAIA, 2016, p. 2), é ser:

[...] uma composição textual argumentativa que permite enunciar elementos concretos e abstratos com suficiente conflito, a fim de facultar que o leitor acompanhe o processo de combinação e transformação de ideias, podendo complementá-las ou delas duvidar, por conta de seu estilo de exposição.

O próprio Rodríguez (2012) apela várias vezes para a construção de uma *narrativa* na produção acadêmica que melhor combine com a ideia de um ponto de vista não fechado, fruto do posicionamento do autor e da consciência de que as “verdades” propostas devem ser acessíveis da maneira mais ampla possível aos leitores (uma plateia que não pode ser restringida ao meio acadêmico) e também de que elas são pontos de passagem transitórios no caminho da pesquisa e da elaboração de ideias. Por tudo isso, o presente estudo objetiva transitar entre o rigor e formalidade de uma produção científica e a criatividade e subjetividade de um trabalho “poético”.

Merece ser destacado o fato de se assumir, tal como Freire (2005) salienta eficazmente, a questão de gênero embutida na língua portuguesa (e no italiano, espanhol, etc.):

Quando falo homem, a mulher está incluída”. E por que os homens não se acham incluídos quando dizemos: “As mulheres estão decididas a mudar o mundo”? Nenhum homem se acharia incluído no discurso de nenhum orador ou no texto de nenhum autor que escrevesse: “As mulheres estão decididas a mudar o mundo. (FREIRE, 2005, p. 67).

E conclui: “A recusa à ideologia machista, que implica necessariamente a recriação da linguagem, faz parte do sonho possível em favor da mudança do mundo” (FREIRE, 2005, p. 68).¹⁹

Assim, pode-se colocar a pergunta: como alcançar tal tarefa de “recriação da linguagem”? O próprio Freire indica possíveis caminhos: usar homem e mulher sempre juntos, usar a expressão entre parêntese tal como “um(a) educador(a)”. Existem outras soluções, desenvolvidas em tempos mais recentes, como o uso do “x” ou do “@” para indicar a ambivalência da palavra, como em “educadorxs” ou “educador@s”.

No âmbito da divulgação matemática, na virada do milênio, Devlin (2002) põe-se o problema numa perspectiva histórica, constatando que:

Historicamente, praticamente todos os matemáticos de ponta foram homens e isto se reflete na quase completa ausência de personagens femininos no livro. Aqueles dias estão, espero, terminados para sempre. (DEVLIN, 2002, p. viii, tradução nossa)²⁰

E aponta esta solução estilística para seu livro: “Para refletir a situação atual, este livro usa tanto ‘ele’ quanto ‘ela’ de maneira intercambiável como pronome genérico da terceira pessoa” (DEVLIN, 2002, p. viii, tradução nossa).²¹

De acordo com esta ideia, a opção feita nesta pesquisa, para não deixar pesada demais a leitura, é alternar o masculino e o feminino; assim, em alguns momentos será usado “alunos” e em outros, “alunas”, bem como será feita menção a “professores” e, também, “professoras”.²²

¹⁹ O próprio Freire relata que tal reflexão foi desencadeada a partir das críticas de várias mulheres em resposta à “Pedagogia do oprimido”, sublinhando, mais uma vez, como o debate, o confronto e a discussão são vitais para o crescimento das pessoas e para o aprimoramento das ideias.

²⁰ “Historically, almost all leading mathematicians were male, and that is reflected in the almost complete absence of female characters in the book. Those days are, I hope, gone forever.”

²¹ “To reflect today’s reality, this book uses both ‘he’ and ‘she’ interchangeably as the generic third person pronoun”.

²² Propositamente, esta reflexão chega no final da introdução, deixando ao leitor algumas páginas em que, talvez, experienciar um pouco de estranhamento ao perceber “professora” e “aluna”, quando ele esperaria “professor” e “aluno”.

2 O ENSINO DA MATEMÁTICA: O PROBLEMA DA “FALTA DE SENTIDO”

Neste capítulo serão abordados os conceitos de sentido e significado, tentando indagar as relações que intercorrem entre eles. Particularmente, será analisado o modo como a atividade em sala de aula pode ser eficaz em construir sentido, bem como o papel central da “narração” para este objetivo.

2.1 SENTIDO E SIGNIFICADO: QUAIS RELAÇÕES?

O conhecimento se dá numa rede onde se entrelaçam prejuízos, intuições, inervações, autocorrekções, antecipações e exageros, em poucas palavras, na experiência, que é densa, fundada, mas de modo algum transparente em todos os seus pontos.
(ADORNO apud MACHADO, 1995, p. 121)

Ao introduzir o problema de definir a(s) epistemologia(s) e de escolher uma delas, Machado (MACHADO; CUNHA, 2016, p. 135) assim se expressa:

A [epistemologia] mais disseminada nos ensina que conhecer é conhecer o significado, que é a parte [com]partilhável na diversidade dos sentidos. O significado, então, somente se constrói por meio do sentido e tudo que se estuda deve fazer sentido.

De forma compacta, Machado destaca como o sentido pertence ao âmbito individual, enquanto o significado remete ao que vários indivíduos poderiam compartilhar, ganhando, assim, um caráter social e objetivo, como será discutido no item 2.3.

Figura 4 - Sentido e significado

Fonte: Autoria própria.

Nota: Existem vários sentidos, sendo eles subjetivos. Na intersecção, espera-se encontrar algo partilhado: o significado.

Assim, o significado é o que se encontra na intersecção dos diferentes sentidos. De forma análoga, Aristóteles, como expresso na *Metafísica*, pensava que a substância estivesse no meio dos diferentes atributos, mas com uma não pequena diferença: a essência aristotélica era independente dos atributos, representando o substrato (“substância”, que está por fundamento) do ser, enquanto o significado somente existe a partir dos vários sentidos. Para Aristóteles, uma cadeira tem vários atributos: ocupa um espaço num determinado tempo, tem determinadas cores e formas, é feita por determinados materiais etc.; por trás destas qualidades mutáveis existe a “cadeiritude”, a essência da cadeira. Assim, numa visão socioconstrutivista moderna, a cadeira em si existe como intersecção de várias percepções (sentidos) e não existe uma “cadeiritude” fora do meio social que produz tal significado. A ideia de significado, assim, ecoa com a imagem de Hans-Georg Gadamer (1900 - 2002) de “fusão de horizontes”, na qual cada um mantém seu ponto de vista, mas, *lá no fundo*, existe algo de compartilhado.

Esta concepção remete a uma ideia de construção do sentido que é histórica e social: social, porque depende dos outros; histórica, enquanto fruto de um processo.

“Fazer sentido” remete, por sua vez, ao papel que o conhecimento do sujeito tem nas relações que novas ideias, experiências e estímulos conseguem estabelecer com a *rede* de conhecimentos, experiências, crenças que já existem no aluno. Por isso, o processo de

conhecer articula-se num complexo mecanismo entre o que já se sabe (e no jeito como isto está organizado numa rede de conhecimento subjetiva) e o que se está aprendendo.

A construção do conhecimento, o “fazer sentido” dos assuntos tratados e a relação deste processo com a dimensão social e pessoal é algo estudado por Paulo Freire. Assim o autor se posiciona sobre este aspecto:

Ensinar exige respeito aos saberes dos educandos. [... a escola tem] o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela – saberes socialmente construídos na prática comunitária –, mas também [...] discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos. (FREIRE, 2015, p. 31).

E conclui:

Por que não estabelecer uma “intimidade” entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? Por que não discutir as implicações políticas e ideológicas de um tal descaso dos dominantes pelas áreas pobres da cidade? Há ética de classe embutida neste descaso? (FREIRE, 2015, p. 31).

Existem, assim, pelo menos dois planos nesta linha de raciocínio: o primeiro, de natureza intelectual, diz respeito especificamente às relações entre ideias e conceitos, apontando para o fato de que a ação do professor precisa entrar em relação fecunda com as redes de significações dos alunos, caso contrário essa ação sofrerá de falta sentido. Entrar em sala de aula e “bater de frente” com o princípio de inércia dos alunos (um corpo não sujeito a força para), tentando impor o princípio inercial de Newton e Galileu (um corpo não sujeito a força continua em seu estado de movimento), à moda da “educação bancária”²³, não vai adiantar muita coisa, a não ser menosprezar os educandos e suas ideias e talvez gerar uma rejeição para com o professor e a matéria.

Em termos cognitivos, a referência está na aprendizagem significativa de Ausubel, com o conceito de “ideia-âncora”, ou seja, um “conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto” (MOREIRA, 2010, p. 2).

Pode-se, então, retomar a metáfora do conhecimento como rede de ideias interligadas e pensá-lo como uma “rede de pesca”, em cujas malhas um novo “peixe” somente poderá

²³ Com esta expressão, Freire refere-se a uma concepção de educação na qual o senhor do saber – o professor – deposita o conhecimento no aluno, da mesma maneira que um investidor depositaria uma mala de dinheiro num banco. Nesta visão, são ausentes ideias como a de problematização, diálogo, construção, debate: o saber é algo inerte e pronto; o educando é algo totalmente passivo.

ficar enroscado se na rede já houver algo a que ele possa “grudar-se”, por afinidade, por oposição, por semelhança ou por outros fatores, não necessariamente cognitivos. Esta ideia-âncora é algo que já existe nos alunos e é fundamental para construir novos conhecimentos e ideias. Nas palavras do próprio Ausubel (1968, p. vi): “O fator individual mais importante que influencia a aprendizagem é o que o aluno já conhece. Verifique isso e o ensine de acordo com isso”.²⁴

O próprio Freire retoma esta ideia e a desenvolve não somente no âmbito cognitivo, mas em toda a dimensão político-social da tensão ensino-aprendizagem:

É preciso que o(a) educador(a) saiba que o seu “aqui” e o seu “agora” são quase sempre o “lá” do educando. [... A educadora] tem que partir do “aqui” do educando e não do seu. No mínimo, tem que levar em consideração a existência do “aqui” do educando e respeitá-lo. [...] Isto significa, em última análise, que não é possível ao(à) educador(a) desconhecer, subestimar ou negar os “saberes de experiência feitos” com que os educandos chegam à escola. (FREIRE, 2005, p. 59).

Ao falar especificamente de Matemática, Bishop e Gofree reforçam:

O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo. Uma nova ideia é significativa na medida em que cada indivíduo é capaz de a ligar com os conhecimentos que já tem. As ideias matemáticas formarão conexões de alguma maneira, não apenas com outras ideias matemáticas como também com outros aspectos do conhecimento pessoal. Professores e alunos possuirão o seu próprio conjunto de significados, únicos para cada indivíduo. (BISHOP; GOFREE apud PONTE et al., 1997, p. 88).

Aqui, de uma única vez são ressaltados os conceitos de conhecimento como (re)criação de conexões entre ideias novas e antigas, podendo avaliar a significatividade de uma nova ideia com base na qualidade e quantidade de conexões que a dinâmica da sala de aula permite ao sujeito construir. Tais ligações não serão limitadas a outros conceitos matemáticos, mas serão referentes a qualquer outra ideia que a narrativa da sala de aula consiga favorecer. Por fim, é deixado bem claro que cada indivíduo possuirá seus sentidos, pessoais e específicos: a aposta da ação docente é que exista uma parte compartilhada entre eles que possa ser chamada de significado.

É central a relação entre as novas ideias e as que a aluna traz para a sala de aula: estas são fundamentais para que aquelas se “linkem” e “façam sentido”. Mesmo que as ideias

²⁴ “The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly.”

trazidas estejam “erradas”, elas são o ponto de partida para trabalhar a rede de significados das alunas. Monteiro (2004, p. 24, grifo da autora) aproveita Menocchio, protagonista da obra *O queijo e os vermes*, de Ginzburg, para exemplificar este ponto: “o que Menocchio compreende *mal* é, na verdade, o que ele compreende de outro modo”, dependendo de seu referencial, de suas experiências e crenças. Por isso, é fundamental a atividade da professora para relacionar tais referenciais com os trazidos para a sala de aula, para poder “reconfigurar” a rede de ideias da aluna.

Ausubel estaca também como, de maneira parecida à *World Wide Web*²⁵, a rede de conhecimentos não é estática, mas se modifica continuamente, mediante várias dinâmicas: por exemplo, algo recém-entrado na rede pode, com o tempo, tornar-se uma ideia-âncora; ou, em movimento contrário, um centro atrator pode perder importância, passando a ter papel secundário ou podendo até ser esquecido. E, claramente, na rede – tanto informática quanto cognitiva – não existem compartimentos, tampouco uma organização hierárquica: como dizia Giordano Bruno a respeito do universo e dos infinitos mundos, não existe nem centro nem periferia, mas sim, *centros de interesse*.²⁶

Por isso, a proposta deste estudo é explorar a história da Matemática com a finalidade de “extrair” dela as ideias fundamentais ligadas a determinadas descobertas e criações e, a partir disso, construir uma narrativa por meio da qual se possa construir o significado de tal assunto. A busca das ideias fundamentais se rende interessante à luz do conceito de ideia-âncora de Ausubel. A partir das ideias de Caraça (item 4.4), uma ideia fundamental é algo que:

- extrapola um tópico isolado de um único assunto curricular;
- extrapola uma única matéria;
- deve ser acessível pela linguagem materna, pelo menos em um primeiro momento;
- deve conter uma parte de arbitrariedade.

²⁵ A rede mundial de internet baseia-se tecnologicamente na rede militar estadunidense ARPANET. Esta tecnologia tinha a resiliência como objetivo: a capacidade de manter dois nós em comunicação mesmo a frente de várias conexões indisponíveis. Com a chegada e a difusão da internet, além deste aspecto técnico, que permanece na infraestrutura informática que atua como substrato do funcionamento da rede, adicionou-se o fato de que os *sites* e as páginas variam o seu “peso” dependendo dos usos dos usuários. Por exemplo, *sites* como Twitter e Facebook ganharam cada vez mais pesos, enquanto outros, como Yahoo, perderam uma parte do peso adquirido. Do ponto de vista topológico (a estrutura de *link* que forma a rede), o número de conexões que ligam um *site* com um outro muda com o variar do tempo, também de acordo com a importância relativa entre eles, por exemplo, o motor de pesquisa Google utiliza (entre diferentes ferramentas) uma modelagem que conta e pesa estas conexões para avaliar a importância de um *site*.

²⁶ Na teoria informática das redes, seriam os chamados “supernós”.

Por exemplo: a data da morte de um general de Alexandre da Macedônia com certeza não é uma ideia fundamental da História, pois é algo estreitamente circunscrito e que não estabelece relações com outros conceitos; ao contrário, o mecanismo de cooptação dos *homus novus* na república romana²⁷ é algo fundamental na análise histórica, porque explica uma dinâmica político-social que se repetirá ao longo de toda a história da humanidade. Assim, a racionalização de uma divisão de radicais é algo extremamente local na Matemática, enquanto a ideia de proporcionalidade (direta) espalha-se em geometria (semelhança), no estudo de função (linearização), na resolução de problemas (“regra de três”).

Porém, espalhar-se no âmbito da mesma matéria não é suficiente: é necessário abstrair esses limites e transbordar para outros campos do conhecimento: por exemplo, a ideia do infinito (item 6.3) facilmente escapa do âmbito da Matemática, indo para a Filosofia, a Física, a Literatura, Artes Figurativas, etc. Nenhuma matéria curricular pode ter o *copyright* sobre as ideias fundamentais.

O terceiro elemento corresponde à ideia de que, se algo é importante, deve ser passível de explicação acessível, sem tecnicismos. Por exemplo, a ideia de energia é intuitivamente explicável ligada ao movimento ou à possibilidade de fazer movimento. A partir desta ideia simples, é possível construir uma teoria termodinâmica, uma análise das reações químicas, avaliar desenvolvimento de sistemas físicos, construir a ideia matemática de potencial... A ideia fundamental tem de ser explicável de maneira simples e em linguagem comum; suas elaborações nas diferentes matérias e as consequências destas elaborações, não necessariamente.

Existe um último aspecto, talvez o menos intuitivo, mas não por isso menos importante: a escolha das ideias fundamentais deve ser, até certo ponto, uma escolha em que o docente possa exercer sua função de professor, ou seja, possa exercer sua autonomia. Este fato pode ser percebido comparando os títulos dos livros de Caraça e Costa, que, num intervalo de poucos anos, publicaram, respectivamente, “Conceitos fundamentais da Matemática” e “As ideias fundamentais da Matemática”. Os títulos apontam praticamente para a mesma coisa: Caraça chama de conceitos aquilo que Costa chama de ideias. Mas a diferença – sutil, porém, fundamental – é a presença do artigo determinativo no livro de Costa. Este artigo indica que as ideias fundamentais são aquelas indicadas na obra, enquanto o trabalho do Caraça indica

²⁷ Era comum, na época republicana, que homens políticos sem linhagem ganhassem poder e *status* colocando-se como liderança da plebe, ou seja, dos setores menos favorecidos da sociedade romana. Uma vez alcançada uma posição de força, eles negociavam a entrada na elite (cooptação), traindo, assim, os seus objetivos iniciais.

genericamente ideias (“conceitos”), deixando um espaço para a autonomia da professora em sala de aula.

Por exemplo, o conceito de “energia” pode bem ser considerado fundamental. Entretanto, uma docente poderia também decidir trabalhar com este conceito considerando fundamental a ideia de conservação. A escolha, com todas as honrarias e encargos decorrentes, somente pode ser da professora: tal escolha faz parte do “fundo insubornável” (ORTEGA Y GASSET, 1946) da professora e de sua ação docente.²⁸ A professora é a autora de sua atividade com os alunos: como atesta a etimologia da palavra *auctus*, de *augeō*, aumentar, é ela que cria coisas novas e por isso “aumenta” o mundo, no sentido de enriquecer. Com isso, ela é responsável por aquilo que acontece em sua aula.

Além destas questões ligadas a um nível “puramente” epistemológico e intelectual, existe também um segundo nível que Freire explora e que tem a ver com a origem social da rede de conhecimento. Assim, se é importante que o professor dialogue com as ideias prévias das alunas, montando atividade e discussões (narrativas) para poder discutir e reelaborar as ideias fundamentais, é também necessário que o meio social do qual estas ideias provêm seja trazido à tona, discutido “à luz do sol” e explicitamente, para as alunas verem como a escola dialoga com a sua realidade, como existem razões que explicam as coisas do jeito que estão: enfim, para trabalhar com elas a ideia segundo a qual “o mundo não é, está sendo” (FREIRE, 2015, p. 76).

Parece que existe certa afinidade entre o conceito de ideia fundamental esboçado acima e o de “tema gerador” elaborado por Freire (2001, p. 93), que assim o define:

Estes temas se chamam geradores porque, qualquer que seja a natureza da sua compreensão como a ação por eles provocada, contêm em si a possibilidade de desdobrar-se em outros tantos temas que, por sua vez, provocam novas tarefas que devem ser cumpridas.

Ao fornecer esta definição, o educador ressalta o caráter e a relevância social do tema gerador; mas é exatamente isso que sustenta a importância de uma ideia fundamental: o fato de ser desencadeadora de vários outros temas, matérias e assuntos. Ela é fundamental porque é “radical”, no sentido de que está na raiz da realidade e por isso a condiciona profundamente. Por exemplo, em matemática a ideia de igualdade desencadeia várias outras ideias (equivalência, congruência...) presentes desde a “definição” de número até os conceitos de

²⁸ A este respeito, é muito indicativa a fala da professora no filme *Conducta* (Uma escola em Havana, 2014) que, discutindo acaloradamente com seus colegas, reivindica essa autonomia como imprescindível, afirmando que o dia em que não puder mais exercê-la será o dia em que ela sairá da escola.

topologia. Mas, também é um conceito que trabalha nos fundamentos de como funciona e como se apresenta a sociedade: discutir a ideia de igualdade significa, cedo ou tarde, extrapolar o âmbito de discussão e abranger situações mais amplas.

2.2 “PROFESSOR, PARA QUE SERVE ISSO?”

[...] sempre que o professor de Matemática anuncia o estudo de um novo tema, surgem questões como "pra que serve isso?", "qual a utilidade prática?", "onde eu vou usar este conhecimento?".

Não há professor que tenha logrado escapar de perguntas desse tipo. E por essa via, a febre do utilitarismo costuma eivar o ensino da Matemática.

(MACHADO, 2013, p. 11).

A aritmética não era o meu forte, para mim parecia que os problemas não tinham nenhum sentido: quantas frutas se obtêm quando enchemos um cesto com três quartos de maçãs, um oitavo de pêssegos e dois sextos de outra coisa? Eu não via o problema; perguntava-me por que teriam enchido um cesto daquela forma; não encontrava enfim uma solução.

Marguerite Yourcenar (apud GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 258-259).

Figura 5 - Calvin explica o “sentido” da matemática para Haroldo

Fonte: Watterson (1990, p. 38).

Vários professores de matemática passam pela experiência de ouvir a pergunta de algum aluno: “Mas para que serve isso?”. O discente expressa um “mal-estar” perante as atividades propostas em aula e o ressalta com o questionamento sobre a falta de uma

“utilidade prática”. Tal utilidade existe, mas não necessariamente é este o caminho para que o aluno sintasse-se satisfeito: uma equação de segundo grau, por exemplo, serve para descrever aproximadamente as trajetórias parabólicas tanto da bola de basquete rumo ao ponto quanto do projétil disparado por um canhão, mas não resulta disso que os grandes jogadores de basquete da História fossem expertos matemáticos e rápidos solucionadores de equações! Ou seja, pode-se jogar bola mesmo não conhecendo Matemática.

Aquilo do qual a aluna está reclamando ao fazer sua pergunta não é necessariamente a falta de uma aplicação prática, mas, de forma mais geral e abrangente, a falta de um sentido, algo que conecte as ideias abordadas em aula com ideias, experiências, emoções que fazem parte de sua rede cognitiva.

Por exemplo, Gómez-Granell relata esta experiência do escritor Phillip Roth com a matemática:

[Problema proposto pelo pai do escritor Philipp Roth quando ele era criança]
Um vendedor de roupas que queria se livrar de um casaco que já saíra de moda baixou o preço de \$30 para \$24. Como não conseguiu vendê-lo, voltou a baixar para \$19,20. Não conseguindo comprador, baixou mais o preço e dessa vez conseguiu vendê-lo... Bem, Nathan, por quanto ele vendeu para que o último preço fosse coerente com os anteriores?
[Comentário do escritor] “No dia seguinte, enquanto minha mãe assobiava e lavava as camisas do meu pai, eu sonhei acordado com o vendedor de roupa. Para quem o comerciante teria vendido o casaco? Teria sido convidado para um baile a fantasia? Quem o teria convidado? Meu pai ficava arrasado vendo-me completamente entregue às fantasias e a detalhes sem importância – como geografia, personalidade, intenção –, em vez de à serena beleza da solução aritmética. Acreditava que eu não era inteligente; e tinha razão. (ROTH apud GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 259).

Assim, a autora mostra como um aluno pode “fugir” do significado “matemático” de um problema para produzir um próprio sentido: para Roth, a fascinação não está na pergunta sobre o preço final do casaco, mas sim nas “histórias” que o casaco poderia contar. O fato de o pai dele não dar espaço para esta dimensão associada ao problema, fez Roth chegar à amarga conclusão de “não ser inteligente”.

Ou seja, o sentido que o pai propôs para o problema na aula com o filho não conseguia dialogar com o sentido que o menino percebia: não foi construído um núcleo comum entre os dois para que fosse encontrado um significado. E a culpa disso deve-se ao pai, que não conseguiu fazer dialogar estas duas visões em busca de uma síntese que levasse em conta tanto o interesse da criança, quanto o do pai.

Ressalte-se mais uma vez que, justamente pelo fato de o aluno trazer para a aula sua própria rede de significações, o sentido que dará aos assuntos propostos não poderá coincidir integralmente com o significado que o professor gostaria de trazer à tona: sempre existirá uma tensão, uma dialética entre o sentido que o aluno percebe e o sentido proposto pelo professor. A aposta na qual qualquer discussão se baseia, mesmo que tacitamente, é que poderá existir um núcleo compartilhado entre eles: o significado.

A proposta desta pesquisa é fornecer chaves para que, a partir de uma análise sobre a história da Matemática, o docente possa ter mais possibilidades para construir um significado por aquilo que está propondo para seus alunos, por meio da construção de uma narrativa.

2.3 EM BUSCA DE SENTIDO: UMA LONGA “NARRAÇÃO”

[A narrativa] explora os dilemas humanos sob o prisma da narração. (BRUNER, 2014, p. 34).

Tudo aquilo que não invento é falso.
Manoel de BARROS (apud PASINI, 2016, p. 205).

Figura 6 - “O homem narrativa”

Fonte: Ewing e Ward (2015, p. 14).

Se o pensamento de Bruner pudesse ser resumido em uma única frase, esta seria provavelmente: “O sentido se dá através de uma narração [... pois] a narrativa, incluindo a ficcional, dá forma para as coisas no mundo real e, muitas vezes, oferece credenciais de acesso à realidade” (BRUNER, 2014, p. 18).

A ideia de uma realidade externa à qual se pode ter acesso por intermédio de uma “estrutura”²⁹ que, por sua vez, a molda e lhe dá sentido, é tão fascinante quanto difundida ao longo do pensamento humano.

Kant, por exemplo, achava que o ser humano pudesse acessar a realidade fundamentalmente pelas categorias de tempo e espaço, que representariam elementos *a priori* (as chamadas “formas *a priori* da sensibilidade”) por meio dos quais o sujeito receberia os dados da experiência. É importante ressaltar que, de acordo com esta visão, não existe o dado de experiência puro, porquanto ele sempre estará mediado pelas formas do tempo e do espaço do sujeito. E o que é colocar um dado experiencial no filtro do espaço e do tempo, senão colocá-lo numa narração, mesmo que em um nível “atômico”?³⁰

E quando Marx analisa a ideologia e sua relação com a estrutura social, expressa isso por meio do famoso aforismo segundo o qual “A ideologia dominante sempre foi a ideologia da classe dominante”.³¹ Na visão do filósofo de Tréveris, a ideologia é, então, uma narração produzida por quem detém o poder (econômico e, conseqüentemente, político e cultural) e que se torna hegemônica, sendo por isso compartilhada pelos outros membros da sociedade. Esta acepção confere um papel negativo ao termo “ideologia”, entendido assim como um elemento que esconde a realidade dos fatos; nem por isso ela deixa de ser uma narração, uma construção que produz significado, mesmo que “errado” ou alienante.

Falando de narrativas com conotação negativa, o precursor desta posição tem de ser encontrado no próprio Platão. Em sua visão, o mundo nada mais é do que uma imitação imperfeita do belo, verdadeiro e justo³² mundo ultraceleste ideal. O objetivo do filósofo é

²⁹ Em termos informáticos, poder-se-ia dizer “interface”, que justamente representa uma mediação entre dois elementos de outra forma incomunicáveis. Por exemplo, uma interface gráfica (GUI ou *graphic user interface*) permite a comunicação entre as rotinas executadas por um computador e um ser humano.

³⁰ “Protonarrativa” talvez fosse um termo pertinente: não é, obviamente, uma narrativa, mas também não é um dado “puro” (se é que podem existir dados “puros”). É nesse sentido que é utilizado o termo “atômico”, de acordo com a etimologia de “indivisível”: “o dado” é a unidade mínima da informação (não existe meio dado!), mas ela não pode ser “pura”, haja vista que já vem acompanhada por uma filtragem por meio do espaço e do tempo, que são coordenadas de uma narrativa. Assim, o dado misturado ao espaço e ao tempo representa um “pedaço” de narrativa “indivisível”.

³¹ Este famoso mote é uma derivação das teses contidas em Marx e Engels (1999, p. 29): “Os pensamentos da classe dominante são também, em todas as épocas, os pensamentos dominantes, ou seja, a classe que tem o poder material dominante numa dada sociedade é também a potência dominante espiritual.”

³² Os três adjetivos são as referências às três ideias fundamentais do Hiperurânio: beleza, verdade e justiça.

conseguir vislumbrar essa verdade para ter acesso às ideias “verdadeiras” e não se deixar deter pela simples (e corrompida) imitação. O que dizer da poesia e, em geral, da arte, entendida como reprodução de uma reprodução? Todo o mal possível, obviamente!

É indicativo perceber como, apesar de tal aversão pela forma poética, o próprio filósofo da academia recorria ao mito para explicar suas ideias: há o mito da biga, no qual tenta dar uma explicação para o funcionamento da alma humana, com suas paixões e sua racionalidade; o mito do demiurgo, que relaciona o mundo sensível com o mundo das ideias; o mito da caverna, no qual esclarece tanto uma epistemologia quanto a função social do filósofo.

Pois bem, parece que Platão criticou tanto a poética (uma forma de narrativa), culpada de desviar do caminho em busca da verdade, que não percebeu que, ao anunciar a sua verdade, ele mesmo estava construindo uma narração!

Bruner reconhece este caráter de multiplicidade da narrativa: nunca existe uma única narração. Parece que Ricœur (1965), um dos mestres da hermenêutica do século XX, colocou isso com extrema força no famoso trecho em que associa, num curioso “triunvirato”, Marx, Nietzsche e Freud, chamando-os de “mestres da suspeita”, indicando que abaixo de uma camada mais ou menos racional de um texto – ou, poder-se-ia acrescentar, de uma narrativa – estão presentes elementos que condicionam seu significado. Respectivamente, a correlação de forças sociais e produtivas (Marx), a vontade de potência (Nietzsche) e o subconsciente (Freud) agem “por trás dos bastidores” e condicionam a consciência da pessoa e as narrativas que o sujeito produz. Radford (2014, p. 106) se expressa numa perspectiva parecida: “Não há uma história, mas sim histórias. E as histórias são políticas no sentido que nós não podemos atentar para tudo, assim nossas histórias deixam de lado acontecimentos, vozes e presenças”.³³

Assim também se posiciona Bruner (2014, p. 20): “A grande ficção é subversiva no espírito – não é pedagógica”. A palavra “subversiva” é usada aqui por Bruner remetendo ao campo semântico da epistemologia, entendendo assim como uma narração pode fazer repensar um fato considerado óbvio sob uma nova perspectiva. Também a palavra “pedagogia”, na intenção do autor estadunidense, é bem específica: alude ao campo do ensino intencional, praticado com modalidade analítica e racional. Daí a contraposição entre a subversão do espírito e a pedagogia.

³³ “There is no history, but histories. And histories are political in the sense that we cannot focus on everything and that our histories leave in the margins events, voices and presence.”

Posteriormente, Bruner retoma o assunto ao remarcar o caráter criativo da narrativa, isto é, o fato de que uma história abre o espaço para criar mundos possíveis³⁴. E conclui: “O romance [*As vinhas da ira*] de John Steinbeck, assim como o de Harriet Beecher Stowe [*A cabana do Pai Tomás*], questionou se a vida tinha que ser daquele jeito. É este o germe da subversão” (BRUNER, 2014, p. 104).³⁵

Assim, há espaço para cogitar um possível diálogo com outros autores em busca de sentidos mais amplos. Por exemplo, o romancista peruano Scorza (1985) diz, por meio de uma personagem, que “é imprescindível fazer política e poesia. Quando um revolucionário não é poeta, acaba por ser um ditador ou um burocrata, traidor dos próprios sonhos”. Aqui, “revolucionário” pertence a um campo semântico explicitamente social e político, mas mesmo assim está presente uma forte referência à poesia como elemento fundamental. Mas o que é a poesia, senão uma narrativa que “oferece mundos alternativos que lançam nova luz sobre o mundo real” (BRUNER, 2014, p. 19)?³⁶

Outro exemplo pode ser representado pelo pensamento de Freire: a contraposição, sugerida por Bruner, entre uma função revolucionária de perspectiva e uma abordagem pedagógica seria uma falsa oposição, enquanto a ação pedagógica “libertadora” procuraria justamente desencadear processos de mudança na consciência dos sujeitos envolvidos. Se o patrono da educação brasileira tivesse se expressado em termos de narrativas, provavelmente teria encarado sua prática pedagógica como a construção coletiva de narrativas subversivas e revolucionárias, com os oprimidos como protagonistas (FREIRE, 2001). E a função transformadora da educação seria justamente abrir espaços alternativos a partir da leitura do mundo e da possibilidade de imaginar outros mundos, aquilo que ele chama o “inédito viável”.

³⁴ Qualquer narração é construída sobre um jogo de espelhos entre o que acontece e o que poderia ter acontecido, o real e o imaginário, o *facto* e o *ficto*. Ver também Machado (2013a, p. 12).

³⁵ É interessante ressaltar, mesmo que fugazmente, outro aspecto de uma narrativa potente, compartilhado com a obra poética: o fato de que o sentido é construído por meio de uma dialética autor/usuário na qual nem sempre a intencionalidade original do autor concretiza-se no usuário. É o caso, por exemplo, do romance de Steinbeck, construído para mostrar (e suportar) a bondade das medidas rooseveltianas do *New Deal*. Mesmo assim, o elemento forte de tal narração veio a ser a descrição das condições de vida dos agricultores nos anos 1930, pós-grande depressão, com toda a carga de violência, precariedade e desumanidade. Outro exemplo de narrativa que fugiu às intenções de seu ator é a canção de Raul Seixas *Sociedade alternativa*: apesar das contínuas referências exotéricas e “místicas” que marcam claramente a sociedade do título com uma visão místico-religiosa, os jovens dos anos 1970 (a canção estreou em 1974) logo a receberam e usaram como protesto contra a ditadura militar. A polissemia da produção artística, da qual a narrativa é parte, não é somente um fato individual, mas, e sobretudo, cultural e social.

³⁶ Não casualmente, Machado (2015) alerta sobre como uma utopia que se pretende realizada abre a porta para as piores violências: por que tolerar visões diferentes quando já se vive num mundo perfeito? Assim, a proposta de Scorza, de conjugar revolução e poesia, parece uma tentativa para manter sempre aberta a porta para o dissenso e para imaginar outros mundos além do real.

A ideia de narrativa como algo intimamente ligado não somente ao significado, mas à própria língua é uma ideia que pode ser encontrada, por exemplo, num romancista que tem títulos para falar do assunto: J. R. R. Tolkien. Quando jovem, o escritor britânico entrou em contato com o esperanto e, provavelmente, o interesse que manteve com este experimento de “idioma artificial” deveu-se a seu propósito de criar, em sua obra, idiomas fictícios, como, por exemplo, o élfico falado pelos personagens de *O senhor dos anéis*.

Mas depois dos 40 anos, Tolkien começou a tomar certa distância desta experiência, sustentando o interessante fato de que os idiomas artificiais estão mortos, “muito mais mortos do que outros idiomas nunca mais usados, porque seus autores nunca inventaram lendas nestes idiomas”.

Guglielmi, sob o pseudônimo de Wu Ming 4, escritor e estudioso de Tolkien, sustenta que a poética do linguista britânico baseia-se na coincidência entre mitologia e língua:

Para Tolkien não pode existir uma língua sem *histórias*, o mito é linguagem e a linguagem é mito, trata-se de aspectos sincrônicos e coincidentes da atividade humana. Uma língua sem histórias é uma língua morta, [...] artificial [...]. Tanto isso é verdade que, para dar consistência e credibilidade às suas invenções linguísticas³⁷, Tolkien empenhou-se na construção de um *legendarium*³⁸ inteiro, desde a cosmogonia até o tempo histórico. (WU MING 4, 2016, tradução nossa, grifo nosso)³⁹.

Parece incrível, mas o próprio Tolkien deixa bem clara esta relação, escrevendo que o universo do *Senhor dos anéis*, com todos os livros dos quais é formado, nasceu como uma tentativa de criar um mundo, uma mitologia, que sustentasse os idiomas inventados por ele. Ou seja, como um doutor Frankenstein, ele precisou criar histórias para infundir “vida” nas suas criaturas (os idiomas).

Assim, no caso do escritor britânico pode-se perceber a forte ligação de mão dupla existente entre a construção mítica (ou seja, de uma narrativa) e a função de uma língua: para contar um mito é preciso um idioma, mas é através do mito que a língua ganha consistência e *sentido*.

³⁷ O autor trabalhou sobre mais de dez idiomas fictícios ao longo de sua vida.

³⁸ É o nome que o próprio Tolkien usa para indicar o *corpus* de suas obras *fantasy*.

³⁹ “Per Tolkien non può esistere una lingua senza storie, il mito è linguaggio e il linguaggio è mito, si tratta di aspetti sincronici e coincidenti dell’attività umana. Una lingua senza storie è una lingua morta, [...] Tanto è vero che per dare spessore e credibilità alla propria invenzione linguistica, Tolkien si impegnò nella costruzione di un intero *legendarium*, dalla cosmogonia all’avvento del tempo storico.”

Também o campo da ciência em geral e da Matemática em particular apresenta vários pensadores que podem ser colocados em diálogo com a centralidade bruneriana das narrativas no processo de significação.

A mudança de paradigma que Kuhn (1970) associou às “revoluções científicas” refere-se a um jeito de olhar para a ciência no qual o “fato puro”, o experimento “asséptico” não existe mais, porque, para dar sentido a tudo isso, o cientista que lê os dados e prepara a experiência utiliza um paradigma, um particular tipo de olhar sobre o mundo, no qual consegue encaixar dados experimentais, perguntas e experimentos. E o que é este paradigma senão uma ampla narração que ele tem sobre o mundo? Quando, por motivos não somente internos à ciência, um paradigma entra em crise, abre-se espaço para que uma nova narração possa tornar-se dominante e os velhos e novos dados, antigos e novos experimentos, passam a fazer sentido (ou não) dentro do novo paradigma.

Ogborn (2008) aponta algo parecido ao analisar o currículo científico no ensino fundamental:

Aprender é concebido como um processo no qual o sujeito torna-se racionalmente convencido, por meio do poder do pensamento lógico. Assim, o currículo é planejado em torno de “conceitos centrais” e das relações lógicas entre eles. Eu penso que seria melhor construir o currículo das ciências em torno das “histórias que a ciência tem de narrar sobre como as coisas são”. (OGBORN, 2008, p. 12, tradução nossa)⁴⁰.

E, ainda:

O conhecimento científico consiste em histórias sobre o mundo, de contos sobre o desconhecido, escondidos dentro ou atrás do conhecido. Estas histórias evocam as imagens do mundo feitas pela ciência. E estas histórias respondem a perguntas como “o que é a vida?”, que são importantes para as pessoas. (OGBORN, 1994, p. 19, tradução nossa)⁴¹.

As ideias fundamentais (*central concepts*) são os centros da construção do conhecimento, mas não organizam apenas relações lógicas entre eles, mas sim a partir das narrativas (*stories*) que a (história da) ciência tem a oferecer. Trata-se, de fato, de histórias

⁴⁰ “Learning is understood as a process of the learner becoming rationally convinced, by the power of a logical system of thought. This leads to a curriculum planned around “central concepts” and the logical relations between them. I argue that it would be better to construct the science curriculum around “stories that science has to tell about how things are”.

⁴¹ “Scientific knowledge consists of world-stories, of tales of the unknown, hidden inside or behind the known. These stories evoke the world-pictures which science has made. And these stories answer questions, such as ‘What is life?’, which are important to people.”

que passam visões sobre o mundo (*world stories*), produzidas pelas ciências ao longo dos séculos.

Segundo Pessis-Pasternak (1993, p. 27), Thom “pôs em dúvida a preponderância da experiência, afirmando o primado do imaginário e da ‘teoria’ como descrição real do mundo físico, o qual não pode ser aprendido em sua totalidade pela prática experimental”.

Esta importância sobre o “imaginário” e a “teoria” em detrimento da experiência, além de ser uma forte afirmação em contraste com o sentido comum – que pretende a ciência moderna iniciada com o método experimental de Galileu –, destaca mais uma vez a importância de uma narração para entender o mundo. E o que são o *imaginário* e a *teoria*, senão uma forma de narrativa?

Em outra entrevista, Pessis-Pasternak volta sobre o tema realidade e interpretação, obtendo o seguinte posicionamento de Atlan:

Há uma grande diferença entre afirmar que existe sempre uma realidade e conhecê-la [...]. Para mim pode sempre haver um maior aprofundamento, e por isso não há “realidade última”. A realidade deve ser interpretada, ela é feita daquilo que chamo “interpretandos”. (PESSIS-PASTERNAK, 1993, p. 67).

Mais uma vez, aponta-se para a ideia de que a realidade “em si” somente pode ser acessada por um ato narrativo – uma interpretação – e que nenhum destes pode ser considerado definitivo.

Também no campo acadêmico, a necessidade de escrever uma dissertação colocando várias referências a diferentes autores e obras representa uma forma de narrativa que permite construir o significado dos conceitos abordados. O termo “dialética”, por exemplo, remete a uma quantidade enorme de aspectos: uma técnica retórica, várias posturas filosóficas diferentes, um tipo de lógica... Dependendo dos autores citados (Heráclito, Platão, Hegel, Marx), seu sentido ficará esclarecido graças à narrativa na qual estará inserida. Uma narrativa na qual *herói* e *vilão* não são cavaleiros e dragões, mas filósofos e pensadores que se enfrentam a “golpes” de ideias.

Apesar de uma “narração” bem enraizada, de acordo com a qual as ciências em geral e a Matemática em particular sejam campos de conhecimentos objetivos onde o que conta são fatos (aparentemente) incontrovertíveis e teoremas (supostamente) inapeláveis, parece que a situação é bem mais sinuosa. Resultados de experimentos e números, por si só, não têm

grande significado: eles assumem significado porque, explícita ou implicitamente, estão inseridos numa narração.

Mesmo compreendendo a Matemática de acordo com as tradições mais “formais”, haveria alguém sustentando o paralelismo entre Matemática e narrativas. Por exemplo, Machado (apud ARANTES, 2014, p. 68-70) estabelece uma comparação entre um problema de matemática e o conto de fadas: os dois começam com “Era uma vez...” (ou, “Seja r uma reta e P um ponto fora dela...”) e, depois de várias “aventuras” terminam com “e viveram felizes para sempre” (ou “QED”). Stewart insiste neste ponto ao dizer que a demonstração matemática é

[...] uma história matemática com o seu próprio fluxo narrativo. Tem começo, meio e fim. E, muitas vezes, tem tramas secundárias, ramificando-se do enredo principal, cada uma com suas próprias resoluções. [...] Provas assemelham-se a narrativas também sob outros aspectos: com frequência têm um ou mais personagens centrais – ideias, em vez de pessoas, é claro – cujas complexas interações levam à revelação final. [...] Mas uma prova não é apenas uma lista de deduções e a lógica não é o único critério. Uma prova é uma *história* contada para e dissecada por pessoas [...] cuja meta principal é provar que o narrador está errado. (STEWART, 2014b, p. 24, grifo nosso).

Assim, os elementos de Euclides bem poderiam estar na prateleira dos livros de aventuras!

Mas a Matemática, como será abordado no item 3, não é feita somente por axiomas, teoremas, demonstrações e corolários. Estes são quase a proverbial “ponta do *iceberg*”, sob a qual estende-se um mundo de erros, intuições, correções, descobertas, disputas, heterodireção (ideias filosóficas, religiosas, razões materiais), e este *corpus*, intimamente ligado à história da Matemática, pode fornecer a matéria-prima para a elaboração de narrativas por intermédio das quais é possível construir o significado em sala de aula.

O próprio Struik (1989, p. 76), ao discutir os três problemas da geometria grega⁴², afirma que “as formas anedóticas pelas quais estes problemas nos foram transmitidos [...] não nos devem levar a ignorar a sua importância fundamental”. Muito pelo contrário, “[...] acontece frequentemente um problema fundamental ser apresentado na forma de uma anedota

⁴² A quadratura do círculo, a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo. Os três foram resolvidos já no mundo helenístico, mas usando métodos mais complexos do que a utilização unicamente de régua não graduada e compasso.

ou de um *puzzle* – a maçã de Newton⁴³, a promessa não cumprida de Cardano ou os barris de vinho de Kepler são exemplos disso”.

Parece que o historiador da Matemática tem aqui um vislumbre de que a anedota (uma pequena narrativa) seja algo muito presente na história da Matemática e das ciências para sublinhar e destacar uma importante inovação, o ponto final do surgimento de uma nova ideia ou de um problema fundamental: assim está sendo esboçada a função da narrativa de criar um sentido para tais assuntos.

A figura do narrador, que às vezes se mistura com a do autor, merece certa análise: ele é responsável pelo foco, pelas características da história e, de modo geral, expressa um ponto de vista sobre os acontecimentos, escolhendo se e como apresentar os fatos.⁴⁴ O holofote sobre o narrador remete diretamente à delicadeza da posição ética do professor ao montar a narrativa. Um exemplo claro disso na encruzilhada entre a Matemática e a Política é fornecido por Bobbio (1985), ao relatar as diferentes posições políticas dos filósofos Hobbes e Spinoza sobre a natureza e as características do Estado. Tal comparação é particularmente importante, pelo menos por dois motivos: em primeiro lugar, porque ambos os pensadores, filhos do próprio tempo racionalista e cartesiano, expressam a ideia de aplicar à discussão política o método matemático, partindo de princípios primos e, por intermédio de um raciocínio estritamente lógico, chegar às conclusões. Em linha com este programa, a obra de Spinoza chama-se *Ética demonstrada à maneira dos geômetras*. Em segundo lugar, os dois autores chegam a conclusões diametralmente opostas, apesar de partirem de princípios primos parecidos: Hobbes, com seu *Leviatã*, propõe não somente uma monarquia, mas um estado absolutista, enquanto Spinoza defende a democracia e o Estado de direito. Bobbio assim explica:

O que os separa é a diferente concepção do fim último do Estado, que para Hobbes é a paz e a ordem, e para Spinoza, a liberdade, diferença que, por sua vez, baseia-se numa diferença mais profunda que permite, mais que qualquer outra, contrapor uma teoria à outra: a diferença quanto à perspectiva principal a partir da qual qualquer escritor de coisas políticas coloca-se para expor seu pensamento, e que permite contrapor os escritores que se colocam do lado do príncipe, ou seja, do lado dos governantes, para justificar o direito destes de comandar e o dever dos demais de obedecer, e os escritores que se colocam do lado do povo, ou seja, do lado dos governados, para defender o direito de não ser oprimidos e o dever dos governantes de emanar leis justas.

⁴³ Ver item 6.4.

⁴⁴ Do ponto de vista da técnica literária, distingue-se o narrador em interno ou externo à história, ou seja, se é ou não um dos personagens; ele pode também ser observador ou onisciente, ver somente aquilo que a cena mostra ou ver simultaneamente outros lugares, outros tempos (passado e futuro) e até pode ler o pensamento dos personagens.

[...] A disputa entre o partidário da monarquia e o da democracia é sempre a disputa entre *dois pontos de vista opostos*. (BOBBIO, 1985, p. 135-136, tradução e grifo nosso).⁴⁵

Por que as narrações dos dois filósofos divergem? Porque “os narradores” têm pontos de vista diferentes e, basicamente por isso, no fundo, as conclusões são antípodas.

A questão das narrativas terem sempre um ponto de vista e a ligação deste com a ideologia do narrador representa um fator central na reflexão sobre a prática educativa, especialmente no Brasil, que possui a proposta de lei “Escola sem partidos”⁴⁶. Pode ser útil recorrer, mais uma vez, às ideias de Paulo Freire a fim de esclarecer os termos da questão.

É necessário colocar o foco sobre o fato de que não existe um ponto de vista, uma “fala” ou uma narrativa “neutra”: cada sujeito expressa uma visão sobre o mundo, uma perspectiva, uma ideologia. Isso manifesta-se qualquer que seja o assunto: um acontecimento histórico, uma poesia, uma relação amorosa, uma nova teoria física ou um problema da matemática. Disso decorre, quase que automaticamente, que na relação ensino-aprendizagem sempre se encontra presente (pelo menos) a ideologia do professor e a do aluno. Não é possível, portanto, “esconder” este fato ou “dissimulá-lo”: a professora tem as suas ideias sobre o mundo e as alunas também, e não necessariamente isso é negativo. Desta forma, Freire apontava a questão no final do século XX:

Creio que nunca precisou o professor progressista estar tão advertido quanto hoje em face da esperteza com que a ideologia dominante insinua a neutralidade da educação. Desse ponto de vista, que é reacionário, o espaço pedagógico, neutro por excelência, é aquele em que se *treinam* os alunos para práticas apolíticas, como se a maneira humana de estar no mundo fosse o pudesse ser uma maneira neutra. (FREIRE, 2015, p. 95).

E o educador continua: “Na verdade, só ideologicamente posso matar as ideologias, mas é possível que não perceba a natureza ideológica do discurso que fala da sua morte” (FREIRE 2015, p. 129).

⁴⁵ “Ciò che li divide é la diversa concezione del fine ultimo dello Stato, che per Hobbes é la pace e l’ordine, per Spinoza, la libertà, differenza que a sua volta riposa su una differenza piú profonda che permette piú di tutte di contrapporre una teoria all’altra: intendo la differenza rispetto alla prospettiva principale da cui ogni scrittore di cose politiche si pone per esporre il proprio pensiero, e che permette di contrapporre gli scrittore che si pongono ex parte principis, cioè dalla parte dei governanti per giustificare il loro diritto a comandare e il dovere dei sudditi di obbedire, a coloro che si pongono ex parte populi, ovvero dalla parte dei governati per difendere il loro diritto di non essere oppressi e il dovere dei governanti di emanare leggi giuste. [...] La disputa fra il fautore della monarchia e il fautore della democrazia é sempre una disputa fra due contendenti che si pongono da due punti di vista opposti.”

⁴⁶ Existem várias propostas de leis (federais, estaduais e municipais) que, sob este título totalmente divisível (quem gostaria que os partidos políticos fizessem propaganda na escola?), apresentam uma proposta de um ensino “não ideológico”, como se isso fosse possível!

