RENATO DOUGLAS GOMES LORENZETTO RIBEIRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: UM OLHAR SOB A PERSPECTIVA DA DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

SÃO PAULO

2012

RENATO DOUGLAS GOMES LORENZETTO RIBEIRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: UM OLHAR SOB A PERSPECTIVA DA DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

(versão corrigida)

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração:
Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

SÃO PAULO

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.32 Ribeiro, Renato Douglas Gomes Lorenzetto
R484e O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica / Renato Douglas Gomes Lorenzetto Ribeiro; orientação Oscar João Abdounur. São Paulo: s.n., 2012.
101 p. ils.; anexos;

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Geometria Não Euclidiana (Ensino) 2. Divulgação Científica I. Abdounur, Oscar João, orient.

Nome: RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto

Título: O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da Divulgação Científica.

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração:
Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oscar João Abdounur Instituição: IME-USP

Julgamento:_____Assinatura:_____

Prof. Dr. _____Instituição:_____

Julgamento:_____Assinatura:_____

Prof. Dr. _____Instituição:_____

Julgamento:_____Assinatura:_____

AGRADECIMENTOS

Acadêmicos

Agradeço às pessoas que colaboraram para este trabalho. São elas:

Oscar João Abdounur, meu orientador.

Delma Pillão, que colaborou direta e ativamente para as primeiras ideias que culminaram nesta dissertação.

Sérgio Alves, que despertou meu interesse para as belezas das geometrias não-euclidianas.

Maria do Carmo Santos Domite e Zionice Garbelini Martos Rodrigues, que aceitaram o convite para participar da banca de qualificação e contribuíram com ricas sugestões.

Nilson José Machado, Renata Ribeiro, Sibele Cazelli, Izabel Bonete e Ana Maria Kaleff, que com prontidão me forneceram textos digitais de seus trabalhos e/ou emprestaram materiais relevantes para esta pesquisa.

Geisa Meirelles, funcionária da biblioteca da UFF, por toda a colaboração.

Funcionários da USP, especialmente os da biblioteca e do serviço de pós-graduação da FE-USP.

Pessoais

Adriana, minha esposa, que compartilhou quase todos os momentos desta trajetória e, com amor, me incentivou e me apoiou incondicionalmente. Grande amor de minha vida.

Meus pais, Misael e Ilza, que com grandes exemplos sempre foram minha principal fonte de inspiração.

Jéssica e Fernando, meus irmãos queridos.

Ílen e Luiz, meus sogros, que sempre me incentivaram.

Muba e Flora, presentes que a vida me preparou.

Wellington e Sérgio, companheiros fiéis.

Eunice, Henrique, Clodine, Eveline e Cacá, minha segunda família.

Robson Calça, amigo filósofo, que ajudou nos momentos mais decisivos.

Luciano Gomes, que colaborou até nos mínimos detalhes.

Cristiana Coimbra, que auxiliou nos momentos finais deste trabalho.

Bethania, que compartilhou os momentos iniciais desta aventura e carinhosamente me incentivou.

Janice, Ruth, Julia Borin e Ivani, que colaboraram para a construção do professor de Matemática que sou hoje.

Equipe do colégio Giordano Bruno, especialmente Nivaldo e Luciana, que enfaticamente me apoiaram.

Equipe da Ed. Moderna, especialmente Miguel e Roberta, que colaboraram para abrir as portas do mestrado e conciliar trabalho e estudos.

Colegas do IME, que compartilharam momentos anteriores ao mestrado e fizeram parte de minha trajetória na educação matemática. Na impossibilidade de citar tantas pessoas importantes neste momento de minha vida, escolho as seguintes para representá-las: Júlio (in memoriam), William, Gisele, Renata, Nivaldo, Luanna, Claudinha e Marina.

RESUMO

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não-euclidianas**: um olhar sob a perspectiva da Divulgação Científica. 2012. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Este trabalho investiga as possibilidades de ensino de ideias fundamentais das geometrias não-euclidianas sob a perspectiva da Divulgação Científica e identifica as principais características presentes nas pesquisas que relatam experiências de ensino destas geometrias. nas pesquisas que relatam experiências de ensino destas geometrias. Bibliográfica, a pesquisa fundamenta teoricamente a Divulgação Científica, a educação não-formal e o ensino das geometrias não-euclidianas. Em relação às geometrias, enfatizou-se o processo histórico de seu surgimento, em especial as tentativas de prova do quinto postulado de Euclides, pois esse processo evidencia uma quebra de paradigma no conhecimento matemático, incluindo a concepção de verdade matemática. Sobre o ensino das geometrias, debateu-se sua inserção no currículo da educação básica e o crescente número de menções ao tema em orientações educacionais oficiais, tanto no Brasil como no exterior. Procurou-se compreender os objetivos dos educadores que se propõem a ensinar as geometrias não-euclidianas e percebeu-se que tais objetivos não se vinculam unicamente ao pressuposto de que a aprendizagem da geometria euclidiana se torna significativa quando se proporciona o contato com as não-euclidianas. Foi feito um mapeamento de algumas pesquisas que apresentam experiências de ensino das geometrias e elencaram-se seus êxitos. A análise das pesquisas que relatam estudos de caso esteve focada nos recursos normalmente utilizados, nos principais pressupostos e nos públicos escolhidos. Nessas pesquisas, percebeu-se forte presença da geometria esférica e da geometria hiperbólica, abordadas principalmente por intermédio de materiais concretos e de *software* de geometria dinâmica, respectivamente. Ficou evidenciada a possibilidade de ensino de ideias fundamentais das geometrias não-euclidianas para diferentes públicos.

Palavras-chave: Geometria Não-Euclidiana; Ensino de Geometria; Divulgação Científica; Educação Não-Formal.

ABSTRACT

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não-euclidianas**: um olhar sob a perspectiva da Divulgação Científica. 2012. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

This paper investigates the teaching possibilities of fundamental ideas of the non-Euclidean geometries under the perspective of scientific popularization and identifies the main characteristics in the teaching of these geometries. This bibliographical research justifies scientific theory, non-formal education, and the teaching of non-Euclidean geometries. In relation to various geometries, we have emphasized the historical process of its emergence, in particular attempts to prove Euclid's fifth postulate since this process shows a paradigm in mathematical knowledge, including the concept of mathematical truth. On the teaching of geometry, we have discussed its inclusion in the curriculum of basic education and the growing number of references to the subject in official educational guidelines, both in Brazil and abroad. We have tried to understand the goals of educators who purport to teach non-Euclidean geometries and realized that these goals do not connect solely to the assumption that learning of Euclidean geometry becomes significant when it provides the contact with non-Euclidean geometries. We have mapped some of the studies with teaching experiences of geometries and listed their successes. The analysis of the research that reports case studies focused on the resources normally used, on the main assumptions, and on chosen audiences. In the analyzed research, we have encountered a strong presence of Spherical Geometry and Hyperbolic Geometry, mainly approached via concrete materials and dynamic geometry pieces of software, respectively. The teaching possibility of basic principles of the non-Euclidean geometries for different publics became evident.

Keywords: Non-Euclidean Geometry; Teaching of Geometry; Scientific Popularization; Nonformal Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Quinto Postulado de Euclides 36

Figura 2: Hipérbole.....38

Figura 3: Quadrilátero de Saccheri 40

Figura 4: As Três Hipóteses 41

Figura 5: Reta Paralela 42

Figura 6: Perpendicular Comum.....42

Figura 7: Comportamento Assintótico 43

Figura 8: Menor Defeito 44

Figura 9: Comportamento Assintótico com Linha Equidistante 44

Figura 10: Critério para Inexistência de Perpendicular Comum 45

Figura 11: Perpendiculares Comuns.....45

Figura 12: Paralela Limite 46

Figura 13: Quadrilátero de Lambert 47

Figura 14: As Três Hipóteses (Lambert) 47

Figura 15: Equivalência das Hipóteses de Saccheri e Lambert.....48

Figura 16: Retas Paralelas 50

Figura 17: Retas Paralelas - Lobachevsky.....51

Figura 18: Ângulo de Paralelismo 51

Figura 19: Paralelas Assintóticas.....54

Figura 20: Modelo de Klein.....57

Figura 21: Disco de Poincaré.....58

Figura 22: Modelo do Semiplano de Poincaré 58

Figura 23: Raio da Terra.....85

SUMÁRIO

Apresentação 11

1. A Pesquisa 12

1.1. Pressupostos teóricos 12

1.2. Objetivos 12

1.3. Justificativa e problema 13

2. Fundamentos 14

2.1. Educação não-formal 14

2.2. Divulgação Científica 20

2.3. Divulgação Científica como processo educacional 25

2.4. O Ensino das geometrias não-euclidianas 28

2.4.1. O termo geometria não-euclidiana 28

2.4.2. A possibilidade de ensino das geometrias não-euclidianas 29

2.4.3. As geometrias não-euclidianas e a formação inicial do professor de Matemática 33

3. O surgimento das geometrias não-euclidianas 35

3.1. Euclides e o postulado das paralelas 35

3.2. Saccheri 40

3.3. Saccheri e a hipótese do ângulo agudo 42

3.4. Lambert 47

3.5. Lobachevsky 49

3.6. Bolyai 52

3.7. Riemann 55

3.8. Modelos Geométricos 56

4. Geometrias não-euclidianas e Educação Matemática 60

4.1. As geometrias não-euclidianas e as propostas curriculares 60

4.2. Geometrias não-euclidianas como proposta de ensino 63

4.3. Experiências de ensino das geometrias não-euclidianas 64

4.4. A pouca ênfase no sistema axiomático 78

4.5. As geometrias não-euclidianas para o público não escolar 84

5. Considerações finais 92

6. Referências 95

7. ANEXO 100

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa procura identificar quais são as possibilidades de ensino das geometrias não-euclidianas e suas características, sob a perspectiva da Divulgação Científica.

As geometrias não-euclidianas foram escolhidas por terem se tornado um tema em evidência em aplicações da ciência, por estarem inseridas em propostas de educadores matemáticos para que façam parte do currículo oficial da educação básica em alguns países (KALEFF; NASCIMENTO, 2004; GUVEN; BAKI, 2010) e por serem apresentadas em livros didáticos brasileiros (PATAKI, 2003), bem como por serem citadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, que as consideram de grande importância para as mudanças de paradigmas na matemática (BRASIL, 1998).

O recorte proposto sob a perspectiva da Divulgação Científica foi inicialmente motivado por experiências pessoais com estágio[1] realizado na Estação Ciência[2], pelos consequentes contatos com outros museus de ciência e iniciativas de divulgação a partir de materiais concretos e exposições. A Matemateca[3] também foi uma fonte inspiradora complementar à exposição mantida pela Estação Ciência.

A construção de um trabalho de mapeamento de atividades, relatos e estudos de caso sobre o ensino das geometrias não-euclidianas em sala de aula foi pensado como um processo auxiliar para se entender melhor os aspectos relacionados à aprendizagem sobre o tema. Em outras palavras, as tentativas bem sucedidas do ensino dessas geometrias certamente podem ser reveladoras acerca de tal ensino, como suas metodologias e os objetivos de quem se propõe a ensiná-las.

---

[1] Estágio curricular não obrigatório.

[2] Museu de Ciência mantido pela Universidade de São Paulo. Seu nome oficial é Centro de Difusão Científica, Tecnológica e Cultural da Pró-Reitoria de Cultura e Extensão Universitária da Universidade de São Paulo.

[3] Conjuntos de materiais concretos destinados ao ensino de Matemática organizados por professores vinculados ao IME-USP. Site: http://matemateca.ime.usp.br/

1. A PESQUISA

1.1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

A Matemática vem se desenvolvendo de forma acelerada e a disciplina Matemática ensinada nas escolas se apresenta cada vez mais com aspectos bastante distintos daqueles apresentados pela academia. Há outros fatores que colaboram para este quadro e um aqui ressaltado é o aspecto institucional/formal da escola, ou seja, a Matemática escolar é proposta a partir de leis e orientações oficiais, externas à escola. Por mais que a escola exerça participação na formulação de tais leis e orientações, sempre haverá o caráter externo, pois cada instituição escolar é diferente da outra e, portanto, a prática de uma é externa à outra.

Não se deseja colocar em pauta a necessidade da existência da escola e nem propor mudanças ao aspecto organizacional dessas instituições, mas refletir sobre o mesmo objeto que a escola se debruça: a Educação. Refletindo sobre as limitações da escola tem-se um aparato maior para a promoção da educação, que sabemos que extrapola o âmbito escolar, pelo menos isto configura-se como pressuposto deste trabalho.

Outro pressuposto também permeia esta pesquisa: um olhar mais amplo sobre um conhecimento normalmente favorece o entendimento de algo mais específico. Assim, tem-se que o ensino de conceitos das geometrias não-euclidianas favorece o ensino da geometria euclidiana e do próprio pensamento matemático. O mesmo pressuposto indica ainda que uma visão que encare o conhecimento científico sem se prender às limitações da escola, favorece a própria ação pedagógica escolar. O viés da Divulgação Científica e o da educação não-formal certamente apontam na mesma direção do que será aqui exposto.

1.2. OBJETIVOS

Sob influência dos pontos acima mencionados, é objetivo principal desta pesquisa investigar acerca das possibilidades de ensino de ideias fundamentais das geometrias não-euclidianas sob o viés da educação não-formal e da Divulgação Científica. Procura-se identificar quais são essas possibilidades e características de ensino das geometrias não-euclidianas, sob a perspectiva da Divulgação Científica.

Baseando-se em diversos trabalhos que exploram o ensino das geometrias não-euclidianas, tanto no que se refere a espaços formais como a não-formais, a presente pesquisa se propõe a buscar fundamentos para tais práticas e, dessa forma, incentivar a proliferação de iniciativas semelhantes a dos autores citados por parte de professores, museus de ciência e divulgadores científicos.

1.3. JUSTIFICATIVA E PROBLEMA

A presente pesquisa justifica-se pelo fato de que hoje em dia há um crescente interesse no ensino das geometrias não-euclidianas na educação básica, pois alguns educadores, dentre eles Krause (1986), afirmam que com elas seria possível compreender melhor muitas relações matemáticas e a própria geometria euclidiana.

Deseja-se compreender quais são as possibilidades e características de ensino e aprendizagem de conceitos próprios das geometrias não-euclidianas na educação básica ou em ambientes extraescolares, sob o olhar da Divulgação Científica.

Fora do contexto escolar, quais podem ser as alternativas de ensino dessas geometrias? Como se pode atingir o público das pessoas que já concluíram a educação básica ou mesmo as que nunca entraram numa instituição de ensino formal? Como podemos explorar esses meios para os nossos objetivos? Quais tentativas de atingir um público de não-especialistas já obtiveram sucesso?

A busca de contextos relacionados às geometrias não-euclidianas também colaborou com este trabalho. Acredita-se que os contextos auxiliam a criar um ambiente mais interessante aos olhos de quem aprende e, portanto, encontrar propostas em que os conceitos destas geometrias sejam trabalhados é uma das chaves para promover seu ensino, seja na arte ou em suas aplicações.

Esses questionamentos, essas buscas e essas hipóteses são os que permearão este trabalho.

2. FUNDAMENTOS

O conteúdo da pesquisa envolve três áreas que, naturalmente, necessitam de reflexão: *Divulgação Científica*, a *educação não-formal* e o *ensino das geometrias não-euclidianas*. Logo, para o encaminhamento da pesquisa, buscou-se estudiosos de referência em cada uma delas, e uma compilação dessas buscas segue abaixo.

A apresentação desse estudo traz cada uma das áreas discutidas separadamente por uma questão exclusivamente didática, já que se considera não ser possível dissociá-las plenamente.

2.1. EDUCAÇÃO NÃO-FORMAL

O debate acerca de uma definição da educação não-formal, suas funções ou a própria utilização do termo *não-formal* tem sido constante no decorrer de décadas. Algumas opiniões estão, ou estiveram, mais próximas de um consenso e outras sempre foram motivos para discordâncias. Neste subcapítulo pretende-se refletir sobre essas questões com o objetivo de adotar uma visão que seja mais conveniente para o objetivo proposto. Muito embora haja dúvidas de que *não-formal* seja a melhor expressão para o modelo de educação que se quer discutir, será a adotada neste trabalho e os motivos serão expostos a seu tempo.

Por volta da década de 1960 a instituição escolar era alvo de profundos questionamentos acerca de sua função e até mesmo da necessidade de sua existência, questionamentos e críticas que só aumentaram nos anos que se seguiram. Colom Cañellas (2005) em poucas palavras faz um retrospecto de tais ideias, dizendo que a emergência da sociedade do conhecimento dava, ao menos em parte, "la razón a los viejos visionarios que en la década de los años sesenta y de los setenta nos hablaban del *aula sin muros*[1], de la *deseducación*[2], de la *muerte de la escuela*[3], de la *sociedad desescolarizada*[4], o del *fracaso de la escuela*[5]" [6] (p. 9, grifo do autor).

Esses termos revelam visões positivas e/ou negativas em relação à instituição escolar, porém todas apontavam para uma "nova" percepção: a educação não é limitada à escola e a extrapola.

---

[1] MACLUHAN, M.; CARPENTER, E. **El aula sin muros.** Barcelona: Cultura Popular, 1968.
[2] GOODMAN, P. **La deseducación obligatoria.** Barcelona: Fontanella, 1973.
[3] REIMER, E. **La escuela ha muerto.** Barcelona: Barral, 1974.
[4] ILLICH, I. **La sociedad desescolarizada.** Barcelona: Barral, 1976.
[5] HOLT, J. **El fracaso de la escuela.** Madrid: Alianza, 1977
[6] a razão aos antigos visionários que na década de 60 e de 70 nos falavam de *aula sem muros*, da *deseducação*, da *morte da escola*, da *sociedade desescolarizada*, ou do *fracasso da escola*. (tradução nossa)

Certos deste papel que a educação assume, muitos teóricos tentaram definir e nomear conceitos que abarcassem as funções educacionais existentes e que a escola se mostrava insuficiente. Trilla (2008) cita a chamada *educação permanente* que seria um dos termos que ganharam maior notoriedade por trazer a ideia de que a educação do indivíduo continua mesmo após a sua saída da instituição escolar, ao decorrer de sua vida.

No final da década de 60, Philip Coombs e sua equipe foram convidados pela UNESCO a escrever um documento que serviria de base para a *International Conference on World Crisis in Education*, sediado nos Estados Unidos em 1967 (SIRVENT, TOUBES *et al.*, 2006). Este documento deu origem ao livro *The World Educational Crisis*, de 1968, em que trata da promoção de meios que valorizem ações educativas que não são plenamente atendidas pela escola e, admitindo que há aprendizados que não são intencionais, faz a ressalva que o livro apenas trata "daquelas atividades que se organizam intencionalmente com o propósito expresso de alcançar determinados objetivos educacionais e de aprendizagem"[7] (apud TRILLA, 2008) e utilizaram os termos *informal* e *não-formal*, indiscriminadamente. Poucos anos mais tarde, em uma tentativa de descrever melhor seus objetos, os mesmos pesquisadores definiram tais conceitos com maior precisão.

A definição de Coombs & Ahmed diz que a educação formal

> compreenderia "o 'sistema educacional' altamente institucionalizado, cronologicamente graduado e hierarquicamente estruturado que vai dos primeiros anos da escola primária até o último da universidade"; a educação não-formal, "toda atividade organizada, sistemática, educativa, realizada fora do marco do sistema oficial, para facilitar determinados tipos de aprendizagem a subgrupos específicos da população, tanto adultos como infantis"; e a educação informal, "um processo, que dura a vida inteira, em que as pessoas adquirem e acumulam conhecimentos, habilidades, atitudes e modos de discernimento por meio das experiências diárias e de sua relação com o meio"
>
> (apud TRILLA, 2008, p. 33)

As definições apresentadas por Coombs & Ahmed passaram a ser amplamente aceitas, principalmente pelo fato de que legitimavam atividades educacionais que estavam, de modo crescente, sendo exercidas ao redor do mundo, como é o caso da educação de jovens e adultos, da educação a distância e das iniciativas de educação da população nas zonas rurais. Além de incorporar como pressuposto que a escola não é o único instrumento legitimador da educação, em consonância com muitos teóricos da época. Pressuposto este que também é adotado neste trabalho.

[7] COOMBS, P. H. **The World Educational Crisis.** Nova York: Oxford University Press, 1968. p. 19.

Com a definição tripartite de educação, algumas limitações começaram a ser enfatizadas. Alguns teóricos, como Trilla, se dedicaram a ampliar as ideias de Coombs, enquanto outros, decidiram resgatar outras maneiras de definir as atividades educacionais e/ou até mesmo negá-las.

Trilla lista várias destas limitações e se propõe a tentar compreendê-las melhor, adotando uma definição de educação não-formal, porém reconhecendo uma impossibilidade de existência de definição exata, afirma:

> [...] caso nos exigissem a problemática e sempre facilmente refutável oferta de uma definição, nossa proposta é a seguinte: entendemos por educação não-formal o conjunto de processos, meios e instituições específica e diferenciadamente concebidos em função de objetivos explícitos de formação ou instrução não diretamente voltados à outorga dos graus próprios do sistema educacional regrado.
>
> (2008, p. 42)

Para compreender melhor onde se situa o limite entre educação formal e não-formal, Trilla assume a existência de critérios diferentes. Ao considerar o *critério metodológico*, entende-se a equiparação entre educação formal e escolar; e, por sua vez, entre educação não-formal e não-escolar. Porém, Trilla adota o *critério estrutural* que entende que a diferença entre os conceitos reside em sua inserção ou não em um sistema educativo regrado, ou seja, "o que vai do ensino pré-escolar até os estudos universitários, com seus diferentes níveis e variantes" (2008, p. 41-42).

No entanto, mesmo adotando tal critério, seria possível identificar situações educacionais que se mostram difíceis de distinguir entre formal e não-formal. O autor então se interessa em investigar melhor o que chama de "porosidade nas fronteiras". Reconhecendo as interações entre educação formal na não-formal, bem como da informal com as outras duas, Trilla admite que não podemos entender os três conceitos como compartimentos estanques e defende "um sistema de educação que aumente ainda mais a porosidade entre os três setores" (p. 48).

Para uma precisão maior, entende-se que o critério estrutural respeita a estrutura legal constituída, ou seja, é aquilo que o Estado mantém com suas regras e/ou orientações. Isso significa que uma atividade não-formal em um país pode ser formal em outro e que, com a criação de novas regras ou orientações, algo pode deixar de ser não-formal e passar para o campo do formal (TRILLA, 2008, p. 40). Seria o caso, por exemplo, da importância que a Matemática escolar no Brasil deveria passar a dar ao chamado *Tratamento da Informação*, discutido nos PCNs (BRASIL, 1998).

Alguns exemplos das porosidades seriam os cursos extracurriculares que as escolas promovem em seu interior, ou seja, uma atividade não-formal oferecida por uma instituição de caráter formal, e os temas transversais que têm sido cada vez mais valorizados pela escola, ou seja, uma discussão de caráter não-formal que passa a ser formalizada.

Trilla (2008) faz uma análise bastante interessante acerca das interações entre a educação formal, a não-formal e a informal. Como exemplos de *interações funcionais* cita as relações de complementaridade, de suplência ou de substituição, de reforço e colaboração e de interferência e contradição. Não se pretende aqui expor em detalhes essas relações, mas apenas deixar claro que elas existem e que existem em todos os sentidos. Até mesmo porque Trilla já se dedica a isto, e com destreza. Interessa-se pelas relações de complementaridade, conceito abordado por Colom Cañellas (2005), que faz uma defesa bem diferente da de Trilla, mas com justificativas muito semelhantes, quando não idênticas.

Colom Cañellas (2005) estranha o fato de tantos educadores estarem empenhados para compreender o campo da educação formal, não-formal e informal, sendo que sua definição não tem cunho pedagógico, e sim jurídico/administrativo. Diz que se nos empenhássemos em distinguir uma pedagogia formal de uma não-formal não chegaríamos a conclusão alguma (p. 11).

O curioso é que, como dito anteriormente, Colom Cañellas (2005) parece optar em desistir de utilizar o já consagrado termo *não-formal* pelos mesmos motivos que Trilla (2008) decide aprofundar o tema. Cañellas argumenta que já não é possível distinguir com clareza o que realmente faz parte de uma formalidade justamente pelos pontos também levantados por Trilla: as interações entre o formal, o não-formal e o informal.

Em pesquisa realizada nas Ilhas Baleares, arquipélago espanhol situado no Mediterrâneo, Colom Cañellas verificou a quantidade de atividades extracurriculares propostas pelas escolas e de cursos não-formais propostos por outras instituições que não fazem parte do sistema formal e concluiu, "paradójicamente, que una de las fuentes más significativas de educación no formal son los centros propios de la educación formal[8]" (2005, p.15).

Por mais que os autores divirjam nas considerações que cercam a questão da educação não-formal, eles tecem propostas muito semelhantes. Ambos, a seu modo, propõem que o

[8] paradoxalmente, que uma das fontes mais significativas de educação não-formal são as instituições dedicadas à educação formal (tradução nossa).

olhar dos educadores estejam voltados para as manifestações educativas, sejam formais ou não-formais. Colom Cañellas (2005) identifica um conjunto de questões básicas que aparecem no processo educativo, organizados em âmbitos – dos professores, dos alunos, da instituição e do espaço físico. Já Trilla (2008) deixa evidente a importância de os educadores estarem atentos às interferências entre a educação formal, a não-formal e a informal, para que assim possam intensificá-las.

Reforçando aspectos parecidos aos teóricos acima citados, María Teresa Sirvent (2006) faz uma revisão do conceito de educação não-formal. A respeito do termo *não-formal*, a pesquisadora denuncia que a definição focada na negação do formal "parecía configurar una contraposición con la rigidez y la jerarquización en la relación pedagógica propias de cierto modelo escolar[9]" (p. 4). Tal visão, segundo Sirvent, equiparou a educação não-formal com a educação popular, "excluyendo la posibilidad de desarrollar experiencias con el sentido político, ideológico y pedagógico de la educación popular dentro de la escuela[10]" (p. 4).

Sirvent afirma que a análise das características das experiências educativas revelam as limitações do conceito de educação não-formal e a evidencia como tendo "[un] abordaje teórico poco fértil para describir, interpretar e intervenir sobre este ámbito[11]" (2006, p. 4). Sirvent argumenta que isto se deve a diversos fatores, entre eles, que a definição pela negativa da formalidade implica em um desmerecimento da relação dialética entre o fenômeno educativo escolar e o não-escolar; que a classificação não consegue abarcar as formas educacionais, já que muitas atividades não-formais podem ser ministradas na escola; e que a negativa desvaloriza os processos educacionais de fora da escola em detrimento dos escolares (p. 5).

Para embasar seu ponto de vista Sirvent cita Álvarez, Hauzer e Toro[12], que apontam a falta de limites precisos entre os conceitos, e ressaltam que, na verdade, existem diferenças de ênfases em múltiplas dimensões do processo de aprendizagem, como o espaço físico, o ambiente institucional, o tempo, as sequências de ensino e os elementos de estimulação (2006, p.5). Cita também Brest[13], que propõe avaliar quatro aspectos, o político, o jurídico, o

---

[9] parecia configurar uma contraposição com a rigidez e a hierarquização na relação pedagógica próprias de um certo modelo escolar (tradução nossa).

[10] excluindo a possibilidade de desenvolver experiências com o sentido político, ideológico e pedagógico da educação popular dentro da escola (tradução nossa).

[11] uma abordagem teórica pouco fértil para descrever, interpretar e intervir neste âmbito (tradução nossa)

[12] ÁLVARES, B.; HAUZER, R.; TORO, J. B. La Educación No Formal. Aspectos teóricos y bibliografia. CEDEN/UNICEF, 1978.

[13] BREST, Gilda L. R. La educación y sus dos circuitos. **Revista La Educación**, n. 94-95, Washington: OEA, 1984. p.93-98.

administrativo e o pedagógico e, em cada um desses aspectos atribuir um grau maior ou menor de formalização.

Abandonando as definições de Coombs e Ahmed, Sirvent propõe o resgate do conceito de *educação permanente*, porém adotando uma divisão em três aspectos: a educação inicial, a de jovens e adultos e a das aprendizagens sociais. O primeiro seria o período de escolaridade formal, e o último equivaleria ao que Coombs chama de educação informal.

Acerca das experiências educativas extraescolares, Sirvent procura mapear suas especificidades. Considera três dimensões: a sociopolítica, a institucional e do espaço de ensino e aprendizagem. Cada dimensão pode ser avaliada com graus de formalização.

