**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

LUCIANA GASTALDI SARDINHA SOUZA

**Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade
matemática na criação musical**

São Paulo

2012

LUCIANA GASTALDI SARDINHA SOUZA

**Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade
matemática na criação musical**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
da Faculdade de Educação da Universidade de
São Paulo como parte das exigências para a
obtenção do título de Doutora em Educação.

Linha de pesquisa: Ensino de Ciências e
Matemática

Orientador: Prof. Oscar João Abdounur

São Paulo

2012

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte

Catálogo na Publicação

Serviço de Biblioteca e Documentação

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

-
- 375.75 Souza, Luciana Gastaldi Sardinha
- S729a Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical / Luciana Gastaldi Sardinha Souza; orientação Oscar João Abdounur. São Paulo: s.n., 2012.
- 298 p.: il., grafs. tabs. anexos.

Acompanha 1 CDRom

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo)

1. Música – Estudo e Ensino 2. Matemática 3. Interdisciplinaridade 4. Composição musical 5. Análise musical I. Abdounur, Oscar João, orient.

Nome: SOUZA, Luciana Gastaldi Sardinha

Título: Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo como parte das exigências para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Aprovado em: _____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oscar João Abdounur

Julgamento: _____

Instituição: IME/EDM - FEUSP

Assinatura: _____

Profa. Dra. Maria do Carmo Santos Domite

Julgamento: _____

Instituição: EDM – FEUSP

Assinatura: _____

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Julgamento: _____

Instituição: EDM – UNIBAN

Assinatura: _____

Prof. Dr. Rodolfo Coelho de Souza

Julgamento: _____

Instituição: FFCLRP - USP

Assinatura: _____

Prof. Dr. Reinaldo Salvitti

Julgamento: _____

Instituição: IME – USP

Assinatura: _____

*À primeira que me amou e me deu asas.
Mãe, este trabalho é para você.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Oscar João Abdounur pelo estímulo e pela orientação;

À minha mãe, Lourdinha, e ao meu pai, Fernando (*in memorian*), que foram os responsáveis por formarem o alicerce do que eu sou hoje;

Aos meus filhos amados, Thales e Matheus - meu orgulho - que me deram muitas alegrias nesta fase de estudos;

Ao Juarez, meu marido, pelo paciente apoio e compreensão por minha ausência física e mental em diversos momentos;

Ao meu querido amigo e conselheiro, Paulo Boulos, pela valiosa e incondicional ajuda, assim como pelo suporte bibliográfico, minha profunda admiração;

Ao violonista e amigo de todas as horas, Helio Amaral, pelas gravações, constantes colaborações e torcida permanente;

Ao Professor Rodolfo Coelho de Souza, pelas preciosas aulas, grande incentivo e ajuda bibliográfica;

A todos os Professores membros da banca examinadora, por me concederem a honra de sua participação;

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, por me permitirem o prazer de fazer este trabalho;

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que eu galgasse mais este degrau.

“Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor”

Johann Goethe

RESUMO

SOUZA, L.G. S. **Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical**. 2012. 298 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012

A presente tese se ocupa, do ponto de vista didático-pedagógico, em estudar a presença da racionalidade matemática na criação musical. A linguagem matemática é uma poderosa ferramenta que pode ser utilizada para compreender estruturas subjacentes às composições. Com o intuito de defender essa característica, são apresentados, neste trabalho, conceitos e estruturas matemáticas passíveis de analisar algumas obras musicais, como a teoria de conjuntos de Forte, a qual permite, por exemplo, tratar translações e inversões por meio do conceito de função matemática. Essa mesma teoria possibilitou ainda analisar algumas composições do século XX, como as de Almeida Prado e Rodolfo Coelho de Souza. A presença da razão áurea é pesquisada na obra de Mozart, Villa Lobos, Bartók e Debussy. Exemplos de autossimilaridade na música são apresentados analisando-se composições de Bach e Rodolfo Coelho de Souza. São estudados diversos tipos de simetria e feitas algumas aplicações em correlação com a música. É verificado que funções transposição (T) e inversão ($T_n I$) formam um grupo com a operação composição. São definidas as funções P, L e R que têm como elementos do domínio e da imagem acordes maiores e menores e é mostrado como essas funções, juntamente com a operação composição geram o grupo PLR. São analisados alguns Choros de Pixinguinha e algumas Canções dos Beatles, como “Octopus’s Garden” e verifica-se que tais composições apresentam este grupo PLR de funções no seu encadeamento. Demonstra-se que os grupos $T/T_n I$ e PLR são isomorfos ao grupo diedral D_{12} , oferecendo aos graduandos em matemática um exemplo representativo do rico potencial da interface matemática/música, no caso via uma aplicação em música da Teoria de Grupos. O forte caráter interdisciplinar do presente trabalho se fundamenta, do ponto de vista didático-pedagógico, em textos de Olga Pombo e Ivani Fazenda. Uma tentativa de reintegrar a música à educação pode ser verificada pela aprovação do Projeto de Lei 2732/2008, o qual determina a obrigatoriedade do ensino musical na Educação Básica. Assim sendo, um importante resultado deste trabalho é a proposta de uma disciplina, a ser oferecida na graduação, voltada tanto para estudantes de música como de matemática, que contribua, de alguma maneira, com a formação desses profissionais, oferecendo-lhes subsídios para atuar no ensino médio ao integrar essas duas disciplinas. Tal disciplina tem o intuito de gerar um vasto campo de trocas de experiências entre os alunos, os quais poderão se apropriar de novos conhecimentos proporcionados pela união dessas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Matemática. Música. Interdisciplinaridade. Análise Musical.

ABSTRACT

SOUZA, L.G. S. **A didactic-pedagogical approach of the mathematical reasoning at the musical creation.** 2012. 298 p. Ph. D. Thesis – School of Education, University of São Paulo, São Paulo, 2012.

This thesis deals, in didactic-pedagogical terms, with the study of the presence of mathematical reasoning at the musical creation. The mathematical language is a powerful tool that can be used to understand structures underlying the compositions. In order to defend this characteristic, concepts and mathematical structures capable of analyzing some musical compositions, as the theory of sets of Forte are presented in this work, allowing, for example, treating translations and inversions through the concept of mathematical function. This same theory enabled the detailed analysis of particular twentieth century's compositions, such as works by Almeida Prado and Rodolfo Coelho de Souza. The presence of the Golden Ratio is investigated in the works of Mozart, Villa Lobos, Bartók and Debussy. Examples of self-similarity in music are presented through the analysis of compositions by Bach and by Rodolfo Coelho de Souza. Specific types of symmetry are studied and some applications in correlation with music are realized. The fact that transposition's (T) and inversion's ($T_n I$) functions form a group with the composition's operation is verified. The functions P , L and R , whose domain and image elements are major and minor chords, are defined, and a detailed description is given on how these functions generate the PLR group through the composition operation. "Cries" by Pixinguinha and Beatles' songs such as "Octopus's Garden" are analyzed and the fact that these compositions have the PLR group in their chaining can be verified. According to the demonstration, the groups $T/T_n I$ and PLR are isomorphic to the dihedral group D_{12} , offering to the undergraduate mathematics' students an example of the rich potential of the mathematics/music interface, in this case, through an application of the Group's Theory in music. The strong interdisciplinary character of this work is based, in didactic-pedagogical terms, on Olga Pombo's and Ivani Fazenda's texts. An attempt to reintegrate music to the standard education can be verified through the approval of the Law project 2732/2008, which stipulates the mandatory teaching of music in Basic Education. This way, an important result of this work is the proposal of a subject, to be offered at an undergraduate level to both students of music and mathematics, which contributes to their professional training, offering them tools to integrate these two subjects when acting in high school. This subject aims to generate a wide range of experience exchange between students, who can expand their knowledge through the combination of these two subject matters.

Key words: Mathematics. Music. Interdisciplinarity. Musical Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Monocórdio	20
Figura 2 – Prefixos pluri, inter e trans	27
Figura 3 – Segmento de comprimento ℓ	33
Figura 4 – Divisão do segmento segundo a seção áurea	33
Figura 5 – Segmento dividido pela razão áurea	34
Figura 6 – Retângulo de ouro	35
Figura 7 – O Parthenon e a Mona Lisa	35
Figura 8 – Estrutura da forma sonata clássica	37
Figura 9 – Gráfico de dispersão de b por a+b, com duas retas: $b = \varphi(a + b)$ (superior) e a reta de regressão linear (inferior), feito no Geogebra	39
Figura 10 – Gráfico de dispersão de a por b, com duas retas: $a = \varphi b$ (inferior) e a reta de regressão linear (superior).	40
Figura 11 – Gráficos de dispersão a+b x b* e b* x a* e as respectivas retas de regressão linear	42
Figura 12 – Retas de regressão linear e a reta $a=\varphi b$	42
Figura 13 – Seções da peça <i>Música para cordas, percussão e celesta</i> de Bartók	44
Figura 14 – Seções da peça <i>Reflets dans l'eau</i> – Debussy – clímax maior e entradas do tema B	46
Figura 15 – Seções da peça <i>Reflets dans l'eau</i> – Debussy – modulação para Eb e entradas do tema A	47
Figura 16 – Seções da peça <i>Reflets dans l'eau</i> – Debussy – sequência diatônica	48
Figura 17 – Folha da Samambaia Renda Portuguesa	50
Figura 18 – Samambaia e suas ramificações	51
Figura 19 – Triângulo de Sierpinski	51
Figura 20 – Conjunto de Mandelbrot	52
Figura 21 – Autossimilaridade no prelúdio coral <i>Thron tret' ichhiermit</i> BWV 668. As três vozes inferiores imitam o tema em diminuição, o contralto em inversão. Os colchetes indicam outras correspondências	53
Figura 22 – Tema	54
Figura 23 – Tema diminuído	54

Figura 24 – Matriz de Combinatórias – Fonte: Coelho de Souza, 1994	55
Figura 25 – Metrópolis – Iteração 1	57
Figura 26 – Metrópolis – Iteração 2	57
Figura 27– Metrópolis - Construção Auto-similar	58
Figura 28 – Fotografia de um vaso	59
Figura 29 – Figura de uma borboleta	59
Figura 30 –	60
Figura 31 – Simetrias de Translação e Reflexão	60
Figura 32 – Gráfico em que os pontos são simétricos em relação ao eixo y	61
Figura 33 – Reflexão temporal em uma figura musical	62
Figura 34 – Chopin – Estudo opus 10 no. 12 (Revolucionário)	
Simetria de Reflexão Temporal	62
Figura 35 – Uma forma reflexiva visual sobre o eixo x	62
Figura 36 – Gráfico em que os pontos são simétricos em relação ao eixo x	63
Figura 37 – Escala diatônica	63
Figura 38 – Escala pentatônica	63
Figura 39 – Simetria de reflexão na escala diatônica	64
Figura 40 - Simetria de reflexão na escala pentatônica	64
Figura 41 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota ré ...	65
Figura 42 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota sol#	65
Figura 43 – Escala hexatônica	65
Figura 44 – Simetria de reflexão na escala hexatônica	66
Figura 45 – Menuetto al rovescio, da sonata no. 4 para violino e piano de Haydn – Reflexão Temporal com o eixo de simetria no compasso 11	67
Figura 46 – Simetria de translação	68
Figura 47 – Czerny, opus 849 – Estudo nº 1 – Simetria de Translação Horizontal (temporal)	68
Figura 48 – Debussy – Reflet's dans l'eau Simetria de Translação Horizontal (temporal) e Vertical	68
Figura 49 – Palchibel – Cãnone para 3 violinos	69
Figura 50 – As onze translações da escala maior	70
Figura 51 – Duas translações da escala hexatônica, (a segunda igual à original, só que começando pela nota ré)	70

Figura 52 – Simetria de rotação	71
Figura 53 – Simetria de rotação	71
Figura 54 – Trechos iniciais do Prelúdio e Poslúdio do Ludus Tonalis de Hindemith .	72
Figura 55 – Escala Octatônica 1-2 (começando por st)	73
Figura 56 – Eixos de Simetria da Escala Octatônica 1-2	73
Figura 57 – Translações da escala octatônica 1-2	74
Figura 58 – Escala Octatônica 2-1 (começando por tom)	74
Figura 59 – Reflexão da escala octatônica 1-2 sobre o eixo de dó e sua escrita na forma ascendente	75
Figura 60 – Escala Octatônica começando da nota sol#, enfatizando dois tetracordes .	75
Figura 61 – Células “Z”	75
Figura 62 – Segunda célula Z: dois eixos de simetria	75
Figura 63 – Células Z: a segunda é uma translação de 3 semitons da primeira	76
Figura 64 – Figura musical, cujo eixo de simetria, no primeiro caso, está na nota sol# e no segundo caso, na nota solb	76
Figura 65 – Célula C	76
Figura 66 – Da Ilha de Bali, de Bartók	77
Figura 67 – Eixo de simetria	82
Figura 68 – Substituição das notas por números no teclado do piano	83
Figura 69 – Substituição das notas por números na pauta musical	84
Figura 70 – Números inteiros e notas musicais	84
Figura 71 – Substituição das notas por números	84
Figura 72 – Intervalo musical int (2,9)	85
Figura 73 – Intervalo entre as notas 14 e 29	86
Figura 74 – Dós equivalentes módulo 12	87
Figura 75 – Muitas notas, porém apenas três classes de notas: F#, G e Ab.	88
Figura 76 – Alturas equivalentes	88
Figura 77 – Relógio – módulo 12	89
Figura 78 – Dodecágono – modelo de representação analógica dos doze meio-tons ...	89
Figura 79 – Intervalo não orientado entre as classes de alturas 2 e 9: $\text{Int}(2,9) = 5$	91
Figura 80 – Relógio e reta real	92
Figura 81 – Exemplo 1	92
Figura 82 – $\text{Int}(X,Y)$, $x > y$	93
Figura 83 – $\text{Int}(F, A^\#) = 5$	94

Figura 84 – Translações da parábola $y = x^2$	95
Figura 85 – Trecho de Asa Branca	95
Figura 86 – Trecho de Asa Branca transposto 7 semitons acima	95
Figura 87 – Trecho de Asa Branca transposto 6 semitons abaixo	96
Figura 88 – Transposição da nota 6 de 5 semitons	96
Figura 89 – Transposição da nota 9 de 5 semitons	97
Figura 90 – Representação da Transposição da nota lá de 5 semitons acima	97
Figura 91 – Transposição da primeira frase de Asa Branca	98
Figura 92 – Inversões e translações da parábola $y = x^2$	100
Figura 93 – Inversão de um trecho de Asa Branca	100
Figura 94 – Inversão no mesmo sistema	100
Figura 95 – Inversão segundo o eixo fá 4	101
Figura 96 – Parábola $y = -x^2$ invertida e transladada de 5 unidades	101
Figura 97 – Inversão da da nota sol e posterior transposição de 5 semitons	102
Figura 98 – Simetria axial	103
Figura 99 – Inversão em relação ao eixo x	104
Figura 100 – Inversão em relação a $x / x+1$	104
Figura 101 – Inversão $T_8I(1)$	105
Figura 102 – Inversão $T_8I(1)$	106
Figura 103 – Inversão $T_5I(7)$	106
Figura 104 – Inversão $T_5I(7)$	107
Figura 105 – Tema da Invenção no. 1 de Bach	108
Figura 106– Transposição do sujeito no segundo compasso	109
Figura 107 – Tema Original e tema transladado 7 semitons acima	119
Figura 108 – Tema invertido e transposto 9 semitons acima	110
Figura 109 – Tema invertido e transposto 5 semitons acima	110
Figura 110 – Tema invertido e transposto 2 semitons acima	110
Figura 111 – Tema invertido e transposto 1 semitom abaixo	111
Figura 112– Tema transposto e aumentado	111
Figura 113 – Tema invertido e transposto	111
Figura 114 – Translações e Inversões da Invenção no. 1 – Bach	113
Figura 115 – Invenção a duas vozes no. 1 – Bach	114
Figura 116 – Esquema da fuga XXI de Bach	115
Figura 117 – Esquema da Fuga XXI – Bach	121

Figura 118 – Schoenberg – Gavotte da Suíte opus 25	130
Figura 119 – Acorde {Db, E, F, G}	130
Figura 120 – Acorde de Dó Maior {0,4,7}	131
Figura 121 – Acorde {C, E, G#, A, B}	132
Figura 122 – Posição do acorde nos relógios auxiliares	133
Figura 123 – Acorde na sua forma normal	134
Figura 124 – Acorde {F#, A, A#, D#} no relógio auxiliar	134
Figura 125– Verificação da localização do maior intervalo	135
Figura 126 – Acorde Invertido no Relógio Auxiliar	135
Figura 127 – Verificação da localização do maior intervalo	136
Figura 128 – Acorde de Dó Maior no relógio auxiliar	137
Figura 129 – Acorde de dó invertido	137
Figura 130 – Função P aplicada a um acorde Maior	141
Figura 131 – Função P aplicada a um acorde menor	143
Figura 132 – Função L aplicada a um acorde Maior	146
Figura 133 – Função L aplicada a um acorde menor	147
Figura 134 – Função R aplicada a um acorde Maior	150
Figura 135 – Função R aplicada a um acorde menor	151
Figura 136 – Exemplo de uma isometria T	154
Figura 137 – Quadrado em $\mathbb{R}^2$	156
Figura 138 – Isometrias no quadrado	157
Figura 139 – Operação $r_1 s_0$	157
Figura 140 – Grupo G isomorfo a grupo H.	160
Figura 141 – Partes da Tabela 14	163
Figura 142 – Aspecto da Tábua de $\langle a, b \rangle$	171
Figura 143 – Número complexo $z = z e^{i\varphi}$	172
Figura 144 – $z \cdot e^{i\theta}$, $\theta > 0$	173
Figura 145 – Número complexo iz	173
Figura 146 – Simetria S_θ , em relação à reta t	174
Figura 147 – $S_\theta = R_{2\theta} S_0$	175
Figura 148 – $S_0 R_\theta S_0 = R_\theta^{-1}$	176
Figura 149 – Polígonos regulares com 3, 4, 5, e 6 lados	177
Figura 150 – Uma isometria do quadrado	178

Figura 151 – Correspondência entre os vértices de um dodecágono e as notas musicais	183
Figura 152 – Triângulo-acorde de C	189
Figura 153 – Triângulo-acorde de $D^b=C^\#$	189
Figura 154 – Triângulo-acorde de b_b	190
Figura 155 – Partitura de Migalhas de Amor	194
Figura 156 – Partitura de Naquele Tempo	195
Figura 157 – Retirada de http://neofronteras.com/wp-content	196
Figura 158 – Compassos da 9a. Sinfonia com os acordes citados	197
Figura 159 – Grafo da sequência de acordes da 9ª. Sinfonia de Beethoven.....	198
Figura 160 – Conjuntos A e B em forma de sequência e de acorde.....	202
Figura 161 – <i>Estação Paraíso</i> , compassos 7 a 10 – Conjuntos utilizados: $B_8=[C^\#, D^\#, E, G^\#, B]$ nos compassos 7-8 e $B_9=[C, D, E, F, A]$, nos compassos 9-10	204
Figura 162 – Rede de Transformação – <i>Estação Paraíso</i>	205
Figura 163 – Transformação T_1I aplicada ao conjunto A_9	205
Figura 164 – Transformação $A_9 \xrightarrow{T_1I} B_8$	206
Figura 165 – Padrões C e D	206
Figura 166 – Padrões C e D e suas transposições	207
Figura 167 – Padrão D funcionando como auxiliar no processo transformacional7 entre conjuntos do tipo A_{10} e A_0 . Compassos 14 a 19	207
Figura 168 – Motivo Rítmico Principal	208
Figura 169 – Motivo rítmico com deslocamento progressivo da colcheia	208
Figura 170 – Segundo Motivo Rítmico	208
Figura 171 – Almeida Prado – Mudança de Compassos	216
Figura 172 – Compassos Ímpares	219
Figura 173 – Compassos Pares	220
Figura 174 – Almeida Prado – Variações de Acentos em 12/8	222
Figura 175 – Esquema das Transformações	223
Figura 176 – Almeida Prado – Pulsação fixa de 3 semicolcheias com articulações de 3 semicolcheias	224
Figura 177 – Almeida Prado – Pulsação fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias	227

Figura 178 – Almeida Prado – Pulsação fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias	231
Figura 179 – Almeida Prado – Pulsação fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias	235
Figura 180 – A X B	250
Figura 181 – B X A	250
Figura 182 – Relação R	250
Figura 183 – Relógio	255
Figura 184 – Ciclo das notas musicais	258
Figura 185 – Ciclo das notas musicais com letras	258
Figura 186 –	258
Figura 187 –	258
Figura 188 –	259
Figura 189 – Pentagrama	259
Figura 190 –	259
Figura 191 – Clave de fá	260
Figura 192 – Clave de sol	260
Figura 193 – Clave de dó	260
Figura 194 –	260
Figura 195 – Disposição das notas no teclado	260
Figura 196 – Nomes das notas “intermediárias”	261
Figura 197 – Tons e semitons	262
Figura 198 – Escala de Dó Maior	263
Figura 199 – Estruturação das escalas maiores	263
Figura 200 – Estruturação das escalas menores	264
Figura 201 – Escala de Si Maior	264
Figura 202 – Escala de Si Maior	264
Figura 203 – Acordes de Dó M e dó m	265
Figura 204 – Pulsação da Pessoa A	265
Figura 205 – Pulsação da Pessoa B	265

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de compassos das partes dos diversos movimentos	38
Tabela 2 – Número de compassos das partes dos diversos movimentos segundo a razão áurea*	41
Tabela 3 – Indicação das dinâmicas	56
Tabela 4 – Acordes T_k e T_{kI}	124
Tabela 5 – Tabela representativa do grupo T_k/T_{kI}	127
Tabela 6 – Translações do acorde de Dó Maior	131
Tabela 7 – Translações da inversão do acorde de Dó Maior	131
Tabela 8 – Cálculo da Forma Normal	133
Tabela 9 – Cálculo da Forma Prima do acorde $\{F\#, A, A\#, D\#\}$	136
Tabela 10 – Funções P, L, R	151
Tabela 11 – Funções P, L, R na notação vetorial	151
Tabela 12 – Funções P, L, R	152
Tabela 13 – Tábua do Grupo D_4	157
Tabela 14 – Tábua de S_3	162
Tabela 15 – Tábua do subgrupo $\{f_0, f_1, f_2\}$	163
Tabela 16 – Cálculo de s_{j-2}	180
Tabela 17 – Tábua do Grupo Diedral D_{12}	181
Tabela 18 –	183
Tabela 19 –	184
Tabela 20 –	188
Tabela 21 – Conjuntos de alturas utilizados	203
Tabela 22 – Tons comuns no encadeamento	209
Tabela 23 – Textura cruzada entre timbres e dinâmicas	213

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE ..	23
2.1 A Interdisciplinaridade neste Trabalho	23
2.2 Sobre o Surgimento do Termo Interdisciplinaridade	24
2.3 Sobre a Definição de Interdisciplinaridade	25
2.4 A Interdisciplinaridade e a Especialização	32
3 CONCEITOS E ESTRUTURAS MATEMÁTICAS EM MÚSICA	33
3.1 A Razão Áurea na Música	33
3.1.1 φ , a razão áurea	33
3.1.2 Sobre a razão áurea nas composições musicais.....	36
3.1.3 As sonatas de Mozart e a razão áurea: a pesquisa de Putz	36
3.1.4 Sobre a irracionalidade de φ e a razão áurea na música	40
3.1.5 Outros aspectos relacionados com a razão áurea em sonatas de Mozart.....	43
3.1.6 A razão áurea em obras de Villa Lobos, Bartók e Debussy	43
3.1.6.1 Villa Lobos	43
3.1.6.2 Bartók	44
3.1.6.3 Debussy	45
3.1.7 A questão da intencionalidade na utilização de φ	48
3.2 Autossimilaridade na Música	50
3.2.1 Sobre a autossimilaridade	50
3.2.2 Autossimilaridade na obra de Bach	52
3.2.3 Metrópolis – autossimilaridade na composição de Rodolfo Coelho de Souza	54
3.3 Simetria em Música	59
3.3.1 Introdução	59
3.3.2 Simetria de reflexão	61
3.3.3 Simetria de translação.....	67
3.3.4 Simetria de rotação	70
3.4 A Teoria dos Conjuntos de Forte	79
3.4.1 Do tonalismo para o atonalismo – um apanhado histórico	79

3.4.2	O modelo inteiro de notas	83
3.4.3	Equivalência	86
3.4.4	As funções transposição e inversão segundo a teoria de Forte	94
3.4.4.1	A função transposição	94
3.4.4.2	A função inversão	199
3.4.4.3	Análise da invenção no. 1 a duas vozes – BACH	107
3.4.4.4	Análise da fuga XXI – Sib M - BWV 866 – BACH	115
3.4.5	O grupo T/TI	124
3.4.6	Conjuntos-Classe	129
3.4.6.1	Introdução	129
3.4.6.2	Forma normal de um conjunto-classe	132
3.4.6.3	Processo prático para se encontrar a forma prima de um acorde	134
3.4.7	As funções P, L e R	138

4 O GRUPO DIEDRAL E OS GRUPOS T/TI E PLR: UMA ANALOGIA

	ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA	153
4.1	Preliminares sobre Teoria de Grupos	153
4.2	Um exemplo de Apresentação de Grupo	166
4.3	Resultados sobre o Corpo dos Números Complexos	172
4.4	Definição e Determinação do Grupo Diedral	176
4.5	O Grupo T/TI e o Grupo D_{12}	182
4.6	O Grupo PLR e o Grupo D_{12}	184
4.7	O Grupo PLR, Beatles e o Choro	190
4.8	O Grupo PLR, o Toro e Beethoven	196

5 UTILIZAÇÃO DAS TÉCNICAS MATEMÁTICAS NA ANÁLISE

	MUSICAL E NO ENSINO.....	200
5.1	Análise de Algumas Composições Musicais à Luz da Teoria de Forte	200
5.1.1	Estação Paraíso – Rodolfo Coelho de Souza.....	200
5.1.2	Obras de Almeida Prado	214
5.1.2.1	Análise da peça “Mudança de Compassos”	216
5.1.2.2	Análise da peça “Variações de acentos em 12/8”	221
5.1.2.3	Análise da peça “Pulsção fixa de 3 colcheias com articulações de 3 semicolcheias”	224

5.1.2.4	Análise da peça “Pulsção fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias”	227
5.1.2.5	Análise da peça “Pulsção fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias”	231
5.1.2.6	Análise da peça “Pulsção fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias”	234
5.2	Proposta de uma Disciplina na Graduação	236
5.2.1	Uma proposta de ementa	236
5.2.2	Sobre os conteúdos a serem trabalhados	238
5.2.3	Algumas propostas de oficinas	239
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	246
7	PRELIMINARES	249
7.1	Preliminares de Matemática	249
7.2	Preliminares de Música	257
7.2.1	Notação musical melódica	257
7.2.2	Notação musical rítmica	265
8	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	267
ANEXOS	.....	274
ANEXO I – METRÓPOLIS	.....	275
ANEXO II – ESTAÇÃO PARAÍSO	.....	288
ANEXO III – CD contendo composições	.....	294

1 INTRODUÇÃO

Sou professora adjunta do departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL há vinte e oito anos. Atuo nas áreas de Educação Matemática e Cálculo Diferencial e Integral. Fiz dois mestrados, o primeiro em Matemática e o segundo em Ensino de Ciências e Educação Matemática, os dois na mesma Universidade.

Confesso também que, durante toda a minha trajetória profissional e até hoje, uma outra paixão me persegue: a música. Por conta dela, fiz bacharelado em música e me dedico, desde menina, ao estudo do piano.

A ideia e a conscientização da possibilidade de reunir essas duas paixões surgiram há muito tempo, em 1980, quando participei de um simpósio, na UNICAMP – Campinas - São Paulo, intitulado: “Matemática e Música: Aspectos de Criatividade”. Desde lá, venho almejando me dedicar a um trabalho que envolvesse essas duas áreas na perspectiva da Interdisciplinaridade.

De algum modo, já me envolvi neste projeto, uma vez que orientei uma monografia de especialização intitulada: “Matemática e Música: a Harmonia Perfeita” e desenvolvi um projeto de pesquisa em ensino de graduação sobre o tema “A relação Matemática x Música e suas Implicações no Ensino de Matemática” na UEL.

A possibilidade do Doutorado apareceu quando consegui, em agosto de 2009, uma licença pela Universidade Estadual de Londrina para estudos nesta etapa acadêmica.

O tema desta tese surgiu quando eu estudava uma fuga de Bach, ao perceber os modos de organização e o grau de racionalidade presente em tal composição. As melodias eram transpostas e invertidas, retrogradadas, aumentadas e diminuídas. Elas apareciam nas diversas vozes e não se embaralhavam. Nesse momento, algumas inquietações começaram a surgir: Em que medida os compositores possuem uma racionalidade matemática ao compor? Utilizariam eles a matemática intencionalmente no processo de composição ou sua presença é tácita? Na busca da resposta a tais indagações, verifiquei que alguns matemáticos/músicos, Solomon (1973), Harkleroad (2006), Fiore (2009), Straus (1990), Forte (1973), Lewin (1987), Lendvai (1971), entre outros, analisaram composições musicais e descobriram certas estruturas matemáticas presentes nessas obras: simetrias, translações, inversões e outras.

Com o intuito de apresentar o contexto dentro do qual o presente projeto se insere, apresento um breve apanhado da interação matemática/música do ponto de vista ocidental, em particular a partir da Grécia Antiga até o século XX, com o atonalismo.

Segundo Abdounur (2002), a primeira manifestação da interação entre essas duas áreas surge com o experimento do monocórdio realizado pelos pitagóricos, no século VI a.C. O monocórdio (Figura 1) é uma caixa de madeira sobre a qual é estendida uma única corda presa nas extremidades por dois cavaletes fixos, possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda estendida.

Figura 1 – Monocórdio

Fonte : <http://www.schillerinstitute.org/newspanish/institutoschiller/Arte/MusiParadojaPitagoras.html>

Tal experimento estabeleceu uma relação entre intervalos musicais e razões matemáticas entre números inteiros, relação esta que propiciou a primeira sistematização matemática de uma escala nessa cultura, além de diversas discussões a respeito de problemas de teoria musical ao longo da Idade Média e do Renascimento.

Os pitagóricos acreditavam que uma ordem dominava o universo, ideia sugerida pelas observações dos astros e pela verificação da sucessão dos dias e das noites e do alternar-se das estações. Segundo a doutrina pitagórica do som dos planetas, a Terra era esférica e, juntamente com os outros planetas, girava em torno do Sol segundo intervalos musicais harmônicos. Dessa forma, a música era considerada pelos pitagóricos um símbolo de harmonia do cosmos e um meio de alcançar o equilíbrio interno do homem.

Durante o Renascimento ocorre uma mudança de abordagem no tratamento de problemas teóricos da música, que deixa de ser um assunto da aritmética, com caráter especulativo, assumindo uma abordagem mais ampla, fundamentada em princípios físico-experimentais. A música deixa de ter natureza numérica para assumir um caráter sonoro abandonando sua subordinação à matemática. Nessa mudança de foco, o som deixa de ser visto como comprimento para ser relacionado mais diretamente ao conceito que viria posteriormente a ser denominado frequência.

Nesse contexto histórico, ocorreram profundas mudanças na percepção da natureza do universo, mudanças que romperam decisivamente com concepções anteriores e práticas, preparando caminho para a emergência da ciência moderna. Surgiram novos conceitos referentes à estrutura do universo. No começo do século XVI, o universo era considerado

esférico, finito, geocêntrico. No fim do século XVII, tal visão sofre uma mudança significativa quando o universo passou a ser considerado infinito e heliocêntrico. Funções vitais foram consideradas análogas a processos físicos e químicos. O aumento da experimentação, do emprego da matemática e de novos instrumentos foi decisivo em muitas dessas mudanças de ideias. Sentimentos antiaristotélicos cresceram nas universidades. A máquina de impressão e o estabelecimento de serviços postais permitiram a troca de ideias e esforços colaborativos para alcançar um grau de desenvolvimento antes impossível de ser atingido. Novas descobertas foram feitas e novas teorias foram propostas em astronomia, óptica, química e fisiologia, ajudadas pelo uso do telescópio e do microscópio.

Tais ações caracterizaram a Revolução Científica (de fins do século XVI a meados do século XVII). A visão do som relacionada à frequência de uma fonte vibratória mencionada anteriormente se consolida, caracterizando uma perda gradativa na autoridade da tradição platônico-pitagórica no desenvolvimento da música ocidental. A música e a matemática ganham certa independência, e os tratados de teoria musical se aproximam cada vez mais da prática. A harmonia passa a se preocupar com os efeitos no ser humano. Surge no período barroco a doutrina dos afetos, que foi amplamente aceita pelos músicos e que propunha que recursos técnicos específicos utilizados na composição pudessem despertar emoções específicas no ouvinte.

A partir de então, novas formas de participação da matemática começam a ocorrer em contextos musicais, em particular no processo criativo, estabelecendo uma mudança de foco na relação entre música e matemática, esta última agora como instrumento intencional do compositor e não mais como fundamento teórico da música. Um exemplo disso é o uso da Análise Combinatória e da Probabilidade em composições musicais.

Entre os compositores do século XVIII que se utilizaram desse ramo encontra-se Mozart, o qual compôs, entre outras obras, um minueto constituído por 16 compassos, intitulado “Jogo de dados Musical”. A obra foi escrita em função dos números sorteados por dois dados, da seguinte maneira: lançando-se dois dados e somando-se os resultados, tinha-se 11 possibilidades (de 2 a 12). Para cada um dos 16 compassos, Mozart escreveu 11 possibilidades, escolhia-se uma delas de acordo com o resultado da soma dos dados. Desse modo, podia-se compor várias melodias.

Paralelamente e em períodos posteriores, há ainda outras estruturas matemáticas presentes, ainda que tacitamente, em composições musicais, por meio de conceitos tais como a razão áurea e as simetrias.

Uma contribuição efetiva da matemática na criação musical ocorre, de modo muito singular, com a música do século XX. A presente tese se ocupa, do ponto de vista didático-pedagógico, com estas últimas abordagens e analisa, sob uma perspectiva da racionalidade matemática, algumas composições musicais de Bach, Bartók, Mozart, Pixinguinha, Beatles, Rodolfo Coelho de Souza e Almeida Prado.

As peças de Bach são analisadas segundo a teoria de Allen Forte: uma fuga e uma invenção a duas vozes, mostrando as simetrias, transposições e inversões que tal compositor utiliza em seu trabalho. A presença da razão áurea é pesquisada na obra de Mozart, Bartók, Villa Lobos e Debussy. Ainda sob a perspectiva de Allen Forte, as composições de Rodolfo Coelho de Souza e de Almeida Prado também são analisadas. Exemplos de autossimilaridade na música são apresentados analisando-se composições de Bach e Rodolfo Coelho de Souza.

A fundamentação teórica utilizada se ancora na Interdisciplinaridade, visto o caráter filosófico/educacional deste trabalho, que une duas áreas do conhecimento, a matemática e a música, consideradas juntamente como um novo conhecimento. Tal fundamentação foi baseada em diversos textos, dentre os quais destacam-se os livros de Ivani Fazenda e os artigos de Olga Pombo, com os quais encontrei significativa afinidade.

No contexto das implicações educacionais da presente proposta, sugere-se uma disciplina de graduação que aborde as reflexões desta pesquisa, fornecendo subsídios aos alunos para atuar no ensino/aprendizagem envolvendo a interface matemática/música.

Em suma, o capítulo 2 apresenta o conceito de interdisciplinaridade como fundamentação teórica do trabalho. Em seguida, no capítulo 3, estruturas matemáticas são exibidas como instrumentos passíveis de serem utilizados na análise musical. No capítulo 4, uma analogia entre a matemática e a música permite interpretar acordes maiores e menores como elementos de um grupo. Para isto, definem-se matematicamente as funções Neo-Riemannianas P , L e R , que têm como elementos do domínio e da imagem acordes maiores e menores, e mostra-se que o grupo das transposições e inversões T/TI e o grupo PLR são isomorfos ao grupo diedral D_{12} . O capítulo 5 faz uso das estruturas matemáticas estudadas na análise musical, apresentando ainda uma proposta de uma disciplina de graduação que aborde os objetos desta tese sob uma perspectiva educacional. O capítulo 6 estabelece considerações finais acerca das reflexões apresentadas nos capítulos anteriores. O capítulo 7 trata de conteúdos fundamentais de matemática e de música a serviço de compreender as reflexões e os resultados apresentados ao longo da tese. Esta obra contém também dois anexos que apresentam as partituras das composições Metrópolis e Estação Paraíso de Rodolfo Coelho de Souza e um CD contendo o áudio das peças analisadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE

2.1 A Interdisciplinaridade neste Trabalho

A interdisciplinaridade aporta neste trabalho no sentido que este busca romper a barreira disciplinar entre duas ciências que já foram ligadas no passado (*quadrivium*) e depois separadas, a matemática e a música.

O *quadrivium* englobava, durante a Idade Média, quatro disciplinas: a aritmética, a música, a geometria e a astronomia, de modo que a música ocupava um lugar de destaque ao lado da matemática.

Atualmente, a matemática continua ocupando um lugar importante no currículo, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o último do Ensino Médio, porém a música como disciplina é praticamente inexistente nos currículos atuais. Uma tentativa de reintegrar a música à educação pode ser verificada pela aprovação, no dia 28 de Maio de 2008, do Projeto de Lei 2732/2008, o qual determina a obrigatoriedade do ensino musical na Educação Básica, digo uma tentativa porque o governo não ofereceu subsídios para que este ensino acontecesse, tampouco abriu contratação de novos profissionais para atuarem nessa área.

“Hoje reconhecemos que não há profissionais suficientes para atuar com música nas salas de aula. Medidas são necessárias para resolver isso, uma delas é a correção devida de editais publicados errados para o ingresso na área; outra é o oferecimento de cursos de capacitação para os professores, cursos de extensão universitária entre outros”, diz Magali Kleber presidente nacional da ABEM (Associação Brasileira de Educação Musical) <http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/musica-escolas-432857.shtml>.

Este trabalho pretende contribuir para a criação de novas práticas pedagógicas que auxiliem a exploração da música no processo de ensino-aprendizagem. Cascino (1999) comenta sobre a necessidade de se ousar, de se questionar limites ao se engendrar uma disciplina interdisciplinar:

Ousar, categoria fundamental do fazer interdisciplinar. Marca inequívoca do que se projeta, do que se lança, do que busca o novo, a alternativa, o diferente, o não conhecido. Para muito além de um simples exercício de aparências, mera retórica, ousar falar, ousar pensar, ousar afirmar, ousar duvidar, ousar negar subentende coragem, determinação, desejo, disposição. [...] Ousar, em certos ambientes e em

certas circunstâncias, não é bem-vindo, quem ousa é malvisto, malfalado (CASCINO, 1999, p. 35).

Uma vez que ousar representa questionar limites, colocar em discussão fronteiras, quando se ousa, exercita-se a beleza de ser diferente, não conformando-se com o mesmo, com o igual. Rompem-se as regras. E enfrentam-se poderes. [...]. E surge o tempo da discórdia, das rupturas, dos conflitos. Enfrentamento (CASCINO, 1999, p. 36).

Desse modo, aventurei-me a propor a ementa de uma nova disciplina, na graduação, voltada principalmente para a investigação de racionalidades matemáticas em composições musicais que pretendo que seja um ponto de partida para o surgimento de novos saberes na confluência dessas duas áreas.

2.2 Sobre o Surgimento do Termo Interdisciplinaridade

Há muito tempo que a palavra ‘interdisciplinaridade’ é utilizada. Surge na Europa, principalmente na França e na Itália, em meados da década de 1960, por meio de alguns professores que se preocupavam em romper com o molde de uma educação compartimentalizada. Um dos seus pioneiros é o filósofo Georges Gusdorf, que apresentou, em 1961, um projeto de pesquisa à UNESCO, no qual sugeria que um grupo de cientistas de reconhecido saber se reunisse com o objetivo de organizar uma pesquisa de caráter participativo e interdisciplinar, descentralizada, na qual aparecesse o diálogo entre distintas áreas do saber. O projeto não obteve êxito e Gusdorf prosseguiu solitário a sua pesquisa, a qual rendeu diversos livros.

A palavra é traduzida no Brasil como: interdisciplinaridade (do francês ou do inglês) ou interdisciplinarietà (do espanhol).

As discussões sobre interdisciplinaridade chegam ao Brasil ao final da década de 1960 com sérias distorções, resultantes do empolgamento de alguns professores com o novo sem a devida reflexão. É o que comenta Fazenda.

Dois aspectos são fundamentais a serem considerados: o primeiro é o modismo que o vocábulo desencadeou. Passou a ser palavra de ordem a ser empreendida na educação, aprioristicamente, sem atentar-se para os princípios, muito menos para as dificuldades de sua realização.[...] O segundo aspecto é o avanço que a reflexão sobre interdisciplinaridade passou a ter a partir dos estudos desenvolvidos na década de 1970 por brasileiros (referindo-se a Japiassú) (FAZENDA, 1995, p. 24).

Japiassú, responsável pela primeira produção significativa sobre o tema no Brasil, coloca como condição para efetivação dessa metodologia interdisciplinar uma nova espécie de cientista, que tivesse consciência da importância de uma nova pedagogia baseada na comunicação.

Fazenda, no seu primeiro trabalho sobre interdisciplinaridade, fez um levantamento histórico sobre a sua presença no ensino brasileiro e, na época, constatou que esta era uma utopia:

Num sistema de ensino como o brasileiro, em que as matérias são fixadas pelos Conselhos de Educação, em que não existe uma idéia clara e precisa de como deve se realizar a integração, a pretensão legal de que se eliminem as barreiras entre as matérias passa a ser uma utopia (FAZENDA, 1979, p. 90).

Realmente, nessa época, havia um número reduzido de pesquisas sobre este tema, tanto aqui no Brasil, quanto no exterior e, em consequência, pouco material bibliográfico a ser consultado. Além disso, num processo interdisciplinar seriam consideradas as necessidades do aluno. A elaboração do programa dependeria de muito diálogo e troca de ideias com áreas do conhecimento as quais os professores não dominavam. Por conta disso, permaneciam resistentes em mudar o programa que já haviam organizado.

No final dos anos 80 e início dos 90, começaram a surgir centros de referência em todo o mundo, os quais reuniam pesquisadores em torno do tema. Em 1986, a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), sob a coordenação de Ivani Fazenda, criou o Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Interdisciplinaridade na Educação (GEPI), produzindo mais de cinquenta pesquisas sobre diferentes aspectos da educação. No início do século XXI, finalmente, a interdisciplinaridade assume um papel de grande importância:

No limiar do século XXI e no contexto da internacionalização caracterizada por uma intensa troca entre os homens, a interdisciplinaridade assume um papel de grande importância. Além do desenvolvimento de novos saberes, a interdisciplinaridade na educação favorece novas formas de aproximação da realidade social e novas leituras das dimensões socioculturais das comunidades humanas (FAZENDA, 2001, p. 2).

Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), editados em 2000, propõem a utilização da interdisciplinaridade na proposta curricular brasileira.

A tendência atual, em todos os níveis de ensino, é analisar a realidade segmentada, sem desenvolver a compreensão dos múltiplos conhecimentos que se interpenetram e conformam determinados fenômenos. Para essa visão segmentada contribui o enfoque meramente disciplinar que, na nova proposta de reforma curricular,

pretendemos superado pela perspectiva interdisciplinar e pela contextualização dos conhecimentos.

