MARIA LUCIA PANOSSIAN

Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de
estudantes: indicadores para a organização do ensino

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação (Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura

São Paulo

2008

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.33 P195m	<p>Panossian, Maria Lucia</p> <p>Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes : indicadores para a organização do ensino / Maria Lucia Panossian ; orientação Manoel Oriosvaldo de Moura. São Paulo : s.n., 2008.</p> <p>179 p. : il., tabs.</p> <p>Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração : Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.</p> <p>1. Álgebra – Estudo e ensino 2. Matemática – Estudo e ensino 3. Linguagem 4. Pensamento I. Moura, Manoel Oriosvaldo de, orient.</p>
-----------------	---

FOLHA DE APROVAÇÃO

Maria Lucia Panossian

Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes:
indicadores para a organização do ensino

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação (Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. _____

Instituição : _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição : _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição : _____ Assinatura: _____

DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Marly e Walter,
com amor e respeito.*

*Sou grata por serem a fonte de minha vida; por
me ensinarem os primeiros passos nesta
caminhada e por me apoiarem em todos os
outros.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, por oferecer além das orientações individuais, a garantia dos momentos coletivos nas reuniões de orientandos e na coordenação do grupo de pesquisa (GEPAPe).

Às professoras Maria do Carmo de Sousa, Regina Grando e Maria Eliza Matosinho Bernardes pelas valiosas contribuições no momento da qualificação.

Aos membros do GEPAPe: Vanessa, Marisa, Flávia Dias, Flávia Asbarh, Elaine, Sérgio, Bel, Eliza, Wellington, Silem, Sílvia Moraes, Sílvia Tavares, Luciana, Josélia, Camilla, dispostos sempre a compartilhar pesquisas e estudos. Em especial à Carol, pela leitura do meu trabalho, e ao Algacir, sem o qual a filmagem da pesquisa não seria possível.

Aos participantes e colaboradores do Clube de Matemática e às meninas da OPM-Samantha, Claúdia e Sandra, com quem pude compartilhar experiências na sala de aula.

Aos que me ensinam diariamente o valor da amizade - Aloe, Jackie, Zé, Denise, Leny e Lia - pelo apoio aos meus projetos de vida. Em especial à Karina pelo incentivo e participação direta em vários momentos deste trabalho.

Às minhas pequenas afilhadas, Priscila e Catarina, que me aproximam das gerações futuras.

Aos familiares que incentivaram e acreditaram no meu trabalho e compreenderam assim minhas ausências.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo que me proporcionou a oportunidade de realizar este mestrado.

Ao apoio financeiro do Governo do Estado de São Paulo por meio do Programa Bolsa Mestrado para professores da rede pública.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino** 2008. 179 f.. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008

RESUMO

Consideram-se, neste trabalho, as dificuldades dos estudantes em relação à álgebra que podem estar associadas às especificidades do conhecimento algébrico, às questões de metodologia e didática do ensino e também ao desenvolvimento dos processos psíquicos do pensamento e da linguagem. Desta forma define-se como objeto de estudo as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes. Entende-se que o pensamento e a linguagem são constituídos a partir da atividade humana (LEONTIEV, 1983), e enquanto funções psicológicas superiores (VIGOTSKI, 2001). As relações entre o pensamento e a linguagem se apresentam por meio de processos de generalização, abstração, formação de conceitos (formas de pensamento para Davíдов); juízos, deduções e conceitos (formas de pensamento para Kopnin); por meio do raciocínio, elaboração e explicitação (conforme Prado Jr.); e nos estágios de desenvolvimento dos conceitos (sincréticos, complexos e conceitos conforme Vigotski). Também constituídos a partir da atividade humana, o pensamento e a linguagem algébrica são compreendidos a partir de seu movimento lógico-histórico. Tal compreensão nos faz retomar a pesquisa com os estudantes de 6ª série do ensino fundamental procurando por meio de situações-problema investigar as manifestações e peculiaridades do movimento do pensamento e da linguagem algébrica. As soluções coletivas, se constituíram em dados analisados segundo as categorias: qualidade do pensamento, qualidade da linguagem, o conceito de variável. Da análise decorrem as sínteses que nos indicam elementos que, em relação aos processos de pensamento e linguagem, podem estar na origem das dificuldades dos estudantes com o conteúdo algébrico. Entre estes elementos, destacamos: a necessidade de ações do professor que gerem nos estudantes o pensamento teórico; a pretensa linearidade do conhecimento aritmético para o algébrico; a preocupação com a formação dos conceitos, e não somente sua aplicação; e a compreensão do significado do simbolismo algébrico e dos conceitos a ele subjacentes. Ressaltamos, ainda, que reconhecer as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes é elemento relevante a ser considerado pelos professores na organização do ensino de álgebra.

PALAVRAS-CHAVE: Pensamento; Linguagem; Atividade; Variável; Ensino de Álgebra.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **Student's algebraic thought and language manifestations: indicators for teaching organization**. 2008. 179 f. Dissertation (Masters) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008

ABSTRACT

This work deals with the student's difficulties about algebraic knowledge, which could be related to the specificities of algebra, to educational methodology and didactical matters, and also to language and thought psychological processes. Therefore, the subject of study is the students' thoughts and their algebraic language. We understand that thought and language are constituted from human activity (LEONTIEV, 1983) as a higher psychological functions (VIGOTSKI, 2001). The connections between thought and language are shown by means of: generalization, abstraction, formation of concepts (as in Davidov); judgments, deductions and concepts (as in Kopnin); by means of the reasoning, elaboration and accurate presentation (as by Prado Jr); and in the formation stages of a concept - syncretic/complex/real concept (as in Vigotski). Also part of human activity, the thought and the language of algebra are understood by the means of "logic-historical" movement. Such understanding prompted our research with 6th graders using mathematical life situation problems to investigate the manifestations and peculiarities of the thought and the language of algebra. The cooperative made solutions were analyzed according to these categories: thought quality, language quality and the concept of variable. Within these analyses and data syntheses we come up with elements which, connected to the processes of thought and language, can be part of the origin of the students' difficulties with the algebraic content. Inside these elements, we detach: the necessity of teacher's action that can generate among students the theoretical thought; the pretense linearity of arithmetical knowledge through algebraic one; the concerns about the construction of a concept and not only in its application; and understanding the algebraic symbolism and the underlying concepts. Finally, we believe that the recognition of the manifestations of thought and the language of algebra among the students is a relevant aspect to be considered by the teachers during the curriculum writing.

Key words: Thought, language, activity, variable, Algebra Education

SUMÁRIO

Introdução	9
1. O conhecimento algébrico na sala de aula: como entender as dificuldades dos estudantes	13
2. O pensamento e a linguagem: processos que são constituídos na atividade humana e constituem a atividade dos sujeitos	21
2.1. Relações entre pensamento, linguagem e atividade	21
2.2. Movimentos do pensamento e da linguagem	31
3. Pensamento e linguagem algébrica	43
3.1. O movimento lógico-histórico	43
3.2. Conceitos algébricos como conceitos científicos	51
3.3. O conceito algébrico de variável	54
4. Pensamento e linguagem algébrica: implicações para o ensino	57
4.1. Concepções de álgebra e educação algébrica	57
4.2. Os procedimentos da aritmética e da álgebra	64
4.3. A linguagem algébrica e o sistema simbólico algébrico	67
5. A pesquisa com os estudantes	73
5.1. Os sujeitos da pesquisa	74
5.2. O isolado da pesquisa	75
5.3. As situações-problema	81
5.4. Os encontros e a obtenção dos dados	99
6. Análise e síntese dos dados obtidos	103
6.1. Caracterizando os sujeitos da pesquisa	103
6.2. Categoria de análise dos dados	106
6.2.1. Qualidade do pensamento	107
6.2.2. Qualidade da linguagem	112
6.2.3. O conceito de variável	114
6.3. Descrição geral dos encontros com os estudantes	116
6.4. Sínteses elaboradas	135
Considerações finais	165
Referências	175

Introdução

A motivação inicial para a realização desta pesquisa de mestrado surge a partir da prática profissional, como professora de Matemática do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, com mais de quinze anos de efetivo exercício. Atuando com estudantes do 1º ano do Ensino Médio, tornou-se evidente a dificuldade que grande parte deles apresentava para resolver problemas variados, recorrendo ao uso do sistema simbólico algébrico. A incompreensão a respeito da falta de apropriação de tal sistema simbólico por estudantes que estudam álgebra e sua linguagem¹ durante o tempo mínimo de três anos, da 6ª a 8ª séries do Ensino Fundamental², gerou a necessidade da pesquisa.

O objetivo de algumas ações enquanto exercia a atividade³ de ensino era o de propiciar aos estudantes condições mais adequadas de apropriação do sistema simbólico-algébrico, utilizando-o como recurso facilitador na resolução de situações-problema. Este objetivo estabelecido como professora foi revisto e ampliado para se tornar o objetivo da pesquisa acadêmica. Considerou-se que o conhecimento algébrico não tem somente a função de facilitar a resolução de situações-problema, mas ao se apropriar de tal conhecimento, o sujeito tem outras oportunidades de se relacionar com a realidade objetiva.

Foi possível identificar um ciclo que se desenvolveu em torno da atividade (como professora), gerando a necessidade (de compreensão de um problema no processo de ensino e aprendizagem da álgebra) e de volta à atividade (como pesquisadora), atividade essa que permite reorganizar a atividade da professora.

¹ Neste texto, entende-se que a linguagem algébrica se manifesta por meio da linguagem comum, por figuras, por outros símbolos, pela fala etc. Considerando o desenvolvimento histórico do conhecimento algébrico, o sistema simbólico algébrico será entendido como estágio atual de sua linguagem.

² Nesta pesquisa, ainda será usada a indicação de séries do Ensino Fundamental com duração de oito anos. Entretanto, conforme a lei 11.274 de Fevereiro de 2006, a duração desse nível muda de oito para nove anos, sendo que o último ano da Educação Infantil torna-se o 1º ano do Ensino Fundamental. As escolas têm até o ano de 2010 para se adaptar.

³ O termo atividade neste trabalho será entendido conforme proposto por Leontiev (1983): “Com toda sua peculiaridade, a atividade do indivíduo humano constitui um sistema compreendido no sistema de relações da sociedade. Fora destas relações, a atividade humana não existe em geral” (p. 67). No capítulo 2, esse conceito será detalhado.

Tal ciclo se mantém em movimento, gerando novas necessidades que, por sua vez, podem ser satisfeitas em atividades diferentes (com objetos diferentes) ou nas atividades que já estão sendo exercidas como professora e pesquisadora. Nesse movimento, estabelecendo diferentes relações, conforme a experiência que aos poucos é apropriada, ora se sobressai a pesquisadora, ora se sobressai a professora. Entretanto, como representam o mesmo sujeito, interagem e reorganizam suas ações e práticas enquanto se mantém em atividade.

Estando ciente de que a atividade de pesquisa envolve ações variadas e também possui objetivos determinados como estudos teóricos, experimentações, novos estudos teóricos, estabelecimento de hipóteses, confirmações e negações, tornou-se necessário um aprofundamento teórico e sistematizado em relação ao **objeto de estudo**. Este foi delimitado como “manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes”.

A definição da teoria histórico-cultural, como a referência teórica da presente pesquisa, foi influenciada pelas discussões do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe)⁴ e pelos resultados de pesquisas com esse enfoque teórico.

A teoria histórico-cultural e a Teoria da Atividade são algumas das fundamentações teóricas de pesquisas como as de Moura (1996; 2001) que, por sua vez, geram novos conceitos, como é o caso da Atividade Orientadora de Ensino. Outras investigações, como as de Moyses (1997), Bernardes (2000), Sforzi (2004), apresentam possibilidades reais de contribuições dos estudos nessa fonte teórica para a Educação Matemática. De forma mais específica, em relação ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos, também oferecem contribuições pesquisas como as de Papini (2003), Moretti (2003), Cedro (2004) e Sousa (2004).

⁴ Tais discussões são acompanhadas desde o início de 2006 (ano de ingresso no programa de Mestrado desta Faculdade).

Os resultados dessas e outras pesquisas, além das leituras e discussões realizadas no GEPAPe, indicam o campo fértil da teoria histórico-cultural da psicologia e também da Teoria da Atividade no processo de ensino em geral e no ensino de Matemática em particular.

Entende-se que ao professor não basta um bom domínio de determinado conteúdo, mas sim tal domínio aliado à compreensão da realidade objetiva e aos conhecimentos que se transformam com a história da humanidade, entre outras variáveis que atuam em seu processo de formação. Neste trabalho, destacam-se as variáveis relacionadas aos processos psicológicos dos estudantes, em especial o pensamento e a linguagem, e estes relacionados ao conhecimento algébrico e às estratégias didáticas do professor.

Desvendar as peculiaridades psicológicas do processo de ensino e aprendizagem da álgebra, que conduz à apropriação e compreensão da linguagem algébrica (incluindo o sistema simbólico algébrico como instrumento psicológico) inter-relacionada ao pensamento, oferece, então, elementos para a reorganização de uma prática de ensino que vise o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.

Assim, o **objetivo** principal desta pesquisa é o de investigar *as manifestações e as peculiaridades do movimento do pensamento e da linguagem algébrica, por meio de situações-problema, com estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental*. Pretende-se com o resultado de tal investigação identificar a origem de algumas dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico, relacionadas ao pensamento e a linguagem.

Este trabalho está organizado de forma a expor ao leitor no Capítulo 1 a problemática que gerou a investigação, no caso a dificuldade dos estudantes com os conceitos e conteúdo algébrico, e os elementos que serão estudados e que permitam entender a origem de tais dificuldades.

Nos capítulos seguintes, apresenta-se a complexidade e os detalhes da investigação teórica e prática que se processou, recuperando nesse caminho alguns aspectos

da dimensão universal do objeto de estudo (pensamento e linguagem no Homem) da dimensão singular (pensamento e linguagem algébrica no processo de ensino), mediados pela dimensão do particular (pensamento e linguagem na História da Matemática).

Dessa forma, o Capítulo 2 contempla a dimensão universal: os estudos relacionados aos **processos de pensamento e da linguagem** no Homem, constituídos na atividade humana e constituindo a atividade do sujeito. No Capítulo 3, apresenta-se um recorte do **movimento histórico da Álgebra**, conhecimento elaborado pela humanidade, como a dimensão do particular desta pesquisa. O Capítulo 4 contempla a dimensão do singular a partir do objeto de estudo, como exposição de alguns estudos teóricos relacionados às manifestações de **pensamento e linguagem algébrica no processo de ensino**.

O Capítulo 5 trata do estudo prático e da descrição da metodologia da pesquisa desenvolvida com os estudantes. Alguns resultados obtidos, as análises desenvolvidas e a criação de categorias de análise, que permitiram elaborar as sínteses ilustradas com momentos de discussão dos estudantes, são apresentados no Capítulo 6.

Nas Considerações finais, destaca-se que não existe a pretensão de listar todos os elementos que influenciam no processo de ensino de álgebra, mas sim indicar a necessidade de se compreender os processos de pensamento e linguagem em geral, em suas inter-relações, e os processos de pensamento e linguagem algébrica, aliado às especificidades do conhecimento algébrico como elementos importantes a serem considerados pelo professor na organização do ensino de álgebra.

1. O conhecimento algébrico na sala de aula: como entender as dificuldades dos estudantes? _____

Inquietação inicial

Complete a tabela, relacionando a primeira linha à segunda.

1	2	3	4	5	6				...	N
1	4	9	16			49	64	81	...	

Essas e outras questões e situações-problema foram apresentadas a 34 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental e 143 alunos do 1º ano do Ensino Médio de escolas da rede pública do estado de São Paulo. Esperava-se que os alunos identificassem o padrão da sequência numérica e completassem a tabela, o que foi realizado corretamente por 79% dos estudantes da 6ª série e 100% dos estudantes do 1º ano.

Entretanto, no momento da generalização por meio da variável n , o desempenho de ambas as turmas foi semelhante.

Em relação à variável		
	6ª série	1º ano
Usam outro número para o n	32%	34%
Usaram outra letra para o n	15%	15%
Acertou (n^2)	3%	10%
Não responderam	50%	41%

Os resultados dessa questão e outras ações da prática como professora de estudantes do Ensino Médio revelaram as dificuldades destes em recorrer ao conhecimento algébrico para resolver situações-problema propostas. Tal fato se destacava como inquietante, considerando que, formalmente, esses estudantes se relacionavam com tal tipo de conhecimento a partir da 6ª série do Ensino Fundamental. As dificuldades dos estudantes

avançam pelos anos de estudo e se acumulam com a apresentação constante, realizada pelo professor, de técnicas e conceitos algébricos que não são devidamente apropriados.

Dessa forma, originou-se o problema central desta pesquisa: *Quais são as dificuldades dos estudantes com os conteúdos e conceitos algébricos e qual é a origem de tais dificuldades?* Consideramos que encontrar a origem dessas dificuldades é fundamental, pois oferece elementos para reorganização da prática de ensino de álgebra.

Além da prática profissional, algumas pesquisas também indicam as dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico, procurando entendê-las de formas variadas.

Conforme Booth (1995, p. 23) “Uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os estudantes comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros”. A autora destaca algumas possíveis causas dos erros e das dificuldades dos estudantes e as relaciona às diferenças entre aritmética e álgebra. Por exemplo, considera que os estudantes insistem em recorrer a estratégias variadas para alcançar uma resposta numérica, pois têm dificuldades em aceitar uma resposta algébrica sem perceber que o foco da atividade algébrica e aritmética é diferente. “Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral” (p. 24). Ela também destaca diferenças no uso de notações e convenções em álgebra, e considera que as crianças interpretam de forma restrita símbolos, como os $=$ ou $+$, e os associam necessariamente a uma ação que deve ser realizada (como em aritmética). Desta forma a autora indica “Assim, torna-se necessário deixar bem claro para as crianças que ‘ $2 + 3$ ’ não representa apenas uma *instrução* somar 2 com 3, mas também o resultado da adição desses números” (p.29, grifos da autora).

A autora oferece outros exemplos de dificuldades dos estudantes também relacionados ao uso das letras e variáveis. Por exemplo, a letra m , que em aritmética

simboliza metros, em álgebra pode significar o número de metros. Essa mudança no uso pode gerar confusões nos estudantes. Além disso, há uma forte tendência a considerar qualquer letra como representante de um valor específico. Como consequência, para representar valores diferentes, usam letras diferentes. Desta forma, algumas das dificuldades dos estudantes estão intimamente relacionadas às suas experiências anteriores com aritmética, as quais ainda permanecem presos.

Por sua vez, os estudos de Kucheman⁵ (*apud* BONADIMAN, 2007) indicam seis caminhos dos estudantes para interpretação das letras: 1) como valor; 2) como objeto; 3) letra não utilizada; 4) como incógnita específica; 5) como número generalizado; 6) como variável, sendo que a maioria dos estudantes trata a letra como objeto ou não a utilizam, o que gera suas dificuldades. Assim, relaciona as dificuldades dos estudantes com o uso do sistema simbólico algébrico, com a álgebra em sua etapa formal.

Já Ursini *et al.* (2005) destacam, como dificuldades e erros mais comuns dos estudantes com conceitos algébricos, as dificuldades para diferenciar entre os distintos usos da variável (incógnita, número geral, relação funcional); dificuldades para interpretar a letra quando aparece acompanhada de um coeficiente ou expoente (por exemplo, $2m$ ou m^2); dificuldades para aceitar uma expressão aberta como resposta válida (consideramos que tal dificuldade está associada também às diferenças em relação ao movimento aritmético, para o qual são exigidas respostas numéricas particulares); tendência a ignorar a letra que representa um parâmetro ou atribuir-lhe um valor particular (exemplo em $5mx + 2 = 0$); dificuldade de reconhecer a relação entre duas variáveis. As autoras associam tais dificuldades ao fato de os estudantes não conseguirem recorrer de um modo flexível a um e outro uso da variável, referindo-se sempre à aplicação do conceito e não à sua formação.

⁵ KUCHEMAN, Dietmar E. Algebra. In: HART, K. M. (Ed.). John Murray. *Children's understanding of mathematics*: 11 – 16. London: John Murray, 1981, p. 102–119.

Pesquisas mais recentes como a de Bonadiman (2007), apresenta uma proposta didática e encontram vantagens em propostas como as de Ursini *et al.* (2005):

Sendo assim consideramos de suma importância iniciar o trabalho com os diferentes usos da letra antes das operações entre expressões algébricas. Desta forma o trabalho se estruturou em duas fases: a primeira enfocando os três diferentes usos da letra (como generalizações do modelo aritmético, como variáveis para expressar relações e funções e como incógnitas) e a segunda fase enfocando o uso da letra como símbolo abstrato, as operações entre expressões algébricas e suas propriedades. (URSINI *et al.*, 2005, p. 76, tradução nossa)

No entanto, constata ainda que os estudantes usam métodos informais para resolver as situações-problema propostas, e não recorrem ao conhecimento algébrico, constatando que este ainda não foi por eles efetivamente apropriado.

As pesquisas apresentadas, entre outras, contribuem no sentido em que apresentam algumas das dificuldades dos estudantes relacionadas ao entendimento de álgebra como cálculo com letras; ao uso do sistema simbólico-algébrico como proposto atualmente, sintetizando conceitos e formalizado; às diferenças existentes entre álgebra e aritmética, e procuram explicar a origem de tais dificuldades por meio das especificidades do conhecimento algébrico.

Como conceito importante da álgebra, o conceito de variável é muitas vezes destacado. Há a preocupação em que os estudantes *usem* as variáveis corretamente. Interpretamos que dessa maneira se entende que o conceito próprio de variável seria *formado* na medida em que este fosse *usado* nas situações propostas.

Entretanto, como se formam os conceitos em geral? E como se formam os conceitos algébricos? Como se pode formar conceitos nos estudantes? O ensino de qualquer disciplina contempla aspectos psicológicos, filosóficos e sociais. Neste trabalho, o interesse se voltou para alguns aspectos filosóficos e psicológicos da formação de conceitos em geral e, mais particularmente, de conceitos algébricos, com destaque para o conceito de variável.

Os experimentos de Krutietzki⁶ (*apud* DAVÝDOV, 1982) com escolares do VI e VII grau do sistema escolar russo, procuram identificar capacidades diferentes dos estudantes para assimilar a matemática elementar. Esses experimentos procuravam revelar as particularidades da generalização de métodos de resolução de problemas, inclusive os considerados atípicos e originais, e levaram-no a destacar quatro níveis de generalização

Nível 1: Estudantes que não conseguem generalizar por meio dos traços substanciais nem com ajuda nem com uma série de exercícios anteriores de treinamento.

Nível 2: Estudantes que conseguem generalizar mediante os traços substanciais com ajuda e com uma série de exercícios anteriores, mas cometem alguns erros.

Nível 3: Estudantes que conseguem generalizar de forma independente por meio dos traços substanciais, mas com uma série de exercícios anteriores.

Nível 4: Estudantes que conseguem generalizar independente e prontamente, sem necessidade de treinamento anterior.

Um dos resultados das pesquisas de Krutietzki (*apud* DAVÝDOV, 1982), que aqui nos interessa, é o fato de se encontrar a dificuldade comum dos estudantes em diferentes níveis de ensino ao empregar números abstratos para designar qualquer conjunto de objetos concretos ou empregar simbolismo literal para designar qualquer número concreto. consideramos que seria relevante identificar que condições influenciaram na apropriação do conhecimento algébrico por esses estudantes e os colocaram em tais ‘níveis’ de generalização.

A diferença de tal estudo em relação aos anteriores é que direciona a preocupação com os processos de generalização dos estudantes e não somente com as especificidades do conhecimento algébrico. Assim, é possível que encontremos alguns indícios da origem das dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico, não só relacionados às especificidades deste, mas também aos processos de generalização, abstração e formação de

⁶ KRUTIETZKI, V.A. Psijologuia matematicheskij sposobnostiei shkolnikov/ Psicología de las aptitudes matemáticas de los escolares. Moscú: “Proviéschenie”, 1968.

conceitos dos estudantes no movimento do pensamento. Nesse sentido, as investigações de Vigotski⁷ (2001; 2004) em relação ao uso de instrumentos psicológicos e sobre a construção do pensamento e da linguagem orientam este trabalho.

Em relação à linguagem, a pesquisa de Lins Lessa e Rocha Falcão (2005), por sua vez, pretende contestar a idéia teórica que coloca a linguagem como central no processo de conceituação na Matemática e contribuir para “a discussão acerca das potencialidades e limites da linguagem na construção do conhecimento matemático” (p. 317), nesse sentido, por meio de uma pesquisa empírica na qual atuam com dois grupos de estudantes, enfatizando a igualdade e usando recursos diferentes (um grupo com material concreto-balança; e outro com problemas verbais), aponta para “a possível construção do conhecimento matemático sem ser necessariamente em primeira instância, mediado pela linguagem” (p. 321) e conclui:

Então o que parece ser mais importante para iniciação à álgebra, ou seja, a instrumentalização conceitual dos alunos de forma a habilitá-los a adotar um procedimento algébrico na resolução de problemas/equações não é o suporte didático em si, mas tal suporte combinado a problemas de estrutura algébricas. (p. 319)

Ainda que se aceite tal conclusão e que se considerem outros instrumentos conceituais que permitam aos estudantes recorrer aos procedimentos algébricos, consideramos que a linguagem e o sistema simbólico algébrico precisam ser compreendidos não somente como recursos para resolver situações-problema, mas como instrumentos psicológicos (VIGOTSKI, 2001; 2004) e, como tais, capazes de influenciar o comportamento e o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Como nos explica o pesquisador:

A inclusão do instrumento no processo de comportamento provoca, em primeiro lugar, a atividade de toda uma série de funções novas, relacionadas com a utilização do mencionado instrumento e de seu manejo. Em segundo lugar, suprime e torna desnecessária toda uma série de processos naturais, cujo trabalho passa a ser efetuado pelo instrumento. Em terceiro lugar, modifica também o curso e as diferentes características (intensidade, duração, sequência etc.) de todos os processos psíquicos que fazem parte do ato instrumental, substituindo certas funções por outras. Ou seja, recria e reconstrói por completo toda a estrutura do comportamento,

⁷ Encontramos na literatura grafias diferentes para Vigotski (Vygotski, Vygotsky entre outras). Neste trabalho se faz a opção de usar a grafia Vigotski, exceto quando se estiver fazendo referências às obras ou citações de outros autores, nestes momentos será mantida a grafia original

do mesmo modo que o instrumento técnico recria totalmente o sistema de operações de trabalho. (VIGOTSKI, 2004, p. 96)

O autor destaca ainda uma grande diferença entre o instrumento psicológico e o técnico. Esse último provoca mudanças no próprio objeto enquanto o instrumento psicológico volta-se para a psique e o comportamento. “É por isso que no ato instrumental reflete-se a atividade relacionada a nós mesmos e não ao objeto” (p. 97). Assim, conforme Vigotski, é possível compreender o desenvolvimento das funções psíquicas superiores e da educação a partir do método instrumental.

O método instrumental estuda o processo de desenvolvimento natural e da educação como um processo único e considera que seu objetivo é descobrir como se reestruturam todas as funções naturais de uma determinada criança em um determinado nível de educação. O método instrumental procura oferecer uma interpretação acerca de como a criança realiza em seu processo educacional o que a humanidade realizou no transcurso da longa história do trabalho [...]. (p. 99)

O campo da álgebra, como o de outros conhecimentos matemáticos, foi elaborado historicamente pelos indivíduos para atender às necessidades postas pela experiência prática e de seu próprio desenvolvimento como ciência. A linguagem em geral e o sistema simbólico-algébrico são, para Vigotski (2004), instrumentos psicológicos que medeiam a relação do sujeito com a realidade objetiva, são criações artificiais destinadas ao controle dos processos psíquicos.

Considerando que “O método instrumental é aquele que investiga o comportamento e seu desenvolvimento por meio da descoberta dos instrumentos psicológicos que estão implicados e do estabelecimento da estrutura dos atos instrumentais” (p. 101), entendemos como validada a intenção desta pesquisa de identificar a origem das dificuldades dos estudantes por meio do estudo e da compreensão do processo de linguagem e apropriação do sistema simbólico algébrico, aliados aos processos de pensamento como função psicológica superior.

Dessa forma, a identificação de algumas dificuldades dos estudantes por meio da prática profissional e dos resultados de outras investigações, bem como os estudos teóricos,

permitiram reelaborar a questão inicial da pesquisa: *Que peculiaridades do movimento do pensamento e da linguagem, especificamente algébrica, auxiliam na compreensão da origem das dificuldades dos estudantes na formação de conceitos algébricos?*. Em decorrência desta questão foi estabelecido como objetivo principal a **investigação das manifestações e peculiaridades do pensamento e da linguagem algébrica por meio de situações-problema com estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental, com base nos conceitos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade**.

Entendemos que investigar e estudar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes é um processo bastante complexo e inclui: as características do conhecimento algébrico (como conhecimento científico); o próprio processo de formação do pensamento (realizado por meio dos processos de abstração, generalização e formação de conceitos, processos esses que caracterizam o pensamento, conforme Davídov⁸); as diferentes funções da linguagem; a apropriação do sistema simbólico algébrico; a atividade do professor e do estudante, suas necessidades e motivos; as intervenções do professor; os sentidos e significados atribuídos aos conceitos e símbolos algébricos etc.

Nesta pesquisa, o foco principal são os estudantes e seus processos psíquicos (pensamento e linguagem), mas não foram desconsideradas as especificidades do conhecimento algébrico, em especial a formação do conceito de variável (em sua forma teórica e não empírica) e as ações do professor no momento de escolha de propostas de ensino adequadas. Nos próximos dois capítulos deste trabalho, pretende-se descrever como foram compreendidas e estudadas as relações entre pensamento e linguagem na atividade humana em geral e também no processo do conhecimento algébrico, antes de voltar às questões do ensino e expor a pesquisa realizada com os estudantes.

⁸ A pesquisa teórica apresentou duas grafias diferentes para Davídov (ou Davýdov). A opção neste trabalho é a de manter a grafia original quando se recorre à citações ou se faz referência às obras e fazer o uso da grafia Davídov nos demais momentos do texto.

2. O pensamento e a linguagem: processos que são constituídos na atividade humana e constituem a atividade dos sujeitos_____

O que é o pensamento? O que é a linguagem? Como se constituem? De que forma se relacionam? Dada a complexidade de tais questões, o que se pretende com este capítulo é apresentar de que forma o pensamento e a linguagem estão sendo abordados neste trabalho, com base em alguns estudos teóricos.

2.1. Relações entre pensamento, linguagem e atividade

A partir de Kopnin (1978), sob o olhar filosófico, pode-se compreender o pensamento como atividade intelectual do homem, como relação teórica do sujeito com o objeto. Tal relação surge na prática⁹ e continua se desenvolvendo orientada pela prática, que é a base inicial do pensamento e determina o que é necessário ao homem no processo de conhecimento do objeto. Nas palavras de Kopnin (1978), “o pensamento nasce de necessidades práticas para satisfazer as necessidades da prática, é um processo dirigido a um fim” (p. 170).

Leontiev (1983), autor cuja obra se baseia na dialética marxista, reforça que, para o marxismo, o pensamento humano é entendido como:

[...] produto do desenvolvimento sociohistórico, como uma forma teórica peculiar da atividade humana que não é mais que um derivado da atividade prática; incluindo naquele nível de desenvolvimento que o pensamento adquire uma independência relativa, a prática continua sendo a base e o critério de sua autenticidade. (p. 29, tradução nossa)

O pensamento é guiado por leis que existem na realidade objetiva. Conforme Kopnin (1978), o movimento do pensamento considerado como o lógico é reflexo do

⁹ Para Kopnin (1978), “a prática é a unidade do sujeito com o objeto, é ativa por forma porém concreta-sensorial por conteúdo e resultados” (p. 168-169).

histórico (movimento dos fenômenos da realidade objetiva). A unidade entre o lógico e o histórico é premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento.

[...] o conhecimento das leis do movimento dos próprios objetos da realidade é ponto de partida na interpretação das leis do movimento do pensamento, enquanto que as leis do movimento do pensamento são o reflexo das leis do movimento das próprias coisas (KOPNIN, 1978, p.128).

O mundo objetivo é o objeto do homem. Voltado para esse objeto, o pensamento do homem como sujeito se desenvolve. O homem interpreta as leis que existem na realidade objetiva, transformando-as em formas de pensamento representáveis na consciência.

No pensamento, resulta não o próprio objeto, mas sua imagem ideal. Dessa forma, o pensamento não modifica o objeto em termos práticos, mas o reflete (o ideal é um reflexo da realidade) e conhece suas leis, tendo condições para transformar a primeira imagem do objeto em um outro objeto também idealizado. Tal transformação pode ocorrer no plano das representações sensoriais e no plano da atividade verbal-discursiva (DAVÝDOV, 1982), sendo que o meio de expressão simbólica e de sinais de tais imagens ideais adquire muita importância.

Conforme Leontiev (1983), o verdadeiro pensamento, entendido como atividade, constitui-se a partir de ações subordinadas a objetivos cognitivos conscientes, ainda que na forma de processos externos. “Seus resultados cognitivos, generalizados e fixados através da linguagem, se diferenciam em princípio dos resultados do reflexo sensível direto que se generalizam nas correspondentes formações sensitivas” (LEONTIEV, 1983, p. 31, tradução nossa).

Para Leontiev (1975), “[...] é precisamente o uso da linguagem que determina o pensamento teórico do homem” (p. 36), mas a força do pensamento está em captar, nas coisas, nos objetos e nos fenômenos, os movimentos que não podem ser representados. Para o autor,

“a língua abarca em seus significados – conceitos – um conteúdo objetual ou outro, mas o conteúdo está nela completamente liberado de substancialidade” (LEONTIEV, 1983, p. 106).

Assim, compreende-se que o pensamento e a linguagem que permite a elaboração do conhecimento não pode estar desvinculado da atividade humana que a ele dá sentido. Enquanto funções do cérebro humano surgem de ações iniciadas na prática. As ações práticas e ideais que a partir daí se desenvolvem são guiadas pelos objetivos. Tais ações são elementos da atividade que, mediada pelo reflexo psíquico, desenvolve-se na relação do sujeito com o objeto. Para Kopnin (1978, p.123)

[...] o reflexo enquanto atividade orientada a um fim compreende a apreensão do objeto não só como ele existe em dado período mas em todas as suas potencialidades, em todas as possíveis formas de mudança por meio da atividade prática do homem

O pensamento e a linguagem se constituem nas ações práticas da atividade humana e, dessa forma, constituem a atividade dos sujeitos. Podemos observar esse processo dialético também no esquema para o ciclo do conhecimento proposto por Prado Jr. (1963), no qual o termo atividade se entende como ação e se relaciona com o pensamento, como se pode observar da sua afirmação:

O pensamento dirige a ação e é por ela condicionado; e é nesse condicionamento que vamos encontrar o conhecimento: é do pensamento gerado na interação do homem com o Universo realizada pela ação, que brota e se constitui o conhecimento. (p. 50)

ESQUEMA DO CICLO DE CONHECIMENTO

Também para Davídov (1982), “o pensamento de um homem é o movimento de formas de atividade da sociedade historicamente constituídas e apropriadas por aquele” (p. 279, tradução nossa). Resulta da atividade do homem social, derivada do trabalho. Por meio das ações dentro da atividade, o homem transforma a realidade (experiências culturais) e a si mesmo, apropriando-se de novos saberes.

Essa possibilidade de o homem agir sobre a natureza e transformá-la em produções culturais e também transformar a si mesmo a partir da aquisição de novos saberes e capacidades, conforme Pino (2001) caracteriza a atividade produtiva do homem. Enquanto que na atividade cognitiva “[...] o objeto de conhecimento, fonte de saber do sujeito é, ao mesmo tempo, produto desse mesmo saber” (p. 39).

Para o autor, a atividade produtiva e cognitiva são diferentes, mas estão intimamente relacionadas. No plano filogenético. “[...] a *atividade cognitiva* é ao mesmo tempo causa e efeito da *atividade produtiva*” (PINO, 2001, p. 40). No plano ontogenético,

[...] a atividade cognitiva pressupõe a atividade produtiva, uma vez que conhecer implica a conversão [termo usado por Vigotski] dos saberes historicamente produzidos pelo homem em saberes do indivíduo.

Por meio de um processo de interiorização (VIGOTSKI, 2001), estabelece-se a transformação da atividade coletiva (experiência social) em uma atividade individual (experiência do sujeito), transformação possível por meio da comunicação entre as pessoas. Tal comunicação é sempre mediada. Os sujeitos não têm acesso imediato ao objeto de conhecimento, mas a sistemas simbólicos que representam a realidade. A linguagem é o principal sistema simbólico dos seres humanos, cumpre uma função mediadora, seus símbolos e signos mediam a comunicação entre as pessoas. Na linguagem, fixam-se os resultados do pensamento.