Freire (2001, p. 83-86) também ressalta que a dimensão em que a ação pedagógica deve acontecer é o diálogo; um diálogo que se baseia no respeito, na fé nas outras pessoas e no reconhecimento do outro. Com estas premissas, assevera (FREIRE, 2001, p. 87, grifo nosso): “nosso papel não é falar *ao* povo sobre a nossa visão do mundo, ou tentar impô-la *a* ele, mas dialogar com ele sobre a sua e a nossa”. Isto é: a ação educativa se realiza por meio de um confronto de pontos de vistas, de visões sobre o mundo que dialogam em busca de uma melhor compreensão. A ideia de que o professor possa fazer proselitismo e moldar a consciência do aluno é, em si, fruto de uma ideologia, da visão da educação não como processo de emancipações das consciências, mas sim de um processo “bancário”, no qual o docente “enfia” na cabeça do discente a sua própria visão do mundo, o seu saber, as suas ideias (FREIRE, 2001, p. 62-63). Porque “[O objetivo da educação], a humanização em processo, não é uma coisa que se deposita nos homens. Não é uma palavra a mais, oca, mitificante. É práxis, que implica a ação e a reflexão dos homens sobre o mundo para transformá-lo” (FREIRE, 2001, p. 67). Isto é: a educação é um processo de abertura entre seres humanos, em que saberes, conhecimentos, emoções e ideologias se confrontam e dialogam, com mutuo respeito e acolhimento.

Finalmente: a eticidade da ação da professora não se dá negando (ficticiamente) a sua ideologia ou as dos seus alunos, mas no reconhecimento de que “ensinar exige respeito a autonomia do ser do educando” (FREIRE, 2015, p. 58). Assim, Freire posiciona-se:

Minha presença como professor, que não pode passar despercebida dos alunos da classe e da escola, é uma presença em si política. Enquanto presença não posso ser uma *omissão*, mas um sujeito de *opções*. Devo revelar aos alunos a minha capacidade de analisar, de comparar, de avaliar, de decidir, de optar, de romper. Minha capacidade de fazer justiça, de não falar a verdade. Ético, por isso mesmo, tem que ser o meu testemunho. (FREIRE, 2015, p. 96).

Portanto, a narrativa que a professora proporá em sala de aula sempre estará embutida de sua ideologia, mas isso, num campo dialógico de abertura e respeito mútuo, será algo enriquecedor, não algo a ser sancionado por lei em nome de uma (impossível) neutralidade do processo educativo.

3 CONCEPÇÕES DA MATEMÁTICA E ENSINO: ARISTÓTELES, PLATÃO E CIA...

Normalmente, na escola, os conceitos matemáticos são apresentados numa maneira polida, satisfatória de um ponto de vista matemático, mas que podem ser sem significado para o aluno. Para recuperar o significado, poderia ser útil ir atrás até as palavras originais dos matemáticos que conceberam tais ideias. Nas suas próprias palavras, as raízes cognitivas das ideias matemáticas se mostram como, por exemplo, as ideias fundamentais em volta das quais os conceitos desenvolveram-se.

(FURINGHETTI, 2005 p. 369, tradução nossa)⁴⁷.

Todas as didáticas da matemática, mesmo que com pouca coerência, baseiam-se numa filosofia da matemática.

René Thom (apud ERNEST, 1996, p. 1, tradução nossa)⁴⁸.

Na Grécia antiga, a bifurcação dava-se entre as perspectivas platônica e aristotélica.

(MACHADO, 2016, p. 136).

A Natureza ama esconder-se.

(HERÁCLITO).

A filosofia da matemática, ou seja, a visão sobre a matemática - que afeta direta e indiretamente seu ensino – insere-se num contexto de amplos debates existentes sobre o grau e efetividade desta influência. Contudo, poucos (ninguém?) colocam esta relação em discussão; como sustenta Hersch (1997, p. 238), a visão sobre a matemática, a partir do professor, pode facilmente ser assumida pela aluna, facilitando ou dificultando o processo de ensino-aprendizagem. Também, a ideia de utilizar a história da matemática em sala de aula é uma ideia que pode encontrar pouco fundamento numa determinada ideia de matemática ou se encaixar perfeitamente numa outra visão.

Para esclarecer estes pontos, será esboçado um (sucinto) quadro histórico-filosófico sobre a matemática: serão retomadas as posições platônica e aristotélica como paradigmáticas da maneira de enxergar a matemática. Por fim, será analisada a posição humanista, particularmente o socioconstrutivismo, a qual se relaciona particularmente bem com o espírito

⁴⁷ “Usually in schools mathematical concepts are presented in a polished way, which is satisfying from a mathematical point of view, but may be meaningless for students. To recover the meaning it may be useful to go back to the original words of the mathematicians who have conceived such concepts. In their very words the cognitive roots of the mathematical concepts, e. g. the key ideas around which the concepts have grown up, are made evident.”

⁴⁸ “All mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rest on a philosophy of mathematics”.

desta pesquisa: se a matemática for uma produção humana, desenvolvida em determinadas situações históricas e sociais, então é bem justificado o interesse pela história para se buscar as ideias fundamentais e suas *cognitive roots* para usá-las na construção das narrativas em sala de aula. Igualmente, será discutido o papel da história da matemática em sala de aula como meio para trazer ao aluno a dimensão processual e sociocultural da matemática (FURINGHETTI, 2004a; 2004b).

3.1 CALIPSO TOMANDO BANHO NO LÉTHÊ...

O que têm em comum a ninfa que segurou Ulisses na sua ilha por sete anos e o rio que Platão, Virgílio e Dante imaginaram fluindo no reino dos mortos?

O *trait d'union* entre estes dois elementos da mitologia grega é representado pelo conceito de verdade na Grécia clássica: particularmente, verdade podia ser expressa com o termo *aletheya* ou *apokálypsis*. No primeiro caso, a mesma raiz, *leth*, é usada com o “a” com a função de prefixo de oposição, indicando assim o que não se esquece; no segundo, a palavra *calipto*, que significa escondido, precedida pelo, mais uma vez, prefixo negativo *apo*, indica aquilo que foi desvelado. É bem provável que o termo “calipso” tenha origem a partir da narrativa de que estas esconderam Ulisses por sete anos, longe do olhar malévolos de Poseidon.⁴⁹ A ideia de uma deusa “que (se) esconde” é uma ideia bem presente no Mediterrâneo e a mais emblemática de todas estas figuras provavelmente é Isis, representada no antigo Egito com o característico véu – assim Plutarco descreve uma estátua da deusa na antiga cidade de Sais.

Dessa maneira, as duas formas arquetípicas de conhecimento, de acordo com a tradição grego-mediterrânea, estão esboçadas: por um lado, a ideia de que a verdade é algo que se re-lembra⁵⁰ (*aletheya*), por outro, é algo que se des-vela (*apocalipses*); associa-se, assim, a estas duas modalidades também o par interno/externo: o conhecimento como algo que já está presente dentro do ser humano ou como algo que se encontra fora (por exemplo, a natureza) e, para acessá-lo, é preciso rasgar o véu que o mistifica.

⁴⁹ Na Enciclopédia Italiana Treccani se faz referência ao fato de que, muito provavelmente, a ninfa foi uma invenção do próprio poema homérico. A ideia de utilizar a figura mítica da ninfa como epítome de um conceito de verdade advém de Borzacchini, *Il computer di Platone: alle origini del pensiero logico e matematico*, Dedalo, 2005 (*O computador de Platão: as origens do pensamento logico e matemático*, tradução nossa).

⁵⁰ Literalmente, se “des-esquece”.

Assim, a ideia de ciência e de matemática está sempre interagindo com estas polaridades; é neste quadro que se coloca a (aparentemente) simples questão: “O que é a matemática?” que logo desvela, apesar do seu caráter onipresente e do reconhecido status do qual goza, tanto no campo da educação, quanto da “técnica”, as dificuldades embutidas em tal resposta.

Em primeiro lugar, vale deixar claro que uma resposta – considerando-se sua existência – não pode ser achada dentro da própria matemática: não existem equações, funções, figuras geométricas, formalismos que consigam alcançar tal tarefa. A resposta tem que ser buscada além da matemática: é, literalmente, metamatemática. Tal fato aplica-se ao objeto (a matemática) mas, nem de longe, aos sujeitos envolvidos: os matemáticos. É bem frequente que sejam os próprios pesquisadores da matéria que lancem mão da prática de fornecerem definições e explicações acerca do que é seu objeto de estudo. Mas, ao fazer isso, eles estão colocando-se num campo de especulação que está fora da matemática, podendo ser chamado de metamatemática, filosofia da matemática ou ainda de outras maneiras.

Figura 7 - Dois (entre vários) pares que podem ser construídos entre as ideias de Platão e Aristóteles

Fonte: Autoria própria.

Uma discussão aprofundada sobre este aspecto daria fôlego, sozinha, a várias pesquisas. A seguir, será interessante esboçar algumas linhas gerais a respeito desta questão por pelo menos duas motivações. Em primeiro lugar, porque a prática docente é ligada à concepção que se tem sobre a natureza da matemática. Trata-se de uma relação complexa, às vezes não direta, com certeza não mecânica, mas que esconde, sem dúvida, uma riqueza de conexões a serem exploradas. Um trabalho seminal sobre este assunto é *The Philosophy of Mathematics Education*, de Paul Ernest, que tenta propor um quadro geral no qual tais relações entre concepção de matemática, concepção de ensino e até mesmo ideologia (no sentido de “visão de mundo”) sejam postas em correlação.

Em segundo lugar, porque a importância de uma reflexão histórica sobre a matemática depende de qual visão se tem dela. Se, por exemplo, a matemática fosse vista como algo imutável, nascida pronta e já adulta, como *Pallas Athena*⁵¹, tal reflexão não faria muito sentido: tratar-se-ia, com efeito, de uma matemática “à la Francis Fukuyama”, literalmente sem história.⁵²

Para tentar, então, esboçar algumas linhas gerais sobre a natureza da matemática, a escolha aqui feita é remontar a duas visões antigas e arquetípicas com as quais as perspectivas modernas estão, de várias maneiras, em dívida: a visão de Platão e a de Aristóteles.

⁵¹ O mito mais conhecido do nascimento da deusa é que ela já nasceu adulta, vestida e armada com elmo e escudo da testa do seu pai, Zeus.

⁵² O filósofo e economista político estadunidense Francis Fukuyama publicou um ensaio com o título “O fim da história e o último homem” em 1992. A tese de fundo era que, com a queda do “comunismo real”, na União Soviética, e a queda do muro de Berlim, o mundo tenderia a se “estabilizar” no sistema ligado ao capitalismo, do ponto de vista econômico, e na democracia liberal, no ponto de vista político, representando este cenário o “fim da história”, não sendo possíveis outras mudanças. É interessante ressaltar como esta ideia de “estabilização”, na qual o conflito (*polemos*, de onde “política”) cessaria; é uma ideia que, de tempos em tempos, volta a exercer uma certa força, tanto à direita como à esquerda. Por exemplo, Bobbio (1985, tradução nossa) cita o “o sonho matemático de Bucharin, expresso com tão clareza em algumas afirmações do ABC do comunismo, segundo as quais, após a revolução, <<a direção central [da sociedade comunista] será dada a escritórios de contabilidade e de estatística>>”(No original: “*rêve mathématique* di Bucharin espresso cosí chiaramente in alcune affermazioni dell’*ABC del comunismo*, secondo cui, a rivoluzione avvenuta, <<la direzione centrale [nell’ordinamento sociale comunista] sarà affidata a vari uffici di contabilità e ad uffici di statistica>>”). Esta ideia de gestão do existente sem conflito e objeto de ordinária administração por escritórios de contabilidade é algo que a realidade dos acontecimentos humanos já se encarregou de jogar por “água abaixo” em inúmeras ocasiões: a história dos seres humanos continua, com o seu cargo de conflitos, em “avanços” e “retrocessos”, reviravoltas e mudanças. E a matemática, com ela. E, justamente por isso, aconteceram momentos ao longo da história da matemática nos quais era difusa a sensação de que a matemática “tivesse chegado ao fim”: Struik (1989, p. 221) sustenta que um deste momentos seria o final do século XVIII, quando parecia que depois dos trabalhos de Euler, Lagrange, D’Alambert e Lagrange pouco sobrava ainda para ser resolvidos.

3.2 PLATÃO: O MUNDO DAS FORMAS

Os inteiros foram criados por Deus; todo o resto é trabalho dos homens.

Ludwig Kronecker (apud HERSH, 1997, p. 74, tradução nossa).

O filósofo ateniense, discípulo de Sócrates, apresentou a sua visão sobre a criação do mundo no diálogo *Timeu*, contando o mito do Demiurgo. Existe, além do nosso mundo, um mundo perfeito, não sujeito à mudança, degradação e morte, fora de tempo e espaço, “povoado” de ideias. “Abaixo” deste mundo existe a matéria, que Platão chama de *Kora*⁵³, um amontoado disforme. Por meio da ação do Demiurgo, uma figura mitológica e divina, a matéria é moldada para imitar as ideias; mas a matéria, por ser imperfeita, opõe resistência à ação do Demiurgo, deixando assim ao mundo nada mais que uma cópia imperfeita do original. Assim, um objeto de forma triangular é uma “imitação barata” da verdadeira forma (ideia) do triângulo, assim como as coisas belas deste mundo não passam de meras cópias degradadas da verdadeira ideia do “belo”.

A teoria platônica tem uma origem matemática, demonstrada pelo conceito de ideias – *ídeia*, que em grego significa “forma” – teoria estendida, posteriormente, a qualquer conceito (o belo, o justo, a verdade...).

Tem-se a visão de um mundo, paralelo e diferente do sensível, onde existiriam os conceitos puros, as “formas” que a mente humana enxerga e que são o modelo para as formas das coisas concretas que povoam o mundo material.

Sendo assim, a matemática existe independentemente do ser humano, num mundo ideal (*Hyperurânio*) e o ser humano, através dos olhos da mente, consegue vislumbrar as verdades matemáticas – eternas e imutáveis – que lá estão.

Da mesma “turma” de Platão é Descartes, que quase dois mil anos depois retomará a posição do filósofo ateniense ao dizer que, para achar os princípios primos a partir dos quais começar a raciocinar, ele somente precisa da intuição (HERSH, 1997, p. 112). Literalmente, para ver com clareza, o filósofo francês fecha os olhos (e pensa)! Não gera estupor algum que Descartes seja considerado o iniciador do racionalismo moderno. A relação desta visão com a de Platão reside no fato que para os dois as ideias fundamentais (matemáticas) têm que ser

⁵³ *Kora* pode ser traduzido como “espaço”, no sentido de mera extensão. Assim, a matéria, em si, não teria característica alguma a não ser de ter uma extensão, de ocupar um espaço. Parece que Descartes retomou inteiramente esta ideia ao pensar o mundo dualistamente dividido entre *res cogitans* e *res extensa*.

achadas dentro da própria mente, sendo o processo de conhecimento uma obra de relembração das ideias com as quais a alma esteve em contato antes de vir ao mundo terreno.

A principal objeção a esta visão é a mesma empregada ao dualismo cartesiano; isso, nem de longe, é casual: como explicar como o mundo material e das ideias “falassem entre si”? Por Platão, a comunicação se dá porque a “alma” vem do *Hyperuranio*; por Descartes, o ponto de contato entre *res extensa* e *res cogitans* seria a glândula pineal.⁵⁴ Uma solução voa alto demais e a outra.... baixo demais!

Uma evolução deste olhar “para dentro” deve-se, mais de um século depois, a Kant, o qual raciocina da seguinte maneira: o ser humano tem percepções das coisas do mundo, mas isso somente é possível porque existem duas “estruturas” (intuições) na mente dele, o espaço e o tempo, que lhe permitem organizar estas percepções. Tais estruturas são categorias *a priori*, enquanto não adquiridas com a experiência. E como se declina a categoria do espaço? Obviamente, com a geometria euclidiana, que explica as suas características. Como resume Machado (2013, p. 42-43): “É como se os matemáticos [...] passassem agora a trazer impressas dentro de si as matrizes invariantes de tais abstrações. E o acesso a elas [...] não se daria através dos sentidos, mas sim via razão introspectiva”.

Mais uma vez, a matemática coloca-se estruturada dentro da cabeça do ser humano, desta vez como “estrutura cognitiva”.

Do ponto de vista prático, esta ideia foi desmontada com o surgimento das geometrias não euclidianas e com a aplicação de uma delas na relatividade geral de Einstein: a ideia de uma geometria euclidiana “impressa” dentro da mente dos seres humanos conflita com o fato de que o universo “funciona” de acordo com uma outra geometria. Hersh brinca com a postura do filósofo alemão em relação a isso ao afirmar que:

As intuições kantianas são consideradas características eternas e universais da Mente. Mas a Mente que Kant conhece é a mente europeia do século XVIII, com mais os livros da sua biblioteca. Ele assume que esta mente constitui todo o pensamento da humanidade. (HERSH, 1997, p. 131, tradução nossa).

Kant teria cometido um dos erros mais comuns para qualquer ser humano: ou seja, pensar que o “meu” sentimento, o “meu” pensamento, seja o mesmo que de toda a

⁵⁴ O dualismo cartesiano consiste em imaginar duas substâncias (em latim, *res*, coisas) fundamentais: uma, o mundo material, que tem como característica essencial ocupar um espaço (*extensa*); a outra, que tem a capacidade de pensar (*cogitans*). Como em muitas das teorias dualistas, um (grande) problema é representado ao se explicar (convincentemente) como as duas entidades interagem uma com a outra.

humanidade.⁵⁵ Uma falácia que, longe de ser um problema individual, é também (e talvez mais ainda) um problema social: por exemplo, a tendência de identificar “a ciência”, “a matemática”, “a civilização” com a ciência europeia, a matemática europeia, a civilização europeia.⁵⁶

Apesar destas críticas, a posição kantiana remete ao platonismo, dado que, como na visão platônica, a matemática existe além (especialmente) do ser humano e antes (temporalmente) do ser humano; assim, por Kant, as categoria do espaço e do tempo são apriorísticas, existem antes do processo cognitivo e, na verdade, são as suas premissas.

3.3 ARISTÓTELES: AS FORMAS DO MUNDO

A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando de uma maneira completa a ideia de número, para depois a aplicar à prática da contagem é cômoda, mas falsa. (CARAÇA apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2003, p. 271).

Do outro lado da “barricada”, o primeiro nome a ser citado deve ser obrigatoriamente o do discípulo de Platão, Aristóteles, o qual desenvolveu uma posição extremamente crítica, em vários aspectos, contra a filosofia do seu mestre, uma das quais era relativa justamente à matemática. Como destaca Hersh (1997, p. 183, tradução minha), “o conceito chave [na visão aristotélica] é a abstração”⁵⁷, de maneira que “a matemática seria [...] o estudo das abstrações matemáticas elaboradas pelos matemáticos a partir dos objetos do mundo da percepção sensível” (MACHADO, 2013, p. 36).

A ideia do filósofo peripatético é bem clara: não existe a ideia pura de “triângulo” em um mundo separado; existem, ao contrário, vários objetos, entre os quais o ser humano abstrai

⁵⁵ Não pode-se culpar demais Kant por isso: sem as geometria não euclidianas (e, ainda mais, sem aplicações práticas das geometrias não euclidianas) parecia mesmo que a geometria euclidiana fosse uma coisa única com o mundo. A geometria do Elementista não era uma descrição do mundo, era o mundo!

⁵⁶ Pra dizer a verdade, a questão do eurocentrismo foi um problema de quase toda a cultura europeia desde antes dos seus primórdios (já os gregos clássicos e os romanos falavam de bárbaros e de missão civilizadora) até os dias atuais. Somente em tempos mais recentes começaram a aparecer visões críticas a este respeito. No campo da matemática, uma contribuição fundamental foi dada pelas ideias ligadas a etnomatemática.

⁵⁷ É interessante destacar a etimologia de abstrair: o vocábulo vem do latim *abstrahere*, composto de *ab* «embora de» e *trahere* «tirar, puxar». Assim, a palavra expressa a ideia de “tirar fora de”, como se, de vários objetos particulares e concretos fosse possível extrair uma ideia geral.

uma característica “comum” que é da “triangularidade”. Assim, a ideia de triângulo aparece como o resultado de uma ação (mental) humana em cima de objetos sensíveis.

Para explicar como este processo se dava, Aristóteles introduziu, na metafísica, os conceitos de substância (ou essência) e de atributos e, na lógica, a ideia de sujeito/predicado para analisar a estrutura das sentenças (e, supostamente, do pensamento). Este caminho o levou a fazer a primeira reflexão sobre a linguagem, operação que tem vários pontos em comum com o trabalho de Euclides (vide cap. 5.c.i).

A tradição aristotélica remete, em várias formas, ao pensamento empirista moderno inglês, embora o primeiro que manifestou ideias interessantes a este respeito sobre a matemática tenha sido John Wallis. Apesar de ser um “diletante, apenas minimamente informado sobre a matemática moderna” (ALEXANDER, 2016, p. 269), os convulsos acontecimentos da Inglaterra “revolucionária” do século XVII e a sua “fidelidade fluida” (ALEXANDER, 2016, p. 270) o levaram a lecionar como professor de geometria na prestigiosa universidade de Oxford.

Fiel ao espírito empirista de Bacon e da Royal Society, recém-fundada, Wallis,

criou um novo tipo de matemática” onde os “resultados seriam altamente prováveis, mas não irrefutavelmente certos, e seriam validados não por ‘raciocínio puro’ mas por consenso, como [nos] experimentos públicos realizados na Royal Society. (ALEXANDER, 2016, p. 287).

Do ponto de vista da ideia do rigor moderno (mas, a bem ver, também do ponto de vista do rigor da sua época!) Wallis ganharia notas vermelhas com qualquer professor de análise: ele chegou a dividir infinito por infinito, propondo como resultado um número finito ($\frac{\infty}{\infty} = a$)⁵⁸, manipulou séries infinitas com as mesmas regras das finitas e assim por diante; ele entrou na “luta” travada na época dos infinitésimos (levada adiante por Cavalieri, Galileo e Torricelli) sem “escrúpulos” e sem medo, pois o importante era produzir novos resultados.

Contudo, o mais notável fato da matemática de Wallis era o caráter indutivo: ele não precisava demonstrar, era suficiente mostrar que, se em vários casos uma determinada propriedade dava certo, então a propriedade (provavelmente) valia em todos. Por exemplo, ele afirma que:

Se pegarmos uma série de valores em proporção aritmética (ou como a sequência natural de números), aumentando continuamente e começando de um ponto ou zero, finita ou infinita a quantidade (pois não haverá motivos

⁵⁸ Ele foi o primeiro a usar o símbolo ∞ para indicar o infinito.

para fazer distinção), ela estará para uma série da mesma quantidade de termos iguais ao maior assim como 1 está por 2. (ALEXANDER, 2016, p. 299).⁵⁹

Aqui, o matemático inglês executa a conta em casos particulares e, vendo que o resultado não muda, generaliza para qualquer conta parecida (até com infinitos termos). Esta posição está além da aristotélica: para o filósofo grego, a matemática “nasce” como abstração do real, mas depois atua conforme as regras da lógica; para Wallys, a matemática pode se basear na experiência e no próprio princípio de indução.

Apesar dos vários matemáticos (os quais, anteriormente, foram citados alguns a título de exemplo) que poderiam ser tomados como epítomes para as duas posições, geralmente se usam os dois filósofos gregos, Platão e Aristóteles, como representativos das duas tendências.

Assim, em uma síntese que somente a arte pode alcançar, o pintor Raffaello expressou a essência dos dois filósofos numa das obras mais representativas do espírito renascentista italiano: A escola de Atenas. No centro prospetivo do afresco estão duas personagens⁶⁰, que representam Platão e Aristóteles: o primeiro, com o indicador apontando para o céu (ou melhor, “além do céu”, para o mundo das ideias), e o segundo esticando a mão, apontando para o mundo sensível.

Stewart aponta uma ideia interessante sobre esta questão, afirmando que “O platonismo, penso eu, não é uma descrição do que a matemática é. É uma descrição da sensação que a matemática dá quando se trabalha com ela” (STEWART, 2014b, p. 332).

⁵⁹ Wallys quis provar que $\sum_{k=1}^n n_i = \frac{1}{2} n(n+1)$

Então começa mostrando que

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

E depois

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$$

E ainda

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}$$

E mais

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2}$$

E assim por diante...

Até que ele (e o leitor) esteja “razoavelmente” convencido de que a “regra” vale para qualquer caso.

⁶⁰ O pintor italiano quis homenagear dois outros artistas italianos: respectivamente, Leonardo e Michelangelo. E, por ironia da sorte, existe uma história sobre este último que mostraria a sua adesão ao platonismo: questionado sobre a sua capacidade de esculpir o mármore, o escultor afirmou que a estátua já estava contida no bloco de pedra: ele limitou-se a tirar a sobra. Esta visão ecoa a ideia platônica de reminiscência.

Essa visão ecoa o pensamento de Jean Dieudonné (apud HERSH, 1997, p. 40), de acordo com o qual: “... o sentimento que cada matemático tem [é que] ele esteja trabalhando com algo real. Tal sensação provavelmente é uma ilusão, mas é muito conveniente.”

Figura 8 - A escola de Atenas (*La scuola di Atene*), particular

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola_de_Atenas#/media/File:Sanzio_01.jpg

Ainda hoje estas duas visões estão presentes no dia a dia da sala de aula: por exemplo, tanto os verbos *descobrir* como *construir* são usados por professores e alunos (HERSH, 1997, p. 73s). Longe de representar uma contradição, este par representa uma tensão bastante fecunda.

Como exemplo básico, abordado desde a escola fundamental, pode ser usado o teorema que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos⁶¹. A de ideia que em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos seja uma constante casa harmoniosamente com a ideia de descoberta: parece que os ângulos estavam ali⁶², do mesmo jeito que uma mina ou uma pedra e que alguém achou uma propriedade inerente a eles. Ora, a demonstração desta propriedade já apresenta uma abordagem diferente: geralmente começa com “seja ABC um triângulo; construa-se a paralela à base AB passante

⁶¹ A escolha do teorema não é casual: trata-se do exemplo preferido por Spinoza de uma afirmação absolutamente certa (HERSH, 1997, p. 69). Atualmente, é considerada assim somente em referência à geometria euclidiana. A própria demonstração baseia-se diretamente no quinto postulado, o das paralelas: sendo assim, nas geometrias que mudam este axioma, muda também o valor da soma dos ângulos internos.

⁶² Seja onde for “ali”!

pelo vértice C...”. Neste caso, a sensação é que o próprio ser humano esteja “construindo” a demonstração: ao final, a linha foi colocada, o que não significa que sempre esteve lá...

Figura 9 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°

Fonte: Autoria própria.

Nota: Para alcançar essa demonstração, é preciso construir a reta r.

Assim, cada assunto da matemática apresenta características que remetem a estas duas visões: por exemplo, o fato que a razão de qualquer circunferência com o seu diâmetro é sempre o mesmo número, deixa claramente a sensação de que isso foi descoberto; já as fórmulas para o cálculo de π , à medida que ficam cada vez mais sofisticadas, parecem fruto do engenho humano⁶³; os números imaginários tiveram um status mais fluidos, parecendo, de início, criações humanas e, em seguida, números com existência independentes. O próprio Arquimedes é retratado pela anedótica clássica como alguém que, uma vez tendo recebido a “iluminação”, pula pra fora da banheira e, correndo pela cidade, grita “Eureka!”, ou seja, “eu achei [a solução]”, indicando, evidentemente, que a solução “estava” em algum lugar, podendo ser um lugar material ou espiritual.

Assim, Hersh conclui: “A matemática é criada ou descoberta? As duas coisas juntas, em uma interação e alternância dialética. Este não é um compromisso; é reelaboração e síntese” (HERSH, 1997, p. 75, tradução nossa).

Estas duas visões permanecem não somente em sala de aula, na escola básica, mas também nas fronteiras da matemática atual. Por exemplo, René Thom, pai da teoria das

⁶³ Somente a título de exemplo:

$\pi = n \operatorname{sen}(\frac{180}{n})$, versão trigonométrica do método de Arquimedes;

$\pi = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$, fórmula de Viète;

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, fórmula de Leibniz, que liga a π os inversos de todos os números ímpares.

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, fórmula de Euler, que liga a π os inversos dos quadrados dos inteiros.

$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (13591409) (545140134k)}{(3k)! (k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}$, fórmula de David e Gregory Chudnovsky. Por convergir muito rapidamente, é correntemente usada pelos cálculos dos algarismos de π por computadores.

catástrofes e medalha Fields em 1958, dizia-se “platonista”, reconhecendo uma existência aos conceitos matemáticos⁶⁴; Kurt Goedel, o lógico que demonstrou o teorema da incompletude⁶⁵; Bertand Russel, Hardy (ERNEST, 2004, p. 29) e Whitehead (STRUICK, 1989, p. 324): o elemento comum entre eles era o fato de reconhecerem a matemática como uma coisa “existente em si”. Mesmo assim, havia grandes divergências e questões polêmicas: por exemplo, Thom polemizou bastante com Russel (e os Bourbakistas) pelo suposto caráter formal pelo qual queriam “engessar” a matemática. Como anunciado no início do capítulo, analisar em profundidade as diferentes ideologias existentes no mundo dos matemáticos seria tarefa árdua, complexa (sempre existiriam posições que ficariam em encruzilhadas, entre diferentes pontos de vistas) e fora do escopo desta pesquisa.

3.4 A MATEMÁTICA: HUMANA, DEMASIADA HUMANA

[...] temos a matemática, com provas e demonstrações estabelecidas através do “consenso entre os qualificados”.
(HERSH, 1997, p. 214, tradução nossa).⁶⁶

[...] a resposta à pergunta “O que é a matemática?” é mudada várias vezes ao longo da história.
(DEVLIN, 2002, p. 1, tradução nossa).⁶⁷

[...] sendo uma criação totalmente humana, o estudo da matemática é, em última análise, um estudo sobre a própria humanidade.
(DEVLIN, 2002, p. 9, tradução nossa).⁶⁸

A matemática não é, está sendo.
(Alessandro Teruzzi, parafraseando Paulo Freire – que os deuses o perdoem!).

Atualmente, a ideia de uma matemática construída consolidou-se e, ao menos no mundo acadêmico⁶⁹, tal perspectiva ganhou força constantemente. Nas palavras de Machado:

⁶⁴ Não surpreendentemente, o livro que lançou mão das teoria das catástrofes chamava-se “Structural Stability and Morphogenesis”, tendo como objeto de estudo a topologia, ou seja, a versão moderna do estudo das... formas!

⁶⁵ O teorema, de maneira informal, afirma que qualquer teoria axiomática suficientemente extensa para abranger a aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa (todas as verdades devem poder ser demonstradas) e consistente (não podem existir duas verdades conflitantes). Ou seja, sempre há em uma teoria consistente (de tamanho suficientemente grande) proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas nem negadas.

⁶⁶ “[...] we have mathematics, with proof established as ‘consensus of the qualified’”.

⁶⁷ “[...] the answer to the question ‘What is mathematics?’ has changed several times during the course of history”.

⁶⁸ “[...] as an entirely human creation the study of mathematics is ultimately a study of humanity itself”.

Modernamente, ainda que muitos matemáticos importantes se declarem platônicos, a generalização de ‘construtivismos’ de diferentes matizes tornou amplamente majoritária a concepção aristotélica, reservando ao platonismo uma presença residual, absolutamente não hegemônica. (MACHADO, 2016, p. 136).

Então, a matemática seria uma criação humana. Mas como justificar a aparência de exatidão, de neutralidade, que justifica a impressão platonista? A partir das ideias de Imre Lakatos (HERSH, 1997, p. 208-219), vários autores e escolas diferentes tentaram dar conta deste problema: o “quase-empirismo”⁷⁰ do autor Húngaro é a base de vários trabalhos, entre os quais Davis, Hersh e Tymoczko. Ernest (2004) remetendo ao quase-empirismo de Lakatos, apresenta uma definição bastante interessante de matemática: “A matemática é um diálogo entre pessoas enfrentando problemas matemáticos” (ERNEST, 2004, p. 35, tradução nossa)⁷¹.

Feferman analisa a proposta de Lakatos, apresentada no seminal *Proof and Refutations*, associando-a a uma bem determinada postura em sala de aula: “Bem se casa com a disposição cada vez mais crítica e antiautoritária dos nossos tempo”⁷² (apud HERSH, 1997, p. 216, tradução nossa)⁷³.

A “escola húngara”, salienta Hersh, não “produziu” somente Lakatos, mas também George Polya, Michel Polanyi e Alfred Renyi⁷⁴, que, de várias maneiras, ressaltam as características heurísticas e de produto humano da matemática.

A partir desta visão, entre as várias “matizes” construtivistas, aquela denominada socioconstrutivismo (crítico) surge para tentar dar conta de como a matemática evolui, muda, é aprendida. E, também, são elaboradas as críticas à visão platonista: para Hersh, o platonismo poderia ser utilizado, na prática de ensino, para justificar a crença de que algumas

⁶⁹ Na sociedade, nas medidas e talvez também no ensino fundamental, provavelmente seja majoritária uma visão diferente, na qual a matemática é vista como eterna, imóvel, além do plano humano.

⁷⁰ As características desta visão seriam resumíveis em cinco elementos, de acordo com Ernest (2005, p. 35-36): i) A falibilidade do conhecimento, ou seja, a impossibilidade de se chegar a uma fundação certa das verdades matemáticas; ii) o fato que a matemática é um sistema hipotético-dedutivo: como nas ciências experimentais e de acordo com a ideia de falsificação de Popper, as ideias matemáticas podem ser falsificadas; iii) a história desenvolve um papel fundamental; iv) a importância da matemática informal (“a matemática dos bastidores” de Hersh); e v) a proposta de uma teoria de criação de conhecimento, que se baseie no conceito de heurística.

⁷¹ “Mathematics is a dialogue between people tackling mathematical problem”.

⁷² Os espíritos dos tempos aos quais o matemático faz referência são os anos 60/70, da costa oeste dos Estados Unidos: infelizmente, parece que no Brasil dos anos 2016-2017, os tempos estão virando perigosamente para o lado do autoritarismo!

⁷³ “It fits well with the increasingly critical and anti-authoritarian temper of these times”.

⁷⁴ Na lista, deveria entrar também Von Neuman, cujo percurso dentro da filosofia da matemática foi mais articulado e complexo: nos primeiros anos, apoiou as ideias formalistas, para depois tomar uma certa distância delas.

pessoas não poderiam aprender a matemática, de maneira tal que: elitismo na educação e platonismo em filosofia são companheiros naturais (HERSH, 1997, p. 238, tradução nossa)⁷⁵.

A ideia de fundo é que a matemática seja basicamente uma produção humana, não de uma única pessoa, mas de várias, de grupos: isto é, uma produção social. Sendo assim, são as pessoas, nos diferentes tempos e regiões, que criam, elaboram, discutem, contestam as ideias matemáticas. Com efeito, discutir uma ideia matemática não pode reduzir-se à explicitação do conceito *hic et nunc*, mas rende-se necessariamente a uma análise de como aquela ideia evoluiu e chegou de determinada forma ao tempo presente: ou seja, é preciso entender a sua razão histórica. O estudo da história da matemática, como base para construção de uma narrativa na sala de aula, somente justifica-se à luz desta visão: qual seria o sentido de procurar sua razão na história se a matemática existisse desde sempre, de forma perfeita e imutável?

A proposta de Lakatos recebeu vários acréscimos e correções, principalmente para contemplar a questão da verdade da matemática: a matemática *parece* ser verdadeira, *a mais verdadeira* de todos os campos do conhecimento humano. Ao final, é isto que justifica a crença platonista!

O socioconstrutivismo tenta dar conta deste aspecto destacando a ideia de que o conhecimento matemático, pelo menos no começo, está “embasado nas regras, convenções e conhecimento linguístico” (ERNEST, 2004, p. 42). E, sendo a linguagem uma construção social, também a matemática o seria. O fato de que a linguagem é uma produção social e deve servir a falar sobre o mundo garante a universalidade da verdade matemática; a própria lógica descende do estudo da linguagem. A “objetividade” da matemática é compreendida a partir de uma diferente formulação do conceito de objetivo.

Ernest elabora os conceitos de objetivo e subjetivo a partir da ideia de conhecimento, analisando o caso da matemática e imaginando um ciclo dentro do qual estas duas dimensões dialogam:

[...] o caminho seguido pelo novo conhecimento matemático vai do conhecimento subjetivo (a criação pessoal de um indivíduo [o sentido]), através do processo de compartilhamento, até o conhecimento objetivo (por meio da avaliação intersubjetiva, reformulação e aceitação). O conhecimento objetivo [o significado] é internalizado e reconstruído pelos indivíduos ao longo do processo de aprendizagem da matemática, tornando-se, assim, conhecimento subjetivo. Usando este conhecimento, indivíduos criam e

⁷⁵ “Elitism in education and platonism in philosophy naturally fit together”.

compartilham novo conhecimento matemático, completando assim o ciclo. (ERNEST, 2004, p. 43, tradução nossa).⁷⁶

Assim, sentido e significados (discutidos no item 2.1) podem ser interpretados, respectivamente, como conhecimento subjetivo e objetivo, entendendo justamente o primeiro como pertencente ao sujeito e, o segundo, como algo compartilhado socialmente. Ernest dá também uma visão dinâmica de como este processo acontece, mostrando como continuamente uma ideia subjetiva passa a ser socializada (tornando-se objetiva) e como algo objetivo precisa ser interiorizado pelo sujeito (tornando-se subjetiva).

Nesta visão, o conceito de objetivo não remete mais à ideia de objeto “em si”, ou de “realidade”, mas sim à dimensão social: o objetivo é aquilo que é socialmente aceito⁷⁷. Esta ideia sustenta-se porque contempla todas as características intuitivas associadas ao conceito de conhecimento objetivo: autonomia do sujeito e o fato de parecer externa ao sujeito.

Figura 10 - Conhecimento subjetivo e objetivo

Fonte: Autoria própria.

Nota: O conhecimento subjetivo, ao socializar-se, vira objetivo. Ao contrário, o conhecimento objetivo, quando adquirido por uma pessoa vira subjetivo (dela).

Assim, como aponta Hersh (1997, p. 1-22), as ideias matemáticas existem “objetivamente”, tais como as ideias de dinheiro, república, casamento e tribunal federal, enquanto não simplesmente ideias de um sujeito, mas sim ideias compartilhadas entre sujeitos que fazem com que elas sejam apelidadas de *objetos sociais*. A matemática é feita com base

⁷⁶ “[...] the path followed by new mathematical knowledge is from subjective knowledge (the personal creation of an individual [o sentido]), via publication to objective knowledge (by intersubjective scrutiny, reformulation and acceptance). Objective knowledge [o significado] is internalized and reconstructed by individuals, during the learning of mathematics to become the individuals’ subjective knowledge. Using this knowledge, individuals create and publish new mathematical knowledge, thereby completing the cycle”.

⁷⁷ Tais ideias têm fortes conexões com a teoria dos três mundos, de Popper, e da objetividade, de Bloor.

em objetos que não são nem reais (no sentido de uma pedra), nem abstratas (no sentido da ideia de amor): eles são sociais⁷⁸.

Uma vez redefinido este conceito no contexto social, a exatidão do conhecimento matemático pode ser explicada em termos de linguagem: os matemáticos chegam a um consenso sobre teoremas, demonstrações e propriedades de números e figuras graças ao fato que eles compartilham uma linguagem.⁷⁹ E a linguagem, por ser construída⁸⁰ por seres humanos com o fito de se comunicarem, e por serem as pessoas muito parecidas em termos biológicos e perceptivos, constitui o elemento que força a maioria das pessoas a aceitar as ideias matemáticas. Todos os seres humanos são biologicamente parecidos e vivem no mesmo planeta, assim, eles desenvolvem linguagem que, no fundo, apresentam uma estrutura comum, e isso faz com que todos aceitem que $2 + 2 = 4$.

A exatidão da matemática, de acordo com esta visão, deriva do fato que a matemática é algo ligado estritamente à linguagem; ao contrário, por exemplo, da política, que não tem este grau de exatidão para lidar com questões mais distantes da linguagem (e mais ligadas, por exemplo, às condições materiais e à vontade de potência). Este quadro abre espaço para o relativismo, mas, ao mesmo tempo, impede o arbítrio: outras matemáticas são possíveis, assim como outras lógicas (uma análise *non-standard*, uma geometria não-euclidiana, uma lógica multivalor...) mas não é possível fazer “qualquer coisa”. Isto porque os vínculos da linguagens são parcialmente relaxáveis, mas não são arbitrários, já que, ao final, a linguagem serve à comunicação interpessoal e baseia-se na percepção humana do mundo.⁸¹

Assim, a relação que Machado (1993) propõe entre matemática e língua materna pode ser vista a partir de uma mão dupla: a matemática precisa da língua materna para ser explicada, mas também para ser... pensada!

Apesar deste caráter empírico social, esta visão não anula totalmente as contribuições do platonismo: as ideias matemáticas continuam a ter uma existência “objetiva”; destaca-se,

⁷⁸ Ernest (2005, p. 56) prefere a locução *objetos linguísticos públicos*, mas parece que a ideia seja a mesma.

⁷⁹ Muito forte, aqui, é a dívida com a visão do Wittgenstein, do *Tractatus*.

⁸⁰ Não pretende-se aqui discutir (e ainda menos, tomar posição) entre o construtivismo piagetiano e o inatismo chomskiano. Isso porque, por um lado, não cabe nesse escopo tal discussão; pelo outro, se a posição inatista estiver certa, isso fortalece mais a posição em análise: se a capacidade da linguagem dos seres humanos reside em um órgão, é mais do que natural que esta linguagem tenha um fundo comum entre todas as pessoas, o que justificaria ainda mais a objetividade da matemática socialmente entendida, da mesma maneira pela qual (presume-se que) todo enxerguem da mesma maneira, dado o fato de que os olhos são, biologicamente, todos iguais.

⁸¹ Seria um ótimo experimento mental imaginar um ser consciente, completamente diferente do ser humano, e tentar conjecturar como seria a sua percepção (o seu pensamento) sobre o mundo. A ficção científica, por vezes, lançou mão desta tarefa: o conto *Solaris* (com os dois filmes que inspirou) vai neste sentido.

somente, que esta não se dá mais num mundo “além do céu”, mas sim abaixo do céu, no “mundo social”. É a volta de Platão... uma oitava para baixo!

Assim, espera-se ter demonstrado como a visão do professor sobre a matemática deve considerar o caráter humano da matemática, trazendo questões consequentes com estas visões. Juntamente a isso, tanto a visão clássica platônica como a aristotélica podem se tornar recursos frutíferos a serem explorados em sala de aula, a depender do assunto e da abordagem.

4 CONCEPÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO

Nos últimos cem anos (com uma aceleração consistente nas últimas décadas do século XX) vários autores e pesquisas concentraram-se no papel que a história da matemática pode desempenhar na construção de uma didática da matemática. Sem a pretensão de fornecer um quadro completo acerca deste viés (o que foge aos propósitos da presente pesquisa), nas páginas seguintes tentar-se-á mostrar algumas tendências e vertentes a respeito desse tema.

4.1 FILOGENESE E ONTOGENESE: “*LES LIAISONS DANGEREUSES*”

No final do século XIX, a forma de compreender a relação entre a história da matemática e os mecanismos de aprendizagem era muito influenciada pela teoria da chamada recapitulação; isto é, a ideia de que a ontogênese (nascimento do ser, do indivíduo de uma espécie) recapitula a filogênese (o nascimento/desenvolvimento da espécie). Esta ideia foi proposta com grande impacto pelo biólogo alemão Ernst Haeckel, no ano de 1886⁸². O sucesso da teoria foi tamanho que esta se estendeu e passou a ser aplicada em outras áreas de estudos quase imediatamente: logo se passou a acreditar que o desenvolvimento intelectual de um ser humano, de alguma maneira, percorresse as etapas da espécie. Assim, não surpreende a declaração de Felix Klein (apud FURINGHETTI, 2005, p. 366), segundo a qual: “o aluno, *naturalmente*, tem que seguir o mesmo caminho, em uma escala menor, que a própria ciência seguiu, em uma escala maior”⁸³. O próprio Poincaré escrevia:

A tarefa dos educadores é a de fazer seguir, aos jovens, o mesmo caminho que foi seguido pelos próprios pais, passando rapidamente através de algumas etapas, sem pulos. Assim, a história das ciências deve ser a nossa guia. (POINCARÉ apud FURINGHETTI, 2005, p. 366, tradução nossa).⁸⁴

Como destaca Furinghetti (2005), é preciso contextualizar estas posições no debate ocorrido à época (e não somente nesta época⁸⁵) sobre a ideia de invenção ou de descoberta e a

⁸² Como nota à margem, registre-se que esta teoria foi utilizada por toda a primeira parte do século XX para “justificar cientificamente” a suposta inferioridade de “raças”, como as asiáticas e as africanas.

⁸³ “The scholar must naturally follow the same course of development on a smaller scale, that the science itself has taken on a larger”.

⁸⁴ “The educators’ task is to make children follow the path that was followed by their fathers, passing quickly through certain stages without eliminating any of them. In this way, the history of sciences has to be our guide.”

⁸⁵ O debate sobre a natureza “filosófica” do conhecimento matemático continua ainda hoje. Ver item 3.

relação entre intuição e formalismo. Mesmo levando em conta isso, aparece com força a ideia de recapitulação.

Apesar das críticas desenvolvidas ao longo do século XX, tanto em âmbito biológico, quanto cultural (FURINGHETTI; RADFORD, 2008; RADFORD et al., 2014; SHUBRING, 2006), a ideia da recapitulação permanece com certo fascínio e continua manifestando-se, talvez em formas mais sutis, como testemunha, por exemplo, a obra de Piaget e Garcia, de 1983: “Psicogênese e história das ciências”. Neste livro, os autores admitem um paralelismo entre a ontogênese (psicogênese) e a filogênese, pelo menos relacionado ao conhecimento científico. Assim, não surpreende uma afirmação com o seguinte teor:

Todos os fatos que serão descritos nesta obra, demonstrando as analogias entre construções históricas e os processos psicogenéticos, confirmarão igualmente [...]a escolha entre a hipótese construtivista e a da pré-formação. (PIAGET; GARCIA, 2011, p. 33).⁸⁶

Os autores “demonstram” e usam certo paralelismo entre o sujeito que aprende e a evolução da ciência, de modo a sustentar as teses construtivistas.

Ainda hoje não é incomum que alunos da licenciatura em matemática questionem a possibilidade de montar um roteiro didático “histórico”, organizando os conteúdos matemáticos da mesma forma que os conteúdos de um livro de história ou de literatura, o que significa que certa ideia de recapitulação ainda esteja presente.⁸⁷

À luz desse pensamento, para discutir criticamente não somente a utilização da história como ferramenta pedagógica, mas também as perspectivas segundo as quais isso poderia se dar, é interessante colocar as objeções principais a este tipo de abordagem.

Uma crítica à uma visão estritamente de recapitulação descende da crítica à visão cultural (e histórica) eurocêntrica. Assim coloca-se Radford a esse respeito:

Nós temos a tendência de falar como se tivéssemos *uma única* matemática, *uma única* história e *uma única* história da matemática. Talvez precisemos perguntar-nos o que entendemos com a palavra matemática; somente

⁸⁶ O livro, apesar de uma visão “recapitulacionista dura”, é rico em elementos interessantes para uma reflexão problematizadora sobre a história da ciência: questões como o contexto cultural, o redimensionamento do papel da experiência para o surgimento da física moderna, o problema de colocar a pergunta “certa”, dentre outras, são debatidas pelos autores.

⁸⁷ Talvez isso seja uma reação à quase total falta de contexto histórico no estudo da matemática desenvolvido no ensino fundamental: retomando o mecanismo da curvatura da vara de Lenin (SAVIANI, 1986), poder-se-ia dizer que por falta de uma contextualização histórica adequada, alguns alunos da licenciatura em matemática querem uma reorganização do *curriculum*... sob base histórica!

sucessivamente poderemos lidar com a questão das suas possíveis histórias. (RADFORD, 2014, p. 103, tradução nossa, grifos nossos).⁸⁸

Ou seja, se a matemática for um produto cultural dos seres humanos (vide capítulo 2), então não existe *uma* história da matemática, mas sim várias histórias, dependendo do tempo e do espaço. As pesquisas de D'Ambrosio (1990; 2001) e Bishop (1997) mostraram como os conceitos matemáticos podem se desenvolver em modalidades diferentes, dependendo do contexto histórico e cultural que os produz. Nas palavras de Radford: “[...] a matemática é mergulhada em sistemas simbólicos de natureza cultural e histórica a partir dos quais ela elabora os seus conceitos básicos” (RADFORD, 2014, p. 103, tradução nossa).⁸⁹

Ou seja, os autores citados levam em consideração o fato de que os modos de compreensão das ideias matemáticas são subordinados à cultura e ao contexto e, por isso, torna-se difícil sustentar a tese do paralelismo. Esse ponto de vista sugere outra perspectiva para se considerar a história da matemática no ensino de matemática.

Assim, por exemplo, ao se trabalhar o número zero, qual história deveria ser narrada em sala de aula? A história da matemática grega, na qual o zero nem tinha dignidade de número, não tendo um símbolo apto a representá-lo? Ou a história da matemática maia? Ou ainda, a indiana, na qual o número zero já estava presente?