A *dimensão sociopolítica* se refere às relações da experiência educativa com o Estado, por exemplo, se esta experiência segue as normas e os padrões que o Estado impõe e/ou sugere. A *dimensão institucional* se refere à instituição que promove a experiência educativa. Já a *dimensão do espaço de ensino e aprendizagem* se refere à inter-relação entre aquele que aprende, aquele que ensina e o conteúdo. (SIRVENT, TOUBES *et al.*, 2006)

No Brasil os cursos preparatórios para o vestibular, também conhecidos como *cursinhos pré-vestibular* ou *cursinhos pré-universitários*, são muito comuns. Analisando os cursinhos sob a perspectiva de Sirvent, que se enquadrariam no espectro da educação não-formal caso as definições de Coombs e Ahmed fossem adotadas, percebe-se sem muito esforço que promovem uma experiência pedagógica altamente formalizada. Apesar da *dimensão sociopolítica* dos cursinhos terem um grau médio de formalização, já que juridicamente não são instituições de ensino que precisam seguir normas educacionais propostas pelo Estado, seguem currículos padronizados pelo Estado, apresentam graus de formalização elevados tanto na *dimensão institucional*, quanto na *dimensão do espaço de ensino e aprendizagem*, pois as instituições seguem regras internas pré-fixadas e há baixa relação interpessoal, focando-se em conteúdos programáticos.

A diversidade de perspectivas do objeto que aqui se apresenta é grandiosa e não se pretende adotar nenhuma definição como a mais precisa. No entanto, é necessário optar por uma descrição que seja conveniente àquilo que este trabalho se propõe a estudar.

Por se tratar de um termo já bastante reconhecido, adota-se aqui o termo *educação não-formal*. Como se conhece muitas das limitações que este termo apresenta e também alternativas a este termo, procura-se conciliar os pontos que são os mais importantes para as finalidades desta pesquisa. Deste modo, entende-se aqui por *educação não-formal*

todo processo educativo, organizado e sistemático, que não seja considerado essencial para os objetivos do proponente, quando este representa uma instituição formal, entendendo como instituição formal uma instituição oficial de ensino.

Com essa descrição, que elimina a necessidade de vínculo, ou falta dele, para caracterizar-se como uma atividade não-formal ou formal de ensino, abre-se a oportunidade para se considerar como uma prática de educação não-formal até mesmo atividades de sala de aula propostas por um professor de escola oficial durante as suas aulas, também formais. Como exemplo, pode-se imaginar um professor de Matemática que, pensando em contextualizar os conteúdos, faz um campeonato de construção de pontes de palitos de sorvete[14]. Esses campeonatos criam uma situação pedagógica apropriada para o ensino de conteúdos relacionados à geometria, mas os alunos mantém contato com diversos outros conhecimentos que não serão abordados pelo professor e nem exigidos em uma avaliação. A atividade, portanto, apresenta aspectos não-formais e, aliás, formais e não-formais simultaneamente.

2.2. DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

O que se entende afinal por Divulgação Científica? É possível promover atividade de Divulgação Científica em uma instituição escolar formal ou tal atividade só é considerada como de Divulgação Científica quando é realizada fora dela?

Os teóricos da Divulgação Científica se empenharam para entender melhor seu objeto de estudo e utilizar definições cada vez mais precisas. A proposta das seguintes linhas é de apresentar parte das visões envolvidas neste longo debate, porém sem a pretensão de reproduzi-lo detalhadamente, pois já existem boas apresentações do assunto que, embora não sejam definitivas, nos dão uma visão geral e precisa do histórico do termo, como o que é apresentado por Luisa Massarani (1998) e por Renata Ribeiro (2007).

Alguns outros termos que se referem à transmissão de mensagens de cunho científico e amplamente utilizados são *difusão* e *disseminação científicas*. Antonio Pasquali[15] (1978 apud BUENO, 1984; MASSARANI, 1998; RIBEIRO, 2007) faz distinção entre difusão,

[14] Os estudantes devem construir uma ponte utilizando apenas palitos de sorvete e cola. O construtor da ponte que suporta o maior peso é o ganhador.
[15] PASQUALI, A. **Comprender la comunicación**. Caracas: Monte Ávila Editores, 1978.

disseminação e divulgação. Tais termos, que diversas vezes lhes são atribuídos um mesmo significado, são descritos de forma bastante clara da seguinte forma:

> Difusão é o envio de mensagens elaboradas em códigos ou linguagens universalmente compreensíveis para a totalidade das pessoas.
>
> Disseminação é o envio de mensagens elaboradas em linguagens especializadas, ou seja, transcritas em códigos especializados, a receptores selecionados e restritos, formado por especialistas. Pode ser feita intrapares (especialistas da mesma área) ou extrapares (especialistas de áreas diferentes).
>
> Divulgação é o envio de mensagens elaboradas mediante a transcodificação de linguagens, transformando-as em linguagens acessíveis, para a totalidade do universo receptor.
>
> (MASSARANI, 1998, p. 18)

De certa forma, pode-se dizer que Pasquali apresentou uma proposta que minimizou a discussão que os teóricos vinham travando acerca do tema. Houve um tempo que quem fazia Divulgação Científica, em sua maioria jornalistas, tratava de forma indiscriminada não só os termos difusão, disseminação e Divulgação Científicas, mas também vulgarização científica, popularização da ciência e comunicação pública da ciência. Massarani (1998) considera estes quatro últimos termos como tendo o mesmo significado e opta por utilizar Divulgação Científica por ser este o mais empregado no Brasil.

O jornalista científico Manuel Calvo Hernando (1970) nos deixa evidente esta evolução conceitual, pois em seu curso ministrado na Escola de Comunicação e Artes da USP entre os dias 10 e 13 de outubro de 1970 utiliza difusão científica e Divulgação Científica como tendo o mesmo significado (p. 23). Pouco tempo depois, já com tais conceitos mais desenvolvidos, Adeodato (1987) é duro nas críticas a Hernando e a outro autor, José Reis, dizendo que os dois jornalistas fazem confusão entre os termos Jornalismo Científico e Divulgação/Disseminação Científica, além de atribuir ao jornalismo científico funções que não lhe são próprias (1987, p. 59), sem considerar o fato que os dois divulgadores foram atores na sedimentação de tais conceitos. De fato, Reis não se preocupava em diferenciá-los, como afirma Bueno (1984, p. 20). Hernando, que não comentou na época nem mesmo grandes diferenças entre Jornalismo Científico e Divulgação Científica expressa o fato de não conhecer, naquele momento histórico, autoridades no assunto (1970, p. 24), mas não se absteve de descrever a característica básica, que chamou de "segredo", da Divulgação Científica que é de "explicar as coisas difíceis com palavras fáceis" (p. 25). Atualmente Hernando adota as definições de Pasquali.

No cenário da Divulgação Científica, José Reis tem uma função muito mais abrangente que Hernando, trabalhando não só como Jornalista Científico mas também como

um divulgador em potencial. José Reis explorava diversas manifestações da Divulgação Científica e era um grande pensador do impacto da ciência na educação. Crodowaldo Pavan (2007), em livro de homenagem ao centenário de José Reis, destaca as atuações de seu amigo Reis na educação, dentre elas a idealização dos Clubes de Ciência que se tornaram realidade pelo esforço do Ibecc[16]. Neste capítulo, Pavan transcreve um texto de Reis intitulado *A Divulgação Científica e o Ensino*[17] em que busca definir de modo abrangente a Divulgação Científica. Para ele:

> Não se entenderá por isso o simples noticiário que as agências estrangeiras transmitem, de descobertas que acabam de ser feitas. Também não se entenderá por isso o artigo ou reportagem sensacionalista, em que os fatos científicos ou supostamente científicos são hierarquizados consoante o impacto que as notícias a eles referentes possam produzir no público. Por divulgação entende-se aqui o trabalho de comunicar ao público, em linguagem acessível, os fatos e os princípios da ciência de uma filosofia que permita aproveitar o fato jornalisticamente relevante como motivação para explicar os princípios científicos, os métodos de ação dos cientistas e a evolução das idéias científicas.
>
> (Reis, 1999 apud PAVAN, 2007, p. 77)

O trecho acima foi escrito por Reis em fase posterior às definições de Pasquali e, portanto, já incorpora visões que na década de 70 ainda não estavam sedimentadas, que foram alvo das críticas de Adeodato. Em outra fase, Reis afirmou que a Divulgação Científica era "a veiculação em termos simples da ciência como progresso, dos princípios estabelecidos, das metodologias que emprega"[18] (1982 apud MASSARANI, 1998), sendo que no mesmo ano já distinguia Jornalismo Científico e Divulgação Científica, considerando o primeiro termo um subconjunto do segundo[19] (apud BUENO, 1984, p. 21). Reis também discorre sobre as funções atribuídas à Divulgação Científica e diz que a mesma

> [...] realiza duas funções que se completam: em primeiro lugar, a função de ensinar, suprindo ou ampliando a função da própria escola; em segundo lugar, a função de fomentar o ensino. Essa última função desdobra-se em várias outras, como despertar o interesse público pela ciência e assim forçar, mediante pressões pelas quais normalmente se exerce a vontade popular nas democracias, a elevação do nível didático das escolas; despertar vocações e orientá-las; estimular o amadorismo científico, onde ele tenha cabimento, amadorismo esse que pode constituir apreciável reserva da força de trabalho científico de uma nação.
>
> (1999 apud PAVAN, 2007, p. 79-80)

---

[16] Instituto Brasileiro de Educação, Cultura e Ciências – órgão vinculado à UNESCO.
[17] REIS, J. A Divulgação Científica e Ensino. In: KREINZ, G.; PAVAN, C. (org.). **Idealistas Isolados**: ensaios sobre Divulgação Científica. São Paulo: NJR-ECA/USP, 1999.
[18] REIS, J. Professor José Reis: um divulgador da ciência. **Ciência Hoje**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira para o Progesso da Ciência, v. 1., n. 1, p. 77-78, jul.-ago./1982. p. 78.
[19] REIS, J. O caminho de um divulgador. **Ciência e Cultura**. São Paulo, SBPC, 34 (6): 800-16, 1982.

Nos dias atuais as definições de Pasquali são amplamente aceitas, mas sabemos que definições são sempre tentativas de delimitações e que dificilmente conseguiremos, em poucas linhas, abarcar o conceito como um todo e, além disso, as barreiras das línguas também colaboram com esse fato. Deste modo, os termos amplamente utilizados em outros países não são traduções literais dos que usamos e, consequentemente, podem apresentar ideias também diferentes.

Segundo Massarani (1998, p. 15) a tradução literal do termo mais utilizado em inglês para o que chamamos de Divulgação Científica é "popularização da ciência" e, em francês, "vulgarização da ciência". Massarani, consciente destas limitações, justifica que sua busca por conceitualizações não procura uma "definição limitada e restritiva" do tema e que "nas definições que surgem, há pontos em comum, outros controversos" (p. 14). Assim, a autora resgata outras definições e cita, por exemplo, uma definição de difusão científica, mais ampla que a de Pasquali, utilizada entre os historiadores da ciência que seria "o envio de quaisquer mensagens com conteúdo científico, especializadas ou não" (p. 18), definição esta apresentada por Petitjean[20].

Já Roqueplo[21] afirma que Divulgação Científica é

> [...] toda atividade de explicação e de difusão dos conhecimentos, da cultura e do pensamento científico e técnico, sob duas condições. A primeira delas é que essas explicações e essa difusão do pensamento científico sejam feitas fora do ensino oficial ou de ensino equivalente. A segunda condição imposta por ele é que tais explicações extra-escolares não devem ter como objetivo formar especialistas, nem mesmo aperfeiçoá-los em sua própria especialidade .
>
> (1974 apud MASSARANI, 1998, p.19)

Neste trabalho, resiste-se em adotar uma definição como a correta, pois sabe-se dos problemas que regem as tentativas de delimitação, no entanto, de modo geral, entende-se por Divulgação Científica

> o envio de mensagens recodificadas, de caráter científico e técnico ou que tem relação com a produção de conhecimento, de modo a ficarem mais inteligíveis ao público receptor. Também entende-se que a Divulgação Científica atua no campo da educação não-formal ou informal.

Considerando a visão de Bueno (1984, p. 14) em relação à difusão científica, que recusa a limitação imposta por Pasquali e entende que a difusão engloba divulgação e

[20] PETITJEAN, P.; JAMI, CL; MOULIN, A.M. **Sciences and Empires**. Dordrecht: Klower Academic Publishers, 1992.
[21] ROQUEPLO, Philippe. **La partage du savoir**. Paris: Éditions du Seuil, 1974.

disseminação, pergunta-se quando uma atividade de difusão científica deixa de se considerada de Divulgação Científica. Parece ser uma visão consensual de que a Divulgação Científica se faz presente fora da escola, porém, o que é estar "fora da escola", ou ainda fora da educação formal?

Imaginemos uma escola que leve seus estudantes para visitar uma exposição sobre as descobertas de Einstein. A Divulgação Científica está ou não envolvida? A situação se passa fora do espaço físico da escola, porém, sob sua regência. Baseando-se nas obras dos autores até aqui mencionados, é de se esperar que a maior parte deles concorde que a Divulgação Científica não esteja envolvida, pois mesmo fora do espaço físico, ainda faz parte da formalidade escolar. Pierre Fayard[22], por exemplo, é outro pesquisador que exclui, em sua definição, atividades relacionadas ao ensino (apud MASSARANI, 1998, p. 17), deixando subentendido que se refere à educação formal.

Entende-se ser possível que a educação não-formal aconteça simultaneamente à educação formal, mesmo dentro das atribuições formais da escola, dependendo somente da intenção de quem propõe a atividade educacional. Fazendo um comparativo percebe-se que, com esta visão, não é possível distinguir se a situação acima mencionada envolve ou não a Divulgação Científica. Afinal, não se sabe a intenção do professor que levou seus alunos à exposição. Está no currículo de sua escola que seus alunos identifiquem as descobertas de Einstein? Ou a exposição colaborará na construção de um contexto com o objetivo de criar significados relacionados aos conceitos da Teoria da Relatividade, que está no currículo?

Diante dos propósitos desta pesquisa, define-se que se a resposta da primeira pergunta for positiva, então a atividade educacional em questão não será considerada como de Divulgação Científica, sendo assim considerada se somente a resposta da segunda for positiva.

Todavia, cabe ressaltar, que a exposição continuará sendo considerada como de Divulgação Científica, independentemente dos objetivos da visita daquele determinado grupo.

Assim, a Divulgação Científica é reservada não só para situações que estejam fora da educação formal, mas também para as que estiverem intimamente relacionadas a ela.

[22] FAYARD, P. La Communication Scientifique publique – De la Vulgarization à la médiatisation. Lyon: Chronique Sociale, 1988. p. 11-12.

2.3. DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA COMO PROCESSO EDUCACIONAL

As pesquisas que tratam do ensino das geometrias não-euclidianas e que serão expostas posteriormente estão quase que exclusivamente inseridas em um contexto formal de ensino, porém, tem-se interesse também em atividades educacionais que extrapolam este contexto. Como não foi possível encontrar pesquisas com um foco para um público de não-especialistas e extraescolar, não se tem muitas bases para afirmar se seria possível ensinar tais conceitos para um público não escolar e não especializado.

Acredita-se que, quando as ações de Divulgação Científica atingem seu público, então cria-se um ambiente propício à aprendizagem. Assim, se há a intenção de ensinar as geometrias não-euclidianas, seria interessante analisar a possibilidade de se utilizar a Divulgação Científica para esta finalidade. Dessa forma, faz-se necessário ter uma visão mais detalhada sobre o processo de Divulgação Científica.

Calvo Hernando (1970) fala do caráter educacional do jornalismo científico, que pode se estender à toda Divulgação Científica, já que na época de seus escritos não se diferenciava com clareza Divulgação Científica e jornalismo científico. Porém todas as definições de Divulgação Científica aqui apresentadas, incluindo a adotada neste trabalho, afirmam que a Divulgação Científica é apenas o **envio** de mensagens com o objetivo de tornar mais acessível ao público receptor o fato científico. Aqui percebe-se que a Divulgação Científica continua sendo assim considerada mesmo que não atinja seu público, ou seja, um artigo pode ser de Divulgação Científica mesmo que ninguém o leia. Além disso, mesmo que seu público leia, na maior parte das vezes este processo de aprendizagem estará mais vinculado à educação informal, pois sabe-se que a maioria das mídias impressas de Divulgação Científica não têm a intenção primeira de promover uma atividade educacional sistemática e organizada, mas apenas de divulgar o fato científico.

Assim, mesmo possuindo um caráter educacional, a Divulgação Científica não garante a realização de um processo de aprendizagem formal ou não-formal. Mas o que garante que a Divulgação Científica promova de fato um processo educacional?

A pesquisa de Renata Ribeiro (2007), apresentada em sua dissertação de mestrado, utilizou artigos de Divulgação Científica relacionados à sua área de especialização, a Física, e deste modo garantiu que o potencial pedagógico destes textos fosse utilizado, contribuindo também para uma contextualização diferenciada dos conceitos físicos em um ambiente formal de ensino. Em outras palavras, os textos possuíam um caráter educacional, mas somente

quando os inseriu em *atividades sistemáticas e organizadas* (formal ou não-formal) que foi possível garantir que um processo educacional de fato existisse.

Já os museus de ciência sempre garantem um contato com o público, o que significa que algum tipo de aprendizagem estará garantido. Além disso, as exposições de cunho científico também apresentam atividades sistemáticas e organizadas, embora o fator *sistemático* seja reduzido, principalmente no que diz respeito a ideia de continuidade.

Tanto os textos de Divulgação Científica que são utilizados em sala de aula como as exposições que possuem cunho científico, são atividades consideradas como de Divulgação Científica que conseguem produzir um processo educacional, assim, é possível verificar pontos em comum que são candidatos a ser características indispensáveis para a existência deste processo.

Identificou-se que atividades de Divulgação Científica que atuam como um processo educacional normalmente possuem as seguintes três características:

- Interação entre indivíduos
- Atividades organizadas e sistemáticas
- Níveis de aprofundamento da mensagem

A *interação entre indivíduos* é sempre lembrada quando se pensa no processo de aprendizagem, pois parece ser um requisito básico e necessário para que a construção do conhecimento seja efetiva. Existem várias teorias da aprendizagem que apontam a interação como um fator indispensável. Seja a Epistemologia Genética ou o Sócio-interacionismo, a interação sempre aparece. Entende-se que qualquer teoria que procura explicar a maneira como as pessoas aprendam possua sua validade, mas adota-se que tais teorias precisam assumir que haja interações com outras pessoas ou com o meio e aqui tais relações serão chamadas, simplificadamente, de interação entre indivíduos.

Esta característica garante que a ação de Divulgação Científica atinja seu público. Por exemplo, no momento em que alguém lê um artigo de divulgação cria-se uma interação entre a pessoa que escreveu e a pessoa que lê. Portanto, a interação também acontece a distância.

As *atividades organizadas e sistemáticas* aparecem na definição aqui apresentada de educação não-formal, não por serem exclusivas desta modalidade, mas por entender que é isto que define um processo educacional, seja formal ou não. Esta definição exclui as

aprendizagens na educação informal, sendo portanto um termo conveniente para a finalidade desta pesquisa.

Para que a Divulgação Científica faça parte de um processo educacional, é necessário que esta se enquadre no que se define como educação não-formal. Assim, exclui-se a Divulgação Científica que esteja altamente relacionada com a educação informal e com pouca ou nenhuma relação com as outras duas.

Considerando a classificação aqui apresentada, uma notícia dada em um jornal sobre um fato científico só passaria a atuar em um processo educacional se o texto for utilizado em outra instância que possua as outras características, tem-se como exemplo as atividades de Ribeiro (2007) já citadas.

Os *níveis de aprofundamento da mensagem* são os distanciamentos ou aproximações do conhecimento científico que é foco do processo educacional[23] em questão, ou seja, quanto mais o conceito científico sofre reduções de linguagem para se adaptar ao público, o nível de aprofundamento é menor. Por exemplo, para um certo público é possível definir o triângulo ômega[24] da geometria hiperbólica e estudar suas propriedades, mas já para outro público seria melhor evitar esses termos, dizendo que apenas existe uma região que tem características idênticas às de uma região triangular. Para cada público, as informações devem ser apresentadas de maneiras diferentes ou até mesmo omitidas.

Tradicionalmente, a Divulgação Científica ocupa-se em atingir a totalidade do público receptor, buscando a massificação, no entanto, entende-se nesta pesquisa que é impossível atingi-lo em sua totalidade e sempre há a necessidade de se escolher uma fatia do público total, que se torna um novo público. Este talvez seja o principal fator que justifica que a Divulgação Científica não garante um processo educacional, pois sabe-se que a ação educativa tem como foco o indivíduo e assim, é necessário também que a ação de Divulgação Científica seja a ele adaptada.

O público de não-especialistas divide-se, para cada área do conhecimento, em grupos que necessitam de níveis de aprofundamento da mensagem diferenciados, pois sabe-se que normalmente é mais fácil um leitor assíduo interiorizar um termo técnico do que uma pessoa

[23] Este conceito se aproxima ao da Transposição Didática de Yves Chevallard. No entanto, os níveis de aprofundamento da mensagem abarcam de forma abrangente a educação formal. Espera-se em um trabalho posterior investigar as relações entre esses dois conceitos.

[24] Na geometria hiperbólica, duas retas paralelas possuem um comportamento assintótico, ou seja, se aproximam cada vez mais, de modo que distância entre elas, no limite, seja zero. Assim, costuma-se dizer que essas retas se encontram em um *ponto ideal* no infinito. Um triângulo em que um de seus vértices é um ponto ideal é chamado de *triângulo ômega.*

que não faz da leitura uma atividade diária e, portanto, a redução da linguagem de um texto de Divulgação Científica para que o mesmo fique mais inteligível pode ser menor.

Sabendo da importância destas três características para que uma ação de Divulgação Científica atue como um processo educacional, espera-se que as ações educativas que se utilizem da Divulgação Científica zelem pela existência destes fatores.

2.4. O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Trata-se aqui sobre a possibilidade das geometrias não-euclidianas serem inseridas em propostas pedagógicas. Discute-se o que se entende por geometria não-euclidiana, alguns pontos de vista sobre seu ensino e relações com a formação inicial do professor de Matemática.

2.4.1. O termo geometria não-euclidiana

As geometrias não-euclidianas são assim chamadas em contraposição à geometria de Euclides e o seu surgimento no século XIX marcou uma grande revolução no pensamento geométrico. A possibilidade da criação de mais de uma geometria perturbou as bases do conhecimento matemático e estabeleceu a geometria como um sistema axiomático que não depende de nossa percepção de mundo. Para um panorama mais aprofundado sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas, sugere-se a leitura do capítulo 3.

O nascimento dessas geometrias começou quando Lobachevsky e Bolyai substituíram o quinto postulado de Euclides[25], ou postulado das paralelas, por uma das possibilidades de sua negação. O quinto postulado de Euclides, na formulação de Playfair, diz que *se são dados uma reta e um ponto fora dela, então existe uma única reta paralela à primeira que passa por este ponto*. A negação desta afirmação seria, *se são dados uma reta e um ponto fora dela, então não existe nenhuma reta paralela à primeira que passa por este ponto ou existem duas ou mais*. A geometria Lobachevskyana adota a existência de duas retas paralelas[26] e, esta geometria passou a ser conhecida como hiperbólica, sendo que a elíptica adota a inexistência de paralelas.

Na primeira metade do século passado Amoroso Costa (1929) definiu as geometrias não-euclidianas como

[25] Vide subcapítulo 3.1.
[26] Isso implica a existência de infinitas retas paralelas. A maioria dos autores não classifica essas outras infinitas retas que não cruzam a reta dada como paralelas, mas sim como *não-secantes*.

> qualquer dos systemas deductivos construidos sobre a negação do chamado [quinto] *postulado de Euclides*, conservadas e completadas [..] as demais proposições primitivas de Euclides
>
> (AMOROSO COSTA, 1929, p.201, grifo do autor)

Porém, afirma que só define as geometrias não-euclidianas dessa forma porque tem ciência de que este era o termo usado habitualmente, mesmo sabendo que, a rigor, o termo deveria ser usado para toda "geometria entre cujos postulados se encontre algum em contradição com qualquer dos postulados euclidianos, e não apenas com o das parallelas" (1929, p. 201).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná adotam a segunda interpretação de Amoroso Costa e entendem que as geometrias não-euclidianas abarcam também:

> geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.
>
> (PARANÁ, 2008, p.56)

Sobre este fato, Santos afirma que

> A proposta das DCE[27] para Geometrias não-euclidianas na Educação Básica não se refere apenas às geometrias que historicamente são denominadas como tais, ou seja, a Geometria Hiperbólica e a Elíptica, mas, a qualquer geometria que negue pelo menos um dos cinco postulados de Euclides.
>
> (SANTOS, 2009, p.14)

Assim, em consonância com as tendências aqui expostas, uma geometria não-euclidiana é

qualquer geometria que possua algum axioma em contradição a qualquer axioma euclidiano.

Mesmo considerando esta ampla definição de geometria não-euclidiana, enfatiza-se que o principal interesse nesta pesquisa está voltado às geometrias hiperbólica e elíptica devido o caráter histórico de seu surgimento.

2.4.2. A possibilidade de ensino das geometrias não-euclidianas

O aprendizado das geometrias não-euclidianas, principalmente se iniciado pelas tentativas de prova do quinto postulado, envolve um grau de abstração razoavelmente elevado e exige uma certa familiaridade com muitas ferramentas matemáticas. Esses são dois motivos

[27] Diretrizes Curriculares para a Educação Básica

que contestam a real possibilidade do ensino dessas geometrias para não especialistas. No entanto, atualmente tem-se conhecimento de muitas experiências bem sucedidas para públicos escolares, o que, aparentemente, poderia soar como uma contradição. Assim, torna-se necessário comparar estes contrapontos, investigando o que está sendo ensinado sobre o assunto para o público escolar e sendo chamado de geometrias não-euclidianas.

O caráter formal[28] da geometria certamente é um ponto fundamental para o contato com essas geometrias e é justamente este caráter axiomático que Hansen (1998, p.11) desencoraja que faça parte do currículo da educação básica, mas é firme ao defender que os professores saibam ensinar a geometria axiomática e afirma ainda que, embora a história das geometrias não-euclidianas envolva ideias geométricas e construções importantes e úteis, raramente é considerada no ensino contemporâneo da geometria (HANSEN, 1997, p.3).

Mas será que para tomar contato com essas geometrias seria realmente necessário o entendimento da geometria como um sistema axiomático? Não seria mais fácil entender um sistema axiomático se se conhecer resultados de duas geometrias? A resposta à primeira pergunta é, na verdade, muito simples: pelo menos no Brasil, o ensino da geometria euclidiana na educação básica não é iniciada a partir de axiomas e este é um fato bastante evidente, pois quase a totalidade dos livros didáticos do Ensino Fundamental apresenta teoremas geométricos sem apresentar axiomas, e a dedução apenas passa a ser exigida dos estudantes gradativamente, ou seja, se não é necessário entender um sistema axiomático para tomar contato com a geometria euclidiana, certamente também não será para as geometrias não-euclidianas. Já a resposta da segunda pergunta fica aqui registrada para uma posterior pesquisa, mas parece ter uma resposta afirmativa.

Hansen também afirma, entretanto, que "it is possible to present the construction of the hyperbolic plane at secondary school level"[29] (1998, p.14). O autor dá o enriquecedor exemplo da possibilidade da pavimentação do plano hiperbólico com qualquer polígono, fato surpreendente e inteligível para qualquer aluno do Ensino Médio com conhecimentos geométricos básicos. Ou seja, o autor deixa claro que, mesmo sem apresentar o rigor do sistema axiomático, é possível explorar significativamente o ensino dessas geometrias, pelo menos a hiperbólica.

---

[28] O termo *formal* nesta frase se refere à formalidade matemática, que envolve um sistema axiomático e provas. Não confundir com o formal de *educação formal*.

[29] é possível apresentar a construção do plano hiperbólico no Ensino Médio (tradução nossa).

Adrien Douady (1998, p. 28) acredita que um estudo detalhado da geometria hiperbólica na educação básica não é aconselhável, mesmo sendo um objeto cultural importante por provar a independência do postulado das paralelas. O autor admite que parte dos estudantes dos anos finais da escolaridade poderiam compreendê-los, mas isto não justificaria seu ensino universal. Por outro lado, dá a entender que um estudo que não seja detalhado pode ser interessante. Em relação à geometria esférica, Douady encara com naturalidade a possibilidade de ensino de seus conceitos básicos para estudantes da educação básica e justifica o fato por ser possível dar um tratamento euclidiano para a questão, mas que dependeria de conhecimentos trigonométricos e de geometria espacial.