Também os estudos de Leontiev (1983) indicam que a atividade psíquica interna depende em grande medida da atividade objetiva externa, e que a atividade interna e a externa

possuem a mesma estrutura. A atividade que inicialmente está dirigida ao objeto real, posteriormente é dirigida por sua imagem ideal¹⁰.

É a atividade objetual externa real que permite que uma imagem seja gerada, transformando a realidade objetual em imagem ideal. Trata-se do trânsito entre a atividade externa e a interna, que só é possível por meio do processo de interiorização¹¹ e considerando que tanto a atividade externa quanto a interna possuem a mesma estrutura geral.

O termo atividade gera muitas interpretações, por vezes é entendida como algo abstrato, não como atividade sensitiva real do homem. Para Leontiev (1983), a atividade que se percebe e também a interna determinam o desenvolvimento do psiquismo, desenvolvimento esse que depende das condições objetivas da vida

Para o autor, a atividade é a unidade de análise do desenvolvimento do psiquismo. Este considera que existem atividades principais e dominantes nos diferentes estágios do desenvolvimento humano como, por exemplo, jogo, estudo e trabalho. As mudanças nessas atividades, que são consideradas principais em cada estágio, é que caracterizam as mudanças no desenvolvimento.

Alguns atributos caracterizam a atividade principal: a partir dela, surgem outras formas de atividade (por exemplo, para a criança a atividade principal é o jogo, mas a criança aprende por meio de seus jogos e brincadeiras), a atividade principal permite que se formem ou reorganizem os processos psíquicos; e as principais mudanças psicológicas da personalidade dependem da atividade principal.

Assim, a atividade principal orienta o desenvolvimento nos processos psíquicos e as mudanças da personalidade do sujeito. As mudanças nas atividades principais que

¹⁰ Para Kopnin (1978), é o pensamento que cria uma imagem do objeto material, que cria uma imagem ideal da realidade por meio de abstrações.

¹¹ “[...] se denomina interiorização ao trânsito por cujo intermédio os processos externos por sua forma, com objeto substanciais externos, se transformam em processo que transcorrem no plano mental, no plano da consciência; ademais, se submetem a uma transformação específica: se generalizam, verbalizam, reduzem e, o mais importante, são susceptíveis de um desenvolvimento posterior que sobrepuja os limites de possibilidade da atividade externa.” (LEONTIEV, 1983, p. 77)

caracterizam as modificações no desenvolvimento psíquico, “[...] correspondem a uma necessidade interior que está surgindo” (LEONTIEV, 1994, p. 67). Dessa forma, a atividade pode ser entendida como um processo psicológico que satisfaz uma necessidade do homem na sua relação com o mundo. A atividade de um sujeito é desencadeada por um motivo que é sempre direcionado a um objeto. Nem por isso a relação entre motivo e objeto é imediata e, por isso, formam-se outras estruturas de atividade mais complexas.

Para conceituar determinado processo como atividade, é imprescindível que se entendam as necessidades e os motivos do sujeito. Por exemplo, não se pode dizer que LER é uma atividade, até que se entenda quem lê, por que lê e para que lê. A leitura pode ser uma atividade para o sujeito que busca compreender algo e encontra no conteúdo do livro o estímulo para tal. No entanto, a leitura não é uma atividade para quem lê por que essa é a condição colocada para sair para brincar. Seu motivo não se encontra na leitura, mas sim na brincadeira. Ler, nesse caso, é uma ação, não uma atividade

Leontiev (1994) distingue assim ação de atividade. O objetivo da ação não coincide com o motivo que desencadeia a atividade. Entretanto, a ação é um dos elementos da atividade e, para que seja executada, deve estar relacionada ao motivo da atividade do sujeito, caso contrário este não teria razões para agir. Uma determinada ação pode passar a ser atividade caso o objetivo que a dirige transforme-se em objeto e motivo da atividade. Da mesma forma, a atividade, que perde seu motivo, pode se tornar uma ação.

De forma mais específica, Leontiev (1983) atribui ao conceito de Atividade determinada estrutura composta pelos elementos Necessidades, Motivos, Objetivos, Condições, Ações e Operações (Quadro 1). A necessidade gera os motivos que por sua vez desencadeiam a atividade. Esta pode ser concretizada por meio de diferentes objetivos, gerando assim diferentes ações. Assim, uma determinada ação pode ser componente de diferentes atividades.

QUADRO 1: Estrutura Geral da Atividade a partir de Leontiev (1983).

As operações são resultados de transformação de ações que se automatizam. Leontiev (1983) nos oferece o exemplo de ações e operações que se realizam para guiar um automóvel. Cada operação (por exemplo, a troca de marcha) se forma como uma ação subordinada a um objetivo consciente. Quando o indivíduo aprende a dirigir, sua atenção se volta ao momento da troca de marcha, pois esse é seu objetivo: aprender a fazer essa troca. Depois essa ação se incorpora a outras mais complexas (por exemplo, subir uma ladeira) e se transforma em uma operação, cujo objetivo não mais se manifesta. Podemos assim dizer que ações que perdem seu objetivo e são executadas automaticamente tornam-se operações (habilidade, hábito). Para que uma ação se torne uma operação, é necessário que se considere um novo objetivo. O que era o objetivo anterior torna-se então condição necessária para atingir o novo objetivo. As operações¹² que se formam, desse modo, são conscientemente controladas, no dizer de Leontiev (1983).

Aproximando-nos da área da Educação Matemática e na tentativa de exemplificar, pode-se imaginar um estudante que procurando resolver um problema proposto esteja em atividade, de forma que o motivo que o encaminha a resolver o problema se encontre no próprio problema. Suponha-se que, para resolver o problema, o estudante precise resolver

¹² Nem todas as operações são conscientes. Algumas surgem de adaptações práticas ou imitações e não podem ser controladas conscientemente, pois não resultam de uma ação consciente dirigida a determinado objetivo (LEONTIEV,1983).

uma equação. Se ele sabe resolver equações, recorre a esse cálculo como uma operação que atende às condições de sua atividade. Caso não saiba, o processo de aprender a resolver equações pode se tornar uma ação. O estudante teria assim o objetivo de sua ação (aprender a resolver equações) para voltar ao seu motivo (resolver o problema). No entanto, podemos também supor que o estudante se veja tão envolvido em resolver a equação que se esqueça do problema. Resolver a equação passa a ser seu motivo. Sua ação passou a ser atividade. Dessa forma simplificada, entendem-se as transformações entre os elementos da atividade e se percebe a importância da geração de novos motivos desencadeando outras atividades.

Pode-se perceber que a estrutura proposta por Leontiev é geral e dela derivam outros estudos e pesquisas. Considerando que as atividades se diferenciam por seus objetos, podem ser feitas referências às atividades de ensino, estudo, pesquisa, aprendizagem. Analisar as necessidades que geram tais tipos de atividades implica na análise psicológica dos motivos. Os estudos de Moraes (2008) indicam os elementos que compõe a atividade de ensino e de aprendizagem, dos quais destacamos o motivo e o objeto. O motivo da Atividade de Ensino, cujo sujeito é o professor, é o da organização do ensino, sendo seu objeto a “transformação dos conhecimentos teóricos de modo que o sujeito envolvido no processo de ensino e aprendizagem possa apropriar-se dele” (MORAES, 2008, p. 99). No caso da atividade de aprendizagem, cujo sujeito é o estudante, o motivo é a própria apropriação de conhecimentos teóricos, sendo o objeto “a transformação do sujeito no movimento de apropriação dos conhecimentos teóricos – Aprendizagem” (MORAES, 2008, p. 106).

Consideramos que esses são os motivos eficazes que dirigem nesses casos a atividade de ensino e aprendizagem. Entretanto, conforme Leontiev (1994), o motivo para o qual se dirige uma atividade pode ser de dois tipos: motivos apenas compreensíveis e motivos eficazes. Um motivo compreensível induz à atividade, mas não é mais importante do que o resultado de uma das ações que se executa dentro do processo. Um motivo eficaz dirige a

atividade, e todos os objetivos e ações se voltam para o objeto da atividade. Um exemplo de Leontiev (1994) ajuda a esclarecer essas idéias: uma criança que faz seus deveres para sair para brincar tem um motivo apenas compreensível para estudar, seu motivo eficaz é o de brincar. No entanto, outra que faz seus deveres para melhorar seu desempenho tem seus objetivos voltados para o objeto da atividade de estudo e, portanto, orienta-se por um motivo eficaz.

Um motivo compreensível pode se tornar eficaz e quando isso acontece surgem novos tipos de atividade. Conforme Leontiev (1994), “é uma questão de o resultado da ação ser mais significativo, em certas condições, que o motivo que realmente a induziu” (p. 70).

Rubinstein (1965) também apresenta o que entende por atividade,

Toda atividade é, ao mesmo tempo um processo ou inclui processos em si, mas nem todo processo aparece como atividade do homem. Daqui em diante, entenderemos como atividade o processo por meio do qual se faz efetiva uma determinada atitude do homem em relação ao meio, em relação aos demais indivíduos e aos problemas que a vida apresenta. (p.347, tradução nossa)

Em relação ao pensamento, caracteriza-o como atividade quando se consideram os motivos do homem, mas o considera como um processo psíquico quando se estudam os processos por meio dos quais se resolvem as tarefas mentais. Enquanto processo psíquico, destaca os processos de análise, síntese, abstração e generalização. Nesse sentido, aproxima-se mais do que é o pensamento para Vigotski (2001): uma função psicológica superior.

Vygotski (2000) denomina funções primitivas às estruturas psicológicas determinadas pelas peculiaridades biológicas, e que se caracterizam pela reação direta a uma situação externa, enquanto que as funções superiores nascem de um processo de desenvolvimento cultural e caracterizam-se pela relação mediada entre uma situação externa e a reação a ela.

Entre o estímulo que dirige a conduta e a reação do sujeito aparece um novo membro intermediário e toda a operação se constitui em um ato mediado. Em relação a isso, a análise promove um novo ponto de vista sobre as relações existentes entre o ato do comportamento e os fenômenos externos. (VYGOTSKI, 2000, p. 122-123, tradução nossa)

Para Galperin (1976), as funções psicológicas superiores constituem diferentes formas de atividade orientadora do sujeito, e esta por sua vez caracteriza a função vital da atividade psíquica. Para o autor:

A atividade orientadora é diferenciada como um processo independente, que oferece ao sujeito as possibilidades que o orientam na consecução de resultados diferentes de acordo com um plano determinado. (GALPERIN, p.33, tradução nossa)

São componentes da atividade orientadora: a motivação, as representações (incluindo os conceitos); as ações no plano da imagem (ações ideais) e os diferentes instrumentos dos quais dependem as ações ideais. A atividade orientadora inclui necessariamente os reflexos psíquicos do mundo objetivo, as condições em que se realiza a atividade no meio externo e a necessidade de orientar tal atividade em situações novas.

A atividade orientadora consiste em que o sujeito realiza um exame da situação nova, confirma ou não o significado racional ou funcional dos objetos, prova e modifica a ação, traça um novo caminho e mais adiante, durante um processo de realização, leva a cabo um controle da ação de acordo a modificações previamente estabelecidas. (GALPERIN, 1976, p. 81)

A atividade orientadora que desta forma elege um caminho, determina um conteúdo para a ação, oferece aos sujeitos possibilidades que o orientam na realização de acordo com um plano determinado, é importante no processo de aprendizagem, na formação de novas ações, imagens e conceitos, na medida em que garante também adaptações conforme as condições dadas no momento das situações.

Constituídos a partir da atividade humana, o pensamento e a linguagem, como funções psicológicas superiores, oferecem condições de desenvolvimento aos sujeitos. Dessa forma, encontramos as relações do pensamento e da linguagem com a atividade.

Neste trabalho, também nos interessam as relações entre o pensamento a linguagem e como o desenvolvimento de uma dessas funções influencia no desenvolvimento da outra. Para tanto, procuraremos acompanhar seu movimento.

2.2. Movimentos do pensamento e da linguagem

No livro *Linguagem e razão humana*, Leontiev (1975) se refere às diferentes funções da linguagem. A linguagem é instrumento do pensar na medida em que é o material básico do homem para planejar sua atividade. Ao mesmo tempo, é elemento regulador, considerando que o homem, ao planejar sua atividade, organiza seu comportamento. É também instrumento do conhecimento, pois se fixam na linguagem resultados do conhecimento. Não se trata de somente associar o conceito (conjunto de conhecimentos ou fenômeno) a uma palavra nem, tampouco, imaginar que na palavra estão reproduzidas todas as características de um conceito, mas sim que a linguagem permite a apropriação de tais conceitos e também a obtenção de novos conhecimentos a partir daqueles que possuímos. Sendo instrumento do conhecimento, é também outra função da linguagem servir como meio de apropriação da experiência histórico-social.

Ressalta-se aqui uma importante função da linguagem para o pensamento. Conforme a lógica dialética, a linguagem não é compreendida somente como meio de existência e funcionamento do conhecimento, ela penetra no processo de pensamento, procura estudar as formas de conhecimento da realidade objetiva pelo pensamento. “Ora, a linguagem é uma forma de ser do conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 79). É possível reconhecer a importância da linguagem na medida em que a imagem ideal de um objeto se modifica, quando o homem a objetiviza por meio de palavras, gestos, desenhos etc.

O pensamento não é expresso pela linguagem em sua forma pura. O pensamento se reflete na linguagem. Conforme Kopnin (1978), “[...] não há outro pensamento real de existência real para o homem” (p. 85). É no processo de comunicação que a imagem ideal do objeto como abstração existe. “Não podemos imaginar o conhecimento do homem sem a linguagem, pois a linguagem consubstancia nas palavras o resultado do pensamento” (p. 150).

Expressar a forma objetual externa da atividade permite a realização de alguns processos no plano lingüístico e adquire, dessa forma, além da função comunicativa, a função cognitiva. Seus processos adquirem cada vez mais características de processos internos que se realizam ‘mentalmente’. As ações adquirem independência relativa, e a capacidade de separar-se da atividade prática converte-se de ação externa em ação interna.

Prado Jr. (1963) nos alerta para a confusão que se estabelece entre pensamento e linguagem:

[...] uma análise mais atenta mostra que nunca é sob forma de linguagem que o pensamento se manifesta originariamente, e que ele se encontra permanentemente como que em busca de expressão verbal adequada e capaz de exprimi-lo convenientemente. (p. 131)

A linguagem é, em geral, considerada como expressão do pensamento e seu meio de comunicação, e esta é uma de suas funções: representam uma parte da realidade. Linguagem é também uma forma de pensamento independente de sua expressão exterior e uma maneira de ser desse pensamento.

É também Prado Jr. (1963) que indica a diferença entre o pensamento discursivo e o conceitual. Para esse autor, a função de precisar e fixar o pensamento é característica da linguagem ou do pensamento discursivo, enquanto que aquilo que no pensamento não é linguagem, o autor caracteriza como pensamento conceitual.

A transformação do pensamento conceitual em pensamento discursivo se observa particularmente bem nos casos tão freqüentes em que procuramos uma expressão conveniente para nosso pensamento, e passamos em revista as formas verbais capazes de preencherem adequadamente tal finalidade. (PRADO JR. 1963,p. 135)

Para o autor, essa transformação do pensamento conceitual para o discursivo caracteriza o momento de elaboração e comunicação do pensamento. O caminho inverso do pensamento discursivo ao conceitual é o momento de aquisição do conhecimento. Essa transformação ocorre quando se percebem expressões verbais, orais ou escritas e o pensamento começa a operar a partir de tal percepção.

É assim pela linguagem (que é o principal meio de comunicação social que possuímos) que nos chega a maior parte daquilo de que se alimenta e que constitui o nosso pensamento: a conceituação. Pode-se dizer que antes do pensamento procurar a linguagem, é a linguagem que procura o pensamento. (PRADO JR, 1963, p. 135-136)

A linguagem representa, para Prado Jr. (1963), uma forma do pensamento, ao qual ele denomina pensamento discursivo. Deixa claro também que no momento da transformação do pensamento discursivo ao conceitual, a estrutura da linguagem pode refletir a natureza relacional da conceituação, mas não a exprime de forma adequada. Nesse sentido, a evolução da linguagem se dá na tentativa de torná-la mais capaz de exprimir o relacionamento conceitual. Paradoxalmente enquanto busca expressar o movimento do pensamento, a linguagem suprime sua fluidez.

[...] a conceituação, ao formalizar-se em linguagem, ganha em fixidez e precisão; deixa de sofrer as flutuações características e da natureza dinâmica e fluida da conceituação, para circunscrever o pensamento e a atenção a uma área ou momento determinado de seu movimento. (p. 146)

Prado Jr. (1963) também considera, nesse momento, alguns movimentos que caracterizam as operações do pensamento, destacando **o raciocínio** – “A sistemática da conceituação é assim o raciocínio ou ordem seguindo a qual se apresenta a conceituação” (p. 109), entendendo que ele não pode ser fixo e absoluto nem expresso pelas leis invariáveis da Lógica Metafísica; **a elaboração** – entendida aqui como o ramo ascendente da conceituação, é o relacionamento de onde resulta a conceituação, e também não pode ser predeterminada, pois está sujeita às circunstâncias exteriores às conceituações, aos relacionamentos realizados e aos dados a serem relacionados; **e a explicitação** – esta pode ser reduzida a normas formais e adequadas, pois representa o movimento inverso das elaborações, e somente pode formalizar-se quando a conceituação já está elaborada, estruturada.

E é por isso que enquanto a explicitação pode ser reduzida a normas formais adequadas e subordinadas ao tipo da conceituação considerada e sistema de relacionamento particular nela empregado, isso não é possível na elaboração propriamente, onde tal sistema e tipo só se caracterizam no curso dela própria e não anteriormente (PRADO JR, 1963, p.110).

Para Kopnin (1978), conceitos, juízos e deduções são formas de pensamento, são “[...] o modo de representação da realidade por meio das abstrações” (p. 187). Tais formas estão indissoluvelmente ligadas e se transformam uma na outra no desenvolvimento do conhecimento. No juízo, refletem-se quaisquer aspectos do objeto do conhecimento, e nele se fixam certos resultados e se expressa a relação entre o singular e o universal. No conceito, refletem-se somente os aspectos essenciais e sintetizam o conhecimento antecedente reunindo inúmeros juízos, mas fixando a atenção no universal, sendo o resultado do processo de conhecimento. O juízo se converte em conceito quando há o reflexo do universal no objeto.

As deduções a partir dos conceitos são diferentes das deduções a partir dos juízos. Por outro lado, as deduções também expressam o movimento entre conceitos e juízos. Conforme Kopnin (1978), “O essencial no fenômeno não pode ser definido sem um sistema integral de deduções” (p. 191).

As funções da linguagem de comunicação, elemento regulador e instrumento do pensamento, são destacadas também por Luria (1987), pesquisador que aprofunda as propostas de Vigotski sob a forma de uma teoria neuropsicológica.

O pensamento e a linguagem, como funções psicológicas superiores que resultam da comunicação entre as pessoas e graças à interiorização (do intersíquico ao intrapsíquico) dessas formas, constituem para Vigotski (2001), precursor da teoria histórico-cultural da psicologia, a chave para a compreensão da consciência. Conforme as pesquisas que descreve, as origens do pensamento e da linguagem são diferentes, mas suas trajetórias de desenvolvimento se interceptam na criança a partir de dois anos de idade. Nesse momento, o pensamento pode ser verbalizado e a linguagem começa a ser compreendida. Também considera que mesmo no adulto pode haver pensamento sem linguagem e linguagem sem pensamento, mas isso não significa que pensamento e linguagem possam ser tratados como funções particulares e analisados isoladamente, sem suas relações e sua organização na

estrutura integral da consciência. Tal análise isolada não permite que se capte a diversidade e especificidade das relações internas, ignorando o momento de unidade e integridade do processo em estudo. Para Vigotski (2001), seria então necessário outro tipo de análise.

Esta pode ser qualificada como análise que decompõe em unidades a totalidade complexa. Subentendemos por unidade um produto da análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade. (p. 8)

Tornou-se o problema, então, identificar tal unidade que manteria o pensamento verbalizado como totalidade. Tal unidade do pensamento verbalizado é, para Vigotski (2001), o **significado da palavra**, que é fenômeno da linguagem, é fenômeno do pensamento, é uma generalização. Sem esse significado, a palavra é um som vazio. Toda generalização é um ato verbal do pensamento que reflete a realidade para além das sensações e percepções imediatas. A palavra por sua natureza psicológica é a generalização do modo de representação da realidade na consciência, é o reflexo da realidade generalizada. Para investigar a questão a respeito do pensamento e da linguagem, Vigotski recorre ao estudo da evolução, do funcionamento e da estrutura do significado da palavra (unidade de pensamento e linguagem).

Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Conseqüentemente estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento. (VIGOTSKI, 2001, p.398)

Além disso, Vigotski apresenta provas experimentais da evolução do significado da palavra. Tal evolução ocorre no movimento do pensamento para a palavra e da palavra para o pensamento, elevando-se a níveis mais abstratos. Não é exatamente a palavra, em seu aspecto físico e sonoro exterior que se modifica, mas a generalização e o conceito a ela atribuído, ou seja, seu aspecto semântico interior.

É também o significado da palavra, unidade de análise do pensamento verbalizado, que permite a comunicação, sem a qual só são permitidos meios primitivos de comunicação. Nos significados (apresentados por meio da linguagem), representam-se a

forma ideal de existir do mundo objeto, suas propriedades e relações com a visão de uma prática social conjunta. A comunicação só é viável se estiverem compreendidos os significados das palavras. As crianças usam as palavras na comunicação com os adultos, mas o significado das palavras para a criança e para o adulto difere sobremaneira.

Cabe ressaltar a diferença entre os termos significado e sentido, muitas vezes usados indiscriminadamente. Ao dominar a experiência social, o homem assimila o significado da palavra. A expressão sentido pessoal é usada por Leontiev (1983) para identificar o significado para o sujeito, considerando o que atende às suas necessidades e alcança seus objetivos. Nem sempre sentido pessoal coincide com significado, e a transformação do que possui sentido pessoal para o mundo das significações não ocorre de forma simples e direta, mas sim mediante um processo psicológico íntimo e profundo, que transcorre em nível social. O sentido pode ser expresso por meio de significados, mas um significado não pode ser expresso por apenas um sentido. O sentido é pessoal, o significado por sua vez é da experiência humana coletiva e deve ser apropriado pelo indivíduo.

A questão do sentido está atrelada à questão do motivo.

E assim, aquilo que eu realmente conscientizo, a forma que conscientizo e o sentido que tenha para mim o conscientizado é determinado pelo motivo da atividade dentro da qual está incorporada minha ação em questão. 'Por isso, a questão acerca do sentido é sempre uma questão acerca do motivo'. (LEONTIEV, 1983, p. 230, tradução nossa)

O sentido pessoal permite ao indivíduo a conscientização e expressa a relação do motivo com o objetivo, como indica Leontiev (1983). O sentido revelado permite a conscientização real de conhecimentos e atitudes correspondentes. Conforme esse autor, "o sentido não se ensina, o sentido se educa" (p. 234, tradução nossa).

Também a compreensão sobre como ocorre a formação de conceitos é importante contribuição da psicologia histórico-cultural, e nela se reflete a compreensão da relação entre pensamento e linguagem. Nessa abordagem, a palavra não é reflexo direto e imediato do

pensamento, não é a definidora ou rotuladora do conceito. Este surge para a solução de algum problema no processo de uma atividade voltada para um fim. O pensamento por conceitos do adulto e o pensamento da criança são diferentes, diferem estrutural e funcionalmente.

Algumas conclusões das investigações de Vigotski (2001) indicam que é na infância que se inicia o processo de formação de conceitos, mas a base desse processo psicológico, a consolidação das funções intelectuais, só ocorre na juventude. Antes disso, existem formações que se assemelham aos verdadeiros conceitos.

Conforme Vigotski (2001), podem ser considerados três estágios básicos no processo de desenvolvimento dos conceitos na criança. O primeiro é o das imagens sincréticas. Nesse estágio, predominam os nexos subjetivos que podem ser estabelecidos não só entre os objetos, mas também entre as impressões das crianças, sendo que o significado da palavra apenas lembra o dado pelo adulto.

O segundo estágio é o dos complexos. Neste, os nexos já são objetivos: “O pensamento por complexo já constitui um pensamento coerente e objetivo” (VIGOTSKI, 2001, p. 179). É predominante dentro do pensamento por complexos, o pseudoconceito, no qual o significado da palavra não se desenvolve livremente, mas conforme o sentido já designado no discurso dos adultos. Assim, pseudoconceito e conceito coincidem no produto, mas não nas operações intelectuais. Ainda que o significado já esteja próximo do conceito propriamente dito, o modo de pensar ainda não está. “É isso que denominamos pseudoconceito. Obtém-se algo que, pela aparência, praticamente coincide com os significados das palavras para os adultos, mas no seu interior difere profundamente delas” (VIGOTSKI, 2001, p. 193).

O terceiro estágio é o da formação de conceitos propriamente ditos. O conceito se forma na ação conjunta das funções psíquicas superiores no processo de solução de um problema e

[...] pressupõe não só a combinação e a generalização de determinados elementos concretos da experiência, mas também a discriminação, a abstração e o isolamento de determinados elementos e, ainda, a habilidade de examinar esses elementos discriminados e abstraídos fora do vínculo concreto e factual em que são dados na experiência. (VIGOTSKI, 2001, p. 220)

Conforme Vigotski (2001), é só na adolescência que o sujeito tem condições de chegar a esse terceiro estágio de desenvolvimento. Isso não significa que, a partir desse momento e como adultos, os sujeitos sempre pensarão por conceitos, nem que estes conceitos sejam, sempre por sua natureza, conceitos científicos.

A formação de conceitos científicos é diferente da formação de conceitos espontâneos, ainda que de alguma forma tais conceitos estejam relacionados. É necessário um determinado nível de consolidação dos conceitos espontâneos para que se desenvolvam os conceitos científicos. Estes, por sua vez, **influenciam** os conceitos espontâneos anteriormente constituídos.

É o processo de formação de conceitos aliado aos processos de generalização e abstração que, conforme Davýdov (1982) caracterizam o pensamento. Em relação aos processos de generalização, ele destaca a distinção entre o processo de generalização empírica e teórica. O resultado do processo de generalização empírica, sobre o qual se apóia a lógica formal, pressupõe que o sujeito abstraia certas particularidades do objeto. A abstração dessas particularidades reunidas forma o significado da palavra, o conceito. “O conjunto de características generalizadas do objeto forma o conteúdo do conceito” (DAVÝDOV, 1982, p. 19, tradução nossa). O conceito formado dessa forma é o conceito empírico. Entretanto, uma observação se insere aqui: nem sempre tais traços gerais e generalizados constituem a essência do objeto. “É notório que a essência não coincide por seu conteúdo com os fenômenos e propriedades dos objetos, dados diretamente” (DAVÝDOV, 1982, p. 93, tradução nossa).

Além disso, “o conceito de um objeto ou propriedade é sempre ABSTRATO, INCONCRETO. Todo conceito usa abstração, independente do que represente” (p. 54), sendo que a palavra é um substituto dos conceitos, só operamos com conceitos expressos no discurso.

O pensamento empírico pode ser considerado como forma primeira de conhecimento racional, e a **generalização empírica** é um processo no qual, por meio da comparação, o indivíduo separa de um grupo de objetos algumas propriedades que se repetem, pois tal identificação do que é comum é sempre algo **abstrato**. O conceito se forma por meio da verbalização de tal característica comum aos objetos. Conforme Dávidov (1988):

[...] na generalização conceitual empírica, não se separam justamente as particularidades essenciais do objeto, a conexão interna de seus aspectos. Dita generalização não assegura, no conhecimento, a separação dos fenômenos e a essência. As propriedades externas dos objetos, sua aparência, se tomam aqui pela essência. (p.105, tradução nossa)

No pensamento teórico, busca-se esse objeto em movimento. Formar um conceito significa reproduzir mentalmente seu conteúdo, bem como compreender sua essência. “O conteúdo do pensamento teórico é a existência mediada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução nela das formas universais das coisas.” (p. 125). E mais, é tarefa do pensamento teórico: “[...] elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceitos e com eles reproduzir o sistema de conexões que geram o conceito dado, por descoberto, a sua essência” (DAVÍDOV, 1988,p. 142).

Assim, o conceito que se forma com base na generalização teórica, processo característico do pensamento teórico e científico, serve como procedimento para “[...] efetuar o trânsito da essência ao fenômeno” (DAVÍDOV, 1982, p. 356, tradução nossa), do abstrato ao concreto. É por meio de um processo de análise que se constituem as abstrações substanciais que refletem as contradições internas de um sistema de forma desmembrada. No

processo de síntese de tais abstrações, constitui-se o concreto que só existe por meio das conexões internas dentro de um sistema de coisas singulares.

Assim, faz sentido, considerando o abstrato e o concreto como categorias da dialética materialista (KOPNIN, 1978) falar em ascensão no pensamento teórico do abstrato ao concreto. Já “o método metafísico contrapõe o pensamento enquanto abstrato à experiência sensorial enquanto concreta” (p. 154), assim, considera que o movimento do conhecimento é do concreto ao abstrato, sendo este entendido como o isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível do objeto.

O pensamento teórico se efetiva sobre a abstração substancial (que contém a essência dos objetos), pela revelação de contradições nessa abstração. A generalização substancial, característica do pensamento teórico, permite que se descubra a inter-relação entre fenômenos, analisa a essência de objetos e fenômenos, bem como suas leis. O conceito teórico se forma baseado em abstrações e generalizações substanciais. “Ter um conceito sobre tal objeto, significa dominar o procedimento geral de construção mental deste objeto” (DAVÍDOV, 1988, p. 153, tradução nossa).

Considerando a distinção elaborada por Davídov, pode-se dizer a respeito desses dois tipos de conhecimento que:

- ◆ O conhecimento empírico baseia-se no objeto e suas representações, estabelece o processo de generalização formal das propriedades dos objetos, baseado na observação, na percepção. Busca uma propriedade formal comum a um grupo ou classe de objetos que revele as propriedades específicas individuais. Permite a sistematização e classificação de objetos. Seu produto, o ‘conceito’ empírico do objeto, é apresentado por meio de um termo, de uma palavra que descreve o objeto.
- ◆ O conhecimento teórico, por sua vez, busca a relação entre as coisas, os objetos no interior de um sistema. Também se baseia na percepção dos objetos, mas busca neles, mais do que é externo, visível, busca as relações entre suas propriedades. Seu produto, o ‘conceito’

teórico do objeto, concretiza-se por meio da transformação do saber e é expresso por diferentes meios da atividade intelectual.

O mesmo objeto pode ser assim captado em sua forma como conhecimento empírico (se lhe forem analisadas suas características externas, realidade autônoma fora de um sistema) ou como conhecimento teórico, se o objeto for analisado em sua concretude, considerando que o concreto se manifesta como síntese de muitas definições e que:

O concreto no pensamento é o conhecimento mais profundo e substancial dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. (KOPNIN, 1978, p. 162)

Dessa forma, apresentamos os principais conceitos teóricos relacionados ao pensamento e à linguagem que orientam este trabalho, a saber: a constituição do pensamento e da linguagem na atividade humana; a estrutura da atividade conforme Leontiev; as funções da linguagem; o raciocínio, a elaboração e a explicitação como movimentos do pensamento para Prado Jr.; o movimento lógico-histórico dos conceitos e juízos, deduções e conceitos como formas de pensamento para Kopnin; os processos de pensamento (generalização, abstração e formação de conceitos) e a distinção entre o pensamento empírico e o teórico estabelecida conforme Davidov; os estágios do processo de formação dos conceitos pelos sujeitos (sincréticos, complexos e conceitos verdadeiros); e a diferenciação entre conceitos científicos e espontâneos, a partir de Vigotski.

Consideramos que esse olhar sobre o pensamento e a linguagem como as funções psicológicas superiores constituídas na atividade humana, repleta de diferentes conexões e inter-relações que constituem e orientam a atividade dos sujeitos, oferece contribuições para que se entenda também a constituição do conhecimento algébrico na atividade humana e, de forma particular, na atividade do sujeito.

No próximo capítulo, pretende-se acompanhar o movimento lógico-histórico do pensamento e da linguagem algébrica.

3. Pensamento e linguagem algébrica

3.1. O movimento lógico-histórico

Este capítulo será direcionado ao estudo de alguns momentos do movimento lógico-histórico do pensamento e da linguagem matemática, mais especificamente a algébrica.

O conhecimento e o pensamento matemático, assim como outras formas de conhecimento, surgem na prática. É da necessidade prática da vida cotidiana dos homens de contagem, medição etc. que se constitui a Matemática.

Conforme Prado Jr. (1963):

A conceituação matemática resulta da experiência sensível e realiza a expressão conceitual (isto é, no pensamento) dessa experiência; e a reproduz por explicitação quando necessário e conveniente aos propósitos do indivíduo pensante. Quando se efetua a soma de sete mais cinco, e se obtém doze, se está efetivamente reproduzindo uma experiência imemorial da espécie humana, que conceitualizada e formalizada pela linguagem (inclusive pela linguagem simbólica da Matemática) acabou sendo esquecida, subsistindo apenas nestas expressões verbais, sinais gráficos e procedimentos (algarismos, algoritmos, tabuadas etc.) com que operamos aritmeticamente; operações que nos servem para interpretar os fatos e feições do Universo com que as nossas atividades nos põem em contato. (p. 115)

É possível perceber, na evolução histórica da Matemática, fases em que se elaboram os conceitos inspirada na experiência sensível e fases de sistematização e generalização. Tais fases se revezam, ainda que seja alto o grau de abstração atingido pela Matemática e que a faça momentaneamente esquecer sua base.

A elaboração conceitual é um processo que se estende desde a experiência sensível até níveis de abstração que na Matemática se encontram já tão afastados da experiência, que fazem perder de vista a base em que em última instância se fundam e que lhes dá existência (PRADO JR., 1963, p. 126)

Tentaremos acompanhar esse movimento do pensamento e da linguagem matemática que se amplia e generaliza.

A linguagem matemática, abstrata, geral, rigorosa, precisa, apresenta-se de forma teórica e impessoal. O alto grau de abstração alcançado pelo conhecimento matemático faz

com que seus conceitos pareçam incompreensíveis e sua linguagem inacessível aos que não se aprofundam nesse conhecimento. Assim, gera emoções contrastantes nos sujeitos conforme a existência ou não de sentidos e motivos que os aproximem do conhecimento matemático. Podemos encontrar exemplos de sujeitos completamente motivados e desafiados por essa forma de conhecimento, bem como reconhecer aqueles que não encontram qualquer sentido nessa atividade.

Como um conjunto de símbolos e signos¹³ formados pelos grupos humanos, a linguagem matemática está repleta de conceitos e significados. Tais conceitos, fruto do processo de generalização e abstração, surgem das necessidades humanas da vida cotidiana, da experiência prática e vão se transformando e originando novos conceitos conforme são geradas novas necessidades pela própria atividade humana. Por outro lado, muitos conceitos, inclusive matemáticos, originam-se antes mesmo de possuírem uma necessidade prática, isso por que a reflexão abstrata, derivada da experiência prática, caminha além das necessidades do problema prático (ALEKSANDROV, 1988).

Com modificação e refinamento, alguns conceitos se estabilizam e a eles são diretamente atrelados alguns símbolos e signos. Dessa forma, por um lado, surge a impressão falsa de que tais símbolos possuem vida própria desvinculada da realidade objetiva e, por outro lado, o uso desses símbolos permite e possibilita que o pensamento se distancie de fatos reais e siga livre, mediante raciocínios, articulações, relações, originando novos conceitos.

Desde tempos muito remotos, são identificadas as necessidades humanas e sociais de contagem na vida cotidiana, de registros de números, de cálculo com operações, de comunicação e representação de quantidades. Essas necessidades foram sendo satisfeitas das

¹³ Davýdov (1982) apresenta os símbolos e signos como formas de atividade humana, como meios de idealização de objetos materiais. São meios para que o pensamento teórico opere com objetos, idealizando-os e transformando-os. Os símbolos possuem a forma semelhante ao objeto que representam, já os signos não possuem essas semelhanças.

mais variadas maneiras: por meio de técnicas corporais¹⁴, com o uso de instrumentos como o ábaco, o aperfeiçoamento de cálculos, a evolução do registro numérico e a criação de diferentes sistemas de numeração. Ao longo do desenvolvimento histórico da humanidade, surgiram novas necessidades, técnicas foram superadas e novos conhecimentos para o controle das quantidades foram desenvolvidos.

Os conceitos aritméticos que dão conta das relações quantitativas das coleções de objetos se originam “[...] pela via da abstração, como resultado da análise e generalização de uma imensa quantidade de experiência prática” (ALEKSANDROV, 1988, p. 35, tradução nossa) e se fixam na linguagem na forma de nome dos números, dos símbolos, nas operações, nos algoritmos usados.