Outro exemplo trazido por Radford (2014) é a discussão sobre os números negativos: na filosofia grega, uma polarização de discussão era representada pela dualidade ser/não ser, na qual o não ser não tinha a mesma “dignidade” existencial do seu oposto. Famoso é o aforisma de Parmênides: “O ser é e não pode não ser”, ao qual faz de corolário o fato que “Sobre o não ser, nada pode ser dito, em quando não é”⁹⁰. Outro fato era que a matemática grega estava embasada na geometria, assim, tanto a aritmética quanto a álgebra tinham as suas interpretações a partir de elementos geométricos. Desse modo, por exemplo, o “produto notável”:⁹¹ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ significava, literalmente, que a área de um quadrado

⁸⁸ “We tend to talk as if there were one mathematics, one history, and one history of mathematics. Perhaps we should start by asking ourselves what we mean by mathematics; only then might we be able to deal with the question of its possible histories.”

⁸⁹ “[...] mathematics is immersed in cultural and historical symbolic system on which it draws its basic concepts”.

⁹⁰ O fato de que a visão “absolutista” de Parmênides não fosse a única é demonstrado por outros vários pensadores: Heráclito, com o seu devir e a sua harmonia/conflito entre os opostos, e Platão, com a sua máxima “O ser se diz de muitas maneiras”, chegam até as reflexões aristotélicas sobre o papel do verbo ser. Mesmo assim, a ideia de ser associada à existência e o de não ser associada a não existência era bem enraizada na *koiné* greco-romana. Esta citação parmenidiana entra, particularmente, em ressonância com o primeiro aforismo de Wittgenstein: “aquilo de que não se pode falar, deve-se calar”

⁹¹ A forma algébrica corrente que se baseia no uso das letras é moderna, proposta por Descartes e Viète, no século XVII. Os gregos usavam uma notação mista entre palavras e símbolos.

de lado $(a + b)$, com a e b sendo dois segmentos, fosse equivalente à área de um quadrado de lado a , somado à área de quadrado de lado b somado à área de dois retângulos de lados a e b .

Sendo assim, parece evidente que a ideia de existência de um número negativo não faria muito sentido. E, com efeito, o número negativo que, por exemplo, podia aparecer como solução de uma equação, era tratado como um artifício matemático, sem significado “real”⁹².

Ao contrário, na antiga cultura chinesa, um eixo filosófico fundamental era a contraposição (harmonia) entre dois princípios, o Yin e o Yang, igualmente dignos e em posições simétricas. Não surpreende, então, que a matemática chinesa tenha conseguido, muito anteriormente, dar “dignidade” aos números negativos.

Sempre os números negativos permitem abordar o problema da recapitulação sob outro aspecto. Supomos, de maneira totalmente arbitrária, que a história da matemática escolhida para construir uma narração (e, possivelmente, um significado) em sala de aula seja justamente a matemática greco-romana. Acabou-se de ver como, de acordo com esta perspectiva, o número negativo representava uma entidade com a qual trabalhar (isto é, executar operações aritméticas) sem que, por isso, ganhasse o status de número.

Usando as categorias de Gaston Bachelard, poder-se-ia dizer que existia um obstáculo de caráter epistemológico que não permitiu que os matemáticos gregos percebessem o número negativo senão como “artifício” ligado à possibilidade de desenvolver contas. Tal obstáculo consistiu, propriamente, no fato de ter a geometria como base para a aritmética e para a álgebra.

Ora, se este foi o acidentado caminho histórico através do qual, na “cultura europeia”, o conceito de número negativo começou a se desenvolver, seria interessante (re)propor isso em sala de aula? Pode-se pensar que o aluno de hoje, de alguma maneira, possa sofrer as mesmas dificuldades sofridas por Cardano em admitir, para o número negativo, o *status* de número?

Provavelmente não: atualmente, na própria formação e bagagem de “ideias sobre o mundo” que uma criança já tem ao ingressar na escola, está presente uma ideia intuitiva sobre os números negativos. Os andares abaixo do térreo, em um prédio, geralmente são indicados no elevador com números negativos; em dias particularmente frios, em determinados locais, a

⁹² Ainda na Renascença, o matemático Cardano referia-se às raízes negativas das equações como “fictícias”. Assim comenta Tatiana Roque: “É interessante observar que números negativos, quando apareciam nos cálculos, podiam ser chamados “negativos”, entretanto, quando representavam a solução de uma equação eram ditos “fictícios”. Isso mostra que, apesar do reconhecimento da utilidade prática dessas quantidades, elas não eram consideradas números. Os objetos admitidos pela matemática se confundiam com as grandezas geométricas.” (ROQUE, 2012, cap. 7).

temperatura pode descer abaixo do zero, apresentando, assim, valores negativos. Os números negativos permeiam, desse modo, o contexto no qual a criança é mergulhada: isso não significa que a aprendizagem, pela criança, seja “fácil” ou imediata, mas provavelmente indica que a abordagem histórica não apresente vantagens para propor o conteúdo em aula.

Ou seja, as dificuldades epistemológicas que existiram na Alexandria, 2.300 anos atrás, já não estão mais presentes na cidade de São Paulo em tempos presentes, porque a cultura, os símbolos e as práticas sociais que moldavam a visão de mundo naquela época já são diferentes das observadas nos dias atuais.

Outro aspecto ligado à ideia de recapitulação é o de pré-requisito e linearidade: isto é, ao tratar determinados assuntos, é necessário respeitar uma sequencialidade no tratamento dado às ideias matemáticas, haja vista que estas reproduzem, de forma direta ou indireta, a sequência da emergência dessas ideias na história da matemática.

Existe uma linha de pensamento no campo educativo segundo a qual “é possível ensinar qualquer coisa a qualquer um”. O próprio J. Bruner (1978) acredita nesta posição, sustentando que aquilo que mudaria, no limite, seriam as modalidades de apresentação do mesmo tópico.

Por exemplo, Thais Forato, na sua pesquisa de doutorado em ensino das ciências, preparou um plano de atividade para alunos de ensino médio, relativo à natureza da luz. Uma das dificuldades que ela detectou foi a falta de pré-requisitos matemáticos para enfrentar este assunto. Ela contornou o problema abrindo mão da abordagem mais formal e matemática e concentrando-se nas ideias fundamentais, nos aspectos qualitativos e usando ferramentas alternativas, como a montagem de peças de teatro e o uso das animações didáticas (FORATO, 2009).

Um outro caso que pode iluminar este debate é abordado pelo psicólogo e educador Petrovski, que analisa a aprendizagem observando o par discreto–contínuo. Assim, ele assevera:

Como se sabe, tradicionalmente se começava por fazer aos alunos pequenos os números naturais, que são um tipo particular de uma temática mais geral na matemática: as magnitudes. (PETROVSKI, 1985, p. 19, tradução nossa).

Posteriormente, Petrovski se questiona se não seria possível ensinar às alunas primeiramente a ideia de magnitude e, em seguida, como no caso particular, a de números inteiros; mostra, com efeito, como experiências no campo, de fato, tentaram esta abordagem com resultados positivos. A ênfase no processo relatado por Petrovski está no conceito de

maior/menor: é o processo de comparação de quantidades contínuas (por exemplos, dois montes de areia, duas garrafas, continentes líquidos, etc., ...) que origina o conceito de número real (“magnitude”). Ao trabalhar os números naturais, o foco está no conceito de igualdade (ou, para melhor dizer, de equivalência): um número natural corresponde à classe de equivalência de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade, ou seja, os conjuntos pelos quais é possível estabelecer uma relação biunívoca (um a um) entre os elementos de um com os elementos de um outro. A exploração das magnitudes seria tão natural quanto o processo de contagem, enquanto que, perceber as magnitudes, significa explorar as características dos objetos ao redor das crianças: cumprimentos, pesos, volumes, etc.

Independentemente das considerações do psicólogo soviético, que destacava como esta segunda abordagem era melhor que a clássica, estas experiências demonstram como não necessariamente seria preciso percorrer, na educação individual, as mesmas etapas pelas quais a espécie humana passou. Isto é, os primeiro tipos de números que apareceram na história humana foram os naturais, os números usados para contagem, e somente sucessivamente entraram em jogo racionais e, ainda depois, e não sem problemas, os reais: o relato de Petrovski trata do caráter não inelutável que esta trajetória histórica tem perante a trajetória pedagógica.

Aquilo que parece emergir das várias situações relatadas é que uma posição recapitulacionista, atualmente, presta-se a várias críticas que abrangem diferentes aspectos: uma visão menos eurocêntrica da matemática, um destaque cada vez maior dado à “situação” que vivencia o aluno (contexto social e cultural) – como elemento importante para o processo de aprendizagem –, uma importância redimensionada de linearidade e sequencialidade entre diferentes conteúdos – o que implica num “relaxamento” dos vínculos de pré-requisitos – e a ideia de que, por meio de uma oportuna elaboração, é possível ensinar “tudo a todos”.

Tudo isso, por outro lado, não pode levar a uma posição de acordo com a qual não haja relação alguma entre ontogênese e filogênese. Isto é, o fato de criticar uma relação recapitulacionista não pode fazer desperceber outras relações, talvez mais sutis e menos “lineares” entre a formação histórica de conceitos matemáticos e a assimilação de tais conceitos pelo aluno. A visão recapitulacionista pode ser considerada uma versão “ingênua” de se perceber as conexões entre ontogênese e filogênese, do ponto de vista do conhecimento.⁹³

⁹³ Eis um caso de manual no qual uma relação é arbitrariamente substituída por causalidade: a relação entre desenvolvimento histórico da matemática e aprendizagem de um aluno vira o fato que o desenvolvimento

A título de exemplo, pode ser interessante retomar o conceito de obstáculo epistemológico, na formulação original de Gaston Bachelard e na reformulação no contexto didático, feita por Guy Brusseau.

Bachelard formulou a ideia segundo a qual o conhecimento científico progride não por acúmulo, mas por rupturas, devido à superação dos obstáculos epistemológicos que dificultaram a passagem de uma teoria para a sucessiva. Tais obstáculos representam crenças, “sentido comum”, generalizações indevidas que dificultariam a busca de uma solução para um determinado problema.

O olhar do “professor” Bachelard dirige-se, à luz disso, também ao que acontece nas aulas de ciências, destacando como o aluno não chega como uma “tábula rasa” na primeira aula, mas carrega uma bagagem de conhecimentos, crenças e ideias sobre o mundo que não podem ser desconsideradas na atividade didática. Assim:

[...] Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já construídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana. [...] Toda cultura científica deve começar por uma catarse intelectual e afetiva. Resta então a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir. (BACHELARD, 2005, p. 23).

Brousseau aplicou o conceito de obstáculo epistemológico à didática da matemática, já que o próprio Bachelard focou-se, predominantemente, nas áreas de Ciências, mas não explicitamente em matemática. Para Brusseau, a ideia de obstáculo epistemológico apresenta-se como um conhecimento que o aluno tem e que foi por ele elaborado em uma determinada situação ou contexto. Às vezes, o sujeito tenta usar tal conhecimento em situações diferentes e este processo leva à formulação de respostas e teorias incorretas. Assim, o aluno resiste às contradições que o obstáculo lhe produz e à sua modificação por um novo conhecimento, o que torna todo conhecimento possível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos.

histórico da matemática é causa do processo de aprendizagem. Ellenberg descreve vários casos desta substituição indevida com ironia e leveza, citando, particularmente, vários aspectos ligados à estatística. Em um trecho bastante significativo, ele afirma que “a descrição matemática de correlação tem estado bem fixa no lugar desde o trabalho de Galton e Pearson, um século atrás. Assentar a ideia de causalidade sobre um alicerce matemático firme tem sido algo muito mais fugaz” (ELLENBERG, 2015, p. 395).

O próprio Brousseau (1983) coloca como a origem de um obstáculo epistemológico, em sala de aula, no estudo de um determinado assunto, remeta à construção histórica do conhecimento de tal argumento. Tal ligação representa um importante aspecto a ser estudado, justamente por não ser uma “simples” recapitulação.

Por exemplo, uma típica dificuldade que alguns alunos em fase de alfabetização matemática experimentam é ligada ao fato do número zero ter uma representação. O estranhamento de alguns deles deriva do fato que, na explicação do professor, o número remete sempre a uma contagem de objetos: uma maçã, duas camisas... nesta perspectiva, o número zero representa... nenhuma maçã, nenhuma camisa: ou seja, representa “nada”. E por que, então, a ausência de coisas se representa com a presença de um símbolo? Esta “contradição” constitui um obstáculo epistemológico para algumas crianças e se relaciona com a ausência do símbolo para o zero na matemática grega. Por um lado, o sistema de numeração usado na Hellas e, por outro, a estreita ligação entre aritmética e geometria (que relembra, neste caso, a ideia de número para contar objetos) representam elementos históricos para explorar as dificuldades que podem aparecer com a criança moderna, sem pretensão que os dois processos, histórico e pessoal, necessariamente revelem um paralelismo mecânico.

Outro exemplo, oportunamente tratado por Pommer (2010), é representado pelas operações de divisão e multiplicação no campo dos inteiros: o aluno, por generalização, acaba pensando que a multiplicação, aprendida com os números naturais, tem sempre a ver com o conceito de aumentar – e, vice-versa, a divisão remete sempre ao conceito de diminuir. Tal dificuldade remete à complexidade de perceber os números negativos como números “de verdade” e dar, assim, sentido às suas manipulações algébricas. Também neste caso, o foco não seria fazer o aluno percorrer as etapas históricas ligadas ao uso dos números inteiros, mas sim estudar a história das matemáticas (mediterrânea, chinesa...) para dela extrair ideias e mecanismos de significação que possam inspirar, na sala de aula, a construção de sentidos para os alunos.

4.2 A HISTÓRIA COMO LUGAR DE CRIAÇÃO DE SENTIDO

Os homens, ao contrário do animal, não somente vivem, mas existem, e sua existência é histórica.
(FREIRE, 2001, p. 51).

Eu defendo uma compreensão histórica da matemática.
(HERSH, 1997, p. XIV, tradução nossa).⁹⁴

Vejo, então, a história da matemática como uma correspondência objetiva para entender a Epistemologia.
(D'AMORE, 2014, p. 24, tradução nossa).⁹⁵

A tradição filosófica que aponta, na história, o lugar onde o sentido se estrutura é complexa e multifacetada. Um marco neste caminho foi colocado por Marx, ao “tirar” a visão dialética hegeliana do mundo das ideias e deslocá-la para o mundo das pessoas: a dialética passa, assim, a ser materialista e histórica.

Ortega y Gasset, com o seu famoso lema “Eu sou eu e a minha circunstância”, destaca, justamente, como a existência do sujeito é necessária e estritamente relacionada com a realidade (histórica) que o cerca. Não casualmente, o autor espanhol é também considerado “o pai” da expressão “razão histórica”, que complementaria o primeiro conceito, apontando por um duplo caminho: por um lado, para compreender a pessoa, é necessário que a razão esteja “dentro” da vida, da situação da pessoa; por outro, a própria razão modifica-se no tempo. Assim, o significado evolui historicamente e o estudo da história fornece um ponto de observação para entender tais mudanças, para dar um significado às... mudanças de significado!

A importância desta perspectiva, de alguma maneira, é capturada por Caraça:

O poder revolucionário de uma ideia mede-se pelo grau em que ela interpreta as aspirações gerais, dadas as *circunstâncias* do momento em que atua. Assim, uma ideia ou teoria que, em dada época, é revolucionária, pode, noutra em que as circunstâncias sejam diferentes, ter perdido por completo esse carácter. (CARAÇA apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2003, p. 265, grifo nosso).

Ou seja, é a circunstância que determina o carácter de uma ideia ou de uma ação, assim como pode ser somente uma razão histórica que possa emitir esta sentença.

⁹⁴ “I advocate a historical understanding of mathematics”.

⁹⁵ “Vedo dunque la storia della matematica come un riscontro oggettivo per capire l’Epistemologia”.

No âmbito do ensino da matemática, nos últimos anos, o uso da história foi apontado de acordo com vários referenciais (ferramenta para o professor, assunto para os alunos, o contexto multiculturalista, o uso das fontes originais, roteiro de aula etc.) como um recurso muito importante para o bom êxito do processo de aprendizagem (FAUVEL; VAN MAANEN, 2000).

D'Amore (2014, p. 21-22, tradução nossa) ressalta para não se usar ingenuamente esta ideia, bem expressa na equação a seguir: “uso da história no ensino = aprendizagem garantido”.

E continua:

[...] consideramos que o conhecimento da história e da epistemologia da matemática é necessário na formação dos docentes, mas isso não significa que precisem ser utilizados como instrumentos didáticos explícitos com os estudantes; se se decide fazer uso da história com este fim, demanda-se muita cautela. (D'AMORE, 2014, p. 21-22, tradução nossa).⁹⁶

Ou seja, existe um amplo consenso sobre a história ser uma ferramenta útil (talvez indispensável) no ensino da matemática: precisa-se, contudo, compreender de que maneira trazer isso pra a sala de aula de modo a beneficiar o processo de ensino-aprendizagem. Assim discorre Furinghetti sobre o assunto:

Uma abordagem ingênua que consiste em transpor diretamente acontecimentos históricos para a sala de aula, passando por cima de todas as considerações metodológicas, permanece a um nível meramente superficial e não conduz a uma situação didática significativa para o processo de aprendizagem. (FURINGHETTI, 1997, p. 61, tradução nossa).⁹⁷

Como, então, usar a história para construir uma “situação significativa”? A resposta pode ser procurada, justamente, a partir das pesquisas de Furinghetti (1997, 2003a, 2003b) sobre as *cognitive roots* (raízes cognitivas), que podem ser encontradas explorando a história da matemática. Em uma imagem sugestiva, se o conceito matemático, tal qual é conhecido atualmente, representasse as folhas de uma árvore (em analogia ao processo histórico), percorrer o caminho que leva à compreensão histórica do processo permitiria descer até as suas raízes.

⁹⁶ “[...] consideramos que el conocimiento tanto de la historia como de la epistemología de la matemática es necesario en la formación de los docentes, pero esto no significa que tengan que ser utilizados como instrumentos didáticos explícitos con los estudiantes; si se decide hacer uso de la historia con este fin, se requiere mucha cautela.”

⁹⁷ “The naïve approach which consists of transposing directly historical passages into the classroom, bypassing all methodological considerations, remains at a rather superficial level and does not lead to didactic situations that are significantly helpful to learning”.

Dito de outra maneira, a história é o lugar privilegiado a partir do qual se pode lançar mão da tentativa de criar sentido, sendo a base pela construção de uma narrativa. Assim, a história serve

não para reconstruir o conhecimento monumental da nossa tradição milenária de novo e do nada, mas para que os conceitos matemático *façam sentido* para os alunos. (FURINGHETTI; RADFORD, 2008, p. 644, tradução nossa, grifo do autor).⁹⁸

Claramente, esta perspectiva remete à uma visão da matemática processual, em constante mudança enquanto produto cultural das diferentes comunidades humanas: uma matemática como processo histórico social justifica uma abordagem histórica para o seu estudo e a sua compreensão. Sob este ponto de vista, a ideia de *cognitive root* ecoa com o conceito de *ideia fundamental*, tal como esboçado no item 1.1 e com a ideia de *razão histórica* discutida na introdução: qual é a ideia forte que está na base de um assunto matemático? Como “apareceu” e como desenvolveu-se e modificou-se ao longo do tempo e do espaço?

As respostas a estas perguntas fornecem a base para construir uma narrativa para a sala de aula que permita (re)construir o sentido e o significado dos assuntos tratados. Nesta fase, os elementos históricos (além das *cognitive roots*) podem entrar na construção da narrativa sob forma de enredos ou como quadro geral sociocultural, conforme será discutido no item 5.2.

⁹⁸ “Rather than constructing the monumental knowledge that constitutes our millenarian mathematical tradition anew and from scratch, the students *make sense* of cultural mathematical concepts”.

4.3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO MEDIADORA ENTRE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Figura 11 - O tetraedro proposto por Fried

Fonte: Fried (apud RADFORD, 2014, p. 94).

Nota: O tetraedro mostra como a história da matemática é uma interface (ou, no caso um “inter-vertice”) entre a Matemática, a pesquisa em educação matemática e a própria atividade de ensino.

Fried (apud RADFORD, 2014, p. 94-98) destaca algumas relações existentes entre as pesquisas em educação matemática, o ensino da matemática, a matemática e a história da matemática. De maneira interessante, ele coloca estes quatro campos como vértices de um tetraedro, conforme também a escolha de Machado (1995, p. 53-79) ao falar do paradigma epistemológico da geometria. Como ele destaca, a particularidade deste sólido é de que todos os vértices (assim como todas as faces) são diretamente conectados com os demais. Assim, no “tetraedro de Fried”, a história da matemática está diretamente conectada com os outros campo, assim como cada um deles está, por sua vez, conectado com os demais. Fried começa a explorar esta simetria destacando como os problemas que relacionam a história da matemática com a educação matemática se espelham na relação matemática/educação matemática e também matemática/história da matemática (apud RADFORD, 2014, p. 94). Cada vértice expressa uma comunidade de atores que não falam a mesma língua, sendo, por exemplo, a pesquisa em matemática preocupada em outros assuntos e construída a partir de outros recursos que dizem respeito à pesquisa em educação matemática. Tampouco a história da matemática e a própria matemática podem ser consideradas a mesma coisa e, ao contrário, demandam ferramentas diferentes. Entre a história da matemática e a educação matemática também existem atritos: para um grego do século V a.C. os números negativos, literalmente, não existiam, de acordo com uma concepção matemática coerente com a época. Como o

educador matemático usaria isso na sua aula de matemática? Por outro lado, Fried sempre destaca como a história da matemática, em seu aspecto didático, às vezes é vista como algo opcional, que possa ser colocada ou tirada da narração do docente (RADFORD, 2014, p. 95).

Uma ruptura das simetrias do tetraedro é representada pelo fato da educação matemática não ser tão “granítica” como a história e a matemática, sendo as duas últimas ciências já estruturadas, dotadas das suas metodologias, enquanto a educação matemática vive ainda uma fase camaleônica (e, ainda mais, a pesquisa sobre ela).

Além destas (e de possíveis outras) análises pontuais sobre as tensões entre estas quatro polaridades, a imagem do tetraedro parece sugerir uma relação profunda entre elas: por exemplo, se é verdade que a matemática, de maneira retrospectiva, pode ser vista como um sistema axiomático-dedutivo, é também verdadeiro que o seu nascimento, a sua estruturação, as suas motivações foram de ordem histórico e social (ver itens 3.4 e 4.4).

Sugere-se que assim como o processo histórico produziu a matemática tal como aparece, uma reelaboração de tal processo deveria entrar como elemento constitutivo da ação didática: desse modo, o vértice da história da matemática assume um status de mediador/interface (FURINGHETTI, 2003; 2007) entre a própria matemática e o seu ensino. O ensino continua tendo “acesso direto” à matemática, mas sempre acompanhado pela história: a professora tem acesso aos elementos de Euclides (a forma axiomatizada e dedutiva), mas necessariamente tem que acessá-los junto com a história que os produziu.

4.4 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE: UMA RELAÇÃO NATURAL

Nas obras de Galileu encontra-se uma passagem na qual o autor discute das críticas feitas por alguns cientistas da sua época, que sustentam que as ideias da matemática teriam que ser desenvolvidas separadamente dos outros assuntos, tais como a física e a filosofia. Galileu responde que a verdade é única e faz partes de todas as disciplinas. Esta visão aplica-se também ao ambiente escolar.

(FURINGHETTI 1998, p. 50, tradução nossa).⁹⁹

Ciência, filosofia, arte, religiões, têm uma raiz comum – a atividade social dos homens.

(CARAÇA apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2003, p. 265).

Se, dificilmente um professor de matemática escapará (mais cedo ou mais tarde) da pergunta de um seu aluno: “Professor, mas para que serve isso?”, é provável também que os alunos estejam tão acostumados com uma relação prevalentemente separada e hermética entre as diferentes disciplinas que vários deles irão demorar meses até que o “filósofo” do *cogito, ergo sum* se torne a mesma pessoa do “matemático”, autor dos eixos cartesianos (se é que esta ligação vai ser feitas) (HERSH, 1997, p. 110).

É interessante perceber como, conjuntamente com o movimento de disciplinarização das diferentes matérias do conhecimento humano¹⁰⁰, foi se desenvolvendo a demanda por caminhos interdisciplinares. De acordo com uma reelaboração da terceira lei de Newton, quanto maior o grau de especialização requisitado pela escola (e pela sociedade da qual ela é expressão), tanto maior será (ou deveria ser) a demanda para que esta tendência analítica seja balanceada por uma sinergia entre disciplinas e conteúdos diferentes¹⁰¹.

⁹⁹ “In Galileo’s works there is a passage in which the author complains of the criticism of certain scientist of his time, who claim that mathematical ideas have to be developed separately from other subjects such as physics or philosophy. Galileo writes that truth is unique and is part of every discipline. This view applies to the school environment too.”

¹⁰⁰ Sem pretensão de esgotar o assunto, pode-se encontrar um movimento que na idade moderna, depois do período da Renascença, começa a considerar o *corpus* de conhecimento acumulado pelos seres humano como grande demais para ser dominado por um único indivíduo. Mais tardiamente, por volta do século XX, no debate sobre a educação e o ensino, começou a ser colocada a exigência de que o professor deveria ser especialista na sua área, não somente para dominar melhor o conteúdo a ser ensinado, mas também para lidar com as diferentes técnicas e modalidades específicas do ensino de cada disciplina.

¹⁰¹ No livro “As vertigens da tecnociência”, Bernadette Bensaude-Vincent coloca a necessidade, mais presente no tempo atual do que nas décadas passadas, de juntar sempre a formação técnica com a formação mais ampla para poder gerir e decidir sobre os problemas e questões que a tecnociência (uma mistura indissolúvel de ciência e aplicações práticas) coloca.

Se, por um lado, o ideal do “homem renascentista”¹⁰² parece impraticável no mundo atual, por outro, às vezes, surge uma tendência a uma parcialização desnecessária das disciplinas: dividir, por exemplo, a matemática do ensino médio entre o professor de geometria, de matemática financeira, de álgebra e assim por diante...¹⁰³ Esta última tendência configura-se como reflexo de uma impostação, de acordo com a qual quanto maior será a especialização de um professor, melhor será a sua capacidade de tratar o assunto.

O trabalho sobre a interdisciplinaridade envolve pelo menos dois aspectos: um, mais geral, relaciona-se com o conceito de “ideia fundamental” - proposto por Bruner (1978) -; outro, ligado à esfera da matemática, remete à dimensão histórica como “palco” onde as ligações entre a “ciência exata” e os demais campos de produção dos seres humanos podem voltar a se entrelaçar.

Sobre o primeiro aspecto, Bruner (1978) coloca como o ensino fundamental deveria se estruturar a partir das ideias fundamentais, as quais, por definição, não podem ser adequada e completamente tratadas em uma única disciplina: o significado delas precisa ser explorado em vários campos do saber humano. Assim, em suas palavras:

[...] os fundamentos de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade. Embora essa proposição possa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial [...] o de que as ideias básicas que se encontram no âmago de todas as ciências e da matemática, e os temas básicos que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas ideias básicas ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas. Apenas quando tais ideias básicas são propostas em termos formalizados, [...], é que ficam fora do alcance da criança, se ela não as tiver, primeiro, compreendido intuitivamente e não tiver tido a oportunidade de experimentá-las por conta própria. (BRUNER, 1978, p. 11 – 12).

¹⁰² Leonardo da Vinci e Pico della Mirandola são dois símbolos (talvez os mais significativos e reconhecidos) de um ideal de pessoa culta, *expert* em inúmeras disciplinas teóricas e práticas. Leonardo foi “engenheiro”, arquiteto, pintor, naturalista e pesquisador do corpo humano; de Pico della Mirandola, tornou-se proverbial o conhecimento enciclopédico (*ante litteram*) que ele mostrava nos diferentes campos do saber. Ainda um século mais tarde, Descartes era tão famoso como filósofo quanto como matemático e, de Leibniz, E. T. Bell (1986) chegava a dizer que “experto de todas as artes mas mestre de nenhuma é um ditado que possui exceções incríveis, e Leibniz constitui uma delas” (“Jack of all trade, master of none, has spectacular exceptions like any other folk proverb, and Leibniz, is one of them”). Já no século XIX, o ideal estava mudando: no máximo, podia-se achar um *expert* em todos os campos... da mesma disciplina! E tal tendência estava declinando ao começar do século XX; nas palavras de Eves (2011, p. 618): “Pode ser que Poincaré seja a última pessoa a respeito da qual se possa sustentar sensatamente que seu campo de atuação era *toda* a matemática.”

¹⁰³ Este movimento parece ser bem descrito pela expressão “barbárie do especialista”, usada por Ortega Y Gasset no livro “A rebelião das massas”, para indicar uma prática que desencadeia em uma forte crise humanista: crise de valores humanos e sociais, de princípios éticos e morais (AMARAL, 2014, p. 214).

Este parágrafo condensa várias ideias brunerianas: quando ele refere-se aos “fundamentos” e às “ideias básicas” e “temas básicos”, está indicando justamente as ideias fundamentais e o fato de que elas estão ao alcance de todos, não importando, para tanto, a idade do educando. Esta colocação é muito forte¹⁰⁴ e acarreta algumas consequências, a primeira das quais é, se não a queda, pelo menos o relaxamento dos vínculos baseados em “pré-requisitos”. Em segundo lugar (e relacionada à primeira), a ideia de que alguns assuntos “naturalmente” sejam mais simples e propedêuticos a respeito dos outros¹⁰⁵, na perspectiva proposta por Bruner, ficará redimensionada.

Continuando, o psicólogo estadunidense menciona, de forma implícita, a ideia de aprendizagem em espiral; isso é feito ao mencionar que a criança pode aprofundar a compreensão das ideias e utilizá-las de forma cada vez mais complexas.

A conclusão do argumento é que, sem uma “compreensão intuitiva”, a formalização não ajuda o processo cognitivo: o sentido de uma ideia fundamental deve ser o mais imediato e intuitivo possível. Em caso contrário, ou a ideia não é “verdadeiramente” fundamental ou está sendo abordada em termos de tal modo formais e abstratos que, no lugar de mostrá-la com clareza, ofuscam o seu significado.

A noção da ideia fundamental como o núcleo ao redor do qual é possível construir um currículo é proposta também por Caraça. Em sua obra, indicativamente intitulada *Conceitos Fundamentais da Matemática*, o autor português relaciona o ensino da matemática com a sua visão de sociedade e de ensino.

Retomando a ampla e cuidadosa análise feita por Amaral (2014), pode-se ver como, para Caraça, em cada pessoa existem duas dimensões a respeito do conhecimento: o homem-técnico, que representa a sua especialidade e profissionalidade, e o homem-comum, que representa o resto. O primeiro aspecto é associado àquilo no que se concentra o ensino, que visa a formar a pessoa para o mercado de trabalho; o segundo, por sua vez, é ligado em termos amplos à “cultura geral”. Dentro desta dialética, existe um núcleo de ideias fundamentais que, por sua natureza, não podem ser privilégio somente de poucos, mas que tem que ser um direito para todos. Assim, nas palavras de Caraça:

Em cada ramo do conhecimento há o que é do domínio do especialista e o que é do domínio geral, aquilo que só uma vida inteira de trabalho consegue aprender (quando consegue) e aquilo pelo qual esse ramo entronca na

¹⁰⁴ A título de exemplo, ela contradiz a dinâmica ontogenética proposta por Piaget, de acordo com a qual, a cada faixa etária, corresponderia um conjunto de capacidades aptas a lidar com conceitos diferentes.

¹⁰⁵ A este respeito, o exemplo fornecido por Petrov é extremamente significativo (ver item 3.1).

corrente geral das ideias e da civilização. [...]. O que se pretende vulgarizar é, precisamente, o que pertence ao domínio geral, e aí não há nada que não possa ser aprendido pelo comum dos homens. (CARAÇA, 1941, p. 7).

Caraça continua dando um exemplo do que entende por “domínio de especialista” e “domínio geral”, no campo da matemática:

Para darmos um exemplo tirado duma ciência que nos é familiar, diremos que o conhecimento da moderna teoria da integração, da teoria das matrizes ou das estruturas é com o matemático-técnico; o que o conhecimento das ideias mestras da Análise Infinitesimal e a sua filiação histórica da Física e da Filosofia é com o matemático-homem-comum, como o tipógrafo, o médico e o agricultor. Do mesmo modo, a maneira de abrir a terra, de semear e colher é com o agricultor-técnico, ao passo que o significado da agricultura e de seus problemas na vida social é comum ao agricultor homem-comum, como o médico, o matemático e o tipógrafo. (CARAÇA, 1941, p. 7-8).

Hodiernamente, usando a categoria da “cidadania”, poder-se-ia dizer que a análise infinitesimal teria um núcleo de ideias fundamentais (ver item 6.3) que são necessárias para o cidadão exercer a sua vida na comunidade. Talvez Paulo Freire, se tivesse escrito sobre matemática, diria que tais ideias fundamentais seriam necessárias ao oprimido para fazer a sua leitura do mundo e para atuar de modo a se libertar da opressão, ligando ao conceito de *ideia fundamental* aquilo que chamou de *tema gerador*.

Merece particular destaque o fato de Caraça não se referir somente às ideias mestras (ideias fundamentais) da análise “interna” à matemática, mas também à ligação “histórica” com a física e a filosofia. Assim, por um lado, ele ressalta a ideia de que os conceitos fundamentais não são relegáveis à uma única disciplina, mas transcendem esta divisão para abranger vastos campos de estudos. Por outro, ele destaca explicitamente como a ligação entre a matemática e as outras matérias (no caso, filosofia e física) se dá através da ligação histórica: ou seja, é por meio desta dimensão que é possível resgatar as conexões entre diferentes campos do saber e trazê-las para sala de aula.¹⁰⁶

¹⁰⁶ O trecho citado carrega também um outro ponto importante e de grande atualidade: o fato de que as ideias fundamentais (e, no específico, relativas ao campo da matemática) não podem ser consideradas privilégios de poucos (especialistas), mas têm que ser bagagem cultural de todos. Se, do ponto de vista teórico, esta posição parece óbvia (por exemplo, quase todos os currículos do ensino fundamental do mundo apresentam o estudo da matemática como um pilar, junto com o estudo sobre a língua materna), a dificuldade com a qual os alunos se relacionam com esta matéria atesta que existe ainda uma defasagem entre as posições teóricas e as suas colocações práticas. Também, a ausência de conhecimento matemático é usada como instrumento de seleção/exclusão: desde entrevistas até os próprios vestibulares... Ver, por exemplo, Santos (2015), particularmente o cap. 5.

A visão que Caraça expressa sobre a matemática está estritamente conectada com a visão sobre a sociedade e, consequentemente, com a função que a matemática deveria ter no contexto social. Esta relação (matemática-

Traçando um paralelo de matriz filosófica, pode-se pensar no Uno de Plotino: para o filósofo neoplatônico, o Uno, por essência *excedente*, transborda e cria a realidade sensível; assim, as ideias fundamentais impregnam as várias disciplinas: ideias como a de equilíbrio, de causalidade, de energia são conceitos que “não cabem” nas estreitezas de uma única disciplina e precisam, portanto, serem abordados tanto na física quanto na literatura, na filosofia e na matemática.

Coerentemente com esta perspectiva, Caraça privilegia os aspectos que Amaral (2014, p. 218) chama de “externalistas”, ou seja, o matemático português concentra-se em apresentar as ideias matemáticas inserindo-as em um contexto histórico, filosófico e social, tentando construir roteiros que permitam, à luz destes aspectos, uma compreensão dos assuntos tratados. Tudo isso, em detrimento dos aspectos “internalistas”¹⁰⁷, tais como demonstrações e algoritmos. Contra esta matemática “tecnicista”, ou seja, cujo *curriculum* constitui-se de métodos, algoritmos, procedimentos, “receitas de bolo”, regras e habilidades, também Bishop (1997, p. 7-9) lança mão de uma crítica forte, que ataca por dois lados: em primeiro lugar, ele faz sua própria crítica de modo semelhante, ainda que implicitamente, à de Caraça, apontando que no ensino básico não pode ser ensinada uma matemática com a expectativa que todas as alunas tornem-se matemáticas; ao contrário, deve ser uma matemática para todos, independentemente de escolhas futuras ou de especializações. Do outro lado – e com uma certa sagacidade –, ele levanta a questão de qual seria o intento de formar perfeitos matemáticos-tecnicistas na era dos computadores, que, por excelência, são os melhores (e, de longe, os mais rápidos!) executores de algoritmos e técnicas matemáticas. A resposta que Bishop propõe é simples e direta (e poderia bem ter sido dita por Caraça!):

um curriculum tecnicista não pode ajudar a entender, não pode capacitar o aluno a desenvolver um sentido crítico, seja internamente ou externamente à matemática. *Na minha opinião, um curriculum tecnicista não pode educar.*

sociedade) continua sendo um aspecto analisado por vários autores e trabalhos: por exemplo, nas palavras de Radford: “[...] a matemática infelizmente tornou-se um campo de conhecimento técnico sob a moderna influência neoliberal dos modos de produção, e a sua ênfase sobre a importância do mercado e do consumo tornou-se a forma de vida (pós)moderna predominante.” (RADFORD 2014, p. 91). No original: “[...] mathematics has unfortunately become a technical domain under the influence of contemporary neo-liberal forms of production and its emphasis on marketing and consumption as the modern and postmodern predominant forms of life.”

¹⁰⁷ Para não confundir o termo com os movimentos internos da matemática como, por exemplo, o surgimento das geometrias não euclidianas que não foi motivado por nenhuma necessidade “externa” da matemática, talvez um rótulo melhor pudesse ser “tecnicista”. A este respeito, Furinghetti (2004b, p. 8, tradução nossa), retomando as palavras de Hadamard, coloca que “...na matemática existem dois tipos de invenções: aquela que nasce com o objetivo de resolver determinados problemas práticos e aquela que se move internamente à matemática e sucessivamente vem se estendendo à outras aplicações”

Ele somente pode dar instruções e treinar. (BISHOP, 1997, p. 8, tradução nossa, grifos do autor).¹⁰⁸

À luz desta discussão, o famoso aforismo de Dirichlet – “é preciso colocar os pensamentos no lugar dos cálculos” (apud ROQUE, 2012, p. 89) – pode ser reinterpretado. O matemático francês pronunciou estas palavras indicando que os matemáticos deviam seguir rumo à abstração, substituindo os cálculos (práticos e concretos) com elucubrações sobre estruturas cada vez mais gerais. Mas, num contexto crítico a respeito do tecnicismo, estas palavras podem ser utilizadas justamente como uma crítica a um ensino da matemática que foca algoritmos e técnica em detrimento da discussão e da apreciação das ideias fundamentais contidas nela.

A posição de Caraça parece estar no mesmo *phylum* do movimento, da “matemática para todos”¹⁰⁹, que vê em Hans Freudenthal um dos expoentes mais reconhecidos (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 787-788): se o ensino da matemática na escola básica tem que ser para todas as alunas e não somente para as pouquíssimas que irão ser engenheiras, físicas e matemáticas, então o ensino deve estar entre a matemática da vida quotidiana e as ideias da matemática enquanto ciência. Deve ser, segundo Freudenthal, uma *matemática realística*, entendendo como realidade não somente a matemática prática, mas como “aquilo que o senso comum experimenta como verdadeiro em determinado grau” (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 788) ou, ainda, como algo “razoável, realizável ou imaginável, em forma concreta” (PEREZ et al., 2002, p. 31). Apesar de apontar o holofote para dois elementos (parcialmente) diferentes (ideias fundamentais e matemática para todos), o matemático português, ao falar de matemática para não especialistas, e o matemático holandês, ao falar de matemáticas para todas, apontam a mesma ideia: a matemática é uma parte fundamental da cultura das comunidades humanas, assim como a língua materna, e todos os integrantes destas comunidades têm o direito de conhecer tal aspecto. Caraça enuncia com clareza este ponto:

Encarando agora as sociedades organizadas, tal como atualmente se encontram, pergunta-se – quem deve ser o detentor da cultura?, a massa geral da humanidade, ou uma parte dela? [...]

A pergunta feita deve responder-se condenando a detenção da cultura como monopólio de uma elite... Deve portanto promover-se a cultura de todos e isso é possível porque ela não é inacessível à massa; o ser humano é indefinidamente aperfeiçoável e a cultura é exatamente a condição

¹⁰⁸ “A technique curriculum cannot help understanding, cannot develop meaning, cannot enable the learner to develop a critical stance either inside or outside mathematics. *In my opinion, a technique curriculum therefore cannot educate.* It can only instruct and it can only train”.

¹⁰⁹ Este é o nome histórico: daqui em diante será usado alternativamente *para todos* ou *para todas*.

indispensável desse aperfeiçoamento progressivo e constante. (CARAÇA apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2003, p. 263).

Então, para os dois matemáticos, a preocupação é que o acesso à matemática não dependa da classe social, dos recursos econômicos, mas seja garantido universalmente.¹¹⁰

Mais especificamente, falando da natureza do saber matemático, Caraça diz:

A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre. (CARAÇA apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2003, p. 270, grifo nosso).

Assim, com a referência à *vida real*, aparece um elo entre a proposta de Caraça e Freudenthal: não casualmente, os dois apontam no uso da história da matemática um recurso importante para ensinar e discutir a matemática em sala de aula; adicionalmente, o que demanda elaboração, são as ideias fundamentais, que devem se tornar parte do real (na acepção de Freudenthal) para que atinjam a percepção dos alunos e, naturalmente, desse modo, conectem-se com os outros campos do saber.

Na mesma linha, Santos (2008, p. 29) destaca duas polaridades, uma indicada como *instrumental/funcional* e outra *especializada/idealizada*. O primeiro campo indica uma aplicabilidade imediata, uma função prática logo perceptível, enquanto o segundo remete a conceitos mais “abstratos”, no sentido de serem ideias desenvolvidas com um movimento interno da matemática, cuja aplicabilidade no campo da ciência e da técnica aparece mais distante e “escondida” no funcionamento de computadores, satélites, etc. Excetuando-se as operações aritméticas e poucos outros conceitos, para os demais a busca de uma aplicabilidade ao alcance das alunas da escola básica é tortuosa: por isso, o caminho da “utilidade” é, em geral, difícil e perigoso, enquanto o caminho de construir um sentido que passe (também) por outros eixos é mais promissor.

A ligação entre ensino da matemática e transdisciplinaridade através da história da matemática é colocada em destaque por F. Furinghetti ao longo de vários trabalhos,

¹¹⁰ Gravemeijer e Terwel (2000, p. 795), ao relatarem esta posição de Freudenthal, citam também o efeito Matthew como algo ao qual a ideia de matemática para todas deveria se contrapor. Tal efeito, formulado no âmbito da sociologia, refere-se à vantagem cumulativa derivada de estar numa posição inicial melhor: uma forma popular de render isso seria a constatação segundo a qual quem é rico mais facilmente se torna mais rico e quem é pobre se torna cada vez mais pobre.

particularmente em sua obra *History of Mathematics in school across disciplines*. A matemática italiana, frente ao fato que, muitas vezes, nas escolas, as diferentes matérias se apresentam como “ilhas”, propõe o uso da história da matemática para mostrar “a gênese das ideias [fundamentais] e das conexões entre os diferentes assuntos, deixando, assim, a cultura transmitida na escola um corpo de conhecimento homogêneo” (FURINGHETTI, 1998, p. 1, tradução nossa)¹¹¹.

A seguir, vários exemplos, tanto da literatura quanto de um projeto realizado no ensino médio, em Genova, são trazidos à tona e discutidos: o estudo dos infinitésimos e os paradoxos de Zenão; as regras da perspectiva e as pinturas renascentistas; a relação entre o barroco romano e as cônicas; as pinturas de Escher e as geometrias não euclidianas.

Uma das dificuldades relatadas pela professora do ensino médio (e coautora do artigo acima citado) era a dificuldade dos alunos em entender o significado geral das demonstrações¹¹²: foi então desenvolvida uma atividade junto com a professora de filosofia, com o objetivo de que os alunos analisassem raciocínios de alguns filósofos (a noção de infinito e do ser de Parmênides, algumas argumentações de Sócrates nos diálogos platônicos). O resultado foi, por um lado, uma melhor compreensão dos mecanismos de encadeamento lógicos e, por outro, a percepção de que para argumentar uma tese, tanto sobre o “ser”, quanto sobre o “integral”, as práticas, as modalidades, os esquemas são os mesmos.

Aquilo que não é um pormenor, um tecnicismo ou um mero detalhe, remete a ideias fundamentais que podem ser estudadas e entendidas adequadamente somente ampliando o olhar e concedendo-se uma visão abrangente, não forçada dentro dos (angustos) limites de uma disciplina. Sendo assim, a história da matemática pode fornecer a teia para entrelaçar as diferentes matérias, da mesma maneira que na idade média representava-se em *arazzo*¹¹³ vários episódios da vida de um santo como se, juntos, compusessem a mesma imagem.

4.5 À MODA DE SÍNTESE...

Foram analisadas, neste capítulo, várias modalidades de utilização da história da matemática como elemento em destaque na sala de aula. Com exceção da ideia de

¹¹¹ “[...] the genesis of the [fundamental] ideas and the connections among the various subjects thus making the culture transmitted at school a homogenous body of knowledge”.

¹¹² No artigo se faz referência ao fato que, pontualmente, os passos das demonstrações ficavam claros, mas faltava uma compreensão mais ampla do processo como um todo.

¹¹³ Tapeçaria artística usada como revestimento de parede.

recapitulação, que atualmente pode ser utilizada apenas muito parcialmente, outros aspectos – tais como o papel da história como contexto para criação de sentido, a ideia de história como mediadora entre conteúdo matemático e atividade didática, o favorecimento da interdisciplinaridade por meio da história – representam elementos importantes e fundamentais a favor do uso da história no ensino da matemática. Tais concepções serão levadas em consideração nos próximos capítulos de modo a criar referenciais para nortear a ação docente.

5 HISTÓRIA E NARRATIVA

5.1 HISTÓRIA E NARRATIVAS: UMA VIA DE MÃO DUPLA

[...] a História é um recurso formidável, como bem sabem os literatos italianos de todos os tempos; mas impõe regras rígidas à invenção e na relação com o público.

Alberto Asor Rosa (2015, tradução nossa).¹¹⁴

A vida não é a que a gente viveu e sim a que a gente recorda, e como recorda para contá-la.

(Gabriel García Márquez).¹¹⁵

Furinghetti (2003), ao explicar a relação entre história e ensino da matemática, cita Umberto Eco:

No seu belo livro de análises de textos narrativos, Umberto Eco retoma um conceito expresso por Hayden White e associa a historiografia ao conceito de artefato literário. Eu vejo a história [da matemática] na sala de aula como um artefato que funciona como mediador no processo de ensino-aprendizagem. (FURINGHETTI, 2003, p. 88, tradução nossa, grifo nosso).¹¹⁶

Como mencionado no item 3, a matemática, de todas as construções sociais da humanidade, talvez seja a única que por motivos internos apresente uma estrutura lógica extremamente rígida, de tal modo a justificar a ideia que ela exista “independentemente” dos matemáticos. Este fato coloca em séria discussão as possibilidades de construção de narrativas e traz à tona os vínculos que o narrador tem que respeitar devido a este aspecto.

Ian Stewart (2016, p. 164) propõe que a construção narrativa seja superior à “consistência lógica” interna da matemática: literalmente, ele afirma que “a lógica é atropelada por aquilo que chamamos ‘narrativium’. O poder da narrativa, da história.”¹¹⁷ Ou seja, a própria consistência lógica da matemática pode ser dobradas às exigências narrativas. Uma posição tão forte como essa demanda que as motivações da narrativa sejam ainda mais

¹¹⁴ “... la Storia è una risorsa formidabile, come sanno i letterati italiani di tutti i tempi; ma impone rigide regole all’invenzione e al rapporto con il pubblico.”

¹¹⁵ Em Pasini et al. (2016).

¹¹⁶ “Nel suo bel lavoro di analisi dei testi narrativi Umberto Eco (1994, p. 161) riprende un concetto espresso da Hayden White e parla di storiografia come artefatto letterario. Io vedo la storia usata in classe come un artefatto che funziona da mediatore nel processo di insegnamento-apprendimento.”

¹¹⁷ O autor discute este aspecto com referência ao fato de que em seu livro serão abordados, primeiramente, os números complexos e, depois, os reais; mesmo que, logicamente, os primeiros dependam dos segundos.

estruturadas e argumentadas: não se pode derogar da lógica interna da matemática sem bons motivos!

Do ponto de vista epistemológico, esta posição se fundamenta, por um lado, na ideia bruneriana da narrativa como fonte de significado e, por outro, na concepção do conhecimento como processo relativo ao conceito de rede.

Se a narrativa fornece a estrutura para construir o significado (e, no caso da matemática, também as ligações lógicas “necessárias”), ela tem que “beber” da lógica da estrutura interna, mas tem que ter também a liberdade para extrapolá-la. Sobretudo porque a lógica subjacente a um determinado conceito pode ser mais ampla e estar atrelada a outros contextos: pode ser a própria da matemática (atual) e/ou uma diferente, que o aluno traz para a sala de aula. A narrativa do professor deve ter a liberdade para transitar entre elas.

Por outro lado, ligando o processo de conhecer ao conceito de rede (MACHADO, 1995), a ação docente pode ser pensada como a de um narrador, que cria um encadeamento entre várias ideias presentes nas redes. Claramente, ao fazer isso, trilha-se um caminho linear, deixando de lado (talvez somente momentaneamente) várias ideias presentes na rede. Ao fazer este processo, a professora pode, intencionalmente, lançar mão de um caminho (narrativa) que não siga a lógica interna da matemática, mas sim, por exemplo, a experiência ou os interesses dos alunos.¹¹⁸

Neste quadro, a história da matemática constitui um elemento quase que “natural” para propiciar estas relações: a descoberta de uma nova ideia matemática pode seguir caminhos diferentes acerca da forma como, sucessivamente, esta ideia será relacionada com outras; pode até acontecer que a mesma ideia apareça em épocas e lugares diferentes, com modalidades e sentidos distintos. Tudo isso pode ser resgatado pelo professor para construir a narrativa mais significativa numa determinada situação de ensino.