Enfatizam que a interdisciplinaridade pode ser desenvolvida por meio de projetos de investigação, atividades de pesquisa e de grupos de estudo:

A interdisciplinaridade deve ir além da mera justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evitar a diluição delas em generalidades. De fato, será principalmente na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades ou projetos de estudo, pesquisa e ação, que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada aos objetivos do Ensino Médio.

2.3 Interdisciplinaridade

Em relação à conceituação da palavra interdisciplinaridade, há muitas dúvidas, tanto por parte de quem não tem familiaridade, quanto por parte de quem a pratica. Este conceito é demasiado amplo. Existem várias palavras com diferentes prefixos referentes a ela: pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade, além de outras como: metadisciplinaridade e supradisciplinaridade, as duas últimas menos utilizadas e que não serão aprofundadas aqui. Pombo (2003), na tentativa de propor uma definição, busca um significado para sua raiz comum: **disciplina**.

- Disciplina como ramo do saber (Ex: Matemática, Física, Biologia);
- Disciplina como componente curricular;
- Disciplina como um conjunto de normas ou leis (ex: disciplina militar, disciplina escolar etc.).

Desse modo, segundo Pombo, o fato de as quatro palavras terem a mesma raiz não ajuda muito a resolver a confusão entre seus significados, já que essa raiz remete, ela mesma, para três horizontes diferentes. Neste caso, prefere fazer uso da etimologia dos prefixos: pluri, trans, inter e multi.

A idéia de Pombo é pensar nessas três palavras como um *continuum* que vai da coordenação à combinação e desta à fusão.

Figura 2 – Prefixos pluri, inter e trans

- Multi ou pluridisciplinaridade (do ponto de vista etimológico, não faz sentido distinguir entre multi e pluri): pôr em conjunto, em paralelo, estabelecer algum tipo de coordenação numa perspectiva de mero paralelismo de pontos de vista. Não existe preocupação com a “interação”, mas apenas com a justaposição de conteúdos de disciplinas heterogêneas. Essa costuma ser a primeira fase da constituição de equipes de trabalho interdisciplinar. Cada uma das disciplinas existe, com seu próprio estatuto, e independente das demais. É o que afirma Zabala.

A multidisciplinaridade é a organização de conteúdos mais tradicional. Os conteúdos escolares apresentam-se por matérias independentes umas das outras. As cadeiras ou disciplinas são propostas simultaneamente sem que se manifestem explicitamente as relações que possam existir entre elas (ZABALA, 2002, p. 33 in: SOMMERMAN, p.31, 2006).

- Interdisciplinaridade: exige uma convergência de pontos de vista. É aquela que faz valer os valores da complementaridade, do cruzamento, da combinação. Há uma cooperação, um ponto de confluência entre as várias disciplinas, uma reciprocidade nos intercâmbios e enriquecimentos mútuos.
- Transdisciplinaridade: passagem a um estágio qualitativamente superior. Remete a algo da ordem da fusão unificadora. Santomé (*apud* SOMMERMAN, p. 34) afirma que a transdisciplinaridade “é a etapa superior de integração. Trata-se da construção de um sistema total, sem fronteiras sólidas entre as disciplinas”. Segundo Márcio d’Amaral, “a transdisciplinaridade corresponderia a uma ruptura em profundidade com a própria lógica da disciplina: o próprio prefixo ‘trans’ já traz em si a ideia de ‘ir além’, ‘estar em movimento’” (*apud* LINHARES, 1999, p. 15). De acordo com Campos (2005), no domínio transdisciplinar, não são feitos recortes disciplinares, ou seja, não se está de posse de “ferramentas”

disciplinares. Fazenda demonstra uma postura crítica em relação ao nível transdisciplinar: de acordo com ela, este apresenta uma incoerência básica, “pois a própria ideia de uma transcendência pressupõe uma instância científica que imponha sua autoridade às demais, e esse caráter impositivo da transdisciplinaridade negaria a possibilidade do diálogo, condição *sine qua non* para o exercício efetivo da interdisciplinaridade” (FAZENDA, 1991, p. 31).

Uma pergunta, por exemplo, nasce transdisciplinar, ligada a tudo. **Transcende** qualquer área. A resposta transita pelas áreas.

A interdisciplinaridade seria a troca de informações entre duas ou mais disciplinas, visando o enriquecimento destas e o surgimento de um novo saber. É o que diz Fazenda, Marquez, Linhares, Barthes e Gusdorf:

Interdisciplinaridade é um termo utilizado para caracterizar a colaboração existente entre disciplinas diversas ou entre setores heterogêneos de uma mesma ciência. Caracteriza-se por uma intensa reciprocidade nas trocas, visando um enriquecimento mútuo (definição usada pelo Dr. Angel Diego Marquez, em conferência proferida na USP, em nov/73, in: FAZENDA, 1979, p.41).

[...] para praticar a interdisciplinaridade, precisamos não só superar as disciplinas – o que significa conhecer seus limites e ressignificar seus conceitos – mas também sermos capazes de estabelecer conexões múltiplas e intertextuais com novos movimentos e novas lógicas, que impliquem outros regimes metodológicos (LINHARES, 1999, p. 32).

O interdisciplinar de que tanto se fala não está em confrontar disciplinas já constituídas das quais, na realidade, nenhuma consente em abandonar-se. Para se fazer interdisciplinaridade, não basta tomar um “assunto” (um tema) e convocar em torno duas ou três ciências. A interdisciplinaridade consiste em criar um objeto novo que não pertença a ninguém (BARTHES, *O Rumor da Língua*, 1988:99, in: MACHADO, 1993, p.25).

Estudos interdisciplinares autênticos supõem uma pesquisa comum e à vontade, em cada participante, de escapar ao regime de confinamento que lhe é imposto pela divisão do trabalho intelectual. Cada especialista não procuraria somente instruir os outros, mas também receber instrução. Em vez de uma série de monólogos justapostos, como acontece geralmente, ter-se-ia um verdadeiro diálogo, um debate por meio do qual, assim se espera, se consolidaria o sentido da unidade humana (GUSDORF, 1984:35, in: MACHADO, 1993, p.33).

Mais do que conhecer o conceito, para se fazer interdisciplinaridade, tem-se que adotar uma postura interdisciplinar, na qual seja possível revelar as potencialidades de cada pesquisador, trocando-se o monólogo pela prática dialógica, não se importando quão árdua seja essa troca. É preciso estar aberto a inovações, tornar-se disponível para saber que existem novas possibilidades de conhecimento. Deve-se transitar pelas disciplinas, o que acarreta um ir e vir entre o estranhamento e a familiaridade.

O músico e também matemático Pierre Boulez também reconhece o enriquecimento que o diálogo entre diferentes áreas do conhecimento proporciona:

Reconheço que nada é mais frutífero que o contato com outra disciplina: ela nos oferece uma maneira diferente de ver as coisas, enriquece-nos com pontos de vista nos quais não teríamos pensado antes, estimula a nossa inventividade e obriga a nossa imaginação a uma “radioatividade” mais elevada (BOULEZ, 1992, p.36).

Fazenda (1995) comenta sobre a verificação, nas suas pesquisas sobre interdisciplinaridade, do valor dos **registros** das situações vividas num trabalho interdisciplinar, os quais propiciam a indicação de fracassos e êxitos obtidos.

No seu livro “Dicionário em Construção” anuncia cinco princípios que formam a base da interdisciplinaridade: Coerência, Humildade, Espera, Respeito e Desapego. Cada princípio contém vários verbetes que foram escritos por seus orientandos. Procuram, por meio desses princípios, nortear a postura do professor interdisciplinar.

Para Gusdorf (1970) (*apud* FAZENDA, 1979), o que impede a eliminação das barreiras entre as disciplinas é basicamente o “comodismo”, pois é mais fácil trabalhar sob a forma parcelada do que discutir as ideias alheias ou colocar em discussão as próprias ideias (*Interdisciplinaire (connaissance)*, verbete de GUSDORF, G. em Enciclopedia Universalis, p. 1086 a 1090).

No Brasil, além do “comodismo”, podemos citar, como fator de impedimento a desenvolver atitudes interdisciplinares, a não reorganização administrativo-pedagógica por parte das políticas gestoras do sistema educacional. É o que diz Pereira:

No Brasil, apesar de a legislação educacional vigente indicar a interdisciplinaridade como uma de suas diretrizes curriculares, as políticas gestoras do sistema educacional não priorizam a reorganização administrativo-pedagógica necessária para sua efetivação na prática das instituições escolares. Falta atitude! (PEREIRA, in: FAZENDA, 2006, p. 172).

Tem-se que buscar uma transformação por meio da construção coletiva de um novo conhecimento sem que haja rompimento com o passado e com as práticas já consolidadas, sem que se desorganize o que está organizado, sem que se desconsiderem os conteúdos tradicionalmente trabalhados, caso contrário, esse processo tenderá a perecer, pois romperá com o movimento natural da história. É o que afirma Fazenda:

Interdisciplinaridade não se ensina, nem se aprende, apenas vive-se, exerce-se. Interdisciplinaridade exige um engajamento pessoal de cada um. Todo o indivíduo engajado nesse processo será não o aprendiz, mas, na medida em que familiarizar-se

com as técnicas e quesitos básicos, o criador de novas estruturas, novos conteúdos, novos métodos (FAZENDA, 1979, p.56).

O encontro com o novo demanda o respeito ao velho. Negar o velho é uma atitude autoritária que impossibilita a execução de uma didática e de uma pesquisa interdisciplinar (FAZENDA, 2001, p. 3).

Fazenda (1995) chama a atenção de que, para a realização de um projeto interdisciplinar, existe a necessidade de um projeto inicial que seja suficientemente claro, coerente e detalhado, a fim de que as pessoas nele envolvidas sintam o desejo de integrá-lo.

2.4 A Interdisciplinaridade e a Especialização

Na época da Idade Média, um sábio conhecia várias disciplinas, de modo que tinha facilidade em pensar interdisciplinarmente.

Durand lembra que sábios do fim do século XIX e começo do século XX possuíram uma formação amplamente pluridisciplinar, incluindo a música entre os seus conhecimentos:

[...] os sábios criadores do fim do século XIX e dos dez primeiros anos do século XX (esse período áureo da criação científica, em que se perfilam nomes como os de Gauss, Lobatchevski, Riemann, Poincaré, Hertz, Becquerel, os Curie, Rutherford, Pasteur, Max Plank, Bohr, Einstein) tiveram todos uma formação largamente pluridisciplinar, herdeira do velho trivium (as humanidades) e do *quadrivium* (os conhecimentos quantificáveis e, portanto, também a música) medievais (DURAND, 1991, p. 36, *apud* POMBO, 2004).

Em meados de 1900, as ciências começaram a se especializar. Oppenheimer, em um texto de 1955 – *Science and the Common Understanding* –, descreve essa situação, em que se conhece com profundidade cada vez mais a respeito de menos assuntos (OPPENHEIMER, 1955, *apud* POMBO, 2004):

Hoje não só os nossos reis que não sabem matemática, mas também os nossos filósofos que não sabem matemática e para ir um pouco mais longe, são também os nossos matemáticos que não sabem matemática. Cada um deles conhece apenas um ramo do assunto, e escutam-se uns aos outros com o respeito simplesmente fraternal e honesto. [...] O conhecimento científico hoje não se traduz num enriquecimento da cultura geral. Pelo contrário, é posse de comunidades altamente especializadas, que se interessam muito por ele, que gostariam de o partilhar, que fazem esforço por o comunicar mas não faz parte do entendimento humano comum... O que temos em comum são os simples meios pelos quais aprendemos a viver, falar e trabalhar juntos. Além disso, desenvolveram-se as disciplinas especializadas como os dedos da mão: unidas na origem mas já sem contacto algum.

Lord Snow, no seu livro intitulado *Two cultures*, de 1959, chama a atenção para a ruptura profunda entre duas ciências: ciências da natureza (das quais faziam parte os intelectuais literatos) e ciências do espírito (do domínio dos cientistas). Snow considerava, como razão para essa separação, o caráter incompleto de cada uma dessas culturas: os cientistas nunca haviam lido uma obra literária e os literatos desconheciam leis básicas da física, por exemplo. Ao se especializarem em um determinado assunto, os pesquisadores deixam de lado tudo o que não parece ter ligação com esse assunto. Pombo (2004) aponta, além disso, para o problema da patentificação de áreas de investigação. Pesquisas que ainda não começaram já têm sua patente registrada, impedindo que outros pesquisadores atuem no mesmo projeto, retirando toda a possibilidade da troca de ideias e de descobertas simultâneas entre pesquisadores.

Gusdorf, em carta pessoal de 1977, dirigida a Ivani Fazenda, assim discorre sobre o assunto:

O que se designa por interdisciplinaridade é uma atitude epistemológica que ultrapassa os hábitos intelectuais estabelecidos ou mesmo os programas de ensino. Nossos contemporâneos estão sendo formados sob um regime de especialização, cada um em seu pequeno esconderijo, abrigado das interferências dos vizinhos, na segurança e no conforto das mesmas questões estéreis. Cada um por si e Deus por todos [...] A idéia de interdisciplinaridade é uma ameaça à autonomia dos especialistas, vítimas de uma restrição de seu campo mental. Eles não ousam suscitar questões estranhas à sua tecnologia particular e não lhes é agradável que outros interfiram em sua área de pesquisa (GUSDORF, 1977, *apud* FAZENDA, 1991).

Essa situação começa a ser completamente invertida a partir dos anos 70. A fragmentação tende a aumentar, mas, em termos conceptuais e em termos de pesquisa, há inúmeras atividades e inúmeras práticas que vão no sentido da interdisciplinaridade. O progresso da investigação encontra-se no cruzamento dos resultados obtidos entre as diversas disciplinas, ou seja, deixou de ser linear e resultante de especializações isoladas e passou a ser dependente de uma cooperação interdisciplinar. É o que diz Pombo (2004):

Trata-se de reconhecer que determinadas investigações reclamam a sua própria abertura para conhecimentos que pertencem, tradicionalmente, ao *domínio* de outras disciplinas e que só essa abertura permite aceder a camadas mais profundas da realidade que se quer estudar. Estamos perante transformações epistemológicas muito profundas. É como se o próprio mundo resistisse ao seu retalhamento disciplinar (POMBO, 2004, p. 9).

Trata-se de compreender que o progresso do conhecimento não se dá apenas pela especialização crescente, como estávamos habituados a pensar. A ciência começa a aparecer como um processo que exige também um olhar transversal. Há que olhar

para o lado para ver outras coisas, ocultas a um observador rigidamente disciplinar (POMBO, 2004, p. 10)

Sousa Filho cita Jantasch & Bianchetti que colocam que a especialização e o saber compartimentalizado exigem atualmente cada vez mais uma síntese:

A fragmentação do conhecimento ou a especialização passa a ser assumida como uma ‘patologia’ ou, pior ainda, como uma cancerização, isto é, uma doença que fatalmente compromete a produção do conhecimento (SOUSA FILHO, 2002, p.63).

Pombo (2004) diz que as universidades devem mudar as formas de articulações disciplinares, reorganizando suas divisões em faculdades e departamentos a fim de que os estudantes possam constituir projetos interdisciplinares, flexíveis e interdepartamentais, nos quais pesquisas integradas possam ser desenvolvidas.

Ora, na medida em que a universidade não é uma escola, na medida em que ela é um polo de investigação, um lugar de produção de conhecimento novo, ela vai ter que acompanhar as transformações da ciência contemporânea, o mesmo é dizer, vai ter que adoptar, e simultaneamente apoiar, as exigências interdisciplinares que atravessam hoje a construção de novos conhecimentos. E, para isso, vai ter que repensar as formas clássicas de articulação disciplinar, vai ter que reorganizar as suas divisões internas em faculdades e departamentos. Ou seja, aquilo que hoje é pedido às universidades, o que está a acontecer - mais na vossa e menos na minha - é justamente a constituição de institutos, centros, laboratórios e projectos de investigação interdisciplinares, de programas interdepartamentais de mestrado e doutoramento, de cursos flexíveis nos quais os estudantes possam encontrar seu próprio (per)curso por entre a variedade de cadeiras, módulos, seminários que lhes são propostos¹ (POMBO, 2004, p. 12).

Pretendo que este trabalho seja um passo inicial no sentido de reunir estudantes dos departamentos de música e matemática para que produzam conhecimentos interdisciplinares que possam ser utilizados no ensino e na divulgação do conhecimento.

---

¹ Texto mantido em língua portuguesa original (Portugal).

3 CONCEITOS E ESTRUTURAS MATEMÁTICAS EM MÚSICA

Este capítulo pretende apresentar alguns conceitos e estruturas matemáticas passíveis de serem utilizadas como ferramenta tanto na análise quanto na criação musical.

3.1 A Razão Áurea na Música

Com o intuito de compreender melhor as análises envolvendo a seção áurea, define-se, a seguir, este conceito.

3.1.1 φ , a razão áurea

Em matemática, a razão de dois números, a e b , é simplesmente o quociente de a por b , a/b . A razão áurea é a razão obtida da seguinte maneira: dado um segmento de comprimento ℓ ,

Figura 3 – Segmento de comprimento ℓ

deve-se encontrar um ponto neste segmento que o divida em duas partes de tal modo que o comprimento da parte maior do segmento (seja x) dividido pelo todo (ℓ) seja igual ao comprimento da parte menor ($\ell - x$) dividida pela parte maior (x).

Figura 4 – Divisão do segmento segundo a seção áurea

Matematicamente, teríamos a seguinte equação:

$$\frac{x}{l} = \frac{l-x}{x} \quad (1)$$

ou seja:

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

a qual, resolvendo-se em relação a x , obtém-se:

$$x = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

ou, como nos interessa apenas o valor positivo,

$$\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi \approx 0.618$$

Com a intenção de apresentar uma interpretação geométrica para φ , sejam a e b os comprimentos indicados na figura 5, a seguir.

Figura 5 – Segmento dividido pela razão áurea

Em termos de a e b , a igualdade (1) fica:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Uma interpretação geométrica é apresentada na figura 6, a seguir.

Figura 6 – Retângulo de ouro

Nesta última figura, é interessante verificar que a razão do lado maior para o lado menor é a mesma tanto no retângulo maior quanto no menor e ambas são iguais a φ .

A razão áurea, largamente encontrada na natureza, no *design* de carros, na moda, em rótulos e instrumentos musicais, aparece também em obras de arte, como por exemplo, na *Mona Lisa* (1504-1505), de Leonardo da Vinci (1452 – 1519) e na arquitetura clássica, como o *Parthenon*. Na figura 7 estão destacados alguns retângulos áureos nestas obras.

Figura 7 – O Parthenon e a Mona Lisa

Os gregos buscavam na arquitetura e na escultura a perfeição, um ideal de beleza, por meio do equilíbrio e da harmonia. Cyrino (2003) cita o comentário de Ostrower (1998) sobre esta razão:

[...] desde o início esta proporção surgiu como que envolta numa áurea transcendental. Num misto de reverência e assombro ela foi denominada ‘proporção divina’, ‘corte de ouro’, ‘áurea’, sendo especificamente reservada para obras de cunho místico e de exaltação espiritual. E ao planejarem e executarem estas obras, e cada mínimo detalhe, os artistas e arquitetos tinham plena consciência de que

estavam lidando com valores mais sublimes do ser humano” (OSTROWER, 1998, p.244).

3.1.2 Sobre a razão áurea nas composições musicais

O equilíbrio de uma peça musical é de vital importância. Peças podem ser tediosas se houver um excesso de lentidão ou sufocantes, caso haja muita informação em um curto espaço de tempo. A Seção Áurea pode ajudar na obtenção deste equilíbrio. Apresentaremos, a seguir, a pesquisa do matemático John Putz, da Universidade de Alma College – Michigan sobre a relação entre a Seção Áurea e as Sonatas de Mozart e teceremos algumas considerações sobre os resultados por ele apresentados. Em seguida analisaremos a presença da Seção Áurea nas composições de Villa Lobos, Bartók e Debussy. Não se trata de reduzir aqui a análise da estética musical de uma composição à presença da seção áurea no contexto de número de compassos, mas sim de fornecer subsídios para refletir acerca desta possível componente matemática para análise musical, não perdendo de vista a grande complexidade associada ao conceito de estética em música.

3.1.3 As sonatas de Mozart e a razão áurea: a pesquisa de Putz

As obras musicais de Mozart (1756-1791) são consideradas de um brilho incomum pela maioria das pessoas afeitas à música erudita. Sua música tem sido reverenciada por várias gerações. Ao total, Mozart compôs 19 sonatas, a primeira delas aos 18 anos e a maioria das outras nos quatro anos seguintes. A estrutura de composição de uma sonata do período clássico constava de, geralmente, três movimentos, a maioria das vezes o primeiro rápido, o segundo lento e o terceiro novamente rápido. Cada movimento consistia de três seções principais:

- Exposição, na qual o tema principal é apresentado;
- Desenvolvimento, no qual o tema é desenvolvido;
- Recapitulação, onde o tema principal é reapresentado e reafirmado.

Estas três seções eram incorporadas em duas partes:

- 1ª. Parte: Exposição;
- 2ª. Parte: Desenvolvimento e Recapitulação.

A regra era repetir cada uma das partes, o que era indicado pelo símbolo .

O esquema, a seguir, representa a Forma Sonata:

Figura 8 – Estrutura da forma sonata clássica

Putz (1995) analisou todas os movimentos das sonatas de Mozart que eram divididos em duas partes. Dos 56 movimentos, 29 eram construídos dessa maneira. Para cada movimento foram contados os números de compassos da Exposição (a) e o número de compassos do Desenvolvimento e Recapitulação (b). Estes foram dispostos na tabela 1 a seguir. A primeira coluna identifica a sonata e o movimento, conforme catalogado pelo musicólogo Köchel². A segunda coluna apresenta o número de compassos da primeira parte (a), a terceira o número de compassos da segunda parte (b) e a última o número total de compassos do movimento (a+b).

Para avaliar se estas partes seguiam a seção áurea, Putz utilizou um gráfico de dispersão de $a+b$ por b . Desse modo, se Mozart tivesse dividido os movimentos de acordo com a seção áurea, então os pontos deste gráfico ficariam sobre a reta $b = \varphi(a + b)$.

² A cada obra de Mozart corresponde um índice Köchel, ou seja, um número precedido da letra K ou das letras KV (do alemão *Köchelverzeichnis*: "Catálogo Köchel"). Assim, a 433ª obra do compositor (*Männer suchen stets zu naschen*. *Arie für Baß und Orchester*) por exemplo, é identificada, simplesmente, pelo índice K 433 ou KV 433).

Tabela 1 – Número de compassos das partes dos diversos movimentos

Köchel	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a + b</i>
279, I	38	62	100
279, II	28	46	74
279, III	56	102	158
280, I	56	88	144
280, II	24	36	60
280, III	77	113	190
281, I	40	69	109
281, II	46	60	106
282, I	15	18	33
282, III	39	63	102
283, I	53	67	120
283, II	14	23	37
283, III	102	171	273
284, I	51	76	127
309, I	58	97	155
311, I	39	73	112
310, I	49	84	133
330, I	58	92	150
330, III	68	103	171
332, I	93	136	229
332, III	90	155	245
333, I	63	102	165
333, II	31	50	81
457, I	74	93	167
533, I	102	137	239
533, II	46	76	122
545, I	28	45	73
547, I	78	118	196
570, I	79	130	209

A linearidade destes dados foi impressionante. A esse gráfico, Putz adicionou duas retas (figura 9): a reta $b = \varphi(a + b)$ e a reta de regressão linear, cuja equação é $b = 0,6091(a + b) - 0,003241$. O valor de r^2 , o qual pode-se obter no excel, é 0,990, confirmando esta linearidade. O r^2 é um número que dá o grau de erro em um ajuste. Quanto mais próximo de 1, menor é o erro.

Figura 9 – Gráfico de dispersão de b por a+b, com duas retas:
 $b = \varphi(a + b)$ (superior) e a reta de regressão linear (inferior), feito no Geogebra

Pode-se notar que a reta $b = \varphi(a + b)$ (superior) mal difere da outra que se ajusta aos dados.

Se o movimento é dividido por meio da razão áurea, Putz inferiu que tanto $\frac{b}{a+b}$ quanto $\frac{a}{b}$ deveriam ser próximos de φ e fez outro gráfico de dispersão, desta vez b x a, para analisar a segunda razão. Novamente, os dados pareceram muito lineares, apesar de não tão lineares como no gráfico de a+b por b. Foram plotadas novamente duas retas, a reta $a = \varphi b$ e a reta de regressão linear. Segundo a análise de Putz, a reta teria equação $a=0,6260b+1,360$, mas o software Excel deu uma equação um pouco distinta: $a=0,6257b + 1,72664$ (Veja Figura 10).

Figura 10 – Gráfico de dispersão de a por b, com duas retas:
 $a = \varphi b$ (inferior) e a reta de regressão linear (superior).

Percebeu-se que ambas diferem um pouco, a superior sendo agora a de regressão linear porque seu coeficiente angular, 0,6257, é ligeiramente maior que φ , além de ter surgido o coeficiente linear 1,72664. O valor de r^2 é agora 0,9406, o que traduz um bom ajuste também, apesar de não tão bom quanto o anterior.

Este resultado segundo Putz, não é desanimador, se lembrarmos que a razão áurea é encontrada na sequência de Fibonacci, a qual é construída de modo que $X_0 = a, X_1 = b, X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$, com a e b não simultaneamente nulos e que a razão entre termos consecutivos $\frac{X_n}{X_{n+1}}$ é tão mais próxima de φ quanto maior for n. Desse modo, para quaisquer a e b, $0 \leq a \leq b$, a razão $\frac{b}{a+b}$ estará mais perto de φ do que a razão $\frac{a}{b}$. Por meio desta observação, Putz justificou os resultados encontrados.

3.1.4 Sobre a irracionalidade de φ e a razão áurea na música

Em qualquer tentativa que se faça para utilizar a razão áurea em música, os números envolvidos serão sempre inteiros. Portanto, qualquer combinação deles resultará em um número racional. Como φ é irracional, obteremos sempre algo aproximado. Em particular, nas sonatas de Mozart, as relações $\frac{\text{parte menor}}{\text{parte maior}}$ serão números racionais. Assim, a divisão de

um movimento de uma sonata em duas partes nunca será exatamente a áurea. Entretanto, poderíamos encontrar as divisões a^* e b^* dos movimentos que mais se aproximariam da áurea (basta multiplicar o número de compassos por φ e aproximar o resultado ao inteiro mais próximo). Chamaremos esta divisão de “áurea*”, a qual está representada na tabela 2, a seguir.

Tabela 2 – Número de compassos das partes dos diversos movimentos segundo a razão áurea*

Número Kochel, movimento	a+b	a^*	b^*	a^*/b^*
279,I	100	38	62	0.6129032
279,II	74	28	46	0.6086957
279, III	158	60	98	0.6122449
280,I	144	55	89	0.6179775
280,II	60	23	37	0.6216216
280,III	190	73	117	0.6239316
281,I	109	42	67	0.6268657
281,II	106	40	66	0.6060606
282,I	33	13	20	0.65
282,III	102	39	63	0.6190476
283,I	120	46	74	0.6216216
283,II	37	14	23	0.6086957
283,III	273	104	169	0.6153846
284,I	127	49	78	0.6282051
309,I	155	59	96	0.6145833
311,I	112	43	69	0.6231884
310,I	133	51	82	0.6219512
330,I	150	57	93	0.6129032
330,III	171	65	106	0.6132075
332,I	229	87	142	0.6126761
332,III	245	94	151	0.6225166
333,I	165	63	102	0.6176471
333,II	81	31	50	0.62
457,I	167	64	103	0.6213592
533,I	239	91	148	0.6148649
533,II	122	47	75	0.6266667
545,I	73	28	45	0.6222222
547, I	196	75	121	0.6198347
570,I	209	80	129	0.620155

Os gráficos de dispersão $a+b$ x b^* e b^* x a^* , juntamente com as retas de regressão linear estão apresentados na figura 11 a seguir.

Figura 11 – Gráficos de dispersão $a+b$ x b^* e b^* x a^* e as respectivas retas de regressão linear

Plotando-se as retas de regressão linear, a original e a áurea* (a superior e a inferior, respectivamente na figura 12 a seguir) e a reta $a=\phi b$, tem-se:

Figura 12 – Retas de regressão linear e a reta $a=\phi b$

Os gráficos podem ser feitos no mesmo sistema cartesiano, visto que $a+b=a^*+b^*$. Percebe-se que a reta de regressão linear da divisão áurea*, $a^*=0,6153b^* + 0,2458$ praticamente não se difere da reta áurea, tanto no gráfico $a+b$ x b^* quanto no gráfico b^* x a^* ,

ou seja, seria possível uma divisão dos movimentos das sonatas mais próxima da seção áurea do que a que foi utilizada por Mozart.

3.1.5 Outros aspectos relacionados com a razão áurea em sonatas de Mozart

Para as peças que vamos considerar, utilizaremos o Ponto Áureo que é obtido pela multiplicação do número de compassos da peça por 0,618.

Observa-se que no segundo movimento da sonata KV 330, composto na forma A-B-A', o Ponto Áureo se dá justamente quando a reexposição do tema é iniciada. A parte A' difere da parte A somente pelos 4 últimos compassos, que se trata de uma coda.

No segundo movimento da sonata KV 332, o Ponto Áureo está um pouco antes do compasso 25 (a multiplicação do número de compassos por 0,618 é 24,72). Neste ponto, a composição muda para o modo menor e o tema é trabalhado com um maior cromatismo, o que produz uma mudança de caráter e aumento de tensão na composição.

No terceiro movimento da sonata KV 533, o Ponto Áureo está no compasso 116. Trata-se de um Rondó, composição cuja característica é voltar ao tema várias vezes durante a peça. Neste compasso, Mozart encerra uma seção e começa uma outra na qual volta ao tema, mas com um maior rendilhamento, obtido por meio de mais notas e cromatismo.

No segundo movimento da sonata KV 310 o ponto de ouro está no compasso 53, no qual o tema é reapresentado. Também no primeiro movimento da sonata KV 576 o ponto Áureo está no compasso 69, no qual o tema é reexposto. No terceiro movimento desta mesma sonata o ponto de ouro se encontra em um compasso que começa a reexposição do tema (compasso 117), só que agora é a mão esquerda que o apresenta.

3.1.6 A razão áurea em obras de Villa Lobos, Bartók e Debussy

3.1.6.1 Villa Lobos

Villa-Lobos (1887–1959) utilizou, consciente ou não, a Razão Áurea na sua composição “Choros no. 5”, composição também chamada de “Alma Brasileira”, uma das

peças mais executadas do seu repertório pianístico. Foi composta em 1925. Esta peça consta de 80 compassos e, como observado por Assis (2009), o auge do seu desenvolvimento, com a notação *fff*, encontra-se no compasso 50, local onde encontra-se a seção áurea ($50:80=5:8=0,625$).

3.1.6.2 Bartók

Lendvai (1971) estudou detalhadamente a música de Bartók (1881-1945) e constatou a presença da seção áurea em várias de suas composições, algumas das quais exemplificadas a seguir, mas esquivava-se da questão se o uso desta foi consciente, visto que Bartók não deixou evidência alguma em cartas ou rascunhos. Por outro lado, seria muito difícil Bartók ser desconhecedor de tal seção, visto que era um leitor voraz e um ávido estudante de história natural.

Lendvai, ao analisar um movimento da fuga de *Música para cordas, percussão e celesta* de Bartók, mostra que os oitenta e nove compassos do movimento são divididos em duas partes, uma com cinquenta e cinco compassos e outra com trinta e quatro compassos, divididos pelo clímax em *fff*. Cada uma dessas partes é dividida novamente em números áureos (que seguem a sequência de Fibonacci) pela colocação ou retirada das surdinas. Outras divisões são marcadas pela mudança de temas. A figura 13, a seguir, ilustra estas divisões.

Figura 13 – Seções da peça *Música para cordas, percussão e celesta* de Bartók

Todos estes números seguem a sequência de Fibonacci, com as razões mais próximas possíveis da áurea, levando em conta um número inteiro de compassos..

O primeiro movimento da *Sonata para dois pianos e percussão* de Bartók compreende 443 compassos, e, portanto sua seção áurea é $443 \times 0,618$, ou seja próximo de 274. A recapitulação começa precisamente no compasso 274.

O Primeiro Movimento de *Contrastes* (trio para violino, clarinete e piano) compreende 93 compassos, e sua seção áurea ($93 \times 0,618$) de novo marca o começo da recapitulação na metade do compasso 57.

O Primeiro Movimento do *Divertimento* (para orquerstra de cordas) se compõe de 563 compassos. A seção áurea de 563 ($563 \times 0,618 = 348$) coincide também com a recapitulação.

No Vol. VI de *Mikrokosmos* pode-se notar que a seção áurea de “Variações livres” , com 82 compassos, chega perto do *Molto più calmo* no compasso 51. ($82 \times 0,618 = 51$).

3.1.6.3 Debussy

Howat percebeu que várias composições de Debussy (1862-1918) contêm sistemas proporcionais intrincados, os quais podem explicar a natureza das suas formas musicais não ortodoxas. Mais importante que tudo, que mostram maneiras pelas quais a forma pode ser usada para projetar com máxima precisão as qualidades dramática e expressiva das obras (HOWAT, 1983, p.1).

Debussy buscava em sua música um mundo de sensações e formas em constante renovação, que fosse livre de modelos padronizados. Ao mesmo tempo, preocupava-se em buscar um equilíbrio dentro desta forma livre. Isto pode ser comprovado por uma carta escrita ao seu editor, Durand, na qual ele explica que, na segunda peça de *En blanc et noir*, ele estava recolocando uma longa passagem que havia sido cortada do seu manuscrito porque suas preocupações com as proporções pediam esta mudança.

Uma das mais claras aplicações da seção áurea na música de Debussy ocorre em duas séries de três peças que escreveu para piano, chamadas “Images”, uma de 1905 e outra de 1907. Comentaremos, a seguir, a análise da primeira peça da série de 1905, *Reflets dans l’eau*, feita por Howat (1983).

Reflets dans l'eau

Composta no verão de 1905, foi a última peça composta para integrar a primeira série de *Images*. De acordo com sua correspondência com Jacques Durand, a versão final foi composta em apenas três dias e substituiu a versão anterior com a qual Debussy estava insatisfeito.

A construção da peça é irregular, mais se aproximando da forma *rondó* construída sobre dois motivos, sejam estes A e B. O motivo A começa e encerra a peça, aparecendo, além disso, nos compassos 35, 71 e 81, nesta última aparição marcando o início da *coda*. O motivo B aparece nos compassos 24, 50 e 78. Dessas três entradas, a central (compasso 50) é a de maior importância, pois é onde ocorre o clímax da peça e após esta, o tema B domina toda a seção até o compasso 70.

Dessa forma, a peça segue a sequência ABABABA, porém o termo *rondó* é inadequado para descrever a forma da peça, visto que existem também distintas seções musicais que se iniciam nos compassos 43, 48, 56 e 69.

A peça é dominada por trechos que assemelham-se a ondas, a primeira seção apresenta uma onda com clímax nos compassos 30 e 31, seguida de uma segunda onda maior que se inicia no compasso 43 e atinge seu clímax nos compassos 57-58. Observa-se que a gradação da tensão é feita cuidadosamente antes e depois dos clímax.

A peça possui 94 compassos e o seu clímax é atingido depois de 58 compassos. A razão 58/94 corresponde à seção mais próxima da *áurea* possível. A primeira e a última aparições do motivo B marcam outros pontos de ouro intermediários, a primeira um pouco menos precisa, visto que a primeira entrada de B mais próxima do número de ouro seria um compasso antes, no compasso 22. O diagrama a seguir mostra estas seções.

Figura 14 – Seções da peça *Reflets dans l'eau* – Debussy – clímax maior e entradas do tema B
Fonte: HOWAT, 1983, p. 25

Nesta peça, com exceção dos compassos 11 (que é um compasso 3/8) e 23 (que é estendido em uma cadência), a unidade de tempo e a unidade de compasso se mantêm constantes, deste modo, a medida feita por número de compassos é adequada para se analisar a proporção da peça, visto que esta diferença é insignificante. Quando estas medidas variam, é necessário tomar outra unidade de medida, podendo ser o número de pulsos, por exemplo.

Pode-se analisar a peça sob outro ponto de vista, notando-se que a primeira volta ao tema A ocorre no compasso 35 (isto é, após 34 compassos) e marca a primeira seção áurea entre o começo da peça e o começo da seção climática no compasso 56 ($21/34=0,6176$). O mesmo tema volta mais uma vez no compasso 71 (após 70 compassos), dividindo os restantes 39 compassos da peça na segunda seção áurea ($15/24=0,625$). A figura 15, a seguir representa estas seções. Nota-se que o início da seção climática, que ocorre no compasso 56, não divide a peça toda segundo a seção áurea.

Figura 15 – Seções da peça Reflets dans l'eau – Debussy – modulação para Eb e entradas do tema A
Fonte: HOWAT, 1983, p. 25

A peça possui 4 pontos de ênfases tonais, o primeiro ponto no compasso 35 (tônica – Db), o segundo no compasso 56 (supertônica), o terceiro no 69 (dominante com sétima) e o último no compasso 77 (tônica). Esses 4 pontos dividem a peça na seguinte sequência de compassos: 34:21:13:8 (números da sequência de Fibonacci), as quais são mostradas na figura 16, a seguir. A sequência diatônica de toda a peça fica definida, desse modo, como: I-I-II-V⁷-I, explicando a escolha de Eb como a tonalidade utilizada para começar a seção climática.

Figura 16 – Seções da peça *Reflets dans l'eau* – Debussy – sequência diatônica
 Fonte: HOWAT, 1983, p. 27

3.1.7 A questão da intencionalidade na utilização de φ

Quão conscientes estavam os compositores do uso da seção áurea na sua própria música? Será que a presença de tal seção neste contexto é resultado de intuição em seu processo criativo ou será que a razão áurea estava presente racionalmente no processo de composição?

Segundo Howat, há a prova de que, pelo menos em uma ocasião, Debussy utilizou o número de ouro em uma de suas composições: ele escreveu, em agosto de 1903, uma carta a Jacques Durand, dizendo que na peça “*Jardins sous la pluie*” estava faltando um compasso (o compasso em questão era o 123 e a falha tinha sido dele, visto que este não constava no manuscrito), o qual não faria tanta diferença musicalmente, pois era uma mera repetição do compasso anterior, mas este compasso era necessário no que diz respeito ao número, o número divino (“*elle est nécessaire, quant au nombre; le divin nombre*”). Supõe-se que este número era uma referência à Razão Áurea.

Debussy teve amplas oportunidades para se inteirar da razão áurea nos seus anos de formação, pois números e proporções eram ideias em circulação na época entre os artistas franceses simbolistas com os quais Debussy mantinha contato. Isto podia ser confirmado pela exposição “Section d’or” (Seção Áurea) em Paris, em 1912, que expunha quadros de um grupo de pintores.

Na opinião de Putz, Mozart deveria conhecer a seção áurea e deve tê-la usado.

Harckleroad é cético em relação ao uso desta seção, tanto por parte de Mozart, quanto por parte de Bártok. Em seu livro, “*The Math Behind the Music*”, comenta o artigo de Putz e o considera um “entusiasta” da seção áurea: “De fato, se $0 < a < b$, então $b/(a+b)$ sempre

estará mais próxima de φ do que a/b . Assim, concentrando-se em $b/(a+b)$ ao invés de a/b , entusiastas automaticamente favorecem a razão φ . (“In fact, if $0 < a < b$, then $b/(a+b)$ will always lie closer to φ than a/b will. Thus, by focusing on $b/(a+b)$, rather than a/b , enthusiasts automatically stack the deck in φ ’s favor”) (HARKLEROAD, 2006, p. 126).

Afirma que o que Lendvai apresenta é ilusório e que ele força a situação para pegar exemplos de tal modo que contenham algum número de Fibonacci, ora contando o número de compassos, ora contando tercinas, colcheias ou semicolcheias, com a justificativa que o número de compassos seria irrelevante devido à grande variedade de métricas. Segundo ele, o que Lendvai compila da obra de Bartók é superficial. Como Bartók escreveu muitas composições, Harckleroad coloca que seria um milagre se você não pudesse encontrar vários exemplos que contivessem a razão áurea.

Lendvai descobriu que Bartók, quando tinha pouco mais de 30 anos, elaborou para si mesmo um método que integrava todos os elementos da música, entre eles as proporções adequadas de duração das principais divisões de uma peça, que muitas vezes estavam de acordo com a seção áurea. Esta descoberta foi feita por meio das próprias obras de Bartók, visto que ele não explicou seu método a ninguém durante toda a sua vida. Por conta disto, pode-se colocar em dúvida o que Lendvai afirma, mas tudo leva a crer que Bartók utilizou propositalmente tal seção. Tal suposição é corroborada pelo fato de que Bartók amava a natureza: “seguimos a natureza em composição”, escreveu, certa vez e considerava a música folclórica um fenômeno da natureza.

A partir do gráfico exibido na figura 12, pode-se afirmar que Mozart não norteou seu processo criativo pela razão áurea como foi claramente o caso de Bartók nas obras citadas, nas quais é evidente a precisão, no que concerne ao uso desta razão. O caso de Mozart não possui mesma natureza, uma vez que, embora haja uma boa aproximação da regressão linear em cima de suas sonatas em relação a reta áurea, a escolha do ponto de mudança para a segunda parte dos movimentos não possui tamanha precisão. Desse modo, algumas considerações podem ser realizadas. Em uma posição extrema, poder-se-ia afirmar simplesmente que a aproximação encontrada se trata simplesmente de uma coincidência. Por outro lado, se de fato houve uma racionalidade em relação à seção áurea por parte de Mozart em seu processo criativo, seguramente ele não teria norteado sua composição por ela, mas teria a acompanhado dentro do possível, norteando sim, principalmente, pelo seu peculiar processo criativo.

Em muitos casos onde a Seção Áurea se encontra presente, a evidência musical sugere que seja improvável que esta tenha sido aplicada conscientemente. Por outro lado,

Howat cita um estudo feito por John Rutter sobre proporções em composições musicais, no qual ele comenta que as proporções nas obras de Haydn, Mozart e Beethoven têm grande chance de terem sido planejadas previamente por conta do seu envolvimento com a Maçonaria, embora somente o envolvimento de Mozart com a Maçonaria (doutrina fortemente ligada à numerologia) era conhecido como sendo bem completo (RUTTER, 1975, *apud* HOWAT, 1983).

Não é possível afirmar com certeza se houve, de fato, intenção dos compositores em relação ao uso da seção áurea mas, independente disso, a poesia da música pode ser sentida nas prazerosas proporções que tais brilhantes compositores utilizaram para compô-las.

3.2 Autossimilaridade na Música

3.2.1 Sobre a autossimilaridade

Intuitivamente, uma figura apresenta autossimilaridade se ela for formada de partes tais que, cada uma, é uma cópia reduzida da figura toda. Dizemos, nesse caso, que a figura é autossimilar.

A figura 17, a seguir, mostra a samambaia Renda Portuguesa, que lembra esta característica.