Conforme Moisés (1999):

Observamos que o progresso na linguagem numérica e de cada desenvolvimento da idéia numérica está associada à necessidade de contar quantidades cada vez maiores, ou menores, com velocidades cada vez maiores para a realização de cálculos cada vez mais complexos. Cada desenvolvimento da sociedade exigia que a matemática e sua linguagem também se desenvolvessem. (p. 134)

Destacamos, dessa forma, a importância fundamental do uso de símbolos numéricos no desenvolvimento da aritmética e da matemática em geral. Por muito tempo, esses foram os únicos símbolos usados. Tais símbolos permitem a objetivação do conceito de número abstrato, além de permitir que facilmente se realizem operações com eles. Os símbolos numéricos, por exemplo, concretizam o conceito abstrato de número que não tem uma imagem objetiva, mas pode ser concebido na mente. A aritmética pode ser compreendida como “[...] a ciência das relações quantitativas reais consideradas abstratamente, isto é, simplesmente como relações” (ALEKSANDROV, 1988, p. 27, tradução nossa). Entretanto, os signos numéricos engessam o movimento.

¹⁴ Por exemplo, os papuas da Nova Guiné contavam por meio de uma ordem estabelecida das articulações e membros do corpo (IFRAH, 1994).

O 'Número manual' é a compreensão de que o número só existe a partir da contagem, isto é, na forma de numeral e, portanto, visível, fixo e imutável, podendo ser 'prego com as mãos e visto com os olhos. (LIMA; MOISÉS *apud* SOUSA, 2004, p. 193)

Os conceitos geométricos também provêm das necessidades práticas. Nos primeiros problemas práticos, conceitos aritméticos e geométricos não eram diferenciados. A inter-relação da aritmética e geometria conduziu a muitos avanços na Matemática. Qualquer ato de medir articula conhecimentos aritméticos e geométricos. No desenvolvimento histórico, tal articulação está na origem dos conceitos de números racionais, irracionais e reais. Conceitos que não surgem como simples reflexo da experiência prática, mas a transcendem.

Os conceitos e conteúdos algébricos fundamentalmente tratam das operações matemáticas consideradas de forma abstrata e generalizadas. O desenvolvimento da linguagem algébrica não é algo tão natural quanto se queira supor. Ele ocorre também a partir de pressões sociais e necessidades humanas de cada época (ALEKSANDROV, 1988). Considerando o uso de palavras, letras, signos e símbolos, é possível traçar um caminho da linguagem algébrica.

Tal caminho passa pelas álgebras não simbólicas (álgebra retórica, geométrica, sincopada) e chega até a simbólica. Ao revisitar esse caminho, nos parágrafos seguintes, não se pretende discriminar em importância maior ou menor qualquer uma dessas álgebras, mas somente destacar o momento de modificação, avanços e reflexo do pensamento algébrico articulado à linguagem.

Diversas civilizações, em certos momentos, sentiram necessidade de formular uma álgebra própria (hindus, chineses, egípcios, gregos, árabes, persas) para solucionar problemas do dia-a-dia. Para isso, faziam uso de equações para representar a regularidade dos seus movimentos.

A concepção do zero foi um dos passos decisivos e que permitiu aos hindus aperfeiçoarem a numeração escrita e abrir caminho para o desenvolvimento da álgebra. Até o século VI, eram usadas palavras e símbolos para o zero, como representação de algo que faltava, de ausência. Com os sábios da Índia, o signo (pequeno círculo) foi concebido como número e hoje está na base de toda álgebra e matemática (IFRAH, 1994).

Com os árabes e particularmente com Mohammed Ibn Mussa al-Khowarizmi, divulgam-se os métodos de cálculo e procedimentos algébricos dos hindus. O termo álgebra provém de uma obra de Al-Khowarizmi cujo título iniciava com o termo *aljabr* que, latinizado, tornou-se álgebra e significava a operação de passar os termos de um membro a outro para torná-los positivos em uma equação (IFRAH, 1994).

Valendo-se de linguagem comum, poemas e prosas, os representantes do que hoje se denomina álgebra retórica – por exemplo, Al-Khowarizmi – propõem problemas relacionados à vida do povo e, em seu livro, detalha percursos de solução de problemas. Sem linguagem própria, o pensamento algébrico desenvolve-se, sendo estruturado por meio da linguagem comum e atrelado ao número. O pensamento algébrico que se desenvolvia, diretamente relacionado aos problemas da vida, encontra na linguagem comum, na palavra, um meio para ser refletido. Egípcios, europeus e árabes usam as palavras para estudar o movimento (SOUSA, 2004).

A linguagem matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos numéricos. (LIMA; MOISÉS *apud* SOUSA, 2004, p. 205)

A ambiguidade da palavra traz muitas dificuldades para a representação do movimento. Com a retórica, é difícil criar palavras que representem quantidades desconhecidas. Em outro momento do movimento lógico-histórico da álgebra, Euclides usa as figuras para estudar o movimento. Conforme Sousa (2004), “Euclides preferiu desenhar a variação e representar as operações que envolviam adição e subtração a partir de segmentos

de reta. Os segmentos representavam números conhecidos e desconhecidos” (p. 208). Entretanto, a linguagem das figuras também não se mostrou prática para a representação do movimento.

Abreviando as palavras e mantendo o pensamento, pode-se considerar o momento da álgebra sincopada, tendo como representante o grego Diofanto e seu sistema de símbolos. Este usou palavras e abreviaturas para estudar o movimento e considerava que a variável estava relacionada ao número, não às suas propriedades ou à sua representação geométrica.

Também árabes e europeus usavam palavras para representar valores desconhecidos, e os egípcios usavam a palavra AHA, que significa montão. O uso de abreviaturas para as palavras denota um outro momento e nível de abstração do simbolismo algébrico. O que não se pode descartar é que o nível de abstração desse momento é dependente do anterior, mas não pode ser caracterizado conforme qualquer juízo de valor. É o momento em que “[...] se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente” (EVES, 1995, p. 206).

Nesse momento, ainda não havia o simbolismo formal, não havia um sistema de símbolos literais. Conforme Aleksandrov (1988):

[...] o conteúdo da álgebra havia deixado para trás sua forma. Mas a forma era indispensável: a abstração dos números concretos e a formulação de regras gerais necessitavam do correspondente método de expressão; era essencial ter algum meio de denotar números arbitrários e operações com eles. O simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da álgebra. (p. 63, tradução nossa)

Há aproximadamente 400 anos, surge o simbolismo algébrico da maneira como é visto atualmente. Com sua representação na forma mais sintética, o francês Viete (1540-1603) é considerado o “Pai” da álgebra simbólica ao usar símbolos literais para quantidades desconhecidas e também para quantidades dadas. Viete usou apenas letras para estudar o movimento. Com Descartes (1596-1650), o simbolismo algébrico “[...] criou uma espécie de ‘língua internacional’ compreendida sem equívoco pelos matemáticos do mundo inteiro”

(IFRAH, 1994, p. 338). O simbolismo permitiu que outras ciências e a própria álgebra se constituíssem de maneira mais formal. Como ressalta Sousa (2004):

Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser, não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. (p. 112)

O contexto econômico, político, social e cultural do Renascimento traz novas necessidades. Outras ciências exerciam pressão para que a matemática fosse mais eficiente. Adotar o simbolismo matemático e suas aplicações auxiliava na estruturação do pensamento. A partir da metade do século XVII, a álgebra simbólica começa a se impor como conhecimento científico. O uso do simbolismo pretendia mais do que simplesmente sintetizar a escrita, pretendia facilitar o uso do pensamento. A algebrização pelas letras, como afirmava Leibniz (*apud* IFRAH, 1994), “[...] poupa o espírito e a imaginação, cujo uso é preciso economizar. Ele nos permite raciocinar sem muito esforço, ao colocar os caracteres no lugar das coisas para desimpedir a imaginação” (p. 338).

Existe um movimento do pensamento algébrico que, aliado à maneira como se estrutura e se reflete na linguagem, separa-o de conexões diretas com os problemas do cotidiano. No século XIX, a busca pelo rigor, as transformações internas da Matemática e a pressão de outros campos científicos levam a uma abordagem mais formalista dessa ciência. Com a matemática das grandezas variáveis, tomam forma os conceitos de *variável*, como generalização abstrata de variáveis concretas como tempo, distância, velocidade etc., e *função*, como imagem abstrata da relação de dependência entre grandezas (ALEKSANDROV, 1988).

Nesse momento, também é possível observar uma mudança de qualidade no conhecimento algébrico, em seu objeto e em seu campo de aplicação. A álgebra, que em sua forma original se ocupava das relações entre os números expressos em sua forma abstrata e nos cálculos formais realizados com grandezas concretas que eram então representadas por

letras, passa também a trabalhar com grandezas de uma forma ainda mais geral e abstrata. É o que acontece, por exemplo, com as grandezas vetoriais, sobre as quais também trabalha propriedades e operações.

A álgebra abstrata ou moderna prescinde dos números, sendo que seus objetos podem ser matrizes, vetores, sobre os quais se definem operações e propriedades. Conforme Aleksandrov (1988):

Resumindo, é possível dizer que, enquanto a matemática elementar se ocupa de grandezas constantes, o seguinte período das grandezas variáveis, a matemática moderna é a matemática de todas as possíveis relações e interdependências quantitativas (em geral variáveis) entre grandezas. (p. 89, tradução nossa)

Assim, para compreender a linguagem algébrica e também a criação e o uso do sistema simbólico algébrico e o desenvolvimento da linguagem em suas complexidades e contradições, é necessário entender seu movimento histórico e sua essência revelada pelo movimento do pensamento (lógico).

No movimento histórico de origem e transformação de conceitos matemáticos, também se deve considerar que cada novo conceito abre espaço para novo simbolismo (ALEKSANDROV, 1988). A aritmética, por exemplo, se desenvolve apoiada sobre símbolos numéricos; e a álgebra, sobre fórmulas válidas para números em geral. No movimento histórico da álgebra, é possível reconhecer os movimentos da realidade objetiva sendo expressos na Antiguidade pela álgebra retórica, por meio das palavras, quando os símbolos ainda não haviam sido criados; pela álgebra geométrica, (variável figura); pela álgebra sincopada (variável numeral) em que se usam as abreviaturas; e posteriormente pela álgebra simbólica (variável-letra) (SOUSA, 2004).

Na impossibilidade de esta pesquisa abarcar completamente esse movimento do simbolismo na Matemática em relação aos conceitos matemáticos e considerando que o objeto de estudo desta pesquisa comporta o início do ensino de álgebra, recorreremos

preferencialmente ao conceito de variável e seu simbolismo. Tal conceito é, por si só, bastante complexo e está na base dos conceitos algébricos. Como afirma Usiskin (1995)

As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis. (p. 13)

3.2. Conceitos algébricos como conceitos científicos

Vigotski (2001), ao estudar o desenvolvimento dos conceitos na criança, conclui que “[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos segue por uma via oposta àquela pela qual transcorre o desenvolvimento do conceito espontâneo da criança” (p. 345).

Os conceitos espontâneos se originam na experiência vital direta da criança. Apesar de operar com eles, a criança não tem consciência desses conceitos e, por isso, não consegue operar com eles em situação não concreta. “Tem o conceito do objeto e a consciência do próprio objeto representado nesse conceito, mas não tem consciência do próprio conceito, do ato propriamente dito do pensamento através do qual concebe esse objeto” (p. 345). Esquemáticamente Vigotski aponta esse processo de formação dos conceitos espontâneos como um movimento de baixo para cima.

Conceitos científicos se desenvolvem no processo de aprendizagem escolar “por operações que pressupõe a aplicação não espontânea desse conceito” (VIGOTSKI, 2001, p. 345). A generalização nos conceitos científicos só é possível com a tomada de consciência e a implicação de um conceito dentro de um sistema de conceitos, que não são trazidos de fora, mas existem e já foram apropriados pelo sujeito em determinado momento. Pressupõe, assim, a existência de relação entre os conceitos, a conscientização da própria atividade mental e a relação mediada com o objeto. Esquemáticamente Vigotski aponta esse processo de formação de conceitos científicos como um movimento de cima para baixo.

Também devemos considerar que os conceitos científicos surgem das necessidades da atividade prática dos homens, e também surgem para satisfazer necessidades de desenvolvimento no seio da própria ciência. Isso é o que acontece com boa parte dos conhecimentos matemáticos gerados por necessidades internas da própria ciência.

Apesar de não terem a mesma origem e se desenvolverem em sentidos contrários, Vigotski (2001) também nos indica que o desenvolvimento de conceitos espontâneos e científicos são processos inter-relacionados profundamente.

O conceito espontâneo, que passou de baixo para cima por uma longa história em seu desenvolvimento, abriu caminho para que o conceito científico continuasse a crescer de cima para baixo, uma vez que criou uma série de estruturas indispensáveis ao surgimento de propriedades inferiores e elementares do conceito. De igual maneira, o conceito científico, que percorreu certo trecho do seu caminho de cima para baixo, abriu caminho para o desenvolvimento dos conceitos espontâneos, preparando de antemão uma série de formações estruturais indispensáveis à apreensão das propriedades superiores do conceito. (p. 349)

Conforme nos indica o autor, a zona de desenvolvimento imediato¹⁵ é o vínculo entre o desenvolvimento dessas linhas diametralmente opostas. Tal conceito vigotskiano, psicologicamente, refere-se ao território do desenvolvimento entre o que a criança é capaz de fazer sozinha e o que é capaz de fazer com a ajuda de outros. Com a ajuda de alguém mais capaz, que pode ser um colega ou um adulto, a criança não pode fazer infinitamente mais, mas se mantém em determinados limites do seu estado de desenvolvimento. Assim, para que se adiante ao desenvolvimento, é na zona de desenvolvimento imediato que a aprendizagem deve atuar e não esperar que todas as funções psíquicas superiores estejam consolidadas.

O ensino seria totalmente desnecessário se pudesse utilizar apenas o que já está maduro no desenvolvimento, se ele mesmo não fosse fonte de desenvolvimento e surgimento do novo. (VIGOTSKI, 2001, p. 334)

¹⁵ Neste trabalho, foi adotado o termo “zona de desenvolvimento imediato” conforme a tradução de Paulo Bezerra em VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001. Ao mesmo conceito, atribui-se o termo “zona de desenvolvimento proximal” (ZDP), definida em outro texto como: “Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes” (p.112). Tal conceituação encontra-se em VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Trad. José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto; Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

É por meio do ensino que o sujeito chega à formulação de conhecimentos científicos. É o ensino que permite ao estudante caminhar entre sentido pessoal e significado, entre suas experiências próprias (que são restritas) e as experiências sociais já acumuladas, generalizadas e cristalizadas em palavras. A apropriação de conceitos implica em que o indivíduo compreenda o significado que historicamente os indivíduos atribuíram.

Também é importante considerar que conceitos algébricos, como conceitos científicos, estão em um outro nível de pensamento matemático em relação aos conceitos aritméticos. É necessário que o sujeito tenha o domínio de certos conceitos aritméticos para que os conceitos algébricos possam se desenvolver e, ao mesmo tempo, o domínio de certos conceitos algébricos implica em avanços no desenvolvimento dos conceitos aritméticos para o sujeito, que compreende e estabelece as relações de forma diferente da que estabelece quando não possui elementos para a generalização. É isso que indica Vigotski (2001) quando escreve que o domínio da álgebra eleva ao nível superior do pensamento,

[...] permitindo entender qualquer operação matemática como caso particular de operação de álgebra, facultando uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos. (p. 267)

É ainda importante destacar que existe a relação entre conceitos aritméticos e algébricos, mas tal relação não é de modo algum linear. Assim, é precipitado afirmar que o estudante que domina os conceitos aritméticos necessariamente dominará a álgebra.

Para Vigotski (2001), os conceitos aritméticos são entendidos como pré-conceitos, enquanto que os conceitos algébricos são os verdadeiros conceitos.

O pré-conceito é uma abstração do número a partir do objeto e uma generalização nela fundada das propriedades numéricas do objeto. O conceito é uma abstração a partir do número e uma generalização nela fundada das outras relações entre os números. A abstração e a generalização da minha idéia diferem da abstração e da generalização dos objetos. (p. 372)

No próximo item, retomamos o conceito de variável como um conceito algébrico fundamental no desenvolvimento dessa ciência.

3.3. O conceito algébrico de variável

Assim começa uma pequena poesia dum grande mestre. Deixemos de lado a poesia e busquemos o sentido matemático desta ação. O viandante na floresta põe um pé diante do outro – e a cada passada o caminho por ele vencido se acresce de uma nova porção. O trajeto guarda com o número de passos uma relação fixa e determinada: e com esta simples constatação já esboçamos propriamente o caráter duma função: existe uma interdependência entre duas grandezas – no caso, o número de passos e o trajeto – e esta interdependência obedece a uma lei determinada. Matematicamente: expressamo-la dizendo que: ‘o trajeto é uma função do número de passos’. (KARLSON, 1961, p. 378)

Na tentativa de relacionar quantitativamente dois conjuntos, colocando-os em correspondência, surge a necessidade de um instrumento que represente simbolicamente esses conjuntos, seus elementos e a relação entre eles. Isso exige certo grau de generalização para que não se esteja sempre tratando de conjuntos, elementos e relações particulares. Para a representação dos elementos do conjunto, de forma geral, convencionou-se usar o símbolo literal como, por exemplo, x que, a essa altura, denomina-se variável e representa qualquer elemento do conjunto, não coincidindo individualmente com nenhum dos elementos. Conforme Caraça (1952), a variável “[...] é afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela” (p. 127). É também esse autor que ressalta o caráter contraditório e a fluência do conceito de variável que, ao mesmo tempo, é e não é cada um dos elementos de um conjunto.

O conceito de variável é fundamental para a compreensão do conceito de função que, por sua vez, pode ser entendida como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas da realidade, e ser definida por meio de uma expressão analítica ou por sua imagem geométrica (CARAÇA, 1952).

Conhecendo e considerando o movimento histórico do conceito de variável, seus nexos conceituais, seu movimento, sua vida e o movimento lógico do pensamento, é importante que se tome consciência sobre a fluência do conceito de variável, que se compreenda que tal movimento pode ser representado pela linguagem oral, escrita e pela

linguagem simbólica matemática. As álgebras não simbólicas (retórica, sincopada e geométrica), conforme Lima e Moisés (*apud* SOUSA, 2004), destacam o que os autores denominam de variável palavra (associada à álgebra retórica), variável figura (associada à álgebra geométrica de Euclides) e variável numeral (associada à álgebra sincopada de Diofanto). Já na álgebra simbólica, destacam a variável letra

Assim, entendemos que a linguagem simbólica da álgebra, tornada sintética e ágil, materializada na variável letra está totalmente desvinculada dos significados do contexto da realidade, que trouxe a necessidade de controlar a variação na continuidade. É um pensamento teórico. Por isso, síntese de diversos pensamentos. (SOUSA, 2004, p. 103)

Para Sousa (2004), os conceitos de fluência, número, variável e campo de variação constituem o movimento do pensamento algébrico, são historicamente construídos e compõem o lógico-histórico da álgebra. Por sua vez,

Palavras como relação, dependência, movimento, mutabilidade, campo numérico são nexos conceituais do conceito de variável. Podem ser entendidas como substância, a fluência, o movimento que compõe o pensamento algébrico. (p. 174)

Acompanhar o movimento lógico-histórico da álgebra e compreender o conhecimento como experiência histórica social acumulada leva ao entendimento das divergências que cientistas e historiadores possuem em relação às suas concepções sobre álgebra. Tais divergências também se apresentam entre os profissionais do ensino e, por consequência, influenciam o ensino de álgebra. No próximo capítulo, trataremos de algumas dessas concepções e implicações para o ensino.

4. Pensamento e linguagem algébrica: implicações para o ensino

4.1. Concepções de álgebra e educação algébrica

É entre os séculos VI a.C. e IV a.C., na Grécia, que a matemática foi considerada fundamental na formação dos indivíduos e passou a ser incluída no ciclo de estudos (MIORIM, 1998). Entretanto, ainda no século XV, o ensino de multiplicações e divisões só era realizado em instituições muito avançadas. As facilidades de cálculo nos dias atuais, os avanços de vários campos da Matemática e o alto grau de abstração alcançado auxiliam a identificar a presença de tal conhecimento consolidado na realidade objetiva que se apresenta ao estudante.

Autores como Kieran¹⁶ (1992 *apud* VIOLA DOS SANTOS, 2007) nos indicam vantagens do uso do sistema simbólico quando escrevem que “o uso de símbolos permite a eliminação de informação supérflua e um empenho a gerar outros conceitos matemáticos, tais como função” (p. 33). As vantagens do sistema simbólico podem ser uma explicação para a forte tendência em ensinar a linguagem algébrica e o sistema simbólico-algébrico como um conhecimento científico pronto e acabado. Como afirma Rojano¹⁷ (1996 *apud* VIOLA DOS SANTOS, 2007):

Provavelmente um dos mais velhos erros no ensino de álgebra é o de tentar comunicar aos estudantes, desde seu primeiro contato com o objeto, as qualidades e virtudes no domínio de sua sintaxe em relação a sua utilidade em modelar e resolver problemas. (p. 31)

Entretanto, há que se pensar no movimento lógico-histórico dos conceitos algébricos. A linguagem algébrica que se apresenta é uma construção baseada na experiência histórica da humanidade. Não é desvinculada do pensamento algébrico, e seu ensino deve

¹⁶ KIERAN, C (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.390-419). New York: Macmillan Publishing Company

¹⁷ ROJANO, T. The role of problems and problem solving in the development of algebra. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (eds). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching Boston: Kluwer, 1996, pp.55 - 64

estar diretamente atrelado a ele, bem como aos processos de generalização, abstração e formação de conceitos algébricos.

Considerando que o ensino de álgebra está diretamente atrelado à concepção de álgebra dos professores, pesquisadores (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; USISKIN, 1995) organizaram tais concepções e nos mostram o quanto estas influenciam o ensino de álgebra, gerando diferentes concepções de educação algébrica.

Por meio das concepções definidas por esses autores e também de sua apropriação por outros pesquisadores (CEDRO, 2004; CURY *et al.*, 2002; FREITAS, 2002; SOUSA, M. C., 2004; VIOLA DOS SANTOS, 2007), pretende-se interpretar em tais concepções a maneira como o objeto de estudo desta pesquisa (o pensamento e a linguagem algébrica) é compreendido, bem como é interpretada a variável, nosso objeto de conhecimento. Assim, a intenção não é a de reapresentar tais concepções, mas sim como se articulam pensamento, linguagem algébrica e o conceito de variável em algumas delas.

Usiskin (1995) destaca quatro concepções sobre álgebra conforme a importância atribuída às variáveis: como aritmética generalizada, como estudo para resolver certo tipo de problemas, como estudo de relação entre grandezas e como estudo das estruturas.

Na álgebra concebida como aritmética generalizada, as variáveis são compreendidas como generalizadoras de padrões e modelos. Freitas (2002) afirma que “nessa concepção [...], não temos incógnitas, pois generalizam-se as relações conhecidas entre números e assim o problema acaba quando se encontra o modelo geral” (p. 10). Considera que a álgebra compreendida dessa forma permite aos estudantes formar uma capacidade mais ampla de generalização, permitindo que ela seja utilizada para representar e visualizar fenômenos de diferentes tipos.

A álgebra, concebida como estudo para resolver certo tipo de problemas ou para resolver equações, prevê as variáveis como incógnitas, e as habilidades algébricas envolvem

simplificar e resolver. Para Kieran (1995), pensar na álgebra como procedimento para resolver equações implica perceber a diferença entre as operações da aritmética e da álgebra. Uma abordagem aritmética para resolver equações pode abranger a tentativa e o erro, já a abordagem algébrica centra-se nas operações inversas.

Na álgebra concebida como estudo de relação entre grandezas, as letras são tratadas como variáveis dependentes e independentes, e realmente variam. Conforme Kieran¹⁸ (1992 apud Freitas, 2002), o principal na relação entre as variáveis é a idéia de função. Para Caraça (1952), o conceito de função é o instrumento próprio para estudo das leis, sem esquecer que para esse autor o conceito de variável tem um caráter contraditório: ao mesmo tempo é e não é cada um dos elementos de um conjunto.

Na álgebra concebida como estudo das estruturas, as variáveis são concebidas como objetos arbitrários. Nessa visão, a generalização e abstração dão lugar ao formalismo que admite cálculos sintáticos das estruturas em si mesmas.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) organizam diferentes concepções de álgebra da seguinte maneira:

- a) Concepção processológica: álgebra concebida como um conjunto de procedimentos, métodos e técnicas para resolver alguns tipos de problemas, não sendo necessária uma linguagem específica que a expresse.
- b) Concepção lingüístico-estilística: álgebra como uma linguagem específica para expressar procedimentos da resolução de problemas, distingue forma de pensamento de forma de expressão. Não basta que exista somente o pensamento algébrico, ele tem que ser expresso em uma linguagem.

¹⁸ KIERAN, C (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

- c) Concepção linguístico-sintático-semântica: também vista como linguagem, mas que exige a compreensão dos signos e dos símbolos. Tal linguagem para que possa ser operatória deve ser verdadeiramente simbólica.
- d) Concepção lingüístico-postulacional: álgebra como uma linguagem simbólica cujos signos alcançam alto grau de abstração e generalidade.

A partir de tais concepções, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam algumas tendências que vêm exercendo influência no ensino de álgebra no Brasil.

- Tendência lingüístico-pragmática: preponderante no século XIX, enfatiza o domínio da linguagem literal e o treino para resolução de equações. Privilegia técnicas, preocupa-se com regras e propriedades e com o trabalho com expressões algébricas. Dessa forma, está relacionada à visão da álgebra baseada numa proposta lingüístico-sintático-semântica e se pretende que o estudante assimile uma linguagem algébrica já consolidada.
- Tendência fundamentalista estrutural: no movimento da matemática moderna, foi influente na década de 1970 e 1980 e ocorre quando a compreensão acontece conforme a fundamentação lógica e reorganização dos conteúdos, buscando propriedades estruturais que justifiquem as passagens do transformismo algébrico e concebendo a álgebra como estruturadora de outros ramos da matemática escolar.
- Tendência fundamentalista-analógica: síntese das anteriores, tenta recuperar o valor instrumental da álgebra, mas faz uso de recursos geométricos ou físicos (recursos visuais), e também está ligada a uma concepção de álgebra numa perspectiva lingüístico-sintático-semântica, na medida em que seria uma etapa intermediária à abordagem simbólica-formal.

Concordamos com a análise que Cedro (2004) realiza a respeito de tais concepções de educação algébrica:

Fazendo uma análise das concepções de álgebra e das de educação algébrica, podemos perceber que ou há uma ênfase na linguagem algébrica em detrimento do pensamento ou enfatiza-se o ensino de uma linguagem já constituída mediante a assimilação da transformação algébrica. (CEDRO, 2004, p. 81)

Tais concepções reduzem o ensino de álgebra ao ensino de sua linguagem, mais especificamente ao sistema simbólico algébrico, dando ênfase à sintática mais do que ao pensamento algébrico ou significado (semântica) dos símbolos.

Atualmente, encontram-se na escola as tendências em que predominam o aspecto sintático da álgebra – cujo ensino se baseia na manipulação de regras e símbolos sem a compreensão – e também a situação oposta em que prevalece o aspecto semântico e conceitual. Gomez-Granell (1996) indica que o problema dessa tendência é que se subentende que o estudante que compreende o significado do conceito não terá dificuldade em dominar a linguagem formal que, no nosso entender, é o sistema simbólico algébrico. No entanto, tal sistema também precisa ser objeto de ensino.

Na coletânea de artigos de estudiosos da Educação Matemática sobre dilemas e concepções errôneas de álgebra e seu ensino, organizada por Coxford e Shulte (1995), muitos dos autores questionam qual a compreensão dos estudantes sobre os símbolos que lhes são apresentados. Apresentar definições formais de equações, expressões, funções pode não significar muito para estudantes que estão iniciando seu estudo e faz com que se aceite como convenção de símbolos praticamente a maior parte do conteúdo algébrico.

Entre as diversas propostas e questões apresentadas e discutidas no livro, destaca-se que o recurso à resolução de problemas numéricos pode auxiliar na introdução de um curso mais formal de álgebra. As convenções não podem ser adotadas apressadamente, pois se tornam barreiras para a compreensão de muitos estudantes. Para estes, seria necessário falar e escrever em linguagem comum sobre conceitos algébricos antes da introdução do simbolismo, como um retorno à álgebra retórica, até para que se evitasse a tradução mecânica das palavras de um problema.

O recurso para a utilização de diagramas também foi mencionado no sentido de resolver problemas que deveriam ser encarados como tal e não como exercícios. Alguns dos artigos dessa publicação também indicam que as novas tecnologias auxiliariam a estabelecer um novo olhar para a álgebra, e seu ensino teria que enfatizar a semântica algébrica, a negociação de significados de variáveis no contexto de um problema, considerando que o recurso a um *software* pode eliminar excessivos cálculos rotineiros e permitir que se desenvolvam as idéias da álgebra.

Lins e Gimenez (1997) também apresentam concepções da educação algébrica que influenciam diretamente a atividade do professor: a concepção letrista, assumida por professores que percebem a álgebra como o “cálculo com letras”; a concepção letrista facilitadora, assumida por professores que acreditam que usar material manipulativo e situações concretas auxiliará na formalização de estruturas; a concepção que tem como ponto de partida “o concreto”, entendido como a situação real; e o conhecimento algébrico no sentido de esclarecer ou organizar uma determinada situação.

Não sendo objetivo desta pesquisa e dada a impossibilidade de listar todas as concepções para a educação algébrica existentes, pretende-se apenas chamar a atenção para a necessidade de compreensão de que os diferentes entendimentos sobre o que é álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica e seu desenvolvimento afetam diretamente a percepção de professores e, conseqüentemente, a maneira como ocorre o ensino desse conteúdo.

Quando se iniciou a presente pesquisa e a elaboração do instrumento (escolha e reestruturação das situações-problema) para a coleta de dados com os estudantes, definiu-se o foco no conceito de variável, por sua importância histórica no desenvolvimento da álgebra, e buscou-se apoio no modelo Três Usos da Variável (3UV) proposto por Ursini *et al.* (2005).

Nesse modelo, destacam-se os três usos da variável: como incógnita, como número geral e como relação funcional

A proposta desse modelo é que nenhuma dessas compreensões da variável (como incógnita, número geral e relação funcional) seja privilegiada, mas que aproximem os estudantes de tais usos das variáveis ora diferenciando-as, ora integrando-as em situações distintas ou na mesma situação, assim o estudante compreenderá cada uso e também terá a flexibilidade na passagem de um uso da variável ao outro. Assim, as situações-problema escolhidas e reelaboradas para serem usadas na presente pesquisa procuram contemplar esses três usos da variável.

Conforme Ursini *et al.* (2005):

Para que um aluno possa trabalhar com certo êxito em álgebra elementar, é necessário, em primeiro lugar, que trabalhe com as incógnitas, mas também com os números gerais e com as relações funcionais, e que aprenda a passar com flexibilidade entre estes distintos usos da variável. Em segundo lugar, que aprenda as regras sintáticas que regem a linguagem algébrica, mas que possa relacionar os distintos usos da variável com diversas situações. (p. 22, tradução nossa)

Entretanto, foi possível perceber que tal modelo se prende ainda a concepções de álgebra como manipulações de letras, e se refere primordialmente ao uso da variável, à sua aplicação. Entretanto, será que é com o uso e a aplicação de variáveis que o estudante forma o seu conceito?

Se considerarmos que é na prática que se forma o pensamento, poderíamos considerar que ao usar e aplicar ‘na prática’ a variável, o estudante estaria formando o conceito, mas resta-nos perguntar, qual conceito? O empírico ou o teórico? E de que forma está sendo entendida essa prática? Será que realmente o estudante conceitua a variável dessa forma? O que seria o conceito empírico de variável? O que seria o conceito teórico de variável?

Sousa (2004), nesse sentido, oferece-nos outra concepção de educação algébrica ao se contrapor à idéia de ensinar o formalismo dos conceitos algébricos para aplicá-los na realidade objetiva.

Para entender a álgebra enquanto descrição de movimentos, propomos que o ponto de partida das aulas seja o estudo dos conceitos de: a) movimento; b) fluência; c) número e álgebra não simbólica e d) variável e campo de variação presentes na vida fluente [...]. (p. 94)

Para a pesquisadora, que se fundamenta sobre o movimento lógico-histórico no desenvolvimento dos conceitos, a partir dos estudos de Kopnin (1978) e de nexos conceituais a partir de Davýdov (1982), a importância de sua abordagem está em que:

Queremos enfatizar que essa abordagem se diferencia do ensino tradicional de álgebra, que se fundamenta na aprendizagem das formas analíticas das expressões algébricas, por considerar, durante a construção do pensamento pelos alunos, as conexões internas ou ainda os nexos conceituais do pensamento algébrico (SOUSA, 2004, p.166)

Esse estudo teórico relacionado a diferentes concepções de álgebra influenciarão os resultados posteriormente apresentados a partir da análise dos dados da presente pesquisa.

4.2. Os procedimentos da aritmética e da álgebra

Existe uma questão bastante discutida entre pesquisadores e profissionais do ensino em relação ao momento propício para o início do ensino de álgebra, se tardiamente, após o ensino dos conceitos aritméticos, ou concomitantemente a ele. Alguns pesquisadores, como Davýdov (1982), defendem que esta deve ser ensinada desde cedo às crianças. Lins e Gimenez (1997) pretendem mostrar que a noção enraizada de que se deve aprender aritmética antes de álgebra é infundada. Para esses autores “[...] é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra” (LINS, R. C., GIMENEZ., J., 1997, p.10)

A presente pesquisa não tem condições de avançar em tal discussão, mas pode contribuir, ponderando que a álgebra envolve necessariamente uma abstração em relação aos números e suas operações e, portanto, é necessário que o conceito de número, suas operações e propriedades tenham alcançado certo nível de desenvolvimento. Assim, poderão se desenvolver alguns conceitos algébricos, que posteriormente influenciarão na reestruturação e no nível de desenvolvimento dos conceitos aritméticos.

Isso não significa que o estudante necessita ser um *expert* em aritmética para iniciar o seu estudo de álgebra e tampouco que, por contribuir com o desenvolvimento dos conceitos aritméticos, o ensino de álgebra deva ser antecipado. A compreensão a respeito da zona de desenvolvimento imediato, nesse sentido, pode contribuir mostrando o momento em que o estudante está preparado para que seu desenvolvimento alcance outro nível.

Conforme Booth (1994):

O uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (compreender) afirmações gerais em álgebra. Por exemplo, se um aluno geralmente não determina o número total de elementos de dois conjuntos de, digamos 35 e 19 elementos, utilizando a noção de adição, como $35 + 19$, mas resolve o problema, utilizando o processo de contagem, então é pouco provável que o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos seja prontamente representado por $x + y$. (p. 35)

Em relação à organização curricular, convém lembrar que o desenvolvimento desencadeado pela aprendizagem não ocorre de forma sempre coincidente com a estruturação e sequência do processo letivo.

O processo letivo tem a sua própria sequência, sua lógica e sua organização, segue um currículo e um horário, e seria o maior dos equívocos supor que as leis externas da estruturação desse processo coincidem com as leis internas de estruturação dos processos de desenvolvimento desencadeados pela aprendizagem. (VIGOTSKI, 2001, p. 322)

No caso da aritmética e do ensino do conceito de número, apresenta-se um fato que pode ser facilitador ou criar dificuldades no processo de aprendizagem: a criança reconhece o símbolo antes mesmo de se apropriar de seu significado, por lidar com ele em suas experiências cotidianas. Além disso, nos problemas aritméticos, a criança acaba por

aprender a classificá-lo conforme alguns tipos, reproduzindo um método de resolução adequado àquele tipo de problema: adicionar, subtrair, multiplicar.

Em relação à álgebra, isso também acontece: a criança aprende a usar x , y , equações, sistemas e fórmulas antes mesmo de saber o que significam, não por que isso faz parte de suas experiências cotidianas fora da escola, mas por que fazem parte das experiências dentro da escola e que tornam o ensino técnico e mecanizado.

Consideramos que aprender um novo vocabulário, conhecer termos técnicos, usar símbolos não significam necessariamente apreender e compreender todo o sentido e significado de determinado conceito ou conhecimento científico. Reconhecer x e y e saber manipulá-los não significam o domínio de um pensar algébrico, pois pode ser apenas um domínio técnico. Da mesma forma, o domínio de um pensar algébrico não implica um domínio técnico. A comunicação por meio da linguagem algébrica prescinde de um pensamento algébrico que se estrutura e se apresenta ao mesmo tempo em que se desenvolve e se reflete mediante uma linguagem algébrica.