Krause (1986), que propõe a inserção de aspectos das geometrias não-euclidianas na educação básica, impõe três aspectos desejáveis que uma geometria não-euclidiana deve apresentar para que ela auxilie no entendimento da própria geometria euclidiana. Afirma que

> to fully appreciate Euclidean geometry one needs to have some contact with a non-Euclidean geometry. Ideally the non-Euclidean geometry chosen should (1) be very close to Euclidean geometry in its axiomatic structure, (2) have significant applications, and (3) be understandable by anyone who has gone through a beginning course in Euclidean geometry.[30]
>
> (KRAUSE, 1986, p.v)

Argumento semelhante aparece nas orientações curriculares propostas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos EUA intituladas como *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*[31]:

> College-intending students also should gain an appreciation of Euclidean geometry as one of many axiomatic systems. This goal may be achieved by directing students to investigate properties of other geometries to see how the basic axioms and definitions lead to quite different and often contradictory results. For example, great circles, which play the role of lines in spherical geometry, always meet. Thus, in spherical geometry, instead of having exactly one line parallel to a given line through a point not on the line, there are no such lines.[32]
>
> (p.160 apud GUVEN; BAKI, 2010, p.993)

---

[30] para apreciar plenamente a geometria euclidiana é necessário ter algum contato com uma geometria não-euclidiana. Idealmente a geometria não-euclidiana escolhida deve (1) ser muito próxima à geometria euclidiana em sua estrutura axiomática, (2) ter aplicações significativas, e (3) ser compreensível a qualquer um que tenha conhecimentos básicos em geometria euclidiana. (tradução nossa)

[31] NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

[32] Alunos que pretendem ingressar no Ensino Superior devem reconhecer a geometria euclidiana como um dos muitos sistemas axiomáticos. Esta meta pode ser atingida direcionando estudantes a investigar propriedades de outras geometrias para perceberem que axiomas básicos e definições apresentam resultados completamente diferentes e, muitas vezes, contraditórios. Por exemplo, circunferências máximas, que desempenham o papel de retas na geometria esférica, sempre se intersectam. Assim, na geometria esférica, em vez de ter exatamente uma reta paralela a outra que passa por um ponto, não existe nenhuma. (tradução nossa)

Assim, a ideia de que conhecimentos básicos de outras geometrias podem colaborar na compreensão da geometria euclidiana parece ser sustentada por muitos pesquisadores. Se tal ideia não for consensual, outra ideia muito próxima parece se aproximar do consenso: o professor de Matemática que tem conhecimento das geometrias não-euclidianas terá mais ferramentas para ensinar a euclidiana. Izabel Bonete afirma que

> o conhecimento das Geometrias não-euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de Matemática e, em especial, com o ensino de geometria.
>
> (BONETE, 2000, p.230)

As pesquisas brasileiras têm apontado como produtiva a possibilidade de uma apresentação simultânea de conceitos básicos de geometrias não-euclidianas e euclidiana na Matemática escolar. Mesmo quando as pesquisas não afirmam objetivamente esta possibilidade dão a entender pelo contexto. Porém, tais pesquisas ainda se restringem a um pequeno grupo de pesquisadores.

Bonete (2000), Pataki (2003), Martos (2002), Reis (2006) e Marqueze (2006) são autores que apresentam em suas dissertações propostas de trabalho com as geometrias não-euclidianas para o público escolar e, em todas elas, são ressaltados aspectos positivos de tais experiências. No artigo que produziram, Kaleff e Nascimento (2004) também apresentam uma extensa lista de atividades que podem ser utilizadas pelos professores no ensino dessas geometrias.

Das obras consultadas, somente Brito (1995), Caldatto (2011) e Santos (2009), abordam a questão em um aspecto mais teórico, sem apresentar estudos de caso.

Lénárt, mentor da mais famosa proposta de trabalho sobre a geometria esférica para os ensinos Fundamental e Médio, tem tido sucesso nas aplicações de sua proposta. Boa parte de suas atividades têm como foco alunos entre 10 e 15 anos (LÉNÁRT, 1993) e os conceitos desta geometria são constantemente comparados com os da geometria euclidiana, reforçando assim a concepção de que os conceitos de duas geometrias podem reforçar o entendimento da própria geometria euclidiana.

Todos os autores citados neste subcapítulo reforçam a ideia da possibilidade de inserção das geometrias não-euclidianas na educação básica, uns com mais e outros com menos restrições. Assim, este trabalho, baseado nos autores citados, parte da premissa que o ensino das geometrias não-euclidianas para um público não especializado, principalmente escolar, é possível. Desta forma, resta investigar de que modo este ensino torna-se possível.

Admite-se, no entanto, que o foco sobre o conteúdo deve ser direcionado para cada público escolhido, por exemplo, não faz sentido enfocar as tentativas de provas do quinto postulado de Euclides no 8º ano do Ensino Fundamental, sendo que sabemos que é uma tarefa árdua até mesmo para a 3ª série do Ensino Médio, ou ainda, apresentar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico para alguém que ainda não sedimentou o conceito de ângulo. Estes exemplos, apesar de serem óbvios, ilustram que a abordagem sobre cada aspecto deve sempre considerar o receptor da mensagem. Chama-se este aspecto, neste trabalho, de *nível de aprofundamento da mensagem* e tal conceito será explorado mais adiante.

2.4.3. As geometrias não-euclidianas e a formação inicial do professor de Matemática

Muitos autores, incluindo Santos (2009), Bonete (2000) e Caldatto (2011), denunciam a ausência das geometrias não-euclidianas no currículo dos cursos de licenciatura em Matemática.

Prestes (2006), em seu mestrado profissional, se propõe a analisar o currículo de algumas universidades de São Paulo, e constata que apenas 4 das 10 que teve acesso apresentam em seus currículos o tema para futuros professores.

Independentemente se as geometrias não-euclidianas devem ou não ser ensinadas para um público que não seja de especialistas em Matemática, há muitos motivos para que um especialista tenha conhecimento destas estruturas. O surgimento destas geometrias foi o grande passo dado para modificar o conceito de verdade matemática, e segundo Eves, sua criação "desferiu um golpe duro no ponto de vista da verdade absoluta em matemática" (2004, p.545). Eves ainda afirma que houve uma libertação da geometria e que "despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se o caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos" (p.544). Esses argumentos reforçam a tese de que as geometrias não-euclidianas deveriam ser um conteúdo obrigatório nos cursos de formação inicial do professor de Matemática.

Recentemente conceitos básicos de geometrias não-euclidianas passaram a fazer parte do currículo das escolas públicas do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) e esta inserção fez despontar problemas que eram facilmente previsíveis e, portanto, já esperados. Como se sabe da ausência do conteúdo na formação dos próprios professores, que aliás não se restringem somente às geometrias não-euclidianas mas também à euclidiana (PAVANELLO, 1989),

estes terão dificuldades de ensinar tais conhecimentos a seus alunos e, portanto, tem-se um problema a ser solucionado. Pelo menos neste Estado, as universidades que omitirem os conceitos em seus currículos serão formalmente negligentes.

Como há muitas vozes de pesquisadores denunciando a falta de uma disciplina específica sobre as geometrias não-euclidianas nas universidades, suspeita-se que há uma tendência de as universidades, de fato, inseri-las.

3. O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Como já dito, o surgimento das geometrias não-euclidianas é um dos episódios mais bem documentados na história da ciência. Desta forma se torna muito difícil dar uma atenção completa a um assunto tão amplo.

Aqui será apenas discutido alguns fatos ou conceitos que se adaptam às finalidades deste texto e que podem ser facilmente encontrados em livros que possuem um viés histórico como o de Roberto Bonola (1912), Marvin Jay Greenberg (1994), Michael O'Leary (2010) ou Boris Rosenfeld (1988). Ressalta-se no entanto que é possível encontrar textos históricos para embasar outras pesquisas relacionadas. Aos leitores que buscarem assuntos mais específicos, sugere-se a consulta do livro de Sommerville (1911), que mapeou muitos trabalhos produzidos até o começo do século XX que tinham relação com as geometrias não-euclidianas e com espaços n-dimensionais, que está sob domínio público e disponível na internet.

O foco deste subcapítulo está na discussão dos primeiros trabalhos que favoreceram o surgimento das geometrias não-euclidianas, principalmente nos que relacionam com o postulado das paralelas.

3.1. EUCLIDES E O POSTULADO DAS PARALELAS

Por volta do ano 300 a.C., o matemático Euclides escreveu um livro que se tornaria a principal referência matemática da humanidade nos dois mil anos subsequentes: Os Elementos. No livro I de *Os Elementos* a geometria é explorada com uma estrutura axiomática, ou seja, apresenta postulados e axiomas (noções comuns[1]) e, a partir destes enunciados, deduz-se outras proposições, que chamamos de teoremas.

Euclides, nos *Elementos* (2009) introduz cinco postulados utilizando a concepção corrente em sua época, que seriam "verdades evidentes" que justificam, portanto, a ausência de demonstração. A partir destes cinco postulados todo o conhecimento geométrico seria demonstrado.

Euclides enuncia assim seus postulados:

[1] Atualmente não se faz mais distinção entre postulados e axiomas. Provavelmente Euclides entendia que um axioma era uma verdade evidente que se relaciona com o conhecimento de uma maneira não específica. Em outras palavras, os axiomas apresentados não eram exclusivos para o estudo do objeto em questão, no caso a geometria.

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todo os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores que dois retos.

(EUCLIDES, 2009, p. 98)

O quinto postulado de Euclides, que aqui também é chamado de postulado das paralelas[2], sempre despertou o interesse de matemáticos por não ser tão evidente quanto os outros e isso alimentou o desejo destes de concluírem, de forma definitiva, se tal postulado pode ser uma consequência dos outros quatro, sendo, na verdade, um teorema.

A figura abaixo ilustra o quinto postulado de Euclides. O postulado diz que se $\alpha + \beta < 180$, então as retas r e s irão se encontrar.

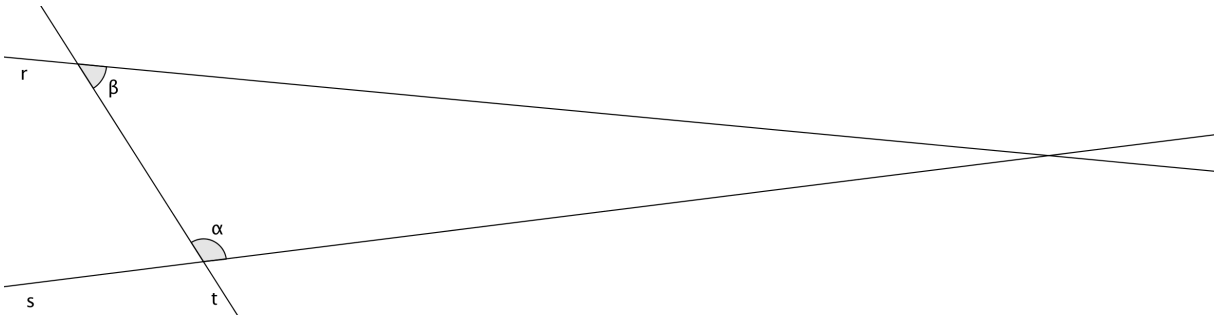


Figura 1: Quinto Postulado de Euclides

Atualmente é praticamente consenso que o próprio Euclides suspeitava que seu quinto postulado pudesse ser demonstrado a partir dos outros quatro e o principal argumento que corrobora para tal afirmação é que a utilização deste postulado parece ter sido postergada na escrita dos *Elementos*. O quinto postulado somente é utilizado na demonstração da proposição 29 do livro I, sendo que as proposições imediatamente anteriores poderiam ter sido facilmente demonstradas se o quinto postulado tivesse sido considerado. Para muitos estudiosos, Euclides apenas lançou mão do quinto postulado quando este se tornou indispensável. Pode-se perceber melhor este fato na tabela apresentada por Vitrac[3] (apud BONGIOVANNI; JAHN, 2010, p.43) em que mostra a dependência de cada proposição do livro I de *Os*

[2] O termo *postulado das paralelas* é muitas vezes utilizado apenas para o enunciado de Playfair. O enunciado de Playfair pode ser dado assim: dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única paralela a esta reta que passa por este ponto.
[3] In: EUCLIDES. **Les Éléments.** Tradução para o francês de Bernard Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France, 1994.

Elementos de Euclides, em relação aos postulados, às noções comuns, às definições e às outras proposições.

A Tabela 1: Livro I dos Elementos – dependências dos postulados mostra que todas as proposições após a de número 29, exceto a 31, são dependentes do quinto postulado, sugerindo que o livro tenha sido estruturado de forma a evitar a utilização precoce deste.

Assim sendo, muitos matemáticos tentaram "provar" o quinto postulado e muitas dessas tentativas podem ser encontradas nos trabalhos de Bonola (1912) e de Rosenfeld (1988), autores fundamentais para este trabalho. Pelo fato de estas obras serem bastante completas ao mencionar tais tentativas de demonstração, aqui não se tem a pretensão de discuti-las em detalhe, ficando o convite de consulta destas obras ao leitor interessado.

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comuns	Proposição
1	15,20	1, 3	1	
2	15,20	1,2,3	1, 3	1
3	15	3	1	2
4			7, 9	
5		1,2	3	3, 4
6		1	8	3, 4
7		1	8	5
8			7	7
9	20	1		1,3,8
10	20			1,4,9
11	10,20	1		1,2,3,8
12	10,15	1, 3		8, 10
13	10		1,2	11
14		2, 4	1,2,3,8	13
15		4	1, 2, 3	13
16		1, 2	8	2,3,4,10,15
17		2	4	13, 16
18		1	8	3,5,16
19				5,18
20		1, 2	8	2,5,19
21		2	4	16, 20
22	15	1, 3	1	2,3,20
23		1		8, 22
24		1	1, 8	2,4,5,19,23

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comuns	Proposição
25				4, 24
26		1	1, 8	3, 4, 16
27	23	2		16
28		4	1,2,3	13, 15, 27
29	23	2, **5**	1,2,4	13, 15
30			1	27, **29**
31		1,2		23,27
32		2	1,2	13,**29**,31
33		1		4,27,**29**
34		1	2	4,26,**29**
35			1,2,3	4,**29,34**
36		1	1	**33,34,35**
37		2	6	31,**34,35**
38		2	6	31,**34,36**
39		1	1,8	31,**37**
40		1	1,8	31,**38**
41		1	1,2	**34,37**
42		1	1,2	10,23,31,**38,41**
43		1	2,3	**34**
44		1,2,**5**	1,8	15,**29**,**30**,31,**42**,**43**
45		1	1,2	14,**29**,**30**,**33**,**34**,**42**,**44**
46	22	4	1,3	2,3,11,**29**,31,**34**
47		1,4	1,2,5	4,14,**30**,31,**41**,**46**
48		1	1,2	2,3,8,11,**47**

Tabela 1: Livro I dos Elementos – dependências dos postulados

O mais antigo registro de tentativa de prova do enunciado do quinto postulado é de Proclo (410-485), cuja obra se tornou uma das principais fontes sobre a geometria grega. Em relação ao quinto postulado, afirma que não se pode descartar a possibilidade de uma reta se aproximar à outra assintoticamente, ou seja, se aproximar cada vez mais e mesmo assim nunca a intersectar, e cita como exemplo a hipérbole, que possui esta característica, ilustrada na Figura 2 (GREENBERG, 1994).

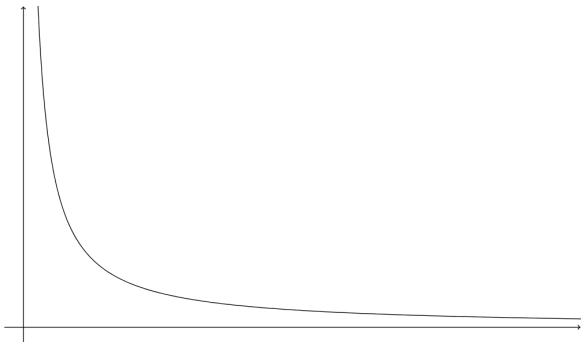


Figura 2: Hipérbole

Proclo faz uma análise crítica de outros matemáticos que antes dele se empenharam na tarefa de demonstrar o enunciado do quinto postulado, apontando suas falhas. Afirma que o primeiro a tentar "provar" o quinto postulado foi Possidônio[4] (século I), porém, ao definir retas paralelas como equidistantes no plano, este assumiu o quinto postulado sem perceber, pois são proposições equivalentes. O segundo teria sido Cláudio Ptolomeu, que procurou prová-lo por absurdo, no entanto cometeu um erro lógico ao concluir que uma afirmação era um absurdo, sem no entanto encerrar em si uma contradição (BONOLA, 1912; SOUZA, 1993). Proclo, no entanto, ao tentar demonstrar o enunciado do quinto postulado comete uma falha similar à de Ptolomeu, pois assume em sua tentativa de demonstração uma hipótese que pode ser deduzida a partir do quinto postulado (BONOLA, 1912, p.5).

Outra célebre tentativa de prova citada por Bonola (1912) é a de Aganis, tentativa esta publicada no livro *Introdução ao Primeiro Livro de Euclides*, de Simplício (século VI), no entanto, mais uma vez utiliza-se do fato que duas paralelas devem ser equidistantes.

As contribuições dos árabes à pesquisa da independência do postulado das paralelas foram consideráveis, além de serem determinantes para as posteriores pesquisas no renascimento. Bonola (1912) faz poucas citações aos trabalhos árabes, porém Rosenfeld (1988) aborda a questão com maior profundidade, sendo este ponto um grande diferencial do

[4] Segundo Rosenfeld (1983, p.15), há evidencias suficientes para acreditarmos que Arquimedes tenha sido o primeiro a tentar provar o enunciado do quinto postulado poucas décadas após a publicação dos *Elementos* de Euclides, mas sua obra sobre o assunto se perdeu.

livro de Rosenfeld em relação ao de Bonola. Há ainda outro diferencial que seria a própria abordagem matemática do tema, pois as geometrias não-euclidianas se desenvolveram ao longo das várias décadas que separam a publicação dos dois livros[5].

Segundo Bonola (1912), o comentarista Al-Nairizi (século IX) toma por base os escritos de Simplício que apresenta a tentativa de prova de Aganis como correta. Nasir al-Din Tusi (1201-1274) é o primeiro árabe citado pelo autor a se dedicar a tentar provar o postulado das paralelas, e assim o faz ampliando a proposta de Aganis e utilizando a soma dos ângulos internos de um triângulo[6], porém, como aponta O'Leary (2010, p.151), sem justificar alguns de seus passos.

O primeiro grande passo que deu abertura para a criação das geometrias não-euclidianas após as primeiras tentativas de prova do enunciado do quinto postulado talvez tenha sido dado por John Wallis (1616-1703), pois ele apresentou um novo postulado e, a partir da geometria neutra e seu postulado, deduziu o enunciado do quinto postulado (O'LEARY, 2010). Na prática, Wallis apenas substituiu um postulado por outro, mas esse ato se tornou um grande exemplo aos matemáticos que o sucederam nesta tarefa. No entanto, o trabalho de Wallis apresenta seu postulado como uma noção comum[7] (ROSENFELD, 1988, p.97).

O *postulado de Wallis* diz que existem figuras semelhantes à outra dada de qualquer magnitude que se deseja (SOUZA, 1993). Wallis argumentou que apenas propôs um postulado análogo ao terceiro de Euclides, que "postulou a existência de um círculo e raios arbitrários e, portanto, admitiu tacitamente o princípio de semelhança de círculos" (p.79). De forma equivalente, pode-se afirmar apenas que existem dois triângulos semelhantes e não congruentes ou, como exposto por Greenberg (1994, p.152):

Postulado de Wallis: Dados um triângulo ΔABC e um segmento $\overline{DE}$, então existe um triângulo ΔDEF semelhante ao triângulo ΔABC.

[5] A primeira edição do livro de Bonola foi em 1906 e, da de Rosenfeld, foi em 1976.
[6] A soma dos ângulos internos de um triângulo igual a dois ângulos retos é uma afirmação equivalente ao quinto postulado.
[7] Euclides considera que os axiomas ou noções comuns são mais abrangentes que os postulados, não se referindo unicamente ao conhecimento específico (construções geométricas) que estavam sendo propostas. Embora atualmente postulados e axiomas sejam considerados sinômimos, Wallis ainda fazia a distinção de Euclides.

O postulado de Wallis é, como já dito, equivalente ao quinto postulado de Euclides e, portanto, sua tentativa não eliminou a necessidade de prova da independência do quinto postulado.

3.2. SACCHERI

O jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) tem seu nome registrado como um dos principais precursores das geometrias não-euclidianas. Saccheri, em seu trabalho intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* critica a tentativa de Wallis e de Nasir al-Din Tusi (ROSENFELD, 1988, p.98) e procura demonstrar que o quinto postulado de Euclides seria uma consequência dos quatro primeiros postulados, explorando algumas hipóteses que mais tarde ficaram conhecidas apenas como as *três hipóteses*.

Saccheri construiu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares à mesma base, como na Figura 3, figura esta que hoje é conhecida como quadrilátero de Saccheri. Este matemático provou que se os dois outros ângulos fossem retos, então o enunciado do quinto postulado seria verdadeiro. Assim, bastaria provar que estes ângulos eram de fato retos.

Figura 3: Quadrilátero de Saccheri

Rapidamente é possível concluir que os outros dois ângulos do quadrilátero de Saccheri são congruentes, restando apenas obter a medida de um destes ângulos. Como tais ângulos são congruentes, então só há três hipóteses em relação aos ângulos:

- são obtusos
- são retos
- são agudos

A figura abaixo ilustra as hipóteses:

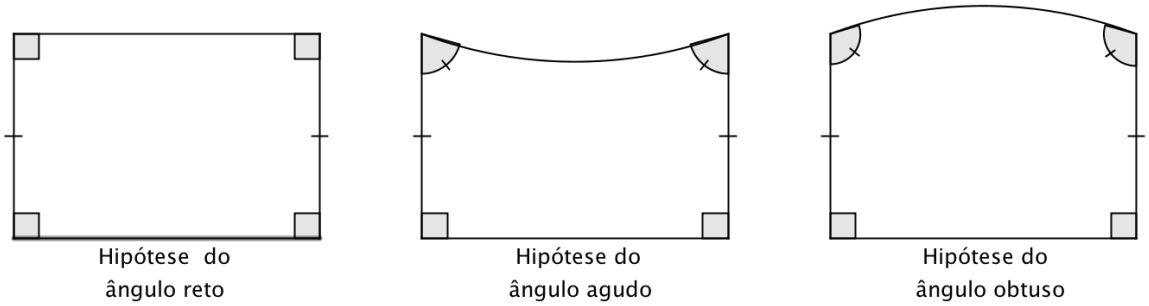


Figura 4: As Três Hipóteses

Ressalta-se que tanto na Figura 4 quanto nas próximas figuras deste capítulo, as retas serão representadas como curvas euclidianas. Na figura acima, por exemplo, só há segmentos de retas.

A estratégia de Saccheri consistia em assumir as hipóteses do ângulo obtuso e a do agudo, uma a uma, como verdadeiras e a partir disso, encontrar contradições. Assim, somente a hipótese do ângulo reto seria possível, provando o enunciado do postulado das paralelas.

Michael O'Leary traz em sua obra um capítulo inteiro dedicado à apresentação das ideias centrais de Saccheri em *Euclides Vindicatus* (O'LEARY, 2010, p.323-352).

Saccheri demonstra, considerando o quadrilátero de Saccheri ABCD, com $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ retos, e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, que:

- Os dois outros ângulos do quadrilátero são congruentes.
- O segmento formado pelos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$
- A hipótese do ângulo reto será verdadeira se, e somente se, $\overline{CD}$ for congruente a $\overline{AB}$. A hipótese do ângulo agudo será verdadeira se, e somente se, $\overline{CD}$ for maior que $\overline{AB}$. A hipótese do ângulo obtuso será verdadeira se, e somente se, $\overline{CD}$ for menor que $\overline{AB}$.
- Se existir um quadrilátero de Saccheri ABCD que satisfaz a hipótese do ângulo agudo, então todos os outros quadriláteros de Saccheri também satisfarão a hipótese do ângulo agudo. O mesmo acontece com as outras duas hipóteses e, portanto, apenas uma das três hipóteses pode ser verdadeira.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo será igual à soma de dois retos se a hipótese do ângulo agudo for verdadeira, será menor que a soma de dois retos para a hipótese do ângulo agudo e maior que a soma de dois retos para a hipótese do ângulo obtuso.
- A hipótese do ângulo reto é equivalente ao enunciado do quinto postulado de Euclides.

- A hipótese do ângulo obtuso é inconsistente em relação à geometria absoluta[8], ou seja, em relação aos quatro primeiros postulados.

3.3. SACCHERI E A HIPÓTESE DO ÂNGULO AGUDO

Como Saccheri conseguiu descartar a hipótese do ângulo obtuso, por ser incoerente com os outros quatro postulados, faltava apenas descartar a hipótese do ângulo agudo. Nesta busca, conseguiu provar que, se esta hipótese for verdadeira:

- Dados dois segmentos perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{CA}$, existe um ponto X tal que o ângulo $A\hat{C}X$ é agudo e os prolongamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{CX}$ não se encontram, como apresentado na Figura 5: Reta Paralela

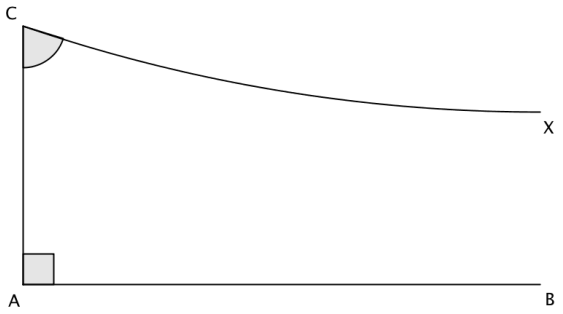


Figura 5: Reta Paralela

- Dado um quadrilátero ABCD, com $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ retos e lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ não congruentes, existe uma perpendicular comum a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, assim como o quadrilátero de Saccheri. A Figura 6 ilustra a situação.

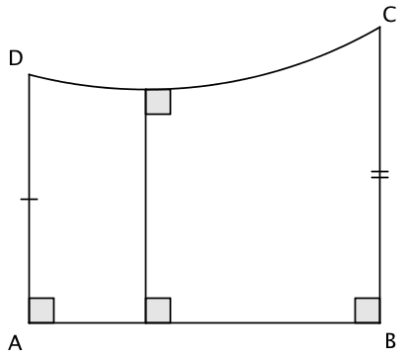


Figura 6: Perpendicular Comum

[8] É a geometria euclidiana sem considerar o quinto postulado de Euclides. O termo *geometria absoluta* já era utilizado por Bolyai, um dos criadores das geometrias não-euclidianas, que era interessado em descrever proposições verdadeiras tanto na geometria de Euclides quanto em sua geometria.

Depois que conseguiu demonstrar a existência de uma perpendicular comum no caso já descrito, Saccheri provavelmente passou a suspeitar que se considerasse duas retas que não possuem uma perpendicular comum, poderia encontrar uma inconsistência da hipótese do ângulo agudo. Provou então que:

- Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são tais que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $D\hat{C}A$ é agudo, então os prolongamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem uma perpendicular comum **ou** se aproximam quanto mais distantes estiverem de $\overline{AC}$.

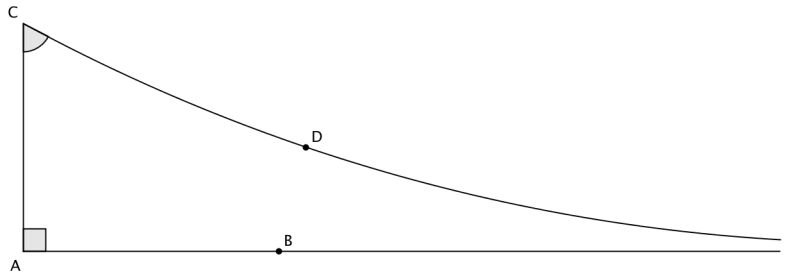


Figura 7: Comportamento Assintótico

- Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tais que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $D\hat{C}A$ é agudo e que as retas sempre se aproximam. Se consideramos dois quadriláteros com bases nos prolongamentos de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$, mas que, em $\overline{AB}$, possui ângulos retos e bases congruentes, então a soma dos ângulos do quadrilátero mais próximo de $\overline{AC}$ será menor que a soma dos ângulos do quadrilátero mais distante. A Figura 8: Menor Defeitoilustra a situação.