A própria demonstração, em matemática, representa, de fato, um elemento de extremo rigor, associado geralmente às ideias de exatidão, neutralidade, necessidade lógica. Mesmo assim, Stewart (2014b, p. 24) aponta para uma possível associação entre demonstração e narrativa: “[...] a prova, na prática, é uma história matemática com o seu próprio fluxo narrativo”.

¹¹⁸ O autor experimentou algo parecido ministrando aulas de física para o primeiro ano de Liceo Scientifico: os alunos não pareciam muito interessados nas ideias básicas da dinâmica e da cinemática, mas quando a conversa foi para as viagens intergalácticas com navios espaciais, buracos negros, velocidade da luz, “guerra das estrelas” e “Interstellar”, eles ficaram decididamente empolgados. O desafio passou a ser a construção de narrativas que partissem da física clássica de Galileu e Newton e chegassem à ficção científica, tentando dar sentido às fórmulas e aos conceitos básicos da mecânica.

5.2 UMA PROPOSTA: EIXOS DE TRABALHO

O *currículum* de matemática é um produto construído, histórico e socialmente determinado de tal forma a levar em conta conteúdos considerados importantes por várias motivações, entre as quais se destacam a relevância prática na vida do cidadão e do trabalhador numa dada sociedade, o diálogo com as ideias fundamentais e vários outros fatores.¹¹⁹

Uma vez considerado relevante um assunto de matemática, como, então, analisar as possibilidades didáticas presentes (ou não) na história do assunto?

Dois aspectos parecem particularmente importantes para se realizar essa avaliação: o *potencial narrativo* e o *interesse histórico* envolvidos (Figura 12).¹²⁰

Como primeiro elemento entende-se a relevância do enredo de um determinado acontecimento histórico, isto é, quanto é interessante uma determinada narração ligada a um fato histórico. De acordo com Furinghetti e Somaglia (1998) e com D'Amore (2014), este campo referir-se-ia a uma abordagem anedótica. Apesar do termo ter uma frequente associação a ideia de superficialidade, ele pode fornecer uma grande ajuda no sentido de aumentar a significatividade de um assunto, assim como apresentar elementos interessantes para reflexão sobre uma determinada situação. No que concerne ao primeiro aspecto, a narrativa pode propiciar relações nas redes de conhecimento das alunas de tal modo que permitam ao novo assunto se “emaranhar” na rede; no segundo, a situação apresentada pela anedota pode mostrar elementos e características, matemáticas ou não, que se prestem facilmente a uma discussão com a turma.

Este tipo de análise remete, principalmente, à exploração narrativa e, neste sentido, é interessante fazer referência aos elementos individuados por Bruner (2014) e reelaborados por Molina (2014)¹²¹. A existência de um problema que motive a ação, a relação entre os elementos particulares em um “arquétipo universal”, a capacidade da história de ter um sentido e, ao mesmo tempo, apresentar uma natureza polissêmica compõem os elementos (“pares ou polaridade”, para Molina) que constituem uma narrativa e permitem avaliá-la.

¹¹⁹ Foge do escopo do presente trabalho a análise da construção do *currículum* e de seus critérios utilizados.

¹²⁰ A ideia de um esquema “cartesiano” para expressar polaridade diferentes, remete, entre outros, a Blanché (2012) e Santos (2008, “Polarizações aparentes”). A respeito do uso da história no ensino da matemática, em Furinghetti (1997, p. 60) são presentes várias categorizações, como o par global-local e promoção (movimento externo)-reflexão (movimento interno).

¹²¹ Particularmente significativo é o esquema que encontra-se a página 74.

Por exemplo, um enredo deve ter uma locação espaço-temporal determinada, protagonistas, antagonistas e coadjuvantes específicos, com características próprias definidas. Se assim não fosse, não seria uma história, mas um “esquema de história”, uma “proto-história”. Ao mesmo tempo, se for uma história que não dialoga com o leitor e/ou com o ouvinte, ela terá um baixo interesse: a história não teria sentido para este leitor/ouvinte. Isto é: a narração deve ter um aspecto “universal” que permita um diálogo com a outra parte.

Figura 12 - Valor do uso da história na matemática

Fonte: Autoria própria.

Nota: Ilustração das duas vertentes usadas para analisar o valor do uso da história na matemática em classe: no eixo vertical tem o Potencial Narrativo, ou seja, quanto o enredo de uma história pode resultar interessante; no eixo horizontal tem o interesse.

Outro aspecto é ligado ao sentido de uma história: uma boa narração traz consigo uma porcentagem de polissemia, na qual alguns aspectos são objeto de interpretação e requerem técnicas hermenêuticas para serem decodificados. Por outro lado, nem tudo pode ser multitemático e nem todas as interpretações são admissíveis.

Um interessante exemplo no mundo do cinema pode ser achado na obra do diretor Sergio Leone. O filme *Era uma vez na América*, 1984, tem o roteiro elaborado a partir do livro de Harry Grey, “The Hoods”. O romance literário não foi muito popular; ao contrário, o

filme, tornou-se umas das obras primas do cinema mundial. Uma das diferenças principais entre as duas histórias (que compartilham substancialmente o mesmo roteiro) é representada pelo enredo: o filme é inteiramente construído entrelaçando *flashback* e *flashforward*¹²², no qual vários planos temporários diferentes se misturam. Através desta narração, na película, pelo menos duas interpretações ficam em aberto: os acontecimentos reconstruídos na tela aconteceram de “verdade” na vida da personagem ou foram os delírios da personagem interpretada por Robert De Niro, sob ação do ópio? Decididamente, trata-se de uma obra polissêmica!¹²³

Da mesma forma, é possível analisar as histórias da matemática em busca de roteiros interessantes para os alunos.

O interesse Histórico remete, assim, à ligação que é possível ser realizada entre o fato histórico, ligado a uma descoberta na matemática, e a situação histórica, social e cultural, que forneceu o contexto para tal desenvolvimento. Ou seja, a partir dos elementos que a história da matemática traz, seria possível acrescentar o sentido do assunto em exame? Seria possível colocar elementos que permitam entender melhor, por exemplo, por que a pesquisa foi numa determinada direção? Por que aquela descoberta aconteceu exatamente naquele ano e não um século antes ou depois? E ainda: seria possível (e necessário) “transbordar” da matéria e puxar relações com outros campos do conhecimento e da ação humana? Se algumas destas perguntas ganharem uma resposta positiva, isso significa que um determinado elemento da história da matemática apresenta um elevado interesse histórico. As *cognitive roots*, como todas as raízes, escapam de um âmbito restrito e espalham-se por toda parte: âmbito social, filosófico, artístico etc. Esta situação parece encaixar-se na ideia de uso da história da matemática no plano epistemológico-crítico (D’AMORE, 2014, p. 23; 2015, p. 20) e na concepção de história da matemática “para refletir sobre a natureza da matemática como processo sociocultural” (FURINGHETTI, 1997, p. 67, tradução nossa). Observa-se, assim, as relações entre as situações culturais que influenciaram (e em que maneira) o nascimento ou a evolução de uma determinada ideia. Assim, é possível que

junto com a epistemologia, a história da matemática possa ser o lugar para colocar os objetos matemáticos em contextos problemáticos: a evolução do

¹²² Estão presentes três planos temporais principais que se misturam no enredo: os protagonistas jovens, adultos e velhos. Internamente há este três tempos, existem, por sua vez, pulos pra frente e pra trás!

¹²³ Mesmo a análise detalhada do filme estando fora dos objetivos deste trabalho, é importante registrar, *en passant*, que outros elementos também concorrem para o sucesso da película. Sem a pretensão de esgotar a lista, podem ser citados, destacadamente, a trilha sonora do mestre Ennio Morricone e o tom épico que o diretor consegue colocar por intermédio dos silêncios presentes nas cenas.

rigor, ideologias, métodos, modos de construir o discurso, e conexões com outras disciplinas. (FURINGHETTI, 2012, p. 2, tradução nossa).

Jankvist (2009, p. 241-242) chama estes assuntos de meta-matemáticos, destacando, assim, as características de representar uma reflexão *sobre* a matemática.

Sob o olhar de um especialista em determinado assunto, independentemente de qual assunto esteja sendo considerado, sempre se poderá concluir que aquele tema é de destacada importância em meio a outros: esta ideia foi ironicamente apontada por Jon Ogborn na palestra de abertura do encontro WCPE 2012¹²⁴, em Istambul, ao apontar que existe sempre um bom motivo para se querer ensinar qualquer coisa; para ensiná-lo, de fato, são necessários ao menos dois motivos. A esta ideia faz eco o lema de Richard Livingstone: “Se reconhece um bom professor pelo número de temas valiosos que se abstém de ensinar” (apud FORATO, 2009, p. 115).

Assim, qualquer assunto da matemática poderá ser colocado no plano de ensino, haja vista que pelo menos algum aspecto importante a seu respeito pode ser encontrado; mas, para se tornar objeto de ensino, será necessária uma combinação entre ideias fundamentais, relevância histórica, relevância do contexto no qual se dá a atividade de ensino-aprendizagem, dentre outros.

É importante acrescentar que a colocação de um determinado assunto da história da matemática em uma posição do plano de ensino não é um fato “objetivo”, intrínseco ao assunto, mas depende de vários fatores: do professor que prepara o roteiro para a aula, dos alunos para os quais a aula é pensada, do contexto geográfico, social... Este fato será amplamente debatido na discussão sobre os logaritmos.¹²⁵

Um caso de estudo analisado no próximo capítulo será o episódio do jovem Gauss, desafiado pelo seu professor de matemática a fazer uma soma extremamente trabalhosa. Será mostrado como este fato histórico acarreta vários elementos que o caracterizam com um alto potencial narrativo: o fato de ter uma dinâmica que mostra qual é a ideia forte por trás da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, o papel do professor e do aluno genial. Por outro lado, o fato, do ponto de vista histórico, é tão anônimo e descaracterizado que não carrega interesse algum sob este ponto de vista.

¹²⁴ World Conference on Physics Education.

¹²⁵ Aquilo que se quer deixar bem claro é que não está sendo proposto um “método” para montar aulas, pretensamente válido para todos, em qualquer lugar do mundo; não se trata de mais um “sistema de ensino”, no qual o professor se torna mero executor de planos de aula pensado por outros. O presente trabalho quer ser uma auxílio e um momento de reflexão que subsidie os professores na montagem de suas aulas, mantendo toda a autonomia que esta tarefa implica e necessita.

O segundo caso a ser analisado será o do surgimento dos logaritmos. Ao princípio, considera-se este fato histórico como pouco interessante, tanto do ponto de vista do potencial narrativo como também do histórico. Então, a utilidade em resgatar tal história seria “somente” aquela de extrair a ideia fundamental contida no logaritmo para, a partir dela, elaborar uma narração que, dada a posição do assunto no plano, seria bastante desvinculada dos acontecimentos históricos que a geraram. Um olhar mais cuidadoso revela que, talvez, dependendo da situação, o surgimento do logaritmo apresente um certo interesse histórico. Mais uma vez, o professor tem a autonomia de avaliar se, na sua particular situação de atuação, com os seus alunos, um assunto apresenta características interessantes do ponto de vista histórico ou narrativo.

O terceiro exemplo coloca em destaque acontecimentos históricos ligados a uma personalidade central da história na matemática: Arquimedes. A análise de sua obra, particularmente focada nos trabalhos ligados ao círculo e à circunferência e as ideias contidas no *Método*, permite não somente ter elementos interessantes para a montagem de várias narrativas ligadas à geometria (cálculo da área do círculo, resolução da esfera, o papel da aproximação etc.), mas permite também ligar as diferentes personagens das diversas tendências matemáticas, culturais e políticas do mundo helênico do século III a.C. (e dos séculos anteriores). Assim, tal assunto constitui-se um núcleo histórico com alto potencial narrativo e grande interesse histórico.

6 TRÊS CASOS (E MEIO) PARA UMA DISCUSSÃO

6.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA: GAUSS E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA.

[...] muitos orientam o ensino destacando o fazer matemático com um ato de gênio, reservado a poucos, que, como Newton, são vistos como privilegiados pelo toque divino. O resultado disso é uma educação de reprodução, formando indivíduos subordinados, passivos e acríticos.
(D'AMBROSIO apud FORATO, 2009, p. 1).

A história que vincula a noção de progressão aritmética e a fórmula geral da soma dos seus termos através de um episódio da vida escolar de um futuro matemático é uma narração particularmente famosa e está presente em vários livros¹²⁶ do ensino médio; tal narrativa é utilizada para introduzir a ideia de progressão aritmética e cristalizou-se no ideário de muitos professores. A história, que coincide em vários livros didáticos para o ensino médio, relata que o jovem Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), com dez anos de idade, recebeu do seu professor a tarefa de somar os primeiros cem números naturais. O futuro matemático resolveu o problema de modo rapidíssimo, deixando o seu professor maravilhado.

Uma variante da história, relatada por Eves (2011), coloca um elemento a mais: a tarefa teria sido passada para a classe, para “mantê-la ocupada” e, ao perceber a própria lousa com o resultado após poucos instantes, o professor teria ficado bem “irritado”.

Boyer (2012) relata uma história quase igual, acrescentando o fato de que quando Gauss coloca a lousa dele na mesa do professor, o faz seguida de um gesto com um significado de “Aí está!”.

E. T. Bell (1986) conta a história de um ponto de vista um pouco diferente: a soma não envolve os primeiros cem números, mas uma sequência bem mais complexa: 81297, 81495, ... (com constante de 198). Mas o autor, em linha com os outros, também coloca em destaque o caráter duro e cínico do professor.

Em quase todas as narrações emerge, com maior ou menor evidência, o caráter de desafio com o qual o mestre entrega a tarefa para os alunos e, conseqüentemente, ressalta a

¹²⁶ Entre outros, Matemática – Volume Único, de Iezzi, Dolce, Degenszajn, Pérgo, Atual Editora, 2011; Matemática – Participação e Contexto, de Xavier e Barreto, Editora FTD, 2008; Matematikós – Volume Único, de Bedaque, Arnaud, Rangel, Ribeiro, Editora Saraiva, 2010. É interessante ressaltar como os três livros colocam e utilizam este “conto” em modalidade (e “posições”) diferentes: um como exemplo introdutivo para a “fórmula geral”; o segundo, como curiosidade histórica, separada do capítulo que introduz; o terceiro, como problema a ser resolvido pelo aluno. Tais usos demonstram a existência de diferentes modalidades para a utilização da história na aula de matemática.

obra do aluno que, de alguma maneira, “ganha” este desafio vislumbrando o padrão escondido na sequência de números dada.

Estes relatos colocam em pauta pelo menos duas questões: a primeira, que surge quase naturalmente, nasce das diferentes sequências numéricas, isto é, Gauss teve que somar os primeiros cem números naturais ou cem números de outra sequência bem mais complexa? Na verdade, esta pergunta talvez fosse importante do ponto de vista historiográfico, mas o foco da presente abordagem, como debatido no item 5, é o fato de se usar a história como base para construir uma narrativa com determinadas características - a principal das quais, vale dizer, seria justamente o colocar em destaque a(s) ideia(s) fundamental(is) emergente(s) do assunto.

Nessa perspectiva, os pormenores do fato histórico em si perdem a relevância: a ideia fundamental é justamente a possibilidade de enxergar um padrão que permita encurtar, de outro modo, a longuíssima conta que seria somar vários termos de uma progressão aritmética. Esta, de fato, representa uma situação que se encaixa perfeitamente na definição de matemática que dá Devlin (2002, p. 3): a matemática como “ciência dos padrões”.¹²⁷ Sendo assim, é mais eficaz para a construção de uma narrativa em sala de aula a versão dos primeiros cem números, porquanto mais simples e, por isso, mais propensa a mostrar de modo direto o cálculo do padrão para os alunos.

O aspecto da pluralidade de diferentes narrativas produzida em sala de aula merece ainda mais alguma reflexão.

Em primeiro lugar, sendo o propósito da história ser a base para uma narrativa, nada impede o professor de reconstruir uma história trocando personagens e ambientações. Por exemplo, no lugar de ter o jovem Gauss e seu professor de matemática, tendo como cenário a Prússia do século XVII, o professor poderia dizer que o protagonista era um seu primo, ou ele mesmo quando era aluno, ou... As possibilidades são várias, assim como nos contos populares e de fadas que vão se ambientando aos novos contextos e que, ao atravessar fronteiras, transformam-se e adaptam-se às novas realidades.¹²⁸ Outra possibilidade seria utilizar os verdadeiros protagonistas, modificando os elementos de acordo com as necessidades didáticas e colocando, como premissa ou como fechamento, que “a história narrada é inspirada em fatos reais”, assim como acontece em filmes e livros semibiográficos.

¹²⁷ Esta definição com certeza captura um importante aspecto da matemática, cheio de sugestões, e que remete à ideia pitagórica do “mundo racional”. De acordo com esta visão, o matemático seria como o protagonista do filme *Matrix*, que consegue derrotar os seus inimigos quando vai além da aparência das coisas e percebe, assim, o código fonte da “realidade”. Como todas as definições simples e *tranchant*, se presta também a críticas, a principal das quais seria o fato de poder colocar, sob esta definição, praticamente qualquer coisa: a música não trabalha os padrões? E a genética? E a poesia? E assim por diante.

¹²⁸ Sobre este aspecto específico, conferir a obra de Frankl Sperber (2009).

Duas citações literárias podem ser utilizadas para contextualizar o problema.

Um dos pais da moderna língua italiana, Alessandro Manzoni (1785 - 1873), a partir de uma concepção própria que misturava valores do iluminismo com uma formação (e conversão) católica, num contexto romântico, colocou-se o problema da relação entre a verdade e a obra de arte (no caso: poesias, teatro e romance). Na poesia *In morte di Carlo Imbonati*, ele faz a sua declaração programática: “A sagrada verdade nunca trai”. Com a sua primeira tragédia teatral, *Il conte di Carmagnola*, ele se mantém fiel, literalmente, à sua visão poética ao relatar uma história verídica, fazendo assim coincidir a verdade histórica com a verdade poética. Após esta experiência o escritor começa a perceber como esta visão é demais vinculante para a obra do poeta e, no final da sua trajetória artística, escreve o romance histórico *I promessi sposi*. Nesta altura, Manzoni muda parcialmente a sua visão: o escritor não tem que seguir estritamente os fatos históricos, pois há espaço para a invenção. Assim, não trair a sagrada verdade não significa mais contar uma história verídica e realmente acontecida, mas sim descrever, mesmo com personagem da fantasia, um mundo real, feito de pessoas, angústias, desejos e injustiças. Assim, a ficção poética se torna, a serviço de uma verdade maior, uma reflexão sobre a “simples” história e que permite enxergar com mais profundidade as verdades nelas contidas.

Sob este aspecto, em diálogo com a abordagem da presente pesquisa, talvez valha a pena citar outro autor, desta vez do século passado e do segmento audiovisual, Federico Fellini. O diretor italiano sustentava que, num filme, não é importante que os fatos sejam verídicos, mais sim que sejam verdadeiras as emoções.

Assim, não é tanto a pergunta “quais das diferentes versões é verdadeira?” que torna-se central; ao se falar em narrativas, o holofote deve iluminar mais os aspectos da consistência e da efetividade do que da veridicidade. Por isso, a pergunta precedente pode ser substituída por outras, mais interessantes e pertinentes: “Esta história faz sentido?” ou “Ela destaca as ideias importantes sobre o assunto abordado?”. Nessa perspectiva, não somente as diferentes versões do fato se equivalem, mas a versão proposta por E. T. Bell pode ser considerada pior, do ponto de vista didático, para o intento de demonstrar ao aluno qual foi a intuição de Gauss. Isto é: ao usar números “grandes”, dificulta-se para o aluno a compressão do padrão embutido na sequência e o funcionamento da fórmula que permite o cálculo da soma dos vários termos.

Essa história, de maneira geral, revela uma certa eficácia em veicular qual é a ideia por trás da fórmula para somar os termos de uma PA – aspecto para o qual, justamente, a atenção do aluno é dirigida. Existem outros elementos, talvez secundários, na impostação da narração,

mas também importantes na transmissão (e discussão) da maneira de ver a matemática e as relações internas à sala de aula.

Vale destacar, em primeiro lugar, que fica reforçada a ideia da matemática como obra de pessoas extraordinárias, verdadeiros gênios (vide também a discussão sobre Newton e o episódio da maçã no item 6.4). Este aspecto presta-se a críticas de, pelo menos, dois tipos: por um lado, esconde o fato de ser a matemática uma produção social na qual o trabalho do “gênio” não representa uma intuição que surge “do nada”, mas que é um resultado ao qual o matemático pode chegar devido ao caldo cultural no qual está mergulhado e graças a vários resultados (matemáticos e não) que ele pode usar para a sua descoberta. A este respeito, a imagem do iceberg é particularmente significativa: o resultado matemático alcançado representa a “ponta do iceberg” de um processo bem mais amplo e que relaciona um grande número de atores, tanto na sociedade quanto na história.¹²⁹ Por outro lado, mas ainda relacionado com o ponto precedente, o aluno pode desenvolver uma recusa para a matemática devido ao entendimento que, sendo a matemática obra de personalidades fora do comum e não se enxergando como um gênio da matemática, a desistência de tal matéria seria o caminho mais natural. Esta narrativa pode, com efeito, reforçar no aluno a visão de que a matemática é assunto para pessoas do tipo de Gauss, não acessível para um aluno “comum”.

Em segundo lugar, esta história destaca nitidamente os papéis do professor, do aluno e também dos exercícios em sala de aula: todas as narrações baseadas neste fato atribuem ao professor a personalidade de “vilão” da história, a pessoa que confia e aposta que os seus alunos não terão condição de solucionar (em breve tempo) o exercício proposto; a tarefa, por seu turno, é usada como função disciplinar: o professor propõe um exercício contando que os alunos irão demorar um tempo relativamente extenso para resolvê-la; enfim, a figura do aluno é aquela de uma criança que vai além da explicação e que surpreende a expectativa do professor, justamente por não ter, em tese, condições de solucionar o problema proposto.

Como lidar com estes aspectos que a narração apresenta? Uma possível proposta poderia ser aquela de manter a narrativa baseada neste acontecimento histórico, vista a sua eficácia em mostrar o padrão “escondido” numa PA e na fórmula usada para calcular a soma dos seus termos; também merece destaque a atratividade, por parte de muitos estudantes, do

¹²⁹ Sobre a metáfora do *iceberg* e do conhecimento tácito, a referência é Michael Polanyi (1891 - 1976); o mesmo tema, no Brasil, merece destaque na obra de Claudio Saiani, Valor do Conhecimento Tácito - a Epistemologia de Michael Polanyi na escola. O conhecimento tácito é fundamental na relação ensino-aprendizagem e constitui um importante recurso que o professor precisa explorar e utilizar. Ao contrário, a relação (muitas vezes “tácitas”) entre o “grande matemático” e o seu contexto precisa ser abordada explicitamente.

conflito presente entre professor e alunos (conflito este do qual o próprio Gauss sai como vencedor). Ao mesmo tempo, o professor de matemática poderia aproveitar essa história para discutir com os alunos justamente esses elementos que são trazidos, mais ou menos explicitamente, na narração, deixando claro, por exemplo, as características acerca da função de professor que emergem na estória, fazendo os alunos compará-las com as suas experiências.

A respeito do fato que o aluno possa se sentir inabilitado a estudar matemática, ao se comparar com a figura do jovem Gauss, o docente poderia ajudá-lo a colocar as questões em uma perspectiva mais adequada. O matemático alemão foi apelidado de “príncipe da matemática” não somente porque era um matemático especialista (no sentido dado por Caraça), mas porque foi um dos melhores neste campo. O trabalho que deve ser realizado no ensino básico é, ao contrário dessa perspectiva, pensado em todos os estudantes, como uma bagagem geral para enfrentar a vida na sociedade. Ou seja, a ninguém, no ensino fundamental e médio, é pedido que tenha as mesmas intuições de Gauss (ou Newton, ou...), mas sim que entendam como e porque eles chegaram a determinados resultados. Essa forma de perceber a questão remete, no plano histórico e político, a uma passagem do “discurso de Péricles”, relatado por Tucídides, na qual o político ateniense, ao elencar e elogiar as características que fazem a cidade grega ser diferente das demais, coloca o fato de que:

[Nós Atenienses], únicos no mundo, não julgamos como tranquilo o indivíduo que não participa das atividades [políticas], mas inútil. Nós mesmos tomamos diretamente as decisões [políticas], ou, pelo menos, raciocinamos [sobre elas].¹³⁰

¹³⁰ Tucídides, *Histórias*, Livro II, par. 41. É importante ressaltar como, sob um olhar moderno, as regras de funcionamento da democracia ateniense seriam mais próximas a uma ditadura escravocrata: várias categorias de pessoas eram excluídas das discussões na Ágora (mulheres e estrangeiros, por exemplo, não gozavam de direitos políticos) e a condição material para que os homens pudessem participar de processos de democracia direta era a base escravocrata da economia grega. Apesar disso, várias colocações teóricas elaboradas naquela experiência são interessantes e atuais ainda hoje. É válido ressaltar como o filósofo e educador pragmático John Dewey estabelece uma ligação muito forte entre democracia e educação, chegando a afirmar que a existência da primeira depende da segunda. A sua visão baseia-se na ideia de que os cidadãos precisam ter os meios intelectuais para discutir, tomar decisões e aceitar as decisões a respeito da comunidade e, vice-versa, ou seja, a educação tem que ser democrática para favorecer o crescimento individual e coletivo do sujeito (VERASTEGUI, 2012). Nesta linha coloca-se também Caraça ao dizer que “cultura e liberdade identificam-se — sem cultura não pode haver liberdade, sem liberdade não pode haver cultura”. (CARAÇA apud AMARAL, 2011, p. 17). Para Dewey, a democracia é um ideal do qual as formas de governos não passam de tentativas históricas de realização. Assim, na sua forma mais alta, a implementação da vida democrática deveria ser “participativa” (POGREBINSCHI, 2004). Ligando este raciocínio à democracia ateniense, parece evidente um outro fato: se as cidadãs precisam que um processo educativo lhe permita desenvolver as capacidades intelectuais e sociais necessárias para a vivência democrática em comum, por outro lado é também necessária a existência de uma condição material que permita tal participação, além de tempo para informa-se, discutir e deliberar. Na Atenas do século V, esta condição era garantida pelo trabalho escravo:

Péricles coloca um fato importante que justifica, do ponto de vista teórico, a democracia em Atenas: se, de um lado, são poucas as pessoas com a capacidade de elaborar uma estratégia política, do outro, todos conseguem analisá-la, debatê-la e avaliá-la.

Trazer tal discussão para a sala de aula, com os próprios alunos do ensino médio, acredita-se, contribuirá não somente para problematizar com os alunos alguns aspectos sobre o significado da matemática – do seu estudo e do papel do professor – mas também poderia criar um envolvimento maior do aluno nas dinâmicas da sala de aula e ampliar as possibilidades para ele construir um sentido para as atividades propostas.

Santos, nessa seara, destaca os seguintes pontos, assinalando como:

[...] faz parte da atividade do professor, além de dotar de significado e tornar compreensível noções de matemáticas ensinadas na escola elementar, o trabalho adicional de desconstruir mitos e crenças sobre a Matemática e sobre ensinar e aprender noções nesta área. (SANTOS, 2015, p. 12).

E quais são estes mitos e crenças? É a ideia de uma matemática “difícil, inacessível à grande maioria dos estudantes” (SANTOS, 2015, p. 12), algo que demanda uma “capacidade inata” (MACHADO, 1995, p. 56).

À luz do que foi discutido, parece claro que esta proposta de narrativa se encaixa na parte de cima, à direita do esquema apresentado no capítulo 5. Isso porque o interesse “Histórico” é baixo, haja vista que a narração não envolve ligações culturais, sociais ou históricas relevantes; com efeito, poderia ser uma história que, no lugar de falar do jovem Gauss, relatasse um acontecimento de poucos dias atrás, ocorrido em uma escola de Milão ou São Paulo. Por outro lado, o “potencial narrativo” é grande: além do destaque no enredo, qual seja, a solução do problema da soma dos termos da progressão aritmética, estão presentes vários outros elementos, como o papel do professor, o papel do aluno, a visão sobre o que é a matemática. Tais características são seminais não somente para discutir assuntos “técnicos”, mas também para ampliar o discurso sobre o que é a matemática e quais as suas relações em sala de aula. Talvez não seja inapropriado pensar que o segundo aspecto (visão da matemática, do seu ensino, do professor de matemática...) seja tão importante (ou até mais importante!) do que o primeiro (entender a progressão aritmética).

enquanto estes trabalhavam, os “homens livres” podiam se reunir e tratar dos assuntos de interesse público. Talvez, hoje, graças aos avanços tecnológicos e científicos, seria possível, através uma reorganização dos mecanismos produtivos, garantir esta base material para todos e todas, sem precisar que poucos possam exercer a democracia à custa de muitos.

Seria, enfim, uma narrativa que, apesar da sua relativa simplicidade (pelo menos na construção do enredo), permitiria vários *spin-off* na sala de aula, tanto dentro quanto fora do âmbito da matemática.

6.2 LOGARITMOS, NAPIER E OS COMÉRCIOS NAVAIS: TÃO LONGE, TÃO PERTO!

A análise da origem histórica dos logaritmos remete à época das explorações navais europeias, entre o final do século XVI e o começo do século XVII: o *milieu* social que foi, ao mesmo tempo, cenário e catalisador de tal elaboração era constituído pelos crescentes comércios marítimos e, em medida menor, pela necessidade de observações e medidas celestes cada vez mais numerosas e precisas. Isto é, foi aparecendo a necessidade de lidar com números cada vez maiores, ligados não somente à quantidade de mercadorias, mas também com os problemas financeiros que o florescer do mercantilismo acarretavam (o problema, por exemplo, dos juros compostos), como salientaram Eves (2011, p. 314) e Machado (1995, p. 71-72).

Tradicionalmente, atribui-se ao escocês Charles Napier (1550-1617) o mérito desta invenção, como mostra o fato do número *e* levar o seu nome.¹³¹ Quase contemporaneamente (e de modo independente) o suíço Jobst Burgi (1552-1632) construiu também uma tábua de logaritmos. É interessante aquilo que Eves relata a respeito disso: “Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Burgi era algébrica” (2011, p. 346).

Boyer (2012) relata como as fórmulas trigonométricas, que hoje são conhecidas como de prostaférese¹³², foram usadas profusamente por vários astrônomos para simplificar as suas contas, inclusive pelo próprio Tycho Brae (1546 - 1601), cujas observações serviram como base para Kepler formular as suas leis.¹³³ Com efeito, o tratamento dos logaritmos, por parte de Napier, parece ter começado justamente a partir destas fórmulas, e seus estudos continuaram ligados ao mundo da trigonometria: a primeira tábua de logaritmos que publicou

¹³¹ Em âmbito internacional, o número *e* é conhecido como número de Euler; na Itália, é também conhecido como número de Napier.

¹³² Com efeito, tanto as fórmulas de prostaférese, quanto os logaritmos, trabalham o interessante conceito de transformar aquilo que está expresso sob forma de produto em uma soma. Por exemplo:

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

Em analogia com, por exemplo:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

¹³³ Boyer relata como foi o médico do rei da Escócia, o doutor John Craig, que, ao visitar Napier, comentou com ele sobre o uso destas fórmulas no observatório do astrônomo dinamarquês.

continha os valores dos logaritmos do seno dos ângulos separados por um minuto de arco. A própria definição que Napier formalizou foi em termos geométricos.

Assim, Napier apresentava a sua ideia:

Como nada é mais tedioso, colegas matemáticos, na prática das artes matemáticas, que o grande atraso sofrido no tédio de longas multiplicações e divisões, a descoberta de razões, e na extração de raízes quadradas e cúbicas - e os muitos erros escorregadios que podem surgir: venho, portanto, revirando na minha mente, mediante qual arte segura e expedita eu poderia ser capaz de fazer melhorias para estas ditas dificuldades. No final, após muito pensar, finalmente descobri um espantoso modo de abreviar os procedimentos... É uma tarefa prazerosa apresentar o método para o uso público dos matemáticos. (NAPIER apud STEWART, 2016, p. 226).

O próprio matemático escocês tinha perfeita consciência do porquê estava desenvolvendo aquilo que serei depois chamado, posteriormente, de logaritmo: um método para facilitar os cálculos de multiplicações e divisões. Atualmente, questiona-se unanimemente o interesse no logaritmo por motivos computacionais: “[...] com o advento das espantosas e cada vez mais baratas calculadoras portáteis¹³⁴, ninguém mais em sã consciência usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais (EVES, 2011, p. 347)”.

Sendo assim, por que ainda hoje os logaritmos estão presentes no currículo? E, ainda, o que desta história poderia ser interessante (faria sentido) em sala de aula?

Eves responde à primeira pergunta colocando o holofote sobre a função logarítmica (e exponencial), que representa uma “parte vital da natureza e da análise” (EVES, 2011, p. 347). Impossível negar a veracidade de tal colocação: o crescimento populacional, a difusão de uma

¹³⁴ A primeira edição da obra de Eves, em língua original, data de 1953. Se o autor pudesse atualizá-la para os tempos atuais, com certeza falaria em tablets e celulares smartphones! Outra reflexão a respeito disso, que aponta as mudanças práticas e de perspectivas que aconteceram nestes três séculos, é representada pela relação espaço/tempo ou pela relação cálculo tabelado vs. cálculo “na hora”. Em economia (e, em consequência, em outras áreas como, por exemplo, na informática) existe o conceito de *trade-off*, que indica um conflito entre duas possibilidades, de alguma forma correlatas. Por exemplo, na literatura econômica é famoso o conflito entre armas e manteiga: o orçamento público de um Estado pode sustentar os gastos bélicos (armas) ou o consumo interno (manteiga); não é possível colocar todo o orçamento na produção bélica, porque a repercussão econômica seria negativa mas, simetricamente, não é possível colocar todas as verbas no mercado interno, já que o Estado “precisa” ser defendido contra a força dos outros países. Em informática, um exemplo típico de tal conflito (e menos “beligerante”) é representado pela polarização tempo vs. memória. Existem operações complexas que demandam muito tempo para serem elaboradas (por exemplo, as operações de decifração) que, por outro lado, podem ser muito aceleradas na medida em que se usam “tabelas” pré-compiladas. Aquilo que se ganha em termos de tempo, perde-se em termos de ocupação de memória (tabelas deste tipo podem ocupar centenas de gigabyte). Analogamente, as tábuas logarítmicas (e, antes delas, as trigonométricas) podem ser vistas como um caso de *trade-off*: para facilitar as contas (diminuir o tempo de execução) recorre-se a resultados pré-compilados. Atualmente, com a capacidade computacional alcançada pelos equipamentos eletrônicos, torna-se mais efetivo fazer as contas “ao vivo”.

doença, o decaimento radioativo, fenômenos informáticos como a pesquisa numa base de dados são alguns dos fenômenos naturais e não naturais que podem ser modelizados com um andamento exponencial.¹³⁵ Recentemente, a própria ONU inseriu no cálculo do IDH (Índice de desenvolvimento humano) a função logarítmica.¹³⁶

Igualmente, a Análise, a Teoria dos Números, o Cálculo da Probabilidade são campos da matemática “pura”, nos quais a função logarítmica aparece em posições de destaque.¹³⁷ Mas, se estes são campos avançados da matemática ou aplicações de alta especificidade, o estudo dos logaritmos serviria somente para quem se propõe a estudar Álgebra avançada e Teoria dos Números?

Para responder (negativamente) a esta pergunta é preciso resgatar qual é a ideia fundamental ligada ao desenvolvimento dos logaritmos e, para alcançar isso, a análise histórica oferece o lugar ideal. O surgimento dos logaritmos se dá em consequência da busca por uma maneira de simplificar contas que envolvam números “grandes”. Já foi discutido como atualmente, graças aos meios informáticos, esta utilidade caducou. Mas, a ideia de simplificar um número grande, esta sim, representa o núcleo forte, a ideia fundamental que pode ser encontrada na história do surgimento de tal ideia.

Com o formalismo moderno, pode-se escrever:

$$n = \log_a N \Leftrightarrow N = a^n$$

Assim, dado um número grande (ou pequeno) à vontade (N), ele pode ser “reduzido” a um número menor, que nada mais é que o expoente que, aplicado a uma base arbitrária (a), retorna o número inicial.

Por exemplo, dado o número 15'647'591, pode-se escrever:

$$15'647'591 \approx 10^{7,19} \Leftrightarrow 7,19 \approx \log_{10} 15'647'591$$

O número aproximado 7,19 é mais palatável (um aluno assistindo à aula do pesquisador do presente trabalho sugeriu o termo “*palpável*”) que o número original, no

¹³⁵ Famosa no campo computacional, a lei de Moore, empiricamente, dá conta do fato de que os aparelhos eletrônicos evoluem constantemente, cada vez mais rapidamente. Ela, de fato, afirma que a cada 18 meses (ou 24, ou 30, dependendo dos períodos considerados), o número de transistor que é possível montar no mesmo chip de silício dobra, mantendo o mesmo custo.

¹³⁶ Particularmente, a função logarítmica é usada para “pesar” mais acentuadamente os incrementos de renda per capita baixas e “pesar” menos os incrementos por altas rendas. Isto é, se a renda per capita passa de 1000 dólares para 1100, este incremento vai fazer subir mais o IDH do que se a renda fosse 10000 e passasse a 10100.

¹³⁷ Por exemplo, na teoria dos números, para qualquer número inteiro x, a quantidade de números primos menores ou iguais a x é denotada pela função $\pi(x)$. O teorema dos números primos afirma que o $\pi(x)$ é, aproximadamente, $\frac{x}{\ln x}$.

sentido que mais facilmente uma pessoa “entende” e lida com o segundo do que com o primeiro.

De um ponto de vista mais formal, é interessante a reflexão que traz Santos (2015) sobre a relação entre sensível e tangível na experiência dos alunos com a matemática, que poderia ser caracterizada por três dimensões principais:

1) o *real imediato*: refere-se a situações do cotidiano, do contexto próximo ou do microcontexto; aquele que diz respeito ao sujeito e ao ambiente em que se insere, podendo ser: a sala de aula, o lar, a escola, a cidade, valores e crenças do sujeito etc.; 2) o *real mediato*: refere-se a situações que transcendam o ambiente próximo do sujeito, palpáveis ou não, que são do micro, meso ou macrocontextos: o exterior, contextos conexos aos do sujeito, mas diferentes destes: o mundo, o planeta, o universo cósmico ou mesmo o universo microscópico; e 3) o *real pensado/hipotetizado*: relativo a experiências que evidenciam curiosidades, especulações, inferências e levam a indagações, reflexões teóricas e generalizações baseadas num encadeamento consistente de ideias. Tais aspectos, que podem ser validados ou redimensionados — uma vez que se referem a escalas diferentes de universos e contextos, cujas fronteiras são flexíveis e difíceis de serem demarcadas —, levam em consideração um arco de manifestações possíveis para um mesmo sujeito, muitas vezes ao mesmo tempo, que não autoriza uma separação e oposição ostensivas entre concreto e abstrato, entre empírico e teórico, entre particular e geral como elementos que se sucedem numa linha temporal gradativa e que são mutuamente excludentes. (SANTOS, 2015, p. 22).¹³⁸

Assim, ao passar de um número extremamente grande (ou pequeno) para o logaritmo, o aluno pode passar de um nível para outro, por exemplo, do real mediato para o imediato, no sentido que 7,19 é um número que faz parte do “*seu cotidiano, contexto próximo ou microcontexto*”. Em termos informais, pode-se dizer que é um número do dia a dia, ao contrário de 15’647’591, que representa um número que precisa de uma mediação com o universo mais propriamente dos alunos.¹³⁹

Esta utilidade pode ser apreciada ainda mais se, ao invés de considerar um único número, passa-se a considerar um par. Por exemplo, o número 758’000’483, pode ser “reduzido”, com método parecido, com o precedente em 8,88.

A comparação entre os pares 7,19 e 8,88 e entre 15’647’591 e 758’000’483 destaca, como no primeiro caso, que tal operação seja imediata, enquanto no segundo demande mais tempo, esforço, atenção.

¹³⁸ Tall introduz uma classificação parecida e por alguns aspectos sobreponíveis, que consta de três mundos: “embodied, symbolic-perceptual, formal-axiomatic” (FURINGHETTI, 2007, p. 134).

¹³⁹ Na verdade, não são somente alunos e crianças a se beneficiarem disso: poder-se-ia dizer que quase todos, especialistas em matemática ou não, lidam mais facilmente com 7,19 que com 15’647’591.

Esta ideia fundamental por trás do uso do logaritmo é utilizada em várias situações ao redor do aluno: o grau de acidez de um composto (pH), a intensidade de um terremoto (escala Richter), a avaliação do gasto computacional dos algoritmos de pesquisa, nos bancos de dados, entre vários outros casos. Por exemplo, o professor poderia preparar uma narrativa ligada a montagens de redes wireless (*wi-fi*, celulares) envolvendo a potência dos aparelhos e os fatores de ganhos das antenas, todas grandezas expressas normalmente em dbm¹⁴⁰, definido como:

$$P_{dbm} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{1mW} \right)$$

A ideia é montar uma atividade na qual apareça com forte evidência a necessidade de lidar com uma grandeza que alcance um *range* muito amplo. É importante ressaltar que é preciso que tal amplitude se encontre numa mesma situação: é evidente, por exemplo, que mexendo com distâncias siderais e com o tamanho de células ou átomos também realize-se uma situação na qual há necessidade de lidar com ordens de grandezas muito diferentes, mas dificilmente irá acontecer de ter que lidar com estas duas escalas contemporaneamente.

Figura 13 - Programa airodump-ng

BSSID	PWR	Beacons	#Data	#/s	CH	MB	ENC	CIPHER	AUTH	ESSID
:44	-33	21	11	0	11	54	WPA2	CCMP	PSK	at
:8D	-46	14	75	1	11	54e	WPA	CCMP	PSK	My
:4C	-49	27	0	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	HQ
:6F	-52	3	87	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	Es
:DC	-52	31	15	0	1	54e	WPA	CCMP	PSK	Fi
:0F	-66	35	0	0	1	54	WPA	TKIP	PSK	AT
:97	-67	4	0	0	6	54e	WEP	WEP		at
:5C	-69	2	0	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	Bo
:59	-69	24	0	0	6	54e	OPN			ca
:32	-69	7	0	0	3	54e	WPA2	CCMP	PSK	aw
:57	-70	12	1	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	ca
:42	-71	5	0	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	Gu
:0E	-71	3	3	0	3	54e	WPA2	CCMP	PSK	Fa
:62	-72	5	1	0	3	54e	WPA2	CCMP	PSK	Xi
:7C	-72	4	0	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	TA
:EE	-73	1	1	0	9	54e	WPA2	CCMP	PSK	NA
:97	-73	0	0	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	Fe
:C7	-73	5	0	0	3	54e	WPA	CCMP	PSK	Ja
:FA	-73	2	279	0	10	54e	WPA2	CCMP	PSK	Es
:30	-74	2	4	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	hd
:0A	-74	2	0	0	3	54e	WPA2	CCMP	PSK	ml
:0A	-74	5	1	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	AF
:89	-74	7	0	0	2	54e	WPA2	CCMP	PSK	E-
:F2	-75	16	0	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	RE
:4E	-75	5	0	0	6	54e	WPA2	CCMP	PSK	hd
:BF	-75	3	0	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	MS
:3C	-75	21	9	0	1	54e	WPA	CCMP	PSK	FF
:02	-76	5	0	0	1	54e	WPA	CCMP	PSK	DA
:86	-76	5	0	0	3	54e	WPA2	CCMP	PSK	E-
:C3	-77	6	0	0	1	54e	WPA2	CCMP	PSK	we

Fonte: Autoria própria.

Nota: Captura de tela do programa airodump-ng utilizado no sistema operativo linux wi-fi slax. Na coluna PWR é expressa a potência recebida por uma placa de rede wireless. A unidade de medida é em dbm e o valor varia entre -36 dbm (maior) até -86 dbm (menor).

Já o caso do *wi-fi* representa um âmbito no qual as potências muito diferentes aparecem no estudo do mesmo fenômeno. A legislação brasileira permite aparelhos emissores

¹⁴⁰ dbm ou dbmW é a medida de uma potência expressa em decibel e referida a 1 mW.

com uma potência de até 1000 mW¹⁴¹, sendo que, na recepção do sinal, existem aparelhos com sensibilidade de até 0,000000001 mW. É importante destacar para as alunas que, neste caso, a mudança de escala, usando múltiplos diferentes da unidade básica, não vai ser de muito serventia: transformando tudo em microWatt, ter-se-ia 1'000'000 μ W e 0, 000001 μ W. O problema é que os dois valores são extremamente diferentes, sendo a potência transmissiva um trilhão de vezes maior do que a sensibilidade receptiva.¹⁴²

Esta “distância” entre valores máximos e mínimos cria um problema: é difícil lidar com valores tão grandes conjuntamente com valores tão pequenos. Mas, passando a uma notação exponencial, os valores mudam em 10^3 e 10^{-9} , mantendo a unidade de medida em mW. Concentrando a atenção no expoente, o intervalo de um trilhão pode ser reconduzido ao intervalo entre 3 e -9, uma diferença de 12 posições, que quase pode ser manuseado nos dedos da mão. Como um detalhe secundário, pode-se falar para os alunos que 3 e -9 podem ser chamados tanto como expoentes, como logaritmos.

Eis um exemplo de narrativa, com uma componente prática e, espera-se, familiar, para os alunos perceberem a ideia fundamental e dar a ela sentido: reduzir uma grande distância entre valores numa distância mais facilmente compreensível. Trata-se, em última análise, de “humanizar” os números!

A partir da ideia fundamental, passa-se a refinar o conceito: é muito provável, utilizando as potências de 10 na forma expressa anteriormente, que, ao lidar com números e medidas reais, apareçam expoentes racionais. Para reduzir a necessidade de trabalhar com números “quebrados” sem perder demais a precisão, pensou-se em multiplicar o expoente por 10; assim, o novo intervalo assume valores entre 30 e -90. O *range* foi um pouco expandido (de um fator 10) em troca da possibilidade de lidar somente com números inteiros.

Por fim, a escolha de utilizar como “marco zero” a potência de 1 mW reside no fato empírico que, assim fazendo, as potências transmissivas serão todas positivas (roteadores, placa de rede *wireless*, *extender*, etc. transmitem todas potências acima de 1 mW), enquanto as potências recebidas serão negativas (a potência emitida, somente pelo fato de se espalhar em várias direções, fica dividida, fazendo chegar ao aparelhos receptores bem menos do que 1mW). Conceitualmente, dividir a potência por 1mW serve para calcular o logaritmo de um número adimensional; no ato prático, isso torna-se supérfluo.

¹⁴¹ De acordo com: <<http://www.anatel.gov.br/legislacao/resolucoes/23-2008/104-resolucao-506>>. Acesso em: 15 dez. 2016.

¹⁴² Estes são valores nominais: na prática, pode-se esperar valores menores para potência máxima emitida e valores maiores de sensibilidade mínima. Mesmo assim, através, por exemplo, do uso de antenas, é possível focar as potências emitidas alcançando (ou até superando) os valores nominais.

Assim, deu-se uma explicação da fórmula:

$$P_{dbm} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{1mW} \right)$$

que, do ponto de vista conceitual, é a mesma coisa que escrever:

$$P_{linear(mW)} = 10^{P_{dbm}/10}$$

Feito isso, pode-se explorar algumas propriedades interessantes acerca dos decibéis, ligadas às propriedades das potências (das quais decorrem, quase naturalmente, as propriedades dos logaritmos). Por exemplo: o fato de que a cada 3 dbm a potência linear dobra. Isso pode ser justificado da seguinte forma: suponha-se que duas potências em decibéis sejam x_1 e x_2 e que, de acordo com o caso em exame, $x_2 = x_1 + 3$. Pela definição de decibel, pode-se escrever que

$$P_1 = 10^{x_1/10} \text{ e } P_2 = 10^{x_2/10} = 10^{x_1+3/10}$$

Usando as propriedades das potências, as duas fórmulas tornam-se:

$$P_1 = 10^{x_1/10} \text{ e } P_2 = 10^{x_1/10} * 10^{3/10}$$

Usando a aproximação, $10^{0,3} \approx 2$, chega-se a:

$$P_2 = 10^{x_1/10} * 2 = 2P_1$$

Uma consideração análoga pode ser feita no caso em que a potência em dbm aumente de 10: nesta situação, a potência linear será aumentada de um fator 10.

Estas considerações, além de propiciarem o interesse da aluna em explorar as tabelas, procurando por padrões, permitem, através da recapitulação das propriedades das potências, chegar às propriedades dos logaritmos. De fato, a conta anterior sobre a P_1 e P_2 poderia ser reescrita usando o símbolo do logaritmo como:

$$x_1 = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{1mW} \right) \text{ e } x_2 = 10 \log_{10} \left(\frac{P_2}{1mW} \right)$$

Por simplicidade:

$$x_1 = 10 \log_{10}(P_1) \text{ e } x_2 = 10 \log_{10}(P_2) = x_1 + 3$$

Foi descoberto, anteriormente, que $P_2 = 2P_1$, então:

$$x_2 = 10 \log_{10}(P_2) = 10 \log_{10}(2P_1)$$

Sendo possível escrever 2 como $10^{0,3}$, pode-se escrever:

$$x_2 = 10 \log_{10}(2P_1) = 10 \log_{10}(10^{0,3} * P_1)$$

Sendo $P_1 = 10^{x_1/10}$ e usando as propriedades das potências, então:

$$x_2 = 10 \log_{10}(10^{0,3} * P_1) = 10 \log_{10} \left(10^{0,3} * 10^{x_1/10} \right) = 10 \log_{10} \left(10^{0,3+x_1/10} \right)$$

Resultando em:

$$x_2 = 10 \left[\log_{10} \left(10^{0,3+x_1/10} \right) \right] = 10[0,3 + x_1/10] = 10[3/10 + x_1/10] = 3 + x_1$$

Esta última passagem, mostra uma aplicação da propriedade $\log(a^x * a^y) = x + y$ como uma direta consequência da propriedade das potências $a^x * a^y = a^{x+y}$.