Reconsiderar o papel da linguagem e as características da linguagem algébrica, articulando-a com o pensar algébrico no processo de ensino e aprendizagem de álgebra, é fundamental. O momento para iniciar o ensino de álgebra não é necessariamente subsequente a todo ensino de aritmética. O pensar algébrico depende de que o estudante já tenha se apropriado do conceito de número que pode ser expresso por meio de linguagem natural, aritmética, geométrica, ou ainda o sistema simbólico algébrico. A partir da evolução histórica da álgebra, pode-se considerar a existência de um pensamento algébrico anterior à utilização da linguagem simbólica, sendo que o pensamento se potencializa conforme o estudante vai usando a linguagem mais apropriada. A dificuldade que muitos estudantes encontram quando são iniciados no estudo de álgebra pode ter origem no uso da linguagem algébrica em função

das próprias características desse sistema simbólico ou pela ruptura entre o conhecimento algébrico e o conhecimento aritmético.

4.3. A linguagem algébrica e o sistema simbólico-algébrico

O conhecimento matemático desempenha a função de linguagem em outras ciências. As formas, expressões, equações matemáticas tornam-se forma de pensamento para expressar o conteúdo de outras ciências. A matemática é, dessa forma, uma ciência, pois possui seu próprio objeto, um corpo próprio de conhecimento e também serve de linguagem para outras ciências. O objeto da matemática e sua linguagem refletem relações gerais, expressas em abstrações, e mantém a relação com o mundo objetivo, entretanto tal relação é bastante complexa e totalmente mediada.

As especificidades da linguagem algébrica não podem ser desconsideradas quando se refere ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e científicos em geral. Criada e usada em diferentes momentos históricos, atendendo a diferentes necessidades, tal linguagem não pode ser simplesmente apresentada aos estudantes como conhecimento científico pronto e acabado e como se fosse simples instrumento da Ciência. O estudante, que é apresentado ao simbolismo da álgebra de forma direta, nem sempre compreende o significado de seu simbolismo e de seus conceitos, pois pronuncia e trabalha com um som vazio, com a palavra sem significado.

Não se trata de ignorar nem tampouco seguir à risca o movimento histórico do desenvolvimento da linguagem algébrica em seus momentos de retórica, geométrica sincopada e simbólica, mas perceber que em cada um desses momentos o pensamento algébrico está se formando e se estruturando de alguma maneira. Portanto, é necessário destacar a formação dos conceitos, conduzindo aos processos de abstração e generalização

teórica e não o símbolo finalizado e pronto, como se o seu registro fosse por si só a explicação de significados e conceitos. Entretanto, cuidar no ensino da formação de conceitos não significa ignorar o ensino da linguagem simbólica que se apresenta na realidade objetiva. Compreendemos que pode existir pensamento algébrico sem que necessariamente exista a linguagem algébrica formalizada (o sistema simbólico), mas a compreensão e a apropriação de tal linguagem potencializam o pensamento.

Em suas investigações, Vigotski (2001) trata da linguagem oral e escrita como sistema de signos diferentes e que se desenvolvem por processos diferentes, não sendo a linguagem escrita simples tradução da linguagem falada. Também a linguagem algébrica com seu sistema simbólico é um sistema de signos (instrumentos psicológicos), produzido pelo homem e que o auxiliam a resolver problemas mentais, instrumento do pensar e do conhecimento.

Da mesma forma que para Vigotski a linguagem oral e a escrita se desenvolvem por processos diferentes, deduzimos que no caso da álgebra tal diferença também ocorre. A linguagem oral requer certo grau de abstração em relação ao mundo material, e a linguagem escrita requer abstração do aspecto sonoro da fala e também do interlocutor. Expressando-se por meio da linguagem oral algébrica, o estudante fala e se expressa oralmente, estruturando seu pensamento algébrico e demonstrando que elaborou certas abstrações em relação aos números, mas o registro escrito, o uso de simbolismos da álgebra, apresenta um grau de abstração ainda mais elevado, sendo que a motivação para a escrita precisa ser gerada. Para recorrer ao simbolismo algébrico, a criança precisa de forma intencional e consciente se apropriar de tais signos.

A linguagem algébrica, com seu significado e relações de seus sinais (sistema simbólico algébrico), pode ser entendida em seu aspecto semântico e sintático. Dessa forma, pode ser considerada como um meio intelectual de apreensão e conhecimento da realidade

objetiva e, como tal, permitir que se penetre no processo de pensamento. Entretanto, no nível atual de desenvolvimento, tal linguagem algébrica pode ser considerada como a realidade objetiva que já existe externamente ao sujeito e que precisa ser por ele apropriada. Nesse momento, o processo de educação tem importância crucial. A linguagem algébrica é, atualmente, elemento da realidade objetiva; é usada durante o processo de ensino; e é reflexo da realidade objetiva em seu movimento histórico e precisa ser ensinada. Conforme Davýdov (1982):

Os conceitos historicamente formados na sociedade existem objetivamente nas formas de atividade do homem e nos resultados das mesmas: nos objetos racionalmente criados. Os homens como indivíduos (e sobretudo as crianças) os aceitam e assimilam antes de aprender a atuar com suas particulares manifestações empíricas [...]. O geral como forma e norma de atividade para os indivíduos aparece em seu estudo como primário em relação aos fenômenos particulares que a ele se unem [...]. Dito com outras palavras, o indivíduo não tem diante de si uma ‘natureza inassimilada’, uma realidade operando com a qual há de formar conceitos: estes lhe são proporcionados como experiência cristalizada, idealizada e historicamente formada dos homens. (p. 304-305, tradução nossa)

Compreender como o sujeito se apropriará dessa linguagem algébrica, em tal estágio de desenvolvimento e com alto grau de abstração envolvida, é fundamental. Recorrer ainda uma vez para a unidade entre lógico e histórico possibilita compreender o movimento do pensamento na apreensão de tal linguagem. Considerando que a linguagem algébrica reflete o movimento do pensamento algébrico, existe a preocupação em observar as potencialidades e limitações da linguagem para refletir o pensamento.

Assim a linguagem científica, matemática, algébrica, ao mesmo tempo em que é ou deveria ser um objeto (deve ser ensinada com suas características particulares) no processo de aprendizagem das ciências em geral e também da Matemática, é usada como instrumento de mediação do professor no seu processo de ensino, é compartilhada. Ensina-se a linguagem enquanto ela é usada para ensinar.

A linguagem algébrica precisa ser ensinada e é também usada no ensino para resolver as situações-problema e representar fenômenos da realidade objetiva. Tais fenômenos

podem ser regulares e irregulares. Os fenômenos regulares podem ser descritos por funções. Conforme Sousa (2004), “enfim, através da função pode-se descrever movimentos regulares e é por isso que se pode fazer previsões de determinados movimentos que se apresentam no cotidiano de todo ser vivente” (p. 175). Nessas situações, eleito o campo numérico, pode ser identificada a dependência entre as grandezas que interagem, e se relacionam, de forma regular. Entretanto, devemos considerar movimentos e interações que não são regulares como, por exemplo, a variação do peso de uma pessoa em relação à sua idade.

Conforme Vigotski (2001), é necessário que o indivíduo interiorize a experiência fornecida culturalmente. É necessário que ele interiorize o processo constituinte do pensamento algébrico e se aproprie dos elementos simbólicos da linguagem algébrica. Ao se apropriar do sistema simbólico algébrico, como um sistema de signos, pode transformá-lo em instrumento do pensamento e da ação para resolver as situações-problema com que se defronta e, dessa forma, desenvolver ainda mais seus processos psíquicos. Compreendem-se tais relações por meio do seguinte esquema:

A álgebra, entendida como uma maneira de perceber e refletir os movimentos da realidade fluente (SOUSA, 2004), por meio de suas diferentes linguagens (pelas palavras ou pelos símbolos algébricos formalizados, por exemplo), permite ao estudante um novo olhar sobre a realidade.

A partir do simbolismo algébrico, o mundo se amplia ao estudante. Ao pensar sobre movimentos que possam ser numeralizados ele não tem que recorrer, necessariamente ao numeral, ao número aritmético. Pode recorrer ao número algébrico. Pode usufruir do simbolismo algébrico, à vontade (SOUSA, 2004, p.101)

Com base no que foi apresentado até este momento, consideramos que no processo de ensino de álgebra muitas variáveis exercem influência. Os estudos teóricos conduzem a considerar que as dificuldades dos estudantes podem estar sim, associadas às especificidades do conhecimento algébrico (a falta de compreensão do movimento lógico-histórico do conceito de variável, por exemplo, e as tentativas de manter a linearidade do conhecimento aritmético para o algébrico); mas também ao desenvolvimento dos processos psíquicos dos estudantes (peculiaridades dos processos de pensamento e linguagem em especial); ou ainda à metodologia e didática do ensino (concepções de professores sobre álgebra, as formas como se encaminham o pensamento e a linguagem algébrica e as implicações das tarefas propostas).

Não desconsiderando as questões de didática e as especificidades do conhecimento algébrico, o foco da pesquisa realizada com os estudantes voltou-se para o estudo das manifestações do pensamento e da linguagem algébrica. Como os estudantes pensam para resolver as situações-problema propostas? Que tipo de situações gera a necessidade do conhecimento algébrico? Que significados e sentidos atribuem ao sistema simbólico algébrico? Resolver a situação-problema aritmeticamente conduz à resolução algébrica? Como os estudantes formam conceitos algébricos, em especial o conceito de variável?

Essas e outras questões presentes no decorrer da pesquisa conduziram o objetivo de investigar as manifestações e peculiaridades do movimento do pensamento e da linguagem

algébrica dos estudantes e, dessa forma, encontrar indícios que explicassem a origem das dificuldades dos estudantes.

5. A pesquisa com os estudantes

Vimos que estar em atividade implica que o sujeito esteja voltado para satisfazer uma necessidade, tenha um motivo, estabeleça objetivos que geram as ações orientadas pelas condições existentes. É um processo dinâmico. Por sua vez, a consciência desse processo, a consciência de “estar em atividade”, permite que a atuação seja mais produtiva.

Como professora, estava em atividade sem ter consciência da dinâmica e do movimento do processo. Foi a condição de pesquisadora, com objeto, objetivos e ações, que possibilitou uma qualidade diferente da atividade como professora e permitiu perceber que o ciclo atividade-necessidade-atividade se mantém constantemente em movimento. Isso também nos leva a considerar que nenhuma pesquisa tem o poder da neutralidade e que também esta se desenvolve conforme algumas concepções pessoais e conceitos sistematizados em um determinado momento e sob determinadas circunstâncias e condições. Esse movimento de exposição de concepções e reorganização destas, principalmente em relação ao conhecimento e ao ensino de álgebra, poderá ser vislumbrado no presente trabalho e constituir-se como aprendizagem da professora/pesquisadora.

Particularmente, nesta pesquisa, considerou-se que a atividade do pesquisador provém da necessidade de procurar a compreensão de um problema, não necessariamente na forma de busca de uma solução definitiva, mas como entendimento e compreensão de um problema e suas eventuais soluções, conforme as circunstâncias que o envolvem. Sendo proveniente de uma necessidade, a pesquisa está atrelada a um motivo que leva o sujeito a pesquisar.

Neste trabalho, o motivo anteriormente definido de elucidar a origem das dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico desencadeou as ações de pesquisa descritas a seguir para atender ao **objetivo principal**: *a investigação das manifestações e*

peculiaridades do pensamento e da linguagem algébrica por meio de situações-problema com estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental, com base nos conceitos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade.

5.1. Os sujeitos da pesquisa

A opção desta pesquisa foi trabalhar com estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental. Tal série foi escolhida por ser o momento em que formalmente o estudante é apresentado ao conhecimento algébrico; é o momento em que será exigido o registro escrito de expressões, equações, sistemas de equações etc. Nesse momento, podemos considerar que apontam as dificuldades em relação à formação dos conceitos algébricos e em relação ao uso do sistema simbólico algébrico como registro escrito, considerando que como nos indicam as investigações de Vigotski (2001):

[...] a linguagem escrita requer para o seu transcurso pelo menos um desenvolvimento mínimo de um alto grau de abstração. Trata-se de uma linguagem sem o seu aspecto musical, entonacional, expressivo, em suma, sonoro. É uma linguagem de pensamento, de representação, mas uma linguagem desprovida do traço mais substancial da fala – o som material. (p. 313)

Trata-se, assim, da abstração do aspecto sonoro da fala e do interlocutor no dizer de Vigotski (2001).

Os dados foram construídos em sala de aula, com um grupo de estudantes da 6ª série de uma escola estadual da Diretoria de Ensino Centro-Sul no município de São Paulo. A escola atende no período matutino estudantes do Ensino Médio; no período vespertino, os estudantes do segundo ciclo do Ensino Fundamental; e no período noturno, estudantes da Educação de Jovens e Adultos. Em 2007, ano de realização da pesquisa, possuía duas turmas de 6ª série (A e B). Após analisar e aprovar a realização do projeto de pesquisa, a coordenação da escola solicitou que esta fosse realizada com a turma A, cuja professora de matemática era efetiva no cargo e que, portanto, poderia, por meio dos resultados da pesquisa, prosseguir com

o trabalho com os estudantes. No momento do primeiro contato com a escola, a professora e os estudantes (no final do 1º semestre de 2007), o conteúdo de geometria espacial estava sendo estudado. No momento da pesquisa e da proposta das situações-problema, os estudantes trabalhavam com o conteúdo de números inteiros, e ainda não tinham nenhuma aproximação com o ensino formal de álgebra.

Os encontros com os estudantes ocorreram espaçadamente ao longo do segundo semestre, procurando respeitar o trabalho em desenvolvimento pela professora com a turma, seu cronograma de aulas e os eventos da escola, sendo definidas as seguintes datas: 3 de setembro, 17 de setembro, 1 de outubro, 22 de outubro e 05 de novembro.

5.2. O isolado da pesquisa

É um desafio nesta pesquisa fixar a atenção no objeto de estudo, sendo ele o movimento composto pelo desenrolar de dois processos complexos: o do pensamento e o da linguagem algébrica. Como captar o pensamento, como captar a linguagem, como fixar a atenção sobre eles com suas inter-relações, em situações de ensino, são questões postas. O apoio para superar tal desafio encontrou-se em Caraça (1952).

Para o autor, são características essenciais da realidade: a interdependência e a fluência. Qualquer objeto ou fenômeno da realidade do mais simples ao mais complexo estão relacionados e dependem de outros objetos ou fenômenos, ainda que tais entrelaçamentos nem sempre sejam identificados por um olhar e a tentativa de compreensão superficial. Além de serem caracterizados pela interdependência, tais objetos e fenômenos se modificam a todo instante, evoluem. Como afirma Caraça (1952), “o mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo momento se transformam, tudo flui, tudo devém” (p. 110).

O objeto de estudo desta pesquisa, o processo de pensamento e linguagem algébrica, não foge a essas características e estão relacionados entre eles e com outros objetos

e fenômenos da realidade. Além disso, caminhar pelo seu movimento histórico indica a fluidez e permanente evolução destes processos. Para superar a dificuldade de captar o pensamento e a linguagem algébrica em suas interrelações e no seu movimento, recorreu-se ao conceito de ISOLADO de Caraça (1952).

Para o autor, o isolado é um recorte da totalidade, mas é necessário ainda que contemple a sua essência. É possível considerar níveis diferenciados de isolados, sendo que um se insere em outro, formando assim uma cadeia.

A opção pela 6ª série de uma escola pública estadual de São Paulo é um isolado, por ser um recorte da totalidade do sistema de ensino. Por sua vez, a escolha das situações-problema propostas ocorreu procurando contemplar o conceito de variável, considerado conceito essencial no conhecimento algébrico e, portanto, capaz de refletir e expressar a relação entre pensamento e linguagem algébrica. Assim, em outro nível, tais situações-problema são também isolados, mas inseridas dentro do isolado maior, que é o grupo de estudantes escolhido.

O surgimento de INESPERADOS obriga a uma melhor definição do isolado. Por isso também as situações-problema, como anteriormente pensadas, foram revistas no decorrer da pesquisa e analisadas criticamente.

Entre os componentes de um isolado, existem relações. A esse conjunto de relações, Caraça (1952) atribui o nome de QUALIDADE. Assim, para compreender a QUALIDADE do pensamento (nesse caso como um componente do isolado), é necessário pensar em suas relações com a linguagem (outro componente do isolado) e vice-versa. Dessa forma, por exemplo, o pensamento, que se reflete e expressa por meio da linguagem comum, tem uma qualidade diferente daquele que se reflete na linguagem aritmética ou, ainda, daquele refletido na linguagem algébrica. Qualidades que admitem graus diferentes de intensidade ou

das quais se pode fazer juízos admitem variação de acordo com a quantidade, sendo que esta pode ou não depender de números.

Tomemos certo isolado de estudo; arrastado na fluência de todas as coisas, ele transforma-se – cada um dos seus componentes devem a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas qualidades, e o isolado aparece a todo o momento com qualidades novas. (CARAÇA, 1952, p. 117)

Tais conceitos de Isolado, Qualidade, Quantidade, Interdependência e Fluência, expostos por Caraça, orientam esta pesquisa em relação à organização metodológica e à análise dos dados e também em relação à compreensão do objeto de conhecimento (e mais especificamente à variável).

Em relação à organização metodológica, buscou-se por meio do isolado menor (as situações-problema) identificar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica (o objeto da pesquisa, componentes do isolado) dos estudantes, procurando, ainda que momentaneamente captar, por meio da qualidade e quantidade do pensamento e da linguagem, a fluência e a interdependência de tais movimentos.

Por outro lado, os estudos teóricos nos mostraram o quanto o objeto de conhecimento dos estudantes, a variável, contemplava a fluência do movimento das quantidades. Assim, a análise dos dados desta pesquisa procura também identificar de que maneira as situações-problema propostas permitem a compreensão pelos estudantes de tal movimento e fluência presente no conceito de variável, conceito algébrico fundamental.

Conforme Kopnin (1978), “a investigação científica enquanto ato de conhecimento se realiza à base da interação prática do sujeito com o objeto” (p. 226). Assim é que esta pesquisa se desenvolve, buscando a interação entre a pesquisadora e seu objeto de pesquisa: o desenvolvimento do pensamento e da linguagem de estudantes colocados frente a situações-problema que requeriam o uso da linguagem algébrica e de seu sistema simbólico. Há que se compreender aqui a importância de duas interações: a interna do objeto da pesquisa

(dos estudantes com seu objeto de conhecimento, a variável) e da pesquisadora com o seu objeto de pesquisa (o movimento do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes). A análise dos dados contemplará ambas as interações.

É importante destacar que estão implícitos os conceitos em relação à atividade dos sujeitos. O estudante que pensa, registra e interage, e a pesquisadora que intercala seus momentos como pesquisadora e como professora. Para Leontiev (1983), a atividade humana é a base para o desenvolvimento do psiquismo. Consideramos esse um conceito sempre presente durante a realização desta pesquisa. A interpretação da atividade e seus elementos (motivos, ações, objetivos, operações e condições) orientaram, ainda que não de forma explícita, a compreensão de algumas ações e motivos da pesquisadora, em particular, e dos demais sujeitos da pesquisa.

Ainda que o objetivo investigativo da pesquisa tenha se dado por meio de situações-problema, é importante ressaltar que estas, da forma como foram aplicadas, não podem ser identificadas como Atividades de Ensino.

O que entendemos por atividade de ensino abrange o conceito de Atividade Orientadora de Ensino, conforme proposto por Moura (1996; 2001), sendo estruturadas de forma a permitir a interação dos sujeitos enquanto solucionam situações-problema coletivamente, mediadas pelo conteúdo e atribuindo sentidos enquanto se apropriam dos significados da experiência da humanidade. Envolve também ações diversificadas do professor e não somente o encaminhamento de problemas com os estudantes. Entre essas outras ações, a discussão coletiva com o grupo classe na tentativa de proceder à síntese dos conceitos que são objeto do ensino.

Também se compreende que a atividade de ensino só se constitui relacionada à atividade de aprendizagem do estudante. Assim, inserido em atividade de ensino, o professor deve trabalhar com conceitos psicológicos, filosóficos, sociais que o auxiliem a constituir seu

objeto de ensino como objeto de aprendizagem do estudante. Conforme Jesus (2005), “[...] para que o objeto de ensino se constitua em objeto de aprendizagem, é preciso que ele seja uma necessidade dos sujeitos que aprendem” (p. 55). Além disso:

A necessidade de mobilizar o pensamento para a aprendizagem reafirma que na organização do ensino o professor não trata apenas da organização lógica do conteúdo, mas também do modo de fazer corresponder o objeto de ensino com os motivos, desejos e necessidades do aluno. Sua função maior é a de transformar a atividade de ensino em atividade de aprendizagem para o aluno. (SFORNI, 2004, p. 111)

O objeto de ensino do professor são os processos constituintes do pensamento teórico, a formação de conceitos científico. Para Hedeggard¹⁹ (2001 *apud* JESUS, 2005):

[...] os alunos adquirem o pensamento teórico na forma de relações fundamentais em uma disciplina, uma área ou um problema e somente quando o método cognitivo no ensino também se caracteriza como um conhecimento teórico. Se o método aplicado envolve as ações de observação, comparação, categorização e memória – características do conhecimento empírico – a apropriação permanecerá no nível empírico. (p. 58)

As ações da Atividade de Ensino, que tem por conteúdo os conceitos algébricos e por objetivo o ensino de tais conceitos, devem estar voltadas para essa apropriação da linguagem e das formas de pensar da álgebra pelo estudante e também da relação do sujeito com as situações-problema propostas, mediadas pelo instrumento (pensamento e linguagem algébrica) apropriado. Podemos considerar, assim, que o ensino da linguagem algébrica deve se constituir antes em uma ação da atividade de ensino, para que depois se torne uma operação, sendo usada automaticamente.

A compreensão da atividade do sujeito, da execução de suas ações e operações oferece uma orientação para o processo de ensino. As operações materiais ou ideais de um estudante são conscientemente controladas como resultado do ensino. Passam antes por um processo para resultarem conscientizadas, ocupando dentro da atividade o lugar de ação dirigida por determinado objetivo. Conforme Leontiev (1983), “se conscientiza realmente só aquilo que constitui o objeto de um dinamismo do sujeito orientado a um objetivo, quer dizer,

¹⁹ HEDDEGGARD, M. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, H. Uma introdução à Vygotsky. São Paulo: Loyola, 1996.

que ocupe um lugar estrutural de objetivo direto de ação externa ou interna de uma atividade determinada” (p. 217, tradução nossa).

Se considerarmos o pensamento como atividade estruturada por meio de ações voltadas a objetivos cognitivos conscientes, a questão a respeito do que é objeto da consciência torna-se fundamental para o ensino, considerando também a necessidade de transformar o conteúdo formal proposto na escola em objeto a ser conscientizado pelo estudante. Leontiev (1983) nos alerta que não basta que tal objeto seja percebido pelo estudante, que esteja no seu campo de percepção. “A percepção nem sempre está relacionada com a conscientização propriamente dita [...]” (p. 200, tradução nossa), mas o que é percebido pode vir a ser conscientizado se ocupar, dentro da atividade do sujeito, o lugar estrutural de objetivo da ação interna ou externa e necessariamente relacionado ao motivo da atividade determinada.

Mediante as situações-problema propostas nesta pesquisa, esperávamos encontrar, por meio das ações dos estudantes, indícios do processo de generalização, abstração e o encaminhamento no processo de formação do conceito, no caso específico, do conceito de variável, encontrando elementos que nos permitissem reorganizar as futuras ações do ensino de conceitos algébricos.

Concordamos com Bernardes (2000) quando relata:

Assim concebe-se que as ações pedagógicas na escola devem priorizar os processos pelos quais se torna possível a constituição do pensamento como reflexo ativo da realidade objetiva, de tal forma que os estudantes tenham consciência da essência do conhecimento científico, assim como de seu processo de elaboração. (p. 222-223)

E considerando que não são quaisquer ações que podem gerar alterações na forma e no conteúdo do pensamento dos estudantes, devemos criar condições para a percepção e conscientização do objeto de estudo.

5.3. *As situações-problema*

Por meio das situações-problema empregadas nesta pesquisa, esperava-se desencadear as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica nos estudantes para que estas pudessem ser investigadas. Não havia a preocupação em ‘ensinar’ um esquema ou método formal para resolver as situações propostas usando equações ou para escrever expressões algébricas ou qualquer outro conceito algébrico, mas se esperava reconhecer em que momento os estudantes sentiam a necessidade de um instrumento mais geral para a resolução das situações-problema. Conforme Booth (1995):

[...] se os alunos têm de aprender a usar os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles. Isso requer (a) que o professor reconheça que os alunos podem dispor de um método informal para um dado tipo de problema; (b) que o valor desse método informal para a resolução de problemas simples seja reconhecido e discutido; e (c) que as possíveis limitações do método sejam consideradas, simplesmente tentando-se usá-lo em problemas da mesma espécie, porém mais difíceis. Desse modo, o aluno poderá chegar a reconhecer a necessidade de um procedimento mais geral. (p. 35)

Além disso, considerando que “uma situação-problema é assumida como tal a partir do momento em que o educando assume subjetivamente uma necessidade colocada objetivamente” (JESUS, 2005, p. 72), havia uma preocupação de, no momento da análise dos dados, reconhecer de que forma a situação-problema proposta se apresentava como um problema para os estudantes (no sentido em que possuíam um motivo eficaz para resolvê-la) ou apenas como uma tarefa (com um motivo apenas compreensível para terminá-la).

As situações-problema propostas, reconhecidas como problemas para os estudantes, ainda podem ser distinguidas como problemas concreto-práticos ou problemas de aprendizagem. Rubtsov (1996) estabelece tal distinção baseado nos estudos de Davídov e que nos permitem compreender e caracterizar a atividade de aprendizagem na escola.

Para o autor, os **problemas concreto-práticos** têm caráter relativo. Em seu processo, buscam-se características específicas de ações que dêem conta apenas da resolução

do problema específico. De forma mais clara, em Garnier, Bednarz e Ulanovskaya (1996), é possível compreender o que se entende por problemas de aprendizagem

Esse termo, contudo, não designa um problema concreto que deve ser resolvido empiricamente, mas, antes, um problema que corresponde a uma classe de problemas, organizados de acordo com a análise do conceito teórico em questão. A elaboração de um 'modo de ação generalizado' permite, então, abordar os problemas concretos que são enfocados pelo problema de aprendizagem. (GARNIER; BEDNARZ; ULANOVSKAYA, 1996, p. 15)

Assim, no processo de resolução do problema de aprendizagem, buscam-se as regras de aquisição de formas de ações gerais e adquirem-se conhecimentos teóricos. O processo de resolução pode ser aplicado a uma série de tarefas, a uma série de problemas concretos e práticos. Um modelo de ação se transforma em base para realização de ações concretas referentes a uma classe de problemas.

Podemos também entender que o problema de aprendizagem contempla o movimento lógico-histórico da construção do conceito, no sentido em que capta sua essência e indica um caminho para sua apropriação por parte dos estudantes.

No momento da análise dos dados, será possível reconhecer se as situações-problema propostas poderiam ser caracterizadas como problemas concreto-práticos ou problemas de aprendizagem; se geravam a necessidade do pensamento e da linguagem algébrica do estudante; e se encaminhavam para generalizações empíricas ou teóricas.

Algumas das situações-problema escolhidas podem ser consideradas tradicionais, no sentido de que são comumente utilizadas pelos professores na escola. Entretanto, seria um fator diferencial a qualidade das interações entre os estudantes do grupo, e entre os estudantes e a pesquisadora, na maneira como as situações-problema seriam abordadas e encaminhadas.

Tais interações (o contexto de aprendizagem a ser proporcionado, a possibilidade de participação dos estudantes, o exercício do pensamento a respeito das situações, bem como a necessidade criada para o uso da linguagem algébrica por meio das situações propostas) seriam, então, um diferencial na tentativa de compreensão do desenvolvimento do

pensamento e de suas inter-relações com a linguagem pelos estudantes. Além disso, ofereceriam possibilidades de compreensão de alguns elementos para a reorganização do ensino. Convém reforçar que a pesquisadora atuaria intervindo, desafiando os sujeitos da pesquisa, questionando respostas e interferindo, sempre que fosse percebida a possibilidade de interação e diálogo entre o que se reconheceria como conceitos espontâneos e conhecimentos científicos. Nesse sentido, a pesquisadora atuaria na zona de desenvolvimento imediato dos estudantes.

Foram previstos, inicialmente, cinco encontros com os estudantes. Para cada um desses encontros, foi definida uma situação-problema. Dentro dessa situação-problema, algumas questões problematizadoras foram propostas de início por escrito, para cada grupo de estudantes, e outras foram propostas no momento da intervenção com a intenção de auxiliar o estudante a estruturar ou refletir seu pensamento. Captar o pensamento em movimento não seria tarefa fácil, por isso a elaboração dessas questões que, de forma auxiliar, orientaria a discussão entre os estudantes.

Alguns critérios foram definidos para a escolha das situações-problema:

- As situações-problema eram variadas de forma que não obedecessem a um tipo padrão, sobre o qual os estudantes já possuísem um método resolutivo empiricamente generalizado.
- As situações deveriam contemplar itens que pudessem ser resolvidos com estratégias aritméticas e/ou algébricas; outros que necessitassem de estratégias algébricas em que o uso do registro simbólico fosse imprescindível.
- Diferentes usos da variável conforme o modelo 3UV de Ursini *et al.* (2005) poderiam ser trabalhados na mesma situação (como incógnita, como relação funcional, como número geral).

- Que oferecessem possibilidades de compreender como os estudantes se apropriavam do conceito de variável.

Considerou-se, também, que muitas das dificuldades que os estudantes possuem no início e decorrer do estudo da álgebra provêm da limitação em relação ao uso da variável. No Modelo 3UV, as autoras consideram que o caráter multifacético da variável está na origem das dificuldades dos estudantes e que, para eles, é mais fácil trabalhar com situações em que a letra representa um número específico, sendo que a variação da quantidade ou as situações em que se apresenta a letra como um número qualquer são de difícil entendimento.

Tal modelo considera três usos da variável: como incógnita específica, como número geral, como relação funcional. As autoras consideram que, para que o estudante compreenda o uso da variável como incógnita, deve reconhecer e identificar, numa situação-problema, algo desconhecido que pode ser determinado, considerando as restrições do problema; interpretar os símbolos que aparecem nas equações, representando valores específicos; substituir na variável, valor ou valores que tornam a equação como uma afirmação verdadeira; determinar a quantidade desconhecida, recorrendo a modos algébricos ou aritméticos; simbolizar quantidades desconhecidas e usá-las na resolução de equações.

Para que os estudantes compreendam a variável como número geral conforme Ursini *et al.* (2005), os estudantes devem reconhecer padrões; perceber métodos e aspectos similares em famílias de problemas; interpretar o símbolo como representante de um indeterminado ente que pode assumir determinado valor; deduzir regras e métodos gerais para família de problemas; manipular, desenvolver os símbolos das variáveis; e simbolizar afirmações, métodos e regras em geral.

Por fim, para que trabalhem com problemas que abranjam a variável como relação funcional, é necessário que os estudantes reconheçam a relação entre variáveis, independente

da representação usada (tabelas, gráficos, problemas, expressões analíticas); determinem o valor de uma variável dependente, dado o valor da variável independente; determinem os valores da variável independente, dado o valor da variável dependente; reconhecer a variação das variáveis envolvidas numa relação funcional, independente da forma em que se apresentam; determinem o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação de outra; simbolizem a relação funcional baseado nos dados do problema.

A proposta do modelo 3UV é que nenhuma dessas compreensões da variável seja privilegiada, mas que aproximem os estudantes de tais usos das variáveis ora diferenciando-as, ora integrando-as em situações distintas ou na mesma situação. Assim, o estudante compreenderá cada uso e também terá a flexibilidade na passagem de um uso da variável ao outro.

No decorrer desta pesquisa, no momento em que o instrumento para o trabalho com os estudantes era elaborado, tal modelo foi considerado viável para realizar a aproximação à compreensão do conceito de variável, e procurou-se contemplar, em cada uma das situações-problema, esses três usos da variável. Entretanto, novos estudos teóricos, e a análise das situações-problema propostas e dos dados obtidos, permitiram compreender as potencialidades, limitações e implicações do uso de tal modelo no início do processo de ensino-aprendizagem da álgebra.

Com base nos critérios definidos para a escolha das situações-problema, foi realizado um levantamento de situações-problema encontradas nos livros didáticos, em propostas curriculares e em outras pesquisas relacionadas ao tema. Inicialmente foram selecionadas algumas situações-problema que compunham o que chamamos de instrumento diagnóstico²⁰. Tal instrumento foi aplicado com 34 alunos da 6ª. Série e 143 alunos do 1º. Ano do Ensino Médio da rede estadual de ensino. Os resultados de tal aplicação nos

²⁰ Entendemos que a elaboração deste instrumento diagnóstico constituiu-se em uma das ações da pesquisa, mas a apresentação completa de seus resultados não seria necessária neste momento.

ofereceram condições de reformular e complementar as situações-problema propostas aos estudantes. Além disso as situações-problema formulada foram apresentadas e discutidas com um grupo de mestrandos e doutorandos da área de ensino de Ciências e Matemática, membros do GEPAPe

Desta forma, ficaram definidas as seguintes situações-problema conforme os encontros com os estudantes:

Encontros	Situações-problema	Conteúdo	Uso da variável
1º 3 de setembro	O problema do taxista	Expressões aritméticas e algébricas	Incógnita Relação Funcional
2º 17 de setembro	Seqüências de figuras	Reconhecimento de padrões, expressões aritméticas e algébricas, relação entre os números, construção de tabelas	Número Geral
3º 1 de outubro	Fantan (jogo)	Operação divisão, expressões aritméticas e algébricas, construção de tabelas, relação entre números.	Incógnita Número Geral Relação Funcional
4º 22 de outubro	Campeonato de Futebol Questões auxiliares	Raciocínio combinatório, expressões aritméticas e algébricas, construção de tabelas	Incógnita Relação Funcional
5º 5 de novembro	A moldura do quadro A altura da pirâmide	Perímetro, expressões aritméticas e algébricas, álgebra articulada à geometria	Incógnita Número geral Relação Funcional

A seguir, são apresentadas as situações-problema propostas para os estudantes, o motivo de sua escolha e o que se esperava obter por meio dela.

1º Encontro: O PROBLEMA DO TAXISTA

O preço de uma corrida de táxi é igual ao valor da bandeirada (taxa fixa que pagamos ao utilizarmos o serviço do taxista) mais o valor que pagamos a cada quilômetro rodado. Em uma determinada cidade, os taxistas cobram R\$ 3,00 pela bandeirada e R\$ 2,00 a cada quilômetro rodado. Sendo assim, responda:

- a) Quanto devo pagar ao motorista se rodar 96 km?*
- b) Gastei R\$135,00 em uma corrida de táxi, quantos quilômetros percorri?*
- c) Se rodei um valor desconhecido de km (x) como posso indicar o valor a pagar (p)?*

Podem-se encontrar variações desse problema em livros didáticos de 6ª série²¹ e de Ensino Médio²². Para ser usado nesta pesquisa, foi reelaborado e dividido em subitens da forma descrita acima. Quando tal situação-problema foi escolhida e reestruturada para utilização nesta pesquisa, eram objetivos: verificar se durante a interação dos estudantes houve a compreensão da situação proposta; identificar as estratégias aritméticas ou algébricas usadas para resolução dos itens; se ocorria algum processo de generalização; se os estudantes recorriam à linguagem algébrica. Foi considerado, também, que durante a discussão dos estudantes e a intervenção da pesquisadora, outros fatores que atendessem ao objetivo da pesquisa poderiam surgir.

Os dois primeiros itens questionavam a respeito de uma incógnita específica e poderiam ser resolvidos por intermédio de estratégias aritméticas. Entretanto, usar números mais altos e certo grau de generalização é adequado para que a resolução seja mais facilmente encontrada. Já o terceiro item não possui solução aritmética. Nele, era exigida uma representação simbólica para o pensamento elaborado nos itens anteriores. Era necessário o conhecimento da álgebra simbólica e o uso da variável letra. Os estudantes precisariam reconhecer a presença de variáveis e explicitá-las simbolicamente. O uso de letra x para representar o valor desconhecido de quilômetros e p para representar o valor a pagar foram

²¹ IMENES, J.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. São Paulo: Scipione, 1992.

²² GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática fundamental**. São Paulo: FTD, s/d.

incluídos com a intenção de verificar se os estudantes questionavam a presença de tais letras ou as usavam como instrumentos do registro escrito, também se pretendia compreender que sentido o estudante atribui a letra que se apresentava dessa forma. Trata-se aqui do uso da variável como relação funcional, considerando o modelo 3UV.

2º Encontro: SEQÜÊNCIAS DE FIGURAS

O segundo encontro com a turma ocorreu, conforme o cronograma definido inicialmente, no dia 17 de setembro de 2007.

A situação-problema definida para esse encontro previa o reconhecimento do padrão de continuação da seqüência pela imagem visual, e também pela quantidade de palitos que havia em cada figura e que formava a seqüência de números (não explícita) no enunciado. Esperava-se que os estudantes compreendessem a regularidade da seqüência e sua continuação e, posteriormente, que usassem o registro algébrico para explicar a regularidade de tal movimento.