  É comum chamarmos a diferença da soma dos ângulos na hipótese do ângulo agudo em relação à do ângulo reto de **defeito**[9]. Em outras palavras, na geometria hiperbólica o defeito de um triângulo é a diferença entre a soma de seus ângulos internos e π $(180°)$ e o defeito de um quadrilátero é a diferença entre a soma de seus ângulos internos e 2π $(360°)$. Saccheri demonstrou que a hipótese do ângulo agudo implica quadriláteros tais que possuam bases em $\overleftrightarrow{AB}$ e congruentes[10], e compreendidos entre duas retas conforme o indicado terão menor defeito quanto mais afastados estiverem de $\overline{AC}$.

[9] Alguns autores, como Lázaro Coutinho (1988), preferem o termo *diferença angular*.
[10] Saccheri explorou o defeito dos quadriláteros, mas como composição de dois triângulos. Somente Lambert estudou o defeito de um polígono.

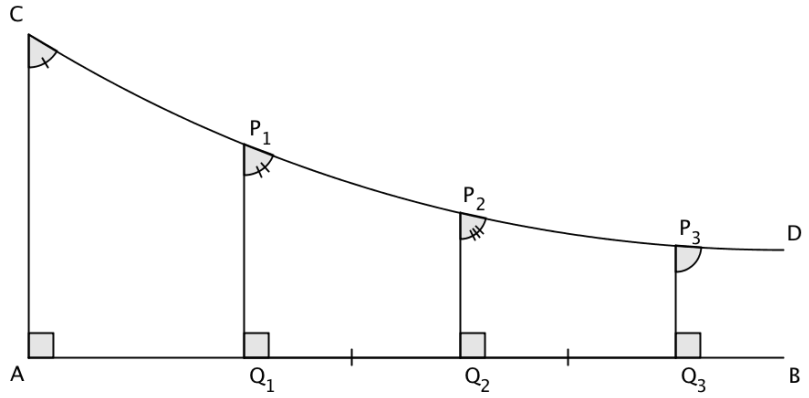


Figura 8: Menor Defeito

- Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tais que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $D\hat{C}A$ é agudo. Se supormos que todo segmento que liga $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$, formando ângulos retos com $\overline{AB}$, não medem menos que uma distância $\delta > 0$ estipulada, então a hipótese do ângulo agudo será falsa (Figura 9: Comportamento Assintótico com Linha Equidistante).
  Esta conclusão de Saccheri implica que quaisquer retas com as características dadas só podem ser de três tipos: possuem uma perpendicular comum, se intersectam ou possuem comportamento assintótico.

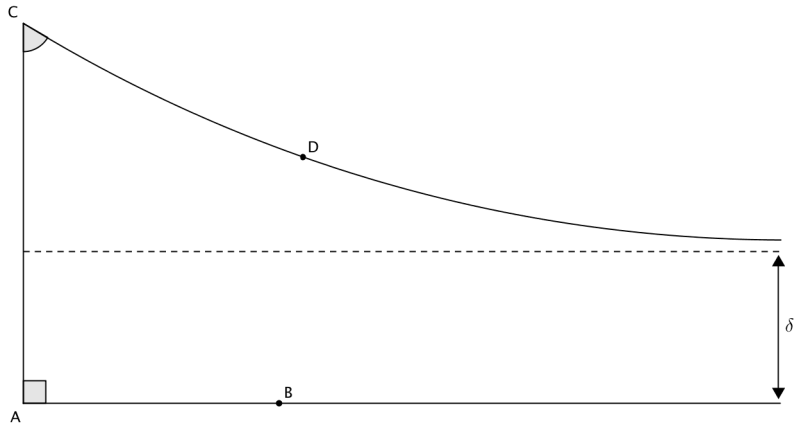


Figura 9: Comportamento Assintótico com Linha Equidistante

Girolamo Saccheri, em seguida, explora figuras parecidas com as figuras mencionadas nos últimos itens, mas permitindo a construção de ângulos obtusos. É importante ressaltar que mesmo considerando ângulos obtusos na figura, tais construções se referem à hipótese do ângulo agudo. Essas últimas observações do jesuíta aqui citadas apontam para um melhor entendimento de retas paralelas na hipótese do ângulo agudo. Provou que:

- Considerando $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cortadas por uma transversal $\overleftrightarrow{AC}$, sendo que $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares, então:
    - Se o ângulo $A\hat{C}D$ for obtuso, então os prolongamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não possuem uma perpendicular comum. (Figura 10: Critério para Inexistência de Perpendicular Comum)
    - Se o ângulo $A\hat{C}D$ for agudo e $\overline{CD}$ tiver uma perpendicular comum com $\overline{AB}$, então existe $\overline{CE}$ no interior do ângulo $A\hat{C}D$ tal que $\overline{CE}$ também possui uma perpendicular comum com $\overline{AB}$. (Figura 11: Perpendiculares Comuns)

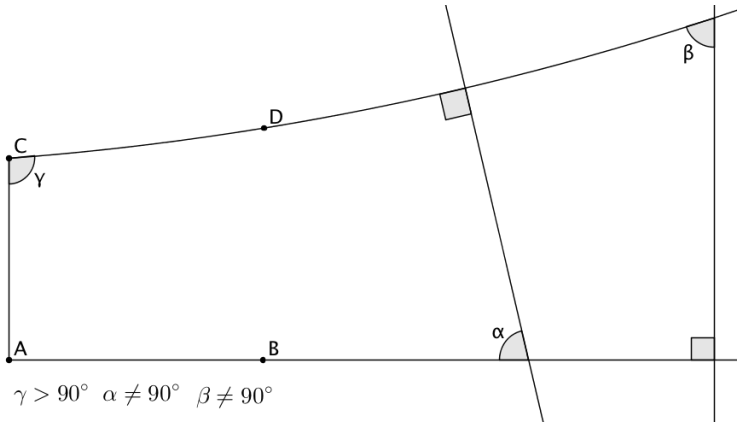


Figura 10: Critério para Inexistência de Perpendicular Comum

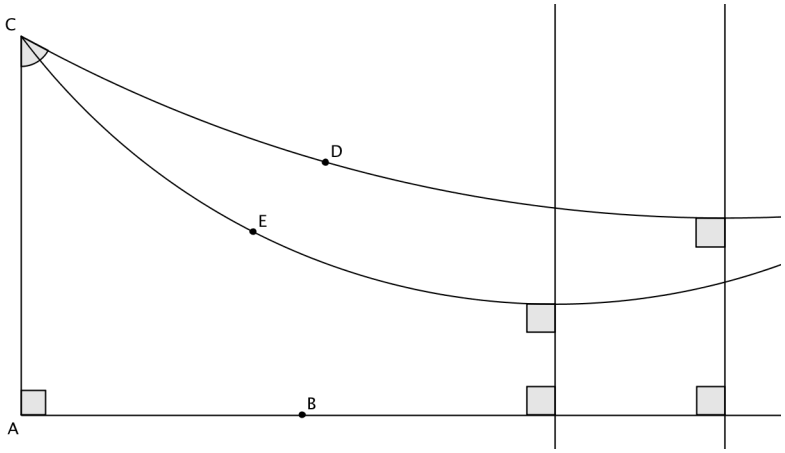


Figura 11: Perpendiculares Comuns

- Considerando $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cortadas por uma transversal $\overleftrightarrow{AC}$, então existe E tal que o ângulo $A\hat{C}E$ seja agudo, $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ se aproximam assintoticamente e para cada ponto X que esteja do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que E:

- Se a medida do ângulo $A\hat{C}X$ for menor que a do $A\hat{C}E$, então $\overline{CX}$ intersecta $\overline{AB}$.
- Se a medida do ângulo $A\hat{C}X$ for maior que a do $A\hat{C}E$, mas menor que a de um reto, então $\overline{CX}$ e $\overline{AB}$ possuem uma perpendicular comum.

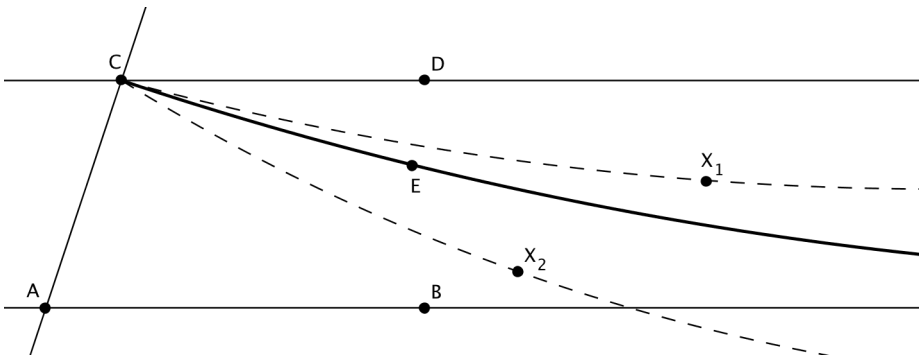


Figura 12: Paralela Limite

A reta encontrada por Saccheri, que possui comportamento assintótico com a reta dada é, portanto, a linha que separa as retas que possuem uma perpendicular comum com a reta dada e as que intersectam tal reta. O'Leary (2010, p.351) afirma que Saccheri chamou esta reta de comportamento assintótico de limite por se tratar da última reta que não intersecta a reta dada, porém, hoje muitos autores a chamam de paralela, classificando as outras como concorrentes ou *não-secantes*.

Saccheri, após não encontrar contradição alguma em suas demonstrações, mas se deparar com muitos fatos "estranhos", afirmou que a hipótese do ângulo agudo é falsa por contradizer a natureza da reta. Mais especificamente, em sua proposição XXXIII de *Euclides Vindicatus*, Saccheri afirma que a proposição anterior, que é o último item aqui citado, se contrapõe a geometria euclidiana (SACCHERI, 1920, p.173).

Mesmo tendo demonstrado muitos teoremas da geometria hiperbólica, Saccheri é reconhecido apenas como precursor das geometrias não-euclidianas, já que não admitiu que tais fatos poderiam ser considerados em outro tipo de geometria, além de não substituir efetivamente o quinto postulado de Euclides por outro. Mas, sem dúvidas, pode-se colocá-lo em um patamar diferenciado dentre os precursores por ser o primeiro a explorar com tanta profundidade as três hipóteses.

3.4. LAMBERT

O matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777) explorou três hipóteses equivalentes às de Saccheri, também a partir de um quadrilátero, mas não o *quadrilátero de Saccheri*. Atualmente muitos historiadores da Matemática acreditam que Lambert teve algum contato com as ideias de Saccheri e as utilizou como fonte de inspiração para sua obra, porém, não se pode ter certeza se ele conheceu em detalhes o trabalho de Saccheri (BONOLA, 1912; O'LEARY, 2010). Tem-se como evidência para esta suspeita:

- Lambert cita em sua bibliografia uma obra de Klügel, no qual este autor faz uma análise da obra de Saccheri
- o método de Lambert abordar a questão é similar à de Saccheri.

O quadrilátero proposto por Lambert possui três ângulos retos e, se o quarto ângulo for reto, então o enunciado do quinto postulado será também verdadeiro. Segundo Rosenfeld (1988, p.61,100), o mesmo quadrilátero já havia sido proposto pelo egípcio Ibn al Haytham (965-1041) em uma tentativa de prova do quinto postulado.

Figura 13: Quadrilátero de Lambert

Lambert também enumerou três possíveis hipóteses: o quarto ângulo pode ser reto, agudo ou obtuso.

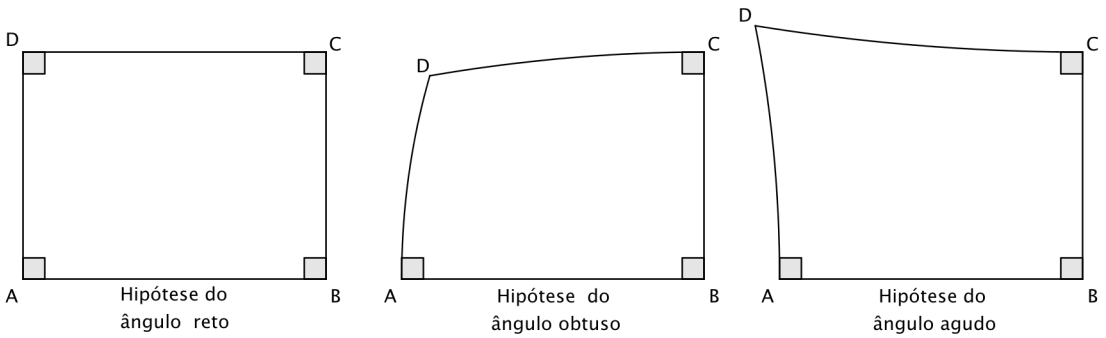


Figura 14: As Três Hipóteses (Lambert)

É possível provar que as três hipóteses de Lambert são equivalentes às três hipóteses de Saccheri. O'Leary (2010, p.357) inicia essa demonstração a partir de um teorema de Saccheri já exposto neste texto, de que os lados que não são necessariamente congruentes do quadrilátero de Saccheri possuem uma perpendicular comum que passa pelos seus pontos médios. Assim, sempre que traçarmos tal perpendicular encontraremos dois quadriláteros de Lambert e sempre será possível construir um quadrilátero de Saccheri, como mostra a Figura 15, a partir de dois quadriláteros de Lambert congruentes.

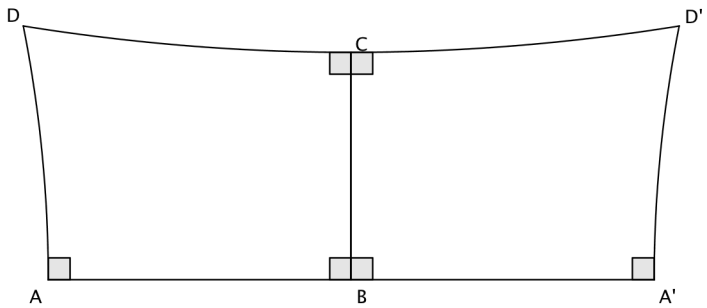


Figura 15: Equivalência das Hipóteses de Saccheri e Lambert

Desta forma, tem-se que todos os teoremas demonstrados a partir do quadrilátero de Saccheri também são válidos a partir do de Lambert e, portanto, a hipótese do ângulo obtuso de Lambert é inconsistente em relação à geometria absoluta e as duas hipóteses restantes são incompatíveis entre si. O trabalho de Lambert, no entanto, chega a essas conclusões por outras vias, sem considerar tal equivalência das hipóteses para os dois quadriláteros.

Dentre as contribuições de Lambert para pesquisas futuras das geometrias não-euclidianas, se destaca a relação da hipótese do ângulo obtuso com a esfera. Lambert percebeu que não seria capaz de encontrar contradição nesta hipótese caso considerasse o círculo máximo de uma esfera como reta (ROSENFELD, 1988, p.100) e chega até mesmo a considerar o triângulo esférico como um triângulo que possui propriedades tais como as impostas pela hipótese do ângulo obtuso, já que o defeito[11] deste triângulo é proporcional à sua área. Lambert abriu assim, precedentes para os trabalhos de Riemman. No entanto, não é possível afirmar se esta relação percebida por Lambert tenha influenciado diretamente Riemman.

Para Rosenfeld (1988), Lambert chegou mais próximo das ideias de Lobachevsky do que Saccheri e justifica este fato citando trechos da obra de Lambert nos quais discute a real possibilidade daqueles resultados incompatíveis com a geometria euclidiana estarem, de fato,

[11] Lambert chamou a diferença entre a soma dos ângulos internos deste triângulo a dois retos simplesmente de excesso.

corretos. Lambert chega a dizer que "there is something exquisite about this consequence, something that makes one wish that de third hypothesis[, of the acute-angle,] be true!"[12] (ENGELS apud ROSENFELD, 1988, p.101)[13]. A consequência a que Lambert se refere diz respeito às medidas absolutas de comprimento, área e volume que a hipótese do ângulo agudo implica para cada figura. Nos trechos que seguem, Lambert também diz que, caso a hipótese do ângulo agudo fosse verdadeira, os astrônomos teriam um trabalho muito difícil, pois as tabelas trigonométricas seriam infinitamente grandes, mas que, no entanto, não vale a pena pensar em questões como essa, já que "all these are arguments dictated by love and hate, which must have no place either in geometry or in science as a whole"[14] (ENGELS apud ROSENFELD, 1988, p.101)[15]. Considerando somente os fatos geométricos, Lambert percebe que, assim como a hipótese do ângulo obtuso parece verdadeira na esfera, pode-se considerar uma esfera imaginária na qual a hipótese do ângulo agudo seria válida, antecipando assim a existência da figura que hoje chamamos de pseudoesfera[16].

Mesmo com todas os apontamentos que Lambert fez, por fim, acreditou ter encontrado uma contradição na hipótese do ângulo agudo, "provando" assim, o enunciado do quinto postulado de Euclides.

Compartilhando da opinião de Bonola (1912), o passo decisivo para a descoberta da independência do quinto postulado de Euclides e para a criação das geometrias não-euclidianas consistiu no abandono do pressuposto de Saccheri, que alguma contradição seria encontrada à medida que se desenvolvesse as consequências da hipótese do ângulo agudo, e Lambert não transpôs esta barreira. Tal passo, como hoje conhecemos, só foi dado por Lobachevsky e Bolyai na primeira metade do século XIX.

3.5. LOBACHEVSKY

O primeiro trabalho publicado que substituía o postulado das paralelas por outro que supunha sua negação e que não visava a busca de uma inconsistência para assim demonstrar a validade do quinto postulado foi do russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), em

[12] há algo requintado sobre tal consequência, algo que cria o desejo de que a terceira hipótese[, do ângulo agudo,] seja verdadeira! (tradução nossa)
[13] ENGELS, F. STÄCKEL, P. Die Theorie der Parallellinen Von Euklid bis auf Gauss. Leipzig:[s.n.], 1895.
[14] todos estes argumentos são ditados pelo amor e pelo ódio, que não têm lugar na geometria ou na ciência como um todo (tradução nossa)
[15] Ibid.
[16] Vide subcapítulo 3.8 - Modelos Geométricos.

1829 (HALSTED, 1914). A princípio Lobachevsky chamou a nova geometria de *imaginária*, porém, mais tarde atribuiu o nome de *pangeometria* (GREENBERG, 1994). Infelizmente sua obra ficou por algum tempo desconhecida do restante do mundo acadêmico por ter sido publicada em russo, dificultando assim o acesso a grandes centros de pesquisas matemáticas da época, instaladas no ocidente. Tal quadro apenas começou a ser revertido quando, em 1840, Lobachevsky publicou um tratado em alemão[17].

Lobachevsky considerou como postulado que por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma reta que não intersecta a primeira (BONOLA, 1912), como ilustra a Figura 16: Retas Paralelas.

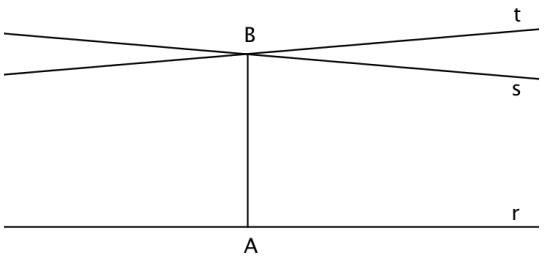


Figura 16: Retas Paralelas

Considerando este postulado, o matemático russo define as retas que não intersectam uma reta **r** como *não-secantes,* e reta *paralela* como a primeira reta que não a intersecta (LOBACHEVSKY, 1914, p.13). Assim, na figura acima, as retas **s** e **t** são paralelas a **r.** Mais especificamente, a reta **s** é paralela a **r** pela direita, e **t**, paralela a **r** pela esquerda.

Assim Lobachevsky define uma reta paralela:

> Given a line and a point in a plane, I call parallel to the given line drawn from the given point a line passing through the given point and which is the limit between the lines that are drawn in the same plane, that pass through the same point and that, when extended from one side of the perpendicular dropped from that point on the given line, cut the given line, and those that do not cut it.[18]
>
> (LOBACHEVSKY, 2010)

[17] O tratado *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* consta também nas referências bibliográficas desta dissertação, mas sob o título *Geometrical Researches on The Theory of Parallels*, por se tratar de uma tradução para o inglês.

[18] Dados uma reta e um ponto no plano, chamo de paralela à reta dada pelo ponto dado uma reta que passa por tal ponto e que seja o limite das retas coplanares que tenham este ponto em comum e que, quando prolongadas a um dos lados da perpendicular que liga o ponto à reta dada, intersectam esta reta e aquelas que não a intersectam. (tradução nossa)

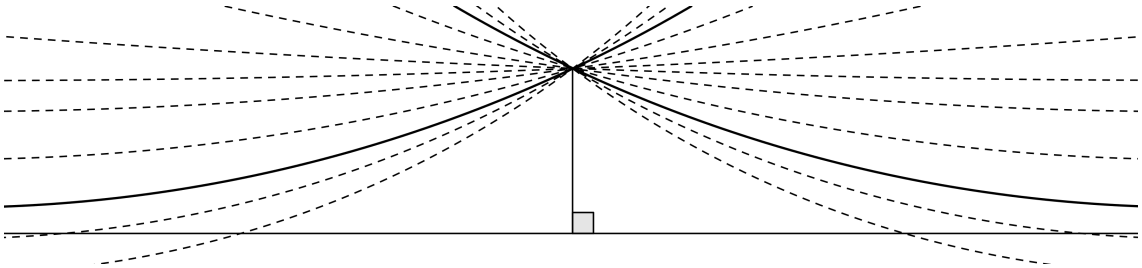


Figura 17: Retas Paralelas - Lobachevsky

A Figura 17 acima ilustra as retas não-secantes e as concorrentes à reta dada, que são separadas (representadas por linhas tracejadas) por duas paralelas (representadas por linhas contínuas).

Outro conceito adotado por Lobachevsky e essencial para suas análises é o *ângulo de paralelismo*, que é o ângulo formado entre a reta paralela por um ponto à reta dada e a perpendicular à reta dada também traçada por este ponto, como mostra a Figura 18: Ângulo de Paralelismo.

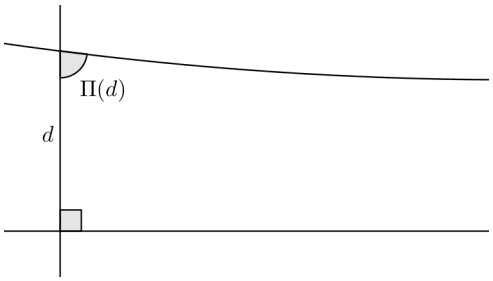


Figura 18: Ângulo de Paralelismo

O ângulo de paralelismo é uma função que depende da distância d do ponto à reta dada, já que tal ângulo será menor quanto maior for esta distância e tenderá a $90°$ quanto mais próxima da reta dada estiver. Lobachevsky denotava tal função por $\Pi(d)$.

Segundo Bonola (1912, p.87-88), as principais propriedades deduzidas por Lobachevsky são:

- Se uma reta s é paralela a r no ponto P, então s será paralela a r em qualquer ponto de s na mesma direção.
- Se s é paralela a r, então r é paralela a s.
- Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.
- Se r é paralela a s, então r é assintótica a s.

Lobachevsky também apresenta o teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, que deve ser menor que 180º, e fórmulas de trigonometria que, de acordo com

Bonola (1912), consistem na parte mais importante do trabalho de Lobachevsky (p.88). Em seguida, introduz duas novas figuras: o Horocírculo e a Horosfera que, resumidamente, são um círculo e uma esfera de raios infinitos, respectivamente.

3.6. BOLYAI

O matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) divide com Lobachevsky a honra de descobrir as geometrias não-euclidianas. É consenso entre os historiadores da Matemática que ambos desenvolveram a ideia central das novas geometrias, substituindo o quinto postulado de Euclides por outro não equivalente sem ter conhecimento das pesquisas do outro. No entanto, a publicação de Bolyai que trata do assunto foi posterior à de Lobachevsky.

A trajetória de Bolyai, principalmente no que se refere à divulgação de sua obra, é marcada por incompreensões e falta de apoio. Após seu reconhecimento público como descobridor das geometrias não-euclidianas, alguns pesquisadores perceberam que o tratamento dado por Gauss a Bolyai foi muito diferente do dado a Lobachevsky, porém, até hoje não é possível afirmar o motivo de tal diferenciação. O fato é que o apoio de Gauss, considerado como o maior matemático vivo na época, poderia mudar significativamente o curso do desenvolvimento histórico destas geometrias e ainda impulsionar a carreira acadêmica de cada um deles. É interessante relatar que Lobachevsky passou a ser integrante da Sociedade Científica de Göttingen sob indicação de Gauss (GREENBERG, 1994, p.178), que não teve atitude semelhante com Bolyai, mesmo sendo este o filho de seu amigo Wolfgang Bolyai, de ter conhecido a obra de János Bolyai aproximadamente oito anos antes[19] da de Lobachevsky e de tê-lo elogiado por sua obra. Os detalhes do relacionamento de Bolyai com Gauss não serão expostos aqui, mas se constituem em um conhecimento relevante aos interessados no contexto histórico do surgimento das novas geometrias.

Seguindo os passos do pai, e desaconselhado por ele, János Bolyai dedicou muito de seu tempo na tentativa de demonstrar se o postulado das paralelas era ou não decorrência dos outros quatro, mas não tardou a suspeitar sobre a possibilidade real de sua independência, o que permitiria o estudo de um sistema geométrico sem sua existência e, em 1823, em uma carta para o pai, Bolyai escreveu a frase que mais tarde se tornaria uma das mais famosas da

[19] O trabalho de Bolyai foi enviado para Gauss duas vezes antes mesmo de ser publicado e, no dia 6 de março de 1832, Gauss respondeu para Wolfgang Bolyai dizendo que praticamente todos os resultados de Bolyai já haviam sido deduzidos por ele, mas que não planejava publicá-los em vida. (GREENBERG, 1994)

história da ciência: "do nada, criei um novo universo". Na mesma carta demonstrou profunda convicção de suas descobertas e expôs a vontade de publicar suas ideias.

Em resposta à carta de Janós Bolyai, Wolfgang Bolyai disse:

> if you have really succeded in the question, it is right that no time be lost in making it public, for two reasons: first, because ideas pass easily from one to another, who can anticipate its publication; and secondly, there is some truth in this, that many things have an epoch, in which they are found at the same time in several places, just as the violets appear on every side in spring. [...][20]
>
> (BONOLA, 1912)

Como hoje sabemos, o pai de Bolyai estava certo nas suas observações. Outros matemáticos também consideraram esta possibilidade, e Lobachevsky teve a honra de ser o primeiro a publicá-la, poucos anos mais tarde das correspondências citadas de Bolyai e seu pai. Sobre estes outros matemáticos citados, destacam-se Gauss, que comprovadamente explorou a geometria hiperbólica antes da publicação de Lobachevsky, e Taurinus, que embora não tenha explorado as novas geometrias com tanto vigor, percebeu que a substituição do quinto postulado por sua negação poderia gerar uma estrutura lógica consistente.

Em 1832, Bolyai finalmente publicou seu trabalho intitulado de *Ciência Absoluta do Espaço*[21] como apêndice de um livro de seu pai, intitulado *Tentamen*.

Segundo Bonola, antes dos 19 anos Bolyai já investigava o problema das paralelas e chegou, junto com seu amigo Szász[22], a definir a reta *paralela assintótica*, que seria a primeira reta que não cruza outra dada quando se altera continuamente sua inclinação em relação a outra, ou seja, a própria reta paralela na geometria que ajudou a criar. Nesta época já teriam construído o conceito de curva equidistante a uma reta e de *paracírculos*, o nome dado por Bolyai para os horocírculos de Lobachevsky. (BONOLA, 1912, p.97). Na Figura 19, que ilustra a ideia de Bolyai, inclina-se a reta BC até que esta deixe de intersectar a outra reta.