Tabela 1 - Valores da potência em dbm e em mW

dbm	mW	mW (arr.)	dbm	mW	mW (arr.)
-30	0,001	0,001	0	1	1
-29	0,001258925	0,0013	1	1,258925412	1,3
-28	0,001584893	0,0016	2	1,584893192	1,6
-27	0,001995262	0,0020	3	1,995262315	2,0
-26	0,002511886	0,0025	4	2,511886432	2,5
-25	0,003162278	0,0032	5	3,16227766	3,2
-24	0,003981072	0,0040	6	3,981071706	4,0
-23	0,005011872	0,0050	7	5,011872336	5,0
-22	0,006309573	0,0063	8	6,309573445	6,3
-21	0,007943282	0,008	9	7,943282347	7,9
-20	0,01	0,01	10	10	10
-19	0,012589254	0,013	11	12,58925412	13
-18	0,015848932	0,016	12	15,84893192	16
-17	0,019952623	0,020	13	19,95262315	20
-16	0,025118864	0,025	14	25,11886432	25
-15	0,031622777	0,032	15	31,6227766	32
-14	0,039810717	0,040	16	39,81071706	40
-13	0,050118723	0,050	17	50,11872336	50
-12	0,063095734	0,063	18	63,09573445	63
-11	0,079432823	0,080	19	79,43282347	80
-10	0,1	0,1	20	100	100
-9	0,125892541	0,13	21	125,8925412	130
-8	0,158489319	0,16	22	158,4893192	160
-7	0,199526231	0,20	23	199,5262315	200
-6	0,251188643	0,25	24	251,1886432	250
-5	0,316227766	0,32	25	316,227766	320
-4	0,398107171	0,40	26	398,1071706	398
-3	0,501187234	0,50	27	501,1872336	500
-2	0,630957344	0,63	28	630,9573445	630
-1	0,794328235	0,8	29	794,3282347	800
0	1	1	30	1000	1000

Fonte: Autoria própria.

Nota: Nas colunas são mostrados, respectivamente, o valor da potência em dbm e em mW, usando uma aproximação mais precisa e uma mais grosseira, para mostrar com mais facilidade o andamento geométrico.

Estes exemplos (particularmente a leitura da tabela) podem também levar à discussão sobre a origem do nome logaritmo. A coluna dos decibéis apresenta um crescimento aritmético (por exemplo, escolhendo a cada três elementos¹⁴³: 0, 3, 6, 9, 12...) enquanto a

¹⁴³ A escolha de um elemento a cada três da tabela é motivada pela facilidade de leitura dos números e, supostamente, pela imediatez com a qual o padrão se apresenta: agindo assim, lida-se com números inteiros

coluna da potência linear cresce aproximadamente de modo exponencial, ou seja, através de uma progressão geométrica (continuando a pegar de três em três linhas: 1, 2, 4, 8, 16...). Ou seja, o logaritmo é algo que associa, por um lado, uma progressão aritmética e, pelo outro, uma geométrica. Não casualmente, o nome logaritmo junta as palavras gregas *logos* (razão) com *aritmós* (número, no sentido de inteiro): ou seja, ao crescimento de unidade por unidade (aritmético) dos dbm corresponde um crescimento à razão constante (geométrico) da potência em mW.

Existe mais um aspecto que esta narração pode revelar: o fato de transformar situações que evoluem exponencialmente em situações que evoluem linearmente. No caso em exame, pode-se analisar a degradação do sinal *wi-fi* uma vez recebido por uma antena e se propagando por seu cabo (por exemplo, o cabo entre a antena e o roteador), que segue uma variação exponencial. Ou seja, a potência dissipada (“perdida”) P dobra a cada unidade de cabo percorrido (d), de acordo com a função:

$$P_{diss} = (P_{in})^{\alpha*d}$$

em que α é um parâmetro experimental que expressa a impedância do cabo.

Aplicando o logaritmo à expressão:

$$\log(P_{diss}) = \log[(P_{in})^{\alpha*d}]$$

Multiplicando por 10:

$$10 * \log(P_{diss}) = 10 * \log[(P_{in})^{\alpha*d}]$$

Sendo a expressão à esquerda da igualdade a definição da potência em dbm:

$$P_{diss(dbm)} = 10 * \log[(P_{in})^{\alpha*d}]$$

$$P_{diss(dbm)} = 10 * \alpha * d * \log(P_{in})$$

Sendo $\log(P_{in})$ uma constante, tal como α , pode-se concluir que $\log(P_{in}) * \alpha * 10 = k$. Assim:

$$P_{diss(dbm)} = k * d$$

Um típico valor para a constante k , em cabos comerciais, pode ser considerado aproximadamente $k = 0,5 \text{ dbm/metro}$.¹⁴⁴

A passagem para o logaritmo (potência expressa em dbm), transforma um andamento exponencial em um linear, permitindo uma maior facilidade em lidar com a situação, já que o

em ambas as colunas da tabela. Do ponto de vista conceitual, não mudaria nada assumir todas as linhas da tabela e verificar, com uma calculadora na mão, o crescimento exponencial da coluna da potência linear.

¹⁴⁴ Valor referente os cabo de categoria LMR-200, conforme as especificações ilustradas em <https://www.timesmicrowave.com/documents/resources/LMR-200.pdf> e em: <http://www.timesmicrowave.com/calculator/?productId=33&frequency=2400&runLength=100&mode=calculate#form>. Acessos em: 15 dez. 2016.

problema exponencial é transformado em um problema de proporcionalidade direta: neste caso, por exemplo, o andamento é expresso pela taxa de perda k , a partir da qual a cada metro a mais de cabo instalado haverá uma perda de potência de sinal de 0,5 dbm. Assim, um problema exponencial vira um problema de “regra de três”. É bom lembrar que a importância disso não reside numa facilidade em fazer contas (como no surgimento histórico dos logaritmos): atualmente, existem até celulares de uso comum que contribuiriam para resolver o problema, mesmo tendo que lidar com equações exponenciais; o fato notável reside na mais fácil compreensão que o sujeito pode ter da situação ao pensá-la em termos lineares.

Por isso, como no caso do tratamento de números muito grandes e/ou muito pequenos, o uso do logaritmo (expoente) simplifica o entendimento, encurtando um intervalo grande numa dimensão mais próxima da experiência humana (o “real imediato”). Assim, a transformação de um andamento exponencial em um linear por meio da função logarítmica atua no mesmo sentido, só que “uma oitava para cima”: ou seja, deixa mais próxima a experiência dos alunos, não somente em um intervalo numérico, mas também em um andamento crescente/decrecente. Eis, aqui resgatada, a ideia fundamental ligada ao surgimento histórico da ideia de logaritmo: deixar mais próximo, mais compreensível, tanto intervalos numéricos extensos, quanto andamentos exponenciais. A “facilidade” em fazer as contas foi um “efeito secundário”, ligado à esta ideia radical¹⁴⁵.

Extrapolando o contexto matemático, esse conceito pode ser generalizado com a ideia de tentar trazer o impensável (ou dificilmente pensável) para um nível no qual a abordagem seja mais facilmente tratada. Esta ideia parece, de fato, fundamental; analogamente, o que é uma (boa) poesia que fala de amor, amizade, vida ou morte senão a tentativa de expressar aquilo sobre o qual é difícil se expressar? O que é a divulgação científica, senão a tentativa, através de imagens e metáforas,¹⁴⁶ de trazer pra compreensão dos leigos os (novos) conceitos da física, química, etc. Poder-se-ia até reformular o famoso aforismo de Wittgenstein:

“Sobre aquilo de que não se pode falar... *procure-se um jeito pra falar mais fácil!*”

Assim, de acordo com o que foi analisado até agora, o uso da história estaria minimizado à busca da ideia fundamental embutida no conceito matemático sob exame: este caso parece entrar na tipologia de tópicos matemáticos que, tanto do ponto de vista do enredo, quanto do ponto de vista histórico, não expressam particular significatividade. Apesar disso,

¹⁴⁵ Na época de Napier e até (ao menos) a popularização das calculadoras portáteis, tratava-se de um efeito primário! Mas, justamente, nos tempos atuais, esta característica perdeu a importância, sobrando somente foi a ideia fundamental.

¹⁴⁶ Sobre o uso da metáfora no ensino e na criação de significado, vide Machado (1995), particularmente “Conhecimento como rede: a metáfora como paradigma e como processo”.

como colocado no capítulo precedente, a relevância histórica é um elemento sempre situado e depende, em última análise, do ambiente social, contextual e cultural das relações presentes dentro e fora da escola. Assim, o interesse em resgatar o contexto histórico que propiciou o surgimento do logaritmo poderia ser interessante, por exemplo, se o período em questão fosse objeto de estudo específico e em destaque.

Numa situação na qual o professor lida com a classe prevalentemente composta por indígenas, por exemplo, talvez este professor ache interessante resgatar a origem histórica dos logaritmos para encadear uma conexão com a chegada dos europeus nas Américas e a sucessiva expansão comercial e colonial.

Uma outra abordagem, hipotética, poderia ter tido como cenário a cidade de Genova, em 1992, nos festejos comemorativos por ocasião dos 500 anos da chegada de Cristoforo Colombo (conhecido no Brasil como Cristóvão Colombo) nas Américas. À época, foram organizadas algumas atividades, tais como: mostras, eventos culturais, projetos nas escolas... Até o famoso cantor Bob Dylan foi chamado para fazer um concerto na cidade. Neste contexto (Ortega Y Gasset diria “situação”), um professor de matemática poderia decidir, ao tratar sobre os logaritmos, pela retomada da situação histórica na qual estes surgiram. Assim, a um só tempo, estaria estabelecendo conexões com a época na qual estes surgiram e dialogaria com todas as atividades culturais referenciadas pela cidade. A tal propósito é interessante a posição de Ogborn (2005), que propõe uma atividade didática dividida em quatro etapas¹⁴⁷, sublinhando, a cada momento, como o docente tem que se sentir livre, dependendo da resposta dos seus alunos, para poder parar numa determinada etapa, sem precisar, necessariamente, continuá-la. Ele conclui:

Acredito que a medida certa de quanto abordar em aula dependa fortemente dos alunos que você tem, a profundidade do interesse deles e as suas habilidades matemáticas. Aqui eu sugeri uma sequência de etapas, cada uma valiosa por si só, encorajando você a considerar quando é possível incluir junto com os alunos. (OGBORN, 2005, p. 222).¹⁴⁸

Este é o espírito não somente deste capítulo, mas de toda a investigação: oferecer uma possível narrativa para a sala de aula, à qual cada professora deve sentir-se livre para atingir

¹⁴⁷ A saber: análise das medidas com radar de distancias e velocidades; o efeito Doppler relativístico (e como afeta as medidas do radar); os mapas espaço-temporais (para mostrar, por exemplo, a contração do tempo por viajantes relativísticos); uma justificativa para a famosa equivalência $E = mc^2$.

¹⁴⁸ “I believe that the right amount to cover will depend very strongly on the students you have, the depth of their interest and their mathematical fluency. Here I have suggested a sequence of steps, each worthwhile on its own, encouraging you to consider just how far you and your students might want to go.”

os objetivos que lhe parecem mais interessantes e que façam mais sentido na sua atividade, sem a necessidade de adotar “em bloco” tudo o que for previamente estabelecido.

É preciso destacar que, apesar dos vários cálculos executados neste roteiro sobre o cálculo exponencial, é possível que, dependendo dos alunos e de outros fatores (por exemplo, o tempo à disposição), seja melhor “pular” esta etapa, concentrando-se, assim, na ideia fundamental e destacando exemplos, intuições e os dados da tabela nº1, sem precisar formalizar tudo isso. Esta proposta é colocada por Forato (2009, p. 114-115) ao discutir como contornar a falta de pré-requisitos, sobretudo matemático, que as alunas apresentam. Como enunciado no item 2.1, se a professora estiver trabalhando uma ideia fundamental, essa deve ser explicada na linguagem natural, não impedindo, assim, a nenhum aluno o acesso a ela: claro, com um pouco de elaboração matemática, o conceito ganha um “gostinho” adicional, mas a sua falta não prejudica o entendimento geral.

Neste sentido, o fato histórico do surgimento dos logaritmos oferece um bom interesse histórico, sublinhando a ideia fundamental embutida nas suas descobertas, mesmo que pouco ou nada desta parte histórica chegue, explicitamente, à sala de aula.

Finalmente, coloca-se mais uma vez em destaque que cabe ao professor avaliar quanto de um determinado episódio da história da matemática apresenta aspectos interessantes para os seus alunos, dependendo da circunstância na qual está desenvolvendo a sua atividade pedagógica e educacional.

6.3 ARQUIMEDES: EM BUSCA DO *INÉDITO VIÁVEL*...

Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero.
(VOLTAIRE apud BOYER, 2012, p. 99).

O maior matemático do período helenístico e de toda a antiguidade foi Arquimedes.
(STRUICK, 1989, p. 93).

Arquimedes foi, sem dúvida, um homem do “multiforme engenho”¹⁴⁹, ativo em vários campos do saber científico, desde a física, a engenharia e a matemática. Dentre todas as suas descobertas e invenções, o foco deste capítulo será sobre a solução que o cientista de Siracusa achou para resolver o círculo e a esfera. A análise destes conceitos remeterá a algumas ideias

¹⁴⁹ Homero utiliza este epíteto quando refere-se a Ulisses. A adaptação, para Arquimedes, foi sugerida indiretamente pelo aforismo de Voltaire.

fundamentais da matemática (o infinito, as ideias do cálculo infinitesimal) e permitirá discutir o contexto social, político e cultural a partir do qual emergiram.

6.3.1 Arquimedes e as fatias da pizza

Eu possa me dizer do amor (que tive):
Que não seja imortal, posto que é chama
Mas que seja infinito enquanto dure.
Vinicius de Moraes (extrato do Soneto da Fidelidade)

Uma das obras mais notáveis de Arquimedes foi solucionar os problemas de calcular a área e perímetro do círculo; tal demonstração, apresentada para alunos do nono ano do ensino fundamental ou até do ensino médio, tal como fez Arquimedes, pode parecer um pouco artificiosa e pouco significativa.

Na obra “A medida do círculo”¹⁵⁰, de fato, a primeira proposição afirma que: “A área de um círculo é equivalente à área de um triângulo retângulo com base igual à circunferência e altura igual ao raio”.

A demonstração procede por exaustão, enfocando os dois casos (absurdos) nos quais a área do triângulo seria, respectivamente, menor ou maior do que a do círculo. Arquimedes consegue demonstrar que o triângulo em análise não pode ter nem área menor e nem maior do que a do respectivo círculo: sobra, assim, somente a possibilidade em que as duas figuras sejam equivalentes.¹⁵¹

O próprio Arquimedes atribui a paternidade deste método a Eudoxo, um matemático da academia Platônica, autor também da “redefinição” do conceito de proporção entre duas medidas para abranger as grandezas irracionais, contornando, assim, o “escândalo” da

¹⁵⁰ A referência usada daqui em diante para os trabalhos de Arquimedes, nos momentos em que não houver especificação, é a obra omnia de Heath “The Works of Arquimedes” (1897).

¹⁵¹ Este *modus operandi* relembra, de perto, aquilo que Sir Arthur Conan Doyle colocou na boca da sua mais celebre criação literária, o detetive particular Sherlock Holmes: “Uma vez eliminado o impossível, o que restar, não importa o quão improvável, deve ser a verdade.” Ou seja: não se precisa estar convencido de uma coisa, mas é suficiente descartar as outras possibilidades. Na matemática clássica, esta formulação é filha do princípio da lógica aristotélica do princípio do terceiro excluído: no caso em análise, seria o fato de que uma coisa ou é diferente (maior ou menor), ou é igual a uma outra coisa. Esta assonância entre o detetive de Backer Street e a matemática não é casual: filho de uma época que vivenciou o nascimento do sentimento positivista, o método dele pretende ser uma transposição do método lógico dedutivo da geometria euclidiana às investigações policiais. Esta ideia é explicitamente usada, por exemplo, no livro didático do 9º ano “Matemática – Imenes & Lellis” de autoria de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (2010), ao introduzir o método lógico-dedutivo da geometria euclidiana. É interessante ressaltar, por fim, que atualmente existem tantos tipos de lógicas (fuzzy, trivalente...) nas quais o princípio do terceiro excluído cai, quanto vertentes da matemática contemporânea, tais como a intuicionista, que redimensionaram a aplicabilidade desta lei.

descoberta desses números. O método de exaustão (nomeado assim somente no 1647, pelo matemático flamengo Grégoire De Saint Vincent) era o jeito excogitado para lidar com o conceito de infinito... sem utilizar o infinito! Eves (2011, p. 419) descreve esta ideia como “a resposta de escola platônica aos paradoxos de Zenão” e das ideias atomísticas. Com efeito, existia uma forte linha filosófica na koiné grega que aborrecia a ideia de infinito: assim, Eudoxo

[...] tinha com certeza medo - nada menos do que seus contemporâneos - das antinomias relacionadas com a noção intuitiva de "infinito"; pensou ele, no entanto (e com razão), evitá-las, introduzindo não já o termo explícito "infinito" (tão rico de sugestões em linguagem comum), mas alguns operadores específicos infinitos, que são válidos apenas no alvo circunscrito da matemática. A verdadeira inovação de Eudoxos é, essencialmente, não evitar a chamada para o infinito - o que seria, logicamente, impossível - mas restringir o seu uso, ou seja, circunscrevê-lo dentro de uma linguagem especial regida por leis operacionais precisas. Restrito nesta área, livre das perigosas implicações que tem na linguagem comum, a noção de infinito pode e deve ser usada. Na verdade, é a ideia fundamental da ciência matemática. (GEYMONAT, 1965, p. 340, tradução nossa).

O rigor do método é incontestável e, de fato, exclui a referência explícita ao conceito de infinito. Mas o preço que Eudoxo paga (e que a matemática toda pagará até Cavalieri e Torricelli) é o uso de um mecanismo artificioso, que acarreta sempre a necessidade de uma *reductio ad absurdum* e, sobretudo, um método ótimo para demonstrar, mas inútil para... descobrir. Ou seja, uma vez conhecido o resultado que deseja-se demonstrar, o método de exaustão oferece uma útil ferramenta para demonstrá-lo. Mas, como chegar ao resultado? Sobre este aspecto, o método pouco ajuda.

Ter banido da matemática o infinito, com o seus infinitésimos, indivisíveis etc., com certeza liberou o campo de perigosas antinomias (por exemplo, os famosos paradoxos de Zenão e da teoria atomística de Leucipo e Demócrito), mas também privou os matemáticos mediterrâneos de potentes ferramentas por quase 1800 anos. Sobre o fato da exaustão não ser um antecipo do moderno cálculo, é também interessante a análise de Bagni (2004, cap. 4).

Apesar de representar uma construção lógico-dedutiva impecável, trata-se de um enfoque que dificilmente pode provocar o interesse e a motivação dos alunos não especialistas¹⁵² e que, ademais, não representa uma *joia*, tampouco um *tesouro*¹⁵³ no mundo da matemática. Devlin brinca com o nome de “exaustão” ao dizer que:

¹⁵² Ver especialista e não especialista em matemática de acordo com a visão de Caraça (item 4.4).

¹⁵³ Que o sentido estético represente uma parte não desprezível do fazer matemática é um fato que vários matemáticos, estudiosos da matemática e do ensino da matemática apontaram em diversas situações (cf.

este processo é chamado assim não porque Eudoxo ficou exausto após tantas e tantas contas, mas porque a sequência de áreas aproximadas chegaria eventualmente a exaurir a área original confinada na curva se o processo continuasse indefinidamente. (DEVLIN, 2002, p. 125, tradução nossa).¹⁵⁴

Possivelmente, Eudoxo não ficava exausto após aplicar o método da exaustão, mas é bem provável que os alunos da educação básica... fiquem!

Mas, além destes problemas ligados ao campo da educação matemática, existia um problema de caráter epistemológico: o método da exaustão (juntamente com a *reductio ad absurdum*) é uma trajetória metodológica para demonstrar que uma determinada relação ou propriedade é verdadeira, mas não fornece caminhos para descobrir qual é esta propriedade. Ou seja, como Arquimedes chegou a cogitar que o círculo pudesse ser equivalente ao triângulo?¹⁵⁵

Estes dois problemas remetem ao conceito de prova matemática explicado por Hersh: “Uma prova pode *convencer* e pode *explicar*. Na pesquisa, convencer é o primeiro objetivo. Na escola secundária e na faculdade o objetivo principal é explicar”. (HERSH, 1997, p. 60-61, grifo nosso, tradução nossa).

A prova de Arquimedes convence os “matemáticos”, mas não fornece explicações úteis que permitam entender como ele (e os alunos) pôde alcançar tal resultado.

Este problema não é recente: os matemáticos renascentistas e os primeiros que começaram a usar métodos de protocálculo pensavam nas mesmas perguntas. Evangelista Torricelli, discípulo de Galileu e de Bonaventura Cavalieri, e aprimorador do método dos indivisíveis, em sua *Opera Geométrica* (1644) chega a discutir sobre o fato de que “os antigos possuíam um método secreto para descobrir essas relações” (ALEXANDER, 2016, p. 123). Poucos anos depois, o matemático inglês John Wallis, na sua *Arithmetica infinitorum* (1665), coloca uma questão parecida: “[Arquimedes parece ter] propositalmente encoberto os

HERSH 1997; DEVLIN 2002). Não é incomum também na sala de aula reparar em professores destacando a beleza de uma descoberta, de uma fórmula ou de uma demonstração, assim como pode acontecer que alunos sejam motivados por um raciocínio, uma forma, uma simetria. Talvez, das mais famosas citações a respeito da beleza no mundo da matemática são a de Johannes Kepler (“A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão [proporção áurea]. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa”) e a de Richard Feynman, o qual chamou a fórmula de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$) “a mais bela do mundo”.

¹⁵⁴ “This process is called exhaustion, not because Eudoxos became exhausted after computing so many calculation, but because the sequency of successively approximated areas would eventually exhaust the entire area beneath the original curve if continued indefinitely”.

¹⁵⁵ Curiosamente, Devlin (2002, p. 124, tradução nossa) fornece um *lapsus* sobre o assunto ao escrever que Arquimedes “usou o método de [exaustão] de Eudoxo para calcular a área e o volume de várias figuras”; o matemático siracusano usou a exaustão para demonstrar um resultado, mas para calculá-lo usou as técnicas explicitadas no “Método”.

rastros das suas pesquisas, como se tivesse sepultado para as gerações futuras o segredo do seu método”.

Observando retrospectivamente estas dúvidas, é interessante notar como os dois matemáticos, Torricelli e Wallis, estavam certos ao manifestar as suas dúvidas sobre o fato de que uma parte do raciocínio do matemático siracusano poderia ter sido perdida: era como se na sua obra faltassem alguns elementos necessários para complementação do quadro. Talvez, de alguma forma, eles percebessem algo semelhante ao que notou o pai da química moderna, Dmitri Ivanovic Mendeleev (1834 - 1907), quando, juntando as 63 “cartas” correspondentes aos elementos químicos até então conhecidos, percebeu um “padrão” no peso atômico que lhe fez prever que, em determinadas posições, havia descontinuidade no referido padrão: havia “cartas” faltando. Possivelmente, Torricelli e Wallis, ao organizar as “cartas” das descobertas de Arquimedes, podem ter percebido que “algo” estava faltando. Assim, ao perceber isso, os matemáticos renascentistas foram, de certa maneira, precursores do paradigma indiciário proposto três séculos depois por Ginzburg!

Os dois matemáticos estavam certos e a descoberta das evidências deste fato poderia, tranquilamente, figurar num romance de aventura ou, mais modernamente, num filme do arqueólogo e aventureiro Indiana Jones.

Como aponta Boyer (2012, p. 107-108), as obras de Arquimedes sofreram uma história atormentada, tendo épocas nas quais poucos escritos do siracusano eram conhecidos; e, singularmente, isso se deu enquanto os elementos de Euclides foram sempre presentes na matemática mediterrânea.

Neste sentido, em 1906, o filólogo e historiador da ciência Johan Ludwig Heiberg (1854 - 1928), descobriu em Constantinopla (atual Istambul), um antigo palimpsesto, proveniente do velho monastério do Santo Sepulcro, em Jerusalém, e que constava várias orações. O termo palimpsesto (literalmente: “aquilo que se raspa para escrever de novo”) indica a prática de raspar e apagar as escritas de um pergaminho (ou, mais raramente, um papiro) a fim de poder reutilizar o suporte para escrever coisas novas.¹⁵⁶ Então, Heiberg descobriu que embaixo do texto litúrgico cristão podia ser encontrado um outro texto, mais débil, mas não totalmente apagado, escrito ortogonalmente em relação ao outro, e que

¹⁵⁶ Esta prática justificava-se pelo fato do pergaminho ser obtido com um processo bastante demorado, a partir da pele de vaca ou de carneiro: desde o começo até o fim do processo, podia demorar mais de um ano! Por isso, a prática de reutilizar os pergaminhos, apagando aquilo que não era considerado valioso, era tão comum antes do advento do papel e da imprensa de tipos móveis. É interessante também notar que na língua italiana “palinsesto” é uma palavra de uso corrente, que indica a grade de programação de televisões e rádios, reaproveitando a ideia de algo que, a cada dia, é apagado e reescrito no mesmo “espaço” (no caso, o canal rádio/TV).

pertencia às obras de Arquimedes. Heiberg tirou algumas fotos do texto e começou a fazer circular as transcrições; contudo, o início da primeira guerra mundial fez com que ele interrompesse a sua atividade e, logo em seguida, o palimpsesto sumiu. Reapareceu em Paris, nos anos 20, e, após outras peripécias, foi vendido num leilão Christie's, em New York, por 2 milhões de dólares, em 1998. O novo dono permaneceu no anonimato e o texto foi dado ao Walters Art Museum, de Baltimore. Esta instituição, conjuntamente com a Universidade de Stanford, ao aplicar várias técnicas de “raio-X”, usando aceleradores de partículas e vários tamanhos de ondas (ultravioletas, infravermelhos, X), descobriu os “segredos” do pergaminho ao contrastar o desgaste devido ao tempo, o mofo e as manumissões.¹⁵⁷

Nesse documento estão contidas várias obras¹⁵⁸, algumas representando interessantes contribuições filológicas que compõem um enredo mais completo acerca dos estudos do cientista siracusano. Mas, aquilo que se configurou como um real “tesouro” descoberto foi um texto até então desconhecido, chamado “O método dos teoremas mecânicos” (agora conhecido simplesmente como “O método”). Este documento é uma carta que Arquimedes manda ao seu amigo e cientista de Alexandria, Erastóstenes (276 a.C. - 194 a.C.), no qual o matemático de Siracusa confirma as intuições de Torricelli e Wallis: de fato, ele usava um método semelhante ao dos indivisíveis para chegar aos resultados que, num segundo momento, ele ia demonstrar com um formalismo “euclidiano”. Nas suas próprias palavras:

Com efeito, certas propriedades que inicialmente me pareceram evidentes por via mecânica, foram demonstradas posteriormente por via geométrica, pois uma demonstração feita por meio desse método [mecânico] não corresponde a uma verdadeira demonstração.

Porém, é mais fácil conseguir a demonstração depois de ter adquirido algum conhecimento dos objetos da pesquisa por meio desse método, do que procurar sem nenhum conhecimento.

[...] estou persuadido de que [este método] trará uma contribuição não pequena para a matemática. (MAGNAGHI, 2011, p. 105).

O método do qual fala Arquimedes consiste em achar, por via de considerações geométricas, igualdades de produtos entre, por exemplo, quatro segmentos. Por exemplo, algo do tipo:

$$SH * TK = KI * MX$$

¹⁵⁷ As imagens digitalizadas após o emprego das várias técnicas com os vários tipos de raios e uma transcrição em grego é disponibilizada livremente e acessível sob licença Creative Commons no seguinte endereço: <<http://www.archimedespalimpsest.net>>. Acesso em: 15 dez. 2016.

¹⁵⁸ “Sobre o equilíbrio dos planos”, “Sobre as espirais”, “Medida de um círculo”, “Sobre a esfera e o cilindro”, “Sobre os corpos boiantes” (única cópia conhecida em grego), “O método dos teoremas mecânicos” (única cópia conhecida), “Stomachion” (a cópia mais completa de todas as conhecidas).

Figura 14 - Sistema de segmentos em equilíbrio

Fonte: Autoria própria.

Nota: O segmento SH "pesa" menos do MX (SH é mais curto de MX), mas pela propriedade da alavanca, o sistema está em equilíbrio.

Tem-se, assim, a representação de uma situação geométrica, conforme expressa a figura apresentada. Sendo TK e KI dois segmentos que pertencem à mesma reta, Arquimedes interpreta esta situação (*a priori*, totalmente geométrica) como uma situação física, particularmente como uma alavanca cujo fulcro está em K.

Sendo uma situação de equilíbrio, o matemático siracusano prossegue na sua interpretação física e chega a cogitar que os dois segmentos postos nas extremidades da alavanca, SH e MX, têm um “peso”, e que tal peso seja proporcional à medida. Assim, MX tem um peso maior que SH e, para que a gangorra esteja em equilíbrio, é necessário que os braços TK e KI estejam na proporção inversa.

Aqui, aparece a primeira novidade “explosiva” que o método do matemático de Siracusa apresenta: pela primeira vez tem-se um registro, na matemática grega antiga, no qual à entidade “segmento de reta” é associado um “peso”.

A este ponto é interessante analisar, mesmo que resumidamente, tendências do movimento da matemática na bacia do Mediterrâneo – esta expressão, em referência à matemática, foi tomada de empréstimo de D’Ambrosio (2008, p. 26) – para entender melhor o passo dado por Arquimedes.

Núcleos de matemáticas bem forte se encontram tanto na Mesopotâmia, quanto no Egito, e os historiadores concordam que foram as necessidades práticas ligadas à formulação de calendários, à contabilidade de comércios, às provisões alimentícias e à redistribuição e

mapeamento das terras os principais fatores responsáveis por tal desenvolvimento. Os registros sobre matemática destes povos que chegaram até hoje mostram uma certa habilidade e um olhar altamente prático: por exemplo, nunca são fornecidas fórmulas gerais para resolver problemas, mas sempre exemplos específicos; nunca fórmulas e resoluções de problemas são explicadas ou, pelo menos, explicitadas.

Os relatos dos primeiros gregos se dedicando a questões matemáticas¹⁵⁹ indicam que eles foram estudar no Egito ou na Babilônia (ou nas duas localidades), mostrando uma dívida que os próprios gregos reconheciam às outras culturas do Mediterrâneo.

Quase contemporaneamente, começa surgir a necessidade de argumentar acerca dos resultados alcançados: de acordo com Eves (2011, p. 94-95), a tradição atesta os primeiros relatos de demonstração por parte do próprio Tales de Mileto, tributando-lhe a demonstração de que os ângulos opostos pelo vértice são iguais. Daí em diante, debates, disputas, novas descobertas e novos métodos contribuíram para expandir o *corpus* de conhecimentos matemáticos antigos até que o próprio Euclides reunisse todo esse acúmulo de saber e lhe desse a forma lógico-dedutiva admirada ainda hoje nos Elementos. Os pesquisadores, os sábios, os filósofos não estavam mais satisfeitos sabendo que as coisas estavam de um determinado jeito: “começaram a se perguntar *como e por que*” (EVES, 2011, p. 95, grifos do autor).

A análise de como este processo se deu valeria, por si só, uma pesquisa inteira, mas é preciso ressaltar, ainda que resumidamente, alguns aspectos que podem ter conduzido a esta mudança de paradigma. O elemento de descontinuidade em relação às sociedades mesopotâmicas e egípcias foi, com certeza, o tipo de economia: se, por um lado, estes povos podiam contar com rios generosos, que deixam a terra fértil e relativamente fácil¹⁶⁰ de ser cultivada, do outro, os gregos tinham que lidar com uma terra prevalentemente montanhosa e rochosa, mal adaptada ao cultivo do trigo; assim, logo tiveram que pensar em modalidades diferentes de organização econômica: no lugar de plantar para o próprio consumo e sustento, optaram por cultivar a oliveira, uma planta bem adaptada ao tipo de clima e de solo, podendo produzir azeite e comercializá-lo com os outros povos do Mediterrâneo em troca de elementos básicos, como, justamente, o trigo.

¹⁵⁹ Tales e Pitágoras não são, de acordo com o rigor historiográfico, personagens históricas, já que todos os relatos que temos sobre eles são bem mais tardios do que a época em que ambos viveram. Mesmo assim, tais registros usam estas personalidades como epítomes de uma cultura e de um tempo. A respeito de Tales, Struik (1989, p. 73), afirma que “a sua figura é lendária, mas encerra algo de eminentemente real”.

¹⁶⁰ Por óbvio, os rios precisavam de contínuas obras de manutenção e isso, por sua vez, demandava uma coordenação entre os moradores da região. Contudo, mesmo assim, era esta uma situação extremamente mais favorável do que o chão árido e montanhoso da península helênica.

Do ponto de vista político, também as diferenças eram das mais profundas: por um lado, sistemas absolutistas centralizados controlando territórios de vastas extensões; por outro, um conjunto de várias cidades independentes e aliadas¹⁶¹, cada uma com seus próprios sistemas de governo que podiam ir da monarquia até a democracia, passando por vários graus de organização oligárquica. Quando o sistema de governo é baseado na incontestabilidade de um Faraó ou de um sacerdote (ambos, não casualmente, representantes da divindade na terra), em geral não se percebe grande necessidade de motivar escolhas, decisões ou até mesmo resultados matemáticos. Contrariamente, quando constantemente precisa-se discutir para chegar a um acordo com outros, ou mesmo para formar alianças, assim aparece a necessidade de argumentar, justificar a própria posição e sustentá-la perante as objeções alheias.

Uma característica do movimento da filosofia e da matemática grega é o progressivo processo de abstração, no qual menos interesse é dado para as aplicações práticas e mais para um tipo de especulação “pura”. Segundo Machado (2013, p. 20-22), um papel fundamental, neste sentido, foi jogado pela estrutura escravocrata das cidades gregas: até a “democrática” Atenas podia permitir que os homens (não as mulheres!) se reunissem em assembleia discutindo a política da cidade graças ao fato de que... os escravos estavam trabalhando por eles! Assim, cada vez mais as tarefas práticas eram encaradas com pouco interesse ou até mesmo como degradantes, e a atividade do “cidadão livre” tornava-se a especulação sobre o mundo.

Assim Ernest resume estas ideias asseverando que:

a prova matemática, particularmente na sua forma axiomática, parece ter sido desenvolvida na Grécia Clássica. Cornford, Kolmogorov, Restivo, Struik e outros tem apontado que o aparecer da prova na matemática grega refletiu as *circunstâncias* sociais, políticas e culturais daquela época. Isso inclui, entre outros, as formas democráticas nas quais argumentos e disputas eram correntemente praticadas e amplamente valorizadas, associadas ao ceticismo e à especulação entre hipóteses e ideias, e uma visão idealística associada à uma sociedade aristocrática e escravocrata. (ERNEST, 1996, p. 40, tradução nossa, grifo nosso).

O termo “circunstância” remete (incidentalmente) à proposta de Ortega y Gasset (ver a introdução da presente dissertação) e, em geral, à ligação profunda entre o desenvolvimento de ideias e situações “materiais” que as acompanham.

Seja qual for a mistura de motivações que desencadeou este andamento, é fato que, provavelmente, um sacerdote egípcio do século XV a. C. não pensava em termos de

¹⁶¹ No tempo presente, dir-se-ia “alianças a geometria variável”.

“segmento”, mas, provavelmente, em termos de “um pau”, uma “borda de mesa” ou “o lado de uma pirâmide”. Contrariamente, as diatribes entre Platão e Aristóteles sobre a origem das ideias (matemáticas), deixavam bem claro um ponto: a ideia de segmento é algo diferente (mesmo que relacionado) a qualquer objeto físico e sensível.

À luz deste movimento, sucintamente apresentado neste trabalho, a ideia de Arquimedes de “voltar atrás” e considerar os segmentos de retas dotados de peso, aparece com todo o seu porte revolucionário. Mas, atenção: mais que um “voltar”, trata-se de um “dar a volta”, em um movimento a espiral¹⁶², no qual se volta a uma posição precedente, mas com uma distância maior do centro, ou, por assim dizer, com uma oitava mais alta. Tal “volta” não seria, em geral, uma característica somente Arquimediana, mas abrangeria, mesmo que em formas diferentes que não remetem às ideias do cálculo integral, as pesquisas de vários matemáticos helenísticos: a medida da Terra, de Erastóstenes e as medidas astronômicas, de Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.), representam um “retorno” da geometria das formas puras platônica à... medida da terra! Também, o algoritmo desenvolvido para descobrir os números primos foi apelidado de “crivo”, justamente em consequência deste movimento de quebrar as fronteiras entre o prático e o teórico, o concreto e o abstrato (NETZ, 2009, p. 149-150).

De fato, Arquimedes não abre mão da ideia de segmento de reta “abstrata” assim como é formalizada por Euclides¹⁶³, mas associa propriedades físicas, como o peso, a esta abstração. Assim, a parte experiencial que foi deixada do lado de fora “da porta” da geometria grega “euclidiana”, com Arquimedes volta “pela janela”, de modo a ampliar ainda mais as possibilidades da própria matemática. O segmento de reta não tem peso, enquanto o conceito remete a uma entidade concreta, como uma corda esticada, um pedaço reto de madeira; mas é o próprio conceito abstrato de segmento que acaba adquirindo uma nova propriedade, tão

¹⁶² A ideia de um movimento em espiral, na educação, é bem fundamentada (por exemplo na própria construção do *curriculum* do ensino fundamental) e remete à obra seminal de Jerome Bruner (1978, p. 48-50), mas não trata-se de um movimento incomum, também olhando retrospectivamente as ideias que contenderam-se o espaço filosófico ao longo do tempo. Somente para citar alguns exemplos: a teoria atomista antiga, proposta por Leucipo e o seu discípulo Demócrito, no mundo grego, e sustentada no mundo latino por Lucrécio, foi “derrotada” pela filosofia platônica e aristotélica, mas “voltou” a partir do século XVIII com o nascimento da química e com o surgimento da física moderna. Sempre a partir do nascimento da física Galileiana e Newtoniana, ideias “tântricas” e “holísticas” sobre o mundo deram espaços às visões mais analíticas, racionalistas, “cartesianas”; mas, a partir do século XX, com as novas descobertas da relatividade e da física quântica, o determinismo “laplaciano” foi novamente redimensionado a favor de uma visão mais complexa do existente. Não casualmente, o físico Niels Bhor escolheu como brasão do título nobiliár que o rei dinamarquês concedeu-lhe pelos seus merecimentos científicos, o símbolo taoísta da união do *Yin* e do *Yang*. A referência à espiral cabe perfeitamente porque, além de ser um elemento extremamente explorado na pedagogia, também representa um objeto de intenso estudo... pelo próprio Arquimedes!

¹⁶³ “E linha é comprimento sem largura” (EUCLIDES, 2009, p. 97).

abstrata quando o próprio segmento: a do peso, que, inclusive, resulta em relação direta com a de comprimento deste.

Esta novidade, por si só, não seria de grande utilidade para Arquimedes encontrar áreas e volumes de figuras e sólidos curvilíneos. Na verdade, desenvolvendo a ideia de um peso de um segmento de modo proporcional ao seu comprimento, pode-se rapidamente chegar à ideia de infinitésimo. Se um segmento de determinada medida tem um relativo peso, então parece razoável que cortando o segmento pela metade o resultado terá um peso de metade do original: repetindo o processo sequencialmente, existirá um momento em que se chegará ao fim? De acordo com a geometria euclidiana, as unidades mínimas de qualquer segmento¹⁶⁴ são os pontos e, para formar qualquer segmento, não importa o seu tamanho, precisa-se de infinitos deles¹⁶⁵.

Figura 15 - Segmento de parábola e triângulo “pesados” por Arquimedes

Fonte: Autoria própria.

Nota: A ideia de Arquimedes era considerar o segmento de parábola e o triângulo como formados por infinitos segmentos de reta paralelos. Estabelecendo uma condição de equilíbrio entre as duas figuras numa alavanca, ele chegou a estabelecer um valor para a área do segmento de parábola.

¹⁶⁴ É interessante ressaltar que a ideia de uma unidade mínima na construção de algo é presente em campos diferentes do saber humano: na música ocidental existem 7 notas; em biologia, a unidade mínima da “vida” são as 4 bases azotadas que compõem o DNA; em linguística são os “fonemas”; em química, os próprios “átomos”; na teoria da informação, são os “bit” para os dados e os “chunk” para a unidade informativa; em física existem (no modelo padrão) as 17 partículas fundamentais; etc....

¹⁶⁵ As questões sobre o tamanho do(s) infinito(s) ligadas à infinitude dos números e também à infinitude dos pontos numa reta foram resolvidas somente no final do século XIX por Georg Cantor (1845 - 1918).

O que, por sua vez, levava a problemas do tipo dos paradoxos de Zenão ou a questões como a seguinte: “Se o peso de um dado segmento é uma quantidade finita, qual é o peso de cada um dos seus infinitos pontos?” – o que, por sua vez, dava espaço a muito debate na filosofia e na matemática antiga (e também naquela moderna, pelo menos até o século XIX).

Arquimedes não trata destas questões na sua carta ao amigo Erastóstenes, mas as apresenta indiretamente trasladando o problema entre pontos e linhas para a relação entre linhas e superfícies: na explicação de como conseguiu calcular a superfície de um segmento de parábola, o matemático de Siracusa imagina explicitamente considerar a área de tal figura como composta de infinitos segmentos de retas, todos paralelos ao eixo da parábola, cujo comprimento (ou seja, “peso”), depende das características geométricas da própria curva. A partir disso, ele conseguiu demonstrar a equivalência entre o segmento de parábola com uma fração de um determinado triângulo, fazendo corresponder ao peso de um segmento de um, o peso de um segmento no outro (balançados numa “alavanca”).¹⁶⁶

Tem-se, assim, um testemunho direto de que Arquimedes utilizou, quase 1800 anos antes dos estudos de Cavalieri e Torricelli, uma espécie de método dos indivisíveis, mediado pela ideia de alavanca. Com esse método, ele o transporta para as três dimensões, calculando o volume da esfera com um método parecido: o volume de um sólido (no caso, esfera, cone e cilindro) é formado pelo “peso” de infinitas superfícies, quase como as páginas de um livro, que, avaliadas singularmente, tem volume desprezível, mas empilhadas uma em cima da outra, compõem o volume total. Este diálogo entre o “grande” e o “pequeno”, – ou, em termos modernos, entre o infinito e o infinitésimo – está presente também na obra “O contador de areia”, na qual Arquimedes tenta medir o gigantesco tamanho do universo com o minúsculo grão de areia, juntando, assim, “o fantasticamente grande com o fantasticamente pequeno” (NETZ, 2009, p. 57, tradução nossa).

Também é importante ressaltar como, segundo Netz (2009, p. 68 e 77), Arquimedes recorre continuamente ao uso de experiências mentais, propondo fatiar parábolas, pesar segmentos de retas ou rodar figuras para obter sólidos: o papel do experimento mental é um recurso extremamente presente, tanto na física, quanto na matemática (ver também item 6.4).

¹⁶⁶ É interessante ressaltar como o próprio Torricelli, no livro *De dimensione parabolae*, demonstra a quadratura da parábola com 21 métodos diferentes, utilizando tanto métodos “clássicos”, baseados na exaustão, quanto métodos “criativos”, baseados nos infinitésimos. Sem surpresa, o método arquimediato clássico é reportado; bem mais surpreendentemente, Torricelli reproduz o método “mecânico”, do matemático siracusano, quase 300 anos antes da descoberta do palimpsesto do Método! (Boyer, 2012, p. 235-236). Este elemento pode ser mais uma evidência de como os pensamentos “mecânicos”, de um, e as especulações sobre infinitesimais, do outro, apesar de estarem separados por quase 2000 anos, eram intelectualmente muito afinados.

Infelizmente, Arquimedes não explica, no Método, como chegou à ideia de que o círculo seja equivalente ao triângulo, que tem como base a circunferência e como altura o raio. Não é improvável que ele tenha utilizado a ideia apresentada a seguir – ainda atualmente empregada em vários textos escolares do ensino básico.

A sua ideia era simples e, como a maioria das ideias simples, genial: tal como numa festa de aniversário, quando comumente divide-se um bolo circular em fatias “triangulares” (propriamente, setores circulares), embora saiba-se que os “triângulos” não sejam exatamente triângulos, já que um lado é um arco de circunferência. Também a altura do triângulo referente a este lado é bem próxima do raio, mas não é igual.

Figura 16 - "Fatiamento" do círculo

Fonte: Autoria própria.

Nota: O círculo é fatiado em cada vez mais fatias, cada uma “parecendo” cada vez mais um triângulo. Conforme o número de fatia aumenta, a altura de cada triângulo aproxima-se cada vez mais com o raio.

É justamente neste ponto que entra o conceito de limite: e se a divisão em “triângulos” continuasse *ad infinitum*? Com infinitos “triângulos”, a altura de cada triângulo seria igual ao raio; por sua vez, a base, infinitésima, seria um segmento de reta.

Assim, a área de cada “triângulo” seria $(r \cdot \delta b)/2$, em que δb é uma base infinitésima. Ora, a adição das áreas de n triângulos tem soma equivalente à área de um triângulo com a

mesma altura e, como base, a soma das outras bases. No caso do Arquimedes: $\sum \delta b$, que é justamente igual ao tamanho da circunferência.

Ou seja, a área de um círculo é igual à área de um triângulo com altura igual ao raio e base igual à circunferência. Assim, pode-se expressar este raciocínio pela fórmula:

$$A_{\text{circulo}} = C \cdot r / 2$$

em que C é o comprimento da circunferência e, r, o raio.

Não existe relato de Arquimedes acerca dos trajetos que utilizou para chegar ao seu resultado, mas existem vários elementos que emergem do Método que apontam para este contexto: de modo principal, a ideia que considera figuras planas como sendo compostas por infinitas linhas, com um “peso” proporcional ao seu comprimento, é uma ideia que remete diretamente ao cálculo e, não casualmente, será retomada por Cavalieri, Torricelli e Kepler no século XVII, justamente antes das obras de Newton e Leibniz. Assim, a ideia de “fatiar” o círculo em infinitos triângulos seria somente uma pequena variante da ideia de recortar em infinitas “tirinhas” um pedaço de parábola, ou recortar em infinitas “camadas” um cilindro ou uma esfera.

Uma comprovação indireta disso é fornecida pelo próprio trabalho de Johannes Kepler (1571 - 1630). O mundo europeu, entre o final do século XVI e o começo do século XVII, tem um grupo de físicos e matemáticos abordando com mais impaciência a temática ligada ao infinitamente pequeno e aos indivisíveis, principalmente por razões práticas: o engenheiro Stevin, o astrônomo Kepler e o fundador da cinemática moderna (senão na física toda, no seu sentido atual) Galileo, precisavam, cada um, em âmbitos ligeiramente diferentes, recorrer às ideias intuitivas do cálculo para resolver as próprias indagações. Assim, na obra *Astronomia nova* (1609), o astrônomo germânico precisava calcular a área contida em várias curvas, inclusive a da elipse. Como “aquecimento”, Kepler começou calculando a área do círculo, usando exatamente o método anteriormente descrito. Observando que o resultado obtido tinha conformidade com o método clássico (obtido por meio do processo de exaustão), lançou mão deste mecanismo com outras áreas e, no livro *Stereometria Doliorum* (1612), também com volumes de sólidos obtidos a partir da rotação de curvas e porções de curvas (BOYER, 2012, p. 228-230). Trinta anos mais tarde, as ideias de Kepler e de Galileo foram sistematizadas na obra de Cavalieri e aprimoradas nos vinte anos seguintes, por Torricelli.

Este exemplo é interessante porque liga diretamente as ideias arquimedianas de superfícies formadas por linhas retas e volumes formados por superfícies planas com o objetivo de calcular a área do círculo, por meio da sua progressiva subdivisão em fatias cada

vez menores. Esta, claramente, não é uma prova de que Arquimedes “efetivamente” tinha raciocinado deste jeito, mas um elemento que aponta para a maneira como ele “poderia” ter desenvolvido o seu raciocínio.

Há pelo menos outros dois fatos a serem analisados sobre esta possibilidade. O primeiro, remonta a Atenas clássica do século V: relata um comentador de Aristóteles, Simplicio, o Cilício, que Antifon, o Sofista (c. 430 a.C.)¹⁶⁷, propôs que seria possível, para calcular a área do círculo, continuar a dividi-lo em fatias, cada vez menores, a fim de perceber o círculo como um polígono de infinitos lados. Uma vez que se sabe calcular a área de um polígono, a área do círculo está determinada e conhecida.

As objeções “choveram”, literalmente, sobre este filósofo, argumentando que, se o processo teria de ser infinito, então jamais chegaria realmente a ser igual à área do círculo. (EVES, 2011, p. 418). Assim, nas palavras do próprio Aristóteles:

Antifon, na tentativa de quadrar o círculo, incorreu na falácia de pensar que as partes fora [do polígono] chegariam ao fim. [...] Ele conclui que o sempre crescente número de lados dos polígonos inscritos chegariam a coincidir com os pontos da circunferência. [...] Mas isto é impossível, pois os lados do polígono inscrito estão diminuídos, mas nunca chegarão a ser pontos. (apud HERSH, 1997, p. 184, tradução nossa).