Figura 17 – Folha da Samambaia Renda Portuguesa

Observe que a folha é constituída por um talo central com várias ramificações e que cada ramificação tem esta característica e cada ramificação da ramificação também. Veja a figura 18 a seguir.

Figura 18 – Samambaia e suas ramificações

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

Outro exemplo seria o Triângulo de Sierpinski (figura 19), o qual é gerado da seguinte maneira: parte-se de um triângulo equilátero e retira-se o triângulo central. O mesmo procedimento é feito em cada um dos triângulos restantes. Essa operação é repetida seguidamente. Cada vez que esse procedimento é realizado, dizemos que foi feita uma *iteração*. A sequência de figuras assim obtidas tende a uma figura auto-similar.

Figura 19 – Triângulo de Sierpinski

Pode-se citar também o Conjunto de Mandelbrot, o qual só é possível ser gerado por computadores. Cada pixel da tela é colorido de acordo com uma regra baseada nas diversas iterações de uma função complexa.

Figura 20 – Conjunto de Mandelbrot

3.2.2 Autossimilaridade na obra de Bach

A característica de auto-semelhança foi observada na música por Bennett, no coral *Vor deinen Thron tret' ich hiermit BWV 668*, de Bach (21/03/1685 – 28/07/1750). Esta peça encontra-se no final de “A Arte da Fuga” (“Die Kunst der Fuge”, em alemão), sendo famosa pela engenhosidade com que Bach desenvolveu temas relativamente simples.

Neste Prelúdio Coral, o tema principal, o qual está na voz superior (compasso 8), levemente ornamentado, é preparado, resumidamente, pelas outras vozes (por diminuição: duas vezes mais rápido). Outros temas aparecem, a seguir, na peça, (compassos 29 e 40) e também são preparados resumidamente, transladados e invertidos.

Bennett observa que a autossimilaridade desta peça é bastante surpreendente e excepcional na música tradicional. O uso intenso de motivos junto com a complexa e rigorosa escrita contrapontística cria tensão musical e drama na obra. A figura 21 mostra os primeiros compassos deste coral.

Vor deinen Thron tret' ich hiermit

J. S. Bach

Figura 21 – Autossimilaridade no prelúdio coral Thron tret' ich hiermit" BWV 668. As três vozes inferiores imitam o tema em diminuição, o contralto em inversão. Os colchetes indicam outras correspondências

Esta composição foi ditada, já no seu leito de morte, em Julho de 1750, após ter sofrido cirurgias nos dois olhos, ao seu genro e pupilo, Johann Christoph Altnikol. Trata-se de um prelúdio coral para órgão, composto sobre a melodia de um hino de Martinho Lutero. O hino dizia respeito à aproximação da morte. Era composto de duas estrofes, a primeira dizia respeito a uma angústia profunda, e a segunda a algo mais glorioso. A frase que se ajusta a todos os temas compostos por Bach é “*Vor deinen Thron tret' ich hiermit*”. A tradução em Português fica: Diante do seu trono eu me apresento. A mensagem a ser retirada desta peça é que o momento da morte pode ser tanto doloroso quanto glorioso.

Esta composição possui alguns temas que são diminuídos. Um deles é o que aparece a partir do compasso 8 e é mostrado a seguir, na figura 22.

Figura 22 – Tema

Este tema é diminuído no tempo, na terceira voz do coral, nos compassos 1 e 2. Veja a seguir.

Figura 23 – Tema diminuído

Outros temas aparecem e também são diminuídos, invertidos e transladados, caracterizando a autossimilaridade da obra.

3.2.3 Metrópolis – autossimilaridade na composição de Rodolfo Coelho de Souza

Como exemplo de composição que possui uma estrutura autossimilar, podemos citar a obra do brasileiro Rodolfo Coelho de Souza³. Inspirado nas composições de Conlon Nacarrow, Coelho de Souza concebeu a peça *Metrópolis*⁴, a qual faz parte de um ciclo de peças chamado *Tristes Trópicos* e foi elaborada para ser executada por computadores.

A peça é concebida dentro de uma estrutura composta por cinco notas, as quais formam quatro intervalos. A princípio, foram escolhidos quatro intervalos em ordem crescente, de um semitom a uma terça maior⁵: {1,2,3,4}. Estes quatro intervalos foram reordenados, com o auxílio do computador, de todas as maneiras possíveis e a seguir transpostos para todas as 12 tonalidades possíveis, gerando um total de 288 conjuntos compostos com estas notas.

Total de conjuntos = Permutação de 4 elementos · 12 tonalidades

Total de conjuntos = $4! \cdot 12 = 24 \cdot 12 = 288$.

³ Rodolfo Coelho de Souza foi aluno de Olivier Toni (teoria e composição), Cláudio Santoro (orquestração) e Conrado Silva (eletroacústica). Formado pela Politécnica da USP, é mestre em musicologia pela ECA-USP e doutor em composição pela University of Texas at Austin. Atualmente é professor Livre-docente da USP.

⁴ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 9.

⁵ Verificar definição de intervalo no capítulo 3.4.2, pág. 85.

Esses conjuntos foram transformados em matrizes 6x4, cada qual referente a uma altura inicial. A figura 24, a seguir, ilustra duas destas coleções, com os elementos das matrizes notados acima das notas, com a notação tradicional. A primeira começa com a nota mib e a outra é transposta um semitom acima.

The figure displays two handwritten musical matrices, each 6 rows by 4 columns. The first matrix is labeled 'Mib' and the second is labeled 'Mi'. Each matrix consists of 6 rows and 4 columns of musical staves. Above each staff, a number in a box indicates a specific element of the matrix. The notation is in treble clef with a key signature of one flat (B-flat).

Matrix 1 (Mib):

Row \ Column	1	2	3	4
1	1.1	2.1	3.1	4.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5
6	1.6	2.6	3.6	4.6

Matrix 2 (Mi):

Row \ Column	1	2	3	4
1	1.1	2.1	3.1	4.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5
6	1.6	2.6	3.6	4.6

Figura 24 – Matriz de Combinatórias – Fonte: Coelho de Souza, 1994

Um procedimento análogo foi adotado para a estrutura rítmica das notas e para a estrutura das dinâmicas. As dinâmicas foram anotadas na partitura como números que variam de 50 a 120, os quais indicam a intensidade do som, de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 3 – Indicação das dinâmicas

Número	Intensidade
50	<i>ppp</i>
60	<i>pp</i>
70	<i>p</i>
80	<i>mp</i>
90	<i>mf</i>
100	<i>f</i>
110	<i>ff</i>
120	<i>fff</i>

Estes 8 números foram separados em 4 blocos de 5:

50, 60, 70, 80, 90;

60, 70, 80, 90, 100;

70, 80, 90, 100, 110;

80, 90, 100, 110, 120

A seguir, cada bloco foi permutado de todas as maneiras possíveis e depois dispostos sob as notas aleatoriamente.

São escolhidos, inicialmente, vinte e quatro compassos dentre os possíveis conjuntos, adotando como valores para estas notas os valores fixos de uma mínima, duas semínimas e duas colcheias, de modo que no seu encadeamento (de um compasso para o outro) nunca fosse repetida a mesma sequência rítmica, nem a mesma sequência de altura de notas, nem a mesma dinâmica. Este cuidado é mantido nas quatro vozes que compõem a peça, tanto horizontalmente quanto verticalmente. No compasso 25, o compositor dá início à “autossimilaridade” da obra, refazendo a mesma estrutura “para dentro do próprio desenho” (COELHO DE SOUZA, 1994, p. 114). A figura 25, a seguir mostra esta primeira iteração⁶.

⁶ Iteração: processo chamado na programação de repetição de uma ação.

No lugar da mínima o compositor insere o conjunto de cinco notas, reduzindo a duração de cada uma delas pela metade (uma semínima, duas colcheias e duas semicolcheias) e mantendo a altura apenas da primeira nota, as outras quatro são permutadas, de modo que não haja repetição da mesma sequência rítmica e nem da mesma sequência de altura de notas.

Figura 25 – Metrópolis – Iteração 1

No compasso 49, Coelho de Souza começa outro nível de iteração, reduzindo pela metade novamente o valor das notas (uma colcheia, duas semicolcheias e duas fusas) e inserindo a série de 5 notas no lugar de semínimas adequadamente escolhidas, mantendo novamente a altura apenas da primeira nota, as outras quatro são permutadas, de modo que não se repita a mesma sequência rítmica e nem a mesma sequência de altura de notas.

Figura 26 – Metrópolis – Iteração 2

A figura a seguir mostra os três níveis de iteração.

3.3 Simetria e Música

3.3.1 Introdução

Segundo Weil, simetria é uma ideia segundo a qual os homens, através dos tempos, têm tentado compreender e criar ordem, beleza e perfeição⁷. É natural, ao depararmos com figuras como as mostradas a seguir, considerarmos que há uma simetria. Nelas, a reta pontilhada tem papel preponderante e recebe o nome de eixo de reflexão.

Figura 28 – Fotografia de um vaso

Figura 29 – Figura de uma borboleta

---

⁷ “Symmetry ... is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty and perfection” (WEYL, 1952, p.5).

Entretanto, as simetrias não dizem respeito unicamente a figuras deste tipo, outros tipos de simetria serão definidos adiante. A figura 30, a seguir, conforme veremos, possui outro tipo de simetria.

Figura 30

Do ponto de vista matemático, uma simetria de uma figura F de um plano é definida como uma *isometria*⁸ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que deixa a figura invariante⁹, isto é,

$$T(F) = F.$$

Caso T seja uma reflexão (respectivamente, translação, rotação), a simetria é dita *simetria de reflexão* (respectivamente, *simetria de translação*, *simetria de rotação*).

A figura 31, a seguir, representa uma figura simétrica.

Figura 31 – Simetrias de Translação e Reflexão

Possui, por exemplo, uma simetria de translação, translação que é de comprimento $\overline{OA}$ para a direita e uma simetria de translação de comprimento $\overline{OA}$ para a esquerda. Outros

⁸ Para a definição de isometria ver seção 4.1, pág. 154.

⁹ Adaptado de Bastos, 2006.

exemplos seriam uma simetria de reflexão em torno do eixo Ox e também uma simetria de reflexão em torno do eixo Oy .

A seguir, teceremos algumas considerações sobre os tipos de simetria vistos e faremos algumas aplicações em correlação com a música.

3.3.2 Simetria de reflexão

É a mais familiar do dia a dia. Também é chamada de simetria axial. Uma figura possui este tipo de simetria se pode ser refletida em relação a um eixo (dito eixo de simetria), de modo a ser possível fazer-se corresponder ponto a ponto com a imagem original. A figura 32, a seguir, é um exemplo.

Figura 32 – Gráfico em que os pontos são simétricos em relação ao eixo y

O ponto P_1 é levado por esta simetria em P_2 . Do mesmo modo, qualquer ponto da figura pode ser levado em outro, trocando-se sua abscissa pela sua oposta.

Simetria correlata na música

Uma figura musical como a do exemplo a seguir possui uma simetria de reflexão com respeito a um eixo vertical y que passa pela nota Dó 3. Este tipo de simetria é dita temporal, porque na notação musical o tempo é representado horizontalmente (ver seção 7.2.2). As figuras 33 e 34, a seguir, retratam este tipo de simetria.

Figura 33 – Reflexão temporal em uma figura musical
 Fonte: <http://solomonsmusic.net/diss2.htm>

Figura 34 – Chopin – Estudo opus 10 no. 12 (Revolucionário)
 Simetria de Reflexão Temporal
 Fonte: <http://solomonsmusic.net/diss2.htm>

As figuras musicais podem também ser simétricas em relação ao eixo das alturas, representado verticalmente na notação musical.

Figura 35 – Uma forma reflexiva visual sobre o eixo x
 Fonte: <http://solomonsmusic.net/diss2.htm>

O exemplo da figura 35a é um acorde reflexivo com respeito ao eixo que passa pela nota lá 3. Todas as notas abaixo do lá possuem notas correspondentes às que estão acima e à mesma distância deste (distância = intervalo, neste caso). O exemplo da figura 35b traz uma figura melódica e sua inversão simultânea em relação ao eixo lá 3.

A simetria de reflexão está ligada à Função Inversão que será estudada mais detalhadamente na seção 3.4.4.2.

A figura 36, a seguir, é um exemplo de simetria de reflexão em relação ao eixo x.

Figura 36 – Gráfico em que os pontos são simétricos em relação ao eixo x

Estes mesmos princípios podem ser aplicados à maioria dos parâmetros em música, como por exemplo, dinâmica, textura, forma, tempo e outros:

a) $p \quad \text{---} \quad f \quad \text{---} \quad p$

b) $a \text{ tempo} \text{ ---- } accel. \text{ ---- } ritardando \text{ ---- } a \text{ tempo}$

c) A B A

Algumas escalas musicais também podem ser vistas como simétricas em relação a um eixo, como as escalas diatônica e pentatônica representadas a seguir.

Figura 37 – Escala diatônica

Figura 38 – Escala pentatônica

Em analogia com simetria geométrica, entende-se, nesta representação, a distância entre duas notas como sendo a razão de suas respectivas frequências (altura musical), notas aqui correlacionadas de modo natural com pontos. Sob a perspectiva desta relação, observa-se que as escalas diatônica e pentatônica são simétricas em relação ao eixo que passa pelas notas ré e sol#, como pode ser visualizado nas figuras 39 e 40, a seguir. Para visualizar a simetria das escalas, adotaremos o modelo de um “relógio” para representar as doze notas musicais. Este relógio será também adotado na seção 3.4.

Figura 39 – Simetria de reflexão na escala diatônica

Figura 40 – Simetria de reflexão na escala pentatônica

O próprio teclado convida a visualizar esta simetria.

Figura 41 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota ré

Figura 42 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota sol#

A escala hexatônica, ou, de tons inteiros (formada apenas por tons) possui 6 eixos de simetria.

Figura 43 – Escala hexatônica

Figura 44 – Simetria de reflexão na escala hexatônica

A figura a seguir exibe um Minuetto, da Sonata número 4 para piano de Haydn, na qual o movimento todo pode ser tocado normalmente ou de trás para frente, que soa a mesma coisa. Verifica-se que é possível perceber a simetria por meio de um eixo que passa pelo compasso 11.

Figura 45 – Menuetto al rovescio, da sonata no. 4 para piano de Haydn – Reflexão Temporal com o eixo de simetria no compasso 11.

Fonte: <http://solomonsmusic.net/diss2.htm>

3.3.3 Simetria de translação

Conforme foi visto, uma figura possui este tipo de simetria se existir uma translação que preserve a figura, ou seja, se pudermos movimentar a figura segundo uma dada distância e uma dada direção de tal modo que o seu transformado coincida com a figura original. Em caso afirmativo, a figura deve ser ilimitada.

Figura 46 – Simetria de translação

Simetria correlata na música

Como a figura que possui simetria de translação deve ser infinita, torna-se inviável uma aplicação em música nos moldes das simetrias anteriores. No entanto, o musicólogo Solomon, defende o uso da palavra simetria de translação em música quando existe um motivo que se repete consecutivamente um número (finito) de vezes em uma composição.

Os exemplos a seguir ilustram os casos de translação de motivos musicais horizontalmente (em relação ao tempo) e verticalmente (em relação ao eixo das tonalidades).

Figura 47 – Czerny, opus 849 – Estudo nº 1
Simetria de Translação Horizontal (temporal)

Figura 48 – Debussy – Reflet's dans l'eau
Simetria de Translação Horizontal (temporal) e Vertical

Como pode-se perceber, a translação vertical em melodias gera movimentos paralelos. A figura 48 mostra acordes de quinta e quarta que se movem paralelamente.

Os cânones, gerados por uma imitação melódica, são resultado de uma translação temporal. Um exemplo é apresentado na figura 49, a seguir. Trata-se do trecho inicial de um cânone de Johann Pachelbel (1653-1706) para 3 violinos. Cada violino repete a mesma melodia, defasado dois compassos da entrada do violino anterior.

The image shows the beginning of Pachelbel's Canon for Three Violins. It is written for three violins in G major (one sharp) and 3/4 time. The tempo is marked 'Sostenuto. (♩ = 56)'. The first system shows the three violins with rests for the first two measures, then entering with a melody marked 'p espr.'. The second system continues the melody, with Violino I and II marked 'cresc.' and Violino III marked 'mf'. The third system shows the melody continuing, with Violino I and II marked 'cresc.' and Violino III marked 'tr'.

Figura 49 – Pachelbel – Cânone para 3 violinos

As escalas musicais podem ser transladadas verticalmente, em relação ao eixo das tonalidades. Para a relação intervalar continuar a mesma, é necessário utilizar acidentes, o que reflete na mudança das tonalidades. A escala maior, por exemplo, pode ser transladada de um semitom verticalmente onze vezes, cada vez começando com uma nota. Já a escala hexatônica só pode ser transladada de um semitom uma vez, se a transladarmos mais de uma vez, cairemos na escala original novamente.

Na figura 50, a seguir, as translações são indicadas pelo símbolo T_1 , significando que cada nova escala é uma transposição de um semitom da escala anterior. Maiores detalhes sobre transposição serão vistos na seção 3.4.4.1.

Figura 50 – As onze translações da escala maior

Figura 51 – Duas translações da escala hexatônica,
(a segunda igual à original, só que começando pela nota ré)

3.3.4 Simetria de rotação

Outra simetria possível é a rotação ao redor de um ponto. Uma figura possui este tipo de simetria se existir uma rotação diferente da identidade que preserve a figura. A figura 30, apresentada anteriormente, é um exemplo deste tipo de simetria, a qual repetiremos aqui para maior conforto do leitor.

Figura 52 – Simetria de rotação

Ao rodarmos esta figura de 72° (ou 144° , ou 216° , ou 288°) em torno do seu ponto central, a figura resultante é a mesma que a original.

A letra Z, exibida abaixo, é um outro exemplo. Ao rodar-se esta letra de 180 graus ao redor do seu ponto central, obtém-se novamente a mesma letra. Ao completar uma volta, ela volta a ser ela mesma duas vezes. Por isso, esta é considerada uma figura com rotação composta.

Figura 53 – Simetria de rotação

Um exemplo do uso desta rotação composta pode ser observada na obra de Paul Hindemith (1895 – 1963), *Ludus Tonalis*. O Poslúdio pode ser obtido do Prelúdio por meio de uma rotação de 180° . Se o executante virar a partitura do Prelúdio de cabeça para baixo, ele terá a partitura do Poslúdio. Portanto, a reunião do Prelúdio com o Poslúdio possui a rotação de 180° como simetria. A figura 54, a seguir, mostra um trecho destas peças.

Praeludium

ff free

broad

Moderate (♩ ca. 72)

mf accel.

ff f

Postludium

riten.

broad

free

October 1942

Figura 54 – Trechos iniciais do Prelúdio e Poslúdio do *Ludus Tonalis* de Hindemith

Hindemith era extremamente musical, compunha com notável facilidade e foi o único compositor importante da primeira parte do século que também era um exímio executante e regente. *Ludus Tonalis* faz parte de um grande e didático ciclo de fugas e de interlúdios para piano publicados em 1943.

Um Exemplo na Obra de Bartók

Béla Bartók foi umas das figuras mais importantes a surgir na Europa Oriental (1881-1945). Pesquisou a música popular húngara e fez as primeiras coleções definitivas da música folclórica da Europa oriental. Trabalhou com escalas distintas das comumente utilizadas e lutava por criar uma música diferente da usual, menos previsível e mais ligada à raízes étnicas. As simetrias colaboraram para isso. Bartók as utilizou em suas composições, como, por exemplo, a célula “Z” Bartokiana, a qual nasceu da escala octatônica que é formada por 8 notas na qual semitons e tons alternam-se.

Figura 55 – Escala Octatônica 1-2 (começando por st)

Esta escala possui quatro eixos de simetria, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 56 – Eixos de Simetria da Escala Octatônica 1-2

Pode ser transladada de um semitom apenas duas vezes. As translações são apresentadas na figura 57, a seguir.

Figura 57 – Translações da escala octatônica 1-2

Existe outra forma desta escala, mostrada na figura 58, a seguir, a qual, ao invés de começar com um semitom, começa com um tom.

Figura 58 – Escala Octatônica 2-1 (começando por tom)

Uma característica interessante desta escala é que uma forma se converte na outra após uma reflexão segundo o eixo da nota inicial. Veja, por exemplo, esta conversão tomando a escala da figura 55.

Figura 59 – Reflexão da escala octatônica 1-2 sobre o eixo de dó e sua escrita na forma ascendente

Bartók tomou dois tetracordes desta escala para compor a célula Z. Começando a escala octatônica 1-2 com a nota sol# e tomando dois tetracordes alternados, teremos:

Figura 60 – Escala Octatônica começando da nota sol#, enfatizando dois tetracordes

Primeira célula Z

Segunda célula Z

Figura 61 – Células “Z”

Percebe-se que nesta célula há dois eixos de simetria. A figura 62, a seguir, mostra, por exemplo, os eixos de simetria da segunda célula Z.

Figura 62 – Segunda célula Z: dois eixos de simetria

Além disso, se escrevermos a primeira no sentido ascendente, perceberemos que a segunda é uma translação desta, de 3 semitons. É o que mostra a figura a seguir.

Figura 63 – Células Z: a segunda é uma translação de 3 semitons da primeira

A sua peça para piano, *Da Ilha de Bali*¹⁰ (*Mikrokosmos* vol IV), foi composta com estas células.

Célula A

Célula B

Figura 64 – Figura musical, cujo eixo de simetria, no primeiro caso, está na nota sol# e no segundo caso, na nota solb

A figura 66, a seguir, mostra a partitura desta peça, com as indicações das células utilizadas. Percebe-se a inclusão de uma nova célula contrastante (a qual foi denominada de célula C e é mostrada na figura 65) nos compassos de 24 a 30. Esta célula aparece no momento áureo da peça: o compasso 27 divide a peça na seção áurea.

Figura 65 – Célula C

¹⁰ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 10.

From the Island of Bali

De l'île de Bali   Auf der Insel Bali

109   Andante, $\text{♩} = 134$ *p, dolce*

B   **B**

A   **A**

B   **B**

A   **A**

B   *poco rit*   **B**   Risoluto, $\text{♩} = 96$

A   **A**

B   **B**   **B**

25

A

B

C

B

C

poco allarg.

sf

(*prol. 2da*)

Andante
p, dolce

m.s.

A

B

T7 (B)

dim.

A

B

poco rit.

a tempo

pp

A

A

B

(*prol. 2da*)

[1 mta. 56 sec.]

H. 13380

Figura 66 – Da Ilha de Bali, de Bartók

3.4 A Teoria dos Conjuntos de Forte

3.4.1 Do tonalismo para o atonalismo – um apanhado histórico

A música tonal (a música que estamos habituados a escutar, como, por exemplo, a música popular) é desenvolvida por meio de acordes que são padronizados, tanto na sua formação, quanto no seu encadeamento. A música atonal, no entanto, não segue estes padrões e moldes preestabelecidos. Parafraseando Coelho de Souza¹¹, sentimo-nos tentados a definir música atonal como aquela que não é tonal, porém esta definição seria uma armadilha, pois levaria a considerar como atonais as músicas anteriores ao advento do tonalismo, como a música modal do ocidente (música feita com o emprego dos modos) ou a música baseada nas escalas pentatônicas das culturas orientais (música feita utilizando escalas compostas por cinco sons determinados), além do que o termo música atonal é geralmente associado ao termo “música dissonante”, como as de Schoenberg e Stravinsky. Na procura de outra definição, Coelho de Souza lembra que a música tonal depende intrinsecamente de dois fatores:

- da consistência de seus acordes, que são agrupamentos de notas, tocados simultaneamente e formados a partir da superposição de terças, quintas, sétimas até a décima-terceira¹², em suas posições fundamentais ou invertidas, sendo este todo o material harmônico utilizado;
- da ordenação e do encadeamento dos acordes: as sequências de acordes do sistema harmônico tonal obedecem uma certa ordenação para que a tonalidade possa estabelecer-se.

Na música atonal, esses dois fatores desaparecem. Tanto a qualidade dos acordes quanto seu encadeamento obedecem princípios genéticos completamente diferentes da música tonal.

Esta característica tira toda a possibilidade das músicas modais e pentatônicas serem consideradas atonais, pois elas possuem acordes constituídos de acordo com determinadas regras de formação.

---

¹¹ COELHO DE SOUZA(2009) Uma introdução às teorias analíticas da música atonal.

¹² Verificar definição no capítulo preliminares de música.

Segundo Forte, o repertório de música atonal é caracterizado pela combinação não usual de notas e também pela ocorrência de combinações familiares de notas em contextos não usuais.

A passagem da música tonal para a atonal não foi brusca, passou por várias fases. Wagner, Brahms e Liszt já apresentavam indícios do atonalismo com as utilizações cada vez maiores de dissonâncias, de cromatismos e de excessivas modulações, acarretando uma dilatação do sistema tonal nas suas composições da fase final. O compositor que ligou o último período de Wagner à música atonal do século XX foi Arnold Schoenberg (1874–1951), o qual, desinteressado pela música tonal, começou a escrever vários acordes que não resolviam, modulando exaustivamente até que se perdesse a sensação de tonalidade. Estabeleceu a utilização livre das dissonâncias, sem a necessidade da resolução destas em consonâncias ou outro tipo de encadeamento convencional. A seguir, promove uma saturação cromática que impede o reconhecimento, ainda que temporário, de uma tonalidade.

Em decorrência disto, surge o Dodecafonismo: Schoenberg, na década de 1920, prescreve uma regra de que uma nota não poderia ser repetida antes que todas as outras notas da série dodecafônica (série composta pelos doze sons da escala cromática) tivessem sido ouvidas. A primeira composição de Schoenberg que usava uma série dodecafônica, a Suíte para piano opus 25, foi completada em 1923.

Este princípio da não repetição causou um certo incômodo a Schoenberg, pois este percebeu um certo automatismo no processo composicional, uma vez que, escolhida a série, o compositor deveria submeter-se ao determinismo da sua ordenação pré-fixada. Sabe-se, entretanto, que “as alternativas combinatórias na composição das linhas melódicas e das verticalidades, ambas derivadas da série, são tão inumeráveis, que é quase impossível que dois compositores escrevam um trecho de música totalmente igual, ainda que ambos utilizem a mesma série” (COELHO DE SOUZA, 2009, p. 3).

As forças do pensamento conservador reagiram ante a ideia de uma música completamente atonal e nas duas décadas seguintes apareceram propostas que tentavam fazer uma conciliação do atonalismo com princípios da harmonia tonal. O próprio Schoenberg, chegou, ao final de sua carreira, a compor obras que buscavam uma síntese entre o dodecafonismo e o tonal. Apesar disso, sua música, ao contrário da de seus discípulos Berg e Webern, nunca foi popular e provavelmente nunca o será. Entre as tentativas de conectar o dodecafonismo com o espaço harmônico direcional, a mais divulgada talvez foi a proposta por **Krenek**, que foi aluno de Schoenberg em Viena. Ele procurou conciliar a técnica dodecafônica com a hierarquização das dissonâncias proposta por Hindemith. Seu modelo

tenta preservar, no atonalismo, o princípio de tensão e repouso da harmonia tonal, por meio de uma hierarquização de intervalos. Desse modo, estabelece uma gradação progressiva de acordes, dos considerados menos dissonantes (como, por exemplo, tríades maiores e menores) para os mais dissonantes. Krenek recomendava aos compositores utilizarem dissonâncias fortes em pontos culminantes da obra e acordes mais suaves quando houvesse um decréscimo de intensidade no fluxo musical. Entretanto, “do ponto de vista prático, a proposta de Krenek de articular o contraponto atonal com a direcionalidade de tensão dos acordes, esbarra na limitação de combinações possíveis de uma dada série, não só em relação às formações possíveis de acordes mas principalmente na inviabilidade do controle das progressões” (COELHO DE SOUZA, 2009, p. 9).

A seguir, surge **Eimert**, apresentando também uma postura conservadora: comenta que, entre os elementos contidos na música dodecafônica, existem sensíveis, retardos, combinações de acordes, que podem ser harmonizadas, sem dificuldade, de maneira tonal. Uma outra teoria harmônica, a de **Edmond Costère**, também estabelece uma continuidade entre a tradição tonal e o campo de tensões da harmonia atonal, mas esta teoria causou pouca repercussão no ambiente acadêmico.

O atonalismo não é sinônimo de música serial (dodecafônica). A escola franco-russa, por exemplo, por meio da música de Debussy, Stravinsky e Bartók e inspirada em fontes populares ou exóticas, encontrou novos encadeamentos harmônicos baseados em materiais modais que dissiparam a linguagem do ultra-cromatismo. Diversas escalas foram empregadas: a de tons inteiros, as octatônicas, além de modos eclesiásticos e pentatônicos. A sistematização de estruturas modais superpostas produziu sucessões de dissonâncias tão extraordinárias quanto as da música serial. “Obras como *La Mer* e *Jeux* assinalam uma ruptura ao mesmo tempo tão completa e significativa com a tradição tonal quanto a de qualquer das obras mais complexas de Schoenberg ou de seus colegas” (SALZMAN, 1970, p. 30). Salzman comenta, a respeito das inovações sonoras de Debussy:

Melodia, harmonia, ritmo e cor tornam-se aspectos diferentes de uma concepção única básica; os sons e os padrões de sons relacionam-se um ao outro através de critérios auditivos arbitrários e sensuais, em vez de se relacionarem através das antigas necessidades de movimento e de resolução governadas pela lógica linear, tonal (SALZMAN, 1970, p. 29).

Abre-se, neste íterim, a possibilidade de encontrar-se notas que funcionem como “centros tonais”, mesmo em linguagens atonais: surge a teoria da centricidade atonal, com os

eixos de simetria de **Perle** e **Antokoletz**, a qual ajuda na compreensão da poética de diversos compositores da primeira metade do século XX, particularmente Webern e Bartók.

Coelho de Souza cita como exemplo da utilização de eixos de simetria em parte da canção opus 25 de Webern, a qual traz a nota sol como eixo de simetria da série original e da série invertida.

Figura 67 – Eixo de simetria – Fonte: Coelho de Souza (2009)

Como exemplo de outros compositores que trabalharam com músicas atonais, estão Messiaen e Hanson.

Olivier Messiaen (1908–1992) pesquisou exaustivamente o canto dos pássaros, o que foi vital para sua música. Procurou, muitas vezes, em suas composições, imitar o seu canto. Alguns trechos dessas composições podem ser vistos em <http://www.oliviermessiaen.org/messiaen2index.htm>. Deu, durante muitos anos, aulas de composição no Conservatório de Paris e nunca ensinava em suas aulas suas próprias técnicas de composição, dirigia cada estudante por seu próprio caminho. É o primeiro que explica a maneira que compõe a própria obra por meio do livro *Technique de mon Language Musical* – 1944. Neste livro explica um sistema de sete modos simétricos de escalas. Achava que a música tinha que imitar a natureza, por isso evitava a métrica regular e simétrica, visto que na natureza as coisas nem sempre são simétricas e regulares.

Howard Hanson – (1896–1981), professor da Eastman School of Music. EUA, escreveu *Harmonic Materials of Modern Music* em 1960, no qual trabalha com toda a Teoria dos Conjuntos apenas por meio de notas, sem números. Era um compositor americano, regente, educador, teorista musical e foi diretor da Eastman School of Music por 40 anos.

À primeira vista, parece que a música atonal é uma música totalmente imprevisível e sem sentido. Tem-se a impressão que o compositor pode combinar as notas que quiser, gerando os mais esdrúxulos acordes, sem seguir convenção alguma. Numa tentativa de sistematizar esta teoria é que Allen Forte (1926), atualmente professor da Yale University –

New Heaven, introduziu uma nova notação e terminologia baseada na teoria dos conjuntos, a qual procura classificar de uma nova maneira agrupamentos sonoros, com o objetivo de chegar a um número limitado de conjuntos que desse conta das inúmeras combinações de notas possíveis na música atonal. Sistematizou esta teoria por meio do livro “The structure of atonal Music”.

3.4.2 O modelo inteiro de notas

O músico Allen Forte utilizou os números inteiros para modelar as notas musicais do **sistema igualmente temperado** (sistema musical no qual a oitava¹³ é dividida em doze partes iguais). Segundo sua teoria, cada nota musical do sistema temperado pertence a uma classe de notas. Para estudar tais classes, cada nota foi substituída por um número. A substituição de notas por números é apresentada a seguir. À nota dó 4 é atribuído o valor 0 e às outras os valores crescentes do conjunto dos inteiros, se estiverem à direita e decrescentes, se estiverem à esquerda de dó 4.

Figura 68 – Substituição das notas por números no teclado do piano

¹³ Uma oitava é um intervalo musical entre dois sons com frequências na razão 2:1.

Figura 69 – Substituição das notas por números na pauta musical

Figura 70 – Números inteiros e notas musicais

Naturalmente, às notas enarmônicas (que têm mesmo som, porém distintos nomes) como dó# e réb, é atribuído o mesmo número. A figura a seguir ilustra esta substituição.

Figura 71 – Substituição das notas por números

A substituição nominando as notas fica da seguinte maneira:

Dó# ou Réb = 1

Ré = 2

Ré# ou Mi♭ = 3

Mi = 4

Fá = 5

Fá# ou Sol♭ = 6

Sol = 7

Sol# ou Lá♭ = 8

Lá = 9

Lá# ou Si = 10

Si = 11

e assim por diante, de modo que se uma nota é representada por um número inteiro n , a nota que estiver meio tom acima será representada pelo número $n+1$ e a nota que estiver meio tom abaixo pelo número $n-1$. Esta correspondência, naturalmente, preserva a relação de ordem do

conjunto dos números inteiros de forma que, se progredirmos cromaticamente na direção das notas mais agudas, progredimos crescentemente nos valores numéricos correspondentes e vice-versa. Desse modo, o espaço que contém todas as notas musicais fica representado pelo conjunto dos números inteiros, ou seja, o conjunto dos números inteiros é um modelo do conjunto das notas musicais do sistema temperado. Uma das razões pelas quais os números inteiros são utilizados para modelar os sons do sistema temperado é o fato de ambos partilharem várias propriedades, das quais as mais importantes são serem ordenados e discretos. Uma dúvida que pode surgir é: quem seria a nota correspondente ao número três milhões? Existe esta nota? Para os matemáticos sim, esta nota existiria no mundo das idéias. Quando se aplica esse modelo na prática, considera-se as notas existentes, audíveis. Dessa forma, $\mathbb{Z}$ representará as notas musicais e será referido como espaço musical.

Dentro desse modelo, definiremos, a seguir, um conceito importante da teoria musical: o de *intervalo*.

Definição: Sejam x e y alturas ($x, y \in \mathbb{Z}$).

- (a) O número $y - x$ é chamado **intervalo orientado de x a y** .
- (b) O número $|y - x|$ é chamado **intervalo não-orientado de x a y** .

Portanto, o intervalo orientado de x a y é o número de semitons entre x e y se $x \leq y$, e o oposto desse número se $x > y$; o intervalo não-orientado de x a y é o número de semitons entre x e y .

Exemplos:

- 1) O intervalo orientado entre as alturas 2 e 9 (notas ré e lá) é:

$$\text{int}(2,9)=9-2 = 7 \text{ (sete semitons ou uma 5ª. justa).}$$

A figura 72, a seguir, ilustra este intervalo.

Figura 72 – Intervalo musical $\text{int}(2,9)$

A esse tipo de intervalo é dado o nome de *orientado* porque considera-se o sentido de orientação. Tomando, por exemplo, este mesmo intervalo no outro sentido, ou seja, de lá para ré, teríamos:

$$\text{int}(9,2)=2-9 = -7 \text{ (sete semitons ou uma 5ª. justa).}$$

Quando não se faz esta distinção, o intervalo é dito *não orientado* e é igual ao módulo da diferença entre as notas. No exemplo anterior, o intervalo não orientado entre ré e lá seria 7.

2) O intervalo orientado entre a primeira nota da figura 73 (a seguir) e a segunda é $29 - 14 = 15$. O intervalo orientado entre a segunda nota e a primeira é $14 - 29 = -15$. O intervalo não-orientado entre as notas é 15.

Figura 73 – Intervalo entre as notas 14 e 29

Alguns elementos do espaço musical são **equivalentes**. É o que será definido a seguir.

3.4.3 Equivalência

Notas separadas por uma ou mais oitavas são, geralmente, percebidas, de algum modo, equivalentes. Isto pode ser notado quando uma mulher e um homem entoam uma mesma melodia, parece que eles cantam a mesma nota, mas na realidade, eles estão em relação de oitavas. De certa forma, a notação musical que utilizamos reflete esta equivalência dando o mesmo nome a notas que estão em relação de oitavas. Vemos, então, que o aparato matemático conveniente para tratar desta questão é o $\mathbb{Z}_{12}$. Elementos do espaço musical cuja

distância intervalar é igual a 12 ou a seus múltiplos são equivalentes¹⁴ módulo 12. Ex: dó4 é equivalente à dó5 módulo 12, fá5 é equivalente a fá1 módulo 12, ou seja, todas as notas em relação de oitava são equivalentes módulo 12.

Ex: $0 \equiv 12 \equiv 24 \equiv -12 \equiv 48 \pmod{12}$

Figura 74 – Dós equivalentes módulo 12

Classe de Equivalência¹⁵

A classe de equivalência de uma nota (pitch class)¹⁶ é formada por **todas as notas que têm o mesmo nome**, mas que podem ser de alturas distintas. Por exemplo: a nota (pitch) dó4, que é a nota dó central do piano, é uma nota particular, mas a classe de nota dó refere-se ao conjunto de todas as notas dó do piano. Dito de outro modo: o registro não afeta a classe que a nota pertence. Dó# permanece um membro da classe de notas dó#, independente da oitava que pertence. Cada nota pertence somente a uma das 12 classes de notas distintas.

Ex: : $\bar{0} = \{x \in E / x \equiv 0 \pmod{12}\}$, ou seja:

$\bar{0} = \{..., -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, ...\}$ = classe de altura 0.

$\bar{1} = \{..., -47, -35, -23, -11, 1, 13, 25, 37, 49, ...\}$ = classe de altura 1.

Ou seja, todos os dó se equivalem, todos os rés, e assim por diante. Dessa forma, cada “pitch” pertence a uma das doze “pitch classes”.

¹⁴ Ver Definição de Relação de Equivalência no capítulo 7.1: Preliminares de matemática, pág. 253.

¹⁵ Ver definição de Classe de Equivalência no capítulo Preliminares de matemática, pág. 256.

¹⁶ A palavra “pitch” é utilizada pelos teóricos musicais da língua inglesa significando “um som com determinada frequência”. “Pitch class”, portanto, significa classe de equivalência de um som ou de uma nota. Straus (2005) considera o termo como sendo um grupo de notas com o mesmo nome.

A passagem mostrada, a seguir, consiste de quinze tríades (acordes de três notas). As notas são alternadas entre os três instrumentos, mas cada acorde é formado pelas mesmas três classes de notas (pitch classes): F#, G e Ab. (Note que o violino toca harmônicos que soam duas oitavas acima das notas escritas).

Durations III, No. 3

Morton Feldman

Gesture 1

Figura 75 – Muitas notas, porém apenas três classes de notas: F#, G e Ab.

Conjunto quociente¹⁷

O conjunto de todas as classes de equivalência das 12 notas é o conjunto quociente $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \}$$

altura:	...	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
classe de altura:		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1

Figura 76 – Alturas equivalentes
Fonte: Oliveira, J.P.P (2007)

¹⁷ Ver definição de Conjunto Quociente no capítulo 7.1 - Preliminares de matemática, pág. 257.

Desse modo, o conjunto quociente $\mathbb{Z}_{12}$ abrange todas as classes de notas possíveis do sistema temperado. Pode-se pensar nas horas da face de um relógio como classes de alturas, com o 0 (dó=C) na posição do 12. Este esquema é estruturalmente equivalente ao relógio utilizado na seção 3.3 para exibir as simetrias.

Figura 77 – Relógio – módulo 12

Fonte: <http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/FioreWhatIsMathMusTheorySlides.pdf>

Para facilitar a compreensão deste sistema, Oliveira (1998) utiliza um modelo de representação analógico, sob a forma de um dodecágono, cujos vértices correspondem aos 12 meio-tons da escala cromática.

Figura 78 – Dodecágono – modelo de representação analógica dos doze meio-tons

Pode-se conceituar agora os intervalos entre as **classes de alturas**. Podem ser orientados ou não.

Intervalo entre classe de alturas

Seja $f: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \{0, 1, \dots, 11\}$ a aplicação que a X associa o seu representante pertencente ao conjunto $\{0, 1, \dots, 11\}$.

Definição Sejam X e Y classes de alturas ($X, Y \in \mathbb{Z}_{12}$).

- (a) O número $f(Y - X)$ é chamado **intervalo orientado de X a Y** , o qual será indicado por $\text{int}(X, Y)$.
- (b) O número $\min\{\text{int}(X, Y), \text{int}(Y, X)\}$ é chamado **intervalo não-orientado de X a Y** , o qual será indicado por $\text{Int}(X, Y)$.

Desse modo, para calcular o *intervalo orientado entre duas classes de altura*, basta subtrair a primeira da segunda e associar ao resultado o seu representante módulo 12. O *intervalo não orientado entre duas classes de altura (interval class)*, que é o tipo mais relevante no contexto desta teoria, é sempre a mais curta “distância” entre as duas classes de altura. Observa-se que $\text{int}(X, Y) + \text{int}(Y, X) = 12$.

Exemplo 1:

Seja X a classe de altura determinada por $C^\#$, e Y a determinada por A .

Portanto, $X = \bar{1}$ e $Y = \bar{9}$.

- (a) O intervalo orientado de X a Y é

$$\text{int}(X, Y) = f(\bar{9} - \bar{1}) = f(\bar{8}) = 8.$$

Por outro lado,

$$\text{int}(Y, X) = f(\bar{1} - \bar{9}) = f(\overline{-8}) = -8 + 12 = 4.$$

- (b) O intervalo não-orientado de X a Y é $\text{Int}(X, Y) = \min\{\text{int}(X, Y), \text{int}(Y, X)\} = \min\{8, 4\} = 4$.

Exemplo 2:

Seja X a classe de altura determinada por G , e Y a determinada por D . Portanto, $X = \bar{7}$ e $Y = \bar{2}$.

Então o intervalo ordenado de X a Y é

$$\text{int}(X, Y) = f(\bar{2} - \bar{7}) = f(\overline{-5}) = 7.$$

Exemplo 3:

No exemplo da figura 72, o intervalo orientado entre ré e lá, ou seja, entre as classes de alturas $X=\bar{2}$ e $Y=\bar{9}$, seria:

$$f(\bar{9}-\bar{2})=f(\bar{7})=7$$

E o intervalo orientado entre as classes de altura $Y=\bar{9}$ e $X=\bar{2}$ seria:

$$f(\bar{2}-\bar{9})=f(-\bar{7})=-7+12=5$$

O intervalo não-orientado de $X=\bar{2}$ e $Y=\bar{9}$ é $\text{Int}(X,Y) = \min\{\text{int}(X,Y), \text{int}(Y,X)\} = \min\{7,5\} = 5$. Este intervalo pode ser facilmente percebido com a utilização de um relógio auxiliar (figura 79), assunto que será detalhado a seguir.

Figura 79 – Intervalo não orientado entre as classes de alturas 2 e 9: $\text{Int}(2,9)=5$

Cálculo de intervalos por meio do relógio

Representemos os números na reta real (Figura 80). Note que caminhar para a direita na reta corresponde a caminhar no sentido horário no relógio.