---

[20] se você realmente obteve sucesso nesta questão, é certo que não se pode perder tempo para tornar público, por duas razões: primeiro porque as ideias se transferem facilmente de um para o outro, que poderia se antecipar à sua publicação; e segundo porque, e há alguma verdade nisto, que muitas coisas têm uma época em que serão descobertas ao mesmo tempo e em diversos lugares, assim como as violetas aparecem em todos os lados na primavera. (tradução nossa)

[21] O título original do trabalho era, em latim, como segue: Appendix scientiam spatti absolute veram exhibens: a veritate aut fasitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquan decidenda, independentem: adjecta ad casum fasitatis quadratura circuli geometrica. A versão bilíngue deste trabalho, com tradução para o inglês feita por Halsted, consta nas referências bibliográficas desta dissertação.

[22] Carl Szász (1798-1853).

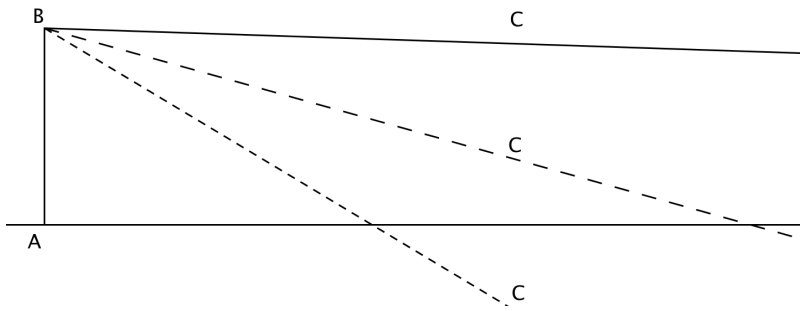


Figura 19: Paralelas Assintóticas

Estão entre os principais resultados do trabalho de Bolyai, segundo Bonola (1912):

- A própria definição de retas paralelas e suas consequências imediatas
- O círculo e a esfera com raios infinitos
- A trigonometria esférica é independente do quinto postulado
- A utilização da trigonometria para o cálculo de áreas e volumes na geometria hiperbólica
- A impossibilidade da quadratura do círculo na geometria euclidiana.

Um dos aspectos notáveis da obra de Bolyai é a ênfase dada à independência de proposições da geometria euclidiana em relação ao quinto postulado de Euclides. Tais proposições, para Bolyai, eram *absolutamente verdadeiras,* pois tais proposições são verdadeiras tanto na geometria de Euclides como na que Bolyai havia deduzido. O sistema geométrico que produzem tais verdades foi chamado de *geometria absoluta*. Os escritos de Lobachevsky tinham um caráter diferenciado em relação aos de Bolyai, já que este se concentrava principalmente em construir um sistema geométrico baseado na negação do quinto postulado.

Bonola (1912) ainda ressalta algumas pesquisas que Bolyai fez após a publicação da *Ciência Absoluta do Espaço*. Em tais pesquisas, Bolyai chegou a definir três classes de superfícies uniformes, portanto duas além da esfera. Tais superfícies foram batizadas de Hiperesfera e Paraesfera que são as superfícies equidistantes de um plano e as Horosferas de Lobachevsky, respectivamente.

3.7. RIEMANN

Não tardou para que outros grandes avanços fossem alcançados e novas descobertas encantassem os matemáticos. O questionamento natural decorrente da criação das novas geometrias era se outros postulados poderiam ser inseridos ou substituídos e também o que se deveria entender por geometria (COUTINHO, 2001). Aos poucos os matemáticos foram identificando postulados que, embora Euclides não os tivesse redigido, os adotava. Postulados que de "tão óbvios" não eram notados.

Riemann (1826-1866) surpreendeu a todos com a sua teoria que apresentava ao mundo uma ideia muito mais ampla de geometria e, como consequência, dava finalmente um sentido para a hipótese do ângulo obtuso, unindo as suspeitas de Lambert com as ideias mais recentes do novo universo matemático que se descortinava. Dentre suas contribuições, Riemann percebeu que Euclides assumia tacitamente, portanto sem prova, que a reta era ilimitada e seria possível supor que uma reta pode ser infinita, porém limitada.

Uma das propostas de Riemann era assumir no lugar do quinto postulado de Euclides o que segue:

Postulado de Riemann[23]: Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, não existe nenhuma reta paralela a r que passe por P.

Tal postulado poderia ser reescrito e ser enunciado apenas como "paralelas não existem". Este postulado é evidentemente contraditório em relação à geometria absoluta, pois nesta paralelas sempre existem.

Mais tarde, Felix Klein percebeu que a esfera poderia ser um modelo para uma geometria de Riemann[24], que batizou de elíptica. Klein considerou os círculos máximos da esfera como retas, mas isso por si só ainda não garante a visualização da geometria, pois dois círculos máximos distintos sempre se encontram em dois pontos o que contraria a geometria de Riemman. Para finalmente dar uma interpretação da geometria elíptica na esfera, Klein considerou estes dois pontos, chamados de antípodas, como um só (GREENBERG, 1994, p.441). Klein chamou a geometria de Bolyai e Lobachevsky de hiperpólica e a geometria de Euclides de parabólica.

[23] Também conhecido como *postulado elíptico*.
[24] A geometria de Riemann engloba as geometrias elíptica e hiperbólica (SOUZA, 1993, p.83).

A contribuição de Riemann, no entanto, é muito mais abrangente. Riemann apresenta a noção de curvatura de uma geometria e as três geometrias citadas até aqui são casos especiais da geometria de Riemann. Elas apresentam curvaturas constantes. Uma característica de uma curvatura constante é que uma figura geométrica não sofre deformações ao ser deslocada. Cabe ressaltar que a noção de curvatura de uma superfície já havia sido estruturada por Gauss, como afirma Brito (1995, p.149).

Recomenda-se a leitura do apêndice A do livro *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* de Greenberg (1994, p.428-453) para um primeiro contato com as ideias centrais da geometria de Riemann.

3.8. MODELOS GEOMÉTRICOS

O advento das geometrias não-euclidianas evidenciou que a visão de que a geometria é um modo de descrever e entender o espaço precisava ser reformulado. Quase que imediatamente após a criação de outras geometrias, perguntavam-se se vivíamos em um mundo que segue a geometria de Euclides ou a de Lobachevsky. Algumas décadas se passaram até que, com o auxílio de modelos geométricos, concluiu-se dois fatos fundamentais, que serão apresentadas adiante.

Lobachevsky havia chamado sua geometria de *imaginária* pelo fato de não possuir recursos para visualizá-la. As ideias iniciais sobre a geometria que criou mostraram que era possível estudar geometria mesmo não sendo possível construir as figuras que eram seus objetos de estudo. Assim, a geometria se mostrou totalmente independente de representações, ou seja, a geometria passou a ser entendida como uma estrutura lógica, um sistema axiomático inventado arbitrariamente pelo homem.

Em 1868, Eugenio Beltrami publicou um trabalho[25] em que demonstrava que, dependendo do que se considera como uma reta e como plano, era possível interpretar a geometria de Bolyai e Lobachevsky. Considerando que reta é a geodésica[26] de uma superfície e a figura que é conhecida pelo nome de pseudoesfera, Beltrami mostrou que proposições da geometria hiperbólica poderiam ser visualizadas nesta figura. Segundo Henderson (1983, p.4), a publicação de Beltrami provocou um súbito interesse dos matemáticos pelo tema.

---

[25] Beltrami, Eugenio. Saggio di Interpetrazione della Geometria Non-Euclidean. **Giornale di Matematiche**, VI, p.284-322, 1868. Disponível em: < http://www.caressa.it/pdf/beltrami01.pdf >. Acesso em: 3 abr. 2012.
[26] Linha de menor comprimento entre dois pontos.

O modelo de Beltrami, no entanto, se mostrou insuficiente para todas as representações, além de ser de difícil construção. Outros matemáticos começaram então a propor modelos que possuíam vantagens em relação à pseudoesfera.

Três modelos se mostraram bem úteis: o de Klein, do semiplano de Poincaré e do disco de Poincaré. Aqui serão apresentadas somente informações superficiais sobre os modelos. Adianta-se que o modelo do disco de Poincaré costuma ser o preferido pelos professores quando propõem atividades introdutórias relacionadas à geometria hiperbólica, sendo que alguns *software* de geometria dinâmica, como o Cinderella, possuem ambientes de trabalho que o utilizam. Os três modelos são modelos planos no sentido euclidiano.

O **modelo de Klein** e do **disco de Poincaré** são parecidos. Os dois consistem em uma região circular aberta[27] e a principal diferença é o que se considera como uma reta.

O modelo de Klein pode ser visualizado na Figura 20. As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam as retas hiperbólicas, ou seja, as retas inteiras, infinitas, estão representadas na figura. Como toda a reta está representada em um segmento, basta mudarmos a maneira de medir distâncias e diminuirmos a escala utilizada quanto mais próximo da circunferência estiver.

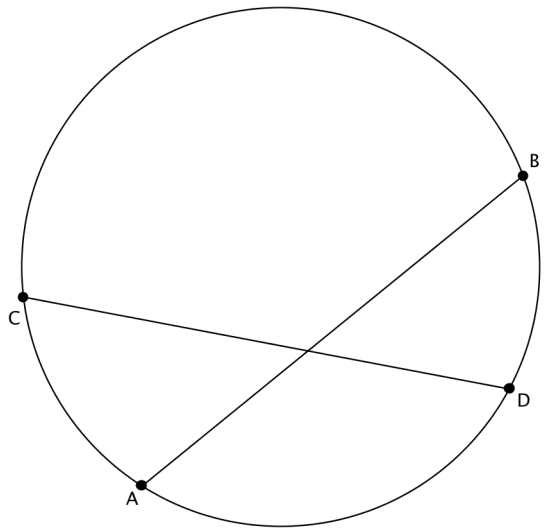


Figura 20: Modelo de Klein

O modelo do disco de Poincaré pode ser visualizado na Figura 21. Nele, mudamos o que entendemos por reta, que serão os diâmetros da circunferência **ou** os arcos de circunferência perpendiculares à circunferência. Na figura, há quatro retas hiperbólicas sendo representadas.

[27] O interior de um círculo. Não se considera nos modelos a fronteira, ou seja, a "borda" do círculo.

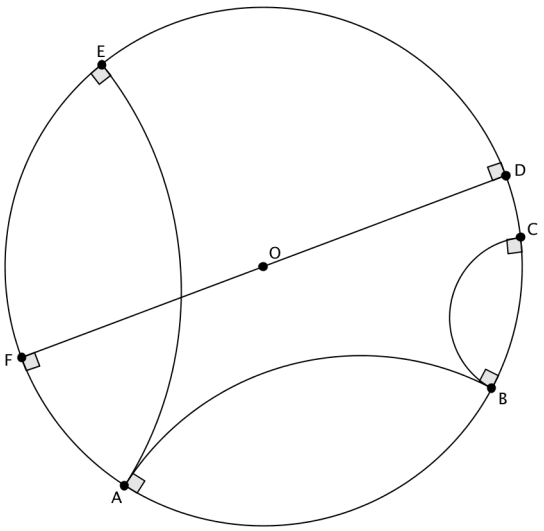


Figura 21: Disco de Poincaré

O **modelo do semiplano de Poincaré** é equivalente ao do disco, mas considerando um círculo de raio infinito. É um semiplano euclidiano, aberto, em que se considera como retas todas as semirretas perpendiculares à reta euclidiana que delimita o semiplano e todas as semicircunferências cujos centros pertençam à mesma reta, como mostram o exemplo na Figura 22: Modelo do Semiplano de Poincaré.

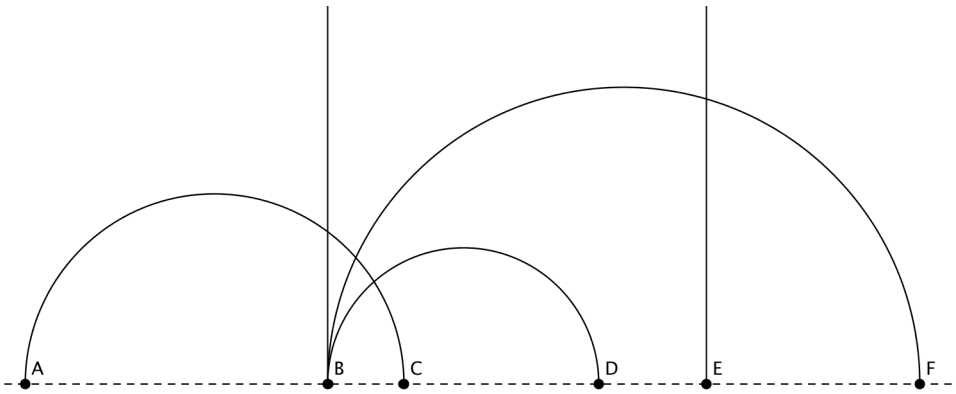


Figura 22: Modelo do Semiplano de Poincaré

No semiplano de Poincaré acima há a representação de cinco retas hiperbólicas.

Aos que procuram textos introdutórios que se referem a alguns modelos de geometria, há dois artigos que podem colaborar. O primeiro é um artigo, em inglês, escrito por Hansen (1997) e que comenta os dois modelos de Poincaré aqui apresentados e, o segundo, um recente artigo em português de Sérgio Alves e de Santos Filho (2012). Ressalta-se ainda que Rossini (2010) relata aplicação de atividades com régua e compasso que versam sobre o modelo do disco de Poincaré.

No início deste subcapítulo, falou-se em dois fatos fundamentais. Tais fatos, que na verdade são teoremas, são:

- Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica será consistente
- O quinto postulado de Euclides é independente

As provas destes dois teoremas não serão expostas aqui, e podem ser consultadas em Greenberg (1994, p.225). No entanto, apresenta-se a ideia intuitiva da prova da consistência da geometria hiperbólica. A existência de um modelo da geometria hiperbólica no plano euclidiano implica que todas as figuras hiperbólicas podem ser representadas por uma figura euclidiana, logo se a hiperbólica for inconsistente, a euclidiana também será. Greenberg apresenta a segunda proposição como um corolário da primeira, e a prova por absurdo.

Desta forma, foi solucionado um dos principais problemas matemáticos da história.

4. GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Buscando-se compreender se é possível que o público de não-especialistas interiorize conceitos próprios das geometrias não-euclidianas, percebe-se a necessidade de um melhor entendimento acerca do panorama educacional dessas geometrias e também das formas de atingir significativamente tal público. Como é próprio de cada nova experiência, muitos questionamentos surgem e aqui se espera poder discutir alguns deles.

4.1. AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E AS PROPOSTAS CURRICULARES

Uma das primeiras questões fundamentais para esta discussão está no interesse dos educadores matemáticos em ensinar tais geometrias, assim como para quem ensiná-las

Como dito, o principal exemplo do ensino dessas geometrias está nos esforços do húngaro István Lénárt. Como um grande defensor da adaptação do currículo escolar para as geometrias não-euclidianas, seu foco se concentra na geometria esférica por acreditar que, pelo menos em alguns aspectos, chega a ser mais acessível intelectualmente que a própria euclidiana plana e também porque é um conhecimento com aplicações importantes e variadas, como na astronomia, na química, no desenho artístico, entre outras (1996, p.viii). Em sua obra, Lénárt apresenta uma proposta curricular bastante organizada para a introdução do tema em diversos momentos do período escolar, com atividades que podem ser tanto direcionadas como abertas. As abertas podem ser entendidas como investigação matemática, tal como em João Pedro da Ponte et al (2003).

Não se pode afirmar, no entanto, que Lénárt tenha dado o passo mais importante em direção à inserção das geometrias não-euclidianas na educação básica, pois há esforços nesse sentido diversos países, como Brasil e Estados Unidos.

Os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais – sugerem a importância do tema para um melhor entendimento da evolução do conhecimento matemático, em que o surgimento das geometrias não-euclidianas forma um bom exemplo das rupturas de paradigmas que esse conhecimento sofreu. De acordo com os PCNs para o Ensino Fundamental, uma

> mudança de paradigmas ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.
>
> (BRASIL, 1998, p.25)

Mas os PCNs apresentam uma peculiaridade: tal ênfase aparece de forma explícita somente no documento com orientações para o Ensino Fundamental, tratando do assunto

apenas de maneira implícita no documento para o Ensino Médio. Esse fato não condiz plenamente com algumas propostas, que sugerem o tema principalmente no Ensino Médio.

Talvez os PCNs se configurem no primeiro esforço significativo para que o tema seja abordado na educação básica brasileira, pois mesmo sem sugerir explicitamente que o tema seja inserido no currículo, apresentam o assunto como sendo de grande importância, bem como a necessidade de repensá-lo. Dessa forma, os professores passam a se sentir à vontade em sugerir temas relacionados aos currículos de suas respectivas escolas.

O Governo do Estado do Paraná foi mais longe nessa questão e colocou o assunto de maneira explícita no currículo de suas escolas. É provável que essa atitude se torne um movimento mais amplo nos próximos anos, sendo adotadas medidas semelhantes em outros Estados. De qualquer forma, pode-se prever que, se esse movimento ganhar força, não será um processo rápido, pois essa alteração curricular esbarra em assuntos relacionados à formação dos professores, como já foi discutido anteriormente.

Segundo o documento do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), a inserção dessas geometrias no currículo são justificadas sob o argumento de que as disciplinas da educação básica devem conter em seus conteúdos estruturantes aqueles que as identificam como conhecimento histórico. Tal documento sugere que as geometrias hiperbólica e elíptica sejam abordadas no Ensino Médio e apresenta, sem a pretensão de impedir possíveis outros trabalhos, o que espera que seja abordado pelo professor em sala de aula.

Em relação às geometrias hiperbólica e elíptica, o Governo do Estado do Paraná sugere que os professores partam do postulado de Lobachevsky[1] e explorem a pseudoesfera[2], os pontos ideais, o triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos. Já no caso da geometria elíptica, partindo do postulado de Riemann[3], propõe que explorem a superfície esférica e discutam o conceito de geodésica, os círculos máximos e menores, as distâncias nessa superfície, ângulos e triângulos esféricos, a soma das medidas dos ângulos internos a um triângulo esférico, classificação dos triângulos esféricos, bem como os conceitos de polo, equador, meridiano, paralelo e direção do movimento (PARANÁ, 2008, p.57).

Ainda segundo o mesmo documento, a escolha dos temas contou com a participação de professores do Estado do Paraná. No entanto, Santos (2009) dá a entender que a participação destes professores na formulação da proposta esteve bem abaixo da

[1] Vide subcapítulo 3.5
[2] Vide subcapítulo 3.8
[3] Vide subcapítulo 3.7

universalidade, pelo menos na região de Maringá, onde foi realizada sua pesquisa. Este fato foi constatado pela pesquisa de Caldatto (2011), que também afirma que a inclusão do tema não foi decisão dos professores colaboradores das diretrizes curriculares.

É denunciado por quase todos os pesquisadores da área que os cursos de formação de professores no Brasil, em grande parte, não abordam o tema. Santos (2009, p.121) relata até mesmo professores que nunca haviam ouvido falar em axioma, conceito básico para se entender o surgimento das novas geometrias. Bonete (2000) é outra pesquisadora que levanta questionamentos sobre a ausência das geometrias não-euclidianas nos cursos de formação de professores. É evidente que isso cria um ciclo vicioso: as universidades não abordam o tema, pois este não é trabalhado na educação básica e o conteúdo não entra em seu currículo, pois os professores não possuem o conhecimento necessário. Vale esclarecer que se entende por "trabalhar na escola" até mesmo o simples fato de se abordar a concepção de outras geometrias.

Se há professores interessados em romper tal ciclo vicioso, é necessário ou abordar o tema na formação inicial dos professores ou inseri-lo no currículo, como fez o Governo do Estado do Paraná. Essa atitude, no entanto, gera a demanda na formação continuada desses professores e a necessidade de haver esforços extras nesse sentido. Algumas experiências se mostraram bem sucedidas, como é o caso da inclusão do chamado *Tratamento da Informação* na Matemática escolar. Até meados da década de 1990, os livros didáticos brasileiros não incluíam o tema de forma significativa, pois poderiam ser considerados inadequados por uma grande parcela do professorado. Porém, após a publicação dessas orientações, inverteu-se o quadro e passou-se a considerar inadequados os livros que não davam atenção ao tema em todos os anos do Ensino Fundamental.

Uma das propostas do trabalho de Santos (2009) é analisar o impacto do novo currículo do Estado do Paraná entre os professores que precisam se adaptar a ele. A pesquisadora percebeu que muitos professores não conseguiam explicar o motivo da importância da inclusão, e muitos, até mesmo no final de um curso sobre o assunto promovido pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná, ainda não conseguiam diferenciar plenamente a geometria euclidiana das não-euclidianas.

Visto que, além das experiências que muitos educadores têm realizado com o ensino das geometrias não-euclidianas, há esforços institucionais para que o conteúdo seja inserido no currículo da educação básica, tem-se que os alunos do Ensino Médio e das séries finais do

Ensino Fundamental formam um público que está no foco do ensino desses educadores. Mas esse não é o único público identificado, pois os próprios professores necessitam que o tema seja discutido em sua formação inicial. Este trabalho não tem como objetivo principal analisar esse público, pois é um público que possui especialistas. No entanto, ao analisar-se trabalhos que têm esse público como um de seus focos, como os de Santos (2009), Bonete (2000) e Cabariti (2004), é possível encontrar informações e análises relevantes acerca do público em questão.

Não foram encontradas pesquisas que tratem exclusivamente do ensino dessas geometrias para o público não escolar, mas foi possível encontrar algumas iniciativas que podem tanto ser classificadas como educação não-formal e/ou informal. A própria história do surgimento dessas novas geometrias contém capítulos interessantes sobre a intenção de popularizá-las, ou seja, ensiná-las para um público de não-especialistas.

4.2. GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS COMO PROPOSTA DE ENSINO

Outro ponto importante a ser considerado é compreender melhor quais seriam os objetivos dos professores que se propõe a ensinar as geometrias não-euclidianas.

Segundo Bonete, o ensino destes tópicos para futuros professores pode proporcionar reflexões sobre as concepções de verdade matemática e de espaço (2000, p.229) e estas são, obviamente, discussões importantes para um futuro professor.

Para Reis (2006), a realização de atividades sobre geometrias não-euclidianas pode contribuir "para a percepção, compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive" (2006, p.9). Além disso, proporciona reflexões e comparações sobre essas geometrias, já que existem regras e propriedades diferenciadas em cada uma.

Lénárt (1993) afirma que "there is a fundamental characteristic of spherical geometry that makes it more accessible in many respects than plane geometry, namely, it is built on a finite surface, in contrast with the infinite plane"[4]. Além disso, conceitos de geometria esférica já são abordados na disciplina de Geografia, embora não sejam tratados com frequência na Matemática escolar. Os trabalhos interdisciplinares entre Matemática e

[4] há uma característica fundamental da geometria esférica que a faz mais acessível em muitos aspectos que a geometria plana, ou seja, é construída sobre uma superfície finita, em contraste com o plano infinito (tradução nossa)

Geografia para tratar do assunto também são debatidos por vários outros autores, incluindo Pataki (2003) e Prestes (2006).

Lénárt estipula metas bastante claras para o currículo que propõe. Na tradução e sistematização de Martos tais metas são:

> ✓ Ensinar os fundamentos da geometria esférica.
>
> ✓ Explicar os conceitos e definições de geometria plana comparando com as idéias correspondentes em geometria esférica.
>
> ✓ Desenvolver a compreensão do que um sistema axiomático é, e de como mais de um sistema axiomático pode existir ao mesmo tempo no mesmo campo de estudo.
>
> ✓ Desenvolver a compreensão necessária para ter sucesso na sociedade multicultural.
>
> (MARTOS, 2002, p.59-60)

Krause (1986), como já foi dito na seção 2.4.2, afirma que as geometrias não-euclidianas nos ajudam a entender melhor a própria geometria euclidiana. Acredita que quando tomamos consciência de que uma determinada propriedade é válida somente em um contexto, interiorizamos melhor seu significado.

Assim, de forma geral, tem-se que o principal objetivo dos pesquisadores que defendem o ensino das geometrias é fazer com que o estudante compreenda melhor a própria geometria euclidiana, tanto em seus aspectos internos como no papel que ela representa no universo da ciência Matemática.

4.3. EXPERIÊNCIAS DE ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Nesta etapa da pesquisa pretende-se investigar e refletir sobre as tentativas de ensino que constam nas pesquisas relacionadas às geometrias, procurando identificar seus processos (micro e macro) bem sucedidos. Sendo assim, foram elencadas algumas obras que constituem exemplos de sucesso em suas experiências.

A experiência de maior expressão é a proposta de trabalho de Lénárt (1996) sobre a geometria esférica. Martos (2002) comenta brevemente sobre a trajetória do reconhecimento do trabalho de Lénárt. Ao iniciar de seus trabalhos, Lénárt empenhou-se em estruturar sua proposta durante anos até que recebeu ajuda de um colega para publicá-la. Em seguida os materiais concretos improvisados, como bolas de ping-pong e lâmpadas, foram substituídos por materiais desenhados por ele mesmo, a princípio em parceria com uma companhia húngara para, depois, serem produzidos por uma editora de Berkeley-CA (EUA). Lénárt

produziu também um material didático intitulado *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*, em que a *esfera de Lénárt* é justamente um desses materiais concretos que idealizou. Este livro se tornou quase uma leitura obrigatória para qualquer educador que pretenda se aprofundar no ensino das geometrias não-euclidianas, mas, infelizmente, até a conclusão desta dissertação, ainda não possuía uma tradução para a língua portuguesa.

O livro de Lénárt possui uma estrutura bastante interessante. Como se confirmará nas experiências relatadas adiante, tal livro é acessível para pessoas que tenham poucos conhecimentos prévios em geometria e valoriza as múltiplas resoluções e múltiplos contextos. Em outras palavras, a descoberta de um conceito é realizada repetidas vezes, em cenários diferentes. Em relação aos conhecimentos prévios, afirma que "if students know that great circles are the spherical equivalent of straight lines, they are ready to tackle almost any adventure"[5] (LÉNÁRT, 1996, p.xii), ou seja, aqui já se percebe não só qual é o principal conceito de que o aluno precisa para desenvolver as atividades, mas também qual a ênfase do autor para discutir o conceito de reta.

Boa parte da proposta curricular contida no livro se apoia em atividades comparativas entre as geometrias euclidiana e esférica. Lénárt, assim como Krause (1986), pensa que é possível compreender melhor a geometria euclidiana tendo contato com outras geometrias. Neste sentido, para orientar o trabalho do professor que utiliza seu livro, Lénárt apresenta um mapeamento de conteúdos correlatos aos da geometria euclidiana; assim, o professor pode facilmente encontrar, por exemplo, uma atividade que trata de retas perpendiculares ou dos casos de congruência de triângulos.

As atividades, que o autor chama de *aventuras*[6], são bastante diversas e direcionadas para diversos públicos de estudantes, do Ensino Fundamental até o Superior. Nos primeiros capítulos as investigações recebem um tratamento matemático mais formal, com definições e teoremas. É somente no capítulo 7 que o autor introduz fortes relações com outra área do conhecimento, a Geografia, e então observa que tais atividades podem ser teoricamente incorretas[7], mas que possuem uma finalidade prática bastante útil (LÉNÁRT, 1996, p.115). Alguns conceitos abordados neste capítulo são latitudes e longitudes, fusos horários e linha internacional de mudança de data.

---

[5] se os estudantes sabem que as circunferências máximas são o equivalente esférico das retas, então eles estão prontos para se deparar com quase todas as atividades (tradução nossa)

[6] adventures é a palavra utilizada pelo autor.

[7] Em uma atividade Lénárt apresenta uma planificação da esfera. Sabe-se que não existe uma planificação de uma esfera sem distorções.

Os temas trabalhados por Lénárt são diversos. Aqui vão elencados alguns conceitos contemplados na obra:

- Plano esférico
- Geodésica
- Medidas de distâncias e de áreas no plano esférico
- Linhas geodésicas perpendiculares e a impossibilidade de existência de paralelas
- Polígonos, incluindo o biângulo[8] e polígonos regulares com representações do quadrado[9]
- Casos de congruência de triângulos
- Triângulos trirretângulos ou octantes.

Além destes conceitos, Lénárt ainda propõe a exploração do conceito de semelhança, de definição de triângulos esféricos, de tesselação ou pavimentação e de triângulos polares. Estas atividades são reservadas para alunos que já vivenciaram outras atividades sobre a geometria esférica.

A pesquisa de Zionice Martos (2002) se apoia exatamente sobre a proposta de Lénárt. Enfocando os alunos do Ensino Fundamental, propõe atividades comparativas das Geometrias euclidiana e esférica (p.3) e, assim como Lénárt, acredita que tais atividades contribuem para um aprofundamento da geometria euclidiana. Em seu trabalho, investiga se os estudantes do Ensino Fundamental podem produzir significados em geometria esférica (p.13). As atividades foram aplicadas com estudantes de 8º ano e de 9º ano[10] de duas escolas públicas de Rio Claro – SP.