Este episódio demonstra que a ideia anteriormente descrita estava presente no debate filosófico e matemático da época (e que foi fortemente combatida por Aristóteles): mais um elemento que vem ao encontro da concepção de que Arquimedes poderia ter tido acesso a este raciocínio para chegar a um resultado somente demonstrado posteriormente, por exaustão.

Outro argumento pode ser procurado na tradição matemática chinesa. Liu Hui (c. 225 - c. 295)¹⁶⁸ foi um importante matemático que deixou as suas contribuições mais relevantes sob forma de comentários do livro Nove Capítulos da Arte Matemática. Nesta obra, encontram-se tanto o cálculo da área do círculo como a cálculo dos volumes da pirâmide, do cilindro e da esfera. Neste segundo caso, aparece o método dos indivisíveis de Cavalieri e, no primeiro, a ideia de dividir *ad infinitum* o círculo em infinitas fatias. Nas palavras do matemático chinês:

¹⁶⁷ Existe um debate sobre Antifon; da Atenas clássica, chegaram duas referências ligadas a este nome: uma acompanhada de “sofista”, é relativa a pouquíssimos fragmentos e referências indiretas sobre o seu pensamento e a sua filosofia. A outra, acompanhada de “político”, é relativa a um expoente da oligarquia ateniense. O fato de que as duas figuras são consideradas como pessoas diferentes é derivação direta de que, por um lado, o “político” era expoente de um sistema oligárquico e, por outro, o “sofista” deixou uma contribuição na qual afirma que todos os homens são iguais, não tendo diferença entre os bárbaros e os gregos. Uma posição notavelmente... moderna!

¹⁶⁸ Ele também forneceu vários métodos para aproximar π , alguns dos quais mais eficientes do que o método clássico do próprio Arquimedes.

Quanto mais fino cortar o segmento [o lado], menor será o erro. Cortar mais e mais até quando será impossível de cortar mais. Assim, [o polígono] coincidirá com o círculo e não existirá mais erro. (DAUBEN, 2008, p. 269, tradução nossa).

Novamente, um estudo de um matemático que junta elementos do cálculo com o método do “fatiamento” para calcular a área do círculo.

Eis aqui três elementos: o raciocínio de Liu Hui e o de Kepler mostram como matemáticos de épocas e tradições diferentes trabalharam tanto com elementos do cálculo infinitesimal quanto com a ideia de calcular a área do círculo compreendendo-o como um polígono de infinitos lados. Ou seja, parece que a ideia dos indivisíveis de Cavalieri se coaduna com a ideia de fatiar, *ad infinitum*, o círculo. A proposta de Antifon, também, testemunha como esta ideia já estava circulando na Atenas clássica, mesmo não encontrando aceitação unânime (muito pelo contrário!).

Assim, um historiador tem caminhos para concluir que Arquimedes “poderia” ter calculado a área do círculo desta maneira – o método do “fatiamento” –, pois constitui significativamente uma hipótese verossímil. Mas, isso é tudo o que é necessário para, a partir da análise da história (ou, no caso, das histórias), extrair as ideias fundamentais, as dinâmicas, as relações com uma época, culturas e filosofias de modo a disputar a hegemonia para montar, assim, uma possível narrativa para a sala de aula.

6.3.1.1 Da História à história: uma narrativa para a sala de aula

Um possível exemplo, dentre vários que poderiam ser propostos a partir deste quadro histórico, está na realização de uma atividade com os alunos¹⁶⁹ que começa justamente... com a degustação de uma pizza!¹⁷⁰ Obviamente, é fundamental que os alunos participem da parte de cortá-la em fatias, já que este será o ponto de partida da discussão que se seguirá; será também importante que o momento de “comer a pizza” seja um momento totalmente “lúdico”, deixando para outro momento dúvidas e propostas sobre o cálculo de áreas e perímetros.

Ao final desta etapa, pode-se colocar aos alunos a questão: como poderá ser calculada a área da pizza? A partir desta questão, o docente terá que conduzir a aula fazendo um

¹⁶⁹ No Brasil, o estudo do círculo com a sua área e a sua circunferência está previsto no 9º ano do ensino fundamental, mas a discussão a seguir pode ser trabalhada também no ensino médio.

¹⁷⁰ Ou qualquer alimento de forma circular: bolo, torta, pudim...

levantamento do conhecimento dos alunos de modo a constatar se tem algo que possa ser mobilizado para resolver o problema¹⁷¹, destacando a maneira com a qual os alunos cortaram a pizza. Assim, com uma exploração minuciosa, obter-se-á um caminho parecido com aquilo que foi proposto por Antifon, Liu Hui, Kepler, e, quem sabe, talvez o próprio trajeto de Arquimedes pudesse ser reconstruído na dinâmica da sala de aula.

A proposta de começar esta atividade comendo uma pizza acarreta algumas vantagens que merecem ser destacadas. Em primeiro lugar, numa educação que abre espaços ao lúdico e ao prazeroso, o desenvolvimento das propostas pedagógicas ocorre com mais facilidade, certamente encontrando menos resistência nos próprios alunos, de modo geral. Secundariamente, uma atividade assim concebida pode contribuir para quebrar a ideia com a qual ainda muitos alunos vêm para escola¹⁷², pensando a matemática como algo “compacto”, nascida pronta, tal como uma moderna Atena¹⁷³; nesta concepção acerca da matéria, o conceito de “exato” é sinônimo tanto de impossibilidade de diálogo como de confronto de ideias e, por vezes, até o próprio aluno pode sentir a sua opinião rebaixada (ou até mesmo anulada!)¹⁷⁴. Isto é, trata-se de uma atividade que mostra que o conhecimento matemático é construído a partir de discussões e debates sobre propostas e que, ademais, todos estão em plena possibilidade e com direito de fazê-las, com igual dignidade, em um ambiente descontraído e, possivelmente, divertido.

Em terceiro lugar, a passagem entre o cortar fisicamente a pizza (em um número finito de fatias) e “imaginar” a extensão deste processo ao infinito é uma imagem didática que destaca plasticamente elementos fundamentais do ensino da matemática.

Como aponta J. Ellenberg (2015): “A matemática é a continuação do sentido comum com outros meios”; este divertido aforismo, releitura menos belicista da bem mais famosa citação de Von Clausewitz, resume em si tanto o conceito da matemática como reelaboração feita a partir de elementos práticos e concretos, quanto chama a atenção sobre o fato de que, continuando o senso comum com outros meios, existe sempre o perigo de chegar a... contradizer o próprio senso comum! Esta, inclusive, é a origem etimológica do termo paradoxo (“contra a opinião comum”) e o próprio exemplo da pizza é emblemático deste aspecto.

¹⁷¹ Principalmente, o jeito de calcular a área de um triângulo.

¹⁷² Reflexo, infelizmente, de discursos de pais, parentes e também das mídias (cf. SANTOS, 2008; BISHOP, 1997, introdução).

¹⁷³ Uma das lendas sobre o nascimento da deusa Atena narra justamente que ela nasceu da testa de Zeus, já adulta e vestida com uma armadura, usando escudo e lança.

¹⁷⁴ Sobre a violência (simbólica) no ensino da matemática, cf. Trabal (2011).

É provável, de fato, que alguns alunos tenham objeções e não aceitem facilmente as ideias deste procedimento: como declarado na introdução desta dissertação, alguns retornos, dúvidas e problemas vivenciados pelo autor da presente pesquisa na sala de aula com os seus alunos são usados como *indícios* para apontar para algumas reflexões e para possíveis desenvolvimentos futuros. Assim, alguns alunos, por exemplo, poderiam objetar que “é impossível cortar uma pizza em infinitas fatias”. Constata-se como a objeção seria bem parecida com aquela produzida em relação à proposta de Antifon, na Atena no século V: uma tal semelhança, segundo Brousseau (1983), não é casual: o obstáculo didático, ou seja, um conhecimento prévio de um discente que o impede/atrapalha de aceitar um novo, muitas vezes retoma algumas vertentes históricas relativas ao assunto abordado.

A resposta a esta objeção passa justamente pela frase de Ellenberg: a matemática “continua” a partir do sentido comum e das experiências, sem ficar “presa” nelas. Ou seja, o fato de não poder fisicamente cortar uma pizza em infinitas fatias em um tempo finito¹⁷⁵ não é um empecilho para “imaginar” tal questão. Talvez, uma referência justamente ao mundo das narrativas fantásticas sirva para esclarecer aos alunos o conceito. Ninguém tem experienciado, diretamente ou por meio de um conhecido, a possibilidade de voar (sem oportunos elementos tecnológicos, *ça va sans dire*), de ser a prova de balas, de ter visão em raio-X e de ser tão forte de poder mover a Lua do seu eixo: mesmo assim, existem milhares de histórias em diferentes mídias (quadrinhos, filmes, seriados, desenhos animados, videogames) que narram as aventuras de um homem exatamente assim, cujo nome é, com razão, *Superman*. Mais uma vez, a imaginação, com os infinitos mundos que a nossa mente pode criar, nutre-se da nossa experiência e dos nossos sentidos, mas não fica presa a eles.

Outra metáfora que pode ilustrar este mecanismo será tomada de empréstimo do famoso debate entre Piaget e Chomsky, que aconteceu em 1975 na Abadia de Royaumont, perto de Paris, e que M. Piattelli-Palmarini registrou numa obra monumental. Assim ele comenta sobre “a principal ideia” de Piaget a respeito da linguagem:

A estrutura fundamental da linguagem está em continuidade com, e é uma generalização/abstração de, vários esquemas sensório-motores. O esquema sensório-motor constitui uma pré-condição ao desenvolvimento da emergência da linguagem, e também constitui a premissa lógica das estruturas linguísticas (ordem das palavras, a construção

¹⁷⁵ Ou... poderia? Seria talvez interessante, dependendo do andamento da aula, para “movimentar” um pouco mais as coisas, sugerir: “e se uma pessoa cortasse em dois pedaços a pizza, em um minuto; depois, em quatro pedaços, em 30 segundos; depois, em oito pedaços, em 15 segundos, e assim por diante. Será que demoraria mesmo um tempo infinito para fazer infinitas fatias?” Mas esta seria, como costuma-se falar, uma outra história.

sujeito/verbo/objeto, a relação agente/paciente/instrumento, e assim por diante).

Conexões conceituais e relações semânticas são os primeiros movimentos na aquisição da linguagem. A sintaxe deriva (e é um “espelho”) deles. (PIATTELLI-PALMARINI, 1994, p. 320-321, tradução nossa).¹⁷⁶

A (famosa) ideia construtivista piagetiana está expressa na citação precedente com extrema clareza: as estruturas da língua não somente estão em relação com os esquemas sensorio-motores, mas delas são espelho. A esta visão, a resposta de Chomsky, apresentada na obra de Piattelli-Palmarini, foi:¹⁷⁷

- Se os esquemas sensorio-motores são cruciais no desenvolvimento da linguagem, então crianças que sofrem de profundas deficiências no controle do movimento (por exemplo, pessoas tetraplégicas) deveriam ser impossibilitadas de desenvolver a linguagem, coisa que não acontece.

Resposta de Inhelder: Na verdade, precisa-se somente de pequenos movimentos, até apenas o movimentos dos olhos.

- O ponto final do papo entre Monod e Fodor: Então aquilo que é preciso é uma experiência desencadeadora, e não um “precursor” genuinamente estruturado. (PIATTELLI-PALMARINI, 1994, p. 326, tradução nossa).¹⁷⁸

Assim, Piattelli-Palmarini aponta, em seguida: “Um gatilho não precisa ser ‘isomórfico’, nem até análogo, com a estrutura que coloca em movimento” (1994, p. 328, tradução nossa).¹⁷⁹

Ou seja, a abordagem que Chomsky propõe no debate é que a relação entre o nível sensorio-motor e o da linguagem não é, como Piaget sustentava, de analogia, na qual as dinâmicas de um nível apresentam os mesmos mecanismos do outro, mas sim de “gatilho”, num mecanismo no qual elementos de um nível ativam diferentes mecanismos de outro; tal como num carro movido a gasolina, o motor de acionamento (elétrico) limita-se a dar o

¹⁷⁶ “The basic structure of language is continuous with, and is a generalization-abstraction from, various sensorimotor schemata.

The sensorimotor schemata are a developmental pre-condition for the emergence of language, and also constitute the logical premise of linguistic structures (word order, the subject/verb/object construction, the agent/patient/instrument relation, and so on).

Conceptual links and semantic relations are the prime movers of language acquisition. Syntax is derivative from (and a “mirror” of) these.”

¹⁷⁷ No seu resumo, Piattelli-Palmarini coloca as palavras na boca não diretamente do Chomsky, mas do prêmio Nobel pela medicina, Jacques Monod, e do cientista e filósofo da língua, Jerry Fodor, que apresentavam posições bastantes críticas a Piaget e mais em sintonia com Chomsky.

¹⁷⁸ — If sensorimotor schemata are crucial for language development, then children who are severely handicapped in motor control (quadriplegics, for instance) should be unable to develop language, but this is not the case.

Inhelder's answer: Very little movement is needed, even just moving the eyes.

— Monod's and Fodor's punch-line: Then what is needed is a triggering experience and not a bona fide structured “precursor”.

¹⁷⁹ “A trigger need not be ‘isomorphic’ with, and not even analogous to, the structure it sets in motion.”

impulso inicial ao motor a combustão, que sucessivamente funciona com mecanismos bem diferentes do elétrico.¹⁸⁰

Esta metáfora aplica-se perfeitamente ao caso em análise: o fato de cortar fisicamente uma pizza em fatias pode funcionar como um “gatilho” para imaginar um processo com infinitos cortes; tal ideia não implica que os dois processos tenham que ter um funcionamento análogo ou que estejam sujeitos às mesmas regras; um condiciona o outro, mas não o determina.

Esta relação entre uma operação prática e sua idealização, juntamente com as possíveis dúvidas dos alunos, pode remeter ao conceito de experimento mental que, se é verdade que desenvolve um papel fundamental na física, pode ser considerado um elemento importante na própria matemática.¹⁸¹ Não sendo possível, na prática, fatiar a pizza em um número infinito de vezes, somente pode-se recorrer à imaginação para compreender o que aconteceria: trata-se de uma experiência da mesma “natureza” da queda dos graves de Galileo, da maçã de Newton ou do trem de Einstein.

Figura 17 - Conhecimento concreto e abstrato.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral>

Nota: O conhecimento cresce em espiral, continuamente passando do abstrato pro concreto (e vice-versa). Por motivos óbvios, a espiral é Arquimedianas. A ideia de espiral num processo de ensino aprendizagem remete a Bruner (1978, p. 48-50).

A dinâmica anteriormente ilustrada remete para outro par constantemente presente na matemática e, ainda mais, no ensino da matemática: a dupla abstrato-concreto. De alguma

¹⁸⁰ Esta metáfora é retirada de <<http://www.nilsonjosemachado.net/20100305.doc>>. Acesso em: 15 jul. 2016.

¹⁸¹ Sobre o papel do experimento mental em física, ver item 6.4.

forma intuitiva, poder-se-ia colocar o fatiamento “físico” da pizza no campo do concreto e o fatiamento pensado em infinitas partes no campo do abstrato: esta classificação remete à distinção entre manipulável, tocável, material, como elementos do concreto, e o imaterial, o imaginado, o intangível, como característica do abstrato. De acordo com esta visão, facilmente chega-se a identificar o concreto com o “real” (MACHADO, 1995, p. 45-46). O problema dessa classificação (intuitiva, mas grosseira) é que ela pouco ajuda na análise das atividades matemáticas e na didática da matéria porque, ao pé da letra destas definições, toda a matemática seria abstrata. E, sendo assim, bem caberia a crítica comum de acordo com a qual a matemática é difícil e complicada justamente por causa disso.

Talvez uma elaboração mais eficaz da dupla concreto-abstrato, que abranja o caso precedente mas que possa ir além, deva remeter à ideia de sentido: assim, o concreto seria o conceito bem articulado dentro da rede de significações do sujeito, enquanto o abstrato seria algo (ainda) mal relacionado na rede de significados do sujeito. Machado, ao expressar esta ideia, coloca o exemplo do livro de matemática e do livro de história, sendo, supostamente, o primeiro abstrato e o segundo concreto. Contudo,

quando se considera apenas a dimensão concreto-palpável, não há distinções entre os dois livros, uma vez que o material presente em ambos consiste, no máximo, em representações não manipuláveis dos objetos envolvidos. (MACHADO, 1995, p. 47).

De fato, exemplificando este argumento, pode-se afirmar que o manipulação ou o enviesamento dos conhecimentos construídos acerca de César ou dos “patrícios” não é maior que a de uma equação de segundo grau. Mas talvez a ideia de reis e classes dominantes, guerras e jogos de poder seja algo mais entrelaçado nas redes de significações dos alunos do que uma fórmula matemática.

Então, esta concepção ingênua entre concreto e abstrato, associando o primeiro à ideia de ser manipulável, parece pouco frutífera para uma análise do processo de aprendizagem, bem como para entender as dificuldades da aluna ao pensar assuntos da matemática.

Figura 18 - Aprendizagem: concreto x abstrato

Fonte: Autoria própria.

Nota: Um outro modelo: o conhecimento progride oscilando entre abstrato e concreto e o abstrato do ciclo precedente vira o concreto do ciclo sucessivo. A curva foi obtida com a função $y = (\sin(x) + 1)\sqrt{x}$.

Assim, chega-se a criticar a ideia de processo de aprendizagem como passagem do concreto para o abstrato, chegando, ao invés disso, a pensar o abstrato como um momento de passagem entre dois concretos: J. S. Mill (1806 - 1873) apontou isso como “passagem de particulares para particulares” (apud ERNEST, 1996, p. 27). Retomando, novamente, a imagem da espiral proposta por Bruner, pode-se interpretar o movimento do conhecimento como algo que progressivamente amplia o concreto, passando pelo abstrato.

Ou ainda, aproveitando a ideia de “mão dupla” entre as duas polaridades, poder-se-ia pensar numa “oscilação” entre diferentes níveis de abstrato em um contínuo crescimento do chamado concreto.

Assim, concreto e abstrato tornam-se polaridades dinâmicas e subjetivas que dependem da “situação cognitiva” do sujeito, do seu campo referencial e do sentido que ele consegue elaborar em torno de um determinado assunto. Talvez, os próprios termos concreto e abstrato poderiam ser trocados por *familiar/costumeiro* e *incomum/novo*.

Emblemático a este respeito foi o relato do prof. Fábio Orfali¹⁸², sobre uma aula que assistiu no IME da USP, em que a prof.^a Martha Monteiro, ao introduzir o conceito de C*-álgebra, sugeriu: “quando você for pensar em uma propriedade de uma C*-álgebra, é importante ter um modelo *concreto* na cabeça e as matrizes 2x2 servem muito bem para isso.”

¹⁸² Este relato foi dado durante do grupo de estudo SEMA, em data 25 de novembro 2016.

Ou seja, para um aluno de mestrado em matemática, uma matriz quadrada de ordem 2 com elementos complexos é algo *concreto*, que pode funcionar como “base” para entender a C*-álgebra. É interessante comparar a percepção de matrizes em diferentes níveis de escolarização, entre a citada situação e a de um aluno do ensino médio: dificilmente ele as qualificaria como algo concreto! Assim, parece evidente o caráter pessoal da ideia de “concreto” e, ademais, como este conceito tem relação com a dimensão de apropriação: quando um conceito é entendido e apropriado¹⁸³ pelo sujeito ele se torna (mais) concreto.

Nesse sentido, uma colocação interessante é feita por Santos (2015, cap. 2) ao abordar os conceitos de real imediato, mediato e hipotizado, que representam diferentes níveis no processo de aprendizagem e que remetem ao conceito de “tangível”, no qual o termo não remete apenas à ideia de tocar com a mão, mas ao campo mais amplo do “real”. Assim, por exemplo, para alguém que pesquise sobre a matemática, o teorema de Pitágoras pode ser extremamente real, tal como uma pedra na qual se possa tropeçar. A escolha do termo tangível é particularmente interessante e rica de possibilidades, já que pode ser entendido nos dois sentidos: tangível enquanto o sujeito pode tocá-lo (metaforicamente remete às ideias de imediato, mediato ou pensado) ou enquanto o sujeito “é tocado” pelo assunto; é, nesta acepção, o assunto que tange o sujeito!

Emblemática a este respeito foi uma experiência ocorrida com o pesquisador da presente dissertação durante algumas aulas de física, relativas à mecânica clássica, no primeiro ano de Liceo Scientifico (segundo semestre de 2016): os alunos não pareciam muito interessados nas ideias básicas da dinâmica e da cinemática, apesar de serem conceitos ligados a coisas muito “manipuláveis”, como gizes que caíam ou rolavam num plano inclinado. Em um sentido corriqueiro, o referencial era muito concreto, mas isso em nada ajudava a despertar o interesse ou a dar sentido às atividades, aos conceitos e às fórmulas. Em um dado momento, a conversa chegou às viagens intergalácticas, com naves espaciais, buracos negros, velocidade da luz, e, em decorrência disso, surgiram citações a “Guerra nas estrelas” e “Interstellar”: assim, os alunos ficaram decididamente empolgados. Uma borracha é muito mais manipulável que o *Millenium Falcon*¹⁸⁴, mas o segundo estava ligado a uma série de ideias e expectativas infinitamente maiores e mais “interessantes” do que a primeira. Então, o que tocava mais os alunos? O que era mais concreto? As viagens espaciais estavam

¹⁸³ De acordo com Vigotski (1999), particularmente no capítulo 5, a definição de algo é um processo inacabado e contínuo: assim entende-se a ideia de apropriação. Quanto mais este processo procede, mais o conceito torna-se familiar.

¹⁸⁴ Para os profanos, trata-se do navio espacial de Han Solo, coprotagonista da primeira trilogia de Guerra nas estrelas.

inseridas num imaginário, numa narração, extremamente mais tangível (no sentido de tocante) do que uma caneta ou uma bola caindo no chão, cumprindo aquilo que Ogborn (2008, p. 14, tradução nossa) indica como ingrediente fundamental numa narrativa de sucesso: “para contar uma história científica, qual seja ela, com sucesso é preciso excitar a imaginação.”¹⁸⁵ Isto é: no primeiro caso existe uma narrativa empolgante e cativante, enquanto no segundo existe um mero fato, não inserido numa história e, por isso, privado de apego e interesse. Em uma palavra, Guerra das Estrelas faz muito mais sentido do que uma borracha deslizando num plano inclinado!

Talvez essas ideias ecoem as palavras do Pequeno príncipe: “Se você quer construir um navio, não chame as pessoas para juntar madeira nem lhes atribua tarefas e trabalho, mas sim ensine-as a desejar a infinita imensidão do oceano.”

Outra objeção, diferente, mas da mesma matriz, que os alunos poderiam propor, seria que, por mais finas que sejam feitas as fatias (ou seja, por maior que seja o número delas), elas nunca serão exatamente triângulos. Esta objeção remete diretamente (e de novo) às antinomias e aos paradoxos que o conceito de infinito faz aparecer, assemelhando-se profundamente com o contra-argumento dado por Aristóteles a Antifon. E, particularmente, esta objeção se insere na “brecha” dada pelo fato de que o conceito de in-finito não foi definido¹⁸⁶ e está sendo trabalhado com os alunos de maneira intuitiva, usando expressões típicas como “pequeno quanto se queira”. Tal dúvida desapareceria logo com a moderna definição de limite, mas não teria cabimento em um 9º ano de ensino fundamental tal tipo de abordagem. Porém, de acordo com a visão bruneriana de que é possível ensinar tudo a todos, é possível reconstruir intuitivamente esta ideia do infinito usando, por exemplo, a proposta “de pensar sempre o maior”: o docente, para mostrar que infinito não é um número como os outros, mas parece ser mais uma tendência inalcançável, poderá propor uma atividade na qual pede para um aluno “chutar” o maior número que lhe passe na cabeça. Pois bem, o infinito estará além. E, repetindo esta dinâmica algumas vezes, talvez apareça mais claramente um vislumbre de infinito como tensão, um estar sempre além daquilo que podemos contar ou medir.

A história, novamente, pode ajudar o professor em sala de aula. No século XVIII aconteceu um movimento na matemática a partir do qual a atenção direcionou-se para o

¹⁸⁵ “To tell any of the scientific stories successfully is necessarily to try to excite the imagination.”

¹⁸⁶ Trata-se, aqui, de um interessante “trocadilho”: o infinito (com o prefixo “in”, privativo) é aquilo que não está/não é finito, indicando tanto um tamanho sem fim, quanto uma impossibilidade epistemológica de lidar com ele. Definir, ao contrário, remete à ideia de colocar confins a algo, produzindo assim uma definição, que permite decidir o que pertence ao conceito e o que não, da mesma maneira que, colocando uma cerca a um campo, é sempre possível estabelecer o que está por dentro e por fora dele. Eis o a tarefa de Sísifo: colocar definição (ou seja: limites) ao que está sem limites!

“exterior”, utilizando a “nova” ferramenta do cálculo para abordar todo um conjunto de problemas físicos da engenharia; nesta corrida, os conceitos de funções, continuidade, derivada e integral eram usadas sem particular preocupação sobre seus significados: as contas “davam certo”, e isso era o suficiente. No começo do século XIX, os vários problemas ligados ao uso intuitivo destas ferramentas começavam a não poder ser mais deixados de lado e vários matemáticos voltaram a apontar o holofote “internamente” à matemática para solucionar estas contradições.¹⁸⁷ Assim, em 1821, Cauchy definiu a continuidade de uma função se “ $f(x)$ e $f(x+a)$ tem entre si uma diferença infinitesimal sempre que a for infinitesimal” (STEWART, 2014a, p. 200). O termo infinitesimal não era novidade na literatura matemática dos últimos dois séculos e meio, mas a conotação do termo utilizada pelo matemático francês foi inovadora: para Cauchy, um infinitesimal não era um número “infinitamente pequeno”, mas sim uma sequência de números sempre decrescente. Assim, “a sequência 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, e assim por diante é infinitesimal, mas cada um dos membros individuais, como 0,0001, é apenas um número convencional” (STEWART, 2014a, p. 200).

Eis a ideia de Cauchy: um número infinitamente pequeno ou grande, não é, como os outros números “convencionais”, uma entidade estática, mas, sim, uma tendência, um movimento. Esta visão pode ser reforçada em sala de aula: cortar a pizza em infinitas fatias temos um processo, não um ponto de chegada. É interessante destacar como Struik (1989, p. 242) nota um significativo paralelismo entre a obra de formalização de Cauchy e a “invenção” do método de exaustão, de Eudoxo (uma formalização para lidar com o infinito) com uma importante diferença: se os estudos de Cauchy (e dos outros ‘refundadores’ da matemática moderna, tais como Weierstrass, Cantor e Dedekin) impulsionaram a produção na matemática abrindo novos caminhos, a obra do platônico Eudoxo reprimiu a produtividade.

Também Devlin (2002, p. 103, tradução nossa) vai nesta direção ao destacar que para achar o valor de uma série infinita “a chave é mudar o foco do processo de somar os termos

¹⁸⁷ Esta dialética entre elementos externos e internos da matemática é comum em cada época e em cada ramo dela, sendo duas polaridades indissolivelmente amarradas, mas, dependendo do período e do assunto, uma pode prevalecer sobre a outra. Dois exemplos esclarecedores: por um lado, o surgimento das geometrias não euclidianas foi consequência de um movimento interno da matemática, que se debruçava sobre o quinto postulado dos Elementos de Euclides, sem quase nenhuma utilidade prática (na época); do outro lado, o nascimento “oficial” do cálculo vem da necessidade de descrever o movimento dos planetas de acordo com a nova visão heliocêntrica e os novos dados disponíveis. Isso não significa que outras motivações complementares não fossem presentes: Gauss, por exemplo, está pensando justamente em medir as distâncias entre cristas de montanhas numa superfície curva e, na mesma época de Newton, colocava-se o problema de achar a tangente de uma curva com novas abordagens (por exemplo, por Fermat).

individuais para a identificação e manipulação do padrão geral”. E conclui “Em poucas palavras, esta é a chave para lidar com o infinito na matemática” (DEVLIN, 2002, p. 103).¹⁸⁸

Com esta perspectiva em mente, mais uma vez a literatura poderia fornecer elementos para ajudar a compreensão desta abordagem: o celebre aforismo do escritor Eduardo Galeano (1940 - 2015), que compara a utopia e o horizonte¹⁸⁹ ao dizer que, em ambos os casos, quanto mais uma pessoa corre em direção ao horizonte, este (como a utopia) escapa na mesma proporção. Analogamente, quanto mais “corre-se” no sentido do infinito, mais ele “corre” além.

O tema do infinito e a sua ligação com o horizonte remetem diretamente, também, à poesia, particularmente ao canto “L’infinito”, do poeta Giacomo Leopardi (1798 - 1837), considerada a obra programática da poética e da filosofia do intelectual italiano. O poeta, da sua posição, tem uma visão “obstrita” por colina e árvores: mas, algo do horizonte consegue chegar à percepção do poeta e, por minúsculo que seja, isso permite transcender os limites da vista e enxergar (talvez com a capacidade da mente) “inacabados espaços [...], e sobre-humanos silêncios, e profundíssima quiete” (tradução, indigna, nossa)¹⁹⁰. Percebe o infinito conotado como indeterminado/indefinido, sobre-humano e profundíssimo: uma clara escolha de vocábulos que semanticamente e/ou sintaticamente, remetem à uma realidade além da dimensão humana.

Esta visão poética serve também como “ponte” entre as ideias arquimedianas e o conceito de *inédito viável*, assim como elaborado por Freire (2001, p. 53ss). O pedagogo patrono da educação brasileira afirma que os temas (geradores) abordados no processo educativo deveriam ser elaborados, discutidos e estudados até encontrar as “situações limites” que, momentaneamente, barram ulteriores caminhos. É neste momento que a dimensão humana explicita-se, segundo Freire, como quebra do limite; sua ultrapassagem, possibilitando vislumbrar e praticar o “inédito viável”, é a novidade que se rende ao possível – a superação do limite.

Com certeza, o inédito viável freiriano é mais abrangente, quando refere-se à uma situação social que impede o ser humano de ser mais: ser mais como pessoa, com os seus

¹⁸⁸ “In a nutshell, this is the key to handling the infinite in mathematics”.

¹⁸⁹ “A utopia está lá no horizonte. Aproximo-me dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.” Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=67&v=9iqi1oaKvzs>. Acesso em: 18 set. 2016. De acordo com as palavras do escritor uruguaio, a ideia seria do seu amigo e diretor de cinema, Fernando Birri, enquanto os dois estavam realizando uma palestra numa escola.

¹⁹⁰ “interminati Spazi[...], e sovrumanì Silenzi, e profundissima quiete”.

desejos e aspirações; ser mais como sujeito social, com as suas necessidades materiais e não; ser mais como ser intelectual, com os seus desejos e vontades; enfim: ser mais enquanto ser inacabado, que precisa continuamente reconstruir-se junto aos outros. Não obstante, parece razoável, colocar a situação do fatiamento da pizza sob a mesma perspectiva, pelo menos cognitivamente falando: a impossibilidade (material) de cortar infinitas fatias (ato limite que denota uma situação limite) pode conduzir à ideia de um corte infinito pensado como inédito viável.

A importância do conceito de infinito, na matemática, é fato bem documentado: entre vários, vale a pena citar a obra da húngara Rozsa Peter, especialista em lógica, *Playing with Infinity. Mathematics for everyone*, no qual a matemática sustenta que brincar com o infinito é a verdadeira essência da matemática (HERSH, 1997, p. 76) e a própria pesquisa de Santos (1995). Mas o infinito, como discutido anteriormente, não pode ser esgotado somente na matemática: ciências, filosofia, teologia¹⁹¹, literatura, pedagogia, todas debruçaram-se sobre o tema. Trata-se, de fato, de um tema fundamental enquanto constitutivamente transversal e radical.

6.3.2 A circunferência e π

Uma vez executado o processo arquimediano sobre a pizza, o resultado será:

$$A = \frac{C * r}{2}$$

sendo C a medida da circunferência e r o comprimento do raio.

Se, por um lado, chegou-se numa descoberta – a saber, a equivalência entre o círculo e o triângulo com determinadas características –, por outro, desperta-se uma nova pergunta: qual é a medida da circunferência?

Arquimedes já tinha uma resposta parcial, que remetia a Híppocrates de Chios: era sabido que a circunferência era diretamente proporcional à medida do seu raio.

Esta conclusão pode ser trabalhada em sala de aula contando com a ideia (fundamental) de semelhança: se dois círculos são sempre obtíveis um do outro, através de

¹⁹¹ Os próprios “doutores” da igreja católica, por exemplo, colocaram-se a este respeito: Agostinho aceitou a sequência dos números como um infinito atual; Tomás de Aquino, conforme a posição de Aristóteles, aceitava o infinito somente como potência mas, curiosamente, aceitava, como os atomistas, a divisão *ad infinitum* da reta (STRUICK, 1989, p. 141).

uma transformação homotética¹⁹², então os círculos são figuras semelhantes. Este fato pode ser abordado de maneira informal com as alunas, alavancando sobre a ideia de que um círculo “reduzido” ou “ampliado” produz outro círculo.¹⁹³

Uma vez que todas compreendem este conceito fundamental, prossegue-se:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

A razão entre o comprimento das circunferências é a mesma da razão entre os raios: a ideia fundamental¹⁹⁴ é que existe uma razão de semelhança entre todas as medidas lineares de elementos correspondentes entre as duas circunferências. Tal razão é o fator de proporcionalidade ou “escala” entre as duas.

Transformando algebricamente a fórmula anterior, pode-se obter que:

$$\frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2} = k$$

O que leva a constatar que cada circunferência é proporcional ao “seu” raio ($C = k * r$).

Este raciocínio pode ser acompanhado por medidas experimentais de vários tipos: afinal, como citado no item 3, este é um dos clássicos exemplos em que “parece” que esta relação está embutida nas coisas (sejam ideias imateriais ou objetos concretos) esperando somente ser “descoberta”.

Assim, com este raciocínio, a fórmula para calcular a área do círculo evolui:

$$A = \frac{Cr}{2} = \frac{krr}{2} = \frac{kr^2}{2}$$

Mais uma nova descoberta para os alunos: a área do círculo é proporcional ao quadrado do raio. Isso, historicamente, não seria novidade alguma, já que este fato era notório quando Arquimedes atacou o problema; mas, no enredo da narrativa em sala de aula, esta é uma novidade a caminho de chegar à formulação moderna para este conceito – a área do círculo.

Esta descoberta, como no caso precedente da área, dá uma parcial resposta à pergunta posta (o valor do comprimento da circunferência), mas coloca, de novo, um outro problema: qual seria a constante?

¹⁹² Uma homotetia é uma transformação geométrica que converte qualquer figura em uma outra maior ou menor, mantendo entre as duas uma relação de semelhança.

¹⁹³ Com a maioria dos celulares de hoje é possível fazer experiência disso de maneira imediata: basta mostrar uma imagem e ampliá-la ou diminuí-la com o movimento “dos dois dedos”.

¹⁹⁴ Aqui, a ideia fundamental é a proporcionalidade direta: se dobrar o tamanho do raio em um, dobra-se o comprimento da circunferência também.

Para responder a esta (última) pergunta, pode-se recorrer novamente aos estudos de Arquimedes, utilizando-se seu método – chamado, posteriormente, de clássico – sendo usado (na tradição ocidental¹⁹⁵) até o começo do século XVII, antes de ser trocado por métodos cuja convergência era mais rápida (EVES, 2011, p. 143).

Novamente, o objetivo foi utilizar a ideia de limite para aproximar π até a precisão desejada: inscrevendo e circunscrevendo um polígono dentro e fora do círculo, parece evidente que o comprimento da circunferência estará entre o valor do perímetro do polígono externo e o do interno.

Desta forma, Arquimedes começou inscrevendo um hexágono em um círculo. Assim, sendo o hexágono formado por 6 triângulos equiláteros de lado igual ao raio, destaca-se que o perímetro de tal hexágono mede $6r$. Construindo depois o hexágono circunscrito ao círculo, pode-se calcular o lado do hexágono como $r \frac{2}{\sqrt{3}}$. Assim, o perímetro do hexágono mede

$$\frac{6r \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12r}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}r$$

Logo, Arquimedes pôde concluir que:

$$6r < kr < 4\sqrt{3}r$$

Da qual decorre que:

$$6 < k < 4\sqrt{3}$$

Ou seja, o valor de k deve ser entre 6 e, aproximadamente, pouco menos do que 7.

Ora, analisando a fórmula da área do círculo, pode-se notar que a constante k aparece dividida por dois: está aqui a ideia de que, na verdade, k não seja a verdadeira constante fundamental, mas sim $k/2$: chamando esta nova constante π ¹⁹⁶, a fórmula precedente torna-se:

$$6 < 2\pi < 4\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3}$$

Portanto, obtém-se que o valor de π está compreendido entre 3 e, aproximadamente, 3,5.

É interessante destacar como esta parte pode ser abordada apoiando-se simplesmente no conhecimento do teorema de Pitágoras junto com algumas considerações geométricas sobre os triângulos retângulos de 30°/60° e sobre a soma dos ângulos internos de um

¹⁹⁵ Existem registros de que vários matemáticos chineses desenvolveram, nos primeiros séculos do primeiro milênio, um método ligeiramente mais eficiente (BOYER, 2012, p. 146-147).

¹⁹⁶ A letra grega correspondente à letra latina “p”, inicial de “*periphēria*”. “O primeiro a usar este símbolo para designar a circunferência e o diâmetro foi o escritor inglês William Jones, numa publicação de 1706. Porém, o símbolo só encontrou aceitação geral depois que Euler o adotou em 1737”. (EVES, 2011, p. 144).

triângulo. Isso possibilita trabalhar este cálculo para alunos tanto do 9º ano do ensino fundamental quanto para os alunos do ensino médio.

Continuando com o mesmo raciocínio, pode-se aumentar o número de lados dos polígonos à vontade, aumentando assim o nível de precisão da aproximação. Arquimedes, duplicando sucessivamente os lados, chegou a utilizar um polígono de 96 lados, alcançando o resultado de:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Assim, constata-se que, aproximando nos primeiros dois dígitos decimais, chega-se ao valor, para o π , bem conhecido, que é 3,14.

Esta segunda parte – com polígonos de 12, 24, 48 e 96 lados –, requer ferramentas um pouco mais elaboradas do ponto de vista do conhecimento matemático e, talvez, não seja necessário propor polígonos com maior quantidades de lados. O ponto central está no fato de que Arquimedes viabilizou uma forma de *aproximar o quanto se quiser* o valor da constante π . Esta é a ideia forte relacionada aos números irracionais, os números que não admitem uma representação em termos de um número racional.¹⁹⁷ A representação destes números demanda uma sequência infinita e não periódica de algarismos, ou, como por vezes os alunos se expressam, “estes números são infinitos”.

Se, no passado, a descoberta de tal possibilidade representou um “escândalo”¹⁹⁸, ainda hoje esta ideia acarreta algumas dificuldades quando é proposta para as alunas, principalmente

¹⁹⁷ Um número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. π não é um número racional, nem algébrico como, por exemplo, $\sqrt{2}$: é um número transcendente, como foi demonstrado por Lindemann somente em 1882.

¹⁹⁸ Esta é a demonstração de acordo com as ideias expostas nos Elementos (no livro X) por Euclides. Parece que esta demonstração remete a um discípulo de Pitágoras, Hippaso de Metaponto, sendo o primeiro exemplo de demonstração por absurdo.

Suponha-se a existência de um número racional igual à raiz de 2 (negação da tese), ou seja, que existem números inteiros positivos a e b tais que: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ ou, equivalentemente: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

Suponha-se, também, que a e b são primos entre si, já que, em caso contrário, a razão poderia ser simplificada.

Assim: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$ Então: $a^2 = 2b^2$

Sendo assim, a^2 deve ser um número par, pois é dobro de b^2 . Também a deve ser par, pois o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Neste ponto, a é um número par e, portanto, é o dobro de algum número inteiro, dito c :

$$a = 2c \Rightarrow (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$$

Então, b deve ser um número par.

A conclusão do Hippaso foi que, se raiz quadrada de dois fosse um número racional, então este número seria uma fração que não tem forma irredutível. Isto é um absurdo (negação da hipótese) e, portanto, não existe um racional cujo quadrado seja igual a 2, como queria-se demonstrar. Isso representava um problema porque colocava a questão da incomensurabilidade de grandezas: não era mais possível, tomados como quiser dois

o fato de que para escrever o número “exatamente” precisa-se de... infinitos algarismos, mostrando, mais uma vez, quando aproxima-se deste conceito – um número que não tem uma representação decimal finita – os problemas (e as possibilidades) a serem exploradas em aula apresentam-se em cada lado.

Este fato, da impossibilidade prática de conhecer exatamente o valor de π ou $\sqrt{2}$, gera um certo estranhamento porque começa, talvez, pela primeira vez, no ensino básico dos alunos, a abalar a visão de matemática fundamentada no exato; as alunas mais perspicazes podem começar a se perguntar se tais números existem, independentemente do ser humano (ao final, $C/2r = \pi$, e existem fórmulas para calcular o valor de π o quanto a pessoa desejar ou precisar) ou se, de alguma forma, este número existe somente enquanto alguém estiver calculando-o (ver discussão no item 3).

Figura 19 - O círculo em rotação: a esfera

Fonte: Autoria própria.

Nota: De acordo com Euclides (Livro XI, definição 14), um (semi)círculo em rotação produz uma esfera.

Outro elemento a ser destacado é a diferença entre o “calculista” Arquimedes e o “elementista” Euclides: como visto antes, este último produz uma (elegante) demonstração por absurdo da irracionalidade da $\sqrt{2}$, mas não fornece um valor aproximado dela. Isso, talvez, porque calcular e aproximar eram considerados, pelo menos pela linha filosófica pitagórico-plantonista, atividades inferiores, enquanto a matemática “nobre” era a contemplação das formas perfeitas (e, $\sqrt{2}$, com certeza não era assim considerado). Por outro

segmentos, achar sempre um segmento que coubesse um número inteiro de vezes nos dois. A própria ideia de comparação embutida no conceito de medida perdia a sua fundamentação, tanto que o próprio Eudoxo teve que redefinir uma teoria das proporções que levasse em conta os números irracionais.

lado, Arquimedes dedicou-se a estudos práticos, à construção de máquinas e não desprezou o trabalho de “calculista”. Struik, assim, comenta este fato: “Arquimedes diferia da maior parte dos matemáticos gregos pela sua capacidade de cálculo. Este fato deu ao seu trabalho, juntamente com todas as suas características gregas, um toque oriental”¹⁹⁹ (STRUIK, 1989, p. 95).

Novamente, uma (aparente) oposição entre a matemática pura e a matemática aplicada remete a concepções filosóficas sobre a matemática e sobre o mundo, mas também revela, a um olhar cuidadoso, como estas duas atividades estejam entrelaçadas numa relação de complementariedade: como mostra o processo de aproximação anteriormente exposto, os cálculos de Arquimedes se apoiaram sobre ideias e conceitos da matemática dos Elementos de Euclides.

Terminado o trabalho sobre o círculo, Arquimedes (e a história em sala de aula) pode dirigir-se ao “equivalente” do círculo em três dimensões – a esfera.²⁰⁰

6.3.3 A esfera desnuda

Arquimedes não se contentou em deixar o próprio nome ligado ao círculo, tendo desvelado as razões entre superfície, contorno, e raio; ele foi além e atacou também o problema da esfera. Deste sólido, talvez uns dos mais simbólicos e ricos de significados²⁰¹, sabia-se que a sua superfície dependia do quadrado do raio e que o seu volume estava associado ao cubo do raio.

Arquimedes, no Método, explica que começou enfocando o problema do volume seguindo a “sua” abordagem baseada no método mecânico: conseguindo igualar, por meio de

¹⁹⁹ A este respeito, emblemático é o “problema do gado” que foi resolvido (parcialmente), à mão, somente no final do século XIX e, de modo exato, somente no século XX, apoiando-se no auxílio de computadores, enquanto a solução é representada por um número de 206.545 dígitos!

²⁰⁰ Com a “explosão” da geometria em dimensões maiores de três e com o surgimento da topologia, passou-se a pensar esferas em 4, 5 ou mais dimensões; chamando estas figuras de 4-esfera, 5-esfera e assim por diante. Conceitualmente, não teria nada de errado em chamar uma esfera de 3-círculo; uma 4-esfera de 4-círculo e assim por diante. Ou seja, assim como uma 4-esfera seria uma hiperesfera, assim a esfera poderia ser compreendida como um hipercírculo.

²⁰¹ Parmênides associava à ideia totalizante do *ser* justamente a ideia da esfera, por ser um sólido com uma elevada simetria, passando assim uma ideia de compacticidade, homogeneidade e estabilidade, sem devir nem movimentos. Os próprios modelos do sistema solar estavam sempre baseados em movimentos circulares e combinações: é famoso o modelo Aristotélico (elaborado a partir de uma pesquisa de Eudoxo e completado no Almagesto de Ptolomeu) baseado sobre as esferas celestes. Modernamente, a partir da teoria da relatividade, está colocado em discussão se o próprio universo teria massa suficiente para se “curvar” o bastante para formar uma esfera literalmente... universal!

uma alavanca geométrica, o peso de fatias de esfera com o peso de fatias de cone e cilindro, afirmou que:

Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera; e o cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é [equivalente a] três meios da esfera. (ARQUIMEDES apud MAGNAGHI, 2011, p. 52).

Figura 20 - Sólidos em equilíbrio

Fonte: Magnaghi (2011, p. 54).

Nota: Esta imagem mostra como Arquimedes procedeu: a partir de considerações geométricas e mecânicas, ele conseguia colocar diferentes sólidos em “equilíbrio” em cima de uma alavanca.

Ou seja, o volume da esfera é comparado ao do cone inscrito na semiesfera e o do cilindro circunscrito, resultando:

$$V_{esfera} = 4 V_{cone} \text{ e } V_{esfera} = 4 V_{cilindro}$$

Já que tanto o volume do cone quanto o do cilindro eram conhecidos, Arquimedes pode chegar à fórmula usada até hoje utilizada:

$$V_{esfera} = 4 V_{cone} = 4 \frac{1}{3} A_{base} h = 4 \frac{1}{3} \pi r^2 h = 4 \frac{1}{3} \pi r^2 r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Novamente, é importante ressaltar como o método do matemático de Siracusa baseia-se na intuição de que um sólido pudesse ser “fatiado” em infinitas superfícies, de tal modo que cada uma das quais contribuíssem ao seu volume de maneira proporcional ao seu “peso”; um peso, por sua vez, associado diretamente à medida da área da fatia.

Feito isso, Arquimedes continua a sua explicação para Erastóstenes contando que

[já] que toda esfera é o quádruplo do cone que tem como base o círculo máximo e como altura o raio da esfera, surgiu a ideia de que a superfície de

toda esfera fosse o quádruplo de seu círculo máximo. (ARQUIMEDES apud MAGNAGHI, 2011, p. 52).

Este trecho representa um momento importantíssimo na história da matemática: é a primeira vez que um matemático anota como lhe veio a intuição para resolver um problema. E, não supreendentemente, esta não é um resultado dedutivo, nem uma sequência de ideias lógicas bem encadeadas, mas trata-se de uma analogia, uma “intuição” desprovida de rigor, mas rica em criatividade.

Criatividade e rigor, intuição e dedução, pensamento lógico e ana-lógico... São todos pares que representam uma tensão necessária ao se fazer matemática, tanto como especialista, quanto como cidadão: são pares que representam as duas pernas do fazer matemático. Como aponta Hersh: “Uma parceira indispensável da prova é a intuição matemática” (HERSH, 1997, p. 7, tradução nossa).

Assim, Arquimedes não parou na intuição e nem no seu método mecânico: como no caso do círculo, ele realiza uma obra²⁰² na qual consegue, com rigor euclidiano, dar todas as demonstrações do caso.

Figura 21 - Decomposição da esfera

Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html>

Nota: Uma esfera pode ser decomposta em um número cada vez maior de quase-pirâmides, cuja base coincide com um pedaço da superfície da esfera e cuja altura coincide com o raio.

O método seguido por Arquimedes, da alavanca geométrica, não é imediato para alunos de uma classe do ensino básico, assim como são particularmente laboriosas as

²⁰² Na obra “Sobre a esfera e o cilindro”, Arquimedes consegue chegar às demonstrações sobre o volume da esfera e do cone somente nas proposições 33 e 34, usando as precedentes para preparar todas as propriedades das quais necessitava. A maior parte das demonstrações procedem baseadas por *reductio ad absurdum*, semelhante à demonstração formal sobre a área do círculo.

demonstrações clássicas que ele apresenta. Mas, para montar uma narrativa em sala de aula que favoreça a construção de um sentido, provavelmente é possível rearranjar um pouco os fatos, mantendo o espírito das demonstrações, mas usando atalhos mais imediatos e recorrendo aos matemáticos do século XVII, sobretudo a Kepler e Torricelli.

Na verdade, o ponto de partida é fornecido pelo próprio Arquimedes que, no Método, escreve a Erastóstenes que

Com efeito, supôs que, posto que todo círculo é equivalente a um triângulo tendo por base a circunferência do círculo e por altura o raio do círculo, toda esfera também é equivalente a um cone tendo como base a superfície e como altura o raio da esfera. (ARQUIMEDES apud MAGNAGHI, 2011, p. 52).