Observe estas figuras feitas com palitos:

FIG.1

FIG.2

FIG.3

(em negrito e itálico estão as respostas esperadas)

- a) Quantos palitos devo usar para construir a próxima figura? ***(9)***
- b) Quantos palitos devo usar para construir a FIG.8? ***(17 palitos)***
- c) Tenho 31 palitos e estou construindo a maior figura que posso. Que posição ela ocuparia nessa seqüência? ***(Figura 15)***
- d) Crie uma tabela relacionando a posição (FIG.1, FIG.2, FIG.3...) e a quantidade de palitos de cada figura.

<i>Número da figura</i>	<i>Quantidade de palitos</i>
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
...	...

- e) Quantos palitos são usados para criar a FIG.17 (**35 palitos**)
- f) A FIG.20 possui 41 palitos, quantos palitos são usados na figura anterior? (**39 palitos**)
- g) Em determinada posição, uma figura (FIG.N) é criada com 101 palitos. Em que posição ela está? (**Posição 50**)
- h) Como posso descobrir quantos palitos são necessários para criar uma figura que ocupe a posição N qualquer? (FIG.N)? *Esperava-se que os estudantes indicassem de alguma forma a regra geral da seqüência, ou em relação à figura anterior ou em relação à posição, usando a linguagem comum, sincopada ou simbólica.*
- i) Como represento a quantidade de palitos usada em uma figura (FIG.N) em relação à posição (N) que ocupa na seqüência? *Esperava-se que os estudantes se aproximassem da expressão $2.n + 1$, que também é a representação para números ímpares.*
- j) Como represento a quantidade de palitos usada em uma figura (FIG.N) em relação à figura anterior (FIG.(N-1))? *Esperava-se que os estudantes recorressem à linguagem comum, sincopada ou simbólica, para explicar que se na figura N existe uma quantidade p (por exemplo) de palitos, na figura anterior, existiram então $p - 2$ palitos.*

Nessa situação, após algumas questões de aproximação e verificação a respeito da compreensão do problema, previa-se o uso da variável como número geral . Em tal situação, tende-se a ter uma concepção de álgebra mais próxima de aritmética generalizada.

Os itens de a) até g) ofereciam possibilidades de serem resolvidos com estratégias aritméticas e por meio da contagem na sequência. Entretanto, no item g) por trabalhar com um valor numérico maior, esperava-se que os estudantes sentissem a necessidade de encontrar um procedimento geral para sua solução, em vez de contarem sucessivamente os valores das sequência.

Para a resolução dos itens h), i) e j), já se requeria o simbolismo algébrico. Há ainda um complicador nessa situação-problema: pode-se expressar a regularidade da sequência por meio de uma lei de recorrência (em relação à figura anterior) ou por meio de uma lei de posição (em relação ao número que identifica a posição que a figura ocupa). Os itens i) e j) pretendiam sugerir ao estudantes tal possibilidade.

Tal situação-problema, inicialmente elaborada considerando o trabalho com a variável no modelo 3UV de Ursini *et al.* (2005), previa também que nos itens c) e g) a variável fosse usada como incógnita, mas para isso era necessário que os estudantes tivessem captado um modo geral de solução e não resolvessem a questão apenas com seus recursos aritméticos.

3º Encontro: O FANTAN

O Fantan é um jogo que surgiu na China, há centenas de anos, e muito popular na Coreia. Depois de sua divulgação por vários países asiáticos, chegou à Europa por meio dos portugueses, que tiveram acesso a ele em Macau. Algumas adaptações ao jogo foram necessárias para que ele pudesse ser usado como recurso e material desta pesquisa. A intenção era que, por intermédio deste, os estudantes pudessem registrar quantidades, trabalhar com elas de forma manipulativa e estabelecer relações entre as quantidades, efetuando o registro geral, por meio do uso das letras como variáveis e, eventualmente, como incógnitas.

Para esse encontro, foram elaborados dez jogos do Fantan, cada um deles composto pelos seguintes materiais.

Tabuleiro (com a seguinte forma):

- ◆ 20 fichas em quatro cores
- ◆ Feijões ou pedrinhas

São necessários 4 jogadores em cada jogo.

Na primeira aula desse encontro com os estudantes, o jogo foi explicado para toda a turma na sua forma tradicional e, em seguida, na forma adaptada. Na forma tradicional, as regras do jogo, explicadas oralmente para todos os estudantes da turma, foram as seguintes:

Modo de jogar:

- ***Cada jogador escolhe uma cor e recebe as 20 fichas da cor escolhida;***
- ***Cada jogador aposta a quantidade de fichas que quiser no número que preferir do tabuleiro (de 1 a 4)²³;***

²³ O Tabuleiro do Fantan criado originariamente contém os números de 1 a 4. Pela forma como seria trabalhado em sala de aula no trabalho com a divisão, os estudantes foram orientados a que, após a divisão em grupos de 4 feijões, caso não restasse nenhum, considerassem como resto zero, ganhando aquele que apostou no número 4.

- *Os jogadores NÃO podem apostar no mesmo número;*
- *Um dos jogadores (ou o banqueiro se tiver) apanha um punhado de feijões e espalha sobre o tabuleiro. Formam-se grupos de 4 feijões;*
- *O número de feijões que sobrar indicará o número do tabuleiro que irá ganhar;*
- *O vencedor de cada rodada ganha de cada um dos outros jogadores o número de fichas igual ou menor ao que apostou. Exemplo: Se o jogador vencedor apostou 3 fichas, ele deverá ganhar 3 fichas de cada participante, a não ser que o outro participante tenha apostado uma quantidade menor do que essa;*
- *Será vencedor do jogo o jogador que tiver o maior número de fichas, e quando um dos jogadores não tiver mais fichas para apostar.*

Obedecendo a essas regras, os estudantes puderam se aproximar do material jogando algumas rodadas. Constatado que todos haviam entendido as regras do jogo, a segunda parte foi iniciada. Nesse momento, os estudantes continuariam manipulando o jogo com as regras anteriores, mas com a inclusão de uma nova regra que daria a eles um bônus na jogada.

Por meio dessa regra é que se pretendia que os estudantes prestassem atenção à manipulação da quantidade de feijões, à sua divisão em grupos, à quantidade de grupos formados e ao restante dos feijões no tabuleiro. A quantidade de feijões, a quantidade de grupos formados e o resto dos feijões no tabuleiro seriam as variáveis. Sendo a quantidade total de feijões dependente da quantidade de grupos de 4 feijões e do resto de feijões, as regras também indicadas oralmente aos estudantes foram as seguintes:

JOGAR FANTAN CONFORME AS REGRAS ANTERIORES E COM BÔNUS

- *Os jogadores devem estimar a quantidade de feijões sobre a mesa antes de iniciar a divisão por grupos de 4;*
- *O jogador que mais se aproximar do valor exato de feijões ganha uma ficha de cada um dos demais jogadores;*
- *Pode haver no jogo um participante que é o banqueiro, que controla as quantidades e preenche a tabela.*

Os estudantes, nesse momento, deveriam preencher a tabela que continha a estimativa de cada estudante, um espaço para registrar a quantidade total e um espaço para registrar o resto de feijões no tabuleiro após a divisão.

A tabela que deveria ser preenchida pelos grupos era a seguinte:

BÔNUS		Quantidade de grupos de 4 feijões (q)	RESTO (r)	Quantidade total de feijões (t)	
Jogador	Valor estimado				
					1ª rodada
					2ª rodada
					3ª rodada
					4ª rodada
					5ª rodada
					6ª rodada
					7ª rodada

Todos os estudantes da turma se envolveram com o jogo. A compreensão das regras foi rápida e transcorreu de forma tranquila. Desde o início, a relação dos estudantes com o material foi empolgante. O jogo é atrativo visualmente. Ainda que o foco de atenção, o objeto inicial da consciência, fosse a manipulação do jogo e a aproximação ao material, a inserção da regra Bônus mostrou-se acertada, modificando o foco de atenção do jogo para a relação entre as quantidades, ainda que o componente competitivo do jogo estivesse presente.

Leontiev (1983) discute a importância da visualização do material usado e o objeto da consciência e afirma:

A conclusão é que o lugar e o papel do material visual no processo de ensino se determinam pela relação que se apresenta entre aquela atividade do educando na qual o material dado seja capaz de ocupar um lugar estrutural dentro do objetivo direto de suas ações, e a atividade que conduza à conscientização do que deva ser aprendido. (p. 216, tradução nossa)

A relação entre tais atividades pode ser tripla: se tais atividades coincidem, assegura-se o efeito da visualização; a primeira pode servir de preparação para a segunda e então é necessário destacar as etapas do processo pedagógico; as atividades podem não estar relacionadas e então o uso do material visual seria inútil.

Na situação-problema proposta, a atividade do jogo Fantan serviu como preparação para a atividade que se dirigia ao objeto da aprendizagem. Nesse caso, é considerada como a relação entre os números.

Na segunda aula do dia, dando prosseguimento ao encontro, os estudantes receberam algumas questões para serem respondidas, indicadas a seguir.

RESPONDER ÀS QUESTÕES SEM RECORRER AO JOGO FANTAN

a) Qual seria o total de feijões no tabuleiro se havia 7 grupos de 4 feijões e ainda 3 sem grupo. Registre o cálculo e o resultado.

b) Se o total de feijões era de 38 e havia nove grupos de 4 feijões sobre a mesa, quantos restavam? Registre.

c) Foram organizados q grupos de 4 feijões e restaram 3 feijões. O total de feijões é t , como você representaria essa afirmação usando somente símbolos e números?

d) Complete esta tabela baseada na contagem dos feijões do Jogo de Fantan.

<i>Quantidade de grupos com 4 feijões (q)</i>	<i>Resto de feijões no tabuleiro (r)</i>	<i>Quantidade total de feijões (t)</i>
7	3	
	1	21
8		35
10	2	
	3	71

e) Como podemos representar o valor t (total de feijões) em função de q (quantidade de grupos de feijões) e r (resto de feijões não agrupados no tabuleiro)?

f) Se $q = 10$ e $r = 1$, quanto vale t ? Registre.

g) Se $t = 15$ e $q = 3$, quanto vale r ? Registre.

Essa situação, conforme o modelo 3UV inicialmente usado, contemplava o uso da variável como relação funcional e como incógnita específica.

4º Encontro: O CAMPEONATO DE FUTEBOL

Nesse encontro, os estudantes deveriam resolver uma situação-problema que envolvia raciocínio combinatório e usar o sistema simbólico algébrico para representar na forma geral a solução do problema. A situação, também como as anteriores, previa alguns itens que poderiam ser resolvidos por estratégias aritméticas e outros somente com estratégias algébricas. O foco principal estava no movimento regular.

O problema se referia à quantidade de jogos de um campeonato. Em um primeiro momento, foi entregue aos estudantes uma folha com a situação-problema descrita e algumas questões para serem respondidas, como segue:

Vamos fazer um campeonato de futebol na escola, cada time joga apenas uma vez com os demais. Nessas condições, responda:

- a) Temos 5 times para jogar, quantos jogos serão realizados?*
- b) Se realizamos 21 jogos, quantos times participaram do campeonato?*
- c) E se tivéssemos n times? Qual seria o número de jogos (j) necessário.*
- d) Se fossem 100 times no campeonato, quantos jogos teríamos?*
- e) Ao todo, serão 66 jogos no campeonato, quantos times estão jogando?*

Previa-se que os estudantes teriam certa dificuldade para elaborar a lei que representava a relação entre a quantidade de times e a quantidade de jogos do campeonato, assim também foi entregue aos estudantes uma segunda folha com questões auxiliares.

QUESTÕES AUXILIARES

- a) *Temos 4 times para jogar, atribua um nome ou uma letra para cada time, e monte a tabela de jogos do campeonato. Lembre-se: cada time só joga uma vez com os demais.*
- b) *Se temos 5 times para jogar, o primeiro time, joga quantas vezes? E o segundo time? E o terceiro?*
- c) *Se temos 7 times para jogar, o primeiro time joga quantas vezes? E o segundo time?*
- d) *Complete a tabela.*

<i>Número de times(n)</i>	<i>Quantidade de jogos de cada time</i>	<i>Quantidade de jogos no campeonato</i>
<i>5</i>		
<i>6</i>		
<i>7</i>		
<i>8</i>		
<i>9</i>		
<i>10</i>		
<i>N</i>		

Com o auxílio das questões auxiliares, ainda que se esperasse que os estudantes alcançassem a generalização e a representassem simbolicamente, e mais ainda que tal representação, identificada como uma fórmula, fosse utilizada para resolver outros itens da situação, tal expectativa se mostrou precipitada, o que poderá ser observado na análise dos dados.

5º Encontro: A MOLDURA DO QUADRO E A ALTURA DA PIRÂMIDE

Para esse encontro, a proposta era a de articular pensamento algébrico e geométrico e que os exercícios propostos contemplassem os três usos da variável, conforme o modelo 3UV. Foi enfatizada a aplicação do conceito de perímetro e o registro das medidas de um perímetro quando uma das medidas é desconhecida. Assim, esperava-se que os estudantes estabelecessem a relação entre a medida dos lados e o valor do perímetro.

1) Indique o perímetro das figuras seguintes

a)

b)

c)

2) Observe esta figura e em seguida responda:

- Como posso representar a medida da base do retângulo?
- Como posso expressar o perímetro do retângulo?
- Que valor ou valores x pode assumir?
- Se $x = 3$, qual é o valor do perímetro?
- Se o perímetro vale 36 cm, quanto vale x ?

3) O problema da moldura do quadro.

Tenho um quadro na forma retangular que quero emoldurar.

O quadro mede 50 cm de comprimento por 30 cm de largura.

Em volta de todo o quadro, deve ser colocada uma moldura de largura desconhecida.

- a) Como posso representar o perímetro do quadro sem moldura?
- b) Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?
- c) Se a largura do quadro é de 3 cm, qual será o perímetro do quadro com moldura?
- d) O perímetro do quadro é de 208 cm, qual é a largura da moldura?
- e) Vou pendurar o quadro em uma parede, mas ele não pode ultrapassar 66 cm de comprimento e 45 cm de largura. Qual deve ser o maior valor inteiro possível para a largura da moldura?

4²⁴. Estamos há quatro mil anos. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras.

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

“Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos no depósito 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma, não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. No entanto, eu preciso deixar escrito

²⁴ Problema extraído de: SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental**. 2004. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito, que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço?”

Como escrever isso com a linguagem matemática?

Convém ressaltar que tais situações-problema, excetuando-se o jogo Fantan, pouco conhecido, e o problema da altura da pirâmide, podem ser facilmente encontrados com variações em livros didáticos, sendo identificados como promovedores de aprendizagem ou como instrumentos de outras pesquisas como as de Bonadiman (2007) e Viola dos Santos (2007).

5.4. Os encontros e a obtenção dos dados

Os encontros aconteciam sempre às segundas-feiras durante o horário da aula de Matemática. A segunda-feira era o único dia da semana que a professora tinha duas aulas com a turma. Entretanto, essas aulas não eram consecutivas. Conforme o horário da escola, a sequência de aulas era a seguinte:

2ª feira	4ª Aula (15:50 às 16:40)	MATEMÁTICA
	5ª Aula (16:40 às 17:30)	GEOGRAFIA
	6ª Aula (17:30 às 18:20)	MATEMÁTICA

Ao primeiro olhar, consideramos que essa interrupção entre as aulas não foi prejudicial. Mesmo que os estudantes ainda não tivessem encerrado algum item da situação proposta na primeira aula do dia, retornavam a ele na segunda aula. Entretanto, não temos elementos para analisar o que ocorreria caso as aulas fossem seguidas.

No primeiro encontro na sala de aula, foi solicitado aos estudantes que se subdividissem e se organizassem em grupos com no máximo quatro estudantes. Para a composição de tais agrupamentos, não houve interferência da pesquisadora nem da professora. Os estudantes se reuniram com os colegas com quem tinham afinidade ou que estavam mais próximos no momento. Todos os grupos realizariam, então, as situações-problema propostas. Em função da necessidade de gravação em áudio e vídeo e as restrições técnicas que existem em relação à qualidade do áudio dos equipamentos, três grupos foram separados do restante da turma, sendo as gravações destes realizadas na biblioteca da escola. Os primeiros três grupos que se formaram, tendo todos os integrantes entregue as autorizações para gravação e filmagem, foram os escolhidos. Esses três foram acompanhados simultaneamente pela pesquisadora, cuja função foi definida como sendo a de propor a situação-problema por escrito, acompanhar seu desenvolvimento pelo grupo de estudantes e atender no esclarecimento de dúvidas dos grupos quando solicitada. Nesses momentos, ocorreria a intervenção no sentido de esclarecer pontos incompreendidos do problema e outros questionamento referentes que levassem ao movimento do pensamento refletido na linguagem dos estudantes. Já na biblioteca da escola, local onde se realizaria a pesquisa, os grupos se posicionaram com certa distância um do outro, para que se evitasse a comunicação entre os grupos. Um dos grupos foi filmado e com os outros dois grupos foram realizadas somente gravações em áudio para que fossem analisadas suas falas.

Em relação à intervenção propriamente dita, convém destacar que a pesquisadora não era a professora da turma. A maior preocupação foi a de manter o objeto de estudo e o objetivo da pesquisa de investigar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes. Por meio de tais manifestações, esperava-se encontrar na relação desses dois processos indícios da origem das dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico e, então, sim encontrar elementos para a reorganização da prática de ensino. Considera-se

ainda que um bom domínio do conteúdo é insuficiente para que um professor supere as dificuldades metodológicas, cognitivas inerentes ao conteúdo e promova a aprendizagem. Assim, definia-se primordialmente a atuação da pesquisadora.

A preocupação excessiva com o objeto da pesquisa, ainda que ciente da impossibilidade de neutralidade, encaminhou dessa forma as ações da pesquisadora em sala de aula, procurando intervir com os estudantes de forma que pudessem manifestar o pensamento e a linguagem, e por meio deles pudessem ser identificadas as dificuldades dos estudantes que se iniciam no conhecimento algébrico.

Por outro lado, havia a consciência de que aqueles cinco encontros gerariam aprendizagem de algum tipo para os estudantes e também para a pesquisadora. Entretanto, em nenhum momento se pretendeu formalizar um conceito matemático ou avaliar quantitativa ou qualitativamente a aprendizagem alcançada, o que pode dar a impressão de que não houve aprendizagem, o que não pode ser considerado como verdadeiro.

Enquanto resolviam as situações-problema propostas, os estudantes discutiam, registravam sua maneira de pensar, procuravam estratégias para melhorar a expressão de seus pensamentos e, com suas possibilidades e condições, encontravam soluções para as situações propostas. Dessa forma geravam algumas aprendizagens que aqui chamaremos espontâneas, não intencionais. Tais aprendizagens podem ocorrer de forma aleatória no convívio com outras pessoas, nas brincadeiras, no trabalho e também na escola. Entretanto a intencionalidade e organização para que determinadas aprendizagens ocorram deve ser objeto do ensino. Sendo assim, concordamos com Itelson (1979) que define ensino:

[...] como o processo de interação entre quem ensina e quem é ensinado, como resultado do qual neste se formam determinados conhecimentos, atitudes e hábitos. E se formam só no caso em que as influências do professor provoquem determinada atividade física e psíquica do aluno. (ITELSON, 1979, p. 216, tradução nossa)

Trata-se de um processo, portanto, em que a intenção do professor de gerar a aprendizagem é fundamental. Voltando à pesquisa desenvolvida, nesse caso, entretanto, é

inevitável que se perceba nos dados a oscilação de ações como pesquisadora, procurando investigar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes, e como professora, procurando gerar a compreensão dos estudantes em relação às situações-problema propostas. Para tanto, a estratégia da professora/pesquisadora era a de buscar na fala do estudante o que refletisse o pensamento que já existia na sua estrutura cognitiva (papel da pesquisadora), e que pudesse ser usado como ponto de apoio para o que se pretendia ensinar ou fazer com que o estudante entendesse (papel da professora). Assim, questionamentos sobre o que os estudantes expressaram, o uso de paráfrases, as correções e os pedidos de explicações pretendiam dinamizar a relação entre a pesquisadora, os estudantes e o objeto de conhecimento foram usados em todos os momentos.

Por considerar que os momentos de atuação como pesquisadora foram predominantes, e que não havia uma preocupação em consolidar uma aprendizagem formal durante os encontros, será usado daqui por diante o termo pesquisadora para referência às intervenções. O principal papel da pesquisadora durante os encontros com os estudantes era o de oferecer condições para que estes se manifestassem livremente, explicitassem o pensamento, emitissem juízos e deduções, apresentassem hipóteses, ouvissem as intervenções dos colegas, argumentassem e negociassem os sentidos de palavras e símbolos. Ao exercer esse papel, gerava a aprendizagem, mas não como professora que tem como principal objetivo gerar tal aprendizagem. Tendo consciência que, para tanto, eram necessárias outras ações características da Atividade de Ensino. Considerando também que o objeto de ensino é diferente do objeto da pesquisa.

No próximo capítulo, serão realizadas algumas considerações sobre os sujeitos da pesquisa, as potencialidades e as limitações das situações-problema propostas, bem como a análise dos dados obtidos com os estudantes em relação às manifestações do pensamento e da linguagem algébrica.

6. Análise e síntese dos dados obtidos

6.1 Caracterizando os sujeitos da pesquisa

Desde o início, os responsáveis e os próprios estudantes foram informados que a proposta era de uma pesquisa relacionada ao ensino de álgebra. Em momento algum, a pesquisa foi relacionada ao desempenho individual de cada estudante ou a qualquer espécie de avaliação.

Os estudantes envolvidos nesta pesquisa se organizaram em grupos por escolha própria, portanto, considera-se que entre eles havia certo grau de cumplicidade. Durante a pesquisa, os grupos de estudantes não conversavam entre si. A seguir, serão caracterizados os grupos de forma geral. Os estudantes serão identificados pelas iniciais de seus nomes.

Grupo 1: Esse grupo, composto pelos estudantes B, C, L e G, foi filmado em todos os encontros. Durante os encontros, os estudantes desse grupo mostraram-se motivados em resolver as situações-problema propostas. O estudante C foi o que menos participou. A discussão entre os estudantes desse grupo foi marcante, bem como as explicações de um estudante a outro. A interação entre os sujeitos oscilava entre momentos de competitividade e cooperação. A busca pela resolução correta e com sentido dos problemas incentivava as discussões. Os estudantes se orgulham de serem os melhores estudantes em matemática, conforme disseram antes de iniciar o problema do 1º Encontro. Nesse grupo, foi possível perceber que, ainda que tenham sido explicitados os motivos da intervenção, alguns diálogos dos estudantes indicam uma preocupação como se o desempenho do grupo fosse avaliado com uma nota.

Grupo 1 – Sequencia de Figuras

L: Deixa eu me concentrar, se a professora falou alguma coisa disso...

G: Tem que usar, vai ficar melhor nossa nota.

B: Mas eu acho que tem que ficar melhor pra gente.

Grupo 2: O grupo era composto pelas estudantes M, Sh, J e Sa, que também mostrava interesse em resolver as situações propostas. A estudante Sh era a que menos se manifestava. Por vezes, as estudantes encerravam a tarefa proposta, ainda que não estivessem certas de sua resposta. A estudante M, que não se manifestava com autoridade nem tinha suas falas tão freqüentes, era tomada como referência para o grupo. Em determinado episódio, em um momento em que a estudante não estava presente, as demais estudantes se mostraram inseguras para continuar resolvendo a situação-problema proposta.

Grupo 3: Os estudantes desse grupo que participaram dos cinco encontros foram Th, Ma, Mô e Pa. No primeiro encontro, um estudante participante do grupo (V) iniciou a resolução da situação-problema proposta, mas por ter descido sem a autorização da professora, teve que retornar à sala, entrando em seu lugar a estudante P que não se mostrava integrada ao grupo. A relação entre os estudantes desse grupo desde esse momento não se mostrou forte. A relação com as situações-problema também não era em busca de sentido para a solução, mas sim para terminar o que estava proposto. Muitas vezes, a conversa se dispersou, sendo que a falta de envolvimento das estudantes com a situação-problema podia ser notada, ainda que se mostrassem interessadas em resolver a questão na presença da pesquisadora. Muitos podem ter sido os motivos para tal ocorrido, um deles pode estar relacionado às dificuldades cognitivas que as estudantes se deparavam ao enfrentar a situação-problema; por outro lado, tais situações podem não ter se constituído efetivamente como problemas para as estudantes, mas simplesmente como tarefas: tinham um motivo apenas compreensível que as estimulava a encerrar a situação-problema, e não se preocupavam em encontrar um resultado correto ou compreensível para elas.

No ultimo dia da pesquisa, a professora da turma faltou e os estudantes ficariam no pátio aguardando a aula seguinte. Entretanto, era um dia previamente combinado para a realização da pesquisa. Todos os integrantes dos outros dois grupos compareceram à biblioteca para dar prosseguimento à pesquisa, entretanto apenas a Pa, integrante do grupo 3, compareceu e avisou que as demais haviam resolvido não vir. Mesmo assim, foi pedido que a estudante fizesse a pesquisa, ainda que individualmente e gravasse a maneira como resolveu cada item, ação para a qual a estudante se mostrou bastante disposta. Foi marcante o depoimento que a estudante gravou sozinha e indicou os desentendimentos entre tal integrante e o restante do grupo, bem como a diferença de interesses e motivos.

Pa: finalmente vou ficar com este gravador, então tá, indique o perímetro da figura seguinte, fácil...5 mais 3, 8, não, mais fácil, 5 mais 5, 10, 10 mais 8...18, 18 mais 3 ... p igual a 21

Em outro momento:

Pa: Sabe, fazer sozinha é bem melhor do que junto com aquelas meninas que eu não posso expressar minhas idéias, ficam mandando eu calar a boca toda hora...se eu deixar elas, erram tudo, quase tudo, mas a maioria erram...eu quero ajudar mas ninguém deixa.....eu tô vendo que estão fazendo errado, quero corrigir, e elas toda hora ficam me mandando calar a boca, cala a boca, cala a boca, cala a boca...aí quando eu consegui falar todas elas perceberam que eu estava certa.

Provavelmente, a estudante se referia ao terceiro encontro, no qual teve mais possibilidade de se manifestar, recebendo inclusive elogios de uma colega. Nesse encontro, com a ausência de uma das estudantes, que de certa forma influenciava as demais no sentido de não dar atenção à colega, ela teve condições de se manifestar e se fazer ouvir. Participou muito mais das falas e teve o reconhecimento explícito de uma das colegas, o que é possível encontrar nesse recorte do diálogo.

Pa: 5 fileira...5 grupos quer dizer...5 vezes 4 é 20 mais 1... 21.

M: É, tá certo... nossa você está raciocinando bastante...hein,... quando era a Th, que não deixava você falar...

6. 2. Categorias de análise dos dados

O objetivo principal desta pesquisa é o de investigar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes de 6ª série por meio de situações-problema. Considerando que, para Caraça (1952), um isolado é um conjunto de seres e fatos recortado arbitrariamente da realidade e que se isola de outros seres e fatos a eles relacionados, entendemos que as situações-problema definidas constituem o isolado menor, de uma série de isolados (os grupos determinados, a turma escolhida, a escola, a região etc.). A partir de tal isolado, podem ser estudados elementos fundamentais desta pesquisa: o pensamento algébrico e a linguagem algébrica dos estudantes. O pensamento e a linguagem, como componentes do isolado, estão relacionados. Entre eles, existem relações de interdependência. Ao conjunto de relações que se estabelecem entre os componentes do isolado, Caraça (1952) denomina Qualidade.

Tais relações se desenvolvem em dois sentidos: do pensamento para a linguagem e da linguagem para o pensamento. Conforme Caraça (1952), “a relação é uma, simplesmente os seus dois sentidos têm significados distintos para os respectivos conseqüentes” (p. 113). Dessa forma, optamos por identificar três categorias de análise: duas delas relacionadas aos componentes do isolado – a **Qualidade do Pensamento**, e a **Qualidade da Linguagem** –, e a outra relacionada ao conhecimento algébrico – o **conceito de variável**. Consideramos ainda que desse modo poderíamos analisar o objeto de estudo, constituindo-o a partir das relações que se estabelecem e não tentando defini-los previamente.

Não se ignora o fato de que ao tentar expor tal compreensão, demarcando categorias de análise dos dados desta pesquisa e procurando usar a linguagem escrita para explicar o pensamento que se elabora, de certa forma o engessamos, mas ao mesmo tempo esse é um movimento necessário de síntese, organização e estruturação deste.

A terceira categoria, relacionada ao **conceito de variável**, foi estabelecida como terceiro componente a ser destacado do isolado, considerando que tal conceito é de importância fundamental no movimento lógico-histórico do pensamento e da linguagem especificamente algébrica.

A seguir, pretende-se destacar o que nas situações-problema e nos dados obtidos por meio delas será analisado em cada uma dessas categorias, organizadas a partir dos estudos e da síntese teórica elaborada nos capítulos anteriores.

6.2.1 Qualidade do pensamento

❖ ORIGEM E MOVIMENTO DO PENSAMENTO

Pensamento e atividade (motivos e ações)

Se consideramos que o pensamento se origina e se desenvolve orientado pela prática (KOPNIN, 1978) e que a atividade humana (composta por outros elementos, motivos, ações, operações, necessidades, objetivos etc.) permite o estudo do desenvolvimento do psiquismo (LEONTIEV, 1983) e, conseqüentemente, do pensamento como função psicológica superior (VIGOTSKI, 2001), estabelecemos a necessidade de identificar em que medida as situações-problema propostas foram motivadoras da atividade dos estudantes, compreendendo a distinção entre motivos apenas compreensíveis e motivos eficazes.

Nesse sentido, as ações dos estudantes no momento de resolução das situações-problema nos auxiliaram em tal identificação, tendo como referência o conceito de Atividade Orientadora, na forma como sintetizado por Galperin (1976). Ao determinar um conteúdo para a ação, a atividade orientadora indica um caminho, importante no processo de

aprendizagem por oferecer ao sujeito, no caso, o estudante, a possibilidade de orientação de suas ações para a realização de um plano determinado.

O movimento lógico-histórico do pensamento e o processo de formação do conceito

Guiado pelas leis que existem na realidade objetiva, o pensamento (o lógico) reflete o movimento histórico. Assim, torna-se importante que se acompanhe o movimento histórico do conceito de variável para que se possa acompanhar o movimento do pensamento e da linguagem algébrica. Por outro lado, acompanhar tal movimento do pensamento e da linguagem algébrica pode nos trazer a compreensão da formação do conceito de variável. Os dados refletirão as aproximações existentes ou não para esse movimento.

❖ FORMAS DE PENSAMENTO

Pensamento empírico e pensamento teórico

São formas de pensamento a generalização, a abstração e o conceito que, em sua unidade, levam ao conhecimento. Conforme Dávidov (1988), “as particularidades da generalização, em unidade com os processos de abstração e formação de conceitos, caracterizam a nosso ver, o tipo geral de pensamento do homem” (p. 100, tradução nossa).

Um mesmo objeto pode ser caracterizado por meio de diferentes formas de pensamento.

Se este objeto for examinado por si mesmo, fora de um certo sistema e conexão com outros objetos, revelará conteúdo do pensamento empírico. Quando esse mesmo objeto for analisado dentro de uma certa entidade concreta, só aqui revelará suas genuínas peculiaridades, e então aparecerá como fator no conteúdo do pensamento teórico. (DAVÝDOV, 1982, p. 320, tradução nossa)

No pensamento empírico, a **generalização** é um processo no qual, por meio da comparação, o indivíduo separa, de um grupo de objetos, algumas propriedades que se repetem. Tal identificação do que é comum é sempre algo **abstrato**. O conceito, em geral expresso por uma palavra, forma-se por meio da verbalização de tal característica comum aos objetos e reflete as propriedades externas destes.

No pensamento teórico, busca-se compreender o objeto do conhecimento em movimento. Formar um conceito significa reproduzir mentalmente seu conteúdo, bem como compreender sua essência. “Ter um conceito de um objeto significa dominar o método geral de sua estruturação e o conhecimento de sua procedência” (DAVÝDOV, 1982, p. 359, tradução nossa). Assim, quando se conhecem todos os aspectos de um objeto a partir de um único princípio, geral, e se pode representar suas inter-relações e interdependência, conhece-se a essência do objeto. Conforme Davýdov (1982):

Conhecer a essência significa achar o geral como base e como fonte única de uma certa diversidade dos fenômenos, e logo mostrar como esse ente geral determina o surgimento e a interconexão dos fenômenos, ou seja, a existência do valor concreto. (p. 347, tradução nossa)

A abstração que é forma do pensamento teórico, também chamada abstração substancial ou essencial (diferente da abstração no pensamento empírico), gera o abstrato por meio de um processo de análise ao reduzir as diferenças existentes no objeto ou fenômeno à essência destas. Para Rubinstein (1965):

A análise característica do pensar científico é inseparável da abstração. O caminho que se percorre com ele vai da realidade *concreta* e não diferenciada do percebido, às abstrações obtidas no processo de análise e fixadas nos conceitos. (p. 164, tradução nossa)

O abstrato gerado dessa forma é, portanto, algo simples, desmembrado e ainda não desenvolvido. É o que Davýdov (1982) denomina ‘a célula’. A revelação das contradições nesta célula e a determinação de um método de solução de tais contradições, em um processo

de síntese, encaminham o pensamento do abstrato ao concreto²⁵, que só existe por meio das conexões internas dentro de um sistema de coisas singulares. Sendo assim, o processo de síntese conduz à explicação das conexões dos fenômenos observados, e “[...] permite inferir teoricamente umas leis de outras assim como fundamentar teoricamente relações de dependência estabelecidas por procedimentos empíricos e demonstrá-las” (RUBINSTEIN, 1965, p. 165, tradução nossa).

Os tipos de generalização diferentes para o pensamento empírico e teórico permitem também que se estabeleça a distinção entre situação ‘genérica’ e situação ‘generalizada’. A partir dos estudos de Davídov, Lins e Gimenez (1997) esclarecem:

A situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares..., ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares. (p. 114)

Assim, também podemos identificar nas situações-problema, propostas nesta pesquisa, situações “genéricas” ou “generalizadas”.

Considerando que o conhecimento algébrico é essencialmente um conhecimento científico e que, portanto, com ele se pode trabalhar prioritariamente o pensamento teórico, há que se considerar a importância da elaboração de situações para os estudantes que encaminhem para esse tipo de pensamento. É importante que as atividades de ensino contemplem a compreensão do objeto (no caso do conteúdo algébrico, o conceito de variável) em movimento, para captar sua essência. Em função disso, nas situações-problema propostas, procuraremos captar durante a transcrição das entrevistas o momento em que isso ocorreu ou não, contemplando possibilidades e revisão da proposta para que tal pudesse ocorrer.

²⁵ O termo concreto tem significados diferentes. Na generalização empírica, o concreto simboliza o que pode ser visto, tocado, manipulado. A ascensão se dá no movimento do concreto ao abstrato. Na generalização teórica, o concreto reflete as contradições internas de um sistema. Surge no processo de síntese. A ascensão se dá no movimento do abstrato ao concreto.

Pretende-se durante a análise dos dados identificar, por meio das situações-problema e do modo de resolvê-las, que forma de pensamento (empírico ou teórico) se encaminham no estudante.

Kopnin (1978) identifica como forma de pensamento os juízos, os conceitos e as deduções. Compreende-se que o encaminhamento do pensamento teórico do abstrato ao concreto contempla tais formas, considerando que no processo de análise dos dados se apresentam quaisquer aspectos do objeto do conhecimento: os juízos. “A função principal do juízo é desmembrar e avaliar” (KOPNIN, 1978, p.143)

Na medida em que a análise se desenvolve e se aprofunda neste processo, os juízos se transformam em conceitos, as deduções originadas dos juízos dão lugar às deduções originadas dos conceitos que refletem a essência do objeto do conhecimento, e revelam as contradições neste e os modos de resolvê-las, ascendendo ao concreto.

O movimento do pensamento na relação pensamento e linguagem

Nesse sentido, tentar-se-á captar na análise dos dados a qualidade do pensamento algébrico expresso e refletido na forma de linguagem em sua simbolização mais formal (desconsiderando registros retóricos ou sincopados). Para tanto, também se considerará a distinção feita por Caio Prado Jr. (1963) entre o que chama de pensamento discursivo e pensamento conceitual.

Tendo a preocupação com o fato de que o pensamento não se expressa em sua forma pura na forma de linguagem, Prado Jr. (1963) destaca a distinção entre o pensamento discursivo (associado à linguagem) e o conceitual. Destaca, assim, alguns movimentos que caracterizam as formas de pensamento, o raciocínio, a elaboração e a explicitação. Em determinados momentos da análise dos dados, procuraremos compreender o que se exige do

estudante: se a elaboração de um pensamento conceitual ou a explicitação por meio do pensamento discursivo.