Figura 80 – Relógio e reta real

Examinemos o **Exemplo 1** anterior para fixar idéias (conforme se verá, o raciocínio se aplica em geral). Destacamos, no relógio, $C^\#$ e A (acompanhe na Figura 81), bem como na representação sobre a reta.

Figura 81 – Exemplo 1

Sejam $f(X) = x$ e $f(Y) = y$. Para calcular $\text{int}(X, Y)$ no caso em que $x < y$, caminhamos para a direita sobre a reta a partir do ponto correspondente a x até o correspondente a y , contaremos $y - x$ semitons, que é $\text{int}(X, Y)$. Isto é obtido então caminhando no relógio no sentido horário, partindo do ponto correspondente a X (no caso do exemplo, $C^\#$) até o ponto correspondente a Y (no caso do exemplo, A).

Para calcular $\text{int}(X, Y)$ quando $x > y$, utilizamos o seguinte raciocínio: acompanhe com o **Exemplo 2** anterior. A Figura 82, a seguir, ilustra a situação.

Figura 82 – $\text{int}(X, Y)$, $x > y$

Notando que $y + 12$ corresponde a Y , vemos que $\text{int}(X, Y) = y + 12 - x$ e é o número de semitons que se encontram ao caminhar na reta para a direita, partindo do ponto correspondente a X até o correspondente a $y + 12$, que é Y . Isto é obtido então caminhando no relógio no sentido horário, partindo do ponto correspondente a X (no caso do exemplo, G) até o ponto correspondente a Y (no caso do exemplo, D).

$$\text{int}(X, Y) = f(\bar{2} - \bar{7}) = f(\bar{2} + 12 - \bar{7}) = 7.$$

Resumindo: Para calcular $\text{Int}(X, Y)$ pelo relógio, assinale os pontos correspondentes a X e a Y , parta do correspondente a X , caminhe no sentido horário até o ponto correspondente a Y . Depois caminhe, também no sentido horário, de Y a X . O menor número de pontos entre os trajetos é $\text{Int}(X, Y)$.

Exemplo 4: Calculemos $\text{Int}(X, Y)$, sendo X a classe de altura determinada por F , e Y por $A^\#$. Fazemos as marcações no relógio, como mostra a Figura 83. De F até $A^\#$ no sentido horário encontramos 5 pontos, de modo que $\text{int}(X, Y) = 5$. De $A^\#$ até F no sentido horário encontramos 7 pontos, e assim $\text{int}(Y, X) = 7$. Portanto, $\text{Int}(X, Y) = \min\{5, 7\} = 5$.

Figura 83 – $\text{Int}(F, A^\#) = 5$

3.4.4 As funções transposição e inversão segundo a teoria de Forte

3.4.4.1 A função transposição

Quando um cantor vai entoar uma melodia, esta deve ser adequada à sua tessitura vocal. Um tenor, por exemplo, que é um cantor com a voz masculina mais aguda, não consegue, muitas vezes, cantar a mesma melodia que um baixo, que é um cantor com a voz masculina mais grave. Um violino também não possui notas tão graves como as do violoncelo. O que se costuma fazer para adequar uma melodia à extensão pretendida é transpô-la para a tessitura adequada.

Transpor em música é como transladar em matemática.

Por exemplo, podemos transladar uma parábola (seja $y = x^2$) “para cima” e “para baixo” na direção do eixo dos y .

Figura 84 – Translações da parábola $y=x^2$

A mesma coisa podemos fazer com uma melodia, só que a unidade de transposição é o semitom.

Seja, por exemplo, a famosa “Asa Branca”, de Luís Gonzaga:

Figura 85 – Trecho de Asa Branca

Ela pode ser transposta, por exemplo, 7 semitons acima, ficando mais aguda:

Figura 86 – Trecho de Asa Branca transposto 7 semitons acima

Ou 6 semitons abaixo, ficando mais grave:

Figura 87 – Trecho de Asa Branca transposto 6 semitons abaixo

Quando se tem uma melodia, como, por exemplo, o trecho de Asa Branca da figura 85, significa que as notas devem ser tocadas nessa ordem. Fiore (2011) denomina estes conjuntos ordenados de “pcsegs” (do inglês pitch class segments, ou seja, segmentos de classes de alturas), para os quais usaremos a notação “< >”. Para a melodia da Asa Branca citada anteriormente, o pcseg seria:

$$\begin{aligned} < \text{dó, ré, mi, sol, sol, mi, fá, fá, dó, ré, mi, sol, sol, fá mi} > = \\ &= < 0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 0, 2, 4, 7, 7, 5, 4 > \end{aligned}$$

Matematicamente, define-se transposição como a função a seguir.

Seja n um inteiro módulo 12. Então a função $T_n: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ definida pela fórmula

$$T_n(x) = x + n \bmod 12$$

é chamada transposição de x em relação a n .

Exemplos:

1. Seja $T_5: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$. Então:

$$T_5(6) = 6 + 5 = 11$$

$T_5(6)$ significa transpor a nota 6, 5 semitons acima.

Figura 88 – Transposição da nota 6 de 5 semitons

$$T_5(9) = 9 + 5 = \overline{14} = 2$$

Figura 89 – Transposição da nota 9 de 5 semitons

Se utilizarmos o modelo de representação analógica dos doze meio-tons, uma transposição T_n de qualquer elemento x será representada por uma rotação deste elemento, no sentido horário, com centro no ponto central do dodecágono e amplitude $n \times 30^\circ$.

A transposição da nota 9 (lá) anterior ficaria representada como na figura a seguir.

Figura 90 – Representação da Transposição da nota lá de 5 semitons acima

No caso de se transpor melodias, aplica-se a função transposição a cada elemento, ou seja, a função T_n pode ser estendida ao conjunto dos pcsegs $\in S$ de modo natural, extensão esta que indicaremos pela mesma notação T_n :

$$T_n \langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle T_n(a_1), \dots, T_n(a_m) \rangle$$

Neste contexto, n é o número de semitons que a melodia vai ser transladada. Por exemplo, a primeira frase de Asa Branca pode ser transposta 5 semitons acima se aplicarmos à melodia correspondente a função T_5 , como a seguir.

$$T_5 \langle 0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5 \rangle = \langle T_5(0), T_5(2), T_5(4), T_5(7), T_5(7), T_5(4), T_5(5), T_5(5) \rangle = \langle 5, 7, 9, 0, 0, 9, 10, 10 \rangle$$

Figura 91 – Transposição da primeira frase de Asa Branca

Em relação à transposição, temos a seguinte propriedade:

$$T_m \circ T_n = T_{m+n}$$

De fato:

$$(T_m \circ T_n)(x) = T_m(T_n(x)) = T_m(x + n) = x + n + m = T_{m+n}(x).$$

Pela propriedade, seja a seguinte proposição:

Proposição: O conjunto das transposições é um Grupo Abeliano para a composição de aplicações. Verifiquemos as propriedades.

- Associativa

A operação composição é associativa, pois vale em geral para funções:

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \quad [f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

em particular, vale para as funções T_i , com $i=0, \dots, 11$.

- Existência de elemento neutro:

$$(T_i \circ T_0)(x) = T_i(T_0(x)) = T_i(x + 0) = T_i(x)$$

Da mesma forma:

$$(T_0 \circ T_i)(x) = T_0(T_i(x)) = T_i(x) + 0 = T_i(x)$$

Portanto, T_0 é elemento neutro.

- Existência de elemento inverso:

$$(T_i \circ T_{-i})(x) = T_i(T_{-i}(x)) = T_i(x - i) = x - i + i = x = T_0(x)$$

e

$$(T_{-i} \circ T_i)(x) = T_{-i}(T_i(x)) = T_{-i}(x + i) = x + i - i = x = T_0(x)$$

Portanto, T_{-i} é elemento inverso de T_i .

- Comutatividade:

$$\begin{aligned} (T_m \circ T_n)(x) &= T_m(T_n(x)) = T_m(x + n) = x + n + m = x + m + n = T_n(x + m) = \\ &= T_n(T_m(x)) = (T_n \circ T_m)(x) \end{aligned}$$

3.4.4.2 A função inversão

Assim como a transposição, a inversão é uma operação tradicionalmente aplicada à uma melodia. Na realidade, a inversão é uma operação composta, envolve tanto a transposição quanto a inversão. Inverter em música é análogo a fazer uma reflexão em matemática e em seguida transladar. Por exemplo, podemos encontrar as parábolas simétricas às parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 + 2$ em relação ao eixo dos x multiplicando-se a função por -1 : $y = -x^2$ e $y = -x^2 - 2$.

Figura 92 – Inversões e translações da parábola $y=x^2$

Na inversão de uma melodia, a ordem é preservada e o contorno é revertido: cada intervalo ascendente é substituído por outro descendente e vice-versa. A melodia Asa Branca pode ser invertida em relação ao eixo dó 4 por exemplo.

Figura 93 – Inversão de um trecho de Asa Branca

As duas juntas:

Figura 94 – Inversão no mesmo sistema

Basta multiplicar cada número da respectiva nota por -1,

$$-1 \cdot \langle 0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5 \rangle = \langle 0, -2, -4, -7, -7, -4, -5, -5 \rangle = \langle 0, 10, 8, 5, 5, 8, 7, 7 \rangle.$$

Porém nem sempre o eixo de simetria desejado é o dó 4. Neste caso, é necessário fazer uma transposição. No exemplo a seguir, a mesma melodia foi transladada tendo como eixo de simetria o eixo da nota fá 4.

Figura 95 – Inversão segundo o eixo fá 4

Desse modo, teríamos uma inversão seguida de uma transposição de 5 semitons.

$$\begin{aligned}
 -1 \cdot \langle 0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5 \rangle + 5 &= \\
 = \langle 0 + 5, -2 + 5, -4 + 5, -7 + 5, -7 + 5, -4 + 5, -5 + 5, -5 + 5 \rangle &= \\
 = \langle 5, 3, 1, -2, -2, 1, 0, 0 \rangle = \langle 5, 3, 1, 10, 10, 1, 0, 0 \rangle
 \end{aligned}$$

É como se, depois de refletirmos a parábola segundo o eixo dos x, a transladásemos para cima de 5 unidades.

Figura 96 – Parábola $y = -x^2$ invertida e transladada de 5 unidades

Matematicamente, define-se inversão como a seguir.

Seja n um inteiro módulo 12. Então a função $T_n I: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ definida pela fórmula

$$T_n I(x) = -x + n \bmod 12$$

é chamada de inversão em relação a n . n é chamado de índice de inversão.

Exemplo 1:

Seja $T_5 I: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$. Então:

$$T_5 I(7) = -7 + 5 = -2 = 10$$

$T_5 I(7)$ significa refletir a nota 7 em relação à nota 0 e depois transpor 5 semitons acima.

Utilizando o modelo de representação analógica, esta inversão seria representada refletindo-se a nota sol em relação ao eixo que passa pelas notas 0 e 6 e depois transladando-se 5 semitons no sentido horário até a nota 10.

Figura 97 – Inversão da da nota sol e posterior transposição de 5 semitons

Esta inversão poderia ser representada também no modelo analógico do dodecágono por meio de uma simetria axial¹⁸ de eixo perpendicular ao segmento de reta que une os vértices 2 e 3 e que passa pelo ponto médio deste segmento de reta. Detalhes serão vistos posteriormente. Veja a figura 98 a seguir.

¹⁸ Simetria axial: simetria em relação à uma reta.

Figura 98 – Simetria axial

No caso de se inverter melodias, também aplica-se a função inversão a cada elemento, ou seja, a função $T_n I$ pode ser estendida ao conjunto dos pcsegs de modo natural, extensão esta que indicaremos pela mesma notação $T_n I$:

$$T_n I < a_1, \dots, a_m > = < T_n I(a_1), \dots, T_n I(a_m) >$$

No caso do exemplo anterior, a notação ficaria como a seguir:

$$T_5 I < 0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5 > = < T_5 I(0), T_5 I(2), T_5 I(4), T_5 I(7), T_5 I(7), T_5 I(4), T_n I(5), T_5 I(5) > = \\ < 5, 3, 1, 10, 10, 1, 0, 0 >$$

A Inversão representada no modelo analógico do dodecágono por uma simetria axial

Primeira situação: o eixo de inversão passa sobre dois vértices do dodecágono.

Suponhamos que o eixo de inversão passe sobre um elemento x fixado. Pode-se completar os pontos correspondentes aos outros vértices lembrando que no sentido horário do dodecágono é adicionada uma unidade e no sentido anti-horário é diminuída uma unidade, conforme a figura a seguir.

Figura 99 – Inversão em relação ao eixo x

Percebe-se, neste caso que a soma de dois elementos simétricos em relação ao eixo é um número par, constante, igual a $2x$.

$$(x - k) + (x + k) = 2x$$

Portanto, a inversão terá índice $2x$ e levará cada elemento no seu simétrico em relação ao eixo.

$$T_{2x}I(x + k) = -(x + k) + 2x = x - k$$

Segunda situação: o eixo de inversão é perpendicular ao segmento de reta que une dois vértices e passa pelo ponto médio deste segmento de reta.

Suponhamos que o eixo de inversão passe sobre o ponto médio de dois elementos, x e $x+1$.

Figura 100 – Inversão em relação a $x / x+1$

Percebe-se, neste caso, que a soma de dois simétricos em relação ao eixo é um número ímpar, constante, igual a $2x+1$:

$$(x - k) + (x + k + 1) = 2x + 1$$

Portanto, a inversão terá índice $2x + 1$ e levará cada elemento no seu simétrico em relação ao eixo.

$$T_{2x+1}I(x + k) = -(x + k) + 2x + 1 = x - k + 1 = x - (k - 1)$$

Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1: Seja $T_8I: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$. Então:

$$T_8I(1) = -1 + 8 = 7$$

Figura 101 – Inversão $T_8I(1)$

Como o índice é par, estamos na primeira situação, com

$$T_{2x}I(x + k) = T_8I(x + k) .$$

Portanto,

$$2x = 8, \text{ isto é, } x = 4.$$

Assim, o eixo de inversão passará sobre o vértice 4.

Figura 102 – Inversão $T_8I(1)$

Exemplo 2: Seja $T_5I: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$. Então:

$$T_5I(7) = -7 + 5 = -2 = 10$$

Figura 103 – Inversão $T_5I(7)$

Como o índice é ímpar, estamos na segunda situação, com

$$T_{2x+1}I(x+k) = T_5I(7)$$

Portanto,

$$2x + 1 = 5, \text{ isto é, } x = 2.$$

Assim, o eixo de inversão passará sobre o ponto médio dos elementos 2 e 3.

Temos então a seguinte figura:

Figura 104 – Inversão $T_5I(7)$

3.4.4.3 Análise da invenção no. 1 a duas vozes¹⁹ – BACH

Johann Sebastian Bach (1685-1750) foi um compositor que elevou a arte de escrever polifonicamente a altos patamares e teve seu ponto culminante com as suas composições em “O Cravo Bem-Temperado”, Livros I e II.

Uma música polifônica consta de várias melodias tocadas ao mesmo tempo e que podem ser distinguidas pelo ouvinte, sem criar confusão. As melodias se contrapõem, cada voz tem a sua melodia própria, que complementa, mas não é absorvida pelas outras.

As invenções a duas vozes são uma coleção de peças curtas que Bach escreveu para a educação musical de seus jovens alunos. O termo “*Inventio*” vem da Retórica, na qual era usado para designar uma ideia temática essencial, ideia esta que, no caso, estava subjacente a uma composição musical. As invenções possuem um tema (que também pode ser chamado de sujeito) o qual volta diversas vezes nas duas vozes, podendo estar ligeiramente modificado. Várias transformações podem ocorrer: translação, inversão, retrogradação, aumento e diminuição. Às vezes, só uma parte do tema é reapresentada.

Queremos aqui dar uma noção de como as translações e inversões aparecem em uma invenção de Bach. Ressalta-se que este é um dos aspectos da sua composição e tudo leva a crer que a maneira como ele procedeu foi muito meticulosa e cuidadosa. Dreyfus fez uma plausível reconstrução do pensamento de Bach, procurando analisar os mecanismos

¹⁹ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 1.

composicionais, análise esta que leva a uma espécie de mapa do pensamento musical do compositor (DREYFUS, 1996). A esse respeito, diz Boulez:

No estudo de uma obra, o desejo de conhecimento incide mais sobre as motivações do que sobre os fatos; mas somente os fatos nos podem dar a chave das motivações. O nosso estudo permanece infrutífero se não tentarmos pesquisar o pensamento do compositor no que ele tem de mais geral. Como se poderia de outro modo, tirar conclusões? (BOULEZ, 1992, p. 31).

Dreyfus demonstrou quão meticulosamente Bach exaure cada sujeito de suas composições por meio de várias transformações. Ele mostrou que as invenções foram escritas a partir de um minucioso *design* que envolvia o trabalho com um tema (o qual era transformado de inúmeras maneiras, entre elas, invertido e transposto), com sequências, com mudanças de modo (do maior para o menor e vice-versa), com ornamentação, etc. O número de compassos de cada evento era planejado, na maior parte das vezes, previamente. Para tornar as transformações viáveis e uni-las, Bach fez inteligentes ajustes e elegantes conexões. A análise de Dreyfus mostra que a invenção em Dó maior é tanto um produto de árduo trabalho quanto da inspiração.

Analisaremos, segundo o modelo de Allen Forte, quais foram as transposições e inversões utilizadas.

O tema ou sujeito (seja S) da invenção é:

Figura 105 – Tema da Invenção no. 1 de Bach

o qual inicia-se no compasso 1 e vai até o começo do compasso 2.

Trocando-se as notas por números inteiros módulo 12, teremos:

$$S = \langle \text{dó, ré, mi, fá, ré, mi, dó, sol, dó, si, dó, ré} \rangle = \langle 0, 2, 4, 5, 2, 4, 0, 7, 0, 11, 0, 2 \rangle,$$

Esse sujeito foi dividido nas partes *a*, *b* e *c*, como indicadas na figura 106. No compasso 2, que é:

Figura 106 – Transposição do sujeito no segundo compasso

$$\langle \text{sol, lá, si, dó, lá, si, sol, ré, sol, fá, sol, mi} \rangle = \langle 7, 9, 11, 0, 9, 11, 7, 2, 7, \mathbf{5}, 7, \mathbf{4} \rangle$$

observa-se que é quase uma translação de S de 7 semitons, pois

$$T_7(S) = \langle \text{sol, lá, si, dó, lá, si, sol, ré, sol, fá\#, sol, lá} \rangle = \langle 7, 9, 11, 0, 9, 11, 7, 2, 7, \mathbf{6}, 7, \mathbf{9} \rangle$$

Vemos que a discrepância está na antepenúltima e última notas (as discrepâncias serão anotadas em negrito).

Aí está a criatividade do compositor: se ele transpusesse exatamente não ficaria tão melodioso quanto o que ele fez. Segundo Dreyfus, os ajustes feitos não são devidos ao desejo de variação, nem de trata de extravagância artística, mas sim, são resultado da necessidade de substituir uma transformação defeituosa (DREYFUS, 1996).

Para a conveniência da análise que faremos aqui, indicaremos esta transposição do segundo compasso por $\cong T_7(S)$. Esta notação será utilizada em casos análogos.

Nos mesmos compassos, a mão esquerda repete a parte **a** e **b** do tema original duas vezes, uma original e a outra transladada 7 semitons acima, apenas a última nota que não confere. Deveria ser ré e é dó. É o que exhibe a Figura 107, a seguir.

Figura 107 – Tema Original e tema transladado 7 semitons acima

No compasso 3 há uma inversão das partes **a** e **b** do tema, na mão direita. Se a inversão fosse em relação ao eixo dó 4, as notas seriam:

$$I(S) = \langle 0, -2, -4, -5, -2, -4, 0, -7 \rangle = \langle 0, 10, 8, 7, 10, 8, 0, 5 \rangle$$

Deve-se, dessa forma, transpor 9 semitons acima para alcançar a nota lá, obtendo-se: $T_9I(S) = \langle 9, 7, 5, 4, 7, 5, 9, \mathbf{2} \rangle$. Bach, porém, modificou a última nota. Dessa forma, notaremos essa transformação por:

$$\cong T_9I(S) = \langle 9, 7, 5, 4, 7, 5, 9, \mathbf{7} \rangle$$

Figura 108 – Tema invertido e transposto 9 semitons acima

A partir desta primeira inversão, inicia-se uma sequência de transposições desta.

$$T_{-4}(T_9I(S)) = T_5I(S) = \langle 5, 3, 1, 0, 3, 1, 5, 10 \rangle$$

Esta transformação foi muito modificada, com 5 notas distintas, a qual será notada por:

$$\cong T_5I(S) = \langle 5, \mathbf{4}, \mathbf{2}, 0, \mathbf{4}, \mathbf{2}, 5, \mathbf{4} \rangle$$

Figura 109 – Tema invertido e transposto 5 semitons acima

Continuando com a sequência de transformações, teremos:

$$T_{-3}(T_{-4}(T_9I(S))) = T_2I(S) = \langle 2, 0, 10, 9, 0, 10, 2, 7 \rangle$$

$$\cong T_2I(S) = \langle 2, 0, \mathbf{11}, 9, 0, \mathbf{11}, 2, \mathbf{0} \rangle$$

Figura 110 – Tema invertido e transposto 2 semitons acima

$$T_{-3}(T_{-3}(T_{-4}(T_9I(S)))) = T_{-1}I(S) = \langle 11, 9, 7, 6, 9, 7, 11, \mathbf{4} \rangle$$

$$\cong T_{-1}I(S) = \langle 11, 9, 7, 6, 9, 7, 11, \mathbf{9} \rangle$$

Figura 111 – Tema invertido e transposto 1 semitom abaixo

Também encontramos uma sequência na mão esquerda, que é gerada pela parte **a** do tema, sendo que este sofre uma aumentação no tempo: no lugar de semicolcheias, temos colcheias.

Figura 112 – Tema transposto e aumentado

Sendo $a = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, tem-se que

$$T_{-1}(a) = \langle 11, 1, 3, 4 \rangle, T_7(a) = \langle 7, 9, 11, 0 \rangle, T_4(a) = \langle 4, 6, 8, 9 \rangle$$

$$\cong T_{-1}(a) = \langle 11, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4} \rangle, T_7(a) = \langle 7, 9, 11, 0 \rangle, \cong T_4(a) = \langle 4, 6, \mathbf{7}, \mathbf{9} \rangle$$

A mão esquerda volta com uma translação do tema **s** e outra da parte **a** do tema aumentada em relação ao ritmo. No final do compasso 5 a mão direita começa com uma inversão do tema e segue até a cadência final Ré-Sol.

Figura 113 – Tema invertido e transposto

As outras translações e inversões estão indicadas no esquema a seguir.

7 $\cong T_7(s)$ $\cong T_7(c)$ $\cong T_2(s)$ $\cong T_9(s)$

9 $\cong T_7I(s)$ $\cong T_2I(s)$ $T_2(c) \text{ aum}$ $\cong T_9I(s)$ $\cong T_5I(s)$ $T_3(b) \text{ aum}$

11 $\cong a$ $\cong T_1(a)$ $\cong T_{10}I(s)$ $\cong T_7I(s)$ $\cong T_6(a) \text{ aum}$ $T_5I(s)$ $\cong T_0I(s)$

13 $\cong T_4(s)$ $\cong T_4I(b)$ $\cong T_2I(b)$ $\cong T_{11}I(b) \cong T_2(b)$ $\cong T_5I(a)$ $T_{11}(s)$ cadence

15 $\cong T_9I(s)$ $\cong T_5I(s)$ $\cong T_4(s)$ $\cong T_9(s)$

17 $\cong T_7I(s)$ $\cong T_2I(s)$ $\cong T_2(s)$ $\cong T_7(s)$

(d) (C)

The image displays a musical score for measures 19 through 22 of the Invention no. 1 by J.S. Bach. The score is written for piano in G major (one sharp) and 3/4 time. It consists of two systems, each with a treble and bass staff. Measure numbers 19, 20, 21, and 22 are indicated in boxes above the treble staves. Various transformations are labeled with mathematical symbols and letters:

- Measure 19: Treble staff has $\cong S$ above and $a + \downarrow$ below. Bass staff has $a + \downarrow$ below.
- Measure 20: Treble staff has $\cong T_4(s)$ above and $a + \downarrow$ below. Bass staff has $a + \downarrow$ below.
- Measure 21: Treble staff has $\cong T_{10}l(s)$ above and $a \text{ aum}$ below. Bass staff has $\cong T_2(a)$ below.
- Measure 22: Treble staff has $\cong T_7(s)$ above and $\cong T_2(s)$ below. Bass staff has $\cong T_2(s)$ below.

The score concludes with a double bar line at the end of measure 22.

Figura 114 – Translações e Inversões da Invenção no. 1 – Bach

A seguir, é apresentada a partitura, em sua íntegra.

Inventio 1.

B.W.V. 999.

Figura 115 – Invenção a duas vozes no. 1 – Bach

3.4.4.4 Análise da fuga XXI –Sib M - BWV 866 – BACH

Uma fuga começa com o tema principal ou sujeito. Esse sujeito, como nas invenções, volta várias vezes nas diversas vozes, modificado ou não. A seguir, entram temas secundários, que são chamados de contra-sujeitos. Estes também reaparecem ora trasladados ora invertidos. Às vezes, aparece só uma parte do sujeito ou contra-sujeito.

O website <http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/bachindex.html> analisa todas as fugas de Bach do Cravo bem Temperado e, conforme a música vai sendo tocada, são apresentados a partitura e um diagrama da fuga animados. Deste site foi retirado o esquema a seguir da Fuga XXI, em SibM, BWV 866²⁰, a qual passaremos a analisar segundo a teoria de Forte.

Esta fuga tem um sujeito e dois contra-sujeitos que, totalmente ou em partes, são trasladados e invertidos no decorrer da obra, como mostra o esquema a seguir.

Figura 116 – Esquema da fuga XXI de Bach
Fonte: <http://www2.nau.edu/tas3/wtc/i21.html#movie>

Analisaremos, em princípio, as transposições do sujeito ou tema principal.

²⁰ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 2.

O sujeito da fuga é o pcseg²¹ P dado por:

$P = \langle F, G, F, B_b, D, C, A, G, B_b, A, G, F, C, E_b, D, B_b, C, A, B_b, C, D, E_b, D, C, E_b, D, C, B_b, C, A, B_b, C, D, E_b, D, C, E_b \rangle$, $D > = \langle 5, 7, 5, 10, 2, 0, 9, 7, 10, 9, 7, 5, 0, 3, 2, 10, 0, 9, 10, 0, 2, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 10, 0, 9, 10, 0, 2, 3, 2, 0, 3, 2 \rangle$,

o qual inicia-se no compasso 1 e vai até o começo do compasso 5. Vamos chamá-lo de pcseg P. Trata-se de um longo sujeito no qual observa-se a repetição do motivo: $\langle A, B_b, C, D, E_b, D, C, E_b, D \rangle$ no último compasso. No compasso 5, este mesmo sujeito é apresentado pela 2ª. voz, só que transposto de 5 semitons abaixo (este intervalo é de uma 4ª. justa e é muito utilizado na música ocidental)

$\cong T_7(P) = \langle B_b, D, B_b, F, A, G, E, D, F, E, D, C, G, B_b, A, F, G, E, F, G, A, B_b, A, G, B_b, A, G, F, G, A, B_b, A, G, B_b, A \rangle = \langle 10, 2, 10, 5, 9, 7, 4, 2, 5, 4, 2, 0, 7, 10, 9, 5, 7, 4, 5, 7, 9, 10, 9, 7, 10, 9, 7, 5, 7, 4, 5, 7, 9, 10, 9, 7, 10, 9 \rangle$

Note que esse pcseg é $T_7(P)$, com exceção da primeira e terceira notas. O acorde neste compasso é Si bemol e não caberia uma nota dó aí. Analogamente ao capítulo anterior, notaremos este pcseg de $\cong T_7P$. No compasso 9, o sujeito retorna exatamente da mesma forma só que uma oitava abaixo. No compasso 13 temos o T_7P novamente, só que uma oitava acima. No compasso 22, o sujeito volta a aparecer na 2ª. voz, transposto de 3 semitons abaixo:

$\cong T_9(P) = \langle D, E_b, D, G, B_b, A, F\#, E, G, F\#, E, D, A, C, B_b, G, A, F\#, G, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b, A, G, A, F\#, G, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b \rangle = \langle 2, 3, 2, 7, 10, 9, 6, 4, 7, 6, 4, 2, 9, 0, 10, 7, 9, 6, 7, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10, 9, 7, 9, 6, 7, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10 \rangle$.

Este pcseg, com exceção da 2ª. nota e de todos os B_b (números 3 e 10 respectivamente), é quase $T_9(P)$, deveriam ser 4 e 11, para casar totalmente. Será denotado por $\cong T_9(P)$.

No compasso 26 o sujeito aparece na 3ª. voz, transposto de 10 semitons abaixo

²¹ Termo definido em 3.4.4.1, pág. 97.

$$\cong T_2P = \langle G, B_b, G, C, E_b, D, B, A, C, B, A, G, D, F, E, C, D, B, C, D, E_b, F, E_b, D, F, E_b, D, C, D, B, C, D, E_b, F, E_b, D, F, E_b \rangle = \langle 7, \mathbf{10}, 7, 0, \mathbf{3}, 2, 11, 9, 0, 11, 9, 7, 2, 5, 4, 0, 2, 11, 1, 2, \mathbf{3}, 5, \mathbf{3}, 2, 5, \mathbf{3}, 2, 0, 2, 11, 0, 2, \mathbf{3}, 5, \mathbf{3}, 2, 5, \mathbf{3} \rangle.$$

Este pcseg é quase $T_2(P)$, com exceção da 2ª. nota e de todos os E_b (números 10 e 3 respectivamente), que deveriam ser A e E (9 e 4), para casar totalmente. Com certeza, Bach colocou estas notas por conta da tonalidade, que é si bemol. Será notado $\cong T_2P$.

Bach sugere metade do sujeito na 2ª. voz no compasso 35, só que desta vez não existe um único intervalo de translação, a razão intervalar varia, ora terça maior abaixo, ora 5ª. justa abaixo e outras.

$$\langle C, E_b, C, G, B_b, A_b, D, C, E_b, D, C, B_b, F, A_b, G \rangle = \langle 0, 3, 0, 7, 10, 8, 2, 0, 3, 2, 0, 10, 5, 8, 7 \rangle.$$

O sujeito volta a aparecer inteiro no compasso 37, na primeira voz:

$$T_5(P) = \langle B_b, C, B_b, E_b, G, F, D, C, E_b, D, C, B_b, F, A, G, E_b, F, D, E_b, F, G, A_b, G, F, A_b, G, F, E_b, F, D, E_b, F, G, A_b, G, F, A_b, G \rangle = \langle 10, 0, 10, 3, 7, 5, 2, 0, 3, 2, 0, 10, 5, 8, 7, 3, 5, 2, 3, 7, 8, 7, 5, 8, 7, 3, 5, 2, 3, 5, 7, 8, 7, 5, 8, 7 \rangle.$$

Estes compassos transpõem o sujeito exatamente 5 semitons acima, ou seja, são fielmente $T_5(P)$.

A seguir, o mesmo aparece no compasso 41, na segunda voz, inteiro pela última vez:

$$\cong P = \langle E_b, G, E_b, B_b, D, C, A, G, B_b, A, G, F, C, E_b, D, B_b, C, A, B_b, C, D, E_b, D, C, E_b, D, C, B_b, C, A, B_b, C, D, E_b, D, C, E_b, D \rangle = \langle \mathbf{3}, 7, \mathbf{3}, 10, 2, 0, 9, 7, 10, 9, 7, 5, 0, 3, 2, 10, 0, 9, 10, 0, 2, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 0, 9, 10, 0, 2, 3, 2, 0, 3, 2 \rangle.$$

Os compassos repetem o sujeito com exceção da primeira e da terceira notas. Será notado como $\cong P$.

O primeiro contra-sujeito (seja P') aparece pela primeira vez no compasso 5, na voz superior e, como o sujeito, abrange 4 compassos:

$P' = \langle C, B_b, A, B_b, C, D, F, B_b, A, B_b, E, G, A, B_b, C, C, C, C, C, B_b, A, B_b, C, C, C, C, C \rangle =$
 $\langle 0, 10, 9, 10, 0, 2, 5, 10, 9, 10, 4, 7, 9, 10, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 9, 10, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle.$

No compasso 9, este contra-sujeito reaparece na 2ª. voz, transposto de 7 semitons (uma 5ª. justa) abaixo a partir da 8ª. nota. Seria um $\cong T_5(P')$:

$\cong T_5(P') = \langle G, F, E_b, D, E_b, F, B_b, E_b, D, E_b, A, C, D, E_b, F, F, F, F, F, E_b, D, E_b, F, F, F, F, F \rangle =$
 $\langle 7, 5, 3, 2, 3, 5, 10, 3, 2, 3, 9, 0, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5 \rangle.$

No compasso 13 ele volta a aparecer na 3ª. voz, exatamente duas oitavas abaixo. Reaparece no compasso 22, com as primeiras 5 notas idênticas ao original e depois transposto de 2 semitons acima (T_2P'), com exceção das notas B_b (número 10), que deveriam ser B (número 11), mas isso foi necessário para combinar com a tonalidade. Será $\cong T_2(P')$.

$\cong T_2(P') = \langle C, B_b, A, B_b, C, D, G, C, B_b, C, F\#, A, B_b, C, D, D, D, D, D, C, B_b, C, D, D, D, D, D \rangle =$
 $\langle 0, 10, 9, 10, 0, 2, 7, 0, 10, 0, 6, 9, 10, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 10, 0, 2, 2, 2, 2, 2 \rangle.$

Volta a aparecer no compasso 26, na 2ª. voz:

$\cong T_7(P') = \langle E_b, D, C, B_b, A_b, G, C, F, E_b, F, B, D, E_b, F, G, G, G, G, G, F, E_b, F, G, G, G, G, G \rangle =$
 $\langle 3, 2, 0, 10, 8, 7, 0, 5, 3, 5, 11, 2, 3, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 3, 5, 7, 7, 7, 7, 7 \rangle.$

Bach faz uma variação nas seis primeiras notas e a partir da sétima nota transpõe esta melodia uma 4ª. justa abaixo ou 5 semitons abaixo, com exceção dos 3 ($\cong T_7(P')$).

A próxima aparição deste contra-sujeito é no compasso 37

$\cong T_{10}(P') = \langle D, E_b, D, E_b, F, G, E_b, A_b, G, A, D, F, G, A_b, B_b, B_b, B_b, B_b, A_b, G, A_b, B_b, B_b, B_b, B_b, B_b \rangle =$
 $\langle 2, 3, 2, 3, 5, 7, 3, 8, 7, 8, 2, 5, 7, 8, 10, 10, 10, 10, 10, 8, 7, 8, 10, 10, 10, 10, 10 \rangle.$

As primeiras 6 notas fazem uma variação da melodia e a partir da sétima nota, o contra-sujeito é transposto dois semitons abaixo ($\cong T_{10}P'$).

Este contra-sujeito aparece pela última vez no compasso 41, transladado exatamente de uma 4ª. justa acima ou 5 semitons. É um fiel $T_5(P')$.

$$T_5(P') = \langle F, E_b, D, E_b, F, G, B_b, E_b, D, E_b, A, C, D, E_b, F, F, F, F, F, E_b, D, E_b, F, F, F, F, F \rangle \\ = \langle 5, 3, 2, 3, 5, 7, 10, 3, 2, 3, 9, 0, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5 \rangle.$$

O compasso 9 traz um segundo contra-sujeito. Seja P'' . Este contra-sujeito é composto de quatro pequenas frases, sendo que as duas últimas são idênticas.

$$P'' = \langle D, B_b, D, E_b, E_b, C, E_b, F, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b \rangle = \langle 2, 10, 2, 3, 3, 0, 3, 5, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10 \rangle.$$

Este segundo contra-sujeito reaparece no compasso 13, transposto de exatamente uma 4ª. justa + 1 oitava abaixo ou 5 semitons + 1 oitava abaixo. É um autêntico $T_7(P'')$.

$$T_7(P'') = \langle A, F, A, B_b, B_b, G, B_b, C, E, F, G, F, E, G, F, E, F, G, F, E, G, F \rangle = \langle 9, 5, 9, 10, 10, 7, 10, 0, 4, 5, 7, 5, 4, 7, 5, 4, 5, 7, 5, 4, 7, 5 \rangle.$$

A seguir, aparece no compasso 22, transladado de uma 3ª. menor abaixo ou 3 semitons (+ 2 oitavas) a partir da 8ª. nota. Será notado por $\cong T_9(P'')$.

$$\cong T_9(P'') = \langle G, E_b, G, C, A, F\#, A, D, F\#, G, A, G, F\#, A, G, F\#, G, A, G, F\#, A, G \rangle = \langle 7, 3, 7, 0, 9, 6, 9, 2, 6, 7, 9, 7, 6, 9, 7, 6, 7, 9, 7, 6, 9, 7 \rangle.$$

A próxima aparição é no compasso 26, transposto de dois semitons acima. Com exceção dos dois primeiros 3. Será notado $\cong T_2(P'')$.

$$T_2(P'') = \langle E_b, C, E_b, F, F, D, F, G, B, C, D, C, B, D, C, B, C, D, C, B, D, C \rangle = \langle 3, 0, 3, 5, 5, 2, 5, 7, 11, 0, 2, 0, 11, 2, 0, 11, 0, 2, 0, 11, 2, 0 \rangle.$$

No compasso 37 este segundo contra-sujeito começa com as duas primeiras frases invertidas e segue transladado de uma 5ª. justa (7 semitons) abaixo + 1 oitava, seria $\cong T_5(P'')$.

$$\cong T_5(P'') = \langle E_b, G, E_b, B_b, B_b, D, B_b, E_b, D, E_b, F, E_b, D, F, E_b, D, E_b, F, E_b, D, F, E_b \rangle = \langle 3, 7, 3, 10, 10, 2, 10, 3, 2, 3, 5, 3, 2, 5, 3, 2, 3, 5, 3, 2, 5, 3 \rangle.$$

Este segundo contra-sujeito aparece pela última vez no compasso 41, também com as duas primeiras frases invertidas e segue transladado de uma oitava abaixo.

$$\cong P'' = \langle E_b, G, E_b, F, F, A, F, B_b, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b, A, B_b, C, B_b, A, C, B_b \rangle = \langle 3, 7, 3, 5, 5, 9, 5, 10, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10, 9, 10, 0, 10, 9, 0, 10 \rangle$$

Analisaremos, a seguir, as inversões do tema principal. Os compassos 19, 20 e 21 trazem inversões da primeira frase do tema na terceira voz.

Compasso 19: $\langle D, C, D, G, E_b, F \rangle = \langle 2, 0, 2, 7, 3, 5 \rangle$.

As três primeiras notas coincidem com $T_7I(P)$ e as três últimas com $T_5I(P)$, visto que

$$T_7I(P) = \langle 2, 0, 2, 9, 5, 7 \rangle \text{ e } T_5I(P) = \langle 0, 10, 0, 7, 3, 5 \rangle.$$

Compasso 20: $\langle C, B_b, C, F, D, E_b \rangle = \langle 0, 10, 0, 5, 2, 3 \rangle$.

As três primeiras notas coincidem com $T_5I(P)$

Compasso 21: $\langle B_b, A, B_b, E_b, C, D \rangle = \langle 10, 9, 10, 3, 0, 2 \rangle$

Este compasso não coincide totalmente com uma ou duas inversões, mas é uma variação do tema invertido.

Outras inversões são encontradas nos compassos 30, 31 e 32, na primeira voz.

Compasso 30: $\langle E_b, D, E_b, C, A, B_b \rangle = \langle 3, 2, 3, 0, 9, 10 \rangle$.

Bach inverte a melodia, mas não obedece um único intervalo de inversão.

Compasso 31: $\langle D, C, D, B_b, G, A \rangle = \langle 2, 0, 2, 10, 7, 9 \rangle$.

As três primeiras notas coincidem com $T_2I(P)$ e as três últimas, com exceção do 10, com $T_9I(P)$.

Compasso 32: $\langle C, B_b, C, A, F^\#, G \rangle = \langle 0, 10, 0, 9, 6, 7 \rangle$.

As três primeiras notas coincidem com $T_5I(P)$.

As últimas inversões encontram-se nos compassos 33 e 34.

Compasso 33: $\langle B_b, A, B_b, G, C\#, D \rangle = \langle 10, 9, 10, 7, 1, 2 \rangle$

Compasso 34: $\langle A_b, G, A_b, F, B, C \rangle = \langle 8, 7, 8, 5, 11, 0 \rangle$,

as quais não seguem um único intervalo de inversão.

Outros trechos do sujeito e dos contra-sujeitos aparecem na obra, mas optamos por analisar somente os anteriores.

A seguir, o esquema resumido das translações é apresentado.

Figura 117 – Esquema da Fuga XXI – Bach

A seguir, é apresentada a partitura desta fuga.

Fuga XXI

BWV866 # 3 / 4

A 3 voci

The musical score for Fuga XXI, BWV 866 # 3/4, A 3 voci, is presented in six systems. Each system contains a treble staff and a bass staff. The key signature is one flat (B-flat) and the time signature is 3/4. The score includes various musical notations such as notes, rests, and accidentals. The first system shows the beginning of the piece with a treble staff starting on a whole note and a bass staff with a whole note. The subsequent systems show the development of the fugue with various musical notations and accidentals.

BWV866 # 4 / 4

This musical score is for a piece in 4/4 time, BWV 866 #4. It consists of six systems of music, each with a treble and bass staff. The key signature has two flats (B-flat and E-flat). The score begins at measure 25. The first system (measures 25-28) features a treble staff with eighth-note patterns and a bass staff with a steady eighth-note accompaniment. The second system (measures 29-32) continues the treble staff's melodic line while the bass staff maintains its accompaniment. The third system (measures 33-36) shows a more complex treble staff with sixteenth-note runs and a bass staff with a similar rhythmic pattern. The fourth system (measures 37-40) features a treble staff with a mix of eighth and sixteenth notes and a bass staff with a consistent eighth-note accompaniment. The fifth system (measures 41-44) shows the treble staff with a more active melodic line and the bass staff with a steady accompaniment. The sixth system (measures 45-48) concludes the piece with a final measure containing a whole note chord in the treble and a whole note bass line.

3.4.5 O grupo T/TI

A seguir mostraremos como as funções transposição e inversão, com a operação composição, formam um grupo²².

Definição 1: Sejam τ e σ definidos como a seguir.

$$\tau = \{T_k(C)/k \in \{0,1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)\}$$

$$\sigma = \{T_k I(C)/k \in \{0,1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)\}$$

em que $C = \langle 0,4,7 \rangle$, que é o acorde de Dó Maior.

Cada elemento de τ é uma transposição do acorde $C = \langle 0,4,7 \rangle$, e cada elemento de σ a transposição da “forma invertida” do acorde de dó maior. Seja S o conjunto de todos estes elementos, ou seja:

$$S = \tau \cup \sigma$$

São listadas, a seguir, todas as transposições $T_k \langle 0,4,7 \rangle$ e inversões $T_k I \langle 0,4,7 \rangle$ possíveis de C . Letras maiúsculas indicam acordes maiores e minúsculas acordes menores, como é convencionado entre os músicos.