Mesmo baseando seu trabalho nas atividades propostas por Lénárt, Martos ressalta que sua visão de educação matemática difere da visão de Lénárt. Ela adota a problematização proposta por Mendonça[11] e argumenta que o material de Lénárt apenas reserva o momento de problematização no término de cada atividade, sendo que, de acordo com sua visão, este deveria ser apresentado no início (p.82-83). Esta é justamente uma das alterações que faz na

[8] Polígono de dois ângulos existente na geometria esférica.
[9] O quadrado apenas existe na geometria esférica se o definirmos como um polígono regular de quatro lados.
[10] A autora usa os termos 7ª e 8ª séries, que eram utilizados antes da instituição do Ensino Fundamental de nove anos.
[11] MENDONÇA, M.C.D. **Problematização**: Um caminho a ser percorrido em Educação. 1993. 307f. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1993.

aplicação das atividades. A autora afirma que esta visão se configura como o principal diferencial entre sua proposta e a de Lénárt.

Como já dito, um dos eixos da proposta de Martos é a comparação entre as geometrias e os alunos são instigados a pensar, por exemplo, que propriedade geométrica é válida na geometria euclidiana e não é válida na esférica.

A pesquisadora teve o cuidado de fazer sua proposta levando em consideração o plano curricular da escola. Dessa forma, acreditou inicialmente que poderia partir de conceitos geométricos conhecidos pelos alunos para a construção de novos conceitos, desta vez da geometria esférica. No entanto, afirma que esta estratégia não surtiu o resultado esperado. Por este motivo deixou de investigar, por exemplo, a semelhança de triângulos nas geometrias, já que os alunos ainda não tinham tido contato com o tema na geometria euclidiana (p.84).

Na geometria esférica, dois triângulos esféricos são semelhantes se, e somente se, são congruentes[12]. Este resultado faz com que o conceito de semelhança não faça sentido na geometria esférica, mas a atenção ao tema ganha importância por deixar evidente mais uma diferença marcante entre as geometrias, assim como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Uma mudança que a autora faz e que considera relevante para citá-la é a primeira atividade proposta aos alunos. Lénárt começa apresentando o famoso problema do urso[13] enquanto a primeira atividade de Martos explora o planeta onde vive um personagem chamado Pole, inspirada na história do Pequeno Príncipe de Saint-Exupéry. Perguntas do tipo: *Qual é o caminho mais curto entre sua casa e sua amada rosa?* ou *Uma linha reta pode ser prolongada infinitamente no planeta de Pole?* são apresentadas ao longo do problema aberto, o que é uma característica do trabalho de Martos. Essas perguntas exploram o conceito de geodésica e de superfície finita, respectivamente. A atividade, adaptada de um documento da CENP[14], tem muitas relações com uma das histórias de Anselmo Curioso (PETIT, 1982).

Devido à falta de referências à geometria esférica nos livros didáticos de Matemática e à sua presença nos de Geografia, a autora pensa que um trabalho interdisciplinar que relacionasse "os conceitos geométricos esféricos com conceitos geográficos, possibilitaria

[12] Dependendo da definição adotada de semelhança, diz-se que não existem triângulos semelhantes na geometria esférica.

[13] Um urso percorre 100 quilômetros para o sul, depois 100 quilômetros para o leste e, em seguida, 100 quilômetros para o norte e percebe que voltou ao mesmo local de onde saiu. Qual é a cor do urso?

[14] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. CENP-Coordenação de Estudos e Normas Pedagógicas. Matemática - ensino fundamental: 5a A 8a SÉRIES. 2 Ed. São Paulo: SE/CENP, 1997. 237p.il. (Prática Pedagógica)

desenvolver um aprendizado significativo" (MARTOS, 2002, p.85) no 9º ano do Ensino Fundamental. Entre tais conceitos, evidencia-se o das coordenadas geográficas.

Mesmo adiado, o problema do urso também recebeu atenção de Martos e os alunos testam suas representações no plano euclidiano e na superfície da esfera. Nesta atividade também se destacam as relações entre os ângulos de um triângulo esférico.

Várias são as atividades de comparação de geodésicas em sua pesquisa. Pingando gotas de água no topo de uma esfera seus alunos puderam observar como é uma reta na superfície esférica. Linhas "retas" também foram traçadas em bexigas. De fato, a identificação de uma circunferência máxima como a análoga da reta no plano foi, em seu trabalho, um dos grandes focos.

Após diversas atividades aplicadas com os estudantes, a autora tentou

> [...] verificar se os alunos eram capazes de:
>
> - medir a distância entre dois pontos no plano e na esfera e verificar que existem diferenças.
> - perceber que existem duas distâncias e que preferimos sempre a menor delas.
> - observar que quaisquer dois pontos, que não são pontos de pólos, têm somente uma distância mais curta com a qual podemos medir a distância.
> - verificar que, na esfera, se dois pontos são pontos de pólo, há infinitamente muitos caminhos mais curtos entre eles, mas todos eles têm a mesma medida de 180˚.
>
> (MARTOS, 2002, p.104)

e constatou que tais conceitos eram bastante acessíveis para boa parte dos alunos que participavam da pesquisa.

Assim, vê-se que a pesquisa de Martos apresenta muitos sucessos em relação à aplicação de atividades de geometria esférica para o público de alunos pertencentes aos anos finais do Ensino Fundamental. Evidentemente não se pode afirmar que tais sucessos sejam consequências somente do conteúdo, dissociando-o do método de aplicação; no entanto, configura-se como um bom exemplo de como conceitos de geometria não-euclidiana podem ser apresentados para um público de não especialistas.

Também explorando a geometria esférica na educação básica, João Pedro Marqueze (2006) elaborou uma sequência didática cujo objetivo final era construir um objeto que representasse uma bola de futebol[15], explorando assim a tesselação da superfície esférica, e a

[15] Cf. Lénárt (1996, p.156-158).

aplicou em uma escola estadual da Grande São Paulo com alunos dos três anos do Ensino Médio. As atividades foram adaptadas da obra de Lénárt (1996).

O estudo de caso apresentado por Marqueze em sua dissertação ressalta os pontos mais relevantes do desenvolvimento da atividade. Na primeira atividade que trata também do problema do urso já citado[16], o autor relata que, como era esperado, os alunos, apenas conseguiram imaginar a trajetória do urso apenas quando lhes foram dadas esferas de isopor, evidenciando a importância do material concreto nesta atividade inicial.

A maioria das atividades escolhidas por Marqueze, na linha de Lénárt, depende da utilização de materiais concretos. A terceira atividade proposta (p.118), por exemplo, utiliza duas bolas, uma de pingue-pongue e uma de sinuca, para fazer uma diferenciação entre os conceitos de esfera e de casca esférica. Seguem-se outras atividades em que os alunos manuseiam as esferas de isopor, barbantes, alfinetes etc, e assim os conceitos vão sendo construídos, incluindo o de geodésica, da inexistência de retas paralelas na esfera e da existência do biângulo, figura que não existe na geometria euclidiana.

Apesar de as atividades serem adaptações de outras já muito replicadas por Lénárt e por inúmeros professores ao redor do mundo, e já não restar muitas dúvidas no sucesso da aplicação, a experiência de Marqueze nos mostra que as atividades são adequadas à nossa realidade educacional. Assim como já apresentado no trabalho de Martos (2002), mais uma vez foi confirmado que os conceitos básicos da geometria esférica podem ser acessíveis para os alunos da educação básica, e também que esse contato favorece a consolidação de conceitos da geometria euclidiana.

Martos e Marqueze tiveram suas atenções voltadas aos alunos da educação básica, mas outros autores tiveram seu enfoque nos professores. Izabel Bonete (2002, p.104), por exemplo, escolheu aplicar suas atividades, que versavam tanto sobre a geometria esférica quanto sobre Hiperbólica, com alunos de um curso de licenciatura em Ciências.

As atividades propostas por Bonete (2000) começam com a manipulação de materiais concretos e a retomada de conceitos básicos da geometria euclidiana para depois migrarem para discussões conceituais mais formais. A autora descreve em detalhes algumas de suas experiências e, a partir da leitura de sua dissertação, pode-se acompanhar várias "descobertas" e reelaborações conceituais dos alunos participantes. Nas atividades baseadas nos materiais concretos, os alunos tiveram contato com materiais que sugerem modelos não-euclidianos,

[16] Ver nota 13, na página 71.

como a esfera e a pseudoesfera, e foram encorajados a, por exemplo, traçar linhas retas em suas superfícies para depois formalizarem o conceito de geodésica. Da mesma forma, os alunos vão ao longo da aplicação de tais atividades tomando contato com outros conceitos inerentes às geometrias.

A autora (BONETE, 2000) relata diversos momentos em que os alunos participantes buscavam com bastante interesse compreender melhor as novas geometrias com as quais passaram a ter contato (p.164). Relata também o espanto daqueles futuros professores ao perceberem que um conhecimento tão significativo na história da ciência simplesmente nunca havia sido apresentado a eles durante suas respectivas trajetórias escolares (p.154). Em relação ao conhecimento prévio dos alunos participantes na pesquisa, a autora expõe algumas dificuldades apresentadas na retomada de conceitos básicos, como é o caso da definição de um retângulo, em que muitos alunos não conseguiram responder com segurança o que seria um retângulo, embora reconhecessem a figura (p.171-172), além de um caso análogo acerca da definição de um triângulo (p.175-176). Estas dificuldades sugerem que o contato com a geometria que a maioria dos alunos haviam tido até aquele momento não era baseado em postulados, definições e consequências lógicas, mas sim em uma geometria voltada a aplicações, como o reconhecimento de figuras, cálculo de áreas etc.

Obviamente o desconhecimento do que vem a ser um postulado pode impedir a compreensão do surgimento das geometrias não-euclidianas e, mesmo que seja possível, por exemplo, compreender que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo que estiver em uma superfície não-plana não é 180º, este tipo de constatação ainda não explica definitivamente que se trata de uma outra geometria, mas dá uma ideia aproximada. Sabe-se que muitos teoremas e outros fatos importantes da geometria esférica são conhecidos há dois mil anos (ROSENFELD, 1988), incluindo a analogia de um círculo máximo com a reta euclidiana, e nem por isso os matemáticos reconheceram esta estrutura como uma geometria diferente da euclidiana ao passar dos séculos. Lambert, por exemplo, percebeu semelhanças da geometria esférica com a hipótese do ângulo obtuso e mesmo assim não conseguiu distingui-la como uma geometria distinta da euclidiana, já que para isso precisaria desconsiderar a exigência da reta ter comprimento infinito[17]. Assim, para reconhecer que, de fato, são geometrias diferentes, é necessário compreender minimamente a estrutura axiomática da geometria e conhecer seus postulados.

[17] Vide o subcapítulo 3.4.

Apesar de as atividades propostas por Izabel Bonete não tratarem com profundidade o método dedutivo, tais atividades contestavam a ideia de reta. Depois que os participantes consideraram como reta uma linha sobre uma superfície não-plana, observaram então resultados diferentes dos já concluídos com linhas retas no plano. Bonete mostrou com sua experiência, apesar de não ser este o seu objetivo principal, que com poucos conhecimentos prévios em geometria e em pouco tempo é possível romper com a ideia usual de reta, e assim, permitir uma interpretação de outra geometria que também pode descrever o real.

Irene Pataki (2003) também elabora uma proposta para o público de professores, porém enfocando sua formação continuada. Dedicado à geometria esférica, seu trabalho propõe uma sequência didática tendo como um dos objetivos promover situações que permitam que o professor reelabore o seu pensar. Em relação ao aspecto interdisciplinar, sua proposta relaciona-se com a Geografia. Com um corpo teórico bem definido e estruturado, Pataki fundamenta seu trabalho na teoria das Situações Didáticas de Brousseau[18], sua metodologia de pesquisa na Engenharia Didática de Artigue[19] e na teoria de Barth[20] sobre a formação de professores.

De acordo com Pataki, sua pesquisa tem como objetivos:

> Propor aos professores uma sequência didática, com atividades[,] que mostre a relação interdisciplinar existente entre a Geometria esférica e a Geografia, formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade.
>
> Proporcionar aos professores envolvidos reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria esférica.
>
> (PATAKI, 2003, p.17)

A experimentação da sequência didática foi realizada com professores do Ensino Médio de escolas estaduais no município de Arujá-SP, e teve uma aplicação anterior com alunos de Licenciatura em Matemática para que ajustes pudessem ser feitos. A sequência começava com uma atividade classificada pela autora como uma situação-problema detonadora e era acompanhada de outras oito atividades. Esta situação-problema detonadora envolve coordenadas geográficas e, a partir dela, conhecimentos de geometria euclidiana foram sendo mobilizados para a construção de novos conceitos, desta vez da geometria não-euclidiana envolvida. Os professores, por exemplo, ao citar a trajetória retilínea de um navio

---

[18] BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **La Pensée Sauvage.** Grenoble, v.7, n.2, p.33-115, 1986.
[19] ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Paris, v. 9, n.3, p.281-308, 1988.
[20] BARTH, B-M. **O Saber em Construção**. Lisboa: Instituto Piaget, 1993.

na superfície utilizavam o termo "curva" para designá-la, e as sistematizações do conceito correspondente na geometria esférica foram feitas depois.

A pesquisadora também se utilizou de materiais concretos com os professores, assim como os outros pesquisadores já citados que fizeram aplicações de atividades. Logo na primeira atividade, bolas de isopor foram fornecidas aos professores, e na segunda, puderam manipular globos terrestres. A autora justifica a utilização desses materiais por julgar que são facilitadores de reflexões e conclusões (2003, p.97) e ainda argumenta que os materiais ficaram disponíveis aos professores de forma permanente para as próximas atividades, já que poderiam apoiá-los na construção de novos conhecimentos (p.139). Nas atividades que se seguiram, os professores tiveram oportunidade de produzir régua e transferidor esféricos.

Em atividades posteriores propostas por Pataki aos professores, vários conceitos da geometria esférica foram institucionalizados (p. 139-142), tais como:

- a ideia de reta
- a inexistência de retas paralelas e a falsidade do quinto postulado de Euclides[21]
- a representação das circunferências
- a finitude da reta
- definição de polígonos e a existência de triângulos birretângulos e trirretângulos.
- caso AAA de congruência de triângulos e a inexistência de figuras semelhantes

Apontando possibilidades de melhoria de seu trabalho, a autora afirma que a utilização de um *software* de geometria dinâmica poderia minimizar algumas limitações que suas atividades apresentaram (p. 175).

A pesquisa de Pataki nos deixa evidente a possibilidade de ensino de conhecimentos relacionados à geometria esférica para professores de forma relativamente aprofundada, considerando o tempo de seu curso que contou com menos de 20 horas. Além disso, corrobora para a possibilidade de sucesso se inseridas nos planos de aula dos professores (p. 176), pois as atividades mostraram que são potentes na mobilização de saberes relativos à aritmética, à álgebra e à trigonometria (p.138,169), ou seja, contribuindo ao ensino da Matemática de forma mais ampla, e não só em relação à geometria euclidiana.

[21] A partir do modelo geométrico (esfera), os participantes admitiram como consequência a inexistência de paralelas. Na geometria de Riemman, a inexistência de paralelas é um postulado, ou seja, não é consequência de nenhuma outra proposição.

As pesquisas até aqui citadas que apresentam algum tipo de experiência de ensino das geometrias não-euclidianas partem do pressuposto, explícito ou implícito, que os materiais concretos podem colaborar ao aprendizado das mesmas, assumindo um papel potencializador. Reis (2006), embora se previna ao dizer que sua pesquisa não tem como objetivo investigar se *materiais manipuláveis* melhoram o ensino e a aprendizagem (p.16-17,79), se alinha às demais pesquisas na percepção de que tais materiais influenciam neste processo, e visa as modificações que podem causar no processo de ensino. Assim, se propõe a identificá-los, descrevê-los e pensar em suas formas de utilização.

Joana Reis, que prefere o termo *materiais manipuláveis* para poder se referir também aos *software* de geometria dinâmica e aos caleidoscópios (ambos produzem imagens virtuais), realizou um curso de geometria esférica para alunos de Licenciatura em Matemática utilizando tais materiais. Neste curso, explorou vários aspectos da geometria esférica sem muito inovar na utilização dos "materiais palpáveis"[22], em contrapartida as atividades de exploração da tesselação da esfera tendo o caleidoscópio como recurso são bastante diferenciadas às atividades que comumente são apresentadas nas pesquisas aqui consideradas. Tais atividades com caleidoscópio se complementam aos trabalhos de seu orientador de Mestrado, Claudemir Murari[23], que se dedica a pesquisas relacionadas ao ensino de geometria.

Segundo Reis, os caleidoscópios contribuíram para "um ambiente de estudo agradável e participativo" (2006, p.138) e possibilitaram a visualização de tesselações esféricas. Já o *software* de geometria dinâmica utilizado[24] propiciou a verificação de propriedades conhecidas do grupo de participantes e na descoberta de outras. A autora valoriza a utilização de materiais que permitem a manipulação através do tato, como esferas de isopor, pois as aplicações de suas atividades mostraram que tais materiais são buscados pelos estudantes mesmo quando estes têm à disposição os *software*, se constituindo, portanto, em algo relevante para as investigações por parte dos alunos.

Rossini (2010), que também acredita no potencial dos materiais manipuláveis e utiliza um *software* de geometria dinâmica além de régua e compasso em sua pesquisa, tem seu foco na geometria hiperbólica. A experiência de ensino da geometria hiperbólica promovida na

[22] Como a autora incorpora os materiais utilizados, incluindo *software*, sob o termo *materiais manipulativos*, ela prefere chamar os materiais que se utilizam do tato como "materiais palpáveis". Nesta dissertação, prefere-se o termo *materiais concretos*.
[23] Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, IGCE - Rio Claro (SP).
[24] Cinderella. Disponível em: http://www.cinderella.de.

pesquisa de Rossini tem como participantes alunos de um curso de Engenharia Elétrica, o que diferencia essa pesquisa em relação às outras até aqui apresentadas, já que tal experiência não se destina à educação básica direta ou indiretamente, para alunos e (futuros) professores, respectivamente. Desta forma, a pesquisadora aponta para possibilidade de sucesso no ensino das geometrias para um público não escolar e não especializado, aproximando-se assim à Divulgação Científica.

Sobre os materiais manipuláveis, a autora cita Nacarato[25], que afirma que "a exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais" (apud ROSSINI, 2010, p.14) é necessária para o "desenvolvimento da habilidade de representar mentalmente um objeto, que não está ante os olhos do sujeito no momento de sua ação sobre este objeto" (2010, p.14), justificando assim a utilização desses materiais.

A dissertação de Marcela Rossini traz em sua fundamentação teórica um detalhamento relevante da geometria hiperbólica, incluindo seus postulados e 30 teoremas, fugindo de uma mera exposição do postulado de Lobachevsky e de um fornecimento de fatos históricos relacionados ao seu surgimento.

Durante suas atividades, e segundo seu relato, os alunos foram bastante receptivos e demonstraram interesse no assunto. Ao que parece, tal interesse foi motivado pelas possibilidades de aplicação dos conhecimentos relacionados à geometria hiperbólica em trabalhos da área de telecomunicações apresentados ao alunos. Em consonância a todos os trabalhos citados que aplicam suas atividades a um público que não seja de alunos da educação básica, os participantes mostraram estranheza pelo fato de nunca terem ouvido falar na possibilidade da concepção de outras geometrias durante suas respectivas trajetórias escolares.

As atividades iniciaram-se com questionamentos associados ao quadrilátero de Saccheri[26]. Os alunos foram interrogados primeiramente se consideravam ser possível que o quadrilátero fornecido (de Saccheri) tivesse os ângulos do topo congruentes e agudos. Associando a pergunta ao tema do curso, os alunos suspeitaram que este provavelmente era um fato de uma geometria até então não conhecida por eles.

As demais atividade de Rossini também seguiram modelo semelhante: iniciavam-se com um questionamento seguido de uma discussão teórica sobre o assunto. De acordo com

[25] NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista da Educação Matemática** – ano 9 - 10, 2004 - 2005, p.1- 6.
[26] Vide subcapítulo 3.2.

sua descrição, as discussões sobre as geometrias não-euclidianas fluiu em um ritmo acelerado. A segunda atividade, por exemplo, já discutia aspectos do modelo de Poincaré. O ritmo acelerado parece ter sido uma opção da pesquisadora em função de seu público, que era formado por estudantes de engenharia, e da pouco elevada carga horária do curso.

As primeiras atividades que versavam sobre o disco de Poincaré foram propostas com a utilização de régua e compasso, e somente depois os alunos tiveram contato com um *software* de geometria dinâmica. Talvez este fato tenha facilitado a percepção, por parte dos estudantes, de que a geometria hiperbólica pode ser descrita por meio de um tratamento exclusivamente euclidiano. Esta percepção é ilustrada por uma frase de um aluno, que disse que "acaba sendo tudo geometria euclidiana" (ROSSINI, 2010, p.109). Implicitamente o uso da régua e do compasso no modelo de Poincaré propiciou aos alunos uma reflexão acerca da consistência da geometria hiperbólica, pois se um tratamento euclidiano é possível, então não haverá razões para suspeitar de qualquer inconsistência daquela geometria. Cabe lembrar que a prova da consistência da geometria hiperbólica está apoiada justamente sobre esta ideia.

Rossini argumenta que, no final da aplicação das atividades, os alunos já se referiam às retas hiperbólicas com naturalidade. Desta forma, acredita que os alunos participantes eram capazes de construir figuras básicas no disco de Poincaré e entendiam bem o que é um modelo de geometria.

Considera-se, portanto, que o trabalho de Rossini se constitui em mais um caso que obteve sucessos no ensino das geometrias não-euclidianas. Ressalta-se ainda que o fato de o público de suas atividades serem alunos de graduação em Engenharia Elétrica sugere que um público leigo pode se apropriar de conhecimentos relativos às geometrias não-euclidianas.

Um público de professores de curso de graduação de Licenciatura em Matemática também já foi participante de uma pesquisa que visava potencializar o ensino de geometria por meio de atividades que buscavam explorar a geometria hiperbólica, com utilização de um *software* de geometria dinâmica. A pesquisa em questão é de Eliane Cabariti (2004) que, na verdade, escolheu um grupo de seis professores-formadores (quatro professores de um curso de Licenciatura em Matemática e dois outros professores envolvidos com o ensino de geometria) que, de acordo com a pesquisadora, "têm uma larga experiência em formação continuada de professores de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo, e participam ativamente de projetos de capacitação" (p.55).

Os professores-formadores participantes da pesquisa de Cabariti também possuíam familiaridade com o *software* de geometria dinâmica utilizado[27], conheciam as geometrias não-euclidianas, porém nunca haviam se aprofundado no estudo da geometria hiperbólica (2004, p.55).

Eliane Cabariti também parte do pressuposto que as geometrias não-euclidianas contribuem na compreensão e ampliação da geometria euclidiana, já que assume que sua proposta visa potencializar este processo (p.23).

Apesar de esta pesquisa não utilizar materiais concretos para um estudo da geometria hiperbólica, a pesquisadora afirma que os recursos fornecidos por um ambiente de geometria dinâmica "são fundamentais para dar um caráter mais 'concreto' ou palpável aos objetos geométricos hiperbólicos, por meio de representações e construções, o que favorece a compreensão de conceitos e relações" (CABARITI, 2004, p.24). Como fundamentação para este seu olhar, cita a diferenciação entre desenho e figura geométrica de Laborde[28], em que

> o desenho é uma entidade material sobre um suporte físico (a folha de papel, a tela do computador, etc.), e a figura geométrica é caracterizada por um referencial teórico, no qual a representação material é interpretada em termos de elementos e relações geométricas. A figura é o objeto teórico, diferente da respectiva representação material, o desenho ou diagrama.
>
> (apud CABARITI, 2004, p.39)

Esta diferenciação também colabora para uma melhor fundamentação da utilização de modelos geométricos. Nesta pesquisa o modelo do disco de Poincaré foi o escolhido para o contato com a geometria hiperbólica. Cabe ressaltar que a compreensão da noção de modelo é um dos aspectos em que o trabalho de Cabariti pode ser útil, de acordo com a própria pesquisadora (2004, p.15).

As atividades propostas por Cabariti foram classificadas em atividades de familiarização, de exploração e de construção (p.58). As atividades iniciais, de familiarização, questionam se alguns teoremas euclidianos são válidos na geometria hiperbólica, sendo que na lista de teoremas apresentados, alguns são válidos na geometria absoluta e que valem, portanto, tanto na euclidiana como na hiperbólica (p.62-63). Também são propostas atividades que se referem aos quadriláteros de Saccheri e de Lambert, em que os participantes são motivados a construí-los no modelo do disco e questionados a respeito dos ângulos (p.63-65). Nessas atividades as demonstrações não são exigidas, mas professores-formadores são

[27] O *software* utilizado foi o Cabri Géomètre.

[28] LABORDE, C. The computer as part of learning environments: The case of geometry. In: C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), **Learning from computers: Mathematics education and technology**, pp. 48-67. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

incentivados a justificar o que vêem com propriedades geométricas, dentre elas a congruência de triângulos, que fazem parte da geometria absoluta.

Em seguida, são apresentadas atividades que incitam os participantes a construírem retas definidas por dois pontos (a partir dos pontos inversos) e, depois, paralelogramos.

As discussões nas quais os professores observados por Cabariti se envolvem são bem interessantes. Estes fundamentam suas argumentações em propriedades matemáticas, o que já era esperado por se tratar de um público tão envolvido com o ensino de geometria, e lidam de forma satisfatória e simples com as informações dos problemas, encarando também com naturalidade a ideia de reta e de outras figuras no modelo apresentado. Dois professores, por exemplo, apresentam de forma rápida e sucinta uma prova de que o teorema de Pitágoras não é válido nesta geometria (p.88)[29].

A pesquisadora aponta uma dificuldade por parte dos professores em confiar nos resultados que encontravam. Quando tais resultados eram diferentes dos que eram esperados na geometria euclidiana, acreditavam que suas construções estavam erradas e as refaziam (CABARITI, 2004, p.123).

Com o que foi apresentado, é possível concluir que Cabariti nos apresenta uma experiência viável para um curso relacionado ao tema. Segundo a autora, as "estratégias, soluções e comportamentos dos professores-formadores participantes, admitindo suas experiências no ensino de Geometria Euclidiana e no uso do Cabri, reforçam a pertinência da utilização desse referido ambiente" (p.124). Em uma experiência um pouco mais longa sobre assunto, a própria autora argumenta que poderia ser dada mais ênfase à demonstração (p.153).

O fato de os sujeitos da pesquisa serem professores universitários não compromete a possibilidade de se estender a aplicação da proposta para um público de professores de Matemática da educação básica. Pelo contrário, as atividades foram construídas com a intenção de apoiar justamente este grupo. A mais relevante diferença seria que os professores teriam que se familiarizar com o ambiente de geometria dinâmica.

Nas pesquisas aqui citadas, diferentes públicos foram considerados. Tiveram atenção alunos da educação básica, alunos de graduação (Licenciatura e Engenharia Elétrica), professores de Matemática e professores universitários com experiências em formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática, o que reforça a possibilidade de ensino das

[29] Apenas lembraram que a distância entre dois pontos era dado por um logaritmo natural e fizeram: $(\ln a)^2 + (\ln b)^2 = (\ln c)^2 \Rightarrow 2\ln a + 2\ln b = 2\ln c \Rightarrow \ln a + \ln b = \ln c$, o que é impossível, pois a soma das medidas de dois lados do triângulo nunca pode ser igual à medida do terceiro lado.

geometrias não-euclidianas para tais públicos. Evidentemente não se pode desvincular esta possibilidade de ensino dos recortes propostos por cada pesquisador(a), no entanto, há um panorama satisfatório que contradiz a ideia de que estas geometrias são conteúdos matemáticos de difícil acesso a públicos variados, o que os restringiriam unicamente a especialistas.

Outros aspectos presentes nestas pesquisas merecem ser destacados, como o fato de ser muito comum que participantes dos estudos de caso que já concluíram a educação básica demonstrarem estranheza ao descobrirem que além de outras geometrias serem concebidas, nunca esta informação havia sido fornecida na escola; e que é recorrente a utilização de materiais concretos ou *software* de geometria dinâmica na aplicação das atividades, sendo quase consensual o papel facilitador destes recursos.