6.2.2. Qualidade da linguagem

A linguagem e suas funções na relação pensamento e linguagem

Ainda que se considere que a linguagem não é sinônimo do pensamento e não o reflete em sua forma pura, suas diversas e importantes funções não podem ser questionadas.

Leontiev (1975) destaca algumas das funções da linguagem como instrumento do pensar: “vemos, pois que a linguagem constitui o material básico de que dispõe o homem para planejar sua atividade, e que nisso se manifesta a capacidade ou função da linguagem como instrumento do pensar” (p. 57) e, dessa forma, podendo usá-la como elemento regulador de seu comportamento; instrumento do conhecimento: na medida em que na linguagem se fixam os resultados do conhecimento, “[...] por um lado, e no sentido direto da palavra, fixamos na linguagem os resultados do nosso conhecimento. Por outro lado, podemos conhecer o que há de novo nos objetos, nos fenômenos e nos processos da realidade, graças à linguagem, servindo-nos dela” (p. 76); é também meio de apropriação da experiência histórico-social.

Assim, consideramos nesta pesquisa as diferentes funções da linguagem: como forma de pensamento, estruturando-o; como instrumento do pensamento, refletindo-o; como forma de ser do conhecimento, fixando seus resultados e possibilitando a apropriação dos significados da sociedade histórica; mediando a comunicação etc. Portanto, consideramos o papel da linguagem algébrica e procuramos investigar nos dados da pesquisa suas diferentes funções para os estudantes, procurando não confundir os resultados do pensamento com o processo do pensamento. “[...] na palavra não está contido o próprio pensamento, mas sim a marca do pensamento” (LEONTIEV, 1975,p. 94).

A transformação da atividade coletiva (experiência social) em atividade individual (experiência do sujeito) ocorre por meio de um processo de interiorização (VIGOTSKI, 2001) e se dá no processo de comunicação entre as pessoas. Tal processo é mediado pela linguagem como instrumento simbólico. A linguagem cumpre assim diferentes funções em relação ao pensamento: o estrutura e o organiza, o reflete. Assim é também com a linguagem algébrica, que se pode estruturar o pensamento algébrico, refleti-lo, servir como mediadora na comunicação entre as pessoas, oferecendo uma maneira diferente de perceber os fenômenos da realidade objetiva. Há que se destacar que o pensamento não se reflete na linguagem em sua forma pura, importante para o pensamento algébrico. No movimento histórico da álgebra retórica, geométrica, sincopada e simbólica, é possível acompanhar o movimento do pensamento algébrico associado à linguagem que se vai constituindo no sentido de mediar a comunicação, primeiro por palavras (Diofanto), por figuras (Euclides), por símbolos (Viete), linguagem que se mantém atual e universalmente. Podemos compreender esse movimento da linguagem na tentativa de expressar e refletir o movimento do conceito.

Também procuraremos identificar nos dados as possibilidades oferecidas pelas situações-problema do recurso às diferentes formas de linguagem matemática, palavras, figuras, símbolos etc. E de que maneira o uso dessas formas diferentes de linguagem permite aos estudantes expressar o movimento do pensamento.

Sentidos pessoais e significados atribuídos ao sistema simbólico-algébrico

A linguagem, como um sistema simbólico, é mediadora entre os sujeitos. Por meio dela, os indivíduos se comunicam e geram significados históricos coletivamente para os fenômenos e objetos da realidade. Possibilitam que gerações seguintes se apropriem de tais significados, e transformem e revejam seus sentidos pessoais atribuídos aos objetos e

fenômenos da realidade objetiva. A linguagem algébrica, atualmente formalizada e sintetizando conceitos algébricos importantes em símbolos conhecidos universalmente, precisa ser ensinada aos estudantes. Por meio dos dados desta pesquisa, procuramos identificar alguns dos sentidos pessoais dos estudantes atribuídos aos símbolos algébricos e de que forma tais sentidos pessoais se aproximam ou se distanciam dos significados historicamente atribuídos à linguagem, atrelados ao conceito algébrico. Conforme Schoen (1995):

Assim, o simbolismo algébrico que ensinamos na *high school* é um fenômeno dos últimos cinco séculos e é produto de um desenvolvimento gradual que levou um tempo dez vezes maior. Lançar os alunos precipitadamente ao simbolismo algébrico é ignorar a necessidade de uma fundamentação verbal e de uma simbolização gradual sugeridas pela história e apoiadas por pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra. (p. 138)

6.2.3. O conceito de variável

Formação do conceito

O olhar filosófico de Kopnin (1978) nos indica que “para revelar a essência do objeto, é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto” (p. 184). Para romper tal círculo, ele considera que o estudo do objeto deve ser iniciado pelo seu fim, por sua forma que contenha os aspectos essenciais suficientemente desenvolvidos. Neste estudo, por meio das abstrações autênticas, características do pensamento teórico, é que se capta a essência do objeto ou fenômeno, suas definições primárias e abstratas. Ao reproduzir tal essência, descobre-se a história desse fenômeno. Por outro lado:

O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos com o conhecimento da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam (KOPNIN, 1978, p.186)

Trata-se da unidade do histórico e do lógico como premissa para compreender a essência de um objeto, sua estrutura, sua história e seu desenvolvimento.

Por sua vez, os estudos psicológicos de Vigotski (2001) nos indicam três estágios no processo de desenvolvimento dos conceitos na criança: o das imagens sincréticas, o dos complexos (no qual destacamos o pseudoconceito) e o dos conceitos propriamente ditos. Por meio dos resultados desta pesquisa, poder-se-á investigar os momentos em que supomos que os estudantes trabalham com pseudoconceitos da variável e o momento em que trabalham com o conceito efetivamente formado e apropriado de variável, considerando que pseudoconceitos e conceitos coincidem no produto em que apresentam, mas são diferentes por suas operações intelectuais. Consideramos também, conforme Sforzi (2004), que “o que revela o conceito não é o objeto ou a palavra, mas seu movimento constitutivo como produto e, ao mesmo tempo, como elemento orientador das ações humanas” (p. 128).

Para identificar o momento em que se forma o conceito de variável, procuraremos identificar o momento em que surgem os nexos conceituais deste, que são, conforme Sousa (2004), estabelecidos por palavras como relação, dependência, movimento, campo numérico, e a que linguagem se articula, manifestando-se como variável palavra, variável figura, variável numeral, variável letra, procurando encontrar momentos em que os estudantes estão formando o conceito e não somente aplicando-o.

Considerando o conceito teoricamente formado de variável como um conhecimento científico, também procuraremos nos dados da pesquisa perceber a inter-relação entre os conceitos aritméticos e os conceitos algébricos, principalmente o de variável, percebendo que em todas as situações-problema alguns itens podiam ser resolvidos aritmeticamente.

Com os dados dos estudantes em mãos, será possível analisar as potencialidades e limitações das situações-problema propostas em oferecer para o estudante a formação do

conceito de variável, em sua forma teórica, e não somente sua aplicação e uso em situações particulares.

As três categorias propostas relacionam-se ao pensamento algébrico, à linguagem algébrica e ao conceito de variável (como conceito algébrico). Entretanto, durante a análise dos dados, pela maneira como foram propostas e estruturadas as tarefas, será difícil desvincular a relação aritmética e algébrica. Assim, muitas vezes, serão feitas referências à formação de um pensamento aritmético, ao uso de sua linguagem e à aplicação de conceitos aritméticos, com suas implicações, possibilidades e limitações em relação ao ensino de álgebra.

Tais categorias, elaboradas a partir dos estudos teóricos realizados, foram referência para analisar as situações-problema propostas e os dados obtidos dos estudantes nas gravações em áudio e vídeo. A seguir, está a síntese elaborada com base na análise dos dados e conforme o objetivo inicialmente proposto de investigar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes em fase inicial do ensino de álgebra.

6.3. Descrição geral dos encontros

Nesta pesquisa, encontram-se dois caminhos que se entrecruzam constantemente. O caminho da pesquisadora que, em algumas situações-problemas isoladas, procura captar algumas manifestações do pensamento e da linguagem dos estudantes, processos que possuem a característica de interdependência e fluência, tentando identificar qualidades diferentes. E o caminho dos estudantes frente a situações-problemas desconhecidas que contemplam aplicações do conceito algébrico de variável, conceito esse que, como síntese do ser e não ser dos elementos de um conjunto, contém a fluência e permite que se expresse a interdependência entre dois conjuntos de números.

O caminho da pesquisadora se inicia muito antes, sendo que uma parte dele já foi descrita e analisada, e elaboradas as sínteses teóricas e também as relacionadas às situações-problema propostas para os estudantes. Nesse momento, o que se pretende é explicitar as sínteses elaboradas a partir dos dados dos estudantes ao resolverem as situações-problema propostas.

A não existência de linearidade e dependência entre as situações-problema propostas nos encontros permitiu que eles fossem decompostos e deles se extraíssem os trechos característicos e esclarecedores de como a análise foi realizada a partir de cada uma das categorias elaboradas (Qualidade do pensamento, Qualidade da linguagem, Conceito de Variável). No momento da análise, muitos foram os juízos emitidos e conceitos formados, e seria impossível registrar todo este processo para cada uma das situações-problema propostas.

A interdependência e fluência do objeto de estudo, o pensamento e a linguagem algébrica dos estudantes também não pôde ser totalmente expressa em forma de linguagem, mesmo que nos detivéssemos em uma descrição extensa, rigorosa e fiel de todos os momentos dos estudantes ao resolver as situações-problema propostas. Assim, na tentativa de manter claro ao leitor como ocorreram os encontros e como se processou a análise, neste item, apresenta-se uma breve descrição dos resultados gerais de cada encontro e, no próximo item, a explicitação das sínteses elaboradas, tendo em vista as categorias de análise.

Tais sínteses serão ilustradas com trechos dos diálogos dos estudantes. Isso explica por que nem todos os grupos nem todas as situações serão contempladas em todos os itens, caso os dados obtidos por meio delas não tenham sido os mais esclarecedores e não contenham a essência da síntese descrita. É importante perceber que não se pretende identificar o que é comum entre os três grupos, ainda que em algumas vezes se tenham percebido as mesmas dificuldades entre eles.

1º Encontro – O problema do taxista

Com o aprofundamento das leituras e os resultados obtidos com a pesquisa em relação às categorias de análise propostas, foi possível constatar que nenhum dos itens da situação-problema prevê a discussão a respeito do campo de variação ou considera o movimento da variável, sua fluência. Os nexos conceituais da variável não se apresentam nesse tipo de situação, o que acaba por limitar que se encaminhe, no estudante, o pensamento teórico.

O fato de os itens **a** e **b** da situação problema do taxista oferecerem a possibilidade de serem resolvidos por estratégias aritméticas permite que se verifique se o estudante compreendeu a situação-problema proposta, mas não garante o registro algébrico solicitado no item **c**. Em tal item, o que se espera é que os estudantes compreendam que se pode elaborar uma sentença que relacione os valores de p e x , sem que tais valores sejam previamente conhecidos. Entretanto, a simples proposição desse item ou mesmo de tal situação-problema não garante tal compreensão. O registro algébrico, nessas circunstâncias, não permite afirmar que o estudante realmente compreende que tais valores podem variar e qual a relação de interdependência que há entre eles. Poderiam ter substituído o número particular pela linguagem simbólica solicitada, o que caracterizaria a variável sendo usada como pseudoconceito no dizer de Vigotski (2001).

A resolução do item **c** do problema requer a aplicação do conceito de variável e conduz ao uso do sistema simbólico algébrico. A intervenção que se processou e se manteve ainda presa à linguagem não permitiu que os estudantes percebessem o movimento da variável. Assim, os estudantes se mantiveram atentos à maneira de registrar um pensamento e um conceito que ainda não estava realmente formado.

Nessa situação-problema, as variáveis quantidade de quilômetros rodados e preço a pagar estavam explicitadas no enunciado. Dado o valor de R\$ 3,00 pela bandeirada e R\$ 2,00 pelo quilômetro rodado, os três grupos conseguiram encontrar aritmeticamente o valor a pagar, dada certa quantidade de quilômetros (96km), e efetuaram o cálculo:

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3 ²⁶
$ \begin{array}{r} 2,00 \\ \times 96 \\ \hline 1200 \\ 1800 + \\ \hline 192,00 \\ + 3,00 \\ \hline 195,00 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 96 \\ \times 2 \\ \hline 192 \\ + 3 \\ \hline 195 \end{array} $	$ \begin{array}{r} a) \quad 96 \\ \times 2 \\ \hline 182 \\ + 3 \\ \hline 195 \end{array} $

O problema inverso de encontrar a quantidade de quilômetros dado o valor a pagar (R\$ 135,00) foi resolvido corretamente pelos grupos 1 e 2, mas os estudantes cometeram inicialmente o mesmo erro: desconsideraram o valor da bandeirada e dividiram o valor dado pelo preço de cada quilômetro ($135:2 = 67,5$). O erro só foi percebido por que o valor obtido não era um número inteiro, o que causou estranhamento nos estudantes que repensaram o problema e então o resolveram corretamente, efetuando as operações inversas, primeiro retirando a bandeirada e depois dividindo pelo preço de cada quilômetro. Entretanto, ainda que os estudantes tenham captado seu erro e corrigido o problema não se pode dizer que compreenderam a interdependência entre as grandezas da forma como ela realmente acontece,

²⁶ Percebe-se que o cálculo desse grupo está resolvido incorretamente ainda que o resultado final seja o correto. Não há no diálogo nenhum comentário dos estudantes que indique as razões de tal erro.

haja vista que o que levou os estudantes a revisarem o problema não foi a relação entre as grandezas, mas sim o fato de ter surgido um resultado decimal, que não era por eles esperado. O grupo 3 não conseguiu resolver corretamente o item.

Grupo 1

$$\begin{array}{r} 135,00 \\ - 3,00 \\ \hline 132,00 \\ \div 12 \\ \hline 11,00 \end{array}$$

Grupo 2

B) $132 \overline{) 12}$ 132 porque foi descontado o preço da bandeirada.

Grupo 3²⁷

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 15 \\ \hline 20 \\ \div 10 \\ \hline 2 \end{array}$$

O último item dessa situação é o mais discutido nos três grupos. O fato de não ter valores numéricos para determinar o valor a pagar causa estranhamento nos estudantes que se perguntam:

Grupo 1

L: então, mas como vamos saber o quanto a gente vai pagar se não sabemos o quanto a gente andou?

Grupo 2

J: mas como é que a gente vai saber os quilômetros?

²⁷ No registro escrito, percebe-se que ao final foi efetuado o cálculo $67,5 - 3 = 64,5$; mas na gravação das estudantes não há comentários a respeito.

Grupo 3

Handwritten work by Grupo 3:

$$\begin{array}{r} 2,00 \\ + 3,00 \\ \hline 5,00 \end{array}$$

Below this, there is a calculation for 2,5 km:

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 2 \\ \hline 50 \\ + 3 \\ \hline 53 \end{array}$$

To the right of the calculations, the student has written:

R: andei 2,5 km e paguei R\$ 53,00.

2º Encontro – Sequência de Figuras

Da mesma forma que na situação-problema anterior, também nesta se percebeu que a compreensão e resolução aritmética da situação não conduzem à compreensão do uso da linguagem simbólica algébrica. Faltaram itens nessa situação que permitissem aos estudantes observar o movimento das variáveis, sua fluência e interdependência. Além do que não trabalhou com o campo de variação.

O modo como os itens da situação-problema foram apresentados encaminha para o uso da linguagem simbólica formal da álgebra, além de trabalhar somente com o movimento regular. Desta forma recorre aos resultados da álgebra como conhecimento acabado. Por outro lado a generalização empírica, a partir de casos particulares (no caso os itens de **a** até **g** que poderiam ser resolvidos aritmeticamente), não oferece possibilidades de formação e elaboração do conceito de variável.

Não houve dificuldade para que os estudantes resolvessem os itens de **a** a **g** com estratégias aritméticas. Ainda que o grupo 3 tenha errado o item **f** e o grupo 2, o item **g**, esses erros estão relacionados à contagem. Apenas o grupo 1 esboçou uma tentativa de encontrar um procedimento geral que os levasse a encontrar a posição de uma figura com 101 palitos.

Entretanto, por não terem identificado a relação correta entre as grandezas (número da figura e quantidade de palitos) recorreram a um procedimento incorreto.

Grupo 1

L: Ah, por que 41 palitos é 20, 51 é 30, 61 é 40, 71 é 50, 81 é 60, 91 é 70, 101 é 80

Pelo registro escrito, os estudantes estavam acrescentando dez ao número de palitos a cada aumento de dez no número da figura. Alertados pela pesquisadora, perceberam seu engano e recorreram a outras relações, procurando estabelecer uma variação padrão no número de palitos conforme uma variação no número da figura.

Uma análise no momento mesmo de ocorrência do fenômeno permitiu observar que a compreensão da variável como número geral nessa situação-problema foi muito difícil de alcançar para os três grupos. Os estudantes, na maior parte do tempo, mantiveram-se presos à contagem, às resoluções aritméticas, sendo que mesmo tal tipo de resolução oferecia algumas dificuldades, o que ainda não foi suficiente para gerar nos estudantes um procedimento generalizado ou um modo geral de solução da situação.

Os estudantes não conseguiam estabelecer a relação entre os valores numéricos, e as intervenções nem sempre ocorreram de forma satisfatória no sentido de avançar com o pensamento e a linguagem. As ações da pesquisadora com o objetivo de auxiliar os estudantes a compreenderem a relação entre os números não estavam sendo eficientes.

Os itens **h**, **i** e **j** requeriam o registro da relação entre os números da sequência criada. Foi possível perceber a dificuldade dos estudantes principalmente no item **i**) que previa a elaboração de uma expressão geral para representar a quantidade de palitos conforme a posição que ocupava na sequência. Os estudantes deveriam então relacionar o número da figura à quantidade de palitos. Apenas no grupo 3 um dos estudantes conseguiu expressá-la com a linguagem comum.

Grupo 3

- i) Como represento a quantidade de palitos usada em uma figura (FIG N) em relação à posição (N) que ocupa na sequência?

VOCÊ DÓBRA O NÚMERO DA FIGURA E SOMA 1.

Os outros dois grupos não conseguiram sequer expressá-la oralmente. Ainda que tivessem elaborado uma tabela com valores particulares, relacionando posição da figura na sequência com a quantidade de palitos, não percebiam a relação entre os números nem tinham condições de expressar tal relação em sua forma algébrica e generalizada, e não responderam a este item. Assim ainda que tivessem percebido que havia a variação dos valores, não identificavam como ocorria tal variação.

3º Encontro – O Fantan

Não houve dificuldade dos estudantes em compreenderem as regras do jogo do Fantan (com e sem o bônus) conforme foram explicada durante o encontro para toda a turma, não só para os estudantes que participavam da pesquisa. A inserção da regra Bônus também não gerou dificuldades: os estudantes separavam os grãos que jogavam no tabuleiro em grupos de 4, anotavam o resto e registravam a quantidade total de feijões na tabela, comparando-os com suas estimativas. Compreender as regras do jogo e o preenchimento dessa tabela eram os requisitos para que posteriormente os estudantes resolvessem as questões da situação-problema proposta. (Tabela)

A situação-problema elaborada com o Jogo Fantan também previa a elaboração de uma tabela com valores particulares a partir da contagem e divisão de um grupo de feijões. A irregularidade da quantidade de feijões que a cada vez eram escolhidos pelo grupo de estudantes não foi discutida. A preocupação se deteve na regularidade da divisão de tal grupo de feijões por 4 e na soma com o resto de feijões. As questões propostas também seguiam uma sequência e caminhavam da aritmética para a álgebra, dos casos particulares para as

tentativas de generalização. Entretanto, as variáveis das situações foram indicadas para os estudantes, e inclusive representadas por meio da letra, o que fez com que a possibilidade de discussão a respeito do movimento, a identificação e fluência e a interdependência das variáveis não acontecesse. Assim, há uma lacuna conceitual entre a contagem, as operações aritméticas e a representação literal e simbólica da álgebra.

TABELA - Grupo 3 – Trecho da tabela efetuada durante o jogo²⁸.

BÔNUS		Quantidade de grupos de 4 feijões (q)	RESTO (r)	Quantidade total de feijões (t)	
Jogador	Valor estimado				
João	32	15	30 0	60	1. ^a rodada
João	28				
Maria	30				
João	36				
João	38	26 6	2	26	2. ^a rodada
João	30				
Maria	35				
João	29				
João	34	9	2	38 8	3. ^a rodada
João	28				
Maria	32				
João	30				
João	76	15	2	62	4. ^a rodada
João	72				
Maria	70				
João	75				

Como nos outros encontros, a maior dificuldade dos estudantes se encontrava na representação simbólica da relação estabelecida entre as variáveis. Os itens f e g mostraram a compreensão pelos estudantes dos significados das letras e dos valores e a resolução mental de equações, considerando que eles não possuem a técnica de resolução de equações. Entretanto, em tal situação, ainda não se encontram os nexos conceituais do conceito de variável. Uma das falhas da maneira como foi proposta a situação foi não terem sido criadas

²⁸ Os nomes das estudantes foram apagados para preservar a identidade.

as variáveis com os estudantes, para que eles percebessem o movimento. As variáveis do problema foram previamente identificadas.

Das respostas dos estudantes, destacamos:

- O registro dos cálculos aritméticos efetuados. Os estudantes registram os cálculos conforme a sequência em que são efetuados. Não há uma preocupação em que a igualdade não se mantenha. Apenas as estudantes do Grupo 2 estruturam o cálculo de outra forma. Por exemplo:

Grupo 1 $7 \times 4 = 28 + 3 = 31$

Grupo 2
$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array} + 3 = 31 \text{ feijões.}$$

Grupo 3 $7 \times 4 = 28 + 3 = 31 \text{ feijões}$

- O registro simbólico algébrico. Os estudantes usam o símbolo (x) para indicar a multiplicação sem perceber que esse símbolo inserido no registro algébrico poderia também indicar uma outra variável. Apenas o grupo 2 se diferencia.

Grupo 1 $Q \times 4 + 3 = T$

Grupo 2 $4q + 3 = t$

Grupo 3 $Q \times 4 + 3 = t$

- Os estudantes recorrem a estratégias diferenciadas para preencher a tabela do item d. No grupo 1, recorrem à tentativa e erro; já o grupo 2 recorre às operações inversas; e os integrantes do grupo 3 oscilam entre essas estratégias.

4º Encontro – O Campeonato de Futebol

Os estudantes recebiam inicialmente apenas as primeiras questões do Campeonato de Futebol. A hipótese inicial era que os dois primeiros itens poderiam ser resolvidos recorrendo a tabelas e cálculos aritméticos. No terceiro item, os estudantes precisavam recorrer aos símbolos algébricos para registrar uma fórmula geral para expressar a quantidade de jogos num campeonato com n times. Baseada mais uma vez no modelo de Ursini *et al.* (3UV), esperava-se tratar da variável como relação funcional, sendo que seriam relacionadas as quantidade de jogos no campeonato com a quantidade de times. A partir disso, esperava-se que, ao elaborar essa fórmula geral, os estudantes recorressem a ela para resolver os itens seguintes (**d** e **e**). Entretanto, também nessa situação, os dois primeiros itens tratam de situações particulares e não são suficientes para que os estudantes percebam o movimento da variável, sua fluência. A situação também não permite que eles as identifiquem (as variáveis), elas já são previamente indicadas. Assim, há uma lacuna conceitual para escrever a relação funcional entre as variáveis com simbolismo algébrico no item **c**. A escrita de tal relação, sem a real compreensão do conceito, impede que os estudantes a apliquem na resolução dos itens **d** e **e**. Trata-se de um exercício próprio para a aplicação do conceito, mas não para sua formulação e elaboração. Recorrer à linguagem algébrica encaminhada dessa forma torna a tarefa mais difícil.

Inicialmente também foi previsto que os estudantes encontrariam dificuldade para resolução dessa situação-problema, assim foi elaborada a segunda folha com questões chamadas auxiliares. Essa folha não seria entregue ao mesmo tempo em que a primeira. Somente se fosse percebida a dificuldade dos estudantes, o trabalho seria encaminhado para a resolução dessas questões auxiliares (indicadas acima). Tal dificuldade se apresentou logo no início da resolução, sendo que para os três grupos foi entregue a folha de questões auxiliares, antes que eles resolvessem o primeiro item da situação proposta. A intenção inicial para

apresentação das questões auxiliares era representar os casos particulares e constituir uma tabela para a organização desses dados. A análise da tabela indicaria a relação entre os números e uma orientação para a representação simbólica da relação funcional. Entretanto essa ação se mostrou encaminhadora de uma generalização empírica, elaborada sobre casos particulares, mas não suficiente para aplicação em outras situações.

A relação e o movimento do pensamento e da linguagem ficam comprometidos, pretende-se ‘forçar’ o uso de uma linguagem que ainda não reflete o pensamento, e que está sendo usada para a comunicação, para o atendimento de uma solicitação do adulto.

Tal situação-problema envolvia raciocínio combinatório. Uma dificuldade que não foi inicialmente prevista e que os estudantes apresentaram foi a de compreender a quantidade de jogos de cada time no campeonato. Parecia simples conceber que se um campeonato tem 5 times e cada time joga só uma vez com os demais, então cada time joga 4 vezes. Entretanto, o grupo 2 nos mostra esta dificuldade inicial

Sa (relendo): Temos 5 times para jogar, quantos jogos serão realizados, se cada time joga uma vez com os demais. 25!! (reforçando a fala)

J: Tá, mas o problema é que tem que também analisar quantos... tipo... (sem completar o raciocínio)

Sa: Eu acho que é 25.

M: cada um joga um... cinco... se cada um joga com cada cinco...

...

Sa: temos cinco times para jogar... se cada um joga uma vez temos cinco jogos certo? Certo?

M: Cinco jogos em cada time

S: 25

Tal dificuldade também se apresentou no grupo 3. Considerando essa dificuldade inicial, os estudantes também tiveram problemas em compreender a relação entre o número de jogos em cada time e o número de jogos do campeonato, e sentiam a necessidade de registrar todos os jogos para se certificar de quantos havia. O grupo 1 recorreu a uma espécie de árvore onde colocavam as siglas dos times de futebol escolhidos, o grupo 2 recorreu a números ou a iniciais das próprias integrantes dos grupos, o grupo 3 recorreu a números ou a siglas das séries (5ª A, 6ª B)

Com o apoio de seus registros escritos e algumas intervenções da pesquisadora, procurando retomar os juízos que se formavam, os estudantes dos grupos 1 e 2 conseguiram perceber a quantidade de jogos de cada time, e a quantidade de jogos do campeonato, quando era indicada uma quantidade inicial e particular de times, preenchendo a tabela proposta no item d das questões auxiliares.

Grupo 1

Número de times(n)	Quantidade de jogos de cada time	Quantidade de jogos no campeonato
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45
n	$N-1$	$N(N-1):2$

Esse grupo por um processo de indução, sob intervenção da pesquisadora, chegou ao registro algébrico, o que supostamente indicaria uma generalização que, como se verá posteriormente, é ainda empírica.

5º Encontro – A moldura do quadro e a altura da pirâmide

Nesse encontro, recorreremos ao conceito de perímetro para estabelecer as relações entre as grandezas. No entanto, o mesmo encaminhamento das situações anteriores se processa nos exercícios dessa situação, que contemplam itens com resoluções aritméticas e outros que exigem o recurso do sistema simbólico-algébrico. Por meio dos registros escritos dos estudantes, é possível perceber como resolveram os exercícios, mas algumas falhas na gravação nos restringem a usar os dados desse problema na análise.

Destaca-se, nessa situação, o problema da moldura do quadro e o da altura da pirâmide. No problema da moldura do quadro, os estudantes recorrem à contagem e às

estratégias aritméticas para resolver os itens propostos, inclusive aqueles que envolviam números mais altos e, na maioria das vezes, às operações inversas, porém estas são resolvidas com base em juízos errôneos, assim, por exemplo, consideram inicialmente que para representar o perímetro do quadro com a moldura basta acrescentar um valor x que eles desconhecem.

Grupo 1

b) Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?

L: vai aumentar, se ele vai colocar uma moldura não vai mais ser igual

G: 160 mais

C: mais x

Posteriormente registram, com intervenções, que o perímetro é $160 + 4x$ e com outras intervenções percebem que se acrescentam 8 vezes a largura ($8x$) ao perímetro do quadro sem moldura, anotando como registro final

b) Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?

$$160 + (x \cdot 8)$$

O grupo 2 alcança o mesmo resultado, o que se pode perceber no registro escrito, mas falhas na gravação impedem que se identifique o caminho por eles percorrido.

b) Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?

$$160 + x \cdot 8 = y$$

Entretanto, o registro escrito já nos indica que não compreendem a variação quando resolvem os dois itens seguintes:

c) Se a largura da moldura é 3 cm, qual será o perímetro do quadro com moldura?

$$160_{cm} + 24_{cm} = 184_{cm}$$

d) O perímetro do quadro é 208 cm, qual é a largura da moldura?

$$\begin{array}{r} 208 \\ - 184 \\ \hline 024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 24} \\ 08 \end{array}$$

6 cm.

As estudantes resolvem corretamente na forma aritmética o item **c**, e usam o valor obtido para resolver o item **d**, não concebem que alterando-se o valor do perímetro, o valor da largura também se altera. Por uma coincidência obtém um resultado correto.

A estudante do Grupo 3, ao tentar resolver esse item, não recorre à relação entre o perímetro do quadro sem moldura e as larguras que se acrescentam, e considera o comprimento com moldura como um dos valores que varia e a largura com moldura como outro valor que varia, mas não os relaciona com o comprimento e a largura do quadro sem moldura

Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?

Ah já sei... 160 não... não... não... não...

Como posso representar o perímetro do quadro com moldura

C mais c mais l (ele) mais l (ele) igual a p

Comprimento mais comprimento mais largura mais largura igual a p de perímetro

Essa aqui pode ser deste jeito?

b) Como posso representar o perímetro do quadro com moldura?

~~160~~ $C + C + L + L = P$

O problema da altura da pirâmide se diferenciava das outras situações propostas. Não recorria aos registros aritméticos. Os estudantes poderiam usar variados recursos de linguagem para expressar a variação da altura da pirâmide com a quantidade de pedras que existiam no depósito. Além disso, como essa quantidade de pedras era limitada, a situação contemplava um campo de variação. Nesse sentido, tal situação se destaca das demais, por não encaminhar do pensamento aritmético para o algébrico, oferecer condições aos estudantes de reconhecer as grandezas que variam no problema dado, percebendo seu campo de variação, que nessa situação é limitado. Problemas técnicos na gravação impedem a análise mais aprofundada dessa situação. Assim, realizaremos a descrição dos resultados e a análise possível com base nos registros escritos dos estudantes.

Nessa situação, os estudantes foram requisitados a expressar em linguagem matemática a situação-problema proposta. As respostas escritas indicam um misto de registro sincopado e simbólico.

Grupo 1

$$12 + P = A$$

P = Representa o número de pedras necessárias, no máximo 60.

A = Representa a altura da pirâmide, no máximo 12.

Grupo 2

$$60 + 12 = 72$$

72 = altura máxima

12 = altura mínima

$$12 + Y = X \text{ mínimo } 12 \text{ máximo } 60$$

(Y) Representa qualquer outro número de 1 pedra a 60 pedras

Para ele chegar à 72 ele vai usar os 60 pedras do depósito a 12 que ele já colocou.

E a mínima são as 12 pedras que ele já colocou.

Grupo 3 –

$$12 + X = CM \text{ que tem } Q \text{ pedras}$$

X = quantidade de pedras que faraó quer
min = 1 max = 60

CM = coluna mestra

Q = quantidades de pedras ao total na coluna

Os dados obtidos por meio dessa situação-problema (a altura da pirâmide) indicam que os estudantes percebem a relação de dependência entre o número de pedras e a altura da coluna mestra, ainda que esta esteja indefinida. Um exemplo pode ser encontrado na fala de L:

...a altura é desconhecida que o faraó vai querer... e já tem 12 pedras colocadas...e ainda tem 60 no depósito, aí,a gente não sabe a altura, ...a altura que vai ser...aí

vai ser 12 pedras...mas a gente não sabe quantas das 60 vai usar para chegar na altura que ele quer...então faria assim...12...mais...um número que eu não sei que eu poderia representar por alguma letra que é igual a p.

Foi possível perceber também que não houve tentativa dos estudantes em atribuir valores numéricos particulares aos valores desconhecidos. Por outro lado, a preocupação em estabelecer o campo de variação, uma altura mínima ou máxima para a coluna mestra da pirâmide (que não estão inicialmente definidas pelo faraó), só surgiu quando os estudantes foram questionados, e isso pode ser visto, por exemplo, quando ocorre a discussão no primeiro grupo:

C: ...esse p pode ser qualquer coisa

Pesq.: mas é exatamente, a pergunta é essa, o p pode ser qualquer coisa? Pode escrever qualquer número? Por exemplo se eu quiser por 100

G: não, só até 60...

O registro final desse grupo para a situação-problema foi bem sucinta e direta.

$$12 + P = A$$

*P = representa o número de pedras necessárias, no máximo 60
A = representa a altura da pirâmide, no máximo 12.*

A estudante Pa desenvolve seu pensamento de forma similar ao grupo anterior, entretanto seu registro se apresenta confuso.

$$12 + x = \text{cm que tem } q \text{ pedras}$$

A estudante identifica a soma de 12 pedras com x com a própria coluna mestra, explicando que esta possui q pedras. Ainda assim é possível considerar que a estudante compreende que se alterar os valores de x, altera-se também a altura da coluna mestra. Quando solicitada, a estudante explica seu registro da seguinte forma:

Pa: são 12 pedras que já colocaram aí x por causa que não dá pra saber quanto o faraó quer igual a **cm** que é coluna mestra que tem tal quantidade de pedras

Assim como no grupo anterior, a questão a respeito de valores mínimos e máximos da altura da pirâmide e o menor ou maior valor das pedras também não surgiu espontaneamente, precisando ser gerada pela professora. Após esse momento, a estudante explica da seguinte forma seu registro escrito

***Pa:** então tá...na linguagem matemática é 12 mais x igual a CM que tem q pedras, quer que eu explique direito, x é a quantidade de pedras que o faraó quer mínima 1 máxima 60, CM, coluna mestra e Q , quantidade de pedras ao total na coluna, legal!*

Importante destacar também que estudante usa CM para identificar a coluna mestra, em nenhum momento confunde tal nomenclatura com a unidade de medida centímetros. Entretanto, para outro leitor, tal registro poderia gerar confusão. Perceber tal fato, à luz da teoria, fez-nos pensar que tal situação-problema assim como as outras se enriqueceria se após o registro em linguagem matemática dos grupos, estes trocassem seus registros para discutirem sua clareza, compreensão, o que geraria um ambiente de comunicação também escrita e a necessidade de que tal registro fosse inteligível para os demais. Poderia se constituir dessa forma em uma das ações da atividade de ensino.

O pensamento dos estudantes manifesta-se para nós a partir da explicitação por meio da linguagem, entretanto, muitas vezes tal pensamento não está suficientemente elaborado para que seja exposto. A insistência para que tal pensamento se expresse, ainda mais por meio de uma linguagem formal e simbólica, não pode limitar a formação do conceito principalmente. Nessa situação-problema, a discussão poderia ter sido alimentada com outras questões por parte da pesquisadora, em relação à variação da altura da coluna mestra antes da insistência com uma representação matemática, simbólica e formal.

No próximo item, serão apresentadas às sínteses elaboradas a partir dos estudos teóricos, dos dados obtidos e das categorias de análise propostas.

6.4. Sínteses elaboradas

Os dados obtidos com os estudantes por meio das situações-problema propostas e à luz da fundamentação teórica definida, foram analisados conforme as categorias anteriormente descritas. Neste processo de análise foi possível reconhecer em cada encontro elementos associados às manifestações do pensamento, da linguagem e do conceito de variável; elaborar abstrações; emitir juízos; generalizar etc. Entretanto tal processo de análise não se completa se a partir dele não forem elaboradas sínteses.

Assim, as sínteses a seguir descritas foram constituídas a partir das relações encontradas entre o pensamento, a linguagem e o conceito de variável e associadas ao processo de ensino por meio dos dados dos estudantes e dos estudos teóricos.

I

As ações dos estudantes no decorrer do processo de resolução das situações-problema são reveladoras dos motivos que conduzem sua atividade.

Considerando que uma ação como componente da Atividade, dirigida a um objetivo, pode estar relacionada aos mais diversos motivos (Leontiev, 1983), houve a preocupação em identificar por meio das ações dos estudantes os motivos envolvidos na resolução das situações-problema propostas.

Por meio dos dados obtidos, encontramos trechos dos diálogos que indicam a predominância de motivos apenas compreensíveis ou motivos eficazes, também no dizer de Leontiev (1994) nos três grupos de estudantes, considerando que motivos apenas compreensíveis podem se tornar motivos eficazes. Conforme Leontiev (1994), essa

transformação dos motivos “é uma questão de o resultado da ação ser mais significativo, em certas condições, que o motivo que realmente a induziu” (p. 70).