Tabela 4 – Acordes T_k e $T_k I$

k	$T_k\{0,4,7\} \in \tau$	Acorde $T_k(C)$	$T_k I\{0,4,7\} \in \sigma$	Acorde $T_k I(C)$
0	{0,4,7}	C	{0,8,5}	f
1	{1,5,8}	$C\#=D_b$	{1,9,6}	$f\#=g_b$
2	{2,6,9}	D	{2,10,7}	g
3	{3,7,10}	$D\#=E_b$	{3,11,8}	$g\#=a_b$
4	{4,8,11}	E	{4,0,9}	a
5	{5,9,0}	F	{5,1,10}	$a\#=b_b$
6	{6,10,1}	$F\#=G_b$	{6,2,11}	b
7	{7,11,2}	G	{7,3,0}	c
8	{8,0,3}	$G\#=A_b$	{8,4,1}	$c\#$
9	{9,1,4}	A	{9,5,2}	d
10	{10,2,5}	$A\#=B_b$	{10,6,3}	$d\#=e_b$
11	{11,3,6}	B	{11,7,4}	e

²² Ver definição de grupo no capítulo 7.1: Preliminares de matemática, pág. 155.

Nota-se, por meio da tabela 4, que S é o conjunto dos 24 acordes maiores e menores.

Observações:

- 1. Verifica-se, pela tabela, que $\tau \cap \sigma = \emptyset$. Assim, $\{\tau, \sigma\}$ é uma partição de S .
- 2. $\langle m, n, p \rangle \in \tau \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): \langle m, n, p \rangle = T_k(C)$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): \langle m, n, p \rangle = \langle 0 + k, 4 + k, 7 + k \rangle$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): m = k, n = 4 + k, p = 7 + k$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle m, n, p \rangle \in \sigma &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): \langle m, n, p \rangle = T_k I(C) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): \langle m, n, p \rangle = \langle 0 + k, -4 + k, -7 + k \rangle \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12): m = k, n = -4 + k, p = -7 + k \end{aligned}$$

- 3. Pode-se escrever vetorialmente os elementos de τ e σ .
  - Um elemento de τ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_k(C) &= \langle 0+k, 4+k, 7+k \rangle = \langle 0, 4, 7 \rangle + \langle k, k, k \rangle = \langle 0, 4, 7 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle \\ T_k(C) &= C + k \mathbf{1}, \text{ onde } k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12) \text{ e } \mathbf{1} = \langle 1, 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

K indica o número de unidades (semitons) que devem ser somadas ao acorde C para gerar o acorde $T_k(C)$.

- Da mesma maneira, um elemento de σ pode ser reescrito da forma:

$$\begin{aligned} T_k I(C) &= \langle -0+k, -4+k, -7+k \rangle = \langle 0, -4, -7 \rangle + \langle k, k, k \rangle = \langle 0, 8, 5 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle \\ T_k I(C) &= f + k \mathbf{1}, \text{ onde } k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12) \text{ e } \mathbf{1} = \langle 1, 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

K indica o número de unidades (semitons) que devem ser somadas ao acorde f para gerar o acorde $T_k I(C)$.

Como foi visto anteriormente (pág. 97 e 103), as funções T_n e $T_n I$ podem, naturalmente, ser estendidas ao conjunto dos pcsegs. Mostraremos que o conjunto S é levado em S por essas aplicações, de modo que, se ainda indicarmos por T_n e $T_n I$ as restrições de T_n e $T_n I$ a S , podemos escrever: $T_n: S \rightarrow S$ e $T_n I: S \rightarrow S$.

$$\begin{aligned}
T_n(T_k(C)) &= T_n(T_k(0,4,7)) = T_n(T_k(0), T_k(4), T_k(7)) = \\
&= (T_n(T_k(0)), T_n(T_k(4)), T_n(T_k(7))) = \\
&= (T_{n+k}(0), T_{n+k}(4), T_{n+k}(7)) = T_{n+k}(C) \in S
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, pode-se provar que:

$$T_n(T_k I(C)) = T_{n+k} I(C) \in S, \quad T_n I(T_k(C)) = T_{n-k} I(C) \in S \quad \text{e} \quad T_n I(T_k I(C)) = T_{n-k}(C) \in S$$

Seja, desse modo, S o conjunto formado pelas 24 funções $T_n: S \rightarrow S$ e $T_n I: S \rightarrow S$, onde $n = 0, 1, 2, \dots, 11$ e seja “ $\circ$ ” a função composição. Provaremos, a seguir que S , com esta operação composição forma um grupo, o qual será indicado por T/TI . Para isso, utilizaremos as seguintes relações:

- i) $T_m \circ T_n = T_{m+n}$
- ii) $T_m \circ T_n I = T_{m+n} I$
- iii) $T_m I \circ T_n = T_{m-n} I$
- iv) $T_m I \circ T_n I = T_{m-n}$

Verificação:

- i) $(T_m \circ T_n)(x) = T_m(T_n(x)) = T_m(x + n) = x + n + m = T_{m+n}(x)$
- ii) $(T_m \circ T_n I)(x) = T_m(T_n I(x)) = T_m(-x + n) = -x + n + m = T_{m+n} I(x)$
- iii) $(T_m I \circ T_n)(x) = T_m I(T_n(x)) = T_m I(x + n) = -x - n + m = T_{m-n} I(x)$
- iv) $(T_m I \circ T_n I)(x) = T_m I(T_n I(x)) = T_m I(-x + n) = x - n + m = T_{m-n}(x)$

Passemos, a seguir, à demonstração de que S é um grupo. As relações acima garantem que “ $\circ$ ” é uma operação em S .

Utilizando estas regras, podemos compor a tabela a seguir representativa do grupo $T_k/T_k I$. Para simplificar a notação, indicaremos apenas I_k para a função $T_k I$.

Tabela 5 – Tabela representativa do grupo T_k/T_{kI}

O	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁
T ₀	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁
T ₁	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀
T ₂	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁
T ₃	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂
T ₄	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃
T ₅	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄
T ₆	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅
T ₇	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆
T ₈	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇
T ₉	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	l ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈
T ₁₀	T ₁₀	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	l ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉
T ₁₁	T ₁₁	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	l ₁₁	l ₀	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	l ₇	l ₈	l ₉	l ₁₀
l ₀	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁
l ₁	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂
l ₂	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃
l ₃	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄
l ₄	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅
l ₅	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆
l ₆	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇
l ₇	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈
l ₈	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉
l ₉	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	l ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁	T ₁₀
l ₁₀	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	l ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀	T ₁₁
l ₁₁	l ₁₁	l ₁₀	l ₉	l ₈	l ₇	l ₆	l ₅	l ₄	l ₃	l ₂	l ₁	l ₀	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₃	T ₂	T ₁	T ₀

- A operação composição é associativa: vale em geral para funções:

$$[(fog)oh](x) = (fog)(h(x)) = f(g(h(x))) \quad [fo(goh)](x) = f((goh)(x)) = f(g(h(x)));$$

em particular, vale para as funções T_i e $T_i I$ de T/TI , com $i=0, \dots, 11$.

- Existência de elemento neutro:

Existe um elemento neutro T_0 em T/TI , tal que , $T_i \circ T_0 = T_0 \circ T_i = T_i$ e $I_i \circ T_0 = T_0 \circ I_i = I_i$, para quaisquer elementos T_i e $T_i I$ de T/TI , com $i=0, \dots, 11$.

De fato,

$$(T_i \circ T_0)(x) = T_i(T_0(x)) = T_i(x + 0) = T_i(x)$$

e

$$(T_i I \circ T_0)(x) = T_i I(T_0(x)) = T_i I(x + 0) = T_i I(x)$$

Da mesma forma:

$$(T_0 \circ T_i)(x) = T_0(T_i(x)) = T_i(x) + 0 = T_i(x)$$

e

$$(T_0 \circ T_i I)(x) = T_0(T_i I(x)) = T_0(-x + i) = -x + i = T_i I(x)$$

- Existência de elemento inverso:

Para cada elemento T_i de T/TI existe um elemento inverso, $T_{-i} = T_{12-i}$, tal que

$$(T_i \circ T_{-i})(x) = T_i(T_{-i}(x)) = T_i(x - i) = x - i + i = x = T_0(x)$$

e

$$(T_{-i} \circ T_i)(x) = T_{-i}(T_i(x)) = T_{-i}(x + i) = x + i - i = x = T_0(x),$$

ou seja,

$$T_i^{-1} = T_{-i}$$

Do mesmo modo, para cada elemento $T_i I$ de T/TI existe um elemento inverso, $T_i I = T_{i-12} I$, tal que

$$(T_i I \circ T_i I)(x) = T_i I(T_i I(x)) = T_i I(-x + i) = x - i + i = x = T_0(x)$$

Desse modo, fica comprovado que S com a operação composição forma um grupo.

3.4.6 Conjuntos-classe

3.4.6.1 Introdução

Conforme falado na seção 3.4.1, a música atonal não possui padrões de acordes preestabelecidos, o que levou Allen Forte a propor uma maneira unificada de classificar agrupamentos sonoros, com o objetivo de chegar a um número limitado de conjuntos que representasse as inúmeras combinações de acordes possíveis dentro da música atonal.

Para isso, ele considerou a seguinte relação de equivalência:

Um acorde B está relacionado com um acorde A se B puder ser obtido de A por meio de uma translação ou por meio de uma inversão seguida de uma translação.

Dessa forma, ele reúne acordes em uma mesma classe de equivalência, a qual será denominada aqui **conjunto-classe** (“*set class*”) e escolhe para representá-la aquele que está na *forma prima*, conceito este que será definido a seguir. Este representante é o que aparece na lista das classes de conjuntos (set classes), a qual pode ser vista em Straus (2005, p.261).

Como exemplo, observe o conjunto-classe circulado a seguir em trechos extraídos da Gavotte da Suíte para piano opus 25 de Schoenberg.

Figura 118 – Schoenberg – Gavotte da Suíte opus 25
Fonte: Straus (2005) p. 34

Perceba que este conjunto-classe é apresentado musicalmente de 3 maneiras distintas: melodicamente, harmonicamente ou uma combinação das duas. Todas elas se referem ao conjunto-classe: {réb, mi, fá, sol} ou, seja, {Db, E, F, G} ou ainda {1, 5, 6, 8}.

Figura 119 – Acorde {Db, E, F, G}

Note que este acorde é representado por um conjunto de notas, de modo que não importa a ordem na qual os elementos são escritos. {8, 1, 5, 6} representaria o mesmo conjunto.

Outro exemplo: seja o acorde de Dó Maior:

Figura 120 – Acorde de Dó Maior {0,4,7}

Se trasladarmos este acorde de todas as formas possíveis, encontraremos a seguinte coleção de acordes:

Tabela 6 – Translações do acorde de Dó Maior

{0,4,7}
{1,5,8}
{2,6,9}
{3,7,10}
{4,8,11}
{5,9,0}
{6,10,1}
{7,11,2}
{8,0,3}
{9,1,4}
{10,2,5}
{11,3,6}

A seguir, invertamos o acorde:

$$T_0I \{0,4,7\} = \{0, -4, -7\} = \{0,8,5\}$$

Transladando para as onze outras formas, teremos:

Tabela 7 – Translações da inversão do acorde de Dó Maior

{0,8,5}
{1,9,6}
{2,10,7}
{3,11,8}
{4,0,9}
{5,1,10}
{6,2,11}
{7,3,0}
{8,4,1}
{9,5,2}
{10,6,3}
{11,7,4}

Considere agora todos estes 24 acordes. Cada um desses acordes está relacionado com os outros ou por translação ou por inversão. Eles formam um conjunto-classe, ou “Set Class”. Qualquer um desses acordes é membro dessa “Set Class”. Cada conjunto-classe tem uma identidade musical específica, que o distingue de todos os outros. Normalmente, uma Set Class contém 24 elementos, como essa do exemplo anterior. Algumas, no entanto, têm menos que 24 elementos distintos. Um exemplo deste caso é o acorde de sétima diminuta. Esta Set Class possui somente três membros distintos. A presença de vários elementos de uma mesma classe de conjuntos garante um certo tipo de unidade sonora na composição. Porém, o interesse mais frequente é no modo como a música se move de um conjunto de classes para outro.

Um compositor pode dar unidade à sua composição usando um conjunto-classe ou um pequeno número de conjuntos-classe como unidade estrutural básica. Para reconhecermos um conjunto-classe independentemente da maneira como este é apresentado em uma peça, é de fundamental ajuda o colocarmos primeiramente da forma mais simples e compacta possível, que é chamada de “*forma normal*”.

3.4.6.2 Forma normal de um conjunto-classe

Para encontrar-se a *forma normal* de um conjunto-classe é essencial reduzir o conjunto a um padrão ordenado básico chamado de *ordem normal*. Para tanto, procede-se da maneira descrita no exemplo que se segue.

Seja o acorde {C, E, G#, A, B}.

Figura 121 – Acorde {C, E, G#, A, B}

1. Transforma-se as notas em números, eliminando-se as duplicações e indica-se suas posições em um relógio auxiliar.

Figura 122 – Posição do acorde nos relógios auxiliares

2. Verifica-se onde está o maior intervalo entre as notas e escreve-se o acorde a partir da nota do final deste intervalo, no sentido horário. Neste caso, tem-se duas possibilidades: entre o 0 e o 4 e entre o 4 e o 8.
  - Considerando o intervalo de 0 até 4, a ordem normal seria {4,8,9,11,0} ou, transformando-se o 0 em 12 para ficarmos na ordem crescente: {4,8,9,11,12}.
  - Considerando o intervalo de 4 até 8, a normal seria {8,9,11,0,4} ou, transformando-se o 0 em 12 e o 4 em 16 para ficarmos na ordem crescente, teremos: {8,9,11,12,16}.
3. Compara-se agora as duas ordem normais e escolhe-se a mais compacta à esquerda, fazendo-se o último número menos o primeiro. Se o resultado for igual, faz-se o penúltimo número menos o primeiro. Se ainda sim for igual, o antepenúltimo número menos o primeiro e assim por diante.
4. Se, na aplicação do passo 3, o resultado ainda for igual, então escolhe-se a ordem normal que começa com a pitch class representada pelo menor número inteiro.

No caso:

Tabela 8 – Cálculo da Forma Normal

Forma Normal provável	Último - primeiro	Penúltimo - primeiro
{4,8,9,11,12}	12-4=8	11-4=7
{8,9,11,12,16}	16-8=8	12-8=4

5. Desse modo, a forma normal é a segunda, {8,9,11,12,16}. Esta representa a forma mais compacta à esquerda de se escrever o acorde. A figura 123, a seguir exhibe este acorde.

Figura 123 – Acorde na sua forma normal

Pode-se perceber que esta é a forma mais compacta possível deste conjunto de classe de alturas. Se tocarmos estas notas no teclado de um piano, com uma só mão por exemplo, notaremos que o acorde que a mão fica mais fechada e mais adensada à esquerda é este da forma normal.

Em alguns casos, a forma normal de um set class é similar à posição fundamental de uma tríade. Há diferenças importantes, entretanto. Na teoria tonal tradicional, a posição fundamental da tríade é considerada mais estável do que outras posições. A forma normal, entretanto, não tem estabilidade particular ou prioridade. É somente uma maneira conveniente de escrever conjuntos tais que eles possam ser facilmente estudados e comparados.

Uma maneira de se identificar um conjunto-classe é por meio da *forma prima* do acorde. A forma prima é a forma normal de um conjunto-classe que é mais compacta à esquerda e começa com '0'.

Um processo prático de se encontrar a forma prima de um set class será descrito a seguir, por meio de um exemplo.

3.4.6.3 Processo prático para se encontrar a forma prima de um acorde

Consideremos o acorde {F#, A, A#, D#}.

1. Transformar as notas em números e colocar no relógio.

{6,9,10,3}

Figura 124 – Acorde {F#, A, A#, D#} no relógio auxiliar

2. Verificar onde está o maior intervalo entre as notas e começar a contar, no sentido horário, da primeira nota depois deste.

Figura 125 – Verificação da localização do maior intervalo

Resulta na forma normal $\{0,3,6,7\}$. Ainda tem-se que comparar com o acorde invertido.

3. Faz-se o relógio novamente e coloca-se o acorde invertido neste. Como cada número deve ser multiplicado por -1 , é a mesma coisa que marcar os números no relógio agora no sentido anti-horário.

Figura 126 – Acorde Invertido no Relógio Auxiliar

4. Verificar onde está o maior intervalo entre as notas e começar a contar, no sentido horário, da primeira nota depois deste.

Figura 127 – Verificação da localização do maior intervalo

Resulta na forma normal $\{0,1,4,7\}$.

5. Compara-se agora as duas formas normais e escolhe-se qual for mais compacta à esquerda, fazendo-se último número menos o primeiro. Se o resultado for igual, faz-se o penúltimo número menos o primeiro. Se ainda sim for igual, o antepenúltimo número menos o primeiro e assim por diante.

No caso:

Tabela 9 – Cálculo da Forma Prima do acorde $\{F\#, A, A\#, D\#\}$

Forma Normal	Último - primeiro	Penúltimo - primeiro
$[0,3,6,7]$	$7-0=7$	$6-0=6$
$[0,1,4,7]$	$7-0=7$	$4-0=4$

Desse modo, a forma prima do acorde é $[0,1,4,7]$, a da forma invertida.

Cálculo da Forma Prima do conjunto-classe $\{0,4,7\}$

Dentre todos os elementos do conjunto-classe de Dó Maior, vistos anteriormente, analisemos duas formas: uma referente ao conjunto nas sua forma de tríade maior, $\{0,4,7\}$) e a outra referente ao acorde invertido, $\{0,8,5\}$. Para encontrar a forma prima do acorde, devemos verificar qual dessas duas é mais compacta à esquerda. Começamos colocando cada uma delas na sua forma normal. Colocando as notas $\{C, E, G\}$ no relógio, temos:

Figura 128 – Acorde de Dó Maior no relógio auxiliar

Percebe-se que a forma normal é a própria, $\{0,4,7\}$ porque o maior intervalo está entre o sol (7) e o dó (0). Façamos a mesma coisa com o acorde invertido $\{0,8,5\}$:

Figura 129 – Acorde de dó invertido

Percebe-se que a forma normal é $\{0,3,7\}$ porque o maior intervalo está entre o dó (0) e o fá (5).

Dessas duas, $\{0,3,7\}$ é a mais compacta à esquerda, pois:

Forma Normal	Último - primeiro	Penúltimo - primeiro
$\{0,4,7\}$	$7-0=7$	$4-0=4$
$\{0,3,7\}$	$7-0=7$	$3-0=3$

Portanto, $\{0,3,7\}$ é a forma prima que representa este conjunto-classe. Costuma-se dizer que cada um desses conjuntos “é um $\{0,3,7\}$ ”. Straus, em seu livro “Introduction to Post-Tonal Theory”, adota a notação entre parênteses e sem vírgula separando os números para forma

prima, (037) e Oliveira (2007) utiliza colchetes com vírgulas, [0,3,7], a qual adotaremos a partir de então.

3.4.7 As Funções P, L e R

Como já comentado na seção 3.4.1, pág. 80, em fins do século XIX, houve um intenso cromatismo nas composições musicais, tais como a música de Wagner e a última fase de Beethoven, que, apesar de ter elementos triádicos, não era inteiramente tonal. Por esta razão, esta foi chamada de triádica postonal. Reconhecendo que este repertório tem características que estão além da teoria tonal tradicional, alguns teóricos musicais desenvolveram uma teoria alternativa para analisá-la.

A teoria *Neo-Riemanniana*, iniciada por *David Lewin* assumiu o estudo das funções P, L e R para tratar de problemas analíticos surgidos por meio deste repertório.

A seguir, definiremos as funções P, L e R que têm como elementos do domínio e da imagem acordes maiores e menores, acordes estes muito comuns na música ocidental. Estas funções, juntamente com a operação composição gerarão o grupo PLR, que será abordado neste capítulo. Este grupo é algumas vezes denominado *Grupo Neo-Riemanniano* porque estas funções musicais foram utilizadas pelo teórico musical Hugo Riemann (1849–1919). Tomaremos como base o artigo *Music and Mathematics*, de Fiore (FIORE, T., 2011). Fiore cita como exemplos musicais que utilizam o grupo PLR as canções de Elvis Presley dos anos 50 e a canção “*Oh, Darling*” dos *Beatles*, do álbum *Abbey Road*. O exemplo mais impressionante citado por ele é o da progressão harmônica da Nona Sinfonia de Beethoven, a qual faz o caminho de um toro matemático e que será apresentada ao final deste capítulo. Também apresentaremos outras canções dos *Beatles* como “*Octopus’s Garden*” e alguns Choros²³ de Pixinguinha que apresentam este mesmo grupo PLR de funções no seu encadeamento.

Recordemos a definição dos conjuntos τ e σ dada anteriormente:

Sejam τ e σ definidos como a seguir.

---

²³ Choro: Gênero musical originário da mistura de elementos das danças de salão européias, como a polca, o schottish, a valsa e o tango e da música portuguesa, com influências da música africana e que ganhou uma nova abordagem brasileira, com as melodias sendo tocadas de uma maneira “mais chorada”, daí o nome “Choro”.

$$\begin{aligned}\tau &= \{T_k(C)/k \in \{0,1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)\} \\ \sigma &= \{T_k I(C)/k \in \{0,1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)\}\end{aligned}$$

em que $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$ é o acorde de Dó Maior.

Cada elemento de τ é uma transposição do acorde $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$, e cada elemento de σ a transposição da “forma invertida” do acorde de dó maior. Seja S o conjunto de todos estes elementos, ou seja:

$$S = \tau \cup \sigma$$

Proposição 1: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \tau$. Existe um único $Y \in \sigma$ da forma $Y = \langle p, y, m \rangle$.

Prova: Como $X \in \tau$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tal que

$$m = k, n = 4 + k, p = 7 + k \quad (1)$$

Seja Y da forma $Y = \langle p, y, m \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tais que

$$p = r, y = -4 + r, m = -7 + r \quad (2)$$

De (1) e (2), temos

$$r = k + 7 \text{ e } y = k + 3 = m + 3 = p - 4$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle p, m + 3, m \rangle = \langle p, p - 4, m \rangle$$

e prova a afirmação.

Proposição 2: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \sigma$. Existe um único $Y \in \tau$ da forma $Y = \langle p, y, m \rangle$.

Prova: Como $X \in \sigma$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tal que

$$m = k, n = -4 + k, p = -7 + k \quad (3)$$

Seja Y da forma $Y = \langle p, y, m \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$ tais que

$$p = r, y = 4 + r, m = 7 + r \quad (4)$$

De (3) e (4), temos

$$r = k - 7 \text{ e } y = k - 3 = m - 3 = p + 4$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle p, m - 3, m \rangle = \langle p, p + 4, m \rangle$$

e prova a afirmação.

Definição 5: Define-se $P: S \rightarrow S$ como a aplicação dada por

$$P \langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle p, m + 3, m \rangle = \langle p, p - 4, m \rangle, & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \tau \\ \langle p, m - 3, m \rangle = \langle p, p + 4, m \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \sigma \end{cases}$$

para quaisquer $m, n, p \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$.

Pode-se escrever vetorialmente a função P do modo a seguir.

1) Procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$P(T_k(C)) = T_r I(C)$$

Como

$$P(T_k(C)) = P(\langle 0, 4, 7 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle) = P \langle k, 4+k, 7+k \rangle = \langle 7+k, k+3, k \rangle$$

ou seja:

$$P(T_k(C)) = \langle 7, 3, 0 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 7, 3, 0 \rangle + k \mathbf{1} \quad (5)$$

e $P(T_k(C))$ está em σ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$P(T_k(C)) = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \mathbf{1} \quad (6)$$

Portanto, de (5) e (6),

$$\langle 7, 3, 0 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 7, -5, -5 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$\langle 7, 7, 7 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$7 \mathbf{1} = (r-k) \mathbf{1}$$

$$r-k=7$$

de onde resulta

$$r = k+7$$

Portanto, usando este resultado, (1) e (2) e lembrando que $f = \langle 0, 8, 5 \rangle$, obtemos:

$$P(T_k(C)) = P(C + k \mathbf{1}) = f + (k+7) \mathbf{1} = T_{(k+7)} I(C)$$

Esta função transpõe o acorde $T_k(C)$, que é maior, para um acorde menor que está a $(k+7)$ semitons acima de f , transformando, deste modo, o acorde maior no seu homônimo menor. Teóricos musicais, como Hall (2009) denominam esta função de “transformação paralela”.

Exemplo:

- $P\langle 1, 5, 8 \rangle = \langle 8, 4, 1 \rangle$, que transforma o acorde de $C\#$ em $c\#$,
ou, na notação vetorial,
- $P(T_1(C)) = P(C\#) = f + (1+7) \mathbf{1} = c\# = T_8 I(C)$,

Figura 130 – Função P aplicada a um acorde Maior

O acorde final, $c\#$, está a 8 semitons (uma 5ª. aumentada) acima de f .

2) Analogamente, procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$P(T_k I(C)) = T_r I(C)$$

Como

$$P(T_k I(C)) = P(\langle 0, 8, 5 \rangle + k \mathbf{1}) = P\langle k, 8+k, 5+k \rangle = \langle 5+k, k+9, k \rangle$$

ou seja:

$$P(T_k I(C)) = \langle 5, 9, 0 \rangle + k \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 5, 9, 0 \rangle + k \mathbf{1} \quad (7)$$

e $P(T_k I(C))$ está em τ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$P(T_k I(C)) = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1} \quad (8)$$

Portanto, de (7) e (8),

$$\langle 5, 9, 0 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 5, 5, -7 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$\langle 5, 5, 5 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$5 \mathbf{1} = (r-k) \mathbf{1}$$

$$r-k=5$$

de onde resulta

$$r=k+5$$

Portanto, usando este resultado, (1) e (2) e lembrando que $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$, obtemos:

$$P(T_k I(C)) = P(f + k \mathbf{1}) = C + (k+5) \mathbf{1} = T_{(k+5)}(C)$$

Esta função transpõe o acorde $T_k I(C)$, que é menor, para um acorde maior que está a $(k+5)$ semitons acima de C , transformando, deste modo, o acorde menor no seu homônimo maior.

Exemplo:

- $P\langle 4, 0, 9 \rangle = \langle 9, 1, 4 \rangle$, que transforma o acorde de a em A .

ou, na notação vetorial,

- $P(T_4 I(C)) = P(a) = C + (4+5) \mathbf{1} = T_9(C) = A$

Figura 131 – Função P aplicada a um acorde menor

O acorde final, A, está a 9 semitons (uma 6ª. maior) acima de C.

Observação:

Percebe-se que

- cada uma das funções $P|_{\tau}: \tau \rightarrow \sigma$ e $P|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \tau$ é injetora, pois, considerando a primeira, se tomarmos quaisquer acordes $T_k(C) = \langle m, n, p \rangle$ e $T_{k'}(C) = \langle m', n', p' \rangle$ pertencentes a τ , $T_k(C) \neq T_{k'}(C)$, então $T_k I(C) \neq T_{k'} I(C)$. Analogamente ocorre com a segunda.
- também cada uma delas é sobrejetora, pois, como $\text{card } \tau = \text{card } \sigma = 12$, a injetividade acarreta a sobrejeção. Consequentemente, P é bijetora.

Proposição 3: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \tau$. Existe um único $Y \in \sigma$ da forma $Y = \langle y, p, n \rangle$.

Prova: Como $X \in \tau$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tal que

$$m = k, n = 4 + k, p = 7 + k \quad (9)$$

Seja Y da forma $Y = \langle y, p, n \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tais que

$$y = r, p = -4 + r, n = -7 + r \quad (10)$$

De (9) e (10), temos

$$r = k + 11 \text{ e } y = n + 7 = p + 4$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle 4 + p, p, n \rangle = \langle 7 + n, p, n \rangle$$

e prova a afirmação.

Proposição 4: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \sigma$. Existe um único $Y \in \tau$ da forma $Y = \langle y, p, n \rangle$.

Prova: Como $X \in \sigma$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$m = k, n = -4 + k, p = -7 + k \quad (11)$$

Seja Y da forma $Y = \langle y, p, n \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$ tais que

$$y = r, p = 4 + r, n = 7 + r \quad (12)$$

De (11) e (12), temos

$$r = k + 1 \text{ e } y = n - 7 = p - 4$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle n - 7, p, n \rangle = \langle p - 4, p, n \rangle$$

e prova a afirmação.

Definição 6: Define-se $L: S \rightarrow S$ como a aplicação dada por

$$L \langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle n + 7, p, n \rangle = \langle p + 4, p, n \rangle, & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \tau \\ \langle n - 7, p, n \rangle = \langle p - 4, p, n \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \sigma \end{cases}$$

para quaisquer $m, n, p \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$.

Pode-se também escrever vetorialmente a função L do modo a seguir.

1 Procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$L(T_k(C)) = T_r I(C).$$

Como

$$L(T_k(C)) = L(\langle 0, 4, 7 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle) = L \langle k, 4+k, 7+k \rangle = \langle k+11, 7+k, 4+k \rangle$$

ou seja:

$$L(T_k(C)) = \langle 11, 7, 4 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 11, 7, 4 \rangle + k \mathbf{1} \quad (13)$$

e

$L(T_k(C))$ está em σ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$L(T_k(C)) = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \quad (14)$$

Portanto, de (13) e (14),

$$\langle 11, 7, 4 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 11, -1, -1 \rangle = (r - k) \mathbf{1}$$

$$\langle 11, 11, 11 \rangle = (r - k) \mathbf{1}$$

$$11 \mathbf{1} = (r - k) \mathbf{1}$$

$$r - k = 11$$

de onde resulta

$$r = k + 11$$

Portanto, usando este resultado, (13) e (14) e lembrando que $f = \langle 0, 8, 5 \rangle$, obtemos:

$$L(T_k(C)) = P(C + k \mathbf{1}) = f + (k + 11) \mathbf{1} = T_{(k+11)} I(C)$$

Esta função transpõe o acorde $T_k(C)$, que é maior, para um acorde menor que está a $(k+11)$ semitons acima de f , transformando, deste modo, o acorde maior no acorde menor formado sobre sua medianta. Hall (2009) denomina esta função de “transformação leittonwechsel” (em alemão significa: mudança da condução do tom).

Exemplo:

- $L\langle 1, 5, 8 \rangle = \langle 0, 8, 5 \rangle$, que transforma o acorde de $C\#$ em $e\#$.

ou, na notação vetorial,

- $L(T_1(C)) = L(C\#) = f + (1 + 11) \mathbf{1} = f = e\# = T_0 I(C)$,

Figura 132 – Função L aplicada a um acorde Maior

O acorde final, e#, está a 12 semitons (uma 8ª) acima de f.

3) Analogamente, procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$L(T_k I(C)) = T_r I(C).$$

Como

$$L(T_k I(C)) = L(\langle 0, 8, 5 \rangle + k \mathbf{1}) = L\langle k, 8+k, 5+k \rangle = \langle 1+k, 5+k, 8+k \rangle$$

ou seja:

$$L(T_k I(C)) = \langle 1, 5, 8 \rangle + k \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 1, 5, 8 \rangle + k \mathbf{1} \quad (15)$$

e

$L(T_k I(C))$ está em τ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$L(T_k I(C)) = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1} \quad (16)$$

Portanto, de (15) e (16),

$$\langle 1, 5, 8 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 1, 1, 1 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$1 \cdot \mathbf{1} = (r-k) \mathbf{1}$$

$$r-k=1$$

de onde resulta

$$r=k+1$$

Portanto, usando este resultado, (15) e (16) e lembrando que $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$, obtemos:

$$L(T_k I(C)) = L(f + k \mathbf{1}) = C + (k+1) \mathbf{1} = T_{(k+1)}(C)$$

Esta função transpõe o acorde $I_k(C)$, que é menor, para um acorde maior que está a $(k+1)$ semitons acima de C , transformando, deste modo, o acorde menor no acorde maior formado sobre sua superdominante (VI grau).

Exemplo:

- $L\langle 9,5,2 \rangle = \langle 10,2,5 \rangle$, que transforma o acorde de d em Bb.

ou, na notação vetorial,

- $L(T_9 I(C)) = L(d) = C + (9+1) \mathbf{1} = a\# = B_b = T_{10}(C)$,

Figura 133 – Função L aplicada a um acorde menor

Observação: Como no caso anterior, $L|_{\tau}: \tau \rightarrow \sigma$ e $L|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \tau$ são bijeções, o que acarreta que $L:S \rightarrow S$ também será.

Proposição 5: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \tau$. Existe um único $Y \in \sigma$ da forma $Y = \langle n, m, y \rangle$.

Prova: Como $X \in \tau$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tal que

$$m = k, n = 4 + k, p = 7 + k \quad (17)$$

Seja Y da forma $Y = \langle n, m, y \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\}(\text{mod } 12)$ tais que

$$n = r, m = -4 + r, y = -7 + r \quad (18)$$

De (17) e (18), temos

$$r = n \text{ e } y = -7 + n = -3 + m$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle n, m, -3 + m \rangle = \langle n, m, -7 + n \rangle$$

e prova a afirmação.

Proposição 6: Seja $X = \langle m, n, p \rangle \in \sigma$. Existe um único $Y \in \tau$ da forma $Y = \langle n, m, y \rangle$.

Prova: Como $X \in \sigma$, existe $k \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$m = k, n = -4 + k, p = -7 + k \quad (19)$$

Seja Y da forma $Y = \langle n, m, y \rangle$. Procuremos y e $r \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$ tais que

$$n = r, m = 4 + r, y = 7 + r \quad (20)$$

De (19) e (20), temos

$$r = -4 + k \text{ e } y = n + 7 = 3 + m$$

o que leva a exibir Y da forma

$$Y = \langle n, m, n + 7 \rangle = \langle n, m, m + 3 \rangle$$

e prova a afirmação.

Definição 7: Define-se $R: S \rightarrow S$ como a aplicação dada por

$$R \langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle n, m, -3 + m \rangle = \langle n, m, -7 + n \rangle, & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \tau \\ \langle n, m, n + 7 \rangle = \langle n, m, m + 3 \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \in \sigma \end{cases}$$

para quaisquer $m, n, p \in \{0, 1, \dots, 11\} \pmod{12}$.

Pode-se também, como as outras funções, escrever vetorialmente a função R do modo a seguir.

1) Procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$R(T_k(C)) = T_r I(C)$$

Como

$$R(T_k(C)) = R(\langle 0, 4, 7 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle) = R \langle k, 4+k, 7+k \rangle = \langle 4+k, k, k-3 \rangle$$

ou seja:

$$R(T_k(C)) = \langle 4, 0, 1 \rangle + k \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 4, 0, 1 \rangle + k \mathbf{1} \quad (21)$$

e

$R(T_k(C))$ está em σ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$R(T_k(C)) = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \mathbf{1} \quad (22)$$

Portanto, de (21) e (22),

$$\langle 4, 0, -3 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 8, 5 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 4, -8, -8 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$\langle 4, 4, 4 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$4\mathbf{1} = (r-k) \mathbf{1}$$

$$r-k=4$$

de onde resulta

$$r=k+4$$

Portanto, usando este resultado, (20) e (21) e lembrando que $f = \langle 0, 8, 5 \rangle$, obtemos:

$$R(T_k(C)) = R(C + k \mathbf{1}) = f + (k+4) \mathbf{1} = T_{(k+4)} I(C)$$

Esta função transpõe o acorde $T_k(C)$, que é maior, para um acorde menor que está a $(k+4)$ semitons acima de f , transformando, deste modo, o acorde maior no seu relativo menor. Hall (2009) denomina esta função de “transformação relativa”.

Exemplo:

- $R\langle 1, 5, 8 \rangle = \langle 5, 1, 10 \rangle$, que transforma o acorde de C# em a#.

ou, na notação vetorial,

- $R(T_1(C)) = R(C + 1\mathbf{1}) = f + (1+4) \mathbf{1} = a\# = I_5(C)$

Figura 134 – Função R aplicada a um acorde maior

O acorde final, a#, está a 5 semitons (uma 8ª) acima de f.

2) Analogamente, procuremos $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$R(T_k I(C)) = T_r(C)$$

Como

$$R(T_k I(C)) = L(\langle 0, 8, 5 \rangle + k \mathbf{1}) = R\langle k, 8+k, 5+k \rangle = \langle 8+k, k, k+3 \rangle$$

ou seja:

$$R(T_k I(C)) = \langle 8, 0, 3 \rangle + k \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 8, 0, -3 \rangle + k \mathbf{1} \quad (23)$$

e

$R(T_k I(C))$ está em τ , existe $r \in \{0, \dots, 11\} \pmod{12}$ tal que

$$R(T_k I(C)) = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1} \quad (24)$$

Portanto, de (23) e (24),

$$\langle 8, 0, 3 \rangle + k \mathbf{1} = \langle 0, 4, 7 \rangle + r \mathbf{1}$$

$$\langle 8, -4, -4 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$\langle 8, 8, 8 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$8 \langle 1, 1, 1 \rangle = (r-k) \mathbf{1}$$

$$8 \cdot \mathbf{1} = (r-k) \mathbf{1}$$

$$r-k=8$$

de onde resulta

$$r=k+8$$

Portanto, usando este resultado, (22) e (23) e lembrando que $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$, obtemos:

$$R(T_k I(C)) = R(f + k \mathbf{1}) = C + (k+8) \mathbf{1} = T_{(k+8)}(C)$$

Esta função transpõe o acorde $T_k I(C)$, que é menor, para um acorde maior que está a $(k+8)$ semitons acima de C , transformando, deste modo, o acorde menor no seu relativo maior.

Exemplo:

- $R\langle 4, 0, 9 \rangle = \langle 0, 4, 7 \rangle$, que transforma o acorde de a em C.

Figura 135 – Função R aplicada a um acorde menor

ou, na notação vetorial,

- $R(T_4 I(C)) = R(a) = C + 0 \mathbf{1} = C = T_0(C)$.

Observação: Como nos casos anteriores, $R|_{\tau}: \tau \rightarrow \sigma$ e $R|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \tau$ são bijeções, acarreta que $R: S \rightarrow S$ também será.

Os três quadros, a seguir, resumem todas as aplicações.

Tabela 10 – Funções P, L, R

acorde	$P\langle m, n, p \rangle$	$L\langle m, n, p \rangle$	$R\langle m, n, p \rangle$
$\langle m, n, p \rangle \in \tau$	$\langle p, m+3, m \rangle = \langle p, p-4, m \rangle$	$\langle n+7, p, n \rangle = \langle p+4, p, n \rangle$	$\langle n, m, m-3 \rangle = \langle n, m, n-7 \rangle$
$\langle m, n, p \rangle \in \sigma$	$\langle p, m-3, m \rangle = \langle p, p+4, m \rangle$	$\langle n-7, p, n \rangle = \langle p-4, p, n \rangle$	$\langle n, m, m+3 \rangle = \langle n, m, n+7 \rangle$

Ou, na escrita vetorial:

Tabela 11 – Funções P, L, R na notação vetorial

Acorde	P	L	R
$T_k(C)$	$f + (k+7)\mathbf{1}$	$f + (k+11)\mathbf{1}$	$f + (k+4)\mathbf{1}$
$T_k I(C)$	$C + (k+5)\mathbf{1}$	$C + (k+1)\mathbf{1}$	$C + (k+8)\mathbf{1}$

Tabela 12 – Funções P, L, R

Acorde	P	L	R
$T_k(C)$	$T_{(k+7)} I(C)$	$T_{(k+11)} I(C)$	$T_{(k+4)} I(C)$
$T_k I(C)$	$T_{(k+5)}(C)$	$T_{(k+1)}(C)$	$T_{(k+8)}(C)$

Estas três funções são musicais no sentido que transformam um acorde em outro que coincide com o original em duas notas, em consequência desta característica, são fáceis de serem reconhecidas “de ouvido”.

Em música existem dois grupos que são isomorfos a um grupo conhecido dos matemáticos, chamado ***Grupo Diedral***. Este resultado é realmente surpreendente. Objetiva-se verificar esse isomorfismo para o grupo T/TI já introduzido na seção 3.4.5 e para o grupo PLR que será definido na seção 4.6. Antes de apresentar esta verificação, será necessário introduzir um tipo especial de grupo e também alguns resultados sobre os números complexos, assuntos estes das seções 4.2 e 4.3 a seguir. A seção 4.1 apresenta o suporte matemático necessário para a compreensão de tais resultados.

4 O GRUPO DIEDRAL E OS GRUPOS T/TI E PLR : UMA ANALOGIA ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA

4.1 Preliminares sobre Teoria de Grupos

1 Definição Chama-se operação sobre um conjunto E a toda aplicação de $E \times E$ em E . Há várias notações comumente usadas para a imagem (a,b) sobre uma operação binária: ab ou $a \cdot b$ (notação multiplicativa), $a + b$ (notação aditiva), $a * b$, etc.

Exemplos: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$(a,b) \rightarrow a + b$$

$$(a,b) \rightarrow a \cdot b$$

2 Definição Seja $*$ uma operação definida sobre um conjunto E ; diz-se que um elemento e , de E , é *elemento neutro* para a operação $*$ se, e somente se,

$$x * e = x = e * x$$

para todo x em E .

No caso da notação multiplicativa, o elemento neutro será indicado por “1” e no caso da notação aditiva, por “0”.

Exemplos: Para a adição usual em $\mathbb{R}$, 0 é elemento neutro, ou seja:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

Para a multiplicação usual em $\mathbb{R}$, 1 é elemento neutro:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

3 Definição $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** (de $\mathbb{R}^2$) se

$$|T(z) - T(w)| = |z - w|$$

quaisquer que sejam z e w de $\mathbb{R}^2$. É uma função que preserva as distâncias. A figura 136, a seguir, ilustra esta função.

Figura 136 – Exemplo de uma isometria T

4 Definição Seja G munido de uma operação $*$. Diz-se que a operação $*$ define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G ou que o conjunto G é um **grupo** em relação à operação $*$ se, e somente se, são válidas as seguintes propriedades:

- propriedade associativa: quaisquer que sejam x, y e z em G , tem-se:

$$(x * y) * z = x * (y * z);$$

- existência de elemento neutro: existe em G um elemento e para a operação $*$ tal que:

$$x * e = x = e * x$$

qualquer que seja x em E .

- existência de elemento inverso: para todo x em G existe em elemento inverso, x' , em G tal que:

$$x * x' = e = x' * x.$$

5 Exemplos

5.1 O conjunto $\mathbb{Z}$, com a operação usual de adição é um grupo, pois esta operação satisfaz as condições anteriores:

$$(x+y) + z = x + (y+z)$$

$$0 + x = x = x + 0 \text{ e}$$

$$(-x) + x = 0 = x + (-x),$$

quaisquer que sejam x, y e z em $\mathbb{Z}$.

5.2 O conjunto $\mathbb{Z}$, com a operação usual de multiplicação **não** é um grupo, pois, apesar de satisfazer as duas primeiras condições:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

não satisfaz a terceira, pois somente 1 e -1 possuem elemento inverso. Qualquer outro elemento, 3, por exemplo, não possui inverso, pois a equação

$$3 \cdot x = 1 \text{ tem como solução } \frac{1}{3}, \text{ que não pertence a } \mathbb{Z}.$$

Observação: se a e b são elementos de um grupo, então $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, pois

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e, \text{ analogamente,}$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = e$$

5.3 Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Uma permutação de A é uma aplicação bijetiva f de A sobre A . Seria natural indicá-la por meio da tabela:

x	1	2	3
$f(x)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

que substituiremos pela seguinte notação:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

O conjunto das permutações de A , com a operação composição forma um grupo, pois:

- Existe elemento neutro, a saber, I , em que I é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^2$.