Por último, ressalta-se que a comparação entre conceitos das geometrias não-euclidianas e da euclidiana também é um lugar comum nas atividades propostas pelos pesquisadores. Esta comparação se deve principalmente ao pressuposto, implícito ou explícito, de que o aprendizado de conceitos das geometrias não-euclidianas colaboram para uma aprendizagem significativa de conceitos da geometria euclidiana. Além disso, as pesquisas sugerem que tais geometrias são potentes também para mobilizar conhecimentos que não se restrinjam às geometrias, como a trigonometria e a álgebra, ou seja, contribuem muito mais do que esta já consensual afirmação de que o aprendizado das geometrias não-euclidianas colaboram para o aprendizado da euclidiana.

4.4. A POUCA ÊNFASE NO SISTEMA AXIOMÁTICO

O surgimento das geometrias não-euclidianas levou a uma grande ruptura no entendimento da natureza da geometria. Arlete Brito sintetiza bem esta ruptura e diz que a geometria "deixou de ser um conhecimento que reflete a realidade do espaço físico e passou a ser uma construção lógica organizada em forma de sistema axiomático" (BRITO, 1995, p.131). No entanto, muitas das pesquisas brasileiras em Educação que desejam propor experiências de ensino relacionadas ao ensino das geometrias euclidianas não têm como um de seus focos uma exploração desta percepção de geometria.

Permitindo uma linguagem informal e, por sua vez, assumindo uma imprecisão conceitual, pode-se dizer que as figuras que desenhamos são apenas representações geométricas e estas representações estão em um modelo de geometria. O plano tal qual o

conhecemos por nossa experiência, evidentemente, é um modelo da geometria euclidiana bidimensional. No subcapítulo 3.8, apresentou-se modelos de geometrias não-euclidianas que começaram a surgir na segunda metade do século XIX, incluindo os modelos de Klein e de Poincaré, que utilizam um círculo euclidiano para modelar o plano hiperbólico.

O registro mais antigo da geometria esférica que se tem notícia é atribuída a Autolycus, que viveu no final do século IV a.C.. No século I, Menelau se referia aos triângulos esféricos pela primeira vez, em seu trabalho que assumia um viés axiomático semelhante ao exposto nos Elementos de Euclides, inclusive com teoremas análogos[30], colocando os círculos máximos da esfera no lugar das retas euclidianas (ROSENFELD, 1988, p.5). No entanto, as analogias entre os círculos máximos e as retas euclidianas não foram suficientes para que estes matemáticos viessem a chamar de retas tais círculos. Em outras palavras, nada levava a crer que isso que chamamos de geometria esférica e que estes antigos matemáticos conheciam por *Sphaerica*, poderia ser interpretada como uma outra geometria.

Caso os círculos máximos passem a ser considerados as retas de uma nova geometria, será possível observar rapidamente que tal geometria não cumpre o primeiro postulado de Euclides, em que dois pontos determinam uma única reta, já que passam infinitos círculos máximos por dois polos dados. Além disso, em outra propriedade intimamente relacionada, duas retas coplanares nesta geometria possuem não um, mas dois pontos comuns.

Segundo Coxeter (1998, p.13), Félix Klein percebeu que se considerasse esses pontos antípodas como sendo um único ponto, então a esfera passaria a ser um modelo para a geometria de Riemman, já que o primeiro postulado teria sentido. Com esta alteração, a reta esférica (círculo máximo) e o plano esférico (superfície esférica) ganham um novo tratamento mesmo sendo idênticas suas correspondências, já que o círculo máximo tem infinitos pontos antípodas. Na prática, considera-se apenas um semicírculo que tem como extremos o mesmo ponto.

Deste modo, a geometria esférica não é uma geometria Elíptica. No entanto a esfera constitui-se em um modelo para a geometria Elíptica. E não será o único, pois qualquer elipsóide também poderá sê-lo.

Justamente pelo fato de parecer redundante, é importante notar que a esfera também constitui-se em um modelo da geometria esférica, e nada mais do que isso. Assim, é possível

[30] Duzentos anos antes de Menelau, Teodósio de Trípoli também apresentou um trabalho sobre a geometria esférica que apresentava teoremas análogos aos dos Elementos de Euclides.

vislumbrar a geometria esférica em outras superfícies assim como é possível criar um modelo da geometria euclidiana em uma pseudo-esfera. No começo do século passado, o matemático George Halsted analisou um artigo de Divulgação Científica que deixava margem para uma possível confusão entre modelo e geometria e então ele ressalta que

> a Euclidean plane can be represented by a surface in Bolyai space, the theorems of Euclidean geometry find their realization as surface theorems in non-Euclidean space, where the geodesic geometry is that of Euclidean straight lines in a Euclidean plane[31].
>
> (HALSTED, 1901, p.31)

Se se valoriza a grande revolução que a descoberta das geometrias não-euclidianas fez emergir, tem-se que evidenciar que não se entende por geometria as figuras que se pode visualizar em um determinado modelo. É necessário, portanto, que pelo menos as pesquisas acadêmicas evitem apresentar a confusão descrita e que garantam que seus leitores não sejam induzidos à mesma confusão.

Com o objetivo de ilustrar o tratamento dado ao sistema axiomático pelas pesquisas brasileiras voltadas ao ensino das geometrias não-euclidianas, escolheu-se fazer uma breve análise de duas dissertações de mestrado, uma que dê pouca ênfase ao sistema axiomático na aplicação das atividades e outra que o apresenta como pano de fundo em quase todas as atividades. Salienta-se que somente fato de apresentar pouca ou muita ênfase ao sistema axiomático não desmerece nem dá méritos à dissertação, ou seja, não descreve sua qualidade. Esta análise também busca compreender se educadores matemáticos priorizam a análise dos modelos geométricos e procuram geometrias que se adaptem a eles, ou escolhem as geometrias e procuram modelos que se adaptem a elas.

Percebeu-se que algumas dissertações aqui apresentadas tem como foco um contato do aluno ou futuro professor com uma geometria não-euclidiana considerada de "fácil acesso" e, por isso, escolhe-se a geometria esférica por esta utilizar uma figura bastante conhecida como como um modelo geométrico, por possuir modelos concretos fáceis de serem encontrados e manipulados, e por não apresentar muitas ideias novas em relação à geometria euclidiana sendo a diferença crucial aquilo que será chamado de reta e de plano. Como tais autores, explícita ou implicitamente, acreditam que o contato com uma geometria não-euclidiana possa reforçar conceitos da euclidiana, ajudando o aluno a ter um aprendizado significativo, é de se esperar que tais pesquisas não tenham como principal foco um tratamento axiomático da

[31] um plano euclidiano pode ser representado por uma superfície no espaço de Bolyai, os teoremas da geometria euclidiana podem ser verificados como teoremas de uma superfície em um espaço não-euclidiano, em que a geodésica é como uma linha reta no plano euclidiano (tradução nossa).

geometria, não sendo, portanto, um fator de surpresa a ausência de postulados da geometria esférica nas atividades que propõem. No entanto, apesar de explorar a geometria esférica, não apresentam os postulados desta geometria explicitamente em sua fundamentação teórica.

Reis (2006), por exemplo, que é uma autora que diferencia geometria esférica da elíptica, não apresenta em sua fundamentação em quais postulados a geometria esférica está baseada e se limita a dizer o que considera como ponto, como reta etc (p.43-47), no entanto discute esses postulados na descrição da aplicação de suas atividades. Mesmo explorando a geometria esférica, Reis se utiliza, com sucesso, do *software* de geometria dinâmica Cinderella[32], que não possui um tratamento da geometria esférica, e sim da geometria elíptica na visualização esférica (p.18,62). Logo, o *software* dá o mesmo nome aos pontos antípodas e "reflete" cada objeto construído no outro hemisfério. Evidentemente esta diferença não implica na qualidade das atividades e nem mesmo nos resultados obtidos, havendo apenas relatos da limitação do *software*, já que algumas tesselações da esfera não podem ser obtidas pelo programa (p.73-74). Esta questão é, portanto, puramente conceitual.

A autora, que aplicou suas atividades a alunos de Licenciatura em Matemática, relata uma discussão com os alunos sobre o fato de se utilizar uma representação da geometria elíptica para se estudar a geometria esférica. Os alunos ainda foram estimulados a comparar as geometrias elíptica e esférica. Reis discute o assunto de forma significativa, o que torna a ausência do termo *geometria elíptica* no título de sua dissertação um mistério.

Nas atividades propostas por Reis (2006), assim como a maioria das atividades propostas por outros autores, os participantes percebem que alguns postulados não são válidos na superfície esférica, e então, outro postulado deve valer. Esta ordem proposta na atividade é a mesma ordem que Euclides deu à sua geometria, procurando postulados válidos para o modelo que tinha.

Bonete (2000), outra autora já citada, não elege uma geometria não-euclidiana específica para sua pesquisa e, como já dito, aplica atividades introdutórias sobre o assunto com alunos de Licenciatura em Ciências. A autora, assim como Reis, tem o cuidado de descrever a esfera como um modelo da geometria de Riemann em sua fundamentação teórica, explorando as diferenças entre geometria e modelo geométrico.

No entanto, nem sempre a diferenciação citada é deixada explícita quando da aplicação das atividades com os futuros professores. Em uma de suas atividades, os alunos

[32] A versão analisada é o Cinderella2, versão 2.6 build 1610, para MacOSX.

são orientados a traçar segmentos de retas euclidianas em uma folha de papel para que dois momentos de discussão pudessem ser feitos. No primeiro momento, a folha de papel é encurvada e os alunos são questionados se aquela linha continuava a ser uma reta e, no segundo momento, a mesma pergunta é feita, porém as extremidades do papel são justapostas de modo que a folha forme visualmente um cilindro (2000, p.188-196), pretendendo assim, discutir a ideia de reta euclidiana e geodésica.

Após a primeira atividade, os alunos foram conduzidos a perceber que a deformação na folha de papel não altera a propriedade de que aquela linha descreve o menor caminho entre suas extremidades. Porém, a mesma discussão não é relatada em relação à segunda atividade, que analisava a superfície cilíndrica. Sabe-se que um segmento traçado em um retângulo nem sempre representará o menor caminho entre suas extremidades quando as bordas deste retângulo forem unidas, formando uma superfície cilíndrica.

No final da primeira atividade, "perguntou-se o que dá a idéia de reta" (BONETE, 2000, p.189). Evidentemente a autora se refere à ideia de reta euclidiana no plano euclidiano, o que é óbvio pelo contexto, mas não deixa claro em seu texto se tal diferenciação foi feita com os estudantes durante a aplicação da atividade. Ao contrário, na análise realizada pelos alunos que é apresentada, eles se referem de forma genérica às "retas sobre diferentes superfícies" que é o nome da atividade proposta. Segundo a autora, no final da atividade os alunos entenderam que "uma linha que não se desvia nem para a esquerda e nem para a direita ou que seja o menor caminho entre dois pontos dá idéia de reta" (p.196). Assim, dependendo da atenção dedicada ao assunto pela pesquisadora, os participantes poderiam construir um conceito não condizente ao conhecimento matemático que ser quer construir, pois em determinados modelos geométricos uma reta pode sim se desviar para a direita ou para a esquerda segundo a nossa percepção visual.

Bonete segue uma postura construtivista (p.10), o que fundamenta algumas de suas opções na aplicação das atividades e que revela sua preocupação em ter como ponto de partida o conhecimento do estudante. A autora, provavelmente por conta de sua base teórica, se permite utilizar termos que não são rigorosamente exatos para se aproximar do conhecimento do aluno. Em certo momento, afirma que com

> o intuito de provocar perguntas a respeito da parte histórica dessas geometrias, colocou-se que, quando matemáticos, no século XIX, descobriram que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior ou menor que 180°, surgiu aí, a possibilidade de existência de outras geometrias, as geometrias não-euclidianas.
>
> (BONETE, 2000, p.202)

No entanto, a própria autora afirma que não foi o fato da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo não ser 180° em certas superfícies que gerou a possibilidade de se conceber outras geometrias (p.47). Esta redução da linguagem é condizente à busca do *nível de aprofundamento da mensagem* aqui discutido e se configura em um instrumento válido quando se quer tornar um conhecimento mais acessível, mas pode gerar uma falta de rigor do conceito científico discutido.

Mesmo estando clara a motivação pedagógica da pesquisadora, considera-se que Bonete conseguiria produzir as mesmas reflexões sem a imprecisão conceitual contida no excerto acima. Acredita-se que tal imprecisão reforça apenas a ideia que a geometria trata de descrever figuras de uma determinada superfície, sendo uma ideia insuficiente para conduzir o estudante a entender que a geometria se caracteriza como uma estrutura axiomática que independe de modelos.

Na pesquisa citada há outros momentos que o texto, segundo esta análise, reforça a ideia acima. Tem-se outros exemplos com afirmações de igual teor quando a autora diz que "para Riemann, reta é o círculo máximo" (BONETE, 2000, p.205) e que "a definição de retas paralelas da geometria Euclidiana teve que ser modificada para retas que por mais que se prolonguem, em ambas as direções, mantêm sempre a mesma distância" (p.207). Sabe-se que Riemann tinha uma ideia mais ampla de reta e que a definição de paralelas não precisou sofrer tal alteração, visto que a proposição "retas paralelas são equidistantes" é equivalente ao 5° postulado de Euclides.

Assim, apesar das ricas atividades propostas por Bonete terem proporcionado sucesso aos seus objetivos (p.209), um impacto relevante da descoberta das geometrias não-euclidianas sobre a história do conhecimento científico não teve a sua merecida homenagem.

A redução conceitual na diferenciação de modelo de geometria e de geometria não aparece somente em pesquisas que envolvem a geometria esférica. Tem-se como exemplo a pesquisa de Rossini, dedicada ao ensino de geometria hiperbólica, que faz o seguinte questionamento aos participantes: "Observando o disco de Poincaré, como você definiria uma reta na geometria hiperbólica?" (2010, p.94). Apesar da fundamentação teórica de seu trabalho não permitir confusão nos conceitos geométricos em questão, a pergunta, da maneira como foi formulada, poderia reforçar a falha ideia de que o modelo de Poincaré é a própria geometria hiperbólica e, mais ainda, de que existe definição de reta. Vale ressaltar que não há deméritos à pesquisa, visto que em atividades posteriores um maior rigor é evidente.

Embora trabalhar a ideia de modelo geométrico e de sistema axiomático não estejam entre os objetivos principais da maioria das pesquisas analisadas, ficou-se evidenciado que o rigor na apresentação destas ideias não é uma constante.

Conclui-se que as atividades que procuram enfatizar uma comparação entre as geometrias normalmente são insuficientes para gerar um conflito cognitivo sobre a própria concepção de geometria. Em outras palavras, conhecer representações e teoremas de mais de uma geometria não implica compartilhar da ideia de que a geometria consiste em um sistema axiomático independente de modelos. Além disso, ficou claro que normalmente os pesquisadores escolhem o modelo de geometria para depois trabalhar a geometria, e não o contrário.

4.5. AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS PARA O PÚBLICO NÃO ESCOLAR

Como já exposto, apenas uma das pesquisas consultadas tratam diretamente do ensino das geometrias não-euclidianas para o público não escolar. Assim, para compreender melhor como o ensino deste tópico para este público pode ser promovido, buscou-se pesquisas e experiências que colaboram ou colaboraram para sua popularização, mesmo que não explicitem intenção educacional, e aspectos que são citados em trabalhos relacionados à educação formal e que podem ser estendidos para a não-formal.

O professor dinamarquês Vagn Lundsgaard Hansen é um entusiasta na divulgação da Matemática e faz algumas reflexões sobre a possibilidade de se apresentar conceitos matemáticos para um público qualquer. Afirma, por exemplo, que citar obras artísticas ou literárias é uma forma de se apresentar a Matemática em conversas descontraídas com pessoas leigas no assunto sem que o tema seja imediatamente taxado como incompreensível e relegado a círculos de especialistas da área. Além disso, para ele, quando se apresenta conceitos matemáticos para um público qualquer, é importante que as estruturas abstratas sejam relacionadas com manifestações concretas da Matemática (HANSEN, 2002, p.886).

Um outro ponto ressaltado por Hansen e que os educadores matemáticos podem utilizar é o que ele chama de elemento de surpresa. A Matemática pode ser utilizada para comprovar ou explicar fatos contra-intuitivos e, desta forma, causar uma impressão duradoura no público. Para ilustrar este elemento de surpresa, fala a respeito do curioso fato de que se fosse possível colocar uma corda sobre a linha do equador, bastaria aumentar seu comprimento em 2π metros (um pouco mais de 6 metros) para elevar a corda a um metro

acima da superfície[33], fato este que é quase inacreditável se apenas a intuição for considerada (p.886). A figura abaixo representa o fato descrito.

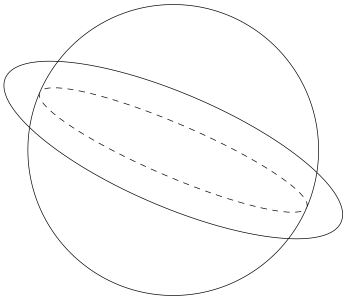


Figura 23: Raio da Terra

Em seu artigo, Hansen elencou alguns assuntos matemáticos que são potentes na sensibilização de um público qualquer. Dentre estes assuntos, afirma que

> questions about geometries alternative to Euclidean geometry easily arise in philosophical discussions on the nature of space an in popularizations of physics. It is difficult material to disseminate, but still, one can come far by immediately incorporating a concrete model of a non-Euclidean geometry [...].[34]
>
> (HANSEN, 2002, p.891)

Assim, as geometrias não-euclidianas assumem, de acordo com Hansen, um posto entre assuntos matemáticos que podem ser apresentados ao público. O autor explora em algumas outras obras suas o disco de Poincaré sendo que em um de seus trabalhos discute com certa profundidade as diferenças entre as pavimentações dos planos hiperbólico e euclidiano com polígonos regulares e congruentes[35]. Segundo o autor, a exploração do disco de Poincaré foi "successfully been introduced in Denmark at the upper high-school level"[36] (2002, p.892). Em outro trabalho, voltado para auxiliar na formação do professor de Matemática, o autor se dedica a apresentar o disco de Poincaré juntamente com aspectos históricos do surgimento das geometrias não-euclidianas (HANSEN, 1997).

Há autores que não têm a mesma intenção educacional que Hansen, mas que também se dedicam a pesquisar o tema. Linda Henderson (1983) publicou um amplo trabalho em que analisa a influência das geometrias não-euclidianas e do conceito de quarta dimensão na arte

---

[33] Seja a Terra uma esfera, c o comprimento da linha do equador e r o raio da Terra, então $r = c \div 2\pi$. Se aumentarmos o comprimento da linha do equador em 2π metros, então o novo comprimento C será dado por $C = c + 2\pi$. Mas, sendo R o novo raio, sabemos que $R = C \div 2\pi$, então $R = (c + 2\pi) \div 2\pi \Rightarrow R = c \div 2\pi + 1 \Rightarrow R = r + 1$.

[34] questões sobre geometrias alternativas à geometria euclidiana surgem facilmente em discussões filosóficas a respeito da natureza do espaço e na popularização da Física. É um material difícil de ser disseminado, mas ainda assim, pode se chegar ao ponto de imediatamente incorporar um modelo concreto de uma geometria não-euclidiana. (tradução nossa)

[35] HANSEN, V. L. **Shadows of the Circle**: Conic Sections, Optimal Figures and Non-Euclidean Geometry. Singapore: World Scientific, 1998.

[36] introduzido com sucesso nos anos finais do Ensino Médio dinamarquês. (tradução nossa)

moderna, em especial no Cubismo. Esta obra é dedicada a um público de não especialistas em Matemática e não escolar e, portanto, se configura em um bom exemplo de debate sobre tais conhecimentos matemáticos em outros círculos. Além disso sua fundamentação teórica abarca muitos fatos históricos relacionados não só ao surgimento das geometrias não-euclidianas, mas principalmente aos seus primeiros divulgadores, o que faz sua obra se tornar de referência a estudos relacionados ao tema.

Henderson estudou profundamente as obras e as influências do artista francês Marcel Duchamp (1882-1968). Na obra aqui analisada (HENDERSON, 1983), cita numerosas vezes o artista, mas também possui uma produção totalmente voltada para este[37]. A autora afirma que Duchamp e o próprio Cubismo foram influenciados pelas ideias relacionadas às novas geometrias e à quarta dimensão espacial, embora afirme que a interpretação de Einstein de que a quarta dimensão seria o tempo em vez do espaço tenha colocado um fim à época em que artistas, escritores e músicos acreditavam poder expressar dimensões espaciais superiores (HENDERSON, 1983, p.xix). No entanto, a geometria que mais teria influenciado Duchamp teria sido a de Riemman.

A autora relaciona diversos autores/artistas que foram influenciados pelos conceitos das geometrias não-euclidianas e de dimensões superiores para a produção de suas obras. Segundo Henderson, as seguintes pessoas se interessaram, mais cedo ou mais tarde, pelo tema: Dostoiévski, H. G. Wells, Oscar Wilde, Joseph Conrad, Ford Madox Ford, Marcel Proust, Gertrude Stein e os músicos Alexander Scriabin, Edgar Varèse e George Anteil.

Sobre a influência das geometrias não-euclidianas e das dimensões superiores no Cubismo, a autora afirma que era muito comum associar a Teoria da Relatividade de Eisntein como a primeira influência de outras geometrias e dimensões superiores sobre este movimento artístico, mas no entanto, Henderson e John Adkins Richardson perceberam na década de 70 que o termo *quarta dimensão* havia sido utilizado independentemente da Teoria da Relatividade (HENDERSON, 1983, p.xx) por outros autores, o que justificaria outras influências anteriores. Dentre estes autores, figuram o físico e astrônomo alemão Zöllner (1834-1882), que tentou explicar a mediunidade espírita com a possível existência de outras dimensões, e H. G. Wells (1866-1946), que escreveu *A Máquina do Tempo,* antecipando de certa forma os trabalhos de Minkovsky sobre o *continuum* espaço-tempo (1983, p.9)

[37] HENDERSON, Linda Dalrymple. **Duchamp in Context**: Science and Technology in the *Large* Glass and Related Works. New Jersey: Princeton University Press, 1998.

A própria história do surgimento das novas geometrias envolve um processo de Divulgação Científica. Poincaré, entre o final do século XIX e começo do XX, se empenhou em divulgar essas novas geometrias em outros círculos de pesquisadores, que não o dos matemáticos e físicos. Embora esta atividade de Poincaré seja classificada como de disseminação científica se as definições de Pasquali forem consideradas, aqui se entende que é um processo de divulgação, pois especialmente os filósofos que eram receptores das mensagens de Poincaré se constituíam como um público leigo[38], sendo apenas necessário que o nível de aprofundamento da mensagem fosse ajustado a este público. A obra de Poincaré com o intuito de divulgar essas novas geometrias não foi somente dedicada a estes filósofos, mas também a interessados em parte dessa discussão (HENDERSON, 1983). Henderson afirma que Poincaré, "more than any other individual, was responsible for the popularization of non-Euclidean geometry in Paris during the first decade of the twentieth century"[39] (1983, p.15).

Outro nome lembrado por Henderson como um grande divulgador das geometrias não-euclidianas foi o de Hermann Helmholtz, que também aparece na bibliografia de Sommerville (1911). Em um de seus artigos mais célebres (HELMHOLTZ, 1876), escreve para um público que não é especialista em Matemática e discute a ideia de axioma. Neste artigo intitulado *A Origem e o Significado dos Axiomas Geométricos*, Helmholtz cumpre o que se propõe a discutir e instiga o leitor a refletir sobre questões que tratam da essência do sistema axiomático. Pergunta, por exemplo, qual seria a origem de uma verdade inquestionável incapaz de se provar em uma ciência em que absolutamente tudo é uma conclusão fundamentada e também questiona se os axiomas são apenas um engenho dos matemáticos para tentar explicar aquilo que ainda não conseguiram demonstrar (1876, p.302).

É este tipo de questionamento, além de muitas analogias, que Helmholtz lança mão para cativar e convidar o leitor a se aventurar no mundo da Matemática e que configura seu artigo em um bom artigo de Divulgação Científica, já que tenta abordar um assunto que na época estava sendo discutida na academia em uma linguagem bem mais acessível para outro público. Em relação às analogias, Helmholtz convida seus leitores a imaginarem seres que vivem na superfície de uma esfera, e assim explora alguns conceitos intrínsecos da geometria esférica, em seguida, os convida novamente a pensarem nestes seres bidimensionais mas que

[38] Para Pasquali, uma mensagem que é destinada a um grupo de especialistas de outra área se enquadra em disseminação científica.
[39] mais que qualquer outra pessoa, foi responsável pela popularização das geometrias não-euclidianas em Paris durante a primeira década do século XX (tradução nossa).

moram em um mundo com a forma de um ovo, assim explora conceitos relacionados a geometrias de curvaturas que não são constantes (1876, p.304-306).

No ano de 1880 foi publicada uma obra que, segundo Henderson (1983), se tornaria referência não só para matemáticos, mas também para os divulgadores científicos. W. I. Stringham publicou *Regular Figures in n-Dimensional Space* (1880). O espaço n-dimensional é aquele que possui *n* dimensões.

Nesta obra, Stringham apresenta esboços de projeções dos chamados hipersólidos em um espaço tridimensional e tais esboços podem ser consultados no ANEXO. Permitindo termos informais, Stringham desenhou as sombras tridimensionais de sólidos com mais de três dimensões.

Salienta-se que as dimensões a que Stringham se refere são aparentemente espaciais, ou seja, não incorporam a ideia de que o tempo seria uma outra dimensão. Segundo Henderson, "the first published suggestion that time be considered a fourth dimension was apparently made by d'Alembert in his 1754 article on 'Dimension' in the *Encyclopédie* edited by Diderot and himself"[40] (HENDERSON, 1983, p.9, grifo da autora)

Apenas quatro anos mais tarde da publicação de Stringham, Edwin Abbot publicou seu livro intitulado Flatland[41], em que discute um mundo de duas dimensões onde vivem seres também de duas dimensões que não conseguem perceber uma possível terceira dimensão até que um ser tridimensional começa a interagir com um habitante de Flatland. A obra se constitui em analogia com o nosso mundo tridimensional, o que torna impossível percebermos uma quarta dimensão, caso ela exista.

Flatland é uma obra de Divulgação Científica que tem elevado potencial para um processo educacional, pois se utiliza do recurso didático de analogias e de redução da linguagem para atingir um público leigo. Não se pode, entretanto, partir do princípio que tal livro é uma obra de fácil leitura para todos os públicos, pois há trechos em que se utiliza de termos matemáticos, explora conceitos do plano e faz analogias que somente pessoas com uma certa maturidade em alguns conceitos geométricos teriam facilidade de compreender em uma primeira leitura. Portanto, o *nível de aprofundamento da mensagem* deste livro é focado em um público que possui certos conhecimentos geométricos.

---

[40] a primeira menção publicada de que o tempo poderia ser considerado como a quarta dimensão foi aparentemente feita por d'Alembert em seu artigo 'Dimensão', em 1754, na *Encyclopédie* editada por ele e por Diderot.

[41] O título original é **Flatland: A Romance of Many Dimensions.** Planolândia é uma tradução bastante aceita para o português.

O início da divulgação das geometrias não-euclidianas e da Teoria da Relatividade no Brasil foi marcado pela figura do matemático Amoroso Costa, nas primeiras décadas do século XX. Era um cientista dedicado a divulgar os novos conhecimentos científicos de seu tempo não só a acadêmicos, mas também ao grande público (EISENSTAEDT; FABRIS, 2004). Em relação à divulgação da Teoria da Relatividade, talvez tenha sido o primeiro a publicar um artigo a respeito no Brasil[42] (MASSARANI, 1998, p.56).

Amoroso Costa, juntamente com um grupo pequeno de cientistas, participou "intensamente de várias atividades que começaram a traçar um caminho para o desenvolvimento da pesquisa básica e para a difusão mais ampla da ciência no Brasil" (MASSARANI, 1998, p.51) e ajudou a impulsionar na década de 1920, no Rio de Janeiro, um período de muitas iniciativas de Divulgação Científica, incluindo o uso de jornais e revistas, e conferências abertas ao público. Deste grupo de cientistas, talvez Amoroso Costa tenha sido o mais expressivo (MASSARANI, 1998, p.55).