Ou seja, parece que, por analogia, conquanto pensado a respeito da área do círculo, a esfera pudesse também manter uma relação “análoga” com o cone.²⁰³ Esta frase, talvez do ponto de vista historiográfico, não seja suficiente para sustentar a abordagem proposta a seguir, mas, de novo, pode ser um “indício” suficiente para se pensar que o matemático de Siracusa poderia ter pensado assim, permitindo, desta maneira, a construção de uma narrativa na sala de aula. Assim, pode-se pensar que, como no caso do círculo, Arquimedes “pensou” o truque do fatiamento em “triângulos”; no caso da esfera, então, ele excogitou uma ideia parecida: decompor a esfera em infinitas pirâmides (ou cones), cuja base seria um pedaço da superfície da esfera e cuja altura seria o raio da esfera. Historicamente, esta abordagem aparece pela primeira vez de forma explícita em um texto escrito graças a Kepler.

Assim, procedendo de maneira muito semelhante com o caso do círculo, chegaria ao resultado:

$$V_{esfera} = \frac{A_{esfera} * r}{3} \quad (a)$$

Esta abordagem tem a vantagem, por ser parecida com a da área do círculo, de ser algo “já visto” pelos alunos e, por isso, fazer sentido mais facilmente. Por sua vez, fortalece também a percepção de que este método não seria uma “extravagância” a ser usada uma vez só, mas algo fundante da matemática, que encontra aplicações em várias situações.

Mais uma analogia: como no caso do círculo, quando a descoberta de um jeito de calcular a sua área abria as portas para outra pergunta, assim também no caso da esfera aparece um problema semelhante: para calcular o volume da esfera, precisa-se da superfície.

²⁰³ Este modo de pensar, analógico e criativo, que Arquimedes usou para estender os resultados das duas dimensões para as três, abre espaço para se perguntar o que poderia ter alcançado Arquimedes se, na sua época, a geometria já estivesse transcendido as três dimensões...

Neste ponto, na narração na sala de aula, poder-se-ia recorrer ao método mecânico de Arquimedes para ligar o volume da esfera ao de um cone ou de um cilindro, mas de uma forma mais “direta”: por meio da proposta do matemático Luca Valerio, desenvolvida no começo do 1600 e conhecida na Itália como “la scodella di Galileo”²⁰⁴ pelo fato de ser citada (e discutida) pelo cientista no seu livro *Discorsi e ragionamenti sopra due nuove scienze* (1638).

Figura 22 - Considerações de Valerio sobre o volume da esfera e do cone

Fonte: Odifreddi (2011, p. 160)

Para demonstrar a igualdade de volume entre a esfera e o cone, Valerio considerou, por um lado, uma semiesfera e, do outro, um cilindro tendo como altura o raio da esfera e como base o mesmo círculo dessa semiesfera. No cilindro, ele cavou um cone (inscrito no próprio sólido) com a mesma base e altura, formando uma espécie de xícara (por isso o nome da demonstração). Ele percebeu que as secções na mesma distância da base tinham sempre a mesma área (para obter este resultado é suficiente o teorema de Pitágoras). Mas, sendo que o volume é dado por meio do “empilhamento” das áreas das infinitas secções (o que, quase trinta anos depois, começará a ser nomeado como princípio de Cavalieri), concluiu que o volume da semiesfera é igual ao volume do cilindro, diminuído do cone inscrito. Assim, pode-se expressar este raciocínio da seguinte maneira:

$$V_{esfera} = 2(V_{cilindro} - V_{cone}) = 2(A_{circulo}r - \frac{1}{3} A_{circulo}r)$$

²⁰⁴

“A xícara de Galileu”, disponível em: <https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Set10/ScodellaGalileo.htm>. Acesso em: 19 jan. 2016.

$$= 2 \left(\frac{3 * A_{circulo} r - 1 * A_{circulo} r}{3} \right) = 2 \left(\frac{2 * A_{circulo} r}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{3} A_{circulo} r \right) = 4V_{cone} \quad (b)$$

Ou, alternativamente, o volume da esfera também pode ser relacionado com o do cilindro:

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= 2(V_{cilindro} - V_{cone}) = 2 \left(\frac{2}{3} A_{circulo} r \right) = \frac{2}{3} (A_{circulo} (2r)) \\ &= \frac{2}{3} (2V_{cilindro}) \end{aligned} \quad (c)$$

Valerio utiliza a ideia dos indivisíveis de Cavalieri justamente para demonstrar a equivalência das infinitas “fatias” dos dois sólidos (semiesfera e “xícara”), para provar o mesmo resultado que Arquimedes demonstrou “pesando” as “fatias” de esfera, cilindro e cone. Assim, fica estabelecida a equivalência entre o volume de uma esfera e o do cone (inscrito na semiesfera) na razão de 1 para 4 (1:4) e da esfera com o cilindro equilátero circunscrito (isto é: o dobro do cilindro usado na demonstração) na razão de 2 para 3 (2:3).

Agora, combinando a relação (a) com, por exemplo, a (b)

$$V_{esfera} = \frac{A_{esfera} * r}{3} = 4 \left(\frac{1}{3} A_{circulo} r \right)$$

De que se conclui:

$$A_{esfera} = 4A_{circulo}$$

Assim, obtém-se a demonstração indireta da intuição de Arquimedes do fato que, assim como o volume da esfera resulta ser quatro vezes o do cone, também a mesma relação poderia existir para a área da superfície da esfera e o seu círculo máximo.

O fato de obter o valor da área da superfície da esfera simplesmente por meio de operações algébricas vinculadas ao cálculo de volume, também é um elemento que pode ser explorado enquanto permite destacar, em mais um contexto, a ideia de que a intuição é sim importante, mas não pode estar sem o seu companheiro, o formalismo, que permite confirmar de forma lógica as ideias e as intuições.

Esta análise sobre a esfera apresenta mais dificuldades para montar atividades “concretas”, diferentemente da dinâmica sobre o círculo e circunferência, quando foi utilizada a pizza: seriam necessários modelos em plástico ou madeira, ou simulações digitais. Estas últimas são bem mais fáceis de serem achadas, mas talvez não tenham o mesmo apelo que uma boa pizza. Por fim, esta ideia dos infinitésimos e dos indivisíveis, tão antiga na história da humanidade, tem uma aplicação prática e cada vez mais ao alcance de mais pessoas: a impressão 3D. Existem pelo menos dois modelos de moldagem automática tridimensional:

uma, subtrativa, consiste em tirar de um bloco de material “a sobra” para produzir o objeto requerido; a segunda, aditiva, consiste em adicionar camadas de material às camadas já existentes para conseguir o mesmo objetivo.²⁰⁵ No caso, as do segundo tipo, poderiam bem modelar o processo dos indivisíveis: por exemplo, para construir uma esfera sólida (isto é, “cheia”) a impressora deveria depositar as várias camadas que compõem o objeto uma sobre as outras, até completá-lo. Considerando que as impressoras 3D domésticas, comuns, podem operar com filamentos menores de 2mm, significa que para fazer uma esfera de 10 cm a impressora precisaria depositar mais de 50 camadas “empilhadas”, bem aproximando, assim, a ideia dos indivisíveis.²⁰⁶

Desta forma, é oportuno esboçar um quadro que retome os pontos fundamentais do discurso geométrico.

6.3.4 O primeiro processo de unificação na ciência: círculo, circunferência, esfera, π

Nos Elementos de Euclides, sua obra referencial para o estudo da geometria, produzidas por volta do 300 a. C., e nas perdidas – e mais antigas – obras de Hippocrates de Chios, constata-se que os seguintes conhecimentos sobre o círculo e a esfera estão presentes:

$$C = ar; \quad A = br^2; \quad S = cr^2; \quad V = dr^3 \quad (I)$$

em que C e A são, respectivamente, o comprimento da circunferência e a medida da área do círculo; S e V, respectivamente, são a área e o volume da esfera; r é o raio; a, b, c, d são quatro constantes de proporcionalidade.

Desde esta época, sabia-se que a medida da circunferência era proporcional ao raio; a área do círculo e da esfera era proporcional ao quadrado do raio; o volume da esfera era proporcional ao cubo do raio. Ao princípio, cada uma destas relações depende de uma constante diferente (a, b, c, d). O que Arquimedes conseguiu desenvolver permitiu estabelecer relações entre as diferentes constantes. Assim, ele descobriu que as quatro constantes, são, na realidade, elaborações de uma única constante, que, como descrito anteriormente a respeito do

²⁰⁵ Conforme discutido no capítulo 3, a primeira impressora produziria a esfera em assonância com a visão platônica (o objeto já está no bloco, precisa somente tirar a sobra), enquanto a segunda operaria conforme à matriz aristotélica (o objeto vai ter que ser construído).

²⁰⁶ Este tipo de recurso, apesar da sua recente entrada no mercado “customer” e do seu relativo alto custo, já está se espalhando pelas escolas: a própria rede de ensino municipal da prefeitura de São Paulo disponibilizou, a partir de 2015, nos centros FabLab (Disponível em: <<http://www.fablablivresp.art.br>>. Acesso em: 15 dez. 2016), entre várias coisas, o acesso a impressoras 3D e o suporte técnico para utilizá-las.

círculo e da circunferência, passou a ser chamada π . Assim pode-se afirmar que cada constante assumirá os seguintes valores:

$$a = 2\pi; \quad b = \pi; \quad c = 4\pi; \quad d = \frac{4}{3}\pi$$

Desta forma, substituindo-se cada constante nas respectivas expressões de (I), obter-se-á tais fórmulas com a aparência mais familiar e favorecendo o seu reconhecimento por qualquer estudante de ensino médio:

$$C = 2\pi r; \quad A = \pi r^2; \quad S = 4\pi r^2; \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Figura 23 - Divisão de temas

Fonte: Autoria própria.

Nota: A tradicional divisão de assuntos: o círculo (C – medida da circunferência; A – medida da área) é estudado no 9º ano do ensino fundamental (podendo ser retomado no 1º do ensino médio), enquanto a esfera (S – medida da superfície; V – medida do volume) é abordada no segundo ano do ensino médio. Esta divisão está baseada na ideia que primeiro deve-se estudar (e esgotar) a geometria plana e, sucessivamente, passa-se para geometria espacial.

Além do marco fundamental da história da geometria (a descoberta da existência da constante π e a resolução do círculo, tanto na sua forma plana quanto naquela “dinâmica”²⁰⁷), trata-se da primeira grande oportunidade de unificação da história matemático/científica de um processo no qual, vários elementos, aparentemente distintos, são reconduzidos a uma forma de unidade (ver também o item 6.4).

²⁰⁷ A esfera pode ser obtida a partir de um círculo que gira em torno do seu diâmetro por 180 graus.

Este fato merece ser analisado pela sua importância, tanto do ponto de vista científico, quanto pela sua utilidade na construção de uma narrativa em sala de aula.

Na história do pensamento humano é possível constatar uma contínua tentativa de lidar com a multiplicidade de modo a reconduzi-la a uma unidade (ou, pelo menos, a um número bem pequeno de elementos). Assim, na própria filosofia helênica tem-se o problema do *arché*, do princípio fundante que origina toda a realidade. Entre outros, Tales, Anaxímenes e Anaximandro, Heráclito, Parmênides, Platão, Aristóteles e Plotino forneceram uma maneira para passar da multiplicidade ao princípio único.²⁰⁸ A Teoria atômica moderna, o evolucionismo de Darwin, a mecânica newtoniana dentre outros, são todos exemplos de processos de unificação, nos quais elementos diferentes (as substâncias, os animais, as leis físicas) são reconduzidas sob uma unidade.

Do ponto de vista da narrativa em sala de aula, este elemento ajuda a criar uma unidade dos vários tópicos abordados (área e perímetro do círculo, superfície e volume da esfera, valor de π) como parte de uma mesma história. No lugar de perceber os assuntos simplesmente como justapostos, sem uma motivação ou uma real conexão, este conceito da unificação amarraria estes tópicos a uma narrativa coerente, com um protagonista indiscutível (o matemático de Siracusa) e uma série de *comprimarios* (Antifon, Aristotels, Eudoxo, Kepler, Torricelli...) que acompanharão os alunos ao longo desta jornada.

Claro que, ao abordar estes assuntos (análise do círculo e da esfera), por exemplo, no 9º ano do ensino fundamental, apareceria uma certa discrepância com o currículo padronizado, enquanto a componente curricular sobre a esfera geralmente não estaria prevista e poderia ser vista como um adiantamento da geometria sólida dos anos sucessivos. Para discutir este aspecto, vale a pena retomar pelo menos três conceitos que podem justificar a escolha de construir a unidade didática a partir do trabalho sobre o círculo para se chegar à discussão sobre a esfera. Em primeiro lugar, pode ser interessante pensar acerca do conceito de *inversão antdidática*, proposto por Freudenthal (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781) e que critica a reforma baseada nos conceitos da matemática nova – na qual o conteúdo é reorganizado a partir de uma impostação dedutiva embasada em conceitos básicos (por exemplo, a teoria dos conjuntos). Apesar das críticas, esta perspectiva continua agindo no

²⁰⁸ Para Tales, o princípio era a água; para Anaxímenes, o ar; para Anaximandro, o princípio era o *apeíron* (literalmente, “infinito” ou “indefinido”): talvez um princípio abstrato, ou algo ligado ao espaço (na linha da *rex extensa* cartesiana) ou, ainda, com a própria natureza (a natureza infinita que se mantém sempre a mesma, criando continuamente novas coisas). A harmonia dos opostos de Heráclito e o ser de Parmênides; as ideias (formas) de Platão, os quatro elementos de Aristóteles (terra, fogo, água e ar); o Uno de Plotino, que representaria a unidade primordial da qual toda a realidade emanaria.

currículo escolar, forçando um andamento linear, por exemplo, no estudo geométrico, repetindo, de alguma maneira, a estrutura euclidiana: primeiro, pontos e retas; depois, o plano; por último, o espaço. Se, de acordo com Freudenthal (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 784), o que conta é o processo de fazer/reinventar a matemática (*mathematizing*), e não tomar o resultado de outros como ponto de partida, então o currículo “no papel” não pode imobilizar a professora, que deve ter a liberdade pedagógica – avançar ou retroceder –, de acordo com a sua narração, com as atividades desenvolvidas com as alunas: enfim, de acordo com a construção de sentido dentro da sala de aula. Assim, trabalhar a esfera, neste contexto, faz mais sentido nesse momento do que faria um ano depois, pois está encadeado na mesma narrativa.

O segundo aspecto remete à ideia bruneriana segundo a qual é possível ensinar tudo a todos (BRUNER, 1978): de acordo com esta visão, não existem razões epistemológicas para preferir abordar a esfera no ensino médio ou no fundamental, já que é sempre possível achar uma maneira, adequada à idade e à situação cognitiva dos alunos, para ensinar qualquer assunto. O problema passa, então, a residir na questão acerca da validade e pertinência de abordar tal assunto em determinado ano escolar. De acordo com a proposta delineada anteriormente... possivelmente sim!

Em terceiro lugar, existe um motivo ligado diretamente à construção da narrativa: se a apresentação dos assuntos em sala de aula é uma mera justaposição de tópicos, sem que se verifique uma continuidade, então, a composição do programa é bem variável; se, ao contrário, a professora tenta encadear os elementos curriculares numa narração que faça sentido, logo esse esforço tem que ser respeitado e favorecido. Assim, não contemplar a esfera seria deixar a narração “pela metade”, já que a unificação de abordagem seria um eixo do qual deriva a construção da narrativa, assim como foi proposta anteriormente.

O processo de unificação poderia ser considerado uma ideia fundamental da matemática: ela pode ser explicada com palavras comuns, sem precisar de tecnicismos, expandindo-se para toda a matemática e para outros campos do conhecimento. Assim, Hersh sublinha a importância desta ideia no âmbito da matemática superior:

o caminho para a unificação de assuntos diferentes parece propiciar a melhor explicação para o desenvolvimento da abstração da teoria dos grupos ou da topologia geral. (HERSH, 1997, p. 215, tradução nossa).²⁰⁹

²⁰⁹ “The drive toward the unification of diverse topics seem to provide the best explanation for the development of abstract group theory or point-set topology”.

Também Ernest aponta o mecanismo de unificação como uma modalidade de desenvolvimento que existe na matemática:

Os matemáticos também utilizam os conceitos e os métodos de uma teoria matemática para uma outra, ou tentam estabelecer conexões entre duas partes precedentemente distintas da matemática. (ERNEST, 2004, p. 58, tradução nossa).²¹⁰

Tal ideia não se aplica somente a elementos da fronteira da pesquisa matemática, mas abrange vários assuntos do ensino básico. Por exemplo, a geometria analítica é, justamente, a aplicação do método algébrico à geometria euclidiana, permitindo solucionar problemas que resistiam há séculos: como destaca Devlin (2002, p. 158-160), os três problemas clássicos da matemática grega foram demonstrados como insolúveis (usando régua e compasso) aplicando as propriedades algébricas às construções geométricas. Outro exemplo é constituído pela álgebra de Boole, que consiste em aplicar à lógica aristotélica os métodos aritméticos (DEVLIN, 2002, p. 58). Por fim, a ideia de se abordar o círculo, a elipse, a parábola e a hipérbole – que num primeiro olhar teriam pouco em comum – como partes de uma única “família”, a das cônicas, permitiu discutir várias características delas em sinergia uma com as outras.²¹¹

A ideia de unificação é tão forte que, de alguma maneira, quando ela é “quebrada”, isso gera dúvida, estranhamento e desperta a atenção. Por exemplo, na matéria de Desenho Técnico, no ensino médio italiano, é comum abordar a construção dos polígonos regulares inscritos na circunferência e, geralmente, a sequência inicia com o triângulo, para prosseguir com o quadrado, o pentágono, o hexágono, o heptágono e o octógono.²¹² Nesta sequência, os métodos propostos são todos conforme o “método euclidiano”, ou seja, podendo utilizar somente a régua não graduada e o compasso. No caso do heptágono, a construção muda e é solicitado à aluna a utilização de uma régua graduada. Por que, então, desta mudança, desta “ruptura”? Esta falta de unificação no método construtivo, por certo chama a atenção do aluno.

Outro exemplo do mesmo tipo pode ser pensado a respeito do teorema da equicomponibilidade de polígonos, segundo o qual se dois polígonos têm a mesma área, então sempre é possível decompor um deles em um número finito de polígonos menores, para

²¹⁰ “Mathematician also utilize the concepts and methods from one mathematical theory to another, or manage to establish links between two previously separate parts of mathematics.”

²¹¹ O próprio nome, elipse e hipérbole faz referência, respectivamente, a algo que falta e a algo que sobra, enquanto parábola estaria “na medida certa” (STRUIK, 1989, p. 95-96).

²¹² Ver, por exemplo, Pavanelli et al., “Nuovo Lezioni di disegno”, Hoepli, 2012, p. 36-57.

recompor o outro. Será natural pensar, também, que para os poliedros, vale uma propriedade parecida envolvendo os volumes: surpreendentemente, isso não acontece!²¹³

Nestes dois últimos casos o anseio por uma unificação mostra-se de maneira “negativa”: ou seja, é a falta de um padrão esperado que chama a atenção.

Assim, a ideia de unificação, além de fornecer um elemento de coesão narrativa, constitui em si um conceito valioso para ser trabalhado em sala de aula.

Como anunciado no item 5.2, a análise dos estudos de Arquimedes sobre o círculo e a esfera apresentaria tanto um elevado potencial narrativo, quanto um notável interesse histórico. Sobre a primeira parte, os aspectos discutidos até agora explicam esta escolha: além das ideias fundamentais presentes ao longo da história (a ideia dos indivisíveis ligada ao conceito de infinito, a ideia de aproximação, a ideia de unificação...), a ideia de uma carta perdida que revelasse os “segredos” por trás destas descobertas, a rocambolesca história do seu descobrimento no começo do século XX, até os dias atuais poderiam ser elementos de um roteiro para um filme de Indiana Jones. Mas, além de tudo isso, persiste também uma importância ligada ao eixo do interesse histórico.

Existem várias questões que ligam a obra de Arquimedes com a história da matemática precedente e alguns aspectos deste caminho transcendem o fato matemático para espalhar-se em outros campos, como a da filosofia e da história.

Merece ser destacado que o matemático siracusano, apesar das suas habilidades incomuns e inquestionáveis, pôde alcançar os resultados relatados, um vez situado numa bem precisa posição espacial e temporal, tendo a possibilidade de partir do ponto no qual seus predecessores tinham acabado. O próprio Arquimedes reconhece os créditos ao escrever a Erastóstenes que

daqueles teoremas sobre o cone e a pirâmide, dos quais Eudoxo foi o primeiro a encontrar a demonstração, [ou seja] que o cone é a terceira parte do cilindro e a pirâmide a terceira parte do prisma, tendo mesma base e mesma altura, deve-se atribuir uma parte não pequena a Demócrito, que foi o primeiro a revelar o enunciado dessa propriedade das figuras indicadas, sem demonstração. (ARQUIMEDES apud MAGNAGHI, 2011, p. 105-106).

Se Eudoxo é uma figura já encontrada ao longo desta pesquisa, principalmente em virtude do método da exaustão, então, Demócrito, aparece pela primeira vez: trata-se do discípulo de Leucipo (de Mileto), famoso pela sua contribuição físico-filosófica ligada à

²¹³ O teorema em 2D foi demonstrado por F. Bolyai (pai de Janos Bolyai, um dos criadores/descobridores da geometrias não euclidianas) em 1832 e, independentemente, em 1833 por G. Gerwien. Max Dehn, ao contrário, provou, em 1900, que a mesma propriedade não vale em 3D.

teoria atomística antiga, de acordo com a qual o mundo estaria formado por pequenas partículas, contínua e caoticamente em movimento, e isso seria o *arché*, o princípio da realidade. De maneira extremamente interessante, esta é a visão que hoje existe, pelo menos grosseiramente²¹⁴, das chamadas partículas fundamentais da física quântica. Junto com esta teoria, apareceu o dualismo átomos-vácuo, que, por um lado, podia ser interpretado como o “antigo” par ser/não ser, e, por outro, introduzia o conceito de vácuo como espaço sem átomos (ou seja, sem matéria) como algo funcional aos próprios átomos: como poderiam se movimentar se todo o espaço possível fosse ocupado por algo?²¹⁵ Também a filosofia atomística é uma das primeiras visões de mundo (talvez, a primeira) materialista, no sentido de não assumir qualquer causa externa à própria natureza, que justificasse o mundo e os seres humanos nele: Demócrito justifica o devir do mundo como uma continua composição/decomposição dos átomos e a força que guiaria este processo seria...o caos! Talvez aqui possa ser entendido o desprezo com o qual tanto Platão quanto Aristóteles contestaram a posição atomista: por um lado, retirar um princípio primo/transcendente da explicação do mundo (como as ideias ou o motor mobile) e, por outro, colocar como elemento de explicação... o próprio caos, ou seja, justo aquilo que a filosofia deveria esclarecer.²¹⁶

Dentro deste quadro filosófico, Demócrito provavelmente já sabia que um prisma qualquer pode ser descomposto em prismas triangulares e, por sua vez, sempre um prisma triangular pode ser descomposto em três pirâmides às quais, assumidas em pares, têm a mesma

²¹⁴ A partir dos anos vinte do século XX, com os estudos de Schroedinger sobre as equações dos elétrons, a ideia de partícula sofreu várias mudanças: do caráter material e determinístico, passou-se, gradativamente, ao dualismo onda-matéria, ao conceito de nuvem de probabilidade, de partícula como vibração e informação. Os “átomos” de hoje são muito menos “materiais” daqueles propostos por Demócrito.

²¹⁵ Esta visão de espaço, como o palco vazio em que acontece o movimento, é basicamente a que permaneceu até a relatividade Einsteiniana, quando o cientista alemão mostrou que o espaço é algo que dilata-se conforme a velocidade e encurva-se conforme a massa. De acordo com a belíssima imagem de Carlo Rovelli (2014, p. 8, tradução nossa): “[eis] a ideia extraordinária, o puro gênio: o campo gravitacional não é difundido no espaço; o campo gravitacional é o espaço”. Ou seja, o espaço não é mais o palco inerte em que as coisas acontecem, uma premissa lógica ao movimento; ao contrário, o espaço é a substância na qual a onda gravitacional se espalha, assim como a água do mar é a substância que permite às ondas se espalharem. Em 2015, as observações dos cientistas do projeto LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), usando basicamente a mesma ideia do experimento de Michelson-Morley, juntamente com a tecnologia disponível no terceiro milênio, detectaram pela primeira vez as ondas gravitacionais, confirmando assim a intuição de Einstein de cem anos antes (CASTELVECCHI; WITZE, 2016).

²¹⁶ Com o tempo, a matemática começou a elaborar padrões também para as situações aparentemente mais caóticas: em um primeiro momento, com o cálculo da probabilidade e a estatística, com o objetivo de lidar com o elemento da casualidade; mais recentemente, com a teoria matemática do caos, no qual modelos totalmente determinísticos produzem resultados com características de imprevisibilidades. Assim, apesar da posição de Demócrito estar bem à frente do seu próprio tempo, a sua formulação prestava-se a uma potente objeção (aristotélica): se os átomos se recombinaem caoticamente, como é possível que, de um ovo da galinha, sempre apareça um pintinho? Hoje em dia, Watson e Crick explicam...

base e a mesma altura.²¹⁷ Se Demócrito pudesse afirmar que os volumes de duas pirâmides com mesma base e mesma altura fossem iguais, então ele poderia chegar à conclusão de que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume do prisma com a mesma base e a mesma altura. O historiador Plutarco relata como o filósofo atomista alcançou este resultado (EVES, 2011, p. 420). Parece que Demócrito estive se debruçando sobre o seguinte paradoxo: suponha-se que uma pirâmide possa ser pensada como composta por infinitas “fatias” paralelas à base; assim, existiriam duas possibilidades: se as secções consecutivas fossem do mesmo tamanho, então a pirâmide viraria um prisma; se, ao contrário, elas fossem de tamanho diferentes, então a pirâmide teria as superfícies laterais formadas por escalas. A solução dada pelo filósofo foi admitir que o número de fatias fosse infinito, mas “numerável”,²¹⁸ ou seja, que, dada uma secção, era possível achar a sucessiva e a precedente. De fato, esta ideia, mesmo sendo interessante, não resolveu a aporia presente no paradoxo: mesmo assim Demócrito sentiu-se satisfeito e lançou mão de um princípio de Cavalieri *ante litteram*.

Contrariamente, Platão, Aristóteles, o próprio Euclides, barram o uso do infinito com medo das implicações e das antinomias que isso poderia acarretar: Aristóteles raciocina de frente para trás, do efeito à causa, e, para não repetir o raciocínio ao infinito, introduz a *causa prima*, a ideia de uma causa “incausada”, que se justifica somente pelo fato do filósofo evitar o infinito. Também, tanto o filósofo quanto o seu mestre, Platão, preocupam-se em analisar e desmontar os paradoxos de Zenão, usando uma (sutil) distinção entre potência e ato. Este fato foi detectado, de alguma maneira, por Saccheri (1667-1733) ao notar que:

Euclides já demonstrou (proposição 1) que dois polígonos semelhantes, inscritos em dois círculos, têm uma razão entre eles como os quadrados dos diâmetros [dos círculos]; afirmação da qual, como corolário, teria podido deduzir a proposição 2, considerando os círculos como polígonos de infinitos lados. (SACCHERI apud BAGNI, 2004, p. 60, tradução nossa).²¹⁹

Sim, Euclides poderia ter feito isso... se não tivesse tido tamanho medo do infinito!

Assim A. Frajese comenta a ideia do jesuíta italiano:

²¹⁷ Isto é: o prisma P pode ser sempre dividido em três pirâmides, P_1 , P_2 , e P_3 , podendo demonstrar que P_1 e P_2 têm a mesma base e a mesma altura; o que ocorre também com P_2 , e P_3 . Em uma pirâmide triangular (tetraedro) é sempre possível escolher qualquer face como base, coisa que não é possível com nenhuma outra pirâmide.

²¹⁸ Após o trabalho de Georg Cantor, que introduziu a ideia de tamanhos (cardinalidades) diferentes de infinitos, esta ideia ficou bem assentada nos fundamentos da matemática e, em termos modernos, seria equivalente ao dizer que as “fatias” podiam ser numeradas com os números naturais.

²¹⁹ “Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la prop. 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri”.

Saccheri está claramente muito perto, temporalmente, da fundação do cálculo infinitesimal! Mas é justamente para evitar o uso do infinito, desta maneira, que Eudoxo de Cnido, o rigorizador da matemática grega, o aprisionador do infinito, pensou o método que os pósteros, mais tarde, chamaram de exaustão (apud BAGNI, 2004, p. 60, tradução nossa).²²⁰

De fato, Euclides, na obra de estruturação do corpus de conhecimentos matemáticos acessíveis na sua época, cuida minuciosamente de evitar o infinito. Por um lado, ele utiliza do método da exaustão formalizado por Eudoxo (discípulo de Platão); por outro, ele fornece demonstração como a da infinitude dos números (naturais), zelando para nunca fazer entrar o termo infinito. Por exemplo, é comum dizer que Euclides provou que os números e os números primos são infinitos: Hersh sublinha como:

[ele] nunca poderia ter dito que existiria um número infinito de qualquer coisa. A proposição 20 do livro IX [dos Elementos] diz que <<Os números primos são mais de qualquer quantidade de números primos dados.>> [...] A formulação [de que existem infinitos números primos] é natural no contexto atual dos conjuntos infinitos, não no mundo de Euclides. (HERSH, 1997, p. 11, tradução nossa).

Eis aqui, em campo, os “times” que lutam sobre o infinito: por um lado, Antifon, Zenão, Demócrito; do outro Platão, Aristóteles, Eudoxo e Euclides²²¹. Em meio a isso, Arquimedes poderia estar tanto em um, quanto no outro – ou mesmo jogar um tempo de um lado, e um tempo no outro. Isto é: o Arquimedes “Euclidiano”, que de demonstração em demonstração calcula áreas e volumes, com certeza poderia estar em companhia de Aristóteles e Eudoxo; mas, o Arquimedes do Método, que fica despedaçando e fatiando os sólidos e “pesando-os” numa alavanca, estaria com certeza no mesmo grupo que Demócrito e Antifon.

Rouben Hersh (1997, p. 35-37) fornece uma metáfora de grande impacto para entender esta dualidade na obra de Arquimedes: mutuando a ideia do sociólogo Ervin Goffman, ele sustenta que a matemática tem uma parte oficial, “de frente” (*front*), e uma escondida, nos bastidores (*back*), assim como um teatro, um restaurante ou um escritório. Geralmente, a parte frontal é mais organizada, “passada a limpo”, formal, enquanto a parte de trás é bagunçada, *on progress*, mal organizada, intuitiva. Assim, um artigo ou a presente dissertação, serão publicados como um produto da frente mas, nos bastidores necessários para a sua produção,

²²⁰ “Saccheri è evidentemente assai vicino, nel tempo, alla fondazione del calcolo infinitesimale! Ma è proprio per evitare il ricorso all’infinito in questo modo che Eudosso di Cnido, il rigorizzatore della matematica greca, l’imbrigliatore dell’infinito, escogitò quel metodo che i posteri tardi dissero metodo di esaustione”.

²²¹ O “jogo” dos times é puramente funcional ao debate sobre o infinito: sobre outros aspectos, podem bem existir (e existem!) disputas ferozes dentro do mesmo time e alianças entre filósofos de times opostos.

estarão vários rascunhos, conversas informais com colegas, professores, companheiras, bicos sem saídas, manchas de café e rasuras no papel.

O próprio G. Polya descreve esta situação ao afirmar que:

A matemática acabada, apresentada na forma certa, aparece como puramente demonstrativa, consistindo somente em provas. Todavia, a matemática em processo, parece qualquer outro campo de conhecimento humano em processo. Você tem que adivinhar um teorema antes de prová-lo; você tem que ter uma ideia geral da prova antes de acertar os detalhes. Você tem que combinar observações e seguir analogias; você tem que tentar e tentar de novo. (POLYA apud HERSH, 1997, p. 35, tradução nossa).

À luz deste quadro, a posição de Arquimedes fica esclarecida: nas suas obras “oficiais”, ele segue (brilhantemente) a linha padrão dos Elementos; nas pesquisas informais, nos bastidores (O Método era uma carta dirigida ao amigo Erastóstenes) ele usa as analogias e toda a informalidade da qual relata Polya.²²²

A questão não pode ser reduzida a fatos de estilos, mas remete a concepções mais profundas ligadas às visões filosóficas e às escolas de pensamentos que debatiam (e disputavam o poder) no mundo helenístico: Struik (1989, p. 77) relata como “os sofistas” eram ligados, de várias maneiras, ao movimento democrático, enquanto tinham um “outro lado” relacionado às ideias aristocráticas, sendo este o *phylum* pitagórico-platônico. Abbagnano²²³ (1992, cap. VIII) reforça esta tese, indicando como a *má fama* dos sofistas é ligada aos juízos dos seus oponentes, e como isso perdurou até o século XX. Ele ainda destaca como os sofistas foram produtos da Atenas do século V, vencedora das guerras contra os Persas, cada vez economicamente mais rica, orgulhosa da própria democracia e com uma burguesia urbana em ascensão.

Uma divisão “política” entre escolas filosóficas, que age “por trás” das concepções metafísicas, morais, científicas e matemáticas. Assim, Struik resume:

²²² Possivelmente, também Euclides, Eudoxo e todos os outros matemáticos tiveram uma parte de bastidores, mas, infelizmente, a única que chegou até hoje foi a de Arquimedes: teria sido uma verdadeira joia poder ver “como” Euclides chegou a cogitar os Elementos, se ele entrou em contato com Aristóteles e a “sua” lógica... Mesmo assim, Arquimedes reivindica, no Método, de ser o primeiro a usar o método dos infinitésimos, fazendo assim supor que a sua matemática dos bastidores seja de fato inovadora.

²²³ Apesar de uma visão extremamente eurocêntrica, explicitada na ideia de que a cultura europeia, a partir da Renascença, seja diretamente ligada à grega do período clássico e, por afirmações do tipo “A filosofia e a ciência gregas como frutos do *gênio* helênico” ou “a filosofia e a ciência nasceram na Grécia” (ABBAGNANO, 1992, p. 22, tradução e grifo nosso), seu compêndio filosófico é ainda uma obra rica de ideias e sugestões, sobretudo por aquilo que tem a dizer acerca das relações entre filosofia e ciência, devido também à colaboração entre Abbagnano e Geymonet.

Enquanto a maior parte dos sofistas dava ênfase à realidade da mudança – especialmente os atomistas, seguidores de Leucipo e Demócrito –, os pitagóricos salientavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. (STRUİK, 1989, p. 78).²²⁴

Estas indicações, de forma alguma, querem produzir caricaturas, sobretudo em vista de que a realidade das tendências do pensamento grego apresenta várias facetas e especificidades: se, por exemplo, a visão política de Platão pode ser considerada ligada ao partido aristocrata, então a sua visão epistemológica é mais multifacetada. Ele sustenta, por exemplo, a ideia de que o conhecimento está dentro de cada um, nobre ou escravo: não casualmente, Sócrates “guia” o raciocínio de um escravo para duplicar o quadrado, no diálogo *Ménon*.²²⁵

Os próprios filósofos Zenão e Heráclito, apesar de pertencerem à aristocracia, apresentam, respectivamente, paradoxos desestabilizadores com potencialidades revolucionárias e uma visão dialética sobre o mundo.

Contudo, apesar de todas as distinções e dos pormenores que podem ser analisados, não dá para desconsiderar estes aspectos quando se tenta entender a evolução das ideias matemáticas (e as disputas) num dado período.

Por exemplo, Struik (1989, p. 82-87) amarra todos estes fios e chega a dizer que, com a derrota na guerra do Peloponeso (431 a.C. – 404 a.C.), Atenas entra em crise. Uma crise que reverbera no campo filosófico e da qual emerge, novamente, a supremacia da aristocracia. Em linha com este quadro, a teoria de Eudoxo sobre proporções e exaustão reestabelece uma “ordem” no campo da matemática, expulsando o problema dos irracionais, do infinito e dos infinitesimais. A obra Arquimediana coloca-se neste campo, junto com os *Elementos* de Euclides. Mas, estudando o Arquimedes do Método, parece que o matemático de Siracusa aproveita ao máximo das ideias de Zenão, Antifon e Demócrito para alcançar os resultados.

Não surpreendentemente, perante este quadro, mais uma vez tem cabimento a ideia marxiana de que a ideologia dominante é a ideologia dos dominadores: uma vez que a experiência democrática ateniense foi abatida, que novos impérios “ocidentais” apareceram e impuseram o próprio domínio (as conquistas de Alexandre da Macedônia e, sucessivamente, de Roma), as ideias aristocráticas se impuseram, colocando metafisicamente a matemática no céu da exatidão e perfeição e forçando o rigor euclidiano em sua prática.

²²⁴ Struik afirma basear-se na pesquisa de S. Luria para perceber estas duas escolas disputando a hegemonia.

²²⁵ Bertrand Russel zombou deste processo “maieútico”, uma vez que as perguntas de Sócrates já continham as respostas e, praticamente, o escravo limitava-se em concordar ou discordar do filósofo. Mesmo assim, o ponto teórico do conhecimento ser acessível para qualquer ser humano, permanece válido na teoria platônica.

Assim, de acordo com esta interpretação, apresenta-se tanto um Arquimedes *Ianus Bifrons*²²⁶, que combinaria um estilo perfeitamente rigoroso, de acordo com o padrão da sua época, para publicar os seus resultados como outro, bem mais criativo, usado para alcançar tais resultados, mantendo na semiobscuridade e, no máximo, compartilhado com amigos restritos.

As próprias pesquisas de Arquimedes com a mecânica, a hidrostática, as suas aplicações práticas e as máquinas por ele construídas atestariam o seu grande interesse por outros campos, além do “mundo das ideias”. A visão de Plutarco, três séculos depois, e declaradamente de formação platônica, segundo a qual o matemático siracusano desprezaria as suas obras “práticas”, aparece pouco fundamentada (STRUIK, 1989, p. 93).

Uma análise cuidadosa do estilo Arquimediano, realizada por Netz (2009), chega à conclusão de que o estilo do matemático de Siracusa é um estilo “lúdico”, não representando, neste sentido, uma exceção a respeito da literatura e da produção de outros cientistas da mesma época. Netz usa termos e cria imagens para sustentar esta posição: por exemplo, fala de “carnaval do cálculo”, para descrever “a criação de uma rica camada de cálculo numérico obscuro e aparentemente sem sentido” (NETZ, 2009, p. xi, tradução nossa). Claramente, são exemplos deste “carnaval”: o problema do *Stomachion*²²⁷ (quase uma versão grega do tangram), no qual é preciso calcular de quantas maneiras diferentes algumas figuras geométricas podem ser rearranjadas; o “problema do gado”, que resulta ser um enigma associado essencialmente ao tamanho dos números utilizados²²⁸; também o problema do contador de areia, no qual estima-se o número de grãos de areia necessários para preencher todo o cosmo. Ao analisar a narrativa arquimediana, ele argumenta como esta se embasa em “surpresa e suspense, criando expectativas para depois desiludi-las” (NETZ, 2009, p. xi, tradução nossa), colocando bruscas transições de um teorema para o outro. O objetivo de Arquimedes não é “pedagógico”: ele não quer expor as suas descobertas da maneira mais clara possível, para guiar o leitor na compreensão do assunto; ao contrário, ele quer criar uma narrativa que gere estupor, maravilha no leitor por meio do “inesperado” (NETZ, 2009, p. 13-14). Está aqui presente uma contraposição evidente com os Elementos de Euclides, cuja

²²⁶ Divindade muito importante da religião romana, não importado da grega, ele, entre outras coisas, está relacionado com a “porta” e, por ter duas caras uma oposta a outra, tem a habilidade de ver, contemporaneamente o passado e o futuro, o dentro e o fora.

²²⁷ Em linha com o espírito lúdico que Netz descreve, o próprio título poderia ser traduzido como “dor de barriga”! (NETZ, 2009, p. 156).

²²⁸ Com efeito, duas condições geométricas e sete equações algébricas constituem a formalização de tal problema. A mais simples solução requer um número que, em base decimal, demanda 206’545 algarismos! (NETZ, 2009, p. 34).

intenção era exatamente aquela de providenciar um quadro completo do conhecimento matemático disponível na época, ordenado de forma lógica e da maneira mais clara possível.

Entre estilo e conteúdo, Netz ressalta como a obra Arquimediana “rompe” algumas fronteiras, como aquelas existentes entre a aritmética (entendida como execução de conta) e a geometria (entendida como o estudo das “formas” platonicas): um claro exemplo disso é constituído em “A medida do círculo”, no qual as proposições 1 e 3 são exemplos de contraposição: a primeira, constitui um teorema geométrico relativamente curto e elegante, enquanto a terceira representa uma aproximação do valor de π justificada por cálculos de um certo “peso”, complicada pelo fato de Arquimedes não ajudar o leitor a entender as várias passagens, mas, ao contrário, “pulando” várias etapas. Também é interessante ressaltar como, na mesma época, Aristarco atuou de maneira semelhante ao calcular limites para a distância entre o sol, a terra e a lua, incluindo a estimativa de seus tamanhos (NETZ, 2009, p. 29). Netz (2009, p. 40) analisa ainda estes fatos e os relaciona com os tempos e a situação sociopolítica: se na Atenas democrática o leitor era um juiz das teses do autor, agora, no período helenístico, ele é um espectador; mais que entender as ideias, ele tem que se deixar maravilhar por elas. Levando em conta as relações epistolares entre Arquimedes, Eratóstenes (e, sucessivamente, de Apolônio), Netz conclui que a matemática helenística “era a ciência de uma elite internacionalista e autoconsciente” (2009, p. 237).

A trajetória reconstruída nesta pesquisa constitui uma parte da matemática particularmente preta: não somente pelos vislumbres de conceitos do cálculo que acarreta, mas também pelas ligações que oferece com as manifestações culturais, incluindo as de fundo filosóficas, que se confrontavam na época no Mediterrâneo, como visto anteriormente.

O cálculo diferencial/integral foi retirado do currículo brasileiro provavelmente devido a uma suposta dificuldade. Existem autores que, ao contrário, defendem a importância das ideias ligadas a este tópico como fundamentais (e, por isso, fecundas) não somente no campo da matemática. Nas palavras de Machado:

O Cálculo Diferencial e Integral trata de questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam. Trata também de questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente, como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com um número cada vez maior de parcelas cada vez menores. A medida da rapidez de variação conduz à noção de *derivada*; o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz à noção de *integral*. Ambas as noções têm que ver, em suma, com a aproximação de curvas por retas, ou de fenômenos não-lineares por descrições lineares, recurso fundamental em múltiplas e distintas situações. O processo através do qual

uma curva é aproximada por uma reta que lhe é tangente é a *diferenciação* ou *derivação*; a aproximação de curvas por retas como a que tem lugar, por exemplo, no cálculo de áreas, dá origem ao processo de *integração*. (MACHADO, 1993, p. 148, grifos do autor).

Está sendo colocada a ideia de que o cálculo infinitesimal, antes de tratar o conceito (formal) de limite, as regras de diferenciação das mais variadas (e barrocas) funções, das técnicas mais disparadas para integrar, esteja engajado com a ideia fundamental de aproximar: aproximar aquilo que é mutável com aquilo que é estável, constante. Apresentado assim, quem poderia discordar sobre a importância (e simplicidade) destes conceitos?²²⁹

E cada conceito fundamental, por definição, não se esgota em uma única matéria (ver item 4.4). As ideias ligadas ao desenvolvimento do cálculo, tais como a do infinito, permitem a criação de ligações em sala de aula com outros campos do conhecimento.

A ideia de infinito do mundo grego gozou de fama bastante negativa: é conhecido o raciocínio de Aristóteles para evitar lidar com isso. O grande filósofo tinha, como muitos dos seus contemporâneos, uma visão linear do tempo²³⁰, cuja representação plástica seria uma corrente, na qual cada elo é efeito do precedente e causa do sucessivo. Percorrendo a corrente às arrecuas, de causa em causa, Aristóteles se viu perante duas possibilidades: ou continuar retrocedendo *ad libitum*, admitindo assim uma regressão infinita; ou, literalmente, inventando uma *causa prima*, um motor imóvel que pudesse colocar um marco inicial antes do qual não seria possível recuar.

Notavelmente, o filósofo escolheu esta segunda possibilidade, devido, provavelmente, ao desejo de evitar fazer entrar o conceito de infinito nas próprias análises.

Outro filósofo, antecessor de Aristóteles de quase dois séculos, Zenão (século V a.C.), tinha usado, sim, o infinito, mas para mostrar a absurdidade das posições que queria criticar. Citando somente o chamado paradoxo da flecha – no qual uma flecha, ao ser lançada, jamais atinge seu alvo, já que o espaço a ser percorrido em sua trajetória pode ser infinitamente divisível em segmentos menores, o que implica um traslado infinito e inesgotável da flecha, ou seja, a flecha tem que percorrer metade do espaço, depois metade do espaço que sobrou e assim *ad infinitum* – o filósofo de Elea usou este argumento (e outros parecidos²³¹) para

²²⁹ A apostila de física do Objetivo, por exemplo! Na Física, livro 1 (FIGUEREDO; VILLAS BOAS; FOGO; CALÇADA) da coleção Objetivo, nas páginas 18 até 26, é um proliferar de limites e derivadas para explicar o conceito de velocidade e aceleração instantânea, com posteriores exercícios. Pouco se explora do conceito fundamental de derivada e muito se demanda do lado tecnicista e formalista.

²³⁰ Atualmente, dir-se-ia “cartesiana”.

²³¹ Os paradoxos que chegaram até hoje são quatro e estão relatados diretamente na obra do próprio Aristóteles, com o objetivo de confrontá-los: Paradoxo da dicotomia, Paradoxo de Aquiles, Paradoxo da flecha imóvel e o

chegar a um absurdo e mostrar assim a impossibilidade do movimento. Como aponta Roque (2012), Zenão queria demonstrar também que seria absurdo considerar as coisas infinitamente divisíveis e/ou compostas de infinitos indivisíveis, conforme as ideias do mestre do filósofo, Parmênides, pelo qual, justamente, o ser é um *unicum*, indivisível, imóvel, imutável.

Em um caso de manual de heterogênese dos fins²³², Zenão colocou na mesa do debate filosófico ideias que continham elementos básicos para a formulação dos processos do cálculo. Seria errado colocar a pesquisa de Arquimedes em relação direta com as ideias de Zenão – historiadores, ao fazerem isso, estariam agindo *a posteriori*. Mas, também, não se pode desconsiderar que o matemático siracusano usou ideias que foram colocadas no debate justamente por Zenão, mais de duzentos anos antes.

A colocação de tal cenário em sala de aula levaria naturalmente a questão do porquê das intuições de Zenão não terem sido utilizadas antes de Arquimedes. Vários seriam os aspectos a serem considerados para responder a tal, fascinante, questão.

Provavelmente, persistiu um movimento *interno* ao desenvolvimento da própria matemática; isto é, era necessário que o *corpus* de conhecimentos matemáticos permitisse que Arquimedes pudesse ter os elementos para se colocar a pergunta certa e tentar respondê-la. Sua pesquisa vem, justamente, após a obra de Euclides de Alexandria, que representou uma reorganização racional, rigorosa, *a posteriori* dos resultados que a matemática mediterrânea tinha alcançado até o final do século IV a. C. Particularmente, como visto anteriormente, nos Elementos tinha-se a primeira demonstração baseada no método de exaustão, proposta por Eudoxo²³³, a noção de proporcionalidade entre raio e comprimento da circunferência, entre raio ao quadrado e área do círculo e da superfície da esfera e também entre raio ao cubo e volume da esfera.

Apesar de serem rotulados todos como gregos, dois pensadores como Aristóteles e Arquimedes apresentam muitas diferenças “culturais”. O primeiro, que foge à ideia do infinito, é, ainda, filho da tradição ateniense “democrática”²³⁴ na qual a necessidade da

Paradoxo do estádio. Para aprofundar, conferir Roque (2012), Santos (1995) e Devlin (2002, p. 100-103): os três, de maneira diferente, destacam que o coração do problema é o *infinito*.

²³² Conceito formulado explicitamente pelo psicólogo alemão Wilhelm Wundt, no século XIX, mas presente em várias visões filosóficas e sociais anteriores: G. B. Vico, Niccoló Macchiavelli e Adam Smith são alguns exemplos.

²³³ O próprio Eudoxo, usando o método da exaustão, chegou à conclusão de que a área de um círculo é proporcional ao seu raio ao quadrado, o volume da esfera é proporcional ao cubo do seu raio, o volume da pirâmide é a terça parte de um prisma com a mesma base e altura.

²³⁴ Uma democracia extremamente reduzida, a respeito dos mínimos padrões modernos, já que mulheres, escravos, estrangeiros não eram “cidadãos”. Estima-se que somente algo entre 10 % e 30% dos habitantes de Atenas gozavam dos direitos políticos (cf. THORLEY, 2005, p. 74).

argumentação e da demonstração necessária às atividades democráticas de debates e avaliação das soluções associa-se a uma sociedade escravocrata na qual o aumento da produtividade e o desempenho de “novas tecnologias” nunca fomentou os esforços intelectuais dos pensadores.²³⁵

Por outro lado, Arquimedes, mesmo sendo “grego” como Aristóteles e falando o mesmo idioma, já vinha de uma cidade, Siracusa, na Sicília, que há pelo menos dois séculos sofria o influxo cultural da cultura latina, mais prática e concreta. Há relatos que o próprio matemático passou um tempo estudando em Alexandria, onde entrou em contato com uma cultura helênica mais focada nos comércios e nas tecnologias que podiam melhorar as atividades marítimas em geral.