Assim, identificamos nos estudantes do grupo 1 ações que nos indicam a predominância de motivos eficazes relacionados ao estudo. Destacamos que as discussões se mantinham relacionadas às situações-problema propostas, sendo que todos os itens eram alvo de muitas discussões entre os integrantes do grupo. Os estudantes discutem, inclusive, quem vai ler ou escrever. Na resolução da situação-problema do campeonato de futebol, chegam a fazer a brincadeira “Dois ou Um” para decidir quem iniciaria a leitura. Ainda que nos encontros se perceba a predominância de G ou L na leitura e discussão, percebem-se os demais integrantes envolvidos e sem desistir de participar como se registra no seguinte diálogo.

O Campeonato de Futebol – Grupo 1

C: deixa eu escrever, nunca escrevi gente

G: você faz errado

C: não, não faço errado, eu nunca escrevi

Os estudantes desse grupo preocupam-se em resolver a situação corretamente e não simplesmente resolvê-la como se estivessem cumprindo uma tarefa. Por isso, recorrem freqüentemente à pesquisadora quando encontram dificuldades, esperando por dicas e orientações, para conferir pensamentos e resultados, o que limita sua autonomia em relação à resolução das situações-problema. A seguir algumas seqüências de diálogos que refletem a necessidade de auxílio pela pesquisadora (a quem chamam de professora).

O problema do taxista – Grupo 1

L: Professora, não entendi nada aqui

B: Acho que eu sei (falando com a pesquisadora e lendo o enunciado)

L: Ela não vai falar como a gente vai fazer, então o sentido eu não entendi.

Seqüência de Figuras – Grupo 1

B: Agora chama ela para nos ajudar a fazer o outro

G: Vamos nos concentrar

L: Professora, como a gente faz esse daqui?

(...)

L: Deixa eu me concentrar, se a professora falou alguma coisa disso...

G: tem que usar, vai ficar melhor nossa nota

B: Mas eu acho que tem que ficar melhor pra gente

L: Então se não fosse, ela não ia ficar falando, não é melhor usar isso?

Também se preocupam com o capricho. Em determinado momento, enquanto um dos estudantes apagava a folha, o outro se preocupa.

O problema do taxista – Grupo 1

L: Calma, vai rasgar a folha.

C: A gente não vai entregar um trabalho sujo

Os momentos em que a conversa se dispersava nesse grupo de estudantes coincidiam com as limitações cognitivas para resolver a situação-problema proposta.

Já as estudantes do grupo 2 recorrem ao auxílio da professora, mas com menos frequência do que o grupo 1.

O problema do taxista – Grupo 2

S: Peraí, espera a professora

Sa: Pede lá uma dica

Também recorrem às anotações de aula relacionadas ao perímetro e à área.

A moldura do quadro e a altura da pirâmide – Grupo 2

J: lembra daquele negócio de perímetro de Matemática?

...

Sa: lembra que tinha isso assim?...é 5

J: pra mim é 5

M: a gente vai pegar o fichário pra Sa lembrar como é que fazia o perímetro

J; deve ter no livro

Em determinado momento, envolvidas com a resolução da situação-problema, não param o que estavam fazendo, mesmo com o toque do sinal de encerramento da aula.

Seqüência de figuras – Grupo 2

S: A posição é 20, a gente coloca a quantidade de palitos lá
(toca o sinal de encerramento da aula)

Sa: Ah, não...

J: não, continua, até a professora recolher.

Também apresentam dificuldades para resolução das situações, mas não desistem facilmente, e chegam à exaustão como é o caso de *S: tô cansada de pensar*.

A presença de motivos eficazes relacionados ao entendimento da situação-problema, e que os impelem a estudar, podem ser assim determinados, pelo que representam para o estudante, os conhecimentos aprendidos. Conforme Leontiev (1983) “[...] e assim, foi

possível demonstrar que somente ante a presença de motivos propriamente cognitivos é factível realmente, e não de maneira meramente formal, dominar as operações do pensamento teórico” (p. 288, tradução nossa).

Com poucas intervenções com os estudantes, não podemos garantir que dominem as operações do pensamento teórico, mas o fato de estarem mobilizados a resolver as situações-problema, por motivos eficazes para o estudo, é condição para dominarem tais operações.

O grupo 3 se caracterizava pelo predomínio de motivos apenas compreensíveis para realizar as situações propostas, o que se revela em seus diálogos e ações. Inúmeras vezes o diálogo reflete momentos de conversa das estudantes que não está relacionada à resolução da situação-problema proposta, o que indica que as estudantes não tinham por objetivo resolver a situação, sendo que voltavam a ela após algum pedido ou orientação da pesquisadora.

Também em alguns momentos o diálogo, ainda que relacionado à proposta de resolução, indica discursos desconexos, em que as estudantes mantêm um diálogo sem propósitos. Alguns exemplos:

O campeonato de futebol – Grupo 3

(conversa dispersa)

Th: quer ver que aqui vai ser 12 e assim por diante?

Mo: 8, 9, 10... n e n ...e n ...e n ...10 n ... n ...

Th: 5, 6, 7, 8, 9, 10

Mo: deu 10

Ma: não deu 12

Mo: n vezes n é n

Th: 9 vezes 10 n

Mo: 10 n

Th: o n ganhou de novo

Th: 1, 2, 3, 4...

Th: não M , 1, 2, 3, 4, 5, 6

Mo: não

Th: aqui é n , aqui são 3

Mo: que 3, ô garota

Th: claro, 1,2,3

Mo: ah, tá, eu pensava que tava contando com esse

(assunto disperso)

Th: n é 1, n é 0

O campeonato de Futebol – Grupo 3

Th: de onde a gente tirou esse 10 mesmo que eu esqueci?

Mo: daqui

Th: não, daqui
Mo: daqui,
Th: mas como a gente tirou esse 10 daqui
Mo: esse é diferente desse
Th: mas a perspectiva é a mesma
Mo: que?
Th: perspectiva
... (conversa dispersa)

Ainda que se considerem as dificuldades cognitivas, esses trechos do diálogo expressam um certo descaso com os procedimentos de resolução da situação, pois em muitos momentos a conversa se dispersava e se desviava do assunto proposto.

No último encontro, marcado pela falta da professora de matemática da sala, as estudantes desse grupo não se apresentaram no local onde seria realizada a continuação da pesquisa, optando por ficar no pátio. Apenas uma das estudantes retornou à biblioteca onde seria realizada a pesquisa. Para as demais, não havia sentido resolver as situações propostas. Conforme Leontiev (1983):

[...] o sentido que adquire para a criança o objeto de suas ações didáticas, o objeto de seu estudo, se determina pelos motivos de sua atividade didática. Este sentido também caracteriza a aprendizagem consciente de conhecimento pela criança. (LEONTIEV, 1983, p. 246, tradução nossa)

II

As situações-problema propostas permitiram que os estudantes fizessem deduções a partir de juízos, mas não a formação do conceito, que é resultado de um processo mais longo e complexo.

A proposta das situações-problema permitiram que os estudantes expressassem livremente seus juízos e sua forma de compreender a situação proposta. Conforme Kopnin (1978), nos juízos, refletem-se os mais diferentes aspectos dos objetos, e no conceito apenas os aspectos gerais e essenciais. Desta forma, a dedução que provém de juízos é diferente da dedução que provém de conceitos.

Efetivamente, o juízo e a dedução desempenham imenso papel na formação dos conceitos. Para encontrar nos fenômenos o universal que é refletido no conceito, é necessário abranger o objeto de todos os lados, emitir toda uma série de juízos sobre aspectos isolados do mesmo. O essencial no fenômeno não pode ser definido sem um sistema integral de deduções. Na formação dos conceitos cabe enorme papel à análise enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas. O processo analítico é inconcebível sem indução e dedução. Constituído, o conceito leva implícitos em forma original, todos os juízos e deduções que se verificaram no processo de sua formação. O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas idéias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p.191)

A situação-problema da Sequência de Figuras ilustra a emissão de juízos por parte dos estudantes. Nessa situação, foi solicitado aos estudantes que montassem uma tabela, organizando os dados visualmente e relacionando os números de palitos ao número da sequência da figura. Apesar de tal organização por meio da tabela, os estudantes dos grupos 1 e 2 não conseguiam expressar sequer oralmente a relação entre o número da figura e a quantidade de palitos, e mantinham-se ainda presos ao número como representação da posição da figura e da quantidade de palitos, presos ainda aos objetos concretos e à situação particular, pensando aritmeticamente.

Entretanto, o grupo 1 tentou estabelecer uma relação entre o aumento do número da figura e o aumento da quantidade de palitos, emitindo dessa forma um juízo a respeito da situação proposta, que contemplava um dos aspectos da relação, mas não o aspecto geral, essencial (que no caso seria a expressão da relação geral que indicava que a quantidade de palitos poderia ser representada pelo dobro do número da figura mais um). O juízo emitido pelo grupo se reflete no diálogo a seguir, originado a partir do item g da situação-problema Sequência de Figuras.

No item g dessa situação, foi proposto o questionamento sobre qual posição ocupava a figura formada por 101 palitos. Os estudantes do grupo 1, indicaram como primeira resposta que tal figura estaria na posição 80 e foram assim questionados.

A sequencia de figuras – Grupo 1

Pesq.: Deixa eu perguntar uma coisa, como é que vocês descobriram que era 80.

L: Por que assim a cada onze é dez

B: A cada dez é... a cada dez são onze palitos. Acrescenta mais onze

B: Dez figuras é onze palitos, então a gente usou a sequência do 20 que já estava ali e vem somando...

Pesq.: A cada dez figuras, são onze palitos?

L: A figura 20 é 41 palitos, então eu achei que na figura 30 ia ser 51 palitos.

Pesq.: Mas então como você descobriu que são onze palitos entre a trigésima e a quadragésima?

L: Ah, por que sempre tem número redondo, a 10 leva 11 palitos.²⁹

Pesq.: a dez leva onze palitos? A figura dez? É mesmo?

(pausa)³⁰

Pesq.: cadê a figura dez, como você descobriu que ela leva onze palitos?

B: Não leva, L.

G: Não leva não.

B: A figura dez já vai dar...

G: Não... aqui já vai dar 19... e aqui vai ficar figura 9

B: Não, mas ó aqui figura 3... figura 3 já tem 7, a 4 já teria 9...

L: Tá errado, por que ó 17 é a figura.

G: 17 é a figura 8, então acho que é a cada 20, ali que vai ser... por que ó se você somar mais 2 vai dar 19 e mais dois vai dar 21... e vai ser da figura 10. É a cada 20

Os estudantes perceberam seu erro em relação à contagem de palitos da figura dez, mas continuaram com o mesmo raciocínio. O diálogo a seguir mostra a dificuldade dos estudantes para chegar à figura desejada e certa restrição em seu nível de generalização, preso à quantidade de palitos e ao número da figura.

A sequência de figuras – Grupo 1

B: A cada 21 palitos é 20, a figura número 10 é 21 palitos, que nem aqui ó tá falando, a figura 20 fosse 41, então se a figura 10 fosse 21. Então aqui é 21 palitos.

...

B: Vamos lá perai.

L: Tá errado, tá errado.

B: Seria...80.

B: 21... a cada 10 palitos, não a cada 10 figuras leva 21 palitos³¹.

L: Vamos fazer a... a figura 10.

B: Já fiz, dá 21 palitos (junção de vozes).

G: 41... se a gente diminuir por que... aqui se a figura 20 tem 41, a figura 40 teria 61, não é? Não... não... a figura...

B: Agora vamos ver quantos palitos foram usados...

G: A figura 30 seria 61.

B: Peraí... 10 são 21... 23... 25... 27... 29...perai ... 31... 33... 35... 37.

L: Figura 8 é 17. Tenho 31 palitos e estou construindo a maior figura que posso... (lendo baixo). Então a figura 15 tem 31 palitos.

G: Tá com mais 5 ia ficar a figura 20 e a figura 15 tem quanto?

L: Mais dois aqui... 33.

G: Peraí (fazendo contagem...).

B: Você aumentou 10.

G: Não, mas olha aqui a 20 tem 41, e a 15 tem 31 com mais 5 aumenta mais 10.

L: Não perai, esqueci a pergunta já... jdudjksjsk... (lendo rápido). 101 palitos.

L: 101 palitos possuiria... Peraí.

B: Se 10 tem 21, só teria que multiplicar 21 por 5.

L: Pera... 31 palitos dá 15. Huhum.

L: E então vai dar 41 (contando e pensando). Não tinha alguma que tinha 41...

²⁹ Há um erro, pois a figura dez é composta por 21 palitos

³⁰ Nesse momento, os estudantes ainda não haviam elaborado a tabela pedida no item **d** e que poderia auxiliá-los.

³¹ O estudante se confunde em sua fala, fazendo referência a dez figuras e não à figura dez.

G: Ó tá aqui 20... 41... 43... 45... 47...
B: Mas como 20 vai ser 41?
L: Figura 19.
B: Ó por que se aqui é 10... e a figura 10 tem 21 palitos...
G: A 15 tem 31 e a 20 tem 41, é de cinco em cinco L.
L: 30 é 61 pera... (depois de preencher uma tabela horizontal)...30 é 61...
G: A cada 5 a gente dobra esse dobra esse.
L: Não não vai dar.
G: A cada 5 figuras...Fica mais 10.
L: Tipo 31. É 15, 41 é 20
 (interrupção de um dos estudantes a respeito de outro grupo)
 (bronca do outro chamando para a concentração)
G: Ó, de 5 em 5 aumenta 10, de 5 em 5 aumenta 10.
G: Ó, 37, se aumenta mais 5 aqui vai ficar...Não é 17
L: 31... 10 então é 21... 5... 11... 5 é 11... então 35... vai ser... 40... 45... 91...
B: 50... então seria 50.
L: 50.

Os estudantes acabam por concordar que, de cinco em cinco figuras, o aumento do número de palitos é de dez e, com muitos cálculos aritméticos, os estudantes conseguem chegar ao valor da figura (50) que contém 101 palitos, conforme o que era pedido, mas não alcançam a generalização teórica, o que fica claro, quando deixam em branco e não conseguem responder o item i), que precisava da compreensão da relação entre o número de palitos e o número da figura. Resolvem apenas a situação particular proposta no item g.

Questionados no item i de maneira geral sobre como representar a quantidade de palitos na figura em relação à posição que ocupa na sequência, os estudantes emitem em suas falas outros juízos que refletem que perceberam claramente a relação da quantidade de palitos de uma figura para a outra (aumenta sempre 2), mas a relação entre a quantidade de palitos e a posição que dependia de uma abstração dos números e de um outro tipo de generalização (teórica), constituída pela real compreensão do movimento da variável, não foi alcançada. Os estudantes nem se aproximaram da tentativa de escrever a expressão geral $2.n + 1$, pois não perceberam essa relação entre os números. Perceberam que a quantidade de palitos era sempre ímpar e valorizaram o fato de terem percebido também que a diferença entre o número da figura e o número de palitos seguia a ordem dos números naturais. Tais juízos emitidos ainda que significativos não refletem o aspecto essencial da relação entre os números. Tais relações

e suas respectivas generalizações e representações simbólicas precisam ser ensinadas, bem como a formação do conceito de variável.

O grupo 2, para responder também ao item i e questionado também pela pesquisadora, emite uma série de juízos mas não consegue estabelecer a relação geral entre a quantidade de palitos e a posição que ocupa na sequência. Segue o diálogo

A sequência de figuras – Grupo 2

Pesq.: Vejam se tem alguma relação, não na sequência, mas em relação ao número da posição e o número de palitos.

J: todos eles são números ímpares. Nenhum deles tem um número par

Pesq.: Então, aproveita isso que vocês estão falando.

S: São 11 palitos a mais. Tem a figura 20 é 11 palitos a mais da quantidade de palitos

J: E todos aumentam de 2 em 2, nunca aumenta mais de 2

O grupo 3 se destacou nessa situação por resolver o item i que solicitava uma expressão simbólica que relacionasse a quantidade de palitos de uma figura e a posição ocupada na sequência. Em forma de linguagem retórica, um dos estudantes consegue expressar claramente o procedimento generalizado que identificou para a relação entre os números que representam a quantidade de palitos da figura e o número da figura .

A sequência de figuras – Grupo 3

Vagner: Não, mas não é, são 101 palitos. A gente dobra o número da figura e soma com 1.

Thati: É verdade.

Marcela: Como você é esperto, hein?

- i) Como represento a quantidade de palitos usada em uma figura (FIG N) em relação à posição (N) que ocupa na sequência?

VOCÊ DÓBRA O NÚMERO DA FIGURA E SOMA 1.

Também na situação-problema do Campeonato de Futebol, os estudantes têm oportunidade de expressar seus juízos a respeito de como se resolve a situação. Estes, ao tentar estabelecer o número de jogos por time, levantam diversas hipóteses, o que se apresenta nos diálogos:

O campeonato de Futebol – Grupo 1

L: aqui são 4 times, cada um é um time, eu vou jogar contra eles três, ele vai contra nós três, ele contra nós três e ele contra nós três (apontando para ele e os colegas).

Afirmam que nessa situação o campeonato teriam 12 jogos, pois multiplicam 4 por 3.

Não percebem a duplicidade de jogos e, sendo assim, é necessária uma intervenção.

O campeonato de futebol – Grupo 1

Pesq.: agora me diz uma coisa, você jogar com ele, é o mesmo jogo que ele jogar contra você não é?

L: é?

Pesq.: quantas vezes vocês contaram este jogo?

G: e quando eu jogo com ele a gente já contou 2, quando eu jogo com ele já contei 2...(apontando também)

L: como assim?

G: eu já não joguei 3, já joguei com ele, eu já não joguei 3

L: você vai jogar com ele, ele e comigo.

G: daí, ó ele, ele não pode contar comigo, porque eu já joguei com eles, que é a mesma coisa que ele jogar comigo... você jogou com nós três, aí depois é minha vez, eu não posso jogar com você

Os demais grupos também não percebem que cada time joga apenas uma vez com os demais. O grupo 2 indica que num campeonato com 5 times, são marcados 25 jogos, ignora inclusive que um time não pode jogar contra ele mesmo.

Consideramos que devem ser oferecidas aos estudantes esta oportunidade para emissão de juízos e concordamos com Sforzi (2004):

A ênfase no resultado, na resposta correta, sem momentos para emissão de juízos e deduções, faz com que muitas tarefas escolares sejam realizadas sem que a aprendizagem efetivamente ocorra. A explicitação, pelos estudantes, das razões de determinadas ações é um momento de ‘tomada de posse’ da própria ação, um momento fundamental e diferenciador da aprendizagem de conceitos científicos em relação à aprendizagem de conceitos espontâneos. (SFORZI, 2004, p. 133)

III

Ainda que os estudantes realizem uma generalização por meio de casos particulares (a generalização empírica), tal generalização não se consolida e não garante a resolução posterior de outras situações, ainda que semelhantes.

A situação descrita anteriormente da sequência de figuras para o grupo 1 já demonstra as dificuldades dos estudantes em generalizar por meio dos casos particulares. Entretanto, a situação-problema do Campeonato de Futebol é ainda mais ilustrativa de tal dificuldade.

Para resolver os itens propostos em tal situação-problema, os estudantes de todos os grupos recorrem à estratégia de escrever todos os jogos possíveis, necessitando do registro escrito. Em determinados momentos do diálogo, retomam a questão da quantidade de jogos por time e quantidade de jogos no campeonato, mas não conseguem estabelecer um procedimento geral de solução, pois o pensamento sobre casos particulares ainda não está claro como se reflete no diálogo a seguir:

O campeonato de futebol – Grupo 1

Pesq.: Certo, 10 jogos. Deixa eu te perguntar uma coisa agora em relação a esta questão que vocês estavam respondendo (questão da primeira folha). O primeiro time no meio de 5 times ele joga quantas vezes?

L: 4

Pesq.: e o segundo time, ele joga quantas vezes?

B: três

Pesq.: ele não jogou antes já?

L: então...

Pesq.: quantos jogos ele tem?

C: ele vai ter quatro eu acho também, por que ele já jogou um

G: então, ele já jogou com o primeiro, e o primeiro já jogou quatro

C: então, mas se o primeiro jogou quatro, quer dizer que o segundo time já jogou com você, então já tem uma, aí ele vai jogar com esses três, vai dar quatro também.

Pesq.: e o terceiro quantas vezes ele joga?

G: quatro

C: ele vai ter três jogos

Pesq.: ele não joga com o primeiro?

C: joga

Pesq.: então quantos jogos têm?

G: quatro, todos jogam 4

Pesq.: então cada time joga quantas vezes?

L: a gente está fazendo sabe como? Por rodada, não é rodada, ele vai jogar com ele.

G: se ele jogou com ele... (inaudível)

Pesq.: mas pensa aqui, são 4, cada time joga quatro vezes, só que basta fazer 5 vezes quatro, que você encontra o número de jogos? Vocês estavam fazendo isso não estavam?

C: sim.

Pesq.: quanto tinha dado quando vocês fizeram 5 vezes 4?

C: deu 20

Pesq.: mas e aí, deram 20 jogos aqui?

L: dez

Pesq.: por que deu dez, e não deu 20? (Tentando mostrar a contradição entre a maneira que eles pensaram e o resultado atingido com a montagem de todos os jogos)

C: boa pergunta

Pesq.: então pensa.

B: então gente, a gente repetiu cada um, 1, 2, 3, 4, 5 (mostrando os dedos das mãos)

L: (interrompeu o pensamento do outro estudante) vocês que inventaram de fazer vezes, eu não... se fosse assim 5 vezes 5
C: de qualquer jeito tem que repetir
B: aqui é a mesma coisa, 6 jogos cada um (ajudando o G a preencher a tabela)
C: e o terceiro
G: não tem terceiro
(conversa misturada)
B: quando tem 5, são 10 jogos
G: sabe por quê
C: por que vai ser a metade

Os estudantes se aproximam da tentativa de um procedimento generalizado, mas ainda não conseguem formulá-lo completamente. Isso se apresenta quando eles preenchem a tabela das questões auxiliares e tentam registrar a quantidade de jogos no campeonato, o que só conseguem fazer montando todas as possibilidades de jogos, pois é assim que conseguem preencher a tabela com os valores corretos. Não compreendem de que forma varia a quantidade de jogos no campeonato, e precisam da contagem para resolver. Depois de montar a tabela de jogos do campeonato para 7 times, um dos estudantes percebe uma relação entre os números de jogos conforme aumentam os times.

O campeonato de futebol – Grupo 1

L: (começa a completar a tabela, apontando o dedo entre as duas últimas colunas) 15 mais 6, 21, 21 mais 7, 28, 28 mais 8 36, 36 mais 9...45...
C: agora tem que fazer com n
L: professora?
PESQ.: o que aconteceu com vocês meninos?
L: deixa eu explicar, deu 15, depois 21, tem que fazer a tabela do 8 agora, ó, tem que conferir, por que aqui deu 21 e aí eu vi que aumentou 5, aqui aumentou 6, daí aqui aumentou 7, 8 e 9.
Pesq.: tudo bem, eu não vou pedir pra você fazer a tabela, por que vai dar isso mesmo, tá? Mas é o seguinte eu queria que você visse, se dá pra achar estes resultados a partir destas duas colunas.
C: dá, dá...
Pesq.: mas tentem achar como
B: (olhando a folha enquanto os outros conversam) eu acho que é só multiplicar aqui ó 5 vezes 4 que daria 20 que dividido por 2 dá dez, 6 vezes 5 que dá 30, dividido por 2 é 15,...
L: ah moleque, fui eu que ensinei
B: você que ensinou nada
Pesq.: tá, então vai conferindo
C: 7 vezes 6, 42 dividido por 2 dá 21.
B: acertei...
L: é tá certo, 10 vezes 9 dividido por 2...45
G: por que divide por 2?
C: por que tem duas colunas
L: (rindo)

L: Professora

L: não toca aí, foi inteligente mas...

O estudante B identifica um procedimento aritmético para encontrar os números da tabela, mas não consegue justificá-lo, o que inclusive os demais estudantes percebem.

Outro ponto de destaque no diálogo dos estudantes desse grupo ocorre depois de toda a discussão para elaborar a tabela.

d) Complete a tabela

Número de times(n)	Quantidade de jogos de cada time	Quantidade de jogos no campeonato
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45
n	$N-1$	$N(N-1):2$

Pode-se supor que os estudantes, por terem elaborado o registro escrito da expressão para a quantidade de jogos do campeonato, teriam então condições de encontrar o número de jogos de um campeonato para qualquer número de times. Entretanto, eles foram induzidos a esse registro simbólico por meio dos casos particulares anteriores, o que não os levou a real formação do conceito, produzindo uma generalização que poderíamos chamar aqui de empírica. Eles ainda não percebem como é a variação da quantidade de jogos do campeonato. Isso fica claro quando posteriormente os estudantes tentam resolver o item c da primeira folha de questões, que solicita que se indique o número de jogos para n times.

O campeonato de futebol – Grupo 1

L: então ó se tivéssemos n times, qual seria o número de jogos? esse aqui tá relacionado a esse não é?

Pesq.: a esse, a esse, a esse, a esse, ... o que significa o n times?

B: o número de times

Pesq.: número de times, você conhece este número de times?

B: não

Pesq.: tá, aqui vocês conheciam não é? Tá, até onde vocês conheciam? Tem uma parte lá que vocês não conheciam. Vocês não escreveram a quantidade de jogos necessários? Era diferente?

G: o número de jogos Necessários (reforçando a palavra)

Pesq.: no campeonato né? São os jogos do campeonato.

(meninos pensando)

Pesq.: não foi você que falou aqui, o que você tinha feito depois para descobrir esse

B: é eu só multipliquei e dividi por 2

Pesq.: sim, você só multiplicou e dividiu por 2 e depois como vocês fizeram para achar isso?

L: vai lá Gabriel

Pesq.: foi você que escreveu isso? então fala

G: ah, eu peguei aqui que o n representa esta coluna e peguei o $n-1$ que representa esta coluna, como ele multiplicava esse por esse, eu multipliquei esse por esse e dividi por 2

Pesq.: certo e o que simboliza esse vezes esse dividido por 2?

G: o n vezes $n-1$ dividido por 2

Pesq.: quando você faz esta conta o que você alcança

L: o resultado

Pesq.: resultado de quê?

(juntos) dos jogos

Pesq.: da onde

(juntos) do campeonato

Pesq.: então neste caso aqui, qual o número de jogos que eu tô chamando de j , necessário no campeonato se a gente tem n times?

G: depende

Pesq.: depende do que

L: do número de times

Pesq.: e se o número de times é n ?

L: aqui ó n , aí qual seria o número de jogos necessários

Pesq.: gente, vamos lá...

L: n times... qual seria o número de jogos necessário...a gente tem que fazer tipo assim...(mostrando a fórmula da outra folha)

Pesq.: isso é o que, uma representação, não é? Do número de jogos? Então por que vocês não representam aqui?

L (escrevendo): n vezes...

B: Poe uma bolinha que fica melhor

L: n vezes $n-1$

B: aí abre parênteses

G: dividido por 2 que é igual a j

PESQ.: é isso?

B: eu acho que é?

c) E se tivéssemos n times? Qual seria o número de jogos (j) necessário.

$$N, (N-1) : 2 = J$$

PESQ.: é, por que vocês acham que é isso?

C: por que é o mesmo que esse... que vai chegar ao número de jogos do campeonato

PESQ.: então estão convencidos de que é?

C: eu tenho vamos dizer 10% de certeza que é.

Os estudantes não aceitam aquela expressão gerada como uma generalização e que servirá em outras situações. O conceito de variável não está compreendido, e o que aconteceu na tabela foi apenas uma manipulação simbólica e possivelmente uma substituição dos valores particulares pela letra. No entanto, tal expressão geral não foi apropriada e,

portanto, não pode ser caracterizada como um conhecimento algébrico que os estudantes possuem e para o qual podem recorrer em outras situações. Os estudantes foram induzidos àquela generalização simbólica formal, que ainda não se constitui como um conhecimento algébrico.

A indução é uma conclusão que conduz do conhecimento de um grau inferior de generalidade a um conhecimento de maior grau de generalidade, enquanto a dedução é o oposto. Se elas não fossem tipos opostos de conclusão, então não haveria a necessidade de uma forma de dedução completar a outra no processo de obtenção da verdade. (KOPNIN, 1978, p. 220)

No caso dos estudantes e desta situação em particular os estudantes conseguiram por meio da indução explicitar um registro simbólico, entretanto precisavam de outras formas de pensamento, por exemplo, a dedução por meio do conceito, para realmente se apropriar do conhecimento algébrico.

IV

A resolução aritmética de uma situação-problema pode indicar que houve a compreensão da proposta, mas não garante a sua resolução algébrica.

Todas as situações-problema propostas eram compostas por itens que podiam ser resolvidos por estratégias aritméticas e outros que só poderiam ser resolvidos por estratégias algébricas. Conforme exposto, foi possível perceber que a resolução aritmeticamente correta do problema pode conduzir a generalizações empíricas a partir de casos particulares, mas não conduz linearmente para a formação do conhecimento algébrico. Por outro lado, a incompreensão aritmética da resolução do problema gera dificuldades inclusive na generalização empírica, como se pode observar nos resultados obtidos pelo grupo 3 na situação-problema do taxista.

Este grupo resolveu corretamente o item **a**, mas não conseguiu compreender o problema e sequer resolver o item **b** na forma aritmética, como os outros grupos que fizeram a divisão dos quilômetros rodados por 2 e finalizaram a questão. Com alguma intervenção da professora, lembraram-se da bandeirada e retiraram do resultado. Não perceberam que a bandeirada deveria ter sido subtraída antes, sendo o resultado depois dividido por 2.

No item **c**, usaram os números que estavam citados na situação-problema e, sem muito critério, somaram o valor da bandeirada com o valor de cada km rodado, alcançando o número 5, em seguida dividiram esse resultado por 2 e voltaram a multiplicar por 2, alcançando o resultado errado, registrado como 50; depois somaram 3 reais e deram como resultado R\$ 53,00. Sequer se aproximaram de uma representação simbólica.

Handwritten student work showing calculations for a problem. The work includes the following steps:

$$\begin{array}{r} 2,00 \\ \times 2,5 \\ \hline 10,00 \\ + 10,00 \\ \hline 50,00 \end{array}$$

Below this, there is a division:

$$\begin{array}{r} 5,00 \\ : 2 \\ \hline 2,5 \end{array}$$

At the bottom, there is a sum:

$$\begin{array}{r} 50 \\ + 3 \\ \hline 53 \end{array}$$

To the right of the calculations, the student has written: "R: andei 2,5 Km e paguei R\$ 53,00."

Esse uso indiscriminado dos valores apresentados no problema indica a falta de compreensão da situação e de qualquer processo de abstração e generalização a respeito, ainda que aritmeticamente. Isso indica uma manipulação mecânica dos símbolos numéricos apresentados.

Foi possível observar também algumas estratégias que os estudantes usam para resolver as situações-problema propostas e encontrar os resultados solicitados. A situação do jogo Fantan é ilustrativa. Foi possível perceber durante a análise que os grupos 1 e 2 recorreram a estratégias diferentes para completar a tabela proposta por meio desse jogo. O

grupo 1 preencheu usando como recurso a tentativa e erro, enquanto o grupo 2 se preocupou em realizar a operação inversa para encontrar o resultado pedido. Consideramos que, ao recorrer à tentativa e erro, os grupos não se aproximavam de um procedimento geral de solução, mantendo-se presos à contagem. Por outro lado, o recurso às operações inversas permitia aos estudantes um nível de generalização que ainda entendemos como generalização aritmética.

Em relação ao grupo anterior, no grupo 2, há um avanço na estrutura do pensamento, pois para responderem ao item **b**, as estudantes recorrem à operação inversa, como podemos perceber em seu registro final.

b) Se o total de feijões era de 38 e haviam nove grupos de 4 feijões sobre a mesa, quantos restavam?. Registre.

$$\begin{array}{r} 38 \overline{) 4} \\ 2 \quad 9 \end{array} \quad \text{Solaram 2 feijões.}$$

Tal maneira de resolver mostra as estratégias diferenciadas dos estudantes, tendo estes alcançado um procedimento geral de resolução, o que permite que o preenchimento da tabela no item **d** transcorra de outra maneira, sem o recurso da tentativa e erro.

A maneira como os grupos 1 e 2 resolveram esse item e as estratégias que usaram para completar a tabela apontam que “o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do estudante para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra” (BOOTH, 1995, p. 35), considerando que as afirmações gerais em álgebra necessitam de procedimentos gerais de solução.

V

Necessidade do conhecimento algébrico: Se para resolver uma situação-problema os estudantes possuem uma determinada estratégia (nesse caso, contagem ou aritmética), não se cria a necessidade do conhecimento algébrico. Tal necessidade se coloca em situações cuja resolução aritmética é extenuante ou impossível.

Por meio das situações-problema propostas e da análise dos dados obtidos com os estudantes, entende-se que não houve a necessidade do pensamento e da linguagem algébrica. Estes resolviam os itens com contagem e estratégias aritméticas. Em alguns itens das diversas situações, requer-se-ia o uso de linguagem algébrica formalizada, mas não se pode afirmar que a resposta fornecida a esses itens garante a apropriação do conhecimento algébrico.

Algumas situações ilustram o fato de os estudantes não perceberem necessidade de elaborar um procedimento geral de solução para os problemas. Por exemplo:

Na situação-problema Sequência de Figuras, no item g, esperava-se que os estudantes procurassem encontrar um procedimento geral para responder que posição ocupava a figura que continha 101 palitos, principalmente por tratar-se de um valor mais alto. Entretanto, o grupo 2 nos mostra que ainda preferiram fazer a simples contagem para encontrar a resposta, do que elaborar um procedimento geral que resolvesse o problema. Dessa forma, a necessidade de um registro algébrico ainda não estava criada.

Handwritten student work showing a sequence of numbers from 20 to 101, written in a grid-like fashion. The numbers are arranged in rows: 20-39, 40-59, 60-79, 80-99, and 100-101. The handwriting is somewhat messy, with some numbers crossed out or corrected.

Os estudantes não percebem um erro na contagem quando passam do número 39 para o 41 e prosseguem contando.

Tal necessidade do conhecimento algébrico também não surge pelo fato de aos estudantes serem apresentados símbolos, pois percebemos que quando induzidos os estudantes usam estes símbolos como usaram os números particulares. A necessidade de usar a linguagem retórica, a sincopada, a simbólica da álgebra é também gerada no processo de comunicação.

Desta forma notamos que a situação-problema da altura da pirâmide em que os estudantes não poderiam recorrer a casos particulares e precisavam expressar o seu entendimento da situação, oferece condições para que os estudantes elaborem seu pensamento a partir do geral. Nesta situação a resolução aritmética não é possível. Tendo criado a necessidade do conhecimento algébrico, os estudantes estabelecem suas relações e as expressam com os símbolos que já conhecem, em geral iniciais das palavras, e recorrem à linguagem retórica, e sincopada.

VI

A dificuldade do registro simbólico (a expressão oral e escrita): Ainda que os estudantes consigam expressar oralmente a relação entre duas grandezas, o registro escrito e simbólico não se apresenta de forma simples e direta.

É Vigotski (2001) que nos indica que a linguagem escrita requer um grau de abstração maior em relação à linguagem falada:

Como mostra a nossa investigação, a linguagem escrita requer para o seu transcurso pelo menos um desenvolvimento mínimo de um alto grau de abstração. Trata-se de uma linguagem sem o seu aspecto musical, entonacional, expressivo, em suma, sonoro. É uma linguagem de pensamento, de representação, mas uma linguagem desprovida do traço mais substancial da fala – o som material. (p. 313)

Assim, ainda que nossos estudantes conseguissem se expressar por meio da fala, indicando as relações que estabeleciam, o recurso à linguagem escrita e, mais ainda, simbólica

e formalizada como se trata da linguagem algébrica não ocorria de forma natural. Destacam-se alguns trechos que indicam tal dificuldade:

O problema do taxista – Grupo 1

Pesq.: *isso, então tenta me explicar agora, entrei no táxi, quero saber: ó moço, não sei quanto eu vou andar, é um valor desconhecido, como você me explica quanto eu vou pagar?*

Bruno: *a cada quilômetro 2 reais e mais 3 a bandeirada.*

Pesq.: *isso, agora eu quero que você escreva isso na forma matemática.*

Bruno: *também não é assim (risos de todos).*

Bruno: *escreve você, que sua letra é mais bonita (passando a tarefa).*

Por meio desse diálogo, é possível perceber que o pensamento a respeito de como resolver a situação estava claro então para todos do grupo, mas nenhum deles conseguia representar por escrito ou de forma matemática o pensamento algébrico, apesar de terem resolvido corretamente os dois itens anteriores. Usando a linguagem aritmética, conseguiam expressar o resultado da situação particular, mas não possuíam o recurso da linguagem algébrica para generalizar a situação. Posteriormente e com a intervenção da pesquisadora, os estudantes conseguiram explicitar um registro simbólico para essa relação entre o número de quilômetros rodados e o preço a pagar, porém isso ainda não é o suficiente para afirmar que eles compreenderam o conceito de variável ou perceberam a relação de dependência entre as grandezas, não é possível afirmar que a partir de tal registro tenham conseguido generalizar teoricamente. É possível que tal registro tenha sido encaminhado para a generalização empírica a partir dos resultados particulares, e que tenham substituído o número (particular) pelo símbolo previamente definido no enunciado, o que também pode ter acontecido no Grupo 2, na mesma situação.