As palestras ministradas por Amoroso Costa ganharam grande notoriedade e dentre tais palestras estavam uma que versava sobre as geometrias não-euclidianas e outra intitulada *As ideias fundamentais da matemática*, que resultou em um livro que se encontra nas referências bibliográficas desta dissertação.

Os EUA também tiveram um grande nome na divulgação das geometrias não-euclidianas no país: George Bruce Halsted (1853-1922). Embora sua principal atuação não fosse voltada para divulgar as novas geometrias ao grande público, influenciou quase todas as ações de Divulgação Científica que o sucedeu e divulgou de maneira exemplar o assunto na academia. Em uma pequena biografia publicada na revista Science no ano de sua morte, Arthur M. Humphreys o define como "an ardent devotee of non-Euclidean geometry"[43] (1922).

Halsted traduziu para o inglês obras clássicas sobre as geometrias não-euclidianas, como as de Lobachevsky, de Bolyai, de Saccheri e de Poincaré e escreveu um livro sobre geometria elementar que já levava em consideração os axiomas propostos por Hilbert. Halsted ainda publicou mais de 90 artigos no periódico *American Mathematical Monthly* (O'CONNOR; ROBERTSON, 2005) e outros na revista Science.

---

[42] Artigo publicado em O Jornal, em 12 de novembro de 1919 que comentava sobre as observações realizadas em Sobral – CE que tinham por objetivo confirmar previsões feitas por Einstein.
[43] um devoto ardente da geometria não-euclidiana. (tradução nossa)

Em *American Mathematical Monthly* escreveu uma série de artigos intitulados *Non-Euclidean Geometry: Historical and Expository* que foram publicados como se fossem pequenos capítulos de um livro. Nestes artigos explorava conceitos das geometrias e também aspectos históricos, mas eram evidentemente voltados para matemáticos.

Em um dos artigos publicados no referido periódico, Halsted analisa justamente a popularização das geometrias não-euclidianas nos EUA no início do século XX (HALSTED, 1901). Mais especificamente, o matemático se refere a um artigo intitulado *Geometry: Ancient and Modern*[44] de Edwin S. Crawley, publicado na revista *Popular Science Monthly*[45] em janeiro de 1901.

Halsted menciona o artigo de Crawley de forma muito respeitosa e afirma que o autor "delightfully helps the cultured reader to get his orientation in this subject for a start into the new century[46]" (1901, p.31). No entanto, discorre sobre alguns aspectos de seu texto que não se enquadram aos "novos" conceitos da Matemática. O principal deles é que o autor ainda não havia incorporado a ideia de que o plano euclidiano é uma criação da mente humana e que se pode escolher a geometria que for mais interessante para seus propósitos. Assim, tem-se um exemplo de como Halsted influenciou os artigos de divulgação.

Halsted também chegou a escrever artigos de divulgação no periódico *The Monist*, embora a quantidade de artigos com este viés não tenha sido grande. Em um dos artigos consultados é nítido o esforço do autor em convidar pessoas a leitura de seu artigo, começando pelo título que era *Easy Non-Euclid*[47] e pelas referências literárias que incluem a obra de Dante Alighieri (HALSTED, 1909). Já em outro artigo, afirma que assim como o princípio da conservação de energia, as geometrias não-euclidianas se constituem um conhecimento que mudou para sempre a ciência (1894), utilizando portanto, as analogias para se fazer inteligível ao leitor.

Voltando às Artes, um nome não pode deixar de ser citado: Maurits Cornelis Escher (1898-1972). O artista holandês, que buscava fazer representações impossíveis, explorava as pavimentações do plano. As limitações da representação tridimensional no plano viraram possibilidades de novos mundos em suas mãos.

---

[44] Geometria: Antiga e Moderna. (tradução nossa)

[45] Esta revista de Divulgação Científica, uma das mais antigas do mundo, teve sua primeira publicação brasileira em 2011. Poincaré chegou a publicar artigos voltados para o público leigo nesta revista.

[46] deliciosamente ajuda o leitor culto a obter sua orientação neste tema e se inserir no novo século. (tradução nossa)

[47] Geometria não-euclidiana fácil. (tradução nossa). Sobre o termo *Euclid,* o autor afirma que na Inglaterra é sinônimo de geometria euclidiana.

Inspirado em uma figura que encontrou em um livro de Coxeter, Escher percebeu que o modelo do disco de Poincaré fornecia muitas possibilidades para a representação do infinito, assim o artista começou uma série de obras que exploravam o modelo de geometria hiperbólica. A primeira obra da série, *Limite Circular I*, de 1958, já apresentava a essência do que o artista queria explorar, e *Limite Circular III*, de 1959, se tornou uma das obras mais conhecidas de Escher e é a sua obra, que explora a pavimentação do disco de Poincaré, mais impactante (ERNST, 2007). Mesmo sem ser seu objetivo, suas obras agora podem ser o ponto de partida para os educadores matemáticos que quiserem ensinar as geometrias não-euclidianas.

Estes trabalhos das mais variadas áreas que envolvem as geometrias não-euclidianas apresentam padrões convergentes às ideias da Divulgação Científica, o que sugere que tais ideias são essenciais para obter o impacto desejado no público. Assim, é possível considerar que adotando aspectos da Divulgação Científica no ensino das geometrias não-euclidianas para um público não escolar, haverá grandes chances de se promover um aprendizado significativo.

Algumas das ideias presentes nestes trabalho são o uso de analogias, menção a obras artísticas ou literárias, adaptação da linguagem para se aproximar do *nível de aprofundamento da mensagem* requisitado, materiais concretos, figuras e desenhos, elementos de surpresa ou fatos curiosos, entre outros recursos. Os problemas comuns à Divulgação Científica também aparecem, principalmente a imprecisão conceitual gerada pela adaptação da linguagem.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando que o principal objetivo desta pesquisa é identificar quais são as possibilidades e características de ensino das geometrias não-euclidianas para um público qualquer, sob a perspectiva da Divulgação Científica, apresenta-se aqui um retrospecto do caminho percorrido para atingir tal meta.

Percebeu-se rapidamente que, além do ensino das geometrias não-euclidianas e da Divulgação Científica, havia ainda uma terceira área que permearia este trabalho, que é a educação não-formal. Buscou-se portanto, obras de referência em cada uma destas três áreas que pudessem contribuir para a pesquisa.

Ao analisar diversos autores que já investigaram a educação não-formal, percebeu-se que este termo é bastante controverso, mas mesmo assim optou-se por adotá-lo. Porém, adotou-se também uma definição que permitisse que o ensino não-formal ocorresse simultaneamente ao ensino formal, o que de certa forma atende a sugestão de Trilla (2008), que propõe intensificar as interferências entre a educação formal, a não-formal e a informal.

As relações entre a Divulgação Científica e a Educação ficaram bastante evidentes. Tanto especialistas em Divulgação Científica acreditam que há na área um viés educacional, como especialistas em educação pensam que a mesma pode ser potencializada com a Divulgação Científica, o que nos revela uma colaboração recíproca entre as áreas. No entanto há os divulgadores que atrelam a Divulgação Científica à ideia de que ela deve ser necessariamente extraescolar, o que associa a Divulgação Científica à educação não-formal sob a visão de não haver relação direta com a formal, visão esta que não é adotada neste trabalho.

Sobre o ensino das geometrias não-euclidianas, verificou-se que há defensores da inserção do assunto no currículo da escola de educação básica e aqueles que acreditam que tal inserção não é muito apropriada (DOUADY, 1998). O consenso, no entanto, está ao admitir o valor do surgimento das geometrias não-euclidianas para o conhecimento matemático, que abalou a concepção de verdade matemática e o próprio conceito de geometria. Viu-se também que há esforços institucionais que defendem abordagens das geometrias não-euclidianas na educação básica, sendo que os esforços mais relevantes são as menções feitas sobre o assunto em orientações curriculares, como os PCNs no Brasil e do *National Council of Teachers of Mathematics* dos EUA, e a inserção sugerida pela Secretaria da Educação do Estado do

Paraná no currículo, que embora seja motivo de controvérsia, pode estar na vanguarda de um movimento mais amplo.

As pesquisas brasileiras em Educação Matemática que exploram o ensino das geometrias não-euclidianas, que por sinal têm crescido em número nos últimos anos, e que apresentam estudos de caso, apontam que conceitos destas geometrias estão ao alcance de diversos públicos. Foram focos de estudos de caso professores de Matemática, estudantes de licenciatura em Ciências e em Matemática, estudantes de Engenharia, estudantes da educação básica (dos Ensinos Fundamental II e Médio) e professores universitários vinculados à formação inicial e continuada de professores.

A maior parte das pesquisas que promoveram algum tipo de experiência de ensino das geometrias não-euclidianas apresentaram alguns pontos em comum, a saber:

- Partem do pressuposto explícito ou implícito que o aprendizado das geometrias não-euclidianas colabora para um aprendizado significativo da euclidiana e mobilizam conceitos matemáticos que extrapolam a geometria.
- Se concentram em atividades comparativas entre alguma geometria e a euclidiana. É nítida a preferência pela geometria esférica.
- Os materiais concretos e *software* de geometria dinâmica são normalmente adotados para estas experiências. É consenso que estes recursos são potentes em auxiliar no aprendizado das geometrias e, por isso, assumem papéis centrais nestas pesquisas.
- Os participantes de estudos de caso que já concluíram a educação básica normalmente se mostram surpresos ao descobrirem que além de outras geometrias poderem ser concebidas, esta informação lhes foi omitida durante suas respectivas trajetórias escolares.
- Mesmo sem menção a Krause, os recortes da geometria escolhida apresentam os três aspectos por ele sugeridos (apresentam uma estrutura axiomática próxima à de Euclides, possuem aplicações importantes e são inteligíveis ao público escolhido)
- As atividades normalmente reforçam a ideia arraigada no senso comum que a geometria é a arte de descrever o espaço físico. Já a geometria que é uma estrutura lógica e invenção arbitrária da mente humana não aparece como um conceito central a ser discutido.

Considerando tanto esses estudos de caso como outras pesquisas e/ou publicações que envolvem o tema, percebe-se que, em linhas gerais, há bastante aproximação da maneira como o ensino das geometrias não-euclidianas é proposto e as ideias relacionadas à Divulgação Científica. Krause (1986), por exemplo, apresenta a geometria do táxi[1] com base em uma ideia de redução conceitual e na adaptação da linguagem (ao se aproximar da geometria euclidiana, que faz parte do repertório dos estudantes).

Hansen (2002) também propõe redução conceitual e adaptação da linguagem para o público receptor da mensagem. Discute a inserção do elemento de surpresa e de analogias como forma de causar algum impacto. Além disso, elenca as geometrias não-euclidianas como um assunto que pode despertar interesse de um público qualquer.

Porém, a Divulgação Científica propõe um desafio: como a redução conceitual quase sempre implica em uma imprecisão conceitual, todos que se utilizarem dos recursos que ela proporciona precisarão avaliar tal imprecisão, verificando se é ou não aceitável. O educador deve assumir que, em determinadas situações, não será possível e nem desejável garantir o pleno rigor científico.

Espera-se que os pontos comuns, citados acima, das pesquisas que envolvem estudos de caso sejam aspectos que tenham atenção em pesquisas futuras. Em especial, uma investigação sobre a possibilidade de aprofundamento da ideia de um sistema axiomático para um público de não-especialistas seria bem-vinda no cenário acadêmico brasileiro. Embora a hipótese da exploração de sistema axiomático ser muito complexa para este público pareça ser consistente, o que impossibilitaria um aprofundamento no assunto, não foi possível a partir das obras consultadas obter uma conclusão definitiva.

Por fim, acredita-se que esta pesquisa possa contribuir para reflexões posteriores sobre o assunto e colaborar para a promoção do ensino das geometrias não-euclidianas e de seu significado para a Matemática e, de forma mais geral, para o conhecimento humano, independentemente de estarem ou não inseridas no currículo da escola de educação básica.

[1] Uma geometria que difere da euclidiana por sua métrica. A distância entre dois pontos distintos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ é definida por $d_{A,B} = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$.

6. REFERÊNCIAS

ADEODATO, S. **O Conceito de Jornalismo Científico**. São Paulo: ECA/USP, 1987.

ALVES, S.; SANTOS FILHO, L. C. Encontro com o mundo não euclidiano. **Revista do Professor de Matemática**, [S.l.], 78, p. 43-52, 2012.

AMOROSO COSTA, M. **As Idéias Fundamentaes da Mathematica**. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello & C., 1929.

BONETE, I. P. **As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, UNICENTRO / UNICAMP, Guarapuava - PR, 2000.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De Euclides às Geometrias Não Euclidianas. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 22, p. 37-51, 2010.

BONOLA, R. **Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development**. Traduzido por CARSLAW, H. S. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1912.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRITO, A. J. **As Geometrias Não-Euclidianas: Um Estudo Histórico-Pedagógico**. 1995. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Departamento de Metodoliga de Ensino, UNICAMP, Campinas, 1995.

BUENO, W. D. C. **Jornalismo Científico no Brasil: os compromissos de uma prática dependente**. 1984. 364 f. Tese (Doutorado)- Escola de Comunicações e Artes, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica: Uma Proposta Didática em Ambiente Informatizado**. 2004. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, São Paulo, 2004.

CALDATTO, M. E. **O Processo Coletivo de Elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a Inserção das Geometrias Não-Euclidianas**. 2011. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática)- Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2011.

COLOM CAÑELLAS, A. J. Continuidad y Complementariedad entre la Educación Formal y No Formal. **Revista de Educación**, Madrid, n. 338, p. 9-22, 2005.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COXETER, H. S. M. **Non-Euclidean Geometry**. 6ª Edition. Washinton: The Mathematical Association of America, 1998.

DOUADY, A. Space and Plane. In: MAMMANA, C. e VILLANI, V. (org.). **Perspectives the Teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. p.25-28.

EISENSTAEDT, J.; FABRIS, J. C. Amoroso Costa e o primeiro livro brasileiro sobre a Relatividade Geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, V. 26, n. 2, p. 185-192, 2004. Disponível em: < http://repositorio.ufes.br/bitstream/10/659/1/a14v26n2.pdf >. Acesso em: 13 jun. 2011.

ERNST, B. **O Espelho Mágico de Maurits Cornelis Escher**. Köln: Taschen, 2007.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Traduzido por BICUDO, I. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Traduzido por DOMINGUES, H. H. Campinas: Ed. UNICAMP, 2004.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. New York: W. W. Freeman and Company, 1994.

GUVEN, B.; BAKI, A. Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, 41, n. 8, p. 991-1013, 2010.

HALSTED, G. B. The Non-Euclidean Geometry Inevitable. **The Monist**, Vol. 4, n. 4, p. 483-493, 1894. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/27897177 >. Acesso em: 1 jul. 2012.

HALSTED, G. B. The Popularization of Non-Euclidean Geometry. **The American Mathematical Monthly**, [S.l.], Vol. 8, n. 2, p. 31-35, 1901. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/2968331 >. Acesso em: 2 abr. 2012.

HALSTED, G. B. Easy Non-Euclid. **The Monist**, Vol. 19, n. 3, p. 339-402, 1909. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/27900193 >. Acesso em: 1 jul. 2012.

HALSTED, G. B. Translator's Introduction. In: LOBACHEVSKI, N. (org.). **Geometrical Researches on the Theory of Parallels**. La Salle: Open Court Publishing Company, 1914.

HANSEN, V. L. The Dawn of Non-Euclidean Geometry. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Vol. 28, n. 1, p. 3-23, 1997. Disponível em: < http://dx.doi.org/10.1080/0020739970280102 >. Acesso em: 2 jun. 2012.

HANSEN, V. L. Everlasting Geometry. In: MAMMANA, C. e VILLANI, V. (org.). **Perspectives the Teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. p.9-18.

HANSEN, V. L. Popularizing Mathematics: From Eight to Infinity. **Proceedings of the ICM,** v. Vol. III, p. 885-895, 2002. Disponível em: < http://arxiv.org/pdf/math/0305019 >. Acesso em: 20 jul. 2011.

HELMHOLTZ, H. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms. **Mind**, Vol. 1, n. nº 3, p. 301-321, 1876. Disponível em: < http://www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/txt/Helmholtz/geo2e.pdf >. Acesso em: 19 maio 2011.

HENDERSON, L. D. **The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1983. ISBN 0-691-10142-6.

HERNANDO, M. C. **Teoria e Técnica do Jornalismo Científico**. Traduzido por MERCÊS, M. P. G. L. M. São Paulo: Departamento de Jornalismo e Editoração - ECA/USP, 1970.

HUMPHREYS, A. M. Geoge Bruce Halsted. **Science**, New Series, Vol. 56, n. 1441, p. 160-161, 1922. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/1648709 >. Acesso em: 1 jul. 2012.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, dezembro de 2004, n. 44, p. 11-42, 2004.

KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry**. New York: Dover Publications, Inc., 1986.

LÉNÁRT, I. Alternative Models on the Drawing Ball. **Educational Studies in Mathematics**, n. 24, p. 277-312, 1993.

LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere**. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

LOBACHEVSKY, N. **Geometrical Researches on The Theory of Parallels**. Traduzido por HALSTED, G. B. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1914.

LOBACHEVSKY, N. **Pangeometry**. Traduzido por PAPADOPOULOS, A. Zurique: European Mathematical Society, 2010.

MARQUEZE, J. P. **As Faces dos Sólidos Platônicos na Superfície Esférica: Uma Proposta para o Ensino-Aprendizagem de Noções Básicas de Geometria Esférica**. 2006. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, São Paulo, 2006.

MARTOS, Z. G. **Geometrias Não-Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental**. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2002.

MASSARANI, L. **A divulgação científica no Rio de Janeiro: algumas reflexões sobre a década de 20**. 1998. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Informação)- Instituto Brasileiro em C&T e Escola de Comunicação, UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. George Bruce Halsted. In: **The MacTutor History of Mathematics archive**, [S.l.]: JOC/EFR, 2005. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Halsted.html >. Acesso em: 1 jul. 2012.

O'LEARY, M. **Revolutions of Geometry**. Hoboken - NJ: John Wiley & Sons Inc., 2010.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEE/PR, 2008. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=98 >. Acesso em: 17 jul. 2011.

PATAKI, I. **Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar**. 2003. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, São Paulo, 2003.

PAVAN, C. Divulgação Científica e ensino: funções. In: KREINZ, G.;PAVAN, C*., et al* (org.). **Feira de Reis: cem anos de divulgação científica no Brasil**. São Paulo: NJR-ECA/USP, 2007. p.69-82.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica**. 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UNICAMP, Campinas, 1989.

PETIT, J. P. **As Aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PRESTES, I. C. R. **Geometria Esférica: Uma Conexão com a Geografia**. 2006. 210 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), PUC-SP, São Paulo, 2006.

REIS, J. D. A. D. S. **Geometria Esférica por Meio de Materiais Manipuláveis**. 2006. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2006.

RIBEIRO, R. A. **Divulgação Científica e Ensino de Física: intenções, funções e vertentes**. 2007. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências)- Instituto de Física, Instituto de Química, Instituto de Biociências e Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2007.

ROSENFELD, B. A. **A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space**. Traduzido por SHENITZER, A. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988.

ROSSINI, M. A. P. **Um Estudo Sobre o Uso de Régua, Compasso e um Software de Geometria Dinâmica no Ensino da Geometria Hiperbólica**. 2010. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2010.

SACCHERI, G. **Euclides Vindicatus**. Traduzido por HALSTED, G. B. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1920.

SANTOS, T. S. **A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica**. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática)- Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2009.

SIRVENT, M. T. et al. Revisión del Concepto de Educación No Formal. **Cuadernos de Cátedra de Educación No Formal - OPFYL**, Buenos Aires, 2006. Disponível em: < http://www.unesco.org.uy/educacion/fileadmin/educacion/ >. Acesso em: 17 maio 2011.

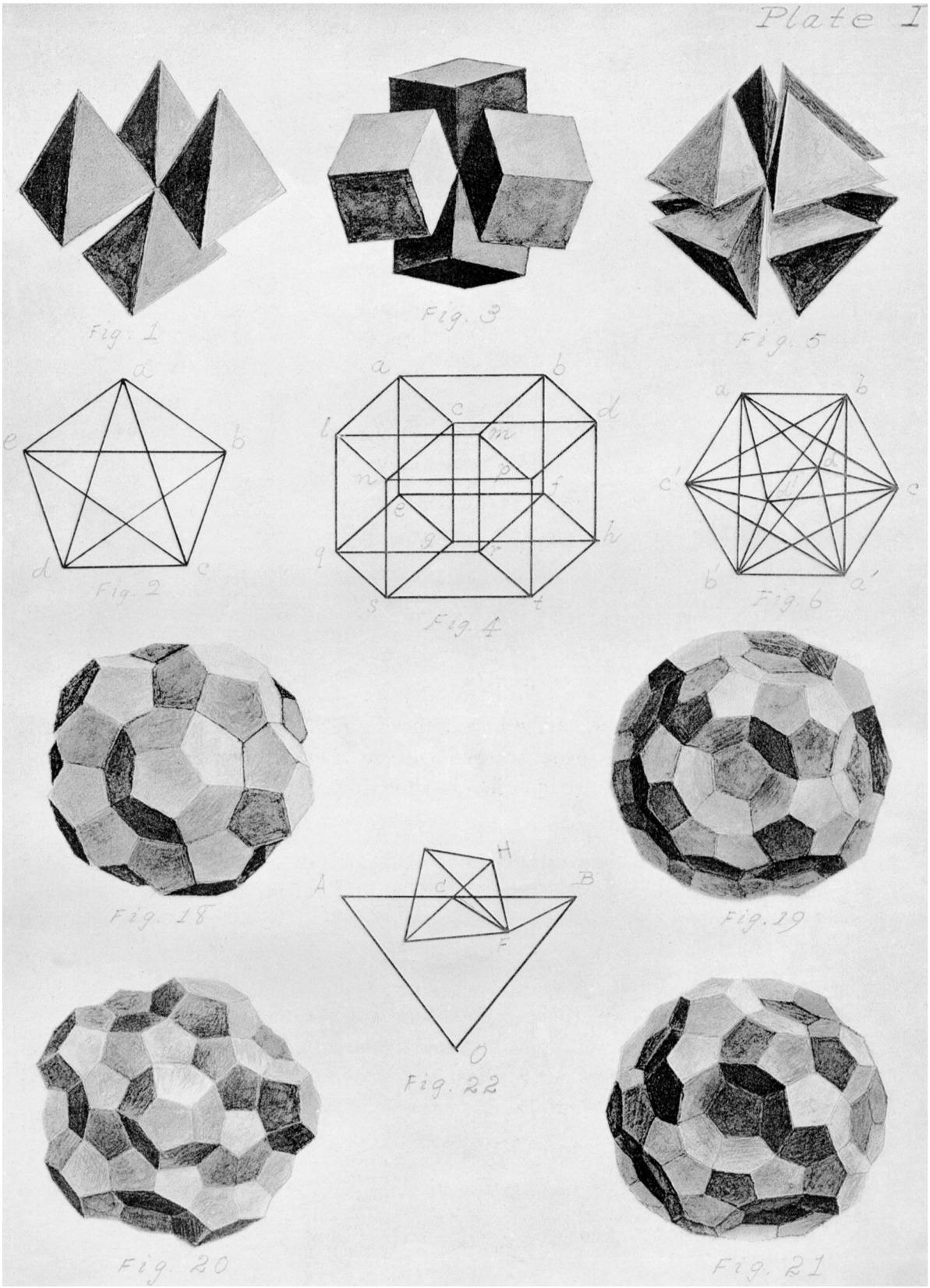
SOMMERVILLE, D. M. Y. **Bibliography of Non-Euclidean Geometry: including the Theory of Parallels, the Foundations of Geometry and Space of n Dimensions**. London: The University of St. Andrews, 1911. Disponível em: < http://www.archive.org/download/bibliographyofno00sommuoft/ >. Acesso em: 17 fev. 2009.

SOUZA, A. C. C. Aspectos Históricos das Geometrias não-Euclidianas. **Bolema**, Rio Claro, p. 75-84, 1993.

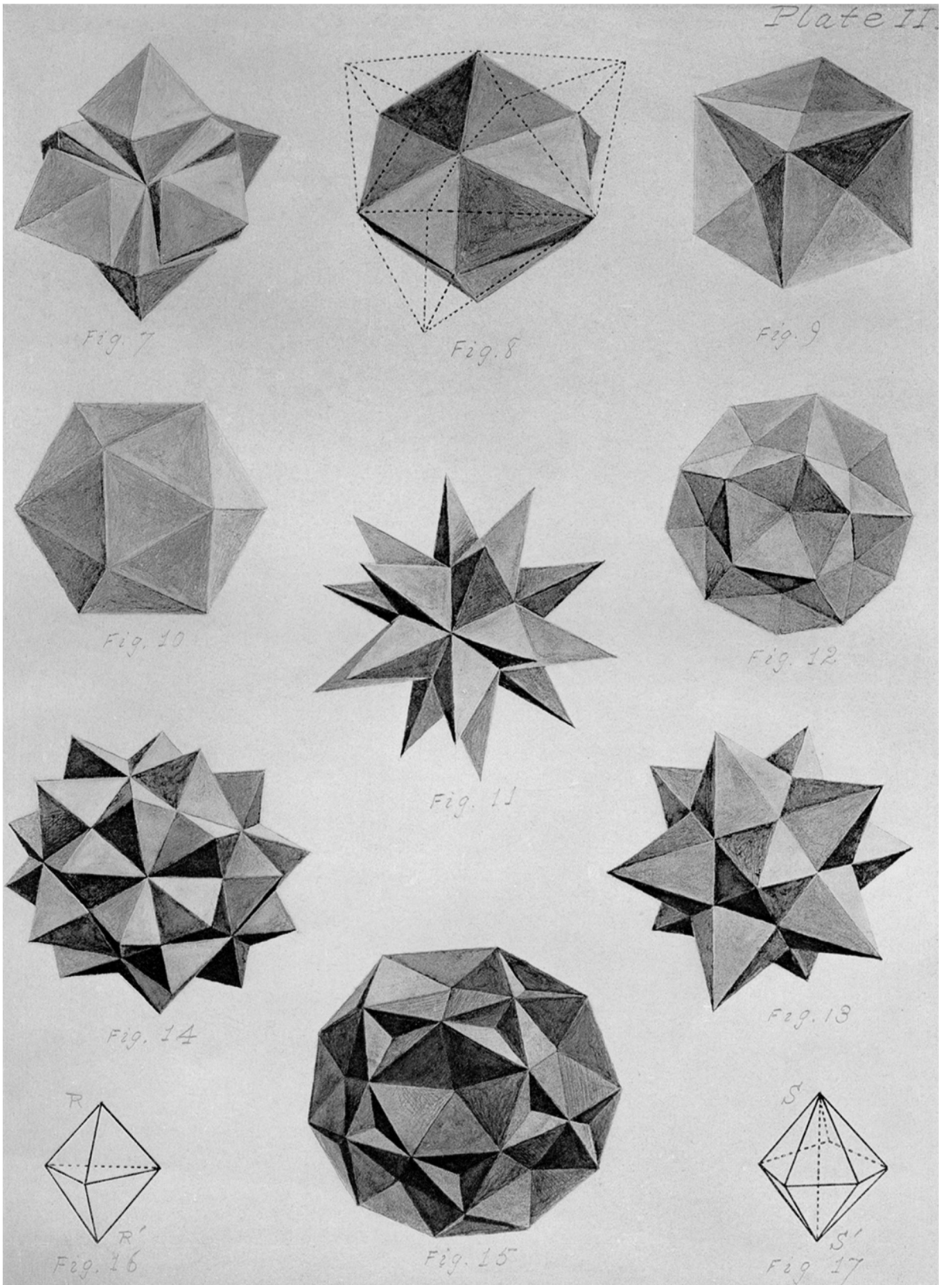
STRINGHAM, W. I. Regular Figures in n-Dimensional Space. **American Journal of Mathematics**, Vol. 3, n. 1, p. 1-14, 1880. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/2369441 >. Acesso em: 22 jun. 2011.

TRILLA, J. A Educação Não-Formal. In: ARANTES, V. A. (org.). **Educação Formal e Não-Formal: pontos e contrapontos**. São Paulo: Summus, 2008.

7. ANEXO



Extraído de: STRINGHAM, W. I. Regular Figures in n-Dimensional Space. **American Journal of Mathematics**, Vol. 3, n. 1, p. 15, 1880.



Extraído de: STRINGHAM, W. I. Regular Figures in n-Dimensional Space. **American Journal of Mathematics**, Vol. 3, n. 1, p. 16, 1880.