- Se f e g são duas permutações, a composta, $f \circ g$ também é.
- Se f pertence ao conjunto das permutações, claramente f^{-1} também pertence.

Este grupo será indicado por S_3 .

Dada f , na notação acima indicada, podemos obter f^{-1} permutando as duas linhas e, em seguida, colocando em ordem crescente a primeira. Por exemplo:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4 Considere o quadrado em $\mathbb{R}^2$ mostrado na figura 137, a seguir, cujo centro está na origem e cujos vértices pertencem aos eixos coordenados e distam 1 unidade da origem. Sejam estes indicados pelas letras A, B, C e D .

Figura 137 – Quadrado em $\mathbb{R}^2$

Seja D_4 o seguinte conjunto das *isometrias* que levam o quadrado nele mesmo:

$$D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3\}$$

em que

- r_0, r_1, r_2, r_3 são rotações em torno da origem no sentido anti-horário de ângulos de medidas em graus 0, 90, 180, 270, respectivamente (portanto, r_0 é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^2$).
- s_0, s_1, s_2, s_3 são reflexões ao longo das retas pela origem que fazem com Ox ângulos de medidas em graus 0, 45, 90, 135, respectivamente.

A figura 138, a seguir, mostra o efeito destas isometrias no quadrado.

Figura 138 – Isometrias no quadrado

Estas oito isometrias formam, com a composição de aplicações, um grupo. A tabela desse grupo é a seguinte:

Tabela 13 – Tábua do Grupo D_4

	r_0	r_1	r_2	r_3	s_0	s_1	s_2	s_3
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_0	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_1	s_2	s_3	s_0
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_2	s_3	s_0	s_1
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_3	s_0	s_1	s_2
s_0	s_0	s_3	s_2	s_1	r_0	r_3	r_2	r_1
s_1	s_1	s_0	s_3	s_2	r_1	r_0	r_3	r_2
s_2	s_2	s_1	s_0	s_3	r_2	r_1	r_0	r_3
s_3	s_3	s_2	s_1	s_0	r_3	r_2	r_1	r_0

Um exemplo que indica como se pode obter a tabela anterior está na figura 139, a seguir.

Figura 139 – Operação $r_1 s_0$

Trata-se do cálculo de $r_1 s_0$. Primeiro calcula-se s_0 , que é dado na figura anterior (figura 138), depois aplica-se r_1 , que é uma rotação de 90 graus no sentido anti-horário. Obtém-se, assim, a posição final dos vértices do quadrado. Na figura anterior reconhece-se que se trata da reflexão s_1 .

Este grupo, indicado por D_4 , é chamado Grupo Diedral de Grau 4, também conhecido como Grupo do Quadrado. Na seção 4.4 será definido o Grupo Diedral de grau n .

6 Definição Seja $(G,*)$ um grupo, a um elemento deste grupo e n um número inteiro. Define-se $a * n$ da seguinte maneira:

$$a * n = \begin{cases} a * a * a * \dots * a \text{ (} n \text{ vezes)}, & \text{se } n > 0 \\ e, & \text{se } n = 0 \\ a' * a' * \dots * a' \text{ (} -n \text{ vezes)}, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Na notação multiplicativa, a definição anterior fica da seguinte maneira:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (} n \text{ vezes)}, & \text{se } n > 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \\ (a^{-1})^{-n}, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

caso em que a^n é referido como potência n -ésima de a .

E na notação aditiva,

$$na = \begin{cases} a + a + a + \dots + a \text{ (} n \text{ vezes)}, & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \\ (-n)(-a), & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

caso em que na é referido como múltiplo de a .

Pode-se provar que valem as seguintes propriedades:

- $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
- $(a^m)^n = a^{mn}$,

em que m e n são inteiros.

Será utilizada, na maioria das vezes, no decorrer do trabalho, a notação multiplicativa.

7 Definição Se $(G, *)$ é um grupo e se o conjunto G é finito, diremos que G é um grupo finito; neste caso, o número de elementos de G – que é indicado pela notação $o(G)$ – será denominado *ordem do grupo* G . Caso contrário, diremos que G é um grupo infinito e que sua ordem é infinita.

8 Definição Se $(G, *)$ é um grupo e se a operação $*$ satisfaz a propriedade comutativa: Quaisquer que sejam x e y em G , tem-se:

$$x * y = y * x,$$

diremos que G é um grupo *comutativo* ou *abeliano*.

Exemplo: O conjunto $\mathbb{Z}$, com a operação usual de adição, é um grupo abeliano.

9 Definição Seja G um grupo multiplicativo e seja H uma parte do conjunto G . H é um subgrupo de G se, e somente se, são válidas as seguintes condições:

- $1 \in H$;
- $x \in H$ e $y \in H \Rightarrow xy \in H$;
- $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Exemplos:

1. O grupo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, com a adição, é um subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$ e este, por sua vez é um subgrupo do grupo $(\mathbb{R}, +)$.
2. Para todo $m \geq 0$, o subconjunto $m\mathbb{Z}$ de todos os múltiplos de m é um subgrupo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$.
3. O conjunto formado pela identidade de um grupo G é um subgrupo de G (subgrupo trivial). G também é subgrupo de si mesmo. Qualquer outro subgrupo de G distinto desses dois é chamado de subgrupo próprio de G .

10 Proposição O conjunto $\mathfrak{I}$ das isometrias de $\mathbb{R}^2$, com a composição de aplicações, é um grupo.

Demonstração Se T e U pertencem a $\mathfrak{I}$, então

$$|(TU)(z) - (TU)(w)| = |T(U(z)) - T(U(w))| = |U(z) - U(w)| = |z - w|$$

Portanto, $TU \in \mathfrak{I}$. Temos, então, uma operação em $\mathfrak{I}$.

- Esta operação é associativa, pois o é para a composição de aplicações.
- Existe elemento neutro, a saber, I , em que I é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^2$.
- Se $T \in \mathfrak{I}$, então $T^{-1} \in \mathfrak{I}$: sejam $z, w \in \mathbb{R}^2$. Existem $r, s \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(r) = z$ e $T(s) = w$. Então,

$$|T^{-1}(z) - T^{-1}(w)| = |T^{-1}(T(r)) - T^{-1}(T(s))| = |r - s| = |T(r) - T(s)| = |z - w| \quad \blacksquare$$

11 Proposição Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ não-vazio. O conjunto $\wp$ das isometrias de $\mathbb{R}^2$ que preservam P (i. e., que levam P sobre P) é um subgrupo de $\mathfrak{I}$, o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$.

Demonstração

- Claramente, I , que é o elemento neutro do grupo $\mathfrak{I}$, pertence a $\wp$.
- Se $T, U \in \wp$, então $TU \in \wp$, pois $TU(P) = T(U(P)) = T(P) = P$.
- Se $T \in \wp$, então $T^{-1} \in \wp$, pois: $T(P) = P \Rightarrow P = T^{-1}(P)$.

12 Definição Sejam $(G, *)$ e (H, Δ) dois grupos. Diz-se que uma aplicação $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de $(G, *)$ em (H, Δ) ou que G é *isomorfo* a H se, e somente se,

- f é uma bijeção;
- $f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$, quaisquer que sejam x e y em G .

Figura 140 – Grupo G isomorfo a grupo H .

Exemplo: O grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e o grupo aditivo $2\mathbb{Z}$ dos inteiros pares, com a aplicação

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$$

$$n \rightarrow 2n$$

são isomorfos.

13 Definição Seja a um elemento de um grupo G . Dizemos que a tem ordem finita se existir um número natural não nulo m , tal que $a^m = 1$. O menor natural com tal propriedade é chamado *ordem de a* e é indicado por $o(a)$.

Exemplo 1: Seja o grupo $\mathbb{Z}_3^*$, com a multiplicação usual. Temos que $\mathbb{Z}_3^* = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ e que o elemento $\bar{2}$ tem ordem 2, pois

$$\bar{2}^2 = \bar{4} = \bar{1}$$

Exemplo 2: Seja o grupo $\mathbb{Z}_{31}^*$, com a multiplicação. Temos que $\mathbb{Z}_{31}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{30}\}$ e que o elemento $\bar{2}$ tem ordem 5, pois

$$\bar{2}^5 = \bar{32} = \bar{1}$$

e nenhuma potência não nula menor que 5 dá a identidade.

14 Teorema A interseção de subgrupos de um grupo G é um subgrupo de G .

15 Definição Seja G um grupo e A um subconjunto de G . Chama-se **subgrupo gerado por A** a interseção de todos os subgrupos de G que contêm A , o qual é indicado por $\langle A \rangle$ (que é, portanto, um subgrupo de G , de acordo com o teorema anterior). Nesse sentido, diz-se que $\langle A \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém A .

16 Exemplo Seja S_3 o grupo das permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Como o conjunto $\{1, 2, 3\}$ possui 3 elementos, o número de permutações é $3! = 6$.

São elas:

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A composição de permutações pode ser apresentada segundo uma tabela (tábua do grupo), a qual é apresentada na Tabela 14, a seguir.

Tabela 14 – Tábua de S_3

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_5	f_3	f_4
f_2	f_2	f_0	f_1	f_4	f_5	f_3
f_3	f_3	f_4	f_5	f_0	f_1	f_2
f_4	f_4	f_5	f_3	f_2	f_0	f_1
f_5	f_5	f_3	f_4	f_1	f_2	f_0

A leitura é feita linha por coluna. Por exemplo,

$$f_2 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = f_0.$$

Observe que ao elemento 1 corresponde o 3 e ao 3 o 1 novamente (segunda matriz). Portanto, ao 1 a composição faz corresponder o 1, e assim por diante.

$$f_2 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_1.$$

Da mesma maneira foram obtidos os outros resultados.

Para simplificar a notação, omitiremos o sinal de composição ‘ $\circ$ ’.

Seja $A = \{f_1, f_2\}$. Vamos encontrar $\langle A \rangle$.

Primeiramente, devemos determinar todos os subgrupos de S_3 .

- Subgrupos com 1 elemento: só existe um: $\{f_0\}$, pois o subgrupo deve conter o elemento identidade.
- Subgrupos com 2 elementos:
  - Examinemos se é possível um subgrupo com os elementos $\{f_0, f_1\}$. Observando a tábua, percebe-se que o elemento inverso de f_1 é f_2 , pois $f_1 f_2 = f_2 f_1 = f_0$. Desse modo, este subconjunto de S_3 não pode ser subgrupo, pois tem um elemento que não possui inverso.
  - O mesmo podemos dizer de $\{f_0, f_2\}$. O elemento inverso de f_2 é f_1 , pois $f_1 f_2 = f_2 f_1 = f_0$. Desse modo, este subconjunto de S_3 também não pode ser subgrupo.

- $\{f_0, f_3\}$, $\{f_0, f_4\}$ e $\{f_0, f_5\}$ são subgrupos, pois contêm o elemento neutro e o inverso e a composição é fechada nestes conjuntos. A figura 141, a seguir, mostra as partes da tabela que devem ser consultadas para se chegar a esse resultado.

○	f_0	f_3
f_0	f_0	f_3
f_3	f_3	f_0

○	f_0	f_4
f_0	f_0	f_4
f_4	f_4	f_0

○	f_0	f_5
f_0	f_0	f_5
f_5	f_5	f_0

Figura 141 – Partes da Tabela 14

Estes são os únicos subgrupos com dois elementos, porque o elemento neutro tem que estar presente.

- Subgrupos com 3 elementos:
  - $\{f_0, f_1, f_2\}$ é subgrupo.
  -

Tabela 15 – Tábua do subgrupo $\{f_0, f_1, f_2\}$

○	f_0	f_1	f_2
f_0	f_0	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2	f_0
f_2	f_2	f_0	f_1

Elemento neutro: f_0

Elemento simétrico de $f_0 = f_0$.

Elemento simétrico de $f_1 = f_2$.

Elemento simétrico de $f_2 = f_1$.

- $\{f_0, f_2, f_3\}$ não é subgrupo, pois f_2 não possui elemento inverso.
- Analogamente, conclui-se que todos os outros conjuntos de 3 elementos não são subgrupos.
- S_3 é subgrupo de si mesmo.

Pode-se provar que a ordem de um subgrupo H de um grupo finito G é um divisor da ordem de G (teorema de Lagrange). Desse modo, não existem subgrupos de S_3 com 4 ou 5 elementos, pois a ordem de S_3 é 6.

De todos estes subgrupos, os únicos que contêm A são $\{f_0, f_1, f_2\}$ e S_3 . Por definição, $\langle A \rangle$ é a interseção deles, ou seja, $\langle A \rangle = \{f_0, f_1, f_2\}$.

Uma outra maneira de se determinar o subgrupo gerado por A será apresentada a seguir, com o auxílio da seguinte

17 Proposição Seja G um grupo e A um subconjunto não-vazio de G . Então $\langle A \rangle = \hat{A}$, em que $\hat{A}$ é dado como no Lema a seguir.

Lema Seja A um subconjunto não-vazio de um grupo G , e $\hat{A}$ o conjunto de todos os produtos finitos $a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ ($a_i \in A$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, r$). $\hat{A}$ é um subgrupo de G que contém A .

Demonstração Claramente, $\hat{A}$ contém A .

• Por definição, tomado $a \in A$, a^0 pertence a $\hat{A}$, isto é, a identidade de G pertence a $\hat{A}$.

• Tomados os elementos $b = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ e $c = b_1^{m_1} \dots b_s^{m_s}$ de $\hat{A}$, temos

$bc = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} b_1^{m_1} \dots b_s^{m_s}$, que pertence a $\hat{A}$.

• Dado o elemento $a = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ de $\hat{A}$, temos que $a^{-1} = (a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r})^{-1} = a_r^{-n_r} \dots a_1^{-n_1}$, pertence a $\hat{A}$.

• Pela Definição I.8, $\hat{A}$ é um subgrupo de G .

Observação 1: Seja $A = \{a, b, c\}$. Um elemento de $\hat{A}$ é

$$b^3 a^{-2} b^2 c c^5 a^{-7} b^{-1}$$

Este elemento pode ser simplificado no caso dos elementos de A serem dois a dois comutáveis, da seguinte maneira:

$$b^3 a^{-2} b^2 c c^5 a^{-7} b^{-1} = a^{-9} b^4 c^6$$

Em geral, sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}$ e seus elementos dois a dois comutáveis, pode-se provar que um elemento genérico de $\hat{A}$ é da forma $a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$.

Demonstração da Proposição: Mostraremos que $\hat{A} \subset \langle A \rangle$ e $\langle A \rangle \subset \hat{A}$.

• Seja $a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ um elemento genérico de $\hat{A}$. $A \subset \langle A \rangle$, pois $\langle A \rangle$ é uma interseção de conjuntos que contêm A . Desse modo, cada $a_i \in \langle A \rangle$, e por ser $\langle A \rangle$ um subgrupo de G , cada fator $a_i^{n_i}$ do produto está em $\langle A \rangle$; logo, cada produto $a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ também. Portanto, $\hat{A} \subset \langle A \rangle$.

- Pelo lema anterior, $\hat{A}$ é um subgrupo de G que contém A , e como $\langle A \rangle$ é o menor dos grupos com tal propriedade, temos $\langle A \rangle \subset \hat{A}$.

18 Exemplo outra maneira de calcular $\langle A \rangle$ do exemplo 16 anterior.

Temos que $A = \{f_1, f_2\}$.

Notemos, pela tabela 15 que f_1 e f_2 comutam, pois $f_1 f_2 = f_2 f_1 (= f_0)$, o que permite dizer que $\hat{A}$ é o conjunto de todos os produtos finitos da forma:

$$f_1^m f_2^n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

As potências de f_1 são da forma:

$$\begin{array}{lll} f_1^0 = f_0 & f_1^1 = f_1 & f_1^2 = f_2 \\ f_1^3 = f_0 & f_1^4 = f_1 & f_1^5 = f_2 \\ f_1^6 = f_0 & f_1^7 = f_1 & f_1^8 = f_2 \end{array}$$

Isto nos leva a considerar a divisão de um inteiro m qualquer por 3, o que nos permite escrever $m=3k+r$, com $r = 0, 1, 2$ e $k \in \mathbb{Z}$, no cálculo de f_1^m . Temos:

$$f_1^{3k} = (f_1^3)^k = f_0^k = f_0 \qquad f_1^{3k+1} = f_1^{3k} f_1 = f_1 \qquad f_1^{3k+2} = f_1^{3k+1} f_1 = f_1 f_1 = f_2$$

Assim, qualquer potência inteira de f_1 ou é f_0 , ou é f_1 , ou é f_2 .

De modo análogo, chega-se a que qualquer potência inteira de f_2 ou é f_0 , ou é f_1 , ou é f_2 . Portanto, o conjunto de valores de $f_1^m f_2^n$ é $\{f_0, f_1, f_2\} \{f_0, f_1, f_2\}$. Calculando este produto de conjuntos obtém-se, usando a tábua da tabela 15 anterior, $\{f_0, f_1, f_2\}$. Utilizando-se a Proposição 17, conclui-se que $\langle A \rangle = \hat{A} = \{f_0, f_1, f_2\}$.

19 Exemplo Seja $A = \{r_1, s_0\}$, em que r_1, s_0 são dados como no exemplo 5.4. Vamos encontrar $\langle A \rangle$.

r_1 e s_0 não comutam.

Calculando algumas potências de r_1 , temos:

$$r_1^0 = r_0 \quad r_1^1 = r_1, \quad r_1^2 = r_2, \quad r_1^3 = r_3,$$

$$r_1^4 = r_0, \quad r_1^5 = r_1, \quad r_1^6 = r_2, \quad r_1^7 = r_3,$$

E algumas potências de s_0 , temos:

$$\begin{aligned} s_0^0 &= r_0, \quad s_0^1 = s_0, \quad s_0^2 = r_0, \quad s_0^3 = s_0, \\ s_0^4 &= r_0, \quad s_0^5 = s_0, \quad s_0^6 = r_0, \quad s_0^7 = s_0, \end{aligned}$$

Assim, qualquer potência inteira de r_1 ou é r_0 , ou é r_1 , ou é r_2 ou é r_3 . De modo análogo, chega-se a que qualquer potência inteira de s_0 ou é r_0 ou é s_0 .

Portanto, o conjunto de valores de $r_1^m s_0^n$ é $\{r_0, r_1, r_2, r_3\} \{s_0, r_0\}$, que será:

$$r_0 s_0, r_0^2, r_1 s_0, r_1 r_0, r_2 s_0, r_2 r_0, r_3 s_0, r_3 r_0.$$

Esta mesma sequência pode ser escrita da seguinte maneira:

$$s_0, r_0, s_1, r_1, s_2, r_2, s_3, r_3.$$

Portanto, o grupo gerado por $\{r_1, s_0\}$ é o grupo $D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3\}$.

A seguir será apresentado um tipo especial de grupo, gerado por dois elementos, que será utilizado na introdução do grupo diedral de grau n .

4.2 Um Exemplo de Apresentação de Grupo

Um modo de apresentar um grupo é exibir um subconjunto de geradores do mesmo e relações entre os elementos desse subconjunto. No caso que nos vai ser útil, o subconjunto é formado apenas por dois elementos e as relações são no número de três, as quais aparecem no Lema 2.

1 Lema Seja a um elemento de ordem n de um grupo, e $r, s \in \mathbb{Z}$. Então

$$a^r = a^s \Leftrightarrow r \equiv s \pmod{n}$$

Exemplo: Seja o grupo $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$.

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

$$\bar{3}^{12} = \bar{3}^6 = \bar{1} \Leftrightarrow 12 \equiv 6 \pmod{6}$$

2 Lema Sejam a e b elementos de um grupo tais que

(i) a tem ordem n , $n \geq 3$

(ii) b tem ordem 2

(iii) $bab = a^{-1}$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) Para qualquer $i \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$(1a) \quad ba^i = a^{-i}b$$

$$(1b) \quad a^i b = ba^{-i}$$

(2) Indicando $R_m = a^m$ e $S_m = a^m b (= R_m b)$, temos, quaisquer que sejam $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$(2a) \quad R_j R_k = R_{j+k}$$

$$(2b) \quad R_j S_k = S_{j+k}$$

$$(2c) \quad S_j R_k = S_{j-k}$$

$$(2d) \quad S_j S_k = R_{j-k}$$

(3) $\text{Card}\{R_0, \dots, R_{n-1}, S_0, \dots, S_{n-1}\} = 2n$,

em que Card significa Cardinalidade, que é o número de elementos do conjunto.

Demonstração

(1a) Se $i \geq 0$ é um inteiro, elevando a i ambos os membros de (iii) e valendo-nos de (ii), obtemos

$$\begin{aligned} (bab)^i &= (a^{-1})^i \\ \underbrace{(bab) \, bab \, (bab) \dots (bab) \, (bab)}_{i \text{ vezes}} &= a^{-i} \\ ba(bb)a(bb)a \dots a(bb)ab &= a^{-i} \\ baaa \dots ab &= a^{-i} \\ ba^i b &= a^{-i}, \end{aligned}$$

de onde resulta $ba^i = a^{-i}b$, para $i \geq 0$.

Suponhamos agora $i < 0$. Temos $ba^i b = b(a^{-1})^{-i}b$. Como $-i > 0$, podemos aplicar o resultado que obtivemos ($ba^i b = a^{-i}$) para escrever $b(a^{-1})^{-i}b = (a^{-1})^{-(-i)}$, ou seja, $b(a^{-1})^{-i}b = (a^{-1})^i$, i. e., $ba^i b = a^{-i}$, de onde resulta $ba^i = a^{-i}b$.

(1b) Multiplicando ambos os membros de (1a) por b à esquerda e à direita, obtemos

$$bba^i b = ba^{-i}bb, \text{ ou seja, por (ii), } a^i b = ba^{-i}.$$

$$(2a) \quad R_j R_k = a^j a^k = a^{j+k} = R_{j+k}$$

$$(2b) R_j S_k = a^j a^k b = a^{j+k} b = S_{j+k}$$

$$(2c) S_j R_k = a^j b a^k = a^j a^{-k} b = a^{j-k} b = S_{j-k}$$

$$(2d) S_j S_k = a^j b a^k b = a^j a^{-k} b b = a^j a^{-k} b^2 = a^{j-k} = R_{j-k}$$

(3) Para mostrar que a cardinalidade do conjunto é $2n$, basta mostrar que todos os elementos do conjunto são distintos.

1º caso Se $R_i = R_j$, $0 \leq i < j \leq n-1$, temos $a^i = a^j$, e daí, $a^{j-i} = e$, o que contradiz (i), porquanto $0 < j-i \leq n-1 < n$.

2º caso Se $S_i = S_j$, $0 \leq i < j \leq n-1$, temos $a^i b = a^j b$, ou seja, $a^i = a^j$, e a contradição se estabelece, conforme o caso anterior.

3º caso Se $R_i = S_j$, $0 \leq i, j \leq n-1$, temos $a^i = a^j b$, ou seja, $b = a^{i-j}$. Substituindo em (iii) resulta $a^{i-j} a (a^{i-j}) = a^{-1}$. Como $b^2 = e$, $b = b^{-1}$, a equação anterior equivale a $a^{i-j} a (a^{i-j})^{-1} = a^{-1}$, i. e., $a^{i-j+1-i+j} = a^{-1}$, ou seja, $a = a^{-1}$, ou seja, $a^2 = e$, o que contradiz (i).

3 Proposição Sejam a e b elementos de um grupo tais que

$$(i) a \text{ tem ordem } n, n \geq 3$$

$$(ii) b \text{ tem ordem } 2$$

$$(iii) bab = a^{-1}$$

Então, com a notação do lema anterior,

$$\langle a, b \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\} = \{R_0, \dots, R_{n-1}, S_0, \dots, S_{n-1}\}$$

$$\text{e Card } \langle a, b \rangle = 2n.$$

Demonstração

Consideremos um elemento qualquer de $\langle a, b \rangle$. Ele é um produto finito de potências inteiras de a e b . Podemos ter, por exemplo, um elemento da forma:

$$ba^6 a^{-4} a^3 b^5 b^7 a^3 a^4 b^6 a$$

• Graças a (ii), podemos substituir uma potência ímpar de b por b e omitir uma par, pois, sendo b^2 o elemento neutro de G ,

$$b^{2k+1} = b^{2k} \cdot b = b$$

e

$$b^{2k} = (b^2)^k = e^k = e.$$

- Todo grupo de potências inteiras de a pode ser substituído por uma única:

$$a^{m_1} a^{m_2} \dots a^{m_r} = a^{m_1 + m_2 + \dots + m_r}$$

Tomaremos sempre todas as adjacentes.

Assim, o elemento do exemplo anterior equivalerá a:

$$ba^5 e a^7 a = ba^{13}$$

Dessa forma, um elemento genérico x terá o seguinte aspecto:

$$x = \dots ba^{n_1} ba^{n_2} ba^{n_3} b \dots \quad (1)$$

(as reticências foram usadas para indicar que o fator inicial pode ser b ou uma potência inteira de a , o mesmo valendo para o fator final).

A seguir, mostraremos, após estas simplificações feitas nos elementos de $\langle a, b \rangle$, que cada um deles é da forma $a^m b^r$, em que $r = 0$ ou 1 e $m = 0, 1, \dots, n-1$ (pois a é de ordem n). Faremos isto por indução sobre o número de fatores de x (entendendo por fator b ou a^m).

- Se x tem apenas um fator, ou é b ou é a^m , de modo que a afirmação vale para este caso, pois ele é da forma $a^m b^r$.
- Suponhamos que a afirmação vale para todo elemento de $\langle a, b \rangle$ com k fatores, ou seja, suponhamos que todo elemento de k fatores seja da forma:

$$a^m b^r.$$

Vamos provar que o mesmo se sucede com um elemento qualquer de $\langle a, b \rangle$ com $k+1$ fatores. Seja, portanto, um elemento y de $\langle a, b \rangle$ com $k+1$ fatores:

$$\underbrace{a^m \cdot b^r}_{k \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a^p \text{ ou } b}_{1 \text{ fator}}$$

Associando os k primeiros fatores e usando a hipótese de indução, ele se escreve $y = a^m b^r a^p$ (primeiro caso) ou $y = a^m b^r b$ (segundo caso), conforme o último fator seja uma potência de a ou seja b .

- ♦ No primeiro caso, se $r = 0$, temos $y = a^m a^p = a^{m+p}$; se $r = 1$, $y = a^m b a^p = a^m a^{-p} b = a^{m-p} b$ (usamos o Lema 2 (1a)).
- ♦ No segundo caso, $y = a^m b^{r+1}$. Portanto, se $r = 0$, temos $y = a^m b$, e se $r = 1$, $y = a^m$.

Como conclusão do que foi provado, podemos dizer que $\langle a, b \rangle$ é formado de elementos da forma a^α e da forma $a^\beta b$, α e β inteiros. Mais ainda, da arbitrariedade dos inteiros em (1), resulta a arbitrariedade dos inteiros α e β . Mas, graças a (i), os valores distintos apresentados para α e β são $0, 1, \dots, n-1$. Podemos então escrever,

$$\langle a, b \rangle = \{a^0 = e, a^1 = a, \dots, a^{n-1}, b, a^1 b, a^2 b, \dots, a^{n-1} b\}$$

ou seja,

$$\langle a, b \rangle = \{R_0, \dots, R_{n-1}, S_0, \dots, S_{n-1}\}$$

A afirmação da cardinalidade resulta do Lema 2 - (3).

4 Aspecto da Tábua de $\langle a, b \rangle$

As relações (2a), (2b), (2c) e (2d) do Lema 2 nos permitem construir a tábua de $\langle a, b \rangle$. Ei-las repetidas aqui para a conveniência do leitor.

$$(2a) R_j R_k = R_{j+k} \quad (2b) R_j S_k = S_{j+k} \quad (2c) S_j R_k = S_{j-k} \quad (2d) S_j S_k = R_{j-k}$$

De acordo com essas relações, vemos que a tábua fica dividida em quatro “quadrados $n \times n$ ”, que mostramos na Figura 142, com as letras **R** e **S** para indicar que nelas figuram respectivamente elementos da forma R_k e S_k .

Figura 142 – Aspecto da Tábua de $\langle a, b \rangle$

5 Corolário Sejam a e b elementos de um grupo tais que

- (i) a tem ordem n , $n \geq 3$ (ii) b tem ordem 2   (iii) $bab = a^{-1}$

Se a' e b' s3o elementos de um grupo tais que

- (i) a' tem ordem n , $n \geq 3$ (ii) b' tem ordem 2   (iii) $b'a'b' = (a')^{-1}$

ent3o $\langle a, b \rangle$ e $\langle a', b' \rangle$ s3o isomorfos.

Demonstra33o Sendo $R'_m = (a')^m$ e $S'_m = R'_m b'$, temos

$$\langle a', b' \rangle = \{R'_0, \dots, R'_{n-1}, S'_0, \dots, S'_{n-1}\}.$$

A aplica33o de $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b' \rangle$ dada por $f(R_j) = R'_j$, $f(S_j) = S'_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, evidentemente bijetora, 3 um isomorfismo. Isto 3 intuitivamente claro, pois as tábua de ambos os grupos *diferem por '.* Para uma demonstra33o formal, vamos indicar, para um inteiro qualquer m , o 3nico inteiro congruente a $m \bmod n$ pertencente a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ por $\tilde{m}$. Ent3o:

Sejam $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Temos:

- $f(R_j R_k) = f(R_{j+k}) = f(R_{\widetilde{j+k}}) = R'_{\widetilde{j+k}} = R'_{j+k} = R'_j R'_k = f(R_j) f(R_k)$
- $f(R_j S_k) = f(S_{j+k}) = f(S_{\widetilde{j+k}}) = S'_{\widetilde{j+k}} = S'_{j+k} = R'_j S'_k = f(R_j) f(S_k)$

- $f(S_j R_k) = f(S_{j-k}) = f(S_{\overline{j-k}}) = S'_{\overline{j-k}} = S'_{j-k} = S'_j R'_k = f(S_j) f(R_k)$
- $f(S_j S_k) = f(R_{j-k}) = f(R_{\overline{j-k}}) = R'_{\overline{j-k}} = R'_{j-k} = S'_j S'_k = f(S_j) f(S_k)$

Na seção que desenvolveremos a seguir serão utilizados resultados básicos sobre o corpo dos números complexos, os quais serão apresentados na sequência.

4.3 Resultados sobre o Corpo dos Números Complexos

Um número complexo $z \neq 0$ admite uma representação geométrica, como mostrado na Figura 143.

Figura 143 – Número complexo $z = |z|e^{i\varphi}$

Sendo φ o ângulo que o segmento Oz faz com o eixo Ox , podemos escrever:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Se multiplicarmos este número por $z_1 = 1(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}$, obteremos um novo número w da forma:

$$w = z \cdot z_1 = |z| \cdot (\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)),$$

o qual rotacionará z de θ , no sentido anti-horário, se $\theta > 0$, (figura 144, a seguir) e no sentido horário se $\theta < 0$.

Figura 144 – $z \cdot e^{i\theta}$, $\theta > 0$

Indicaremos uma rotação de ângulo (de medida) θ em torno da origem por R_θ . Portanto :

$$R_\theta(z) = e^{i\theta} z \quad (2)$$

Esta rotação é uma isometria de $\mathbb{R}^2$, pois

$$|R_\theta(z) - R_\theta(w)| = |e^{i\theta} z - e^{i\theta} w| = |e^{i\theta}(z - w)| = |e^{i\theta}| |z - w| = |z - w|$$

Em particular, se multiplicarmos um número complexo $z \neq 0$ por i , obteremos um novo número zi , que vai estar a 90° de z , no sentido anti-horário, de acordo com o que dissemos anteriormente.

Uma outra maneira de ver isso é observando que se $z = (a, b) = a + bi$, então $zi = ai - b = (-b, a)$ (figura 145).

Figura 145 – Número complexo iz

1 Proposição Para quaisquer $\theta_1, \theta_2, \theta$ reais e m inteiro, tem-se:

(a) $R_{\theta_1 + \theta_2} = R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_2} R_{\theta_1}$	(b) $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
(c) $R_{m\theta} = R_\theta^m$	(d) $R_\theta = R_\alpha \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$

Demonstração

$$(a) R_{\theta_1 + \theta_2}(z) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} z = e^{i\theta_1 + i\theta_2} z = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} z = e^{i\theta_1} R_{\theta_2}(z) = (R_{\theta_1} R_{\theta_2})(z).$$

A comutatividade segue do fato de que $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$.

(b) Por (a), $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I$, o que prova a asserção.

(c)

• Se $m = 0$ a fórmula é claramente verificada.

• Se $m > 0$, usamos a versão de (a) para uma soma de m índices, para escrever $R_{m\theta} = R_{\theta+\theta+\dots+\theta} = R_\theta^m$.

• Se $m < 0$, escrevendo $m\theta = (-m)(-\theta)$, podemos aplicar o caso anterior para $-\theta$ no papel de θ e $-m$ no de m :

$$R_{m\theta} = R_{(-m)(-\theta)} = R_{-\theta}^{-m} = (R_\theta^{-1})^{-m} = R_\theta^m$$

(Na 3ª igualdade usamos (b), e na 4ª, a definição de R_θ^m para $m < 0$.)

$$(d) R_\theta = R_\alpha \Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow e^{i\theta} (e^{i\alpha})^{-1} = 1 \Leftrightarrow e^{i\theta} e^{-i\alpha} = 1 \Leftrightarrow e^{i(\theta-\alpha)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}: \theta - \alpha = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

2 Vamos exprimir S_θ , a simetria em relação a uma reta t pela origem fazendo ângulo (de medida) θ com o eixo das abscissas, em termos de números complexos. Observe a Figura 146.

Figura 146 – Simetria S_θ , em relação à reta t .

Sendo v a projeção de $-z$ sobre a perpendicular a t por z , temos que

$$S_\theta(z) = z + 2v \quad (3)$$

Se $\theta=0$, $S_\theta(z) = \bar{z}$.

Lembrando que o produto escalar $z \cdot w = (\bar{z}w + z\bar{w})/2$, e observando que um vetor unitário na direção de t é $e^{i\theta}$ e um unitário perpendicular a t é $ie^{i\theta}$, temos

$$v = \frac{(-z \cdot ie^{i\theta})}{\|ie^{i\theta}\|^2} \cdot ie^{i\theta}$$

Porém, $\|ie^{i\theta}\|^2=1$, pois:

$$\|ie^{i\theta}\| = \|i(\cos\theta + isen\theta)\|$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} v &= (-z \cdot ie^{i\theta})ie^{i\theta} = -(z \cdot ie^{i\theta})ie^{i\theta} = -\frac{1}{2}(\bar{z}ie^{i\theta} + z\overline{ie^{i\theta}})ie^{i\theta} \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{z}ie^{i\theta} + z(-i)e^{-i\theta})ie^{i\theta} = -\frac{1}{2}(-\bar{z}e^{i2\theta} + z) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{z}e^{i2\theta} - z) \end{aligned}$$

Substituindo em (3), resulta $S_\theta(z) = \bar{z}e^{i2\theta} = (R_{2\theta}S_0)(z)$. Portanto,

$$S_\theta = R_{2\theta}S_0 \quad (4)$$

Este resultado pode ser verificado geometricamente, supondo que z forme um ângulo de φ com o eixo das abscissas, conforme a figura 147, a seguir:

Figura 147 – $S_\theta = R_{2\theta}S_0$

Perceba que $\varphi + \varphi + \theta - \varphi + \theta - \varphi = 2\theta$

S_0 é uma isometria, pois $|S_0(z) - S_0(w)| = |\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|$. Assim, (4) nos garante que S_θ também é isometria, como composta de isometrias.

3 Proposição $S_0 R_\theta S_0 = R_\theta^{-1}$

A figura 148, a seguir, ilustra esta proposição.

Figura 148 – $S_0 R_\theta S_0 = R_\theta^{-1}$

Demonstração

$$S_0 R_\theta S_0(z) = S_0 R_\theta(\bar{z}) = S_0(e^{i\theta} \bar{z}) = \overline{e^{i\theta} \bar{z}} = \overline{e^{i\theta}} \bar{\bar{z}} = e^{-i\theta} z = R_{-\theta}(z) = R_\theta^{-1}(z)$$

(Na última igualdade usamos 1 (b), dessa seção).

4.4 Definição e Determinação do Grupo Diedral

Designaremos por P_n o polígono regular de n lados ($n \geq 3$) contido em $\mathbf{R}^2$, cujos vértices são as raízes n -ésimas da unidade. Estas são $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Na Figura 149 mostramos a representação de alguns polígonos.

Figura 149 – Polígonos regulares com 3, 4, 5, e 6 lados

1 Definição O grupo das isometrias de $\mathbf{R}^2$ que preservam P_n chama-se **grupo diedral de grau n** , o qual é denotado por D_n .

2 Notações Para aliviar a escrita, usaremos as seguintes notações:

(a) $r_k = R_{k\frac{2\pi}{n}}$ Lembremos que $R_{k\frac{2\pi}{n}}$ é a rotação, em torno da origem, no sentido anti-horário, de um ângulo de medida $k\frac{2\pi}{n}$, como caracterizado em (2) (seção 4.3, pág. 174).

Assim, $r_1 = R_{\frac{2\pi}{n}}$ e será notado, alternativamente, por r .

(b) $s_k = S_{k\frac{\pi}{n}}$. Lembremos que $S_{k\frac{\pi}{n}}$ é a simetria em relação a uma reta pela origem, fazendo um ângulo de medida $k\frac{\pi}{n}$ com o eixo das abscissas, como caracterizado em 2 da seção 4.3, pág.174. s_0 será notado alternativamente por s . Portanto, $S_0 = s_0 = s$ e $s^2 = I$.

Assim:

$$r_k = r^k \quad (5)$$

pois

$$r_k = R_{k\frac{2\pi}{n}} = R_{\frac{2\pi}{n}}^k = r^k$$

(usamos a definição de r_k , a Proposição 1 (c), pág. 173 e (5)) e

$$s_k = R_{2k\frac{\pi}{n}} S_0 = r_k s = r^k s$$

(usamos a definição de s_k e a de r_k , dadas anteriormente, e (5)).

3 Proposição $D_n = \langle r, s \rangle = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ e $\text{Card } D_n = 2n$.

Demonstração

É evidente que r e s pertencem a D_n . Portanto,

$$\langle r, s \rangle \subset D_n \quad (6)$$

Logo,

$$\text{Card} \langle r, s \rangle \leq \text{Card } D_n \quad (7)$$

Além disso, r e s verificam (i), (ii) e (iii) da Proposição 3, da seção 4.2, pág. 168, com r no papel de a , s no de b ((iii) resulta da Proposição 3, da seção 4.3, pág. 176). Portanto, pela Proposição 3, da seção 4.2 podemos concluir que

$$\langle r, s \rangle = \{r^0 = e, r^1 = r, \dots, r^{n-1}, s, r^1 s, r^2 s, \dots, r^{n-1} s\} \quad (8)$$

e que

$$\text{Card} \langle r, s \rangle = 2n \quad (9)$$

Mas uma isometria que preserva P_n deve levar vértices em vértices bijetivamente. Fixando dois vértices adjacentes, existem n posições que isometrias podem enviar um dos vértices, e duas escolhas para o outro. Para um melhor entendimento, vejamos o seguinte exemplo: considere o polígono P_4 . Acompanhe na figura 150 uma isometria que leva ele nele mesmo.

Figura 150 – Uma isometria do quadrado

No caso do quadrado, o número máximo de isometrias é $4 \cdot 2 = 8$.

Voltando ao caso genérico P_n , o número máximo dessas isometrias é $2n$, ou seja, $\text{Card} D_n \leq 2n$. Esta desigualdade, (7) e (9) acarretam $2n \leq \text{Card} D_n \leq 2n$, ou seja,

$$\text{Card} D_n = 2n \quad (10)$$

Esta igualdade e (6) permitem concluir que $\langle r, s \rangle = D_n$.

4 Tábua do Grupo Diedral

As relações a seguir nos permitem construir a tábua de um grupo diedral.

$$(a) r_j r_k = r_{j+k} \quad (b) r_j s_k = s_{j+k} \quad (c) s_j r_k = s_{j-k} \quad (d) s_j s_k = r_{j-k}$$

Estas relações provêm das relações (2a), (2b), (2c) e (2d) do Lema 2 da seção 4.2, respectivamente, através do isomorfismo definido no corolário 5 desta mesma seção, aplicado a $\langle a, b \rangle$ e D_n , que leva a em r e b em s .

Também, pelo fato de r ser um elemento de ordem n do Grupo Diedral D_n , decorre, imediatamente do Lema 1 da seção 4.2 e deste mesmo isomorfismo as relações

$$r_k = r_m \Leftrightarrow r^k = r^m \Leftrightarrow k \equiv m \pmod{n}$$

e

$$s_k = s_m \Leftrightarrow r^k s = r^m s \Leftrightarrow k \equiv m \pmod{n}$$

para todo $r, s \in \mathbb{Z}$.

Estes mesmos resultados podem ser obtidos utilizando a Proposição 1(d), da seção 4.3, pág. 173.

Como exemplo concreto, explicitaremos esta tábua no caso de D_{12} . Preenchemos a tábua por coluna de cada “quadrado $n \times n$ ”. Vamos mostrar, por exemplo, como preenchemos a coluna destacada na tábua de D_{12} (Tabela 17), cujos elementos são, de acordo com a relação (c) anterior, da forma $s_j r_2 = s_{j-2}$. Para cada índice j de s_j , calculamos o índice $j - 2$ de s_{j-2} . Os cálculos foram feitos segundo a disposição prática seguinte (Tabela 16).

Tabela 16 – Cálculo de s_{j-2}

índice de s_j	Índice de s_{j-2}	s_{j-2}
0	$-2 = 10$	s_{10}
1	$-1 = 11$	s_{11}
2	0	s_0
3	1	s_1
4	2	s_2
5	3	s_3
6	4	s_4
7	5	s_5
8	6	s_6
9	7	s_7
10	8	s_8
11	9	s_9

A Tabela 17 mostra a tábua completa de D_{12} , em que destacamos o cálculo da Tabela 16.

Tabela 17 – Tábua do Grupo Diedral D_{12}

	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0
r_2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1
r_3	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2
r_4	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3
r_5	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
r_6	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
r_7	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
r_8	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
r_9	r_9	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
r_{10}	r_{10}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	s_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
r_{11}	r_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	s_{11}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
s_0	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1
s_1	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2
s_2	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3
s_3	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4
s_4	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5
s_5	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6
s_6	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7
s_7	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8
s_8	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	s_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}	r_9
s_9	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	s_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}	r_{10}
s_{10}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	s_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_{11}
s_{11}	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	r_{11}	r_{10}	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0

4.5 O Grupo T/TI e o Grupo D₁₂

Proposição O grupo T/TI, definido em 3.4.5, é gerado pelos elementos T_I e T_0I e é isomorfo ao grupo Diedral D_{12} .

Demonstração T_I e T_0I verificam (i), (ii) e (iii) da Proposição 3 da seção 4.2, com $n = 12$, T_I no papel de a e T_0I no de b , como é mostrado a seguir.

- T_I tem ordem 12.