O problema do taxista – Grupo 2

O Grupo 2, quando solicitado a realizar o registro escrito da mesma situação, escreve:

c) Cada quilômetro rodado custa R\$2,00 e uma taxa fixa de R\$3,00 da bandeirada.

Matematicamente:

$$K \text{ km} \times 2 + 3 \quad \text{ou} \quad X \cdot 2 + 3 = P$$

km rodado reais por km. preço da bandeirada

Para usar a representação da letra como variável, também foi necessária a intervenção.

J: E se a gente representasse por x, e o x a gente colocasse x vezes 2, alguma coisa assim. (começando a se apropriar da linguagem simbólica)

Sh: Mas como é que a gente vai saber este K(ka) M(eme)? Que número é? (a estudante começa a compreender a variação)

M: Mas não é pra gente saber, é pra gente explicar (inaudível).

M: quilômetro vezes 2 mais 3 (e escreve).

Nessa situação, o km representava para as estudantes o número de quilômetros rodados e não a unidade de comprimento do sistema internacional de medidas. O símbolo km adquire para o grupo um sentido que é compartilhado, transformado em significado para o grupo, mas não o significado que a ele é historicamente atribuído. Com mais uma intervenção da professora, ressaltando que a variável que estava indicando o número de quilômetros rodados era x, as estudantes não tiveram nenhuma restrição em substituir km por x e reescreveram a relação funcional trocando km por x. Isso nos indica que elas compreendiam tanto o km quanto o x como o número de quilômetros rodados, compreendendo ambos como símbolos que poderiam indicar a variação no número de quilômetros rodados, estando dessa forma mais próximas de um pensamento algébrico. Além disso, podemos considerar conforme Booth (1995):

Uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra é obviamente a utilização, nesta última, de letras para indicar valores. As letras também aparecem em aritmética, mas de maneira bastante diferente. A letra m, por exemplo, pode ser

utilizada em aritmética para representar ‘metros’, mas não para representar o número de metros, como em álgebra. (p. 30)

O Fantan – Grupo 1

A preocupação com a representação é retomada quando os estudantes tentam fazer o item E. Ainda sem o conceito de variável e sem a compreensão de seu movimento, recorrem ao auxílio da professora. Com alguma intervenção voltada para a representação, apontando para outros itens que já haviam sido resolvidos por eles, os estudantes conseguem então fazer o registro simbólico. A seguir, é reproduzido o diálogo que indica essa situação:

L: Professora.

Pesq.: sim.

L: a gente não sabe representar nada (perguntando como faz o item E).

Pesq.: aqui vocês já não escreveram, representaram? (apontando para o item C). Foi muito difícil esse?

L: não.

Pesq.: por que este está sendo difícil?

L: é... (sem saber o que dizer).

Pesq.: então, o que vocês acham que é? Ele é muito diferente desse?

G: tem que fazer q vezes (inaudível)...é q vezes 4 mais r igual a t (voltando ao exercício anterior).

L: é, eu acho que é assim.

B: eu acho que é o q...

G: é o q vezes 4 mais 3 igual a t

L: mas por que vezes 4?

Pesq.: pensa que a gente está no jogo de fantan.

G: q vezes 4 mais r igual a t (e escreve).

Pesq.: por que vezes 4?

G: por que são grupos de 4 feijões.

e) Como podemos representar o valor **t** (total de feijões) em função de **q** (quantidade de grupos de feijões) e **r** (resto de feijões não agrupados no tabuleiro)?

$$Q \times 4 + R = T$$

Também é importante observar que os estudantes escrevem o x com símbolo da multiplicação, o que pode confundi-los, considerando que muitas vezes em outras situações tal letra é usada como a variável. O registro simbólico ainda está confuso, mas talvez claro para eles nesse momento.

É também Vigotski (2001) que nos apresenta uma articulação entre a linguagem falada e a linguagem escrita, comparando à relação entre o conhecimento aritmético e o algébrico.

É natural que a linguagem sem um som real, que é apenas concebível, que requer uma simbolização dos símbolos sonoros, ou melhor, uma simbolização de segunda ordem, deve ser igualmente mais difícil que a linguagem falada; a álgebra é mais difícil do que a aritmética para a criança. A linguagem escrita é a álgebra da escrita. Entretanto, da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído, de igual maneira a álgebra da escrita ou linguagem escrita introduz a criança no plano abstrato mais elevado da linguagem, reconstruindo assim, o sistema psicológico da linguagem falada anteriormente constituído. (p. 314)

A seqüência de figuras – Grupo 3

Na situação-problema Seqüência de Figuras, no grupo 3, destacam-se em relação ao registro escrito da linguagem o momento em que uma das estudantes solicita ao colega que use a abreviatura já indicada na situação:

V: É figura 50... 101 palitos... é a figura...
M: Ah, é a figura, coloca fig.

O problema do taxista – Grupo 1

Foi possível perceber a preocupação com o registro em várias falas. Sendo que os estudantes não se contentavam em somente marcar o resultado correto, mas identificar o caminho percorrido e o movimento do seu pensamento, preocupados com o entendimento de outras pessoas e o que estava sendo pedido. Eles usavam a linguagem escrita como instrumento de comunicação e do conhecimento. Nesse sentido, prevalece a fala de G. Alguns exemplos dessas falas são:

G: tem que registrar (falando enfaticamente).
G: não, mas você tem que falar quanto sobrou você, não pode pôr direto quanto sobrou.

Também existe a preocupação com os símbolos, as letras e os números usados em relação ao entendimento do outro, do leitor, o que mostra também a importância da função da linguagem como modo de comunicação. Isso é ainda mais nítido em detalhes como o uso da letra q que, por vezes, é confundida com o algarismo 9.

L: (escrevendo)... vai parecer 9.

B: Faz um q maiúsculo, isso está parecendo 9.

B: alguém vai saber que isso é q? Põe o q maiúsculo.

O Fantan – Grupo 3

Também nesse grupo percebe-se a preocupação com o registro de forma que os leitores compreendam. Isso se reflete particularmente também na preocupação com o registro da letra q.

M: Parece um 9.

M: Pra não parecer um 9 (esse grupo estava sendo gravado mas não filmado, não foi possível identificar o registro que a estudante fez).

VII

Os estudantes recorrem à linguagem e aos símbolos (instrumentos psicológicos) para estruturar seu pensamento, se expressar, regular seus atos bem como fixar conhecimentos.

Para Leontiev (1975), “a atividade intelectual é a atividade predominante do homem” (p. 18). O autor nos indica três fases do ato intelectual: 1) saber as condições em que se realizará a tarefa (elaboração do plano de ação); 2) execução do plano estabelecido; 3) comparação do resultado com o fim em vista.

Ele considera a linguagem como determinante do pensamento teórico do homem por permitir que se expresse o caminho e os resultados do pensamento. Assim, indica-nos

diferentes funções da linguagem: como instrumento do pensamento; como elemento regulador dos atos humanos; como instrumento do conhecimento; como meio de assimilação da experiência histórico-social.

Procuramos identificar em nossos dados indícios de tais funções da linguagem, em especial na linguagem algébrica, em seu registro formal.

A inserção de um símbolo gera novos pensamentos nos estudantes. Em determinado momento, no grupo 1, alertados para o uso da letra x (número de quilômetros rodados) e p (valor a pagar), o estudante **L** começa a pensar em como usar tais letras no registro escrito.

B considera a possibilidade de o uso das letras ajudar, mas muda de idéia no decorrer do processo, dizendo que para ele usar o x não ajuda. No decorrer da discussão, o estudante que buscava definir o que era o ' x ' (fixando nesse símbolo um resultado do conhecimento) foi freqüentemente corrigido por **L** e **G**. Para esses dois, estava claro que o x representava a quantidade de quilômetros rodados. Para **B**, essa idéia não estava clara e isso se refletia em suas perguntas "B: cada km custa x , não é?".

B: (pegando a folha para escrever) *então cada quilômetro x ... rodado.*

G: (ficando nervoso) *o x não é quilômetro **B**.*

L tentava justificar por que usar o x para ele fazia sentido, procurando usar a linguagem como instrumento do seu pensamento, mas ainda assim não conseguia chegar ao registro escrito simbólico. Enquanto isso, **B** tentava compreender o pensamento dos demais e registrar:

B: *então é assim, cada quilômetro rodado custa 2 reais vezes x .*

Os demais não aceitaram essa afirmação do colega e riram, mas não conseguiram explicar o que havia de estranho na afirmação.

G: *primeiro acho que a gente tem que falar o que é o x , pra começar, você vai falar vezes x ...*

L: *pra mim é isso.*

B: *e o p ?*

L e G: *é o valor que vai ter que pagar.*

Em outro momento na situação-problema Sequência de Figuras nota-se a necessidade de G de explicitar e usar a linguagem como instrumento do pensamento e para fixar o conhecimento. No grupo 1 foi possível observar uma preocupação com as falas para se referir corretamente ou à posição ou à quantidade de palitos, usando a linguagem como instrumento do conhecimento e também do pensamento. Tal organização do pensamento se reflete muitas vezes em suas falas

L: Aqui é a figura 5... figura 5 menos 1... figura 4 que tem 9 palitos.

L: Basta acrescentar dois palitos por vez. Se a figura 1 tiver três palitos a dois terá cinco palitos (escrevendo e falando).

G: Tá, com mais 5 ia ficar a figura 20 e a figura 15 tem quanto?

B: 21... a cada 10 palitos, não a cada 10 figuras leva 21 palitos.

Ainda no grupo 1, podemos perceber que o diálogo nem sempre apresenta conexões. Em determinados momentos, apesar de aparentemente estarem em diálogo, cada estudante estava concentrado e procurando estruturar seu próprio pensamento, por isso percebe-se que as falas intercaladas não tinham relações. A sequência está na fala do próprio estudante, usada como instrumento do pensamento, que nela se reflete. Podemos perceber isso na fala de L retirada de um diálogo, pois ele recorre a uma espécie de linguagem interior, ignorando as interferências e outras falas dos colegas. Apagamos as falas dos colegas para mostrar como não fazem interferência no pensamento refletido na linguagem de L.

A sequência de figuras – Grupo 1

L: 30 é 61 pera... (depois de preencher uma tabela horizontal)... 30 é 61...

G:.

L: Não, não vai dar.

G:.

L: Tipo 31. É 15, 41 é 20

(interrupção de um dos estudantes a respeito de outro grupo)

(bronca do outro chamando para a concentração)

G:

G:

L: 31... 10 então é 21... 5... 11... 5 é 11... então 35... vai ser... 40... 45... 91...

B:

L: 50.

VIII

A proposta de problemas com elementos do cotidiano dos estudantes podem permitir que conceitos espontâneos sejam gerados, mas não garante a aproximação dos estudantes aos conceitos científicos.

No grupo 1, durante a resolução da situação-problema do taxista, destaca-se o comentário de C: *“eu vou no táxi e nunca vi estes km”*. Ainda que situações como essa contenham elementos do cotidiano, isso não significa que adquiram sentido para os estudantes. O conceito de variável é um conceito científico, que requer diferentes nexos conceituais e elaboração do pensamento teórico. O fato de usar elementos do cotidiano não garante o surgimento de tal pensamento.

Destaca-se aqui a distinção de natureza dos conceitos espontâneos e científicos. A tentativa de relacionar os conhecimentos científicos diretamente às situações cotidianas nem sempre gera sentido imediato para os estudantes. O conhecimento algébrico, como conhecimento científico, na nossa perspectiva, permite ao estudante uma nova qualidade na interpretação das situações cotidianas, da realidade objetiva.

IX

Os estudantes atribuem, sentidos pessoais ou ainda significados compartilhados, no grupo, aos signos e símbolos, significados esses que nem sempre se aproximam dos significados atribuídos historicamente.

Os estudantes terão condições de se apropriar dos significados elaborados historicamente no processo de comunicação e se estiverem envolvidos em atividade.

Na situação-problema do taxista, o grupo 2, sentindo a falta de um símbolo para refletir seu pensamento a respeito da variável número de quilômetros rodados, recorreu à abreviatura de quilômetros (KM) para representar a variável, atribuindo a ele um significado compartilhado no grupo, mas não o significado historicamente atribuído, como unidade de comprimento do sistema internacional de medidas.

A sequência de figuras – Grupo 2

No grupo 2, um ponto a ressaltar foi o significado atribuído à letra n .

M: *Como posso descobrir quantos palitos são necessários para criar uma figura que ocupa a posição n qualquer?*

J: *Figura n ... O n pode representar um número... Conforme o alfabeto, tipo j , o j ocupa a posição 10, por que j no alfabeto ocupa a posição 10. Então n é 13.*

J: *Como a gente pode saber a quantidade de... pelo alfabeto que está tipo em números?*

Pesq.: *Vocês acham que tá?*

M: *Eu acho.*

Sa: *Eu também.*

Pesq.: *Que o alfabeto está em números? Então o n representa uma...*

Pesq.: *Na verdade, ele não está nessa posição, não tem a relação conforme o alfabeto, do mesmo jeito que ele poderia ser n . Ele poderia ser x , a , m .*

Sa: *Como a gente podia descobrir n ? A gente chuta qualquer número?*

As estudantes atribuem a n o valor conforme a posição que ocupa no alfabeto. Não compreendem o conceito de variável. Ainda não o entendem como representante de um número geral, procurando atribuir a ele uma posição particular, e procuram justificativa na posição que tal letra ocupa no alfabeto. Entretanto a intervenção, não as orienta no sentido da compreensão do conceito, mas sim no uso da linguagem simbólica, sendo que serve apenas para tirar delas a idéia de relacionar a variável como um número específico, determinado conforme a posição que ocupa no alfabeto.

Assim, é possível que os estudantes recorram à símbolos ou palavras e se façam entender no processo de comunicação com outras pessoas, mas o entendimento de tal símbolo ou a palavra pode ser distinto do significado historicamente atribuído.

X

Os estudantes não terão condições de compreender a essência de um conceito, no seu movimento lógico-histórico, se esta não estiver contemplada em várias e diferentes situações de estudo propostas a eles.

Nesta pesquisa, destacamos o estudo da variável conforme o modelo 3UV de Ursini *et al.* (2005) que ressalta os usos da variável como incógnita, número geral e relação funcional. Entretanto, as situações-problema aqui elaboradas e pautadas nesse modelo trabalham com os registros simbólicos, com a variável letra³² no dizer de Sousa (2004). Não havia a previsão de usar a variável como fluência, o que dificulta a real compreensão do conceito e encaminha para o uso do símbolo e signo algébrico, sem que se compreenda o significado em sua essência, por meio do movimento lógico-histórico do conceito.

Por não contemplarem a essência do conceito de variável, as situações-problema não permitiram que se manifestasse no pensamento dos estudantes tal conceito em sua forma teórica. Os estudantes, por meio de tais situações, tinham possibilidades de aplicar o conceito, entretanto como ele não estava formado, e as situações não encaminhavam tal formação, a aplicação de um conceito, sobre o qual não foram discutidas seus nexos conceituais, era falha. Também faltaram momentos para que os estudantes construíssem as variáveis, sendo que elas eram previamente definidas nas situações.

Consideramos que tais sínteses nos auxiliam a identificar alguns indícios da origem das dificuldades dos estudantes relacionados ao processo de pensamento e linguagem e também de formação do conceito, que devem ser considerados no momento da organização do ensino de álgebra.

³² Sousa (2004), em sua tese de doutorado, considera o conceito de álgebra como “[...] uma elaboração que contém a síntese de um longo processo de conhecimento das idéias que envolvem variações quantitativas, destacando-se a variável palavra, a variável figura e a variável letra” (p. 149).

Considerações finais

Cientes de que a totalidade do movimento da pesquisa não pode ser totalmente refletida na linguagem, mas que tal explicitação é imprescindível para comunicar de forma estruturada os resultados do processo que se desenvolveu, procuramos sintetizar a necessidade, os motivos, os objetivos envolvidos, bem como as ações e operações executadas, destacando as condições que cercaram a pesquisa, elementos esses que constituíram a atividade da pesquisadora.

No início da presente pesquisa, havia uma inquietação marcante: por que os estudantes não recorrem ao conhecimento algébrico para resolver situações-problema? Por que para eles não é ‘óbvio’ generalizar e completar, por exemplo, a última coluna da tabela que expressa a sequência dos números quadrados³³?

1	2	3	4	5	6				...	n
1	4	9	16			49	64	81	...	

Essas e outras inquietações geravam uma necessidade que envolvia as questões didáticas e metodológicas: como ensinar álgebra aos estudantes de forma que adquira sentido e possa se constituir como um conhecimento que os permita um olhar diferente para a realidade, para os fenômenos, para a vida?

Inicialmente, era propósito desta pesquisa elaborar uma sequência didática que respondesse a tal necessidade, mas esse propósito se mostrou ousado demais, considerando que ainda não havia a resposta à primeira inquietação e a muitas outras relacionadas aos processos cognitivos dos estudantes: como pensam, o que a linguagem representa, como

³³ Tal tabela constitui um dos itens de um instrumento diagnóstico que foi aplicado aos estudantes do 1º. ano do Ensino Médio, mas não discutido neste trabalho.

formam os conceitos e, ainda mais, como pensam algebricamente, como entendem a linguagem algébrica e como formam os conceitos algébricos.

Assim, a ansiedade em gerar uma seqüência de ensino, uma proposta ‘modelo’ do conhecimento algébrico, foi reduzida por considerar que são muitas as variáveis que interferem e que, portanto, uma pesquisa não contribui oferecendo modelos a ser seguidos, mas sim oferecendo a compreensão da influência de tais elementos (no caso pensamento e linguagem algébrica) no ensino. Optou-se então por identificar as manifestações dos processos de pensamento e linguagem algébrica dos estudantes e, por meio delas, as dificuldades com que os estudantes se deparam para resolver as primeiras situações-problema que envolvem conteúdo algébrico.

No movimento da pesquisa, a partir dos estudos teóricos, foram elaboradas três categorias de análise: qualidade do pensamento, qualidade da linguagem, o conceito de variável. Entende-se que existem inúmeras e variadas relações entre tais categorias, e que se deve ter um olhar dialético para o fenômeno em estudo (no caso, o pensamento e a linguagem por meio da resolução das situações-problema propostas), captando tais relações, o que foi feito no momento da análise dos dados. Sobre os dados obtidos, foram lançados juízos e deduções (Kopnin, 1978), e foram elaboradas abstrações, nem todas essenciais para a compreensão. Entretanto, para a apresentação, foram selecionadas as sínteses realizadas por meio de tais abstrações. É importante observar que implícitas a essas categorias está a atividade do sujeito, tanto do pesquisador, quanto do estudante.

Quando a presente pesquisa foi iniciada e os estudos teóricos começaram a ser realizados, bem como a preparação do instrumento de pesquisa com os estudantes, os pressupostos baseavam-se nas leituras realizadas até então, e nas interpretações e apropriações por parte da pesquisadora realizada a partir delas. Assim, as situações-problema que foram escolhidas e algumas reelaboradas obedeciam aos seguintes critérios: deveriam ser variadas,

não obedecendo a um tipo padrão; deveriam contemplar itens que pudessem ser resolvidos com estratégias aritméticas e outros que pudessem ser resolvidos com estratégias algébricas, deveriam gerar a necessidade de registro simbólico, deveriam contemplar o uso da variável conforme o modelo 3UV.

Por conterem itens que recorrem à variável como incógnita, outros que recorrem à variável como número geral e outros ainda como relação funcional, considera-se que as situações-problema contemplam concepções de álgebra como aritmética generalizada, como resolução de problemas e como estudo da relação entre grandezas, e enfatizam ainda a representação simbólica literal, estágio último e atual da linguagem algébrica.

Dessa forma, a análise dos dados e a retomada dos estudos teóricos permitiram captar as potencialidades e limitações do instrumento da pesquisa. Nesse sentido, consideramos que as situações-problema foram limitadas por não considerarem a historicidade do movimento humano, por trabalharem somente com movimentos regulares sem fazer referência aos movimentos que não mostram regularidade; por reforçarem o registro simbólico da variável, em seu aspecto mais sintetizado e formal, estágio atual da linguagem algébrica, excluindo a referência à álgebra não simbólica e a outros tipos de linguagem (palavras, figuras); por conduzirem à aplicação do conceito mais do que à sua formação; e por encaminharem ao pensamento empírico e não ao pensamento teórico. Dessa forma, elas podem ser consideradas problemas concreto-práticos, e não de aprendizagem, no dizer de Rubtsov (1996).

Havia a preocupação também, nesta análise, de identificar se tais situações geravam a necessidade de pensamento e linguagem algébrica do estudante e se, dessa forma, caracterizavam-se como problema ou tarefa, conforme a motivação reconhecida nas ações dos estudantes. Foram observadas variações de comportamento dos três grupos estudados frente às situações, indicando que a necessidade e o motivo não são gerados pela situação em si nem

somente no sujeito, mas na relação do sujeito com a situação proposta como elemento de sua atividade. Encontramos, nesse sentido: O grupo 1, que caracterizamos pela presença de motivos eficazes para a realização das situações-problema, preocupava-se em resolver e desvendar as situações e, para tanto, discutiam entre si e recorriam à professora para esclarecimentos; o grupo 2, oscilante entre motivos compreensíveis e eficazes, mostrava-se disposto a discutir para resolver o problema, mas quando se deparava com alguma dificuldade, sentia-se desestimulado e desviava para outro assunto; e o grupo 3, com predominância de motivos compreensíveis, sendo que as situações-problema não se mostraram motivadoras para o estudo, resolvia-as como uma tarefa a ser cumprida.

Em relação ao conceito e sua representação simbólica, em todas as situações-problema, ao apresentar uma notação que representasse a grandeza variável (por exemplo, x para representar o número de quilômetros na situação-problema do Taxista), pretendia-se que os estudantes se apropriassem delas. Se considerarmos que, para Vigotski (2001), as funções psíquicas superiores aparecem e se desenvolvem por meio de um processo intersíquico (entre pessoas) para um intrapsíquico (no interior do sujeito) e que a formação de conceitos passa por estágios variados em que, a princípio, as palavras (e no caso, consideramos aqui que as notações) são usadas no sentido de permitirem a comunicação, considerávamos que tal apropriação não ocorreria instantaneamente, mas no decorrer do processo. Entretanto, apesar da necessidade de se usar palavras, figuras ou símbolos para estabelecer a comunicação entre professor e estudantes, a identificação das variáveis do problema e sua simbologia poderia ser compartilhada e construída coletivamente, ainda que com o direcionamento da pesquisadora, pois apresentar uma letra por meio do enunciado de um problema não garante a apropriação do aluno. Alguns alunos sequer percebem esse registro, que para eles não tem significado; outros podem ter o foco de sua atenção desviado, optando por usar o símbolo indiscriminadamente, apenas por que faz parte do problema e isso indica que ele deve ser

usado. Assim, retomamos a necessidade de se entender a linguagem e o sistema simbólico algébrico como instrumento psicológico.

Dessa forma, entendemos que as situações-problema propostas permitiram que se concretizasse o objetivo desta pesquisa de investigar o movimento do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes. Entretanto, foi possível perceber, na medida em que aprofundávamos nossos estudos, que tal pensamento manifestado pelos estudantes ainda foi, na maioria das situações, o pensamento empírico. Tal fato nos conduz de volta a importância do processo de ensino na formação do pensamento teórico dos estudantes.

As generalizações efetuadas pelos estudantes partiram de casos particulares (no caso dos resultados aritméticos obtidos, encaminhados pela própria situação-problema). Além disso, as situações possibilitam a aplicação de conceitos algébricos, mas não a sua formação, no caso a aplicação do conceito de variável que não foi teoricamente formado pelos estudantes.

Para essa formação teórica do conceito de variável, as situações deveriam contemplar o movimento lógico-histórico do conceito, trabalhando com a fluência e interdependência deste, com os nexos conceituais que o integram a um sistema de conceitos. Nesse sentido, apenas o último exercício³⁴ da situação-problema 5 poderia ser caracterizador da formação do conceito teórico. Entretanto, nessa situação, consideramos que a análise foi limitada pelas circunstâncias postas da pesquisa, pela forma de encaminhamento da pesquisadora e por falhas na gravação, que não permitiram sua transcrição completa.

A seguir, pretende-se destacar alguns dos elementos relacionados às manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes; às especificidades do conhecimento algébrico; e às condições didáticas e metodológicas que exerceram influência nesta pesquisa,

³⁴ Trata-se do exercício extraído da tese de doutorado de Maria do Carmo de Sousa que, inserida na Educação Conceitual, atua com tais pressupostos, preocupando-se com a formação do conceito.

que nos dão indícios da origem das dificuldades dos estudantes e que, portanto, devem ser considerados para a organização do ensino, especificamente de álgebra.

- **Formação (essência e historicidade do conceito) e aplicação do conceito.** O processo de formação de um conceito é complexo e não ocorre a partir da proposta de uma determinada situação-problema sendo que aos estudantes, devem ser oferecidas oportunidades de não somente aplicar um conceito, mas formá-lo. Nesse sentido, devem ser contemplados os nexos conceituais, que são no caso do conceito de variável, os conceitos de relação, dependência, movimento (regular e irregular), campo numérico, conforme SOUSA (2004) Ainda que o conceito seja apresentado aos estudantes em sua forma mais elaborada, é necessário que se contemple sua historicidade, o que então permitirá aos estudantes que captem sua essência.
- **Processos do pensamento.** Os estudantes tiveram possibilidades de emitir juízos e elaborar deduções, assim foi possível identificar um processo de abstração destes, o que os levava a análise da situação. Entretanto, a síntese na forma de conceito ainda era precária, e esperar que ela fosse feita era precoce, considerando as possibilidades ainda restritas oferecidas pelas situações-problema propostas. Para que o processo de abstração apenas iniciado fosse realmente desenvolvido, e levasse ao processo de análise e síntese necessário ao pensamento teórico e para o caminho do abstrato ao concreto, na formação do conceito, entende-se que seriam necessárias outras ações de ensino. Ações estas que encaminhassem para a generalização teórica, para a compreensão de conceitos dentro de um sistema de conceitos (os nexos conceituais), para a conscientização das próprias ações mentais. Entretanto o instrumento desta pesquisa não se tratava de uma sequência de ensino e não possui todos os elementos do que se entende por Atividade Orientadora de Ensino, somente o que seria chamado

o problema desencadeador, assim reconhece manifestações do pensamento, mas não oferece condições para observar seu desenvolvimento.

- **Conceitos e pseudoconceitos.** Muito do que, como professores, entendíamos e entendemos como conceitos algébricos, que foram apreendidos pelos estudantes, podem ser ainda apenas pseudoconceitos. Para a comunicação entre os estudantes e a professora/pesquisadora, eles são suficientes. Entretanto, não se pode garantir que o significado atribuído pelos estudantes aos conceitos e à linguagem utilizada fossem em seu conteúdo o mesmo que o atribuído pela professora. As conseqüências de manter os pseudoconceitos algébrico podem ser encontradas na não utilização desses conceitos pelos estudantes de 1º ano do Ensino Médio para resolver as situações-problema propostas, usando o conhecimento algébrico.
- **A linguagem algébrica como elemento da realidade objetiva.** No movimento lógico-histórico do conhecimento algébrico na humanidade, percebemos a necessidade sempre premente de recorrer a uma linguagem que refletisse o pensamento, que pudesse ser instrumento dele. Assim tal linguagem aos poucos se constituía historicamente. A diferença no ensino é que tal linguagem atualmente se apresenta constituída por um simbolismo formal e precisa ser apropriada pelos estudantes. Em função das potencialidades de uso da linguagem simbólica, dá-se a ânsia de ensiná-la como se apresenta. No entanto, ao fazer isso, desconsideramos o movimento que a originou, e ela se torna instrumento mecânico e sem significado. Perde assim sua função, como linguagem, de refletir, estruturar, organizar o pensamento. As situações-problema propostas sugeriam o uso da variável letra, o registro simbólico formal do conhecimento algébrico. Assim, os estudantes tinham poucas oportunidades para se manifestar por meio da linguagem usual, por meio de abreviações ou por outras formas de linguagem, ainda que se manifestassem oralmente

- **Sentidos e significado do simbolismo algébrico.** Estágio último da linguagem algébrica, tal simbolismo precisa ser apropriado pelos estudantes, mas assim como as palavras, tais símbolos são repletos de conceitos. Usá-los indistintamente, sem a compreensão do significado, torna-o um som vazio, um símbolo sem significado. Entretanto, enquanto não conhecem seu significado, os estudantes atribuem diferentes sentidos a tais símbolos. Ao professor, cabe reconhecer os diferentes sentidos atribuídos aos símbolos e ao conceito e aproximá-lo do significado historicamente atribuído. Os sentidos e significados que os estudantes constituem para o conhecimento algébrico em geral estão também relacionados à sua atividade, aos motivos que os conduzem e aos objetivos que os dirigem. O significado se relaciona com a realidade objetiva enquanto que o sentido que é pessoal se relaciona à vida do sujeito propriamente às suas motivações.
- **O conhecimento aritmético e o conhecimento algébrico.** A idéia inicial de se colocar em cada problema itens que pudessem ser resolvidos por estratégias aritméticas e, em seguida, por estratégias algébricas não se mostrou produtiva. Percebe-se que o conhecimento aritmético que os estudantes apresentaram para resolução das questões não foi suficiente para permitir ou encaminhar avanços em relação ao conhecimento algébrico, o que nos indica que não se pode pensar em linearidade de um conhecimento a outro. Por exemplo, na situação-problema do campeonato de futebol, os estudantes deveriam preencher uma tabela, identificando a partir do número de times, a quantidade de jogos de cada time e a quantidade de jogos do campeonato, generalizando para n times. Tal generalização, bastante discutida em um dos grupos de estudantes e sintetizada em uma fórmula, mostrou-se insuficiente quando em outro momento da mesma questão: os estudantes não aceitaram a validade

daquela fórmula generalizada por eles mesmos a partir das informações aritméticas, o que mostrou que realmente a generalização não aconteceu.

- **Da importância da escolha, elaboração e estruturação da situação-problema e seu encaminhamento com os estudantes.** Definir, estruturar e propor uma situação-problema para um grupo de estudantes apresentou-se como uma ação da maior relevância, considerando que, dependendo de como fosse proposta e encaminhada, tal situação-problema poderia abrir possibilidades para o processo de generalização, abstração e formação de conceitos em sua forma empírica ou teórica.

Os elementos acima destacados nos trazem indícios da origem das dificuldades dos estudantes com o conhecimento algébrico. Auxiliam-nos a explicar por que os estudantes do Ensino Médio não recorrem a esta forma de conhecimento. Para pensar algebricamente e usar a linguagem simbólica formal, o estudante precisa generalizar a partir de generalizações (por exemplo do conceito de número), recorrer ao pensamento teórico, atribuir significados e conceitos aos símbolos. Neste sentido destaca-se a diferença do conhecimento aritmético e algébrico. No movimento histórico, o primeiro se desenvolve a partir de objetos concretos, da necessidade do homem de controlar o movimento das quantidades. Mas se tal controle aritmético fosse suficiente não haveria a necessidade do conhecimento algébrico. Este surge como um outro momento no controle das quantidades. Os estudantes precisam contemplar esta necessidade, caso contrário se manterão presos ao conhecimento aritmético que já possuem e que para eles também é suficiente para resolver os problemas apresentados.

Compreendendo a necessidade do conhecimento algébrico, e as formas (símbolos) que expressam seu conteúdo (conceitos e significados) os estudantes o perceberão como uma maneira diferente de entender a realidade. Daí a importância do processo de ensino de álgebra e da reflexão e investigação constante de professores que se preocupem em compreender as

formas como os estudantes formam os conceitos, pensam e recorrem à linguagem ao se relacionarem com a realidade objetiva.

Entende-se desta forma a atividade desenvolvida como pesquisadora atendeu também à necessidade da professora de refletir, investigar e compreender por que os estudantes que já passaram por alguns anos do ensino formal de álgebra não recorrem a este conhecimento para resolver as situações-problema propostas. Reconhecer os elementos relacionados às especificidades do conhecimento algébrico, às questões de metodologia e didática e principalmente em relação aos processos de pensamento e linguagem, que podem estar na origem das dificuldades dos estudantes, oferecem outras condições para que a atividade da professora seja reorganizada, e se constitua a partir de diferentes ações e operações orientadas pela necessidade de gerar nos estudantes uma efetiva apropriação do conhecimento algébrico.

Referências

ALEKSANDROV, A. D. *et al.* **La matemática**: su contenido, métodos y significado. 7 ed. Madrid: Alianza Universidad, 1988.

BERNARDES, M. **As ações na atividade educativa**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. 2007. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CARAÇA, B. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

CEDRO, W. **O espaço de aprendizagem e a atividade ensino**: o Clube de Matemática. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004

COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CURY, H. N.; LANNES, W.; BROLEZZI, A. C.; VIANNA, C. R. **Álgebra e Educação Algébrica**: concepções de alunos e professores de Matemática. In: Educação Matemática em Revista- RS, v. 4, n. 4, p. 9-15, 2002.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscou: Progreso, 1988.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalizacion en la enseñanza**. Havana: Pueblo y Educacion, 1982.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 1995.

FIorentini, D.; Miorim, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a Educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1 [10], p. 78-91, mar. 1993.

FREITAS, M. A. **Equação do 1º Grau**: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

GALPERIN, P. Y. **Introduccion a la psicologia**: un enfoque dialéctico. Madrid: Pablo del Rio, 1976

GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. **Após Vygotsky e Piaget**. Perspectivas social e construtivista. Escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GOMEZ-GRANELL, C. Aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1996.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 7 ed. São Paulo: Globo, 1994.

ITELSON, L. B. Esencia del aprendizaje y bases psicologicas de la ensenanza. In: PETROVSKY, A. V. **Psicologia evolutiva e pedagógica**. Moscou: Progreso, 1979. p. 205-240

JESUS, H. L. **Manifestações do conhecimento matemático de alunos jovens e adultos em atividades de ensino**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

KARLSON, P. **A magia dos números**. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LEONTIEV, A. N. **Linguagem e razão humana**. Trad. Conceição Jardim, Eduardo Lúcio Nogueira. Lisboa: Presença, 1975.

_____. **Actividad, conciencia, personalidad**. 2 ed. Havana: Pueblo y Educacion, 1983.

_____. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S., LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 5 ed. São Paulo: Ícone, 1994.

LINS, R. C., GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

LINS LESSA, M.; ROCHA FALCÃO, J. Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da Psicologia da Educação Matemática. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, 2005, 18(3), p. 315-322.

LURIA, A. R. **Pensamento e linguagem**: as últimas conferências de Luria. Porto Alegre: Arte Médicas, 1987.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998

MOISÉS, R. P. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica**: o problema em movimento. 1999. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação)– Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

MORAES, S. P. G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. 2008. 261 p. Tese (Doutorado em Educação)– Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008

MORETTI, V.; MOURA, M. O. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, p. 67-82, 2003.

MOURA, M. (Coord.). **Controle da variação de quantidades**. Atividades de ensino. São Paulo: Edusp, 1996.

_____. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A.; CARVALHO, A. (Orgs.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola. São Paulo: Pioneira, 2001.

MOYSES, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. 7 ed. Campinas: Papirus, 1997.

PAPINI, M. C. Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. **Relime**, Buenos Aires, v. 6, n. 1, p. 41-71, mar. 2003.

PINO, A. O biológico e o cultural nos processos cognitivos. In: MORTIMER, E. F.; SMOLKA, A. L. B. (Orgs.). **Linguagem, cultura e cognição**: reflexões para o ensino e a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PRADO JR., C. **Dialética do conhecimento**. 4. ed. São Paulo: Brasiliense, 1963.

RUBINSTEIN, S. L. **El ser y la consciencia**. La Habana: Editora Universitária, 1965.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. (Orgs.). **Após Vygotsky e Piaget**. Perspectivas social e construtivista. Escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 129-137.

SCHOEN, H. L. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

SFORNI, M. S. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino**: contribuições da Teoria da Atividade. Araraquara: JM, 2004.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Ensenanza del algebra elemental**: una propuesta alternativa. Mexico: Trillas, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. **Teoria e método em Psicologia**. Trad. Claudia Berliner. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que os alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas III**. 2ª ed. Madrid: Visor, 2000

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Trad. José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.