Com este olhar aos diferentes contextos culturais e políticos nos quais os pensadores atingiam as próprias ideias, fica menos surpreendente que, somente poucas décadas após os estudos de Aristóteles, Arquimedes pôde usar o recurso dos indivisíveis para alcançar os seus resultados.

²³⁵ Um exemplo disso é representado pela famosa eolipila de Heron de Alexandria: trata-se, de fato, da primeira máquina a vapor da qual se tem relato. Os historiadores conjecturam que isso não levou a qualquer aplicação prática (uma revolução industrial *ante litteram*?) justamente pelo caráter escravocrata da sociedade greco-romana, que, por isso, não tinha como prioridade o aumento da produtividade da força de trabalho.

6.4 NEWTON, A MAÇÃ, A LUA: NARRATIVAS REALÍSTICAS (INVENTADAS) E EXPERIMENTOS MENTAIS (REAIS)

A nossa imaginação é esticada até ao limite, não como na ficção, para imaginar coisas que não existem, mas para compreender as coisas que existem na realidade.

Richard Feynman (1965, p. 127-128, tradução nossa).²³⁶

A descoberta matemática fundamenta-se num processo de validação chamado <<prova>>, que é o análogo ao experimento na física.

Reuben Hersh (1997, p. 6, tradução nossa).²³⁷

Para entender o mundo, temos que esticar os limites do que a nossa mente pode conceber.

Reuben Hersh (1997, p. 190, tradução nossa).²³⁸

...nas ciências existe sempre o desejo de reduzir qualquer conceito para algo mais simples e mais básico. Acontece o mesmo na matemática...

Keith Devlin (2002, p. 78, tradução nossa).²³⁹

Tanto na matemática, quanto na física, é presente a ideia de experimento mental: isto é, uma experiência que não é possível concretizar, mas somente pensar. Essa impossibilidade deriva da falta de uma tecnologia adequada, ou, às vezes, remete a uma motivação mais profunda, ontologicamente irrealizável. Assim, o experimento mental de Galileo, da quedas de corpos, ocorreu mentalmente porque na sua época ainda não tinha como produzir um vácuo adequado para testar a sua hipótese; o trem com velocidades relativísticas de Einstein não será, jamais, construtível, justamente por demandar... velocidades fora do alcance de um trem! Por exemplo, a discussão do item precedente, sobre fatiar uma pizza em uma quantidade infinitas de pedaços, pertence a esta última categoria. Outros exemplos são possíveis: quando se aborda em geometria analítica a questão do feixe de circunferência, algebricamente combinam-se linearmente as equações de duas circunferência.²⁴⁰ Se o valor do parâmetro da combinação for tomado como igual a 1, a equação do feixe se reduz à de uma

²³⁶ “Our imagination is stretched to the utmost, not, as in fiction, to imagine things which are not really there, but just to comprehend those things which are there”.

²³⁷ “Mathematical Discovery rests on validation called <<proof>>, the analog of experiment in physical science”.

²³⁸ “To understand the world, we have to stretch the limits of what our minds can conceive”.

²³⁹ “[...] in Science, there is always the desire to reduce any concept to something simpler and more basic. So too in mathematics.”

²⁴⁰ Em fórmulas $C_1: x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$ e $C_2: x^2 + y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$ combinadas linearmente geram o feixe $f: x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 + k(x^2 + y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$.

reta, apelidada de circunferência degenerada. O docente tem duas opções para explicar isso para os seus alunos: ou admite que um objeto intruso “enfiou-se” no meio das circunferências, ou propõe aos alunos pensarem aquela linha reta como, de fato, uma circunferência “especial”. Mas o que isso significa? Através de uma experiência mental, a aluna pode pensar que quanto mais se aumenta o raio, mais uma porção da circunferência aproxima-se de uma linha reta²⁴¹: então, é como se um círculo com raio infinito “explodisse”, e a sua circunferência virasse, assim, uma linha reta.

Também não é incomum achar o tema da experiência mental, no ensino da matemática: Freudenthal expressou-se nestes termos para descrever a atividade da professora (ou de uma escritora de livros didático), conforme apontaram Gravemeijer e Terwel (2000, p. 795): neste caso, trata-se de um planejamento que logo será testado, com os alunos numa aula real.

A importância dos experimentos mentais na física é notada por Machado (1995, p. 50), colocando-os em um lugar de destaque dentro da dinâmica abstrato-concreto: apesar do seu caráter tecnicamente “abstrato”, um experimento mental pode ser construído de tal maneira que pode resultar mais convincente do que muitas experiências “concretas”. A exploração de alguns acontecimentos que levaram à passagem da teoria geocêntrica à heliocêntrica e, sucessivamente, à teoria da gravitação universal representam feitos particularmente interessantes tanto neste aspecto, quanto sobre a ideia de unificação – ambos abordados no item precedente.

Por isso, é importante relatar pelo menos duas experiências mentais atribuídas a Galileo: a queda dos corpos, pela torre de Pisa²⁴², e o barco flutuando no mar. A primeira, já citada fugazmente, baseia-se no experimento relatado por Galileo no livro (nunca publicado) *De motu*, na qual o cientista tem que fazer cair dois objetos de um determinado lugar (por exemplo, a torre de Pisa, já que na época Galileo lecionava na cidade toscana) e verificar que a velocidade dos corpos, tendo a mesma forma, mas massas diferentes, deveria ser igual. A maior parte dos historiadores – por exemplo, Sorensen (1998, p. 61) – concordam em achar este um experimento mental, devido ao fato que, com os meios dos quais Galileo podia contar, era muito difícil verificar sua hipótese. Assim, é muito mais provável que a natureza do experimento fosse mental. Suponha-se fazer cair uma pena e uma pedra e suponha-se que a

²⁴¹ Este fato é bem visível, em três dimensões, na superfície da Terra: o seu raio é tão grande, comparado com as percepções do ser humano, que parece que o nosso mundo é plano.

²⁴² Esta experiência é tão importante que, em 1971, na missão lunar Apollo 15, o astronauta David Scott reproduziu o experimento... na Lua!

pena caia mais lentamente (de acordo com a teoria aristotélica); ora, se “grudar” pena e pedra este novo corpo deverá cair de que maneira? Sendo a massa dele maior do que a pedra, deveria cair mais rápido, mas isso seria uma contradição com o fato de que a pena, por ser mais leve e cair mais lentamente, deveria desacelerar a pedra. Ou seja, este experimento de pensamento conduz a uma contradição lógica, deixando como única possibilidade aquela de negar a tese.

O segundo experimento remete à discussão sobre o princípio de inércia e coloca-se diretamente no debate sobre o heliocentrismo: isto é, Galileo precisava de um argumento para justificar o fato de que, estando a terra em rotação em torno do seu eixo Norte-Sul, as pessoas não percebiam a força (centrífuga) derivante deste movimento. Então, no “Dialogo sobre os máximos sistemas”, ele utiliza a experiência de imaginar pessoas agindo no interior de um barco se movendo (uniformemente) no mar. Sendo assim, ações como jogar uma bola ou o pingar de uma gota de água aconteceriam da mesma maneira como se as pessoas estivessem em terra. Na realidade, tal experimento deve ser creditado a Giordano Bruno (1548 - 1600), o qual deixa relatado em “La cena de le ceneri” justamente a experiência que Galileo, anos depois, usará sem citar a fonte.²⁴³

Além das experiências mentais, Galileo insere-se num processo de unificação entre o mundo sublunar e o supralunar, que contou com as suas contribuições (ver as manchas da Lua discutidas na introdução da dissertação e as manchas solares no item 6.3.4); juntas com a ideia do próprio Bruno e de vários outros cientistas e filósofos, culminou com o legado de Newton. Isto é, quando Newton mostrou que as leis que regulam a queda da maçã na cabeça de alguém são as mesmas que fazem rodar a Terra em volta do Sol, ao mesmo tempo veio a “conclusão” um processo iniciado pelo menos dois séculos antes e que colocou um marco na visão sobre o universo.

Desde os tempos antigos, a crença de que o mundo terrestre e o mundo celeste fossem regulados por leis diferentes vingou com certa força. O próprio Aristóteles relatava como o mundo “sublunar” era dominado por movimentos imperfeitos, degradação e morte; o mundo celeste, em contrapartida, era perfeito, não sujeito a degradação e o próprio movimento dos astros era baseado em combinações de movimentos circulares aos quais o filósofo atribuía a

²⁴³ Bruno foi um apoiador e entusiasta das ideias copernicanas e, em geral, da *nova ciência*. Mas ele foi mais longe do que todos os seus contemporâneos, resgatando a teoria atomista de Demócrito, propondo um panteísmo radical, no qual a causa (deus) e o efeito (o mundo) eram indistinguíveis; hipotetizava, também, um universo com infinitos mundos. Sendo assim, não surpreende que as hierarquias da igreja católica tenham decidido queimá-lo!

característica da perfeição²⁴⁴ (PIAGET; GARCIA, 2011, p. 56-60). A cultura medieval cristã se apropriou desta visão, ressignificando-a: a terra, lugar de imperfeição, reino de disputa entre o bem e o mal, e o céu, reino de deus.

Com as obras de Copérnico, Kepler, Bruno e Galileo (MONTEIRO, 2004, p. 12) esta visão dicotômica entre os dois mundos começou a ser posta em discussão. Galileo, particularmente, ao apontar (pela primeira vez) o telescópio (“*cannocchiale*”)²⁴⁵ para o céu, descobriu que as manchas solares não são, como pretendia a escolástica, manchas na atmosferas terrestres, mas sim verdadeiras “imperfeições” situadas na própria estrela. Observações da lua também o fizeram refletir sobre o fato de que também a superfície da Lua não fosse lisa, mas cheias de crateras e irregularidades. A tão declamada perfeição do “céu” estava, assim, recebendo um duro golpe.²⁴⁶ A obra de Newton deu o golpe definitivo ao sustentar que, em qualquer lugar do universo, seja numa longínqua galáxia ou no jardim de casa, dois corpos se atraem sempre de acordo com a mesma lei, com uma força proporcional às massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância.

É interessante resgatar aqui o conto (lenda?) que justificaria como o Newton teve o vislumbre desta ideia²⁴⁷: transmite-se a estória de que, no meio de uma epidemia de peste, Newton estava descansando no jardim da sua casa de campo quando, mergulhado nos seus pensamentos, de baixo de uma árvore frutífera, uma maçã caiu em sua cabeça. No mesmo tempo, a Lua estava começando a aparecer no céu. Eis a intuição: do mesmo jeito que a maçã cai na terra, assim a Lua “cai” constantemente no planeta. Alternativamente, a experiência mental que estaria por trás desta história poderia ser assim descrita: suponha-se lançar uma bola paralelamente ao chão; ela cairá no chão de acordo com uma trajetória parabólica. Imagine-se, então, lançar a bola cada vez com mais força: assim, a parábola ficará cada vez mais “esticada” e acompanhando a curva da superfície terrestre. Isto significa que, dando uma

²⁴⁴ Esta visão representa uma dívida de Aristóteles com o seu mestre Platão: a ideia de um mundo imperfeito, feito como cópia degradada de um mundo perfeito e “ideal” parece tirada diretamente do mito do demiurgo, contado por Platão no *Timeu*.

²⁴⁵ Literalmente: óculos-canhão. O físico e matemático Pisano não foi o “inventor” do telescópio, mas foi o primeiro do qual se tem relato que usou tal ferramenta para observar os corpos celestes. Também ele contribuiu com alguns aprimoramentos, tanto nas técnicas construtivas, quanto para alcançar tarefas específicas (como, justamente, observar o sol e as manchas solares).

²⁴⁶ Que os tempos estivessem radicalmente mudando é confirmado pela obra de Tycho Brahe: no seu *De nova stella* (1573) ele já criticava a visão aristotélica da perfeição/imutabilidade do céu, baseando-se no fato de que os cometas não são algo passando na atmosfera terrestre, mas sim fora, no mundo supralunar. Tudo isso, sendo ele... um aristotélico convencido e um cristão fiel à doutrina oficial!

²⁴⁷ A construção do pensamento científico-matemático, como processo complexo e social – obra de vários autores, e não do “gênio” – foi discutida ao longo das páginas precedentes, particularmente no item 6.3. Convém citar, a respeito de Newton, a pesquisa feita pelo físico soviético Boris Hessen, que sustentou no Segundo Congresso Internacional da História da Ciência (1931) como a nova teoria de Newton se insere nas dinâmicas da sociedade mercantil inglesa do século XVIII – ver Roque (2012) e Hessen e Grossman (2009).

força suficiente e na ausência de atritos, a bola poderia esticar de tal maneira a sua trajetória... de se tornar uma trajetória circular, começando assim a orbitar ao redor da terra! (SORENSEN, 1998, p. 239-240).

O surgimento de tal ideia necessita de um contexto no qual a cisão entre mundo terreno e ultraterreno já apresenta várias objeções e, complementarmente, num mecanismo de retroação, a proposta de Newton contribui para destruir definitivamente esta visão.

O trabalho de Martins preocupa-se em analisar e criticar os vários relatos desta história, chegando a colocar em discussão o real acontecimento dos fatos relatados. Além disso, ele critica as versões mais comuns desta história argumentando que:

Se dissermos que Newton descobriu a gravidade quando viu uma maçã caindo (ou quando uma maçã caiu na sua cabeça), estaremos transmitindo várias concepções falsas a respeito da natureza da ciência e sobre o trabalho realizado pelos cientistas como essas abaixo.

Uma das mensagens implícitas nessa falsa descrição é que o desenvolvimento da ciência seria fruto do acaso. Se Newton não tivesse visto a maçã cair (ou não tivesse sido atingido na cabeça pela maçã), não teríamos a teoria da gravitação.

Outra mensagem é que todas as pessoas que existiram antes dos “grandes gênios” seriam estúpidas. Milhões de pessoas devem ter visto maçãs caindo antes de Newton, mas ninguém entendeu que as maçãs caíam por causa da gravidade. Teria sido Newton quem descobriu a gravidade e lhe deu esse nome.

Uma terceira mensagem é a de que a ciência seria produzida por pessoas que, de repente, “têm uma idéia”, e então tudo se esclarece. Não seria necessário esforço, não é necessário desenvolver pesquisas. Bastaria ser necessário esperar que as ideias surjam – e, quando elas aparecem, o trabalho já estaria completo. (MARTINS, 2006, p. 185-186).

As colocações de Martins parecem fundadas e em linha com uma visão da ciência “moderna” e crítica, conforme discutido no item 3, e que reverbera a crítica de Hersh (1997, p. 37, tradução nossa):

O Newton de gesso, esculpido no século XVIII, está intacto. Alexander Pope deu este epitáfio:

Nature and Nature's Laws lay hid in the Night;
GOD said, *Let Newton be!* And all was Light.

O Newton estranho, complexo e histórico é quase desconhecido, até entre os próprios matemáticos eruditos.

Contudo, a narrativa preserva um caráter interessante ao expor a “moral” da história, que Conduitt relata assim:

No ano de 1666 ele novamente se retirou de Cambridge [...] para [a fazenda] de sua mãe em Lincolnshire e enquanto estava meditando em um jardim surgiu em sua mente que o poder da gravidade (que trouxera uma maçã da árvore ao solo) não estava limitado a uma certa distância da Terra mas que esse poder deve se estender muito mais longe do que se pensava usualmente. Por que não até a altura da Lua – disse ele a si próprio – e se assim é, deve influenciar seu movimento e talvez retê-la em sua órbita. (CONDUITT apud MARTINS, 2006, p. 180).

De fato, Newton, dentro de um processo histórico e cultural, corroborado por seus cálculos e observações experimentais e de cientistas antecedentes e contemporâneos, pôde perceber que a mesma lei que regulava os fenômenos terrestres descrevia os movimentos celestes; o movimento da Lua podia ser encarado, assim, como uma “queda” para Terra, assim como a de uma maçã que se desprende do seu galho.

Trazer esta ideia forte da história da ciência (e contextualizá-la histórica e culturalmente) através desta narrativa não cria uma falsa ideia da ciência, mas, ao contrário, pode permitir aos alunos entender melhor e com mais força a ideia fundamental contida na história, justamente por não ser uma colocação “extemporânea”, mas por estar dentro de uma narração.

Esta narrativa consegue ser particularmente incisiva e imediata em mostrar a ideia fundamental de unificação que permitiu concluir um processo que, entre desvios e acelerações, estava sendo construído por vários cientistas há pelo menos dois séculos nas nações europeias. Como no caso discutido no item 6.1, ela se compõe de outros elementos secundários (a visão sobre a ciência e sobre o “gênio”) que, supostamente, o professor deveria trazer em evidência na aula para debatê-los (e desconstruí-los) junto com os alunos.

Novamente, a narrativa aparece como uma potente ferramenta para a construção de significado, que precisa harmonizar com uma visão didática, epistemológica e ética.

Bronowski (1968), além de apontar nesta história a mesma ideia fundamental já destacada por Conduitt, faz uma consideração explícita sobre o papel da criatividade e do processo de unificação.

A criatividade de Newton foi conseguir perceber como unir fenômenos que, tradicionalmente, eram visto como separados e de natureza diferente. Talvez o próprio Newton reconhecesse que isso foi possível pelo diferente clima cultural e pelas pesquisas

feitas até então pelos demais cientistas, matemáticos e filósofos ao dizer a famosa sentença: “Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”²⁴⁸

Bronowski coloca em destaque o papel da criatividade, de conseguir produzir hipóteses e conjecturas que o “sentido comum”²⁴⁹ não levaria em consideração ou descartaria ao considerar o exemplo dos resultados de Copérnico. O astrônomo polonês teria compreendido os velhos fatos (os movimentos dos astros) por meio de uma diferente perspectiva: a de analisar tais fenômenos do ponto de vista do Sol, ao invés de analisá-los a partir da Terra.

Uma boa narrativa apresenta sempre uma reviravolta, um “golpe de cena” que reverte o ponto de vista do leitor, que mostra coisas sobre uma perspectiva diferente.

Continuando no campo da física, em tempos mais recentes, as leis de Maxwell representaram o selo sobre um processo que ia se desenvolvendo há vários anos, que culminou demonstrado que os fenômenos magnéticos nada mais são que manifestações da força elétrica, colocando os dois sob o nome de eletromagnetismo.

Mais recentemente, Sheldon Glashow, Abdus Salam, e Steven Weinberg foram agraciados com o Prêmio Nobel de Física, em 1979, por terem demonstrado que as interações nucleares fracas e eletromagnética são, de fato, a mesma interação.

Atualmente, um dos maiores desafios da física moderna é demonstrar que as três forças fundamentais (gravitacional, nuclear forte e eletrofraca) são, de fato, manifestações de uma única interação. Esta é uma linha de pesquisa no CERN, de Genebra, onde as elevadíssimas energias utilizadas no LHC²⁵⁰ representam uma tentativa de fazer convergir as três constantes das forças fundamentais.

A matemática dos últimos dois séculos apresentou também várias tendências (e tentativas) de “unificação”: isto é, de reduzir todo (!) o corpo dos conhecimentos matemáticos sob uma única parte. A tentativa logicista de Frege, Russel e Withehead, que visava a reduzir a matemática a poucos conceitos lógicos ou ao formalismo de Hilbert, que visava a reduzir a matemática às teorias formais, representam, com certeza, duas tentativas muito importantes

²⁴⁸ Carta de Newton para Robert Hooke, 5 de Fevereiro de 1676. Ou, talvez, foi somente uma tentativa de se fazer de humilde...

²⁴⁹ Mas também “visão dominante” ou “*status quo*”.

²⁵⁰ *Large Hadron Collider*: trata-se do maior (e mais potente) acelerador de partículas subatômicas do mundo, construído no centro de pesquisa CERN (hoje chamado Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear, mas conhecido antigamente como *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*, que originou a sigla CERN) que representa o maior laboratório de física de partículas do mundo, localizado na região de Genebra, na fronteira entre a Suíça e a França.

neste sentido. Tentativas que, devido ao aparecimento de paradoxos e limitações²⁵¹, não atingiram o próprio pretencioso objetivo (ver item 3).²⁵² Talvez, atualmente, esteja um pouco abandonada, pelo menos do debate público, esta ideia de unificação universal, mas ainda é uma dinâmica interessante do ponto de vista “local”; isto é, tentar unificar não mais “tudo”, mas porções (restritas) de uma disciplina. Um dos “problemas do milênio”²⁵³ da matemática é, por exemplo, o fato de poder decidir se duas classes de problemas “aparentemente” diferentes, classificados computacionalmente como P e NP²⁵⁴, são, na verdade, a mesma classe.

A ideia de unificação não se esgota na física ou na matemática; na biologia, como pensar a teoria da evolução de Darwin senão como um movimento de unificação de todos os seres vivente no planeta? A ideia de que as formas viventes que povoam a Terra se diferenciaram a partir de ancestrais comuns representou um grande momento de ruptura do pensamento contemporâneo, fortíssimo²⁵⁵ também porque colocava na mesma relação o ser humano com os outros animais: não existia mais uma diferença qualitativa entre um homem e um cachorro.

O movimento de unificação, então, apresenta-se como um mecanismo muito presente nas ciências e na matemática: poder-se-ia dizer que trata-se, justamente, de uma ideia fundamental e, por isso, merece um certo destaque na atividade didática desenvolvida na escola.

Trata-se não somente de um objetivo que os matemáticos querem alcançar, mas também de uma “atitude” perante problemas e fenômenos que levam o estudioso a alcançar novas soluções: por exemplo, a ideia de “transferir” métodos algébricos no campo da geometria está na base do desenvolvimento moderno da geometria analítica, que possibilitou solucionar toda uma nova classe de problemas, além de propiciar métodos mais simples para

²⁵¹ O “paradoxo do barbeiro”, de Russell, e o teorema da incompletude, de Goedel. Não é este o contexto por uma discussão aprofundada sobre o tema: por ulteriores esclarecimentos, vide Devlin (2002, p. 82-84) e <<http://im.ufrj.br/~risk/diversos/godel.html>> e <<http://home.deib.polimi.it/colombet/KE/materiale/KE%2014-15%2002%20Logical%20systems.pdf>>. Acessos em: 10 nov. 2016.

²⁵² Mas, não por isso, não representaram um grande desafio intelectual e não providenciaram direta ou indiretamente grandes avanços na matemática: por exemplo, o teorema de Goedel e a teoria de Turing sobre as funções calculáveis foram produzidas a partir das questões postas por Hilbert.

²⁵³ Keith Devlin (2004) explica tais questões; a maior parte de tais problemas são tão puxados para as fronteiras da matemática que até compreender do que trata o problema fica difícil para um leigo (ou até para um matemático que atua numa diferente área).

²⁵⁴ Com P, entende-se os problemas cujo algoritmo de resolução tenha uma complexidade polinomial, ou seja, que os números de passos para resolver o problema seja uma função polinomial do tamanho do *input* do problema; com NP, entende-se uma complexidade não polinomial (tipicamente, exponencial).

²⁵⁵ Na verdade, o impacto desta teoria para o ego do ser humano é ainda tão forte que hoje são várias as filosofias e as religiões que rejeitam, no todo ou em parte, o conteúdo desta teoria.

compreender antigas soluções sintéticas (por exemplo, a tratção das cônicas); isso aconteceu “unificando” os campos algébricos com o geométrico. Também, Struik sustenta como a invenção do cálculo infinitesimal, por parte de Leibniz, inseria-se num quadro filosófico visando a uma “*lingua universalis* da mudança e do movimento em particular” (STRUIK, 1989, p. 181); Struik também fala de “princípio unificador” (1989, p. 255), referindo-se à análise do matemático alemão Riemann tanto na geometria dos espaços não euclidianos, quanto na topologia e nos estudos de função: a ideia unificante de Reimann consistia em fundamentar a sua análise e as suas definições com base no comportamento local, tanto de uma função complexa, quanto de um espaço.

Com efeito, uma apresentação estática de resultados e fórmulas já prontas dificilmente se presta para que os alunos entendam e, ainda mais, apreciem esta dinâmica das descobertas e construções da matemática. Por isso, a construção de dinâmicas, em sala de aula, que usem a História como fonte para a construção de caminhos didáticos em busca de ideias fundamentais, tal como a da experiência mental e da unificação, parece fornecer um bom suporte para isso, tanto na matemática como na física.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ponto de partida desta pesquisa foi a pergunta – não propriamente realizada por seu pesquisador (!), mas que circula entre estudantes em várias aulas – que permeia o ensino da matemática: “Mas... para que serve isso tudo?” Por meio de uma cuidadosa pesquisa bibliográfica, buscaram-se caminhos para lidar com esta inquietude das alunas. Assim, foi avaliado que a utilidade é um “subconjunto próprio” do conceito de sentido: nem sempre tudo aquilo que é estudado pode (ou deve) ser útil numa acessão prática e imediatista, mas com certeza deve “fazer sentido” para as alunas.

Com efeito, discutiu-se que o significado de uma ideia deve se entrelaçar nas malhas da rede de conhecimentos do sujeito: o aluno deve poder conseguir relacionar o assunto da aula com algo que já esteja na sua rede e, se isso acontecer, ele poderá perceber o seu sentido. Da relação dialética entre os vários sentidos origina-se o significado, como algo compartilhado entre os sentidos e percebido pelos vários sujeitos. Foi analisado também como se constitui a narrativa e a estrutura dentro da qual os sujeitos constroem seus sentido, (re)criando as ligações entre conceitos da sua rede de conhecimentos.

Por meio de um movimento de *zoom* progressivo, passou-se da discussão sobre o tema geral da construção do conhecimento (com as suas implicações sobre os conceitos de significado, sentido e narrativas) para um mais específico, associado à natureza do conhecimento matemático. Discutiu-se, assim, as vertentes “radicais” (no sentido do que está na raiz) das visões sobre a matemática (Platonismo e Aristotelismo); isso permitiu apreciar uma natureza em aparente duplicidade: às vezes, a matemática parece se relacionar a descobertas (de coisas que já existem), e, em outros casos, parece que os matemáticos criam novas ideias, estruturas, conceitos. Esta riqueza pode ser utilizada no trabalho do professor: por exemplo, frases como “Pitágoras descobriu uma relação importantíssima entre os lados de um triângulo retângulo” e “A demonstração que Arquimedes construiu foi muito criativa” expressam esta possibilidade de ver a matemática tanto como descoberta quanto como criação. Além desta aparente dualidade, a visão mais compartilhada no meio acadêmico, hodiernamente, é da matemática como construção cultural e histórica da humanidade; tal perspectiva é aquela que apresenta as consequências mais fecundas com as abordagens desta pesquisa: isto é, se a matemática é uma produção histórica e social da humanidade, é natural e logicamente consequente procurar no estudo da história as razões, as motivações e os encadeamentos que explicam como e porque ela desenvolveu-se da forma como é

compreendida no tempo presente. Faz-se, então, referência àquela razão histórica que Ortega y Gasset propõe como a perspectiva para perceber as mudanças e os acontecimentos dos fatos humanos: as coisas mudam e, em particular, muda o significado das coisas (inclusive das “coisas matemáticas”); o estudo da história, assim, é o estudo destas mudanças de significado. Com esta conclusão, justifica-se uma abordagem sobre a natureza da matemática: se, de maneira geral, essa percepção acerca da história afeta a ação docente, no caso específico da matemática, uma visão não tecnicista, não fragmentada e não estática da matemática, mas percebida como reflexo e parte das culturas da humanidade, dialoga fecundamente com a perspectiva de trazer a história da matemática para dentro da sala de aula.

Dessa forma, uma vez considerado que a própria natureza da matemática requer o estudo da sua história para uma mais completa compreensão, surge o seguinte questionamento: que relações existem entre a história da matemática e seu ensino-aprendizagem? Num movimento de aproximação, o holofote foca, agora, não a matemática em geral, mas o seu ensino, analisando de que maneira a história da matemática poderia dialogar com a ação docente. São, assim, analisadas algumas posições clássicas, como a ideia de recapitulação: chega-se a afirmar uma relação entre ontogênese e filogênese, mas com vínculos menos diretos e “positivistas” e mais relaxados. Algumas ideias mais recentes são discutidas, destacando elementos que foram norteadores da pesquisa: a história como interface entre a matemática e o seu ensino e como “narrativa natural” para construir um sentido. A posição de Caraça, particularmente, sobre a matemática como elemento da cultura humana, patrimônio de todas as pessoas, numa visão não tecnicista da matemática, mas formativa e “para todos”, colocou em destaque a história da matemática como elemento fundamental para o ensino e como âmbito que facilmente se presta para a construção de relações interdisciplinares.

À luz deste quadro, que mostrou um movimento progressivo de focalização, passando de uma análise geral do conhecimento para, em seguida, concentrar-se no conhecimento matemático e, por fim, chegando ao papel da história na educação matemática, três elementos foram discutidos, quais sejam: a extração da ideia fundamental, a exploração de um potencial narrativo (enredo) e o resgate de elementos interdisciplinares a partir de um evento matemático.

O primeiro, em virtude do quadro teórico oferecido, está sempre presente: olhar a história do aparecimento de uma ideia matemática sempre permite perceber a sua “razão histórica”, a ideia fundamental ou *cognitive root* que se encontra presente. O potencial

narrativo é um critério para explorar o quanto utilizável é, em sala de aula, o enredo que um fato histórico providencia. Questões do gênero “existem golpes de cenas e reviravoltas?”, “Os alunos poderiam se identificar com alguns personagens?” “Existe, uma boa história para ser contada?” permearam as inquietações que fundamentaram a presente investigação.

O eixo do potencial histórico não remete tanto ao roteiro do evento quanto à sua relevância em termos históricos, haja vista que o fato matemático está entrelaçado com a sociedade da época, com as suas filosofias e culturas, com as suas disputas de poderes, com as próprias questões da matemática, anteriores e posteriores. Um fato matemático relevante do ponto de vista do potencial histórico é algo que pode ser explorado em sala de aula como *tema gerador* – uma vez que representa ideias fundamentais que trasbordam da matemática para outros campos do conhecimento (e da vida) – e, a partir dele, é possível discutir vários assuntos, tais como arte, política, tecnologia...

A atividade da professora pode se mover levando em consideração estas duas dimensões para construir atividades, roteiros, narrativas que constituam uma situação na qual o aluno consiga perceber um sentido naquilo que está sendo discutido, alavancando nas ideias fundamentais, no entrelaçamento dos fatos matemáticos com elementos culturais e sociais mais amplos, no *pathos* de uma bela narrativa... É importante destacar que cada fato histórico apresenta algumas características objetivas que, por si só, não permitem classificá-las univocamente como exploráveis, de acordo com um eixo ou outro: esta classificação somente cabe ao docente, que exerce a autonomia da sua ação ao avaliar a sua turma, escolher as ideias fundamentais e os elementos que serão destacados em aula. Assim, um evento da história matemática pode ser percebido por uma professora como de alto relevo histórico, enquanto um outro professor pode, ao contrário, não achá-lo interessante sob esta perspectiva: os dois podem estar “certos”, cada um está fazendo a sua avaliação em razão dos alunos e da trajetória de ensino escolhida.

Finalmente, foram discutidos quatro casos para demonstrar como estes elementos se entrelaçam e fornecem a base para a construção de significados em sala de aula, por meio de oportunas narrativas. A história de Gauss fornece um enredo interessante para discutir a ideia de padrão escondida na série aritmética e também a concepção que os alunos (e o docente) têm da matemática e de seu ensino. Esta história é quase atemporal: refere-se a um menino, no final do século XVIII, mas poderia ser contada da mesma maneira se o protagonista fosse um garoto no império romano ou uma moça brasileira da segunda metade do século XX. Isso

mostra como, no eixo do interesse histórico, a temporalidade dos eventos narrados tem uma importância relativamente baixa.

O nascimento do logaritmo destacou uma ideia fundamental: trazer para o “imediato” aquilo que é “pensado”; aquilo que é “vago” e “longe” por algo que é “definido” e “palpável”. A proposta desta pesquisa não é resgatar enredos ligados à invenção do logaritmo (por exemplo, a “disputa” entre Napier e Bürgi), nem elementos históricos (por exemplo, o quadro histórico representado pelo começo do processo da colonização europeia e das grandes navegações), mas tão somente sua ideia fundamental; tal como discutido anteriormente, cabe à professora estabelecer o que vai constituir a narrativa em aula.

O terceiro caso analisou os estudos de Arquimedes com o círculo e esfera e, a partir disso, foi possível resgatar vários vínculos com a filosofia, a cultura e a política da Grécia clássica e do mundo helenista. Assim também ocorre em relação a algumas ideias fundamentais, como o infinito, o par exato-aproximado (concepções estas que também estão na base dos fundamentos do cálculo infinitesimal) e a ideia de unificação, que tanto na matemática como em qualquer campo de conhecimento desenvolve um papel central tanto na busca de novos conhecimentos, quanto na reorganização dos já existentes.

Por fim, foi dado espaço ao estudo da trajetória que, de Galileu até Newton, levou a um extraordinário processo de unificação nas ciências da natureza, pondo fim à separação entre mundo celeste e terrestre e permitindo colocar em destaque o papel das experiências mentais que foram determinantes neste caminho. Procurou-se demonstrar como os experimentos pensados podem constituir-se em recursos relevantes tanto na física como na matemática.

É importante destacar, uma vez mais, que esta dissertação pretende constituir-se como um auxílio para a atividade docente, sem ser um “método” ou um “material” de ensino: a partir das ideias discutidas, o professor deve ter a autonomia de planejar a sua aula da maneira que julgar mais oportuna e eficaz.

NOS PRÓXIMOS EPISÓDIOS...

Vale, também, retornar ao caráter central empregado nesta pesquisa: apesar de ser uma investigação de fundo bibliográfico, algumas experiências obtidas em sala de aula pelo pesquisador da dissertação foram consideradas como “indiciárias”, à moda do paradigma proposto por Ginzburg, e passíveis de serem exploradas numa futura indagação de campo.

Assim, seria interessante poder implementar as ideias propostas para verificar se, ao passar a “ação”, elas se mantêm coerentes e efetivas. Com certeza, esta pode ser a base para uma próxima etapa da investigação.²⁵⁶

Um aspecto discutido teoricamente (no começo do processo), mas que não foi abordado substancialmente nos exemplos práticos, diz respeito ao fato de que existem várias matemáticas, não somente dependendo da época, mas também dos diversos povos: nitidamente é possível partir de histórias que não estejam focadas na Europa para construir narrativas para uso em sala de aula. Esta possibilidade é pouco explorada nesta dissertação, em parte devido à formação do pesquisador e também pela menor presença, por enquanto, de material a este respeito. Este poderia ser um eixo para possíveis trabalhos futuros, inclusive discutindo-se a relação entre flexibilidade de *curriculum* e avaliações institucionalizadas em todo âmbito do território brasileiro, tais como o ENEM (MONTEIRO, 2004, p. 29).

Um outro aspecto que emergiu a partir do desenvolvimento da pesquisa foi a perspectiva dual à pergunta que foi o pontapé inicial da investigação: se esta dissertação nasce da pergunta da aluna sobre a utilidade acerca daquilo que é discutido em aula, também a professora poderia se colocar uma pergunta parecida, como a seguinte: “Para que estou ensinado isso?” A resposta, aproximando-se ou distanciando da atividade teórica, prática ou empírica do fazer docente, remeteria a várias questões, dentre estas, não por último, à intencionalidade da ação docente do professor, tal como discutido por Ernest (1996, parte 2), Hersh (1997, p. 238-248) e Valero (2002, p. 54-57)

²⁵⁶ Na verdade, não cindindo o pesquisador do professor; o autor deste trabalho já atuou ao longo dos anos de pesquisa com tais conceitos junto aos alunos e nas escolas em que lecionou. Mas estes fatos não são tratados orgânica e estruturadamente: são mais usados como indícios para a discussão teórica e para possíveis desenvolvimentos futuros, em sintonia com o “paradigma indiciário”.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N.; FORNERO, G. *Filosofi e filosofie nella storia*. v. I. Paravia, 1992.

ALEXANDER, A. *Infinitesimal*. A teoria matemática que mudou o mundo. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

AMARAL, J. T. do. Bento Caraça e Amoroso Costa: a Matemática como cultura. *Suplemento do Boletim da SPM*, n. 65, p. 17-19, out. 2011.

_____. *Bento de Jesus Caraça: uma visão sobre o valor humano e o valor social da matemática e suas aplicações no ensino*. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ARANTES, V. A. (org.) *Ensino da matemática*. Pontos e contrapontos. São Paulo: Summus Editorial, 2014.

AUSUBEL, D. P. *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston. 1968.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BAGNI, G. T. Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*, v. 3, p. 51-70, 2004.

BELL, E. T. *Men of mathematics*. Touchstone, 1986.

BISHOP, A. J. *Mathematical enculturation*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Third printing 1997.

BLANCHÉ, R. *Estruturas intelectuais: ensaio sobre a sistematização dos conceitos*. São Paulo: Perspectiva, 2012.

BOBBIO, N. *Stato, governo, società: per una teoria general della politica*. Turim: Einaudi, 1985.

BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros nacionais de qualidade para a educação infantil*. (PCN) Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 1998.

BRONOWSKI, J. *Ciencia y valores humanos*. Barcelona: Lumen, 1968.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

BRUNER J. *O processo da educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.

_____. *Atos de significação*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

_____. *Fabricando histórias: Direito, literatura, vida*. São Paulo: Letra e Voz, 2014.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Edições Cosmos, 1941.

CASTELVECCHI, D; WITZE, W. *Einstein's gravitational waves found at last*. Nature News, 11 de fevereiro de 2016.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*, São Paulo: Ática, 1990.

_____. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, Belo Horizonte: Autentica, 2001.

_____. *Uma história concisa da matemática no Brasil*, Petropolis: Editora Vozes, 2008.

D'AMORE, B. *Epistemologia e didática da matemática*. São Paulo: Escrituras, 2014.

DAUBEN, J. W. *A Chinese Mathematician in Plato's Cave: virtual/real dimensions of internet epistemology*. *Ontology Studies*, v. 8, 2008.

DEVLIN, K. *The language of Mathematics: making the invisible visible*. New York: Henry Holt, 2002.

_____. *Os Problemas do Milênio*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

ELLENBERG, J. *O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado*. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

ERNEST, P. (Org.). *Mathematics, Education e Philosophy: an international perspective*. London: The Falmer Press, 1996.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Taylor & Francis, 2004.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo, São Paulo: UNESP Editora, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Edunicamp, 2011.

EWING, A.; WARD, C. *Ultimates* #6. Marvel, 2015.

FAGUNDES, T. B. Os conceitos de professor pesquisador e professor reflexivo: perspectivas do trabalho docente *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, v. 21, n. 65, p. 281-298, abr./jun. 2016.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. A. (Ed.). *History in Mathematics Education: an ICMI study*. New York: Springer Science & Business Media, 2000. (New ICMI Study Series, 6).

FEYNMAN, R. *The character of Physical law*. Lecture 6 – Probability and uncertainty: the quantum mechanical view of natures. Apresentado originalmente em 1964. Ithaca, NY: Cornell University/Department of Physics, 2015. Disponível em: <<http://www.cornell.edu/video/richard-feynman-messenger-lecture-6-probability-uncertainty-quantum-mechanical-view-nature>>. Acesso em: 10 maio 2017.

FORATO, T. C. de M. *A natureza da ciência como saber escolar: um estudo de caso a partir da história da luz*. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

_____. *Pedagogia da esperança*. São Paulo: Paz e Terra, 2005.

_____. *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra, 2015.

FURINGHETTI, F. History of Mathematics, mathematics education, school practice: case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, Fredericton, NB, v. 17, n. 1, p. 55-61, feb. 1997.

_____. History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in school*, p. 37-41, jan. 2003a.

FURINGHETTI, F. Storia della matematica per insegnanti e studenti. In: CASTRO, E. (Ed.). *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada: Universidad de Granada, 2003b. p. 87-96.

_____. *History and mathematics education: a look around the world with particular reference to Italy*. 2004a.

_____. *Quattro anni di impegno internazionale su storia e didattica: bilanci e prospettive*. 2004b.

_____. A report on the ICMI study: “The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics”. *L’Enseignement Mathématique*, Genève, v. 51, p. 365-372, 2005.

_____. Teacher education through the history of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, n. 2, The History of Mathematics Education: Theory and Practice, October, 2007, Published by: Springer, 2007, p. 131-143.

_____. History and epistemology in mathematics education. In: HANSEN, V. L.; GRAY, J. (Ed.). *History of mathematics*. Oxford, UK: Eolss, 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/315665208_History_and_epistemology_in_mathematics_education>. Acesso em: 10 maio 2017.

FURINGHETTI, F.; SOMAGLIA, A. History of Mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School* (History of mathematics - Extra special issue), Leicester, v. 27, n. 4, p. 48-51, sep. 1998.

FURINGHETTI, F.; RADFORD, L. Contrast and Oblique connectinos between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics, In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Second Edition, New York-London: Routledge, 2008.

GEYMONAT, L. Storia della matematica. In: ABBAGNANO, N. (Coord.). *Storia delle scienze coordinate*. v. I. Torino: Utet, 1965.

GINZBURG, C. *Mitos, emblemas, sinais: morfologia e história*. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKI, L. (Org.). *Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*. Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Editora Ática, 1997.

GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: um matemático na didática e na teoria do currículo. *Journal of Curriculum Studies*, [s. l.], v. 32, n. 6, p. 777-796, 2000.

HEATH, T. L. *The works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1897.

HERSH, R. *What is Mathematics, really?* Oxford University Press, 1997.

HESSEN, B.; GROSSMAN, H. *The social and economic roots of the scientific revolution*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.

HOLTON, G. *A cultura científica e seus inimigos*. Lisboa: Gradiva, 1985.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 71, n. 3, p. 235-261, jul. 2009.

KLING, F. *Bulletin of American Mathematical Society*, Providence, RI, v. 2, p. 241-249, 1896.

KUHN, T. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva, 1970.

LAGO, L. G. *Lua: fases e facetas de um conceito: uma discussão do ensino-aprendizagem a partir da teoria da atividade*. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez, 1995.

_____. *Matemática e língua materna*. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

_____. *Matemática e realidade*. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2013a.

_____. *Mil e uma #181: sentido, significado*. São Paulo, 31 out. 2013b. Disponível em: <<http://www.nilsonjosemachado.net/mil-e-uma-181-sentido-significado/>>. Acesso em: 10 maio 2017.

_____. *Mil e uma # 391: sentido, significado, crença*. São Paulo, 19 nov. 2015. Disponível em: <<http://www.nilsonjosemachado.net/mil-e-uma-391-sentido-significado-crenca/>>. Acesso em: 10 maio 2017.

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. da (Org.). *Linguagem, epistemologia e didática*. São Paulo: Escrituras, 2016.

MAGNAGHI, C. P. *Análise e tradução comentada da obra de Arquimedes intitulada "Método sobre os teoremas mecânicos"*. 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

MAIA, M. E. et al. O ensaio como tese: estética e narrativa na composição do texto científico. Resenha. *RACIn*, João Pessoa, v. 4, n. 1, p. 1-5, jan./jun. 2016.

MARTINS, R. de A. A maçã de Newton: história, lendas e tolices. In: SILVA, C. C. (Ed.). *Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino*. São Paulo: Livraria da Física, 2006. p. 167-189.

MARX, K., ENGELS, F. *A ideologia alemã*. [1999]. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br>>. Acesso em: 10 jan. 2017.

MEDEIROS, C. F.; MEDEIROS, A. O pensamento dialético de Bento de Jesus Caraça e sua concepção da educação matemática. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 9, n. 2, p. 261-276, 2003.

MOLINA, D. *A narrativa e a construção do conhecimento histórico*. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

MONTEIRO, A. Algumas reflexões sobre a perspectiva educacional da Etnomatemática. *Zetetiké*, Campinas, v. 12, n. 22, p. 9-31, jul./dez. 2004.

MOREIRA, M. A. *O que é, afinal, aprendizagem significativa?* Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 23 abr. 2010. Disponível em: <<http://moreira.if.ufrgs.br/oqueefinal.pdf>>. Acesso em: 10 maio 2017.

NETZ, R. *Ludic Proof*. Greek mathematics and the Alexandrian Aesthetic. Cambridge university press, 2009.

ODIFREDDI, P. *C'è spazio per tutti*. Milano: Oscar Mondadori, 2011

OGBORN, J. (Org.). *Wonder and Delight: Essays in Science Education*, Taylor print on Demand, 1994.

OGBORN, J. Introducing relativity: less may be more. *Physics Education*, p. 213-222, mar. 2005.

_____. *Science and commonsense*. International Commission on Physics Education, 2008.

ORTEGA Y GASSET, J. *Meditaciones Del Quijote*. 1914. Disponível em: <<http://www.mercaba.org/SANLUIS/Filosofia/autores/Contempor%C3%A1nea/Ortega%20y%20Gasset/Meditaciones%20del%20Quijote.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2017.

_____. *El fondo insobornable*. El Espectador, vol. I, 1946.

PASINI, G. et al. (Org.). *Cultura e identidade dos povos das pampas*. Santa Maria: Caxias, 2016.

PEREZ, M. L. M. et al. Los contextos realistas en la resolución de problemas de matemática: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos. *Paradigma*: publicación de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, p. 30-45, jun. 2002.

PESSIS-PASTERNAK, G. *Do Caos à Inteligencia Artificial*, São Paulo: Editora UNESP, 1993.

PETROVSKI, A. V., *Psicologia evolutiva y pedagógica*, Moscou: Editorial Progreso, 1985.

PIAGET, J.; GARCIA, R. *Psicogênese e história das ciências*. Petrópolis: Vozes, 2011.

PIATTELLI-PALMARINI, M. Ever since language and learning: afterthoughts on the Piaget-Chomsky debate. *Cognition: International Journal of Cognitive Science*, n. 50, p. 315-346, 1994.

POGREBINSCHI, T. A democracia do homem comum: resgatando a teoria política de John Dewey. *Rev. Sociol. Polít.*, Curitiba, n. 23, p. 43-53, nov. 2004.

POMMER, W. *Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z*. Texto apresentado nos Seminários de Ensino de Matemática/Sema-Feusp, mar. 2010.

Disponível em:

<<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3809/20218/CO+2010+1sem+SEMAFEUSP+N%C3%B4meros+Inteiros.pdf>>. Acesso em: 3 jan. 2016.

PONTE, J. P. et al. *Didática da Matemática: ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário, 1997.

RADFORD, L. et al. Reflections on history of Mathematics. History of mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M. N. DREYFUS, T. (Ed.). *Mathematics & Mathematics Education: searching for common ground*. Advances in Mathematics Education, 2014.

RAUSCH, R. B. Professor-pesquisador: concepções e práticas de mestres que atuam na educação básica. *Rev. Diálogo Educ.*, Curitiba, v. 12, n. 37, p. 701-717, set./dez. 2012.

RICŒUR, P., *Freud and philosophy: an essay on interpretation*, Book I *Problematic*, section 2: The conflict of interpretations, title: Interpretation as exercise of suspicion, 1965

_____. *Tempo e Narrativa 1. A intriga da Narrativa Histórica*. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2010.

RODRÍGUEZ, V. G. *O ensaio como tese: estética e narrativa na composição do texto científico*. São Paulo: Martins Fontes, 2012.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, A. A. Scrittori e massa. In: _____. *Scrittori e popolo: il populismo nella letteratura italiana contemporanea*. Turim: Einaudi, 2015.

ROVELLI, C. *Sette brevi lezioni di fisica*. Milão: Adelphi, 2014.

SANTOS, V. de M. *O infinito: concepções e consequências pedagógicas*. 1995. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 1995.

_____. A matemática escolar, o aluno e o professor: paradoxos aparentes e polarização em discussão. *Cadernos Cedes*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 25-38, jan./abr. 2008.

_____. *Ensino de Matemática na escola de nove anos: dúvidas, dívidas e desafios*. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

SAVIANI, D. *Escola e democracia*. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1986.

SCORZA, M., *A dança imóvel*, Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1985.

SEWELL JUNIOR, W. H. *Geertz, cultural systems and History: from synchrony to transformation*. 1997.

SEWELL JUNIOR, W. H. *Beyond the cultural turn: new directions in the study of culture and society*. Bonnell and Hunt, 1999.

SCHUBRING, G. Ontogeny and phylogeny - Categories for cognitive development. In: FURINGHETTI, F.; KAIJSER, S.; TZANAKIS, C. (Eds.). *Proceedings*, HPM 2004 & ESU 4. rev. ed. Iraklion, Greece: University of Crete, 2006. p. 329-339.

SMITH, D. E. *History of Mathematics*. 2 v. New York: Dover, 1958.

SORENSEN, R. A. *Thought experiments*. New York: Oxford University Press, 1998.

SPERBER, S. F. *Ficção e razão: uma retomada das formas simples*. São Paulo: Hucitec, 2009.

STEWART, I. *Em busca do infinito*. Rio de Janeiro: Zahar, 2014a.

_____. *Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2014b.

_____. *O fantástico mundo dos números*. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

STRUIK, D. J. *História concisa da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1989.

THORLEY, J. *Athenian Democracy*. Routledge, 2005.

TRABAL, P. Una sociología de la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, v. 23, n. 59, jan./abr. 2011.

VALERO, P. Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Cuadrante*, Lisboa, v. 11, n. 1, p. 33-40, 2002.

VERÁSTEGUI, R. de L. A. Dewey e a proposta democrática na Educação. *Revista Redescobertas*, [s. l.], ano 3, n. 4, p. 24-32, 2012.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e linguagem*, São Paulo: Martins Fontes, 1999.

WATTERSON, B. *Os dez anos de Calvin e Haroldo*. Cambuci: Best News, 1990.

WU MING 4. *Tolkien, gli esperantisti e il sonno di Omero*, 2016. (pseudônimo: GUGLIELMI, F.). Disponível em: <<http://www.jrrtolkien.it/2016/11/07/tolkien-gli-esperantisti-e-il-sonno-di-omero>>. Acesso em: 10 jan. 2017.