Temos:

$$T_1^0(x) = x$$

$$T_I(x) = x + I$$

$$T_1^2(x) = T_1(T_1(x)) = T_1(x + 1) = x + 2 = T_2(x)$$

$$T_1^3(x) = T_1(T_1^2(x)) = T_1(x + 2) = x + 3 = T_3(x)$$

$$T_1^4(x) = T_1(T_1^3(x)) = T_1(x + 3) = x + 4 = T_4(x)$$

$$T_1^5(x) = T_1(T_1^4(x)) = T_1(x + 4) = x + 5 = T_5(x)$$

$$T_1^6(x) = T_1(T_1^5(x)) = T_1(x + 5) = x + 6 = T_6(x)$$

$$T_1^7(x) = T_1(T_1^6(x)) = T_1(x + 6) = x + 7 = T_7(x)$$

$$T_1^8(x) = T_1(T_1^7(x)) = T_1(x + 7) = x + 8 = T_8(x)$$

$$T_1^9(x) = T_1(T_1^8(x)) = T_1(x + 8) = x + 9 = T_9(x)$$

$$T_1^{10}(x) = T_1(T_1^9(x)) = T_1(x + 9) = x + 10 = T_{10}(x)$$

$$T_1^{11}(x) = T_1(T_1^{10}(x)) = T_1(x + 10) = x + 11 = T_{11}(x)$$

$$T_1^{12}(x) = T_1(T_1^{11}(x)) = T_1(x + 11) = x + 12 = x \bmod 12 = T_0(x) = e$$

- T_0I tem ordem 2, pois:

$$(T_0I)^2(x) = T_0I(x) \circ T_0I(x)$$

$$= T_0I(T_0I(x))$$

$$= T_0I(-x)$$

$$= -(-x) = x$$

- $(T_0I)T_I(T_0I)(x) = (T_0I)T_I(-x)$

$$= (T_0I)(-x + I)$$

$$= -(-x + I)$$

$$= x - I = T_{-I}(x) = T_1^{-1}(x),$$

Portanto, pelo colorário 5,

$$\langle T_I, T_0I \rangle \cong D_{12} \quad (11)$$

Mas $\langle T_I, T_0I \rangle$ é subgrupo de T/TI e, pela proposição 3 da seção 4.2, possui 24 elementos.

Como T/TI também possui 24 elementos, temos que:

$$T/TI = \langle T_I, T_0I \rangle \quad (12)$$

Por (11) e (12), T/TI é isomorfo a D_{12} .

Em consequência, todas as relações apresentadas em 4 da seção 4.4 são válidas também para T_m e T_mI , com T_m no papel de r_m e T_mI no papel de s_m , resultado este também já demonstrado em 3.4.5.

Podemos explicitar o aludido isomorfismo.

Existe uma correspondência entre os vértices de um dodecágono regular e as notas musicais, a qual é mostrada na tabela 18 e na figura 151 a seguir.

Tabela 18	
dó	A
dó#	B
ré	C
ré#	D
mi	E
fá	F
fá#	G
sol	H
sol#	I
lá	J
lá#	K
si	L

Figura 151 – Correspondência entre os vértices de um dodecágono e as notas musicais

É possível exibir também uma correspondência entre cada elemento do grupo T/TI e do grupo diedral D_{12} , como mostra a tabela 19 a seguir.

Tabela 19

D_{12}	T/TI
r^0	$T_1^0 = T_0$
r	$T_1 = T_1$
r^2	$T_1^2 = T_2$
...	...
r^j	$T_1^j = T_j$
...	...
r^{11}	$T_1^{11} = T_{11}$
s	$T_0I = T_0I$
rs	$T_1(T_0I) = T_1I$
r^2s	$T_1^2(T_0I) = T_2I$
...	...
r^js	$T_1^j(T_0I) = T_jI$
...	...
$r^{11}s$	$T_1^{11}(T_0I) = T_{11}I$

Essa correspondência é o isomorfismo mencionado no corolário 5, pág. 171.

Graças a este isomorfismo, fica justificada a interpretação geométrica dada por Oliveira (OLIVEIRA,1998, p. 7). Notemos que, para melhor comparação com os resultados obtidos, o dodecágono de Oliveira (ver 3.4.3) foi substituído pelo da figura 151.

Portanto, a aplicação por ela indicada é o isomorfismo f .

A interpretação como simetria axial pode também ser justificada pela fórmula

$$S_\theta = R_{2\theta}S_0,$$

vista em (4), da seção 4.3, pág. 175.

4.6 O Grupo PLR e o Grupo D_{12}

Definição: Define-se o grupo PLR como o grupo $\langle P, L, R \rangle$.

Teorema O grupo PLR é gerado por LR e R e é isomorfo ao grupo diedral D_{12} .

Demonstração

Conforme definido, o grupo PLR é o grupo $\langle P, L, R \rangle$.

- P pode ser expresso em função de R e L, como mostram os cálculos a seguir.

Seja $\langle m, n, p \rangle \in \tau$.

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
 R\langle m, n, p \rangle &= \langle n, m, -3+m \rangle \in \sigma \\
 LR\langle m, n, p \rangle &= \langle m-7, -3+m, m \rangle \in \tau \\
 R(LR)\langle m, n, p \rangle &= \langle -3+m, m-7, m-10 \rangle \in \sigma \\
 (LR)^2\langle m, n, p \rangle &= \langle m-2\cdot 7, m-10, m-7 \rangle \in \tau \\
 R(LR)^2\langle m, n, p \rangle &= \langle m-10, m-2\cdot 7, m-2\cdot 7-3 \rangle \in \sigma \\
 (LR)^3\langle m, n, p \rangle &= \langle m-3\cdot 7, m-2\cdot 7-3, m-2\cdot 7 \rangle \in \tau \\
 R(LR)^3\langle m, n, p \rangle &= \langle m-2\cdot 7-3, m-7\cdot 3, m-3\cdot 8 \rangle \in \sigma
 \end{aligned}$$

Como $\langle m, n, p \rangle$ é uma tríade maior, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 m+4 &= n, \\
 n+3 &= p, \\
 p-7 &= m
 \end{aligned} \tag{13}$$

Dessa forma,

$$m-2\cdot 7-3 = p-7-2\cdot 7-3 = p-24 = p \bmod 12$$

$$m-7\cdot 3 = m-24+3 = m+3 \bmod 12$$

$$m-3\cdot 8 = m-24 = m \bmod 12$$

Pode-se verificar o mesmo resultado se partirmos de uma tríade menor, $\langle m, n, p \rangle (\in \sigma)$, o que leva a concluir que

$$R(LR)^3\langle m, n, p \rangle = \langle p, m+3, m \rangle = P\langle m, n, p \rangle$$

Este resultado permitirá mostrar que

$$PLR = \langle P, L, R \rangle = \langle L, R \rangle$$

- Se aplicarmos, alternadamente, as funções R e L , à uma tríade maior, $\langle m, n, p \rangle (\in \tau)$, obteremos a seguinte sequência de tríades:

$$\begin{array}{llllll}
 R\langle m, n, p \rangle & = & \langle n, & m, & -3+m & \rangle \in \sigma \\
 LR\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-7, & -3+m, & m & \rangle \in \tau \\
 R(LR)\langle m, n, p \rangle & = & \langle -3+m, & m-7, & m-10 & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^2\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-2\cdot 7, & m-10, & m-7 & \rangle \in \tau \\
 R(LR)^2\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-10, & m-2\cdot 7, & m-2\cdot 7-3 & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^3\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-3\cdot 7, & m-2\cdot 7-3, & m-2\cdot 7 & \rangle \in \tau \\
 R(LR)^3\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-2\cdot 7-3, & m-7\cdot 3, & m-3\cdot 8 & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^4\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-4\cdot 7, & m-8\cdot 3, & m-8\cdot 3 & \rangle \in \tau \\
 R(LR)^4\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-8\cdot 3, & m-4\cdot 7, & m-4\cdot 7-3 & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^5\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-5\cdot 7, & m-4\cdot 7-3, & m-4\cdot 7 & \rangle \in \tau \\
 R(LR)^5\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-4\cdot 7-3, & m-5\cdot 7, & m-5\cdot 7-3 & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^6\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-6\cdot 7, & m-5\cdot 7-3, & m-5\cdot 7 & \rangle \in \tau \\
 \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 R(LR)^{11}\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-10\cdot 7-3 & m-11\cdot 7, & m-11\cdot 7- & \rangle \in \sigma \\
 (LR)^{12}\langle m, n, p \rangle & = & \langle m-12\cdot 7, & m-11\cdot 7-3, & m-11\cdot 7 & \rangle \in \tau
 \end{array}$$

Portanto, utilizando as relações obtidas em (13), tem-se que:

$$m-12\cdot 7 = m \pmod{12},$$

$$m-11\cdot 7-3 = n-4-11\cdot 7-3 = n-7-11\cdot 7 = n-12\cdot 7 = n \pmod{12}$$

$$m-11\cdot 7 = p-7-11\cdot 7 = p-12\cdot 7 = p \pmod{12}$$

Dessa forma, pode-se concluir que $(LR)^{12}\langle m, n, p \rangle = \langle m, n, p \rangle$.

Pode-se verificar o mesmo resultado se aplicarmos, alternadamente, as funções R e L , à uma tríade menor, $\langle m, n, p \rangle (\in \sigma)$.

Além disso, R tem ordem 2.

Portanto, sendo: $a=LR$ e $b=R$, teremos que

$$a^{12} = 1, b^2 = 1$$

e

$$\begin{aligned} bab &= R(LR)R \\ &= RL \\ &= (LR)^{-1} \\ &= a^{-1} \end{aligned}$$

Como

$$PLR = \langle P, L, R \rangle = \langle L, R \rangle$$

e LR e R verificam (i), (ii) e (iii) do corolário 5, pág. 171, podemos concluir que este grupo e D_{12} são isomorfos.

Proposição $\langle a, b \rangle = \langle ab, a \rangle$

Demonstração Sejam a e b elementos de um grupo G . Mostraremos que $\langle ab, a \rangle \subset \langle a, b \rangle$ e que $\langle a, b \rangle \subset \langle ab, a \rangle$.

1. $\langle ab, a \rangle \subset \langle a, b \rangle$

$\langle a, b \rangle$ é subgrupo de G que contém a e b . Logo, contém ab e a . Mas, por definição, o menor subgrupo de G que contém ab e a é $\langle ab, a \rangle$. Assim, $\langle ab, a \rangle \subset \langle a, b \rangle$.

2. $\langle a, b \rangle \subset \langle ab, a \rangle$

De fato, $\langle ab, a \rangle$ é subgrupo de G que contém ab e a . Logo, contém a^{-1} . Portanto, contém $a^{-1}ab = b$. Desse modo, $\langle ab, a \rangle$ contém a e b . Mas o menor subgrupo que contém a e b é, por definição,

$$\langle a, b \rangle.$$

Assim,

$$\langle a, b \rangle \subset \langle ab, a \rangle$$

De 1. e 2., concluímos que:

$$\langle a, b \rangle = \langle ab, a \rangle.$$

Dessa forma, podemos afirmar, por meio do isomorfismo definido no corolário 5, pág. 171, aplicado a $\langle a, b \rangle$ e D_{12} , que leva a em LR e b em R , que o grupo PLR é gerado por LR e R , possui 24 elementos e é isomorfo ao grupo diedral D_{12} .

Da mesma maneira como foi exibido para o grupo T/TI, é possível exibir também um isomorfismo entre os grupos PLR e D_{12} , como mostra a tabela 20 a seguir.

Tabela 20

D_{12}	PLR
r^0	$(LR)^0 = C$
r	$(LR)^5 = D_b$
r^2	$(LR)^{10} = D$
r^3	$(LR)^{15} = (LR)^3 = E_b$
r^4	$(LR)^8 = E$
r^5	$(LR)^{13} = LR = F$
r^6	$(LR)^6 = G_b$
r^7	$(LR)^{11} = G$
r^8	$(LR)^{16} = (LR)^4 = A_b$
r^9	$(LR)^9 = A$
r^{10}	$(LR)^{14} = (LR)^2 = B_b$
r^{11}	$(LR)^7 = B$
s_0	$R(LR)^4 = f$
rs	$R(LR)^9 = f\#$
r^2s	$R(LR)^{14} = R(LR)^2 = g$
r^3s	$R(LR)^7 = g\#$
r^4s	$R(LR)^{12} = R(LR)^0 = R = a$
r^5s	$R(LR)^5 = b_b$
r^6s	$R(LR)^{10} = b$
r^7s	$R(LR)^{15} = R(LR)^3 = c$
r^8s	$R(LR)^8 = c\#$
r^9s	$R(LR)^{13} = R(LR) = d$
$r^{10}s$	$R(LR)^6 = d\#$
$r^{11}s$	$R(LR)^{11} = e$

Podemos interpretar geometricamente esse isomorfismo. Para isso, faremos uso da expressão “triângulo-acorde” para, dada uma tríade, indicar o triângulo cujos vértices correspondem às notas que a compõem. Deste modo, a tríade de C fica indicada da seguinte maneira:

Figura 152 – Triângulo-acorde de C

Observando a tabela 20, vemos que, ao elemento r de D_{12} , corresponde, pelo isomorfismo, o elemento D_b . Geometricamente, este último pode ser obtido aplicando-se a rotação r , que, relembramos, é de $\frac{\pi}{6}$, ao triângulo-acorde de C (figura 153).

Figura 153 – Triângulo-acorde de $D_b=C\#$

Vejamos um outro exemplo: ao elemento r^5s de D_{12} , corresponde, pelo isomorfismo, o elemento b_b . Geometricamente, este último pode ser obtido aplicando-se a reflexão s , seguida da rotação r^5 , que, relembramos, é de $\frac{5\pi}{6}$, ao triângulo-acorde de C (figura 154).

Figura 154 – Triângulo-acorde de b_b

Analogamente, analisando-se as outras linhas da tabela, pode-se concluir que todos os acordes da segunda coluna são obtidos por meio de rotações ou de reflexões seguidas de rotações do triângulo-acorde de C .

Observa-se também que a segunda coluna compõe-se de potências de (LR) que aumentam de 5 em 5 até $(LR)^7$, quando terminam as tonalidades maiores e recomeçam na tonalidade de f , com $R(LR)^4$, terminando em $R(LR)^{11} = e$.

4.7 O Grupo PLR, Beatles e o Choro

Fiore cita em seu artigo a progressão

$$I - VI m - IV - V - I,$$

largamente utilizada no rock dos anos 50, a qual ele denomina “Progressão de Elvis” e que utiliza o grupo PLR de funções, como é mostrado no esquema a seguir.

$$I \xrightarrow{R} VI m \xrightarrow{L} IV \xrightarrow{RLRL} V \xrightarrow{LR} I$$

Comenta que esta mesma progressão também é encontrada na canção “Stand by me” de John Lennon. Cita como outro exemplo a canção “Oh Darling”, de Paul McCartney, cuja progressão principal,

E, A, E, f#m, D, bm, E, bm, E, A

também utiliza este grupo de funções, como pode ser visto no esquema a seguir.

Mostraremos como esta mesma progressão é encontrada em outra canção dos Beatles, como Octopus's Garden e em vários Choros brasileiros, como Naquele Tempo, de Pixinguinha e Migalhas de amor de Jacob do Bandolim.

Trecho da Canção “Octopus’s Garden” dos Beatles²⁴

E C#m

I'd like to be under the sea

A B

In an Octopus's Garden in the shade.

E C#m

He'd let us in knows where we've been,

A B

In his Octopus's Garden in the shade.

C#m

I'd ask my friends to come and see

A B

An Octopus's Garden with me.

E C#m

I'd like to be under the sea

²⁴ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 3.

A   B   E

In an Octopus's Garden in the shade.

E   C#m

We would be warm below the storm

A   B

In our little hideaway beneath the waves.

E   C#m

Resting our head on the sea bed

A   B

In an Octopus's Garden near a cave.

C#m

We would sing and dance around

A   B

Because we know we can't be found.

E   C#m

I'd like to be under the sea

A   B   E

In an Octopus's Garden in the shade.

(solo)

A F#m D E

A F#m D E A B

Inserindo as funções PLR:

Exemplos no Choro

a) Migalhas de Amor – Jacob do Bandolim²⁵ (a partitura encontra-se na pág a seguir)

²⁵ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 4.

Migalhas de Amor

(Crumbs of love)

Choro

Jacob do Bandolim
(rec. 1952)CD tracks 4&17
Form: AA BB AA Coda
♩ = 63

Chorus

CD tracks 4&17
Form: AA BB AA Coda
♩ = 63

Chords: Dm, Dm, D7, Gm, A7, Dm, Dm, D7, Gm, C7, F, A7, Dm, E7(11), E7, A, F#m, Bm7, E7, A7, Gm/Bb, A7, Eb, Dm, Dm/C, E7/G#, A7, Dm, C7, F, Cm/Eb, D7, Gm, D7/A, Gm/Bb, G7/B, C7, C7/E, F, F, C+, F, Cm/Eb, D7, D7/F#, Gm, Bbm/Db, F, Ab, Gm7, C7, F, C7, F, D.S. al Fine, Coda {Dm, Gm6, Dm}

Figura 155 – Partitura de Migalhas de Amor

b) Naquele tempo - Pixinguinha²⁶

Naquele tempo

Pixinguinha

1. VIOLÃO

2. VIOLÃO

Mod. Wheel (Ctrl1 80)

mf

A⁷ D_m A⁷ D_m

D⁷ G_m E⁷ A⁷

D_m A⁷ D_m D⁷ G_m

D_m A⁷ To Coda D_m

Figura 156 – Partitura de Naquele Tempo

c) Inserindo as funções PLR em um trecho de Naquele tempo:

²⁶ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 5.

4.8 O Grupo PLR, o Toro e Beethoven

O Toro é um objeto matemático de muito interesse dos topologistas. Para se fazer um toro, começa-se com uma superfície quadrangular. Junta-se então dois de seus lados, de maneira a formar um cilindro. Depois une-se os dois círculos da fronteira. A figura a seguir ilustra sua construção.

Figura 157 – Retirada de <http://neofronteras.com/wp-content>

Na nona sinfonia de Beethoven²⁷, composta durante os anos de 1822-1824, aproximadamente 80 anos antes de Poincaré iniciar o estudo da topologia, Fiore encontra uma sequência de acordes cujo grafo associado forma um toro.

A sequência de 19 acordes encontra-se nos compassos de 143 a 176 do segundo movimento e é mostrada na partitura a seguir.

²⁷ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 7.

Figura 158 – Compassos da 9a. Sinfonia com os acordes citados²⁸

A sequência é apresentada a seguir.

C,a, F, d, Bb, g, Eb, c, Ab, f, Db, bb, Gb, eb, B, g#, E, c#, A.

Note que a sequência toda pode ser obtida aplicando-se alternadamente a C as funções R e L.

A seguir, Fiore apresenta um grafo desta sequência de acordes. Um grafo é uma estrutura composta por um conjunto de nós, chamados vértices e um conjunto de segmentos de reta denominados arestas. No grafo a seguir, os vértices representam os elementos desta sequência, isto é, os acordes maiores ou menores e as arestas representam as funções L ou R.

²⁸ Este trecho encontra-se no CD anexo, faixa 6.

Figura 159 – Grafo da sequência de acordes da 9a. Sinfonia de Beethoven

Beethoven não colocou os últimos cinco acordes, mas estes foram incluídos para completar a sequência. Nota-se que, deste modo, todos os acordes maiores e menores aparecem sem repetir. Este grafo é altamente musical porque os vizinhos de um acorde são exatamente aqueles dois acordes que estão mais próximos dele, ou seja, os dois acordes que possuem duas notas em comum com o acorde original. Por exemplo, os vizinhos de D ($\langle 2, 6, 9 \rangle$) são: $f\#$ ($\langle 1, 9, 6 \rangle$) e b ($\langle 6, 2, 11 \rangle$). Isto não é uma surpresa, porque as funções L e R foram designadas para fazer exatamente isso.

Outra coisa interessante de se notar é que qualquer coluna do grafo contém uma escala de tons inteiros.

Fiore afirma que este grafo forma um toro e a progressão de acordes de Beethoven é um caminho para isso. Verifique primeiramente que a fileira superior pode ser unida com a inferior, porque estão em sequência. Depois une-se os círculos nos cilindros resultantes, após torcê-los de um intervalo de terça. Estaremos unindo os acordes do lado direito com os acordes do lado esquerdo que têm duas notas em comum. Dessa forma, forma-se o toro. Esse exemplo é impressionante porque relaciona teoria de grupos, topologia e Beethoven ao mesmo tempo.

As análises anteriores mostram que o grupo PLR pode aparecer tanto em músicas populares quanto em eruditas.

5 UTILIZAÇÃO DAS TÉCNICAS MATEMÁTICAS NA ANÁLISE MUSICAL E NO ENSINO

5.1 Análise de Algumas Composições Musicais à Luz da Teoria de Forte

5.1.1 Análise da peça Estação Paraíso, de Rodolfo Coelho de Souza

Sobre Rodolfo Coelho de Souza

Paralelamente à sua formação musical, que inclui mestrado em musicologia na ECA-USP e doutorado em composição na University of Texas, em Austin, Coelho de Souza cursou Engenharia Civil na Escola Politécnica da USP de 1970 a 1975 e exerceu a profissão de engenheiro por muitos anos. Esta aparente dicotomia profissional contribuiu para sua aproximação, no campo da música, das técnicas composicionais que utilizavam fórmulas e raciocínio matemático na estrutura e no desenvolvimento das obras, como o serialismo e a variação em desenvolvimento.

Sua produção musical divide-se em três fases: a primeira, Serialista, que vai até 1982, na qual há o predomínio do Serialismo e do Dodecafonismo; a segunda, denominada Minimalista, influenciada por alguns compositores norte-americanos de século XX como Philip Glass, John Adams e Steve Reich, que dura até 1996 e a última, que perdura até hoje e não possui uma denominação específica, mas que é caracterizada por uma maior preocupação com a estrutura e a coerência formal, além do uso de conceitos ligados à matemática, tais como a teoria de conjuntos e a análise combinatória, levando em conta todas as suas experiências (COELHO, 2006, p. 43).

Sobre *Estação Paraíso*

*Estação Paraíso*²⁹ é a primeira da série *Paisagens Austrais*, que consta de três peças: 1. *Estação Paraíso* - 2. *Vereda da Voçoroca* – 3. *Vento Minuano*, todas elas compostas para

---

²⁹ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 8.

flauta, oboé, clarinete em sib, fagote, piano, violino, viola e violoncelo. Segundo o autor, cada peça tenta recriar o ambiente de uma região do Brasil. *Estação Paraíso* remete-se a uma estação de metrô no coração da cidade de São Paulo. Composta em 1994 e revisada em 2001, possui tanto elementos da sua primeira fase composicional, como alguns resquícios do serialismo integral, quanto da última, como a rotação de séries rítmicas. O compositor brasileiro também procurou colocar nesta peça elementos rítmicos e melódicos nacionais, apostando no significado dos mesmos para a comunicação com seu público.

Em *Estação Paraíso*,

[...] o compositor desenvolveu um universo ambíguo e onírico, apelando tanto à diversidade sonora e cultural de uma estação de trens de uma grande cidade, quanto à visão do paraíso na ideia do historiador Sérgio Buarque de Hollanda, referindo-se à chegada dos primeiros europeus ao Brasil.³⁰

Estação Paraíso relaciona-se com a peça *Music for 18 musicians* de Reich, pelo enfoque dado ao processo gradual de transformação dos materiais – segundo o qual “uma vez que o processo é definido e iniciado a peça flui por si mesma” (REICH, *apud* SCHARTZ; CHILDS and FOX, 1998, p. 422).

Estação Paraíso segundo seus elementos

Coelho de Souza trabalhou os elementos de *Estação Paraíso*, quais sejam, altura, ritmo, textura, dinâmica e timbre, de maneira independente. Neste sentido faz alusão ao serialismo integral, onde cada elemento responde a um processo particular de construção.

O minimalismo também está presente pela austeridade de materiais, pois o compositor utiliza pouquíssimos elementos como base para a peça. Em relação à altura, são usados um set class e seu inverso. Já em relação ao ritmo, Coelho de Souza usa um padrão de cinco semicolcheias e uma colcheia e outro de sete semicolcheias. Na textura, alternam-se um grupo de seis vozes com outros em que o número de vozes varia. Quanto à dinâmica, intercalam-se 4 compassos com dinâmica fixa com 4 compassos com dinâmicas variáveis.

---

³⁰ Texto do encarte do CD **Orquestra Filarmônica Juvenil da UFPR – Comemoração dos 40 anos**. Brasil: Editora Independente, 2006.

Quanto à altura (coleção de acordes utilizados)

Coelho de Souza utiliza um único Set Class³¹ de cinco notas em toda a peça (seja A), cuja forma primária é $A=[0,1,3,5,8]$, correspondente à classificação 5-27 de Forte e cuja inversão é $B=[0,3,5,7,8]$, também trabalhado pelo compositor. Os elementos destes conjuntos, colocados em terças superpostas, formam acordes maiores com 7M e 9M e acordes menores com 7m e 9M. Tais conjuntos fazem alusão à sonoridade harmônica da bossa-nova³².

Figura 160 – Conjuntos A e B em forma de sequência e de acorde

Nota-se que, dos cinco elementos presentes nos acordes, há quatro em comum: 0, 3, 5, e 8. Podemos relacionar este procedimento ao da máxima relação no conteúdo de hexacordes no serialismo, tal como descrito por Elliott Antokoletz, em que os conjuntos possuem “o máximo grau de invariabilidade em conteúdo melódico”³³. Formando um novo conjunto com esses quatro elementos em comum, $[0,3,5,8]$, percebe-se que o seu inverso possui a mesma forma prima, sendo, portanto, auto-simétrico³⁴.

Os elementos que não são comuns aos conjuntos, 1 e 7, formam entre si o intervalo de trítone, que por sua vez também é um intervalo auto-simétrico por ser igual ao seu complementar.

A tabela 21, a seguir, traz todos os conjuntos utilizados e suas disposições na peça. São transposições da forma original A, notadas como $A_i=T_i(A)$, onde i representa o número de semitons que o acorde foi transposto e da inversão B, notadas como $B_i=T_i(I(A))$, conforme consta nas seções 3.4.4.1 e 3.4.4.2.

³¹ Set Class conforme definido em 3.4.6, pág. 130.

³² Bossa Nova surgiu, no âmbito da música popular brasileira, no final da década de 1950, período de grande expansão econômica e social no Brasil motivado pela relação comercial entre o país e os Estados Unidos após a vitória na Segunda Guerra.

³³ “Five of the six notes of their corresponding hexachords belong to the same whole-tone cycle; at the same time, corresponding hexachords are maximally invariant in pitch content (five notes are the same)” ANTOKOLETZ, 1992, p. 45.

³⁴ Este conjunto está classificado como 4-26 na tabela de Forte.

Tabela 21 – Conjuntos de alturas utilizados

Compassos	Conjunto	Notas	Forma Normal sem transpor para o zero	Forma Primária	Transposição	Notas iguais à célula anterior
1 a 4	A ₉	D-F-A-Bb-C	[9,10,0,2,5]	[0,1,3,5,8]=A	A ₉ =T ₉ (A)	-
5 a 8	B ₈	C#-D#-E-G#-B	[8,11,1,3,4]	[0,1,3,5,8]=A	B ₈ =T ₈ I(A)	-
9 a 12	B ₉	C-D-E-F-A	[9,0,2,4,5]	[0,1,3,5,8]=A	B ₉ =T ₉ I(A)	E
13 a 16	A ₁₀	D#-F#-A#-B-C#	[10,11,1,3,6]	[0,1,3,5,8]=A	A ₁₀ =T ₁₀ (A)	-
17 a 20	A ₀	F-Ab-C-Db-Eb	[0,1,3,5,8]	[0,1,3,5,8]=A	A ₀ =A	C#-D#
21 a 24	B ₁₁	F#-G-B-D-E	[11,2,4,6,7]	[0,1,3,5,8]=A	B ₁₁ =T ₁₁ I(A)	-
25 a 28	B ₀	Eb-F-G-Ab-C	[0,3,5,7,8]	[0,1,3,5,8]=A	B ₀ =B=T ₀ I(A)	G
29 a 32	A ₁	F#-A-C#-D-E	[1,2,4,6,9]	[0,1,3,5,8]=A	A ₁ =T ₁ (A)	-
33 a 36	A ₃	F#-G#-B-D#-E	[3,4,6,8,11]	[0,1,3,5,8]=A	A ₃ =T ₃ (A)	F#
37 a 40	B ₂	G-A-Bb-D-F	[2,5,7,9,10]	[0,1,3,5,8]=A	B ₂ =T ₂ I(A)	-
41 a 44	B ₃	F#-G#-A#-B-D#	[3,6,8,10,11]	[0,1,3,5,8]=A	B ₃ =T ₃ I(A)	A#
45 a 48	A ₄	G-A-C-E-F	[4,5,7,9,0]	[0,1,3,5,8]=A	A ₄ =T ₄ (A)	-
49 a 53	A ₆	F#-G-A-B-D	[6,7,9,11,2]	[0,1,3,5,8]=A	A ₆ =T ₆ (A)	G-A
53 a 56	B ₅	F-Ab-Bb-C-Db	[5,8,10,0,1]	[0,1,3,5,8]=A	B ₅ =T ₅ I(A)	-
57 a 60	B ₆	A-B-C#-D-F#	[6,9,11,1,2]	[0,1,3,5,8]=A	B ₆ =T ₆ I(A)	C#
61 a 64	A ₇	C-Eb-G-Ab-Bb	[7,8,10,0,3]	[0,1,3,5,8]=A	A ₇ =T ₇ (A)	-
65 a 68	A ₉	D-F-A-Bb-C	[9,10,0,2,5]	[0,1,3,5,8]=A	A ₉ =T ₉ (A)	C-Bb
69 a 72	B ₈	B-C#-D#-E-G#	[8,11,1,3,4]	[0,1,3,5,8]=A	B ₈ =T ₈ I(A)	-
73 e 74	A ₉	D-F-A-Bb-C	[0,2,5,9,10]	[0,1,3,5,8]=A	A ₉ =T ₉ (A)	-
75 e 76	B ₈	B-C#-D#-E-G#	[8,11,1,3,4]	[0,1,3,5,8]=A	B ₈ =T ₈ I(A)	-
77 e 78	A ₉	D-F-A-Bb-C	[0,2,5,9,10]	[0,1,3,5,8]=A	A ₉ =T ₉ (A)	-
79 e 80	B ₈	B-C#-D#-E-G#	[8,11,1,3,4]	[0,1,3,5,8]=A	B ₈ =T ₈ I(A)	-
81 e 82	A ₉	D-F-A-Bb-C	[0,2,5,9,10]	[0,1,3,5,8]=A	A ₉ =T ₉ (A)	-

Cada vez que um conjunto é utilizado, ele aparece simultaneamente em todas as vozes ativas do compasso, com motivos melódicos variados, como mostra o exemplo a seguir:

The image shows a musical score for measures 7 to 10 of the piece 'Estação Paraíso'. The score is written for a full orchestra, including Flute, Oboe, Clarinet in Bb, Bassoon, Piano, Violin, Viola, and Violoncello. The key signature is B major (two sharps) and the time signature is 7/16. The piano part features a complex rhythmic pattern with many beamed sixteenth notes. The strings play a simple harmonic accompaniment.

Figura 161 – *Estação Paraíso*, compassos 7 a 10

Conjuntos utilizados: $B_8 = [C\#, D\#, E, G\#, B]$ nos compassos 7-8 e $B_9 = [C, D, E, F, A]$, nos compassos 9-10

Observando-se a Tabela 21, em especial a coluna das transposições, nota-se que a peça está estruturada de forma modular do ponto de vista dos conjuntos de alturas e está esquematizada sobre uma rede de transformação que segue o modelo de David Lewin (LEWIN, 2007, *passim*). O diagrama a seguir apresenta esta rede, na qual as setas indicam as transformações que ocorrem entre os conjuntos.

Figura 162 – Rede de Transformação – *Estação Paraíso*

Antokoletz coloca que a transposição produz uma sensação de ‘modulação’ de um conjunto para o outro, similar aos esquemas tonais do período clássico (ANTOKOLETZ, 1992, p. 45). Em *Estação Paraíso*, a ‘modulação’ é realizada por meio das transformações T_i e T_{iI} , as quais foram indicadas na figura 162.

Exemplificaremos, a seguir, o cálculo de uma dessas transformações, a primeira inversão, T_{1I} , que ocorre do conjunto A_9 para o conjunto B_8 .

$$T_{1I}(A_9) = T_{1I}(2,5,9,10,0) = (-2+1, -5+1, -9+1, -10+1, 0+1) = (-1,-4,-8,-9,1) = (11,8,4,3,1) = B_8$$

Ela pode ser representada da seguinte maneira:

Figura 163 – Transformação T_{1I} aplicada ao conjunto A_9

ou ainda pode ser representada por meio de uma simetria axial de eixo perpendicular ao segmento de reta que une os vértices 0 e 1 e que passa pelo ponto médio deste segmento de reta. Veja a figura 164 a seguir.

Figura 164— Transformação $A_9 \xrightarrow{T_i I} B_8$

Para tornar audível o processo de transformação entre os conjuntos, Coelho de Souza utilizou um procedimento similar aos usados por Steve Reich, de quem declara ter sofrido influência. Criou em *Estação Paraíso* um contraponto com notas longas, atuando como uma segunda voz, que obedece a dois padrões, que aqui foram denominados C e D. Estes padrões são mostrados na figura 165 a seguir.

a)

b)

Figura 165 – Padrões C e D

Os padrões C e D têm uma relação intrínseca, independente do contexto, característica esta que também remete ao serialismo integral. Iniciam-se no compasso 7 e 15, respectivamente, e são transpostos, a seguir, de acordo com o diagrama apresentado na figura 166. As transposições são denotadas como $C_i = T_i(C)$ e $D_i = T_i(D)$, onde i representa o número de semitons que o padrão foi transposto.

Figura 166 – Padrões C e D e suas transposições

Quando inseridos no contexto geral da peça, os padrões C e D funcionam como uma segunda voz em contraponto, evidenciando a passagem de um conjunto a outro. Formados por 4 elementos, C e D utilizam alturas de dois conjuntos consecutivos, dois compassos de cada um, como exemplificado na figura 167.

The musical score for Figure 167 shows four staves: Piano, Violin, Viola, and Cello. The Piano part is the most complex, featuring a series of chords and melodic lines. The Violin, Viola, and Cello parts are more sustained, with long notes and chords that change over time, illustrating the transformational process between sets A₁₀ and A₀.

Figura 167 – Padrão D funcionando como auxiliar no processo transformacional entre conjuntos do tipo A₁₀ e A₀. Compassos 14 a 19

Quanto ao aspecto rítmico

Do ponto de vista rítmico, o estilo é predominantemente minimalista³⁵, sendo que os módulos desenvolvem-se dentro de um mesmo compasso septenário, utilizando dois motivos

³⁵ O estilo minimalista baseou-se, como o próprio nome indica, em uma quantidade mínima de materiais a serem trabalhados pelo compositor, preferivelmente de forma repetitiva. Sua estética se contrapunha, principalmente, à saturação cromática e ao desenvolvimento elaboradíssimo atingido pela música europeia (principalmente alemã) no início do século XX. O uso do conceito minimalista aplicado ao ritmo é uma das possibilidades do serialismo integral, que trata cada elemento musical independentemente dos demais.

rítmicos. O primeiro é composto por 5 semicolcheias e uma colcheia, a qual é deslocada, não simultaneamente, nos diversos módulos como mostram as figuras 168 e 169, a seguir.

Figura 168 – Motivo Rítmico Principal

Os deslocamentos são feitos de maneira que haja uma “rotação” da última figura à direita para a primeira à esquerda, de maneira que o número de semicolcheias antes da colcheia vá aumentando gradativamente. Estas formas-motivo aparecem em todos os instrumentos, com exceção do piano:

Figura 169 – Motivo Rítmico com deslocamentos progressivos da colcheia

O segundo motivo rítmico é formado por sete semicolcheias e atua como um acompanhamento. Aparece no piano³⁶.

Figura 170 – Segundo Motivo Rítmico

³⁶ O uso de motivos rítmicos sincopados, bem como de baixo *ostinato* (em semicolcheias), dá à peça um caráter brasileiro.

Em relação ao encadeamento

Embora Coelho de Souza tenha evitado a coloração acinzentada em *Estação Paraíso* pelo uso de conjuntos baseados em acordes conhecidos do sistema tonal, a última coluna da Tabela 1 demonstra a intencionalidade do compositor de tentar a maximizar o espectro cromático (ou seja, introduzir os 12 sons) pela presença de pouquíssimas notas comuns entre os conjuntos. Os poucos tons comuns que aparecem nos encadeamentos em algumas vozes, como notas longas, têm a função de minimizar os saltos pelo uso constante de notas pedais.

A tabela 22, a seguir (dividida em 2 partes), mostra os compassos onde estas notas longas ocorrem, juntamente com os instrumentos que as produzem.

Tabela 22 – Tons comuns no encadeamento

Compasso	8	9	16	17	18	24	25	34	40	41
Flauta				C#	D#					
Oboé				C#	D#					A#
Clarinete em Bb										
Fagote	E									
Violino			C#		D#			F#		
Viola	E	E					G	F#	A#	
Cello	E	E				G	G		A#	

Compasso	48	49	50	56	57	64	65	66
Flauta	G	G	A					
Oboé	G	G	A	Db		Bb		C
Clarinete em Bb							Bb	C
Fagote				Db				
Violino						Bb		C
Viola					Db		Bb	
Cello					Db			

A análise revela que Coelho de Souza utilizou a “Teoria da Parcimônia” nos encadeamentos, a qual é outro tipo de teoria ligada à “Teoria dos Grafos”³⁷. A “Teoria da Parcimônia” estuda o melhor caminho a ser utilizado em uma simples transposição, de tal maneira que este garanta ainda parcimônia, sem apelar para um procedimento óbvio (como

³⁷ Ramo da matemática, mais especificamente, da Topologia.

seria a transposição um semitom acima ou abaixo). O compositor procurou, para isto, as menores distâncias, estudando todas as permutações e inversões dos acordes conjugados.

Em relação à textura, ao timbre e às dinâmicas

Coelho de Souza cria uma textura cruzada de relações entre timbre e dinâmicas que não se sobrepõem simultaneamente e formam um contraponto de parâmetros independentes (herança do serialismo integral). Pode ser observado na tabela 23, a seguir, que a peça utiliza o seguinte padrão: 4 compassos de contraponto a 6 vozes que mantém a textura tímbrica, sendo 2 vozes do piano (na tabela representados pelo contorno mais espesso) e 4 compassos onde o número de vozes varia, diversificando a textura. A partir do compasso 67 este padrão muda. O piano inicia e encerra a peça com 2 compassos solo e se mantém o tempo todo na peça.

Os padrões C e D, apresentados anteriormente, aparecem nos trechos de 4 compassos em que a textura varia (verifique pelos compassos indicados na figura 166), intercalando-se entre os compassos que mantém a textura fixa, fazendo a ponte entre eles.

Tabela 23 – Textura cruzada entre timbres e dinâmicas

a) Compassos 1 a 22

Comp.	1	2	3 a 6	7	8	9	10	11 a 14	15	16	17	18	19 a 22
Instr.													
Flauta	-		mp	mp		f	>	mp	mp		mp<	f>	-
Oboé	-					f	>				mp<	f>	-
Clarinete em si _b	-					mp<	f>				f	>	mf
Fagote	-					mp<	f>				f	>	
Piano	mp					mp					mp		
Violino	-	-	mp	<	f>		-	mp		<	f>		
Viola	-	-		mp	<	f>	-	mp	<	f	>		
Violoncelo	-	-			<	f>	-	mp	<	f	>	-	

b) Compassos 23 a 41

Comp.	23	24	25	26	27 a 30	31	32	33	34	35 a 38	39	40	41
Instr.													
Flauta	mp	<	f	>	mf	mf		-	-	f	f		f
Oboé		<	f	>	-	mp	<	f	>				mp<
Clarinete em si _b	mf		-	-	mf	mf		-	-				-
Fagote			-	-	-	mp	<	f	>				f
Piano			mf		mf	mf							f
Violino			-	-	-	mp		<	f>	-	mp	<	f
Viola			mp<	f>	mf	mf		mp<	f>	-	mp		>
Violoncelo	mp		<	f>				-	-	-			>

c) Compassos 42 a 63

Comp. Instr.	42	43 a 46	47	48	49	50	51 a 54	55	56	57	58	59 a 62	63	
Flauta	>	-	mp		<	f >	f	f		-	-	-	mf	
Oboé	f >	-			<	f >	-	mp		<	f >	mf	mp	
Clarinete em si b	-	-	mp	<	f	>	f	f		-	-		mf	mf
Fagote	>	mp	mp		f	>	-	mp		<	f >	-	mp	
Piano	f				f		f	f					mf	mf
Violino	>				-	-	-	mp	<	f	>	mf		mp
Viola	f >				-	-	f	f		mp <	f >			-
Violoncelo	f				-	-	f			mp <	f >	mf	mf	

d) Compassos 64 a 78

Comp.	64	65	66	67a 69	70	71	72	73	74	75	76	77	78						
Instr.																			
Flauta	mf	-	-		mf			-	-	mp		mf							
Oboé	mp		f	-	mp			f		-	mp								
Clarinete em si b	mf	mp	f	-	mp			f		mp		-	-						
Fagote		f		mf	mf	mf	mf	-	-	-	-	-	-						
Piano	mf							mf	mf	mf	mf	mf	mp						
Violino	mp		f								mf	mf	mf	f		-	mp	mf	
Viola	mf	mp	f													mp	-		
Violoncelo		f		-		-	-												

e) Compassos 79 a 82

<i>Instr.</i>	<i>Comp.</i>	79	80	81	82
<i>Flauta</i>		<i>mp</i>		-	
<i>Oboé</i>					
<i>Clarinete em si b</i>		-	-		
<i>Fagote</i>		-	-		
<i>Piano</i>		<i>mp</i>		<i>p</i>	
<i>Violino</i>		<i>mp</i>		-	
<i>Viola</i>					
<i>Violoncelo</i>		-	-		

Algumas considerações

É evidente a influência do raciocínio matemático nesta composição de Coelho de Souza. Esta influência pode ser confirmada pelo nível estrutural profundo do processo composicional que, fazendo uso de uma única Set Class como unidade estrutural básica que dá unidade à composição, permite que vários processos intrínsecos aconteçam ao mesmo tempo. O fato de ter sido composta em 1994 leva a crer que o compositor estava fazendo uso da gramática transformacional de Lewin na mesma época em que este ainda estava desenvolvendo sua teoria.

O ritmo muda, a orquestração muda, os registros mudam, as notas dentro dos próprios conjuntos geram outras melodias, tudo isto intencionalmente, de acordo com padrões pensados previamente. As repetições, quando ocorrem não são meras repetições, funcionam como se fosse uma harmonia subjacente, trabalhando com as diversas inversões de um mesmo conjunto pentatônico.

Cada elemento musical funciona independentemente, carregado de força expressiva particular e com brilho próprio, como as cores de um arco-íris. O conjunto destes elementos os transforma em um único fenômeno, limitado ao tempo, ao espaço, e à interpretação de quem o presencia.

5.1.2 Obras de Almeida Prado

Sobre Almeida Prado

José Antônio de Almeida Prado nasceu na cidade de Santos, São Paulo, em 1943 e faleceu em São Paulo, em 21 de novembro de 2010. Criado em ambiente musical, estudou piano com Dinorá de Carvalho, composição com Camargo Guarnieri e harmonia com Osvaldo Lacerda. Com a obra *Pequenos funerais cantantes* conquistou o prêmio de melhor obra apresentada no I Festival Guanabara que lhe rendeu uma bolsa de estudos na Europa. Lá prosseguiu seus estudos com Nádja Boulanger e Olivier Messiaen. Em Darmstadt estudou também com György Ligeti e Lukas Foss. Ao voltar para o Brasil trabalhou no conservatório municipal de Cubatão e no curso de música do Instituto de Artes da Unicamp.

Almeida Prado escreve as peças da *Cartilha Rítmica para piano* com o objetivo de apresentar as inovações rítmicas da música dos séculos XX/XXI, tais como a desestabilização da métrica por meio das mudanças constantes de fórmulas de compasso, das articulações, dos andamentos, do deslocamento de acentos, das síncope, das polirritmias e polimetrias. O compositor busca aliar o desenvolvimento da técnica pianística com técnicas de composição que explorassem o máximo com uma quantidade mínima de materiais.

A seguir são analisadas seis peças desta *Cartilha Rítmica*, as quais, além de conterem toda a inovação rítmica citada anteriormente, possuem uma estrutura melódica matemática e modular.

5.1.2.1 Análise da peça “Mudança de Compassos”³⁸

Mudanças de Compassos
Ciranda

$\text{♩} = 108$ $\text{♩} = \text{♩}$ *simili*

I.1 *f legato*

62

³⁸ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 11.

16

19

22

ff

Campinas, jan/1999

Figura 171 – Almeida Prado – Mudança de Compassos

1. Estrutura Rítmica

A peça é estruturada alternando compassos $\frac{4}{4}$ com compassos do tipo $\frac{x}{8}$, com x variando de 2 a 13 e encerrando com $x=1$.

2. Estrutura Melódica

Na mão direita, os compassos $\frac{4}{4}$ (compassos ímpares) apresentam as cinco primeiras notas da escala de dó maior, na sequência <C-D-E-F-G-F-E-D> ou, na notação de teoria de conjuntos, <0,2,4,5,7,5,4,2,0> e os compassos $\frac{x}{8}$ apresentam estas mesmas notas, começando com as

duas primeiras no compasso $\frac{2}{8}$ e, a cada compasso que se segue, acrescentando uma nota a mais da sequência e repetindo-a quando necessário. Veja o esquema a seguir.

Compasso	Fórmula de compasso	Notas
2	$\frac{2}{8}$	<0,2>
4	$\frac{3}{8}$	<0,2,4>
6	$\frac{4}{8}$	<0,2,4,5>
8	$\frac{5}{8}$	<0,2,4,5,7>
10	$\frac{6}{8}$	<0,2,4,5,7,5>
12	$\frac{7}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4>
14	$\frac{8}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2>
15	$\frac{9}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2,0>
16	$\frac{10}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2,0,2>
18	$\frac{11}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2,0,2,4>
20	$\frac{12}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2,0,2,4,5>
22	$\frac{13}{8}$	<0,2,4,5,7,5,4,2,0,2,4,5,7>
24	$\frac{1}{8}$	Acorde [0,7]

A mão esquerda é baseada em dois conjuntos-classes. Desenvolve-se, alternadamente, sobre tríades maiores e tétrades maiores com sétima, cujas formas primas são:

- [0,3,7]=X, que é o acorde 3-11 de Forte e cujo acorde inverso é $X^{-1}=[0,4,7]$;
- [0,2,5,8]=Y, que é o acorde 4-27 de Forte e cujo acorde inverso é $Y^{-1}=[0,3,6,8]$.

Os acordes são construídos sobre uma escala cromática, começando com a nota dó 4 “subindo” ascendentemente até a outra nota dó 5 oitava acima e depois “descendo” do mesmo modo.

Estes acordes (aqui nomeados células C_i) são trocados a cada compasso. Ao todo, são 12 acordes (pois os últimos 12 são repetições dos acordes anteriores), dispostos da seguinte maneira:

Compassos	Célula	Notas	Forma Normal sem transpor para o zero	Forma Primária	Transposição
1 e 13	C ₁	C-E-G	[0,4,7]	[0,3,7]=X	C ₁ =I ₀ (X)
2 e 24	C ₂	C#-E-G#-B	[5,8,11,1]	[0,2,5,8]=Y	C ₂ =T ₅ I(Y)
3 e 23	C ₃	D-F#-A	[2,6,9]	[0,3,7]=X	C ₃ =T ₂ I(X)
4 e 22	C ₄	Eb-G-Bb-Db	[7,10,1,3]	[0,2,5,8]=Y	C ₄ =T ₇ I(Y)
5 e 21	C ₅	E-G#-B	[4,8,11]	[0,3,7]=X	C ₅ =T ₄ I(X)
6 e 20	C ₆	F-A-C-Eb	[9,0,3,5]	[0,2,5,8]=Y	C ₆ =T ₉ I(Y)
7 e 19	C ₇	F#-A#-C#	[6,10,1]	[0,3,7]=X	C ₇ =T ₆ I(X)
8 e 18	C ₈	G-B-D-F	[11,2,5,7]	[0,2,5,8]=Y	C ₈ =T ₁₁ I(Y)
9 e 17	C ₉	Ab-C-Eb	[8,0,3]	[0,3,7]=X	C ₉ =T ₈ I(X)
10 e 16	C ₁₀	A-C#-E-G	[1,4,7,9]	[0,2,5,8]=Y	C ₁₀ =T ₁ I(Y)
11 e 15	C ₁₁	Bb-D-F	[10,2,5]	[0,3,7]=X	C ₁₁ =T ₁₀ I(X)
12 e 14	C ₁₂	B-D#-F#-A	[3,6,9,11]	[0,2,5,8]=Y	C ₁₂ =T ₃ I(Y)
25	C ₂₅	C-E-G-C	[0,4,7]	[0,3,7]=X	C ₂₅ =C ₁ -I ₀ (X)

Observações:

- Os compassos ímpares apresentam tríades que se deslocam de um em um tom, ou seja, na notação de Forte, acrescentam 2 unidades a cada pitch class set (cada acorde é o anterior adicionado de 2 unidades) até o compasso 13 e depois diminuem 2 unidades até o final. Pode-se observar melhor esta estrutura pelo esquema a seguir, no qual cada seta corresponde à transformação T₂.

Figura 172 – Compassos Ímpares

- Os compassos pares apresentam tétrades maiores com sétima, que também se deslocam de um em um tom como anteriormente. Pode-se observar melhor esta

estrutura pelo esquema a seguir, no qual cada seta também corresponde à transformação T_2 .

Figura 173 – Compassos Pares

5.1.2.2 Análise da peça “Variações de acentos em 12/8”³⁹

Variações de acentos em 12/8

♩. = 138

II.27

The musical score is written for piano in 12/8 time. It consists of four systems of two staves each. The key signature has two sharps (F# and C#). The tempo is marked as ♩. = 138. The score begins with a forte (f) dynamic. The first system shows a series of chords in the right hand and single notes in the left hand. The second system continues with similar patterns, including some triplets. The third system introduces a piano (p) dynamic and a pianissimo (pp) section. The fourth system returns to a forte (f) dynamic. The score is marked with various accents (>) and slurs, indicating phrasing and emphasis. The piece ends with a final chord in the right hand and a sustained note in the left hand.

³⁹ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 12.

Campinas, fev/1992

Figura 174 – Almeida Prado – Variações de Acentos em 12/8

1. Estrutura Rítmica

A peça é escrita no compasso $\frac{12}{8}$, com acentos que se apresentam, alternadamente, entre a mão esquerda e a mão direita.

2. Estrutura Melódica

A composição evolui ascendentemente e é toda escrita baseada no conjunto de classes de alturas de quatro notas, cuja forma primária é a seguinte:

$$X = [0, 3, 4, 7], \text{ que é o acorde 4-17 de Forte.}$$

Os acordes (aqui nomeados células C_i , $i=1, \dots, 7$) são transpostos praticamente a cada compasso, com exceção dos compassos 5 e 9, nos quais os acordes permanecem os mesmos.

Ao todo, são 7 acordes (pois os últimos são repetições de acordes anteriores), dispostos da seguinte maneira:

Compasso	Célula	Notas	Forma Normal sem transpor para o zero	Forma Primária	Transposição	Notas iguais à célula anterior
1	C ₁	C-E _b -G#=B	[8,11,0,3]	[0,3,4,7]=X	C ₁ =T ₈ (X)	-
2	C ₂	C#-F#-A-B _b	[6,9,10,1]	[0,3,4,7]= X	C ₂ = T ₆ (X)	-
3	C ₃	D-F-F#-A	[2,5,6,9]	[0,3,4,7]= X	C ₃ = T ₂ (X)	F#
4 e 5	C ₄	D#-E-G-C	[0,3,4,7]	[0,3,4,7]= X	C ₄ =T ₀ (X)	-
6	C ₅	F-B _b -C#-D	[10,1,2,5]	[0,3,4,7]= X	C ₅ = T ₁₀ X	-
7	C ₆	F#-A-A#-C#	[6,9,10,1]	[0,3,4,7]= X	C ₆ = T ₆ (X)	A#-C#
8 e 9	C ₇	G-A _b -B-E	[4,7,8,11]	[0,3,4,7]= X	C ₇ =T ₄ (X)	-
10	C ₃	D-F-F#-A	[2,5,6,9]	[0,3,4,7]= X	C ₃ = T ₂ (X)	-
11	C ₅	F-B _b -C#-D	[10,1,2,5]	[0,3,4,7]= X	C ₅ = T ₁₀ X	D-F
12 a 15	C ₁	C-E _b -G#=B	[8,11,0,3]	[0,3,4,7]=X	C ₁ =T ₈ (X)	-

O esquema, a seguir, mostra as transformações que ocorreram de um conjunto de notas para o outro.

Figura 175 – Esquema das Transformações

5.1.2.3 Análise da peça “Pulsção fixa de 3 colcheias com articulações de 3 semicolcheias”⁴⁰

Pulsção fixa de 3 colcheias com articulações de 3 semicolcheias

$\text{♩} = 200$

II.4 *dinâmica ad. lib.*

8^{va}

8^{va}

13

Campinas, jan'1992

Figura 176 – Almeida Prado – Pulsção fixa de 3 semicolcheias com articulações de 3 semicolcheias

⁴⁰ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 13.

1. Estrutura Rítmica

A peça é escrita no compasso $\frac{3}{8}$, apresentando colcheias na mão esquerda e semicolcheias na direita durante toda a peça.

2. Estrutura Melódica

Na mão direita, as semicolcheias são agrupadas de 3 em 3 e seguem a escala de lá m natural na subida e a de dó maior na descida.

Compassos	Mão direita	Mão esquerda
1	-	[0,7], [1,6],[2,5]
2	-	[0,7], [1,6],[2,5]
3	9, 11, 0 11, 0, 2	[0,7], [1,6],[2,5]
4	0, 2, 4 2, 4, 5	[0,7], [1,6],[2,5]
5	4, 5, 7 5, 7, 9	[0,7], [1,6],[2,5]
6	7, 9, 11 9, 11, 0	[0,7], [1,6],[2,5]
7	11, 0, 2 0, 2, 4	[0,7], [1,6],[2,5]
8	2, 4, 5 4, 5, 7	[0,7], [1,6],[2,5]
9	7,5,4 5,4,2	[0,7], [1,6],[2,5]
10	4,2,0 2,0,11	[0,7], [1,6],[2,5]
11	0,11,9 11,9,7	[0,7], [1,6],[2,5]
12	9,7,5 7,5,4	[0,7], [1,6],[2,5]
13	5,4,2 4,2,0	[0,7], [1,6],[2,5]
14	2,0,11 0,11,9	[0,7], [1,6],[2,5]
15	0	[0,7]

Do compasso 3 ao compasso 8, os elementos da escala são agrupados da seguinte maneira (de três em 3, ordem crescente, começando da segunda nota do agrupamento anterior):

9,11, 0
 11, 0,2
 0,2,4
 2,4,5
 4,5,7
 5,7,9
 7,9,11
 9,11,0
 11,0,2
 0,2,4
 2,4,5
 4,5,7

A partir do nono compasso, a escala é percorrida descendemente e os elementos são agrupados como a seguir (de três de 3, só que agora em ordem decrescente, começando da segunda nota do agrupamento anterior):

7,5,4
 5,4,2
 4,2,0,
 2,0,11
 0,11,9
 11,9, 7
 9,7,5
 7,5, 4
 5,4,2
 4,2,0
 2,0,11
 0,11,9
 0

5.1.2.4 Análise da peça “Pulsção fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias”⁴¹

Pulsção fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias

$\text{♩} = 200$

II.5 *dinâmica ad libitum*

Campinas, jan/1992

Figura 177 – Almeida Prado – Pulsção fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias

⁴¹ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 14.

1. Estrutura Rítmica

A peça é escrita no compasso $\frac{4}{8}$, apresentando colcheias na mão esquerda e semicolcheias na direita durante toda a peça.

2. Estrutura Melódica

Na mão direita, as semicolcheias são agrupadas de 4 em 4 ou de 3 em 3 e seguem a escala de lá m natural na subida e a de dó maior na descida, resultando na seguinte sequência:

Compassos	Mão direita	Mão esquerda
1		[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
2	9, 11, 0,2 11.0,2,4	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
3	0,2,4, 2,4,5 4,5	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
4	7 5,7,9,11 7,9,11,	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
5	0 9,11,0 11,0,2 0	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
6	2,4 2,4,5,7 4,5	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
7	7,9 9,7,5 7,5,4	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
8	5,4,2,0 4,2,0,11	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
9	2,0,11 0,11,9 11,9	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
10	7,5 9,7,5,4 7,5	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
11	4 5,4,2 4,2,0,11	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
12	2,0,11,9 2,0,11,9	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]

13	0,11,9 0,11,9 0,11	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
14	9 2,0,11,9 2,0,11	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
15	9 2,0,11 2,0,11 2	[0,7], [1,6], [0,7] , [1,6]
16	0,11	[1,6], [0,7]

Escala de Dó Maior ascendente:

0,2,4,5,7,9,11,0

Escala de Dó Maior descendente:

0,11,9,7,5,4,2,0

Do compasso 2 ao compasso 7, os elementos da escala são agrupados da seguinte maneira (dois de 4, três de 3):

9,11, 0,2
 11, 0,2,4
 0,2,4
 2,4,5
 4,5,7
 5,7,9,11
 7,9,11,0
 9,11,0
 11,0,2
 0,2,4
 2,4,5,7
 4,5,7,9

A partir do sétimo compasso, a escala é percorrida descendemente, e os elementos são agrupados como a seguir (dois de 3, dois de 4, com exceção dos últimos três agrupamentos):

9,7,5

7,5,4

5,4,2,0

4,2,0,11

2,0,11

0,11,9

11,9, 7,5

9,7,5,4

7,5, 4

5,4,2

4,2,0,11

2,0,11,9

2,0,11,9

2,0,11

2,0,11

5.1.2.5 Análise da peça “Pulsção fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias”⁴²

Pulsção fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias

$\text{♩} = 200$

II.6 *dinâmica ad libitum*

6

11

16

ff

Campinas, jan/1992

95

Figura 178 – Almeida Prado – Pulsção fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias

⁴² Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 15.

1. Estrutura Rítmica

A peça é escrita no compasso $\frac{5}{8}$. A mão direita apresenta semicolcheias agrupadas de 5 em 5 ou colcheias também agrupadas de 5 em 5. A mão esquerda apresenta colcheias no decorrer de toda a peça.

2. Estrutura Melódica

Do compasso 3 ao compasso 8, os elementos da escala de Dó M, na mão direita, são agrupados da seguinte maneira (de cinco em 5, ordem crescente, começando da segunda nota do agrupamento anterior):

9,11,0,2,4
 11,0,2,4,5
 0,2,4,5,7
 2,4,5,7,9
 4,5,7,9,11
 5,7,9,11,0
 7,9,11,0,2
 9,11,0,2,4
 11,0,2,4,5
 0,2,4,5,7

Observe que as primeiras notas seguem a escala de dó maior, começando da nota lá (9).

Os compassos 8 e 9 fazem uma ponte com um agrupamento de 5 colcheias que se repete, com as seguintes notas:

9,0,4,7,2

Do compasso 10 ao compasso 16, os elementos da escala são agrupados da seguinte maneira (de cinco em 5, ordem decrescente, começando da segunda nota do agrupamento anterior):

0,11,9,7,5
 11,9,7,5,4
 9,7,5,4,2
 7,5,4,2,0
 5,4,2,0,11
 4,2,0,11,9
 2,0,11,9, 7
 0,11,9,7,5
 11,9,7,5,4
 9,7,5,4,2
 7,5,4,2,0
 5,4,2,0,11
 4,2,0,11,9
 4,2,0,11,9

Observe que as primeiras notas seguem a escala de dó maior, começando da nota dó (0).

Os compassos 17 e 18 voltam a fazer o mesmo motivo com colcheias dos compassos 8 e 9 :

9,0,4,7,2

Só que agora uma oitava abaixo.

Depois, nos compassos 19 e 20, estas mesmas notas são repetidas em semínimas.

A mão esquerda faz cinco acordes cada compasso, os quais estão indicados a seguir:

[0,7], [1,6], [1,6], [0,7], [1,6].

5.1.2.6 Análise da peça “Pulsção fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias”⁴³

Pulsção fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias

$\text{♩} = 200$

II.7

dinâmica ad libitum

The musical score is written for piano in 7/8 time. It consists of four systems of music, each with a grand staff (treble and bass clefs). The tempo is marked as quarter note = 200. The first system is labeled 'II.7' and 'dinâmica ad libitum'. The melody in the right hand is composed of eighth notes, while the left hand plays a steady eighth-note accompaniment. The second system continues the melody and accompaniment. The third system shows the melody and accompaniment. The fourth system, starting at measure 10, shows the melody and accompaniment. The score is written in a key with one sharp (F#) and one flat (Bb).

⁴³ Esta obra encontra-se no CD anexo, faixa 16.

Figura 179 – Almeida Prado – Pulsação fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias

1. Estrutura Rítmica

A peça é escrita no compasso $\frac{7}{8}$. A mão esquerda apresenta semicolcheias agrupadas de 7 em 7 ou colcheias também agrupadas de 7 em 7. A mão direita apresenta colcheias no decorrer de toda a peça.

2. Estrutura Melódica

Do compasso 3 ao compasso 8, as notas da mão esquerda apresentam a seguinte configuração:

7,5,4,2,0
 7,5,4,2,0,11
 5,4,4,2,0,11,9
 4,2,2,0,11,9, 7
 2,0,0,11,9,7,5
 0,11,11,9,7,5,4
 11,9,9,7,5,4,2
 9,7,7,5,4,2,0
 7,5,5,4,2,0,11
 5,4,4,2,0,11,9
 4,2, 2,0,11,9,7,2,0

Os compassos 8, 9 e 10 fazem uma ponte com um 2 agrupamentos de 7 colcheias com as seguintes notas:

$$2,7,0,7,5,9,7 \ ; \ 11,4,9,0,11,2,0.$$

Do compasso 10 ao compasso 15, a mão esquerda faz a seguinte sequência de notas, dez vezes:

$$5,7,9,11,0,5,7$$

Na décima primeira, faz:

$$5,7,9,11,0,5.$$

A mão direita repete o tempo todo os mesmos 6 acordes

$$[9,4], [10,3], [10,3], [9,4], [10,3], [9,4], [10,3].$$

5.2 Proposta de uma Disciplina na Graduação

5.2.1 Uma proposta de ementa

Título: Teorias e conceitos matemáticos em análise musical

Palavras chaves: matemática, música, composição musical, análise musical.

Ementa da disciplina: Breve apanhado histórico entre as relações matemática e música no Ocidente. Construção das escalas pitagórica, natural e temperada. A razão áurea e as sonatas de Mozart. Autossimilaridade e música. Teorias e conceitos matemáticos na análise musical: teoria de conjuntos na música, teoria de grupos na música. Aplicação das estruturas e das teorias abordadas em composições musicais.

Conteúdo:

1. Histórico:

- Breve estudo sobre a participação da matemática na música desde a época de Pitágoras até o Renascimento;
  - Construção de escalas, da pitagórica até a afinação ocidental, com o temperamento igual.
2. A Razão Áurea x Mozart, Villa Lobos e Bartók.
  3. Autossimilaridade: exemplos na música.
  4. Teorias e conceitos matemáticos na análise musical:
    - 4.1 O Modelo inteiro de notas de Allen Forte;
      - 4.1.1 Histórico: do tonalismo para o atonalismo;
      - 4.1.2 Intervalos;
      - 4.1.3 Relações de Equivalência e Classes de alturas;
      - 4.1.4 Forma Normal de Conjuntos de Altura;
      - 4.1.5 Forma Prima de Conjuntos de Altura;
      - 4.1.5 As Funções Transposição (T) e Inversão (I);
      - 4.1.6 O Grupo T/I;
      - 4.1.7 As funções T e I e as fugas de Bach;
      - 4.1.8 As funções P, L e R;
      - 4.1.9 O grupo PLR;
      - 4.1.10 O grupo diedral e os grupos T/TI e PLR;
      - 4.1.11 O grupo PLR, O Toro e Beethoven;
      - 4.1.12 O grupo PLR, Beatles e Elvis;
      - 4.1.13 O grupo PLR e o Choro.
  5. Análise de composições de:
    - Almeida Prado,
    - Rodolfo Coelho de Souza.
  6. Investigação sobre a presença de estruturas matemáticas em composições musicais.

Objetivos:

- Fornecer subsídios aos licenciandos em música e em matemática para que criem novas práticas pedagógicas que auxiliem a exploração da relação matemática x música no processo de ensino-aprendizagem;
- Discutir a presença de estruturas matemáticas em composições musicais, tais como a razão áurea, a autossimilaridade, a teoria de conjuntos e a teoria de grupos;

- Contribuir com o ensino da teoria de música atonal ao fornecer material didático para esta teoria, assim como enriquecer o estudo de teoria de grupos, ao apresentar uma aplicação pouco explorada para esta teoria;
- Apresentar algumas possibilidades do uso de teorias e conceitos matemáticos na análise musical;
- A partir das considerações anteriores, avaliar de que maneira e em que medida existe uma racionalidade matemática, intencional ou não, no processo de criação musical.

5.2.2 Sobre os conteúdos a serem trabalhados

Os três primeiros tópicos da disciplina apresentam uma abordagem histórica, que tem o intuito de fornecer ao aluno uma ideia da presença da matemática na música e situá-lo dentro deste panorama cultural. Tal presença é abordada por meio da construção de escalas e de conceitos como a razão áurea e a autossimilaridade, os quais são apresentados relacionados a composições musicais. O quarto tópico discorre sobre estruturas matemáticas passíveis de serem utilizadas na análise musical. Tal tópico é de fundamental importância, pois dá a oportunidade aos licenciandos em matemática de conhecerem uma aplicação não usual de vários conceitos estudados no curso, tais como classe de equivalência, teoria de conjuntos e teoria de grupos. A presença de tais conceitos e de maneira geral, de estruturas matemáticas em composições musicais será avaliada, finalmente, nos tópicos cinco e seis.

5.2.3 Algumas propostas de oficinas

OFICINA I O MODELO INTEIRO DE NOTAS

1. Escreva as letras correspondentes à cada uma das notas a seguir.

2. Escreva o número inteiro correspondente a cada uma das notas anteriores.

3. Determine qual é o intervalo orientado entre os pares de notas assinalados com as ligaduras.

4. Encontre o inteiro módulo 12 congruente a cada um dos seguintes números.

$$19= \quad 21= \quad -10= \quad 72= \quad -28= \quad 37=$$

5. Escreva, no mínimo, três números inteiros congruentes módulo 12 a cada um dos seguintes inteiros:

$$3 \quad -7 \quad 11$$

6. Faça as seguintes adições e subtrações em $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\begin{array}{llllll} 7+5= & 9+12= & 1-7= & 9-13= & 12+13= & 8+17= \\ 7-23= & 11+10= & 6-30= & 13=20= & 6+42= & 8+32= \end{array}$$

7. Escreva o número inteiro em $\mathbb{Z}_{12}$ correspondente a cada uma das **classes de notas**.

8. Determine qual é o intervalo orientado entre cada par de **classes de notas** do exercício anterior.

9. Determine qual é o intervalo orientado entre as seguintes **classes de notas**.

D# - C

C# - F

E - B

F - D

G - E

A - F

Bb - F

Db - C

10. Determine qual é o intervalo não orientado entre as **classes de notas** (interval class) do exercício 7.

11. Encontre os pcsegs correspondentes às seguintes melodias:

- a.

- b.

12. Represente na pauta musical, de pelo menos duas maneiras, os pcsegs a seguir.

- a. $\langle 0, 2, 4, 5, 2, 4, 1, 7, 0, 11, 0, 2 \rangle$

- b. $\langle 9, 5, 4, 2, 1, 2, 9, 10, 1, 4, 7, 10, 9, 7, 5, 4, 5, 2 \rangle$

OFICINA II

FORMA NORMAL, TRANSPOSIÇÃO, INVERSÃO E FORMA PRIMA

1. Coloque os conjuntos de notas a seguir na forma normal.

2. Coloque os conjuntos de notas a seguir na forma normal utilizando números inteiros módulo 12.
- 1,4,5
  - $\text{Db}, \text{B}, \text{A}, \text{Ab}, \text{D}$
  - 5,3,7,11
3. Transponha os seguintes conjuntos-classes conforme está indicado. Escreva sua resposta na forma normal usando números inteiros módulo 12.

- $T_4\{3,4,5\}$
- $T_6\{3,4,5\}$
- $T_5\{2,3,6,7,10,11\}$
- $T_3\{1,5,7,8\}$
- $T_7\{1,5,7,8\}$

4. Transponha os seguintes conjuntos-classes conforme está indicado. Escreva sua resposta na pauta musical.

5. Verifique quais dos conjuntos de notas a seguir são equivalentes por transposição e associe a primeira coluna com a segunda, escrevendo o operador transposicional T_k adequado.

$\{2,4,6\}$	$\{11,0,1,6\}$
$\{7,9,1\}$	$\{2,4,5,7\}$
$\{8,10,11,1\}$	$\{8,10,0\}$
$\{1,2,3,8\}$	$\{1,5,7\}$
$\{1,2,5,9\}$	$\{11,0,3,7\}$

6. Inverta os seguintes conjuntos-classes conforme está indicado. Escreva sua resposta na forma normal usando números inteiros módulo 12.

- f. $T_4I\{3,4,5\}$
- g. $T_6I\{3,4,5\}$
- h. $T_5I\{2,3,6,7,10,11\}$
- i. $T_3I\{1,5,7,8\}$
- j. $T_7I\{1,5,7,8\}$

7. Inverta os seguintes conjuntos-classes conforme está indicado. Coloque sua resposta na forma normal e a escreva na pauta musical.

The musical staff shows four groups of notes on a five-line staff with a treble clef. The first group, labeled T_0I , consists of notes with pitch classes 2, 4, 6, 8, 10, and 11. The second group, labeled T_5I , consists of notes with pitch classes 7, 9, 1, 3, 5, and 6. The third group, labeled T_7I , consists of notes with pitch classes 9, 11, 3, 5, 7, and 8. The fourth group, labeled $T_{10}I$, consists of notes with pitch classes 11, 0, 1, 3, 5, and 6.

8. Verifique se os pares dos conjuntos de notas a seguir são equivalentes por inversão e, caso positivo, escreva o operador transposicional T_kI adequado. Ambos os conjuntos estão na forma normal. (Portanto, após inverter o primeiro, este deve ser colocado na forma normal para depois encontrar a translação adequada).

- a. $\{0,1,6\}$ e $\{7,0,1\}$
- b. $\{2,4,5,7\}$ e $\{6,8,9,11\}$
- c. $\{0,1,5,7\}$ e $\{9,11,3,4\}$
- d. $\{7,8,11,3\}$ e $\{8,10,11,1\}$

9. Coloque cada um dos conjuntos de notas a seguir na forma prima.

- a. {3,5,6}
- b. {0,4,7}
- c. {7,9,12}
- d. {A,C#,E}
- e. {2,5,8,10}
- f. {C#,D,G,A^b}

OFICINA III

FUNÇÕES P, L e R

1. Considerando o acorde de Dó M (C), obtenha os acordes resultantes das aplicações P, L e R a este acorde. Utilize a tabela a seguir e coloque sua resposta na pauta musical.

Acorde	P	L	R
$T_k(C)$	$T_{(k+7)} I(C)$	$T_{(k+11)} I(C)$	$T_{(k+4)} I(C)$

2. Faça a mesma coisa para o acorde de Fá M (F).
3. Considere o acorde de fá m (f) = $T_k I(C)$ e obtenha os acordes resultantes das aplicações P, L e R a este acorde. Utilize a tabela a seguir e coloque sua resposta na pauta musical.

Acorde	P	L	R
$T_k I(C)$	$T_{(k+5)}(C)$	$T_{(k+1)}(C)$	$T_{(k+8)}(C)$

4. Faça a mesma coisa para o acorde de si m (b).
5. Dê os acordes correspondentes, depois de aplicar as transformações pedidas. Considere a notação PL, por exemplo como a função composta $P \circ L$.
- a.

Repare que a transformação LR leva um acorde Maior em um acorde Maior uma quarta justa acima.

b.

c.

$$c \xrightarrow{PR}$$

d.

$$F \xrightarrow{PR}$$

e.

$$f \xrightarrow{PRL}$$

6. Descubra as transformações referentes aos acordes da música Serpentina, de Nelson Alves.

$$F \longrightarrow D \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow F \xrightarrow{PLRP}$$

$$C \xrightarrow{PLRP} G \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow D \longrightarrow$$

$$G \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow Bb \xrightarrow{PLRP} F \xrightarrow{PLRP}$$

$$C \longrightarrow F$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa representou pessoalmente um grande desafio, pois estava entrando em um terreno desconhecido e pouco explorado. Inicialmente possuía um desafio: Como reunir a matemática com a música em uma proposta educacional? Não queria trabalhar com a parte histórica, nem com a parte física do som, como suas frequências, amplitudes e Série de Fourier, pois muitos livros e trabalhos já tinham sido escritos com estes temas. Durante uma das disciplinas do curso, fomos aconselhados a pesquisar assuntos com os quais lidamos, que fazem parte da nossa vivência e com os quais estamos envolvidos. Daí, como pianista e matemática, surgiu-me a ideia de buscar a presença da racionalidade matemática nas composições musicais. Tal estudo proporcionou-me conhecer em um nível elevado relações entre a música e a matemática e um grande crescimento enquanto educadora e acadêmica.

Penso que a maior contribuição deste trabalho está na proposta interdisciplinar que ele apresenta e defende. Ao procurar unir relações de ordem epistemológico-estruturais entre a matemática e a música, criando, assim, um novo conhecimento, como propõem Fazenda, Marques, Linhares, Barthes e Gusdorf (seção 2.3) propus, por exemplo, estabelecer uma analogia entre rotação de números complexos e transposição musical, consubstanciada pelo isomorfismo entre o grupo diedral e o grupo T/TI (tabela 19). Fato análogo foi evidenciado entre o grupo diedral e o grupo PLR (tabela 20). Cabe ainda aqui destacar a abordagem pedagógica do grupo PLR de funções Neo-Riemannianas. Tais funções musicais foram definidas matematicamente, sendo inclusive obtida uma escrita vetorial para cada uma delas. Verificou-se que a composição dessas funções aparece no contexto tanto de músicas eruditas quanto populares. Procurou-se dar uma abordagem didática ao cálculo de intervalos entre classes de alturas e às funções transposição e inversão. Esses tópicos podem ser abordados no nível médio de ensino.

Uma questão que esta pesquisa perseguiu é se um compositor que escreveu uma obra contendo simetrias, reflexões, transposições, inversões ou autossimilaridades o fez ciente de tais procedimentos. Este trabalho permitiu-me concluir que alguns compositores fazem uso da intuição, outros mostram claramente sua abordagem racional e calculada, mas a maioria utiliza uma mescla entre tais formas de criação. De qualquer forma, só a estruturação matemática não basta para explicar a riqueza sonora inerente à criação musical, algo mais se encontra presente.

Não há dúvida de que, no século XX, houve um interesse renovado pelo uso dos números na música. Um exemplo disso é a Razão Áurea, que começou a aparecer de maneira mais proeminente na obra de vários compositores, tais como Ravel (*A la manière de Borodine, Le tombeau de Couperin, Une barque sur l’océan*, entre outras). Segundo análise de Kramer, em obras mais recentes de outros compositores, como Krenek, Nono e Stockhausen, algumas estruturas que seguem a sequência de Fibonacci foram deliberadamente utilizadas (KRAMER, 1973, *apud* HOWAT, 1983, p. 186). Sugere-se que a investigação da presença da Razão Áurea em composições musicais seja um elemento adicional a ser analisado, pois esta pode explicar a natureza de formas musicais não usuais. Outros exemplos do uso de números na música podem ser observados em composições de Schoenberg, Webern, Coelho de Souza, Almeida Prado, dentre outros. O capítulo 5 confirma a profunda influência do raciocínio matemático nas composições do século XX analisadas.

Do ponto de vista educacional, o presente trabalho propõe uma disciplina de graduação relacionada às reflexões decorrentes da realização desta pesquisa. A matemática sempre ocupou um lugar de destaque nos currículos, porém o ensino de música é praticamente inexistente nos currículos atuais. Numa tentativa de diminuir essa defasagem, foi aprovado, no dia 28 de Maio de 2008, o Projeto de Lei 2732/2008, o qual determina a obrigatoriedade do ensino musical na Educação Básica. No entanto, essa abertura gera outra dúvida: Quem é o profissional que irá atuar nas escolas? O músico formado pelos conservatórios e com toda a técnica musical constituída? O pedagogo? O licenciado em música? Se refletirmos, veremos que este profissional ainda não está definido. O músico, dono de toda a técnica necessária para tocar um instrumento com qualidade, não está preparado para lidar com uma sala de aula numerosa, tampouco o pedagogo que possui uma ínfima informação musical, geralmente de um único semestre. Penso que o licenciado em música é o que estaria mais apto a exercer este papel, embora sua formação também seja voltada para trabalhar com pequenos grupos.

Nesse sentido, a proposta da disciplina mencionada é um importante resultado deste trabalho, na medida em que, sendo voltada tanto para graduandos em música como em matemática – em especial licenciandos –, contribui com a formação de tais profissionais ao oferecer-lhes subsídios para atuar no ensino médio no âmbito de integração dessas áreas do conhecimento. Tal disciplina tem o intuito de gerar um vasto campo de trocas de experiências entre alunos de matemática e de música, os quais poderão se apropriar de novos conhecimentos proporcionados pela convivência interáreas.

Os teóricos de interdisciplinaridade pesquisados defendem que, para atuar interdisciplinarmente, um professor deve sentir-se interdisciplinar, adotar uma postura

interdisciplinar. Uma analogia pode ser feita com o fazer música em conjunto, a quatro, seis, dez, “n” mãos: cada um pode saber muito bem a sua parte, com riqueza de detalhes, mas nada é tão gratificante quanto ouvir a nova melodia que é gerada por todas essas mãos em conjunto. É uma nova música, um novo conhecimento que surge, do qual todos participam, cada um à sua maneira, doando a parte específica do instrumento que lhe cabe para gerar o encantamento de novas melodias. Este trabalho contribui, ainda, dessa forma, para a criação de novas práticas pedagógicas que auxiliem a exploração da música no processo de ensino-aprendizagem.

Almejamos que esta tese possa servir de incentivo à constituição de projetos interdisciplinares, flexíveis e interdepartamentais, como propõe Pombo, e que contribua para que surjam novas propostas no Brasil ligando matemática e música, visto que hoje em dia são muito raros os trabalhos nesta área.

7 PRELIMINARES

7.1 Preliminares de Matemática

Conjuntos, Relações e Funções

Conjunto: A noção de conjunto é primitiva, não se define. Um conjunto é uma coleção de objetos. É indicado com seus elementos dentro de duas chaves. Dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Exemplos: $\{3,6,9\}=\{9,3,6\}$

$$\{2,4,6,8,\dots,2n,\dots\} = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ é par}\}$$

Definição 1 Chama-se *produto cartesiano* de um conjunto não vazio A por um conjunto não vazio B ao conjunto de todos os pares ordenados (a,b) com primeiro elemento em a e segundo elemento em B. Indica-se o produto cartesiano de A por B pela notação $A \times B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Exemplo: Considerando-se os seguintes conjuntos:

$$A=\{2,4\} \text{ e } B = \{1,2,3\}$$

temos

$$A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

e

$$B \times A = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$$

Estes produtos podem ser representados do seguinte modo:

Figura 180 – $A \times B$ Figura 181 – $B \times A$

Definição 2 Sejam E e F dois conjuntos e seja $E \times F$ o produto cartesiano de E por F . Todo subconjunto R de $E \times F$ é denominado *relação de E em F* . Usa-se a notação $a R b$ (leia-se: a está na relação R com o elemento b) para indicar que $(a,b) \in R$.

Exemplo: Sejam A e B os conjuntos definidos no exemplo anterior e seja

$$R = \{(x,y) \in A \times B / x \in A \text{ e } y \in B, \text{ com } y \text{ ímpar}\}$$

Desse modo,

$$R = \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3)\}$$

Esta relação pode ser representada do seguinte modo:

Figura 182 – Relação R

Definição 3 Sejam A e B dois conjuntos. Uma função f é uma correspondência que a cada elemento de A associa um único elemento de B . Geralmente é denotada $f:A \rightarrow B$ e lê-se: f vai de A em B .

Exemplo: seja f a função $f:\{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa cada elemento do primeiro conjunto ao seu dobro.

Desse modo,

$$f(1)=2$$

$$f(2)=4$$

$$f(3)=6$$

O domínio da função é o conjunto de partida, ou seja, $\{1,2,3\}$ e a imagem é o conjunto formado pelos elementos que são “transformados” de algum x . No caso, o conjunto imagem é $\{2,4,6\}$.

Em geral, dada uma função $f:A \rightarrow B$, temos que seu domínio é A e sua imagem é $f(A)$, onde

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

As funções podem ser compostas, desde que o domínio da segunda seja igual à imagem da primeira. Veja a definição a seguir.

Definição 4 Sejam E , F e G três conjuntos e consideremos as funções

$$f: E \rightarrow F \text{ e } g: F \rightarrow G$$

Nesse caso, para todo x em E existe um único y em F tal que $y = f(x)$ (definição 2) e para este elemento y , existe um único z em G tal que $z = g(y)$; portanto, para todo x em E existe um único elemento z de G tal que $(x, z) \in g \circ f$. Com essas notações, dizemos que $g \circ f$ é a função composta das funções g e f (nesta ordem), ou seja, dadas duas funções,

$$f: E \rightarrow F \text{ e } g: F \rightarrow G,$$

a composta de g e f é a função

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

para todo x em E .

Esta função pode ser visualizada por meio do diagrama a seguir

Observação: A composta de g e f é obtida aplicando-se f aos elementos de E e a seguir transformando-se as imagens assim obtidas por g; portanto, a leitura do símbolo $g \circ f$ - composta de g e f - é feita na ordem inversa segundo a qual foram aplicadas as funções f e g.

Exemplo 1: Seja f a função definida no exemplo anterior e seja a g a função $g: \{2,4,6\} \rightarrow \mathbb{N}$, que leva um número no seu triplo.

Desse modo,

$$g(2)=6$$

$$g(4)=12$$

$$g(6)=18$$

Assim: $g \circ f: \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{N}$, denominada g composta com f é definida por $g(f(x))$ e é dada por:

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(2) = 6$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4) = 12$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(6) = 18$$

Exemplo 2: Seja f a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que leva um número x de $\mathbb{N}$ em um número $x+7$ do mesmo conjunto e seja g a função $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que leva um número x de $\mathbb{N}$ em um número $x+1$ do mesmo conjunto, ou seja:

$$\begin{array}{lll}
 f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & \text{e} & g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
 x \rightarrow x + 7 & & x \rightarrow x + 1
 \end{array}$$

$$\text{Desse modo, } g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 7) = x + 7 + 1 = x + 8$$

Definição 5⁴⁴ Diz-se que uma relação R sobre um conjunto E é uma *relação de equivalência* se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, se são válidas, simultaneamente, as seguintes condições:

⁴⁴Retirado de Monteiro, L. H. J., pág. 36.

- E_1 : para todo x em E , tem-se: xRx ;
- E_2 : quaisquer que sejam x e y em E , tem-se: $xRy \Rightarrow yRx$;
- E_3 : quaisquer que sejam x , y e z em E , tem-se: xRy e $yRz \Rightarrow xRz$.

Notação Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto E . Se a e b são dois elementos de E tais que aRb , diremos que a é equivalente a b módulo R e escreveremos

$$a \equiv b \pmod{R}$$

Quando a relação de equivalência R estiver fixada, podemos simplificar a notação escrevendo $a \equiv b$.

Exemplo 1: Considere 10 bolas em uma mesa de bilhar, sendo 3 vermelhas, 2 azuis e 5 pretas. Duas bolas são equivalentes se têm a mesma cor.

Pode-se verificar que as condições E_1 , E_2 e E_3 são satisfeitas:

- E_1 : toda bola está relacionada à ela mesma, vista que ela possui uma só cor;
- E_2 : se uma bola a está relacionada com outra b , significa que a possui a mesma cor de b , o que acarreta que b possui a mesma cor de a , ou seja, b está relacionado com a ;
- E_3 : se uma bola a está relacionada com outra b , e b com outra c , a possui a mesma cor que b e b possui a mesma cor que c , o que acarreta que a possui a mesma cor que c , ou seja, a está relacionado com c .

Exemplo 2: Considere as 10 bolas do exemplo anterior e suponha que estejam numeradas de 0 a 10. Duas bolas são equivalentes se têm a mesma paridade⁴⁵.

Pode-se verificar que as condições E_1 , E_2 e E_3 são satisfeitas:

- E_1 : toda bola está relacionada à ela mesma, vista que ela possui um único número;
- E_2 : se uma bola a está relacionada com outra b , significa que se a for par, b é par ou se a for ímpar b é ímpar, o que acarreta que b possui a mesma paridade de a , ou seja, b está relacionado com a ;

---

⁴⁵ Dizemos que duas bolas têm mesma paridade se ambas são pares ou ambas são ímpares.

- E_3 : se uma bola a está relacionada com outra b , e b com outra c , a possui a mesma paridade de b e b possui a mesma paridade de c , o que acarreta que a possui a mesma paridade de c , ou seja, a está relacionado com c .

Exemplo 3: “Duas notas são equivalentes se diferem em intervalo por um número inteiro de oitavas”(ABDOUNUR, 2003, p. 9).

Pode-se verificar que as condições E_1 , E_2 e E_3 são satisfeitas:

- E_1 : toda nota está relacionada à ela mesma, com o intervalo de 0 oitavas;
- E_2 : se uma nota a está relacionada com outra b , a difere de um número inteiro de oitavas de b , o que acarreta que b difere de um número inteiro de oitavas de a , ou seja, b está relacionado com a ;
- E_3 : se uma nota a está relacionada com outra b , e b com outra c , a difere de um número inteiro de oitavas de b , seja n , e b de um número inteiro de oitavas de c , seja m , o que acarreta que a difere de um número inteiro de oitavas de c , no caso $n+m$, ou seja, a está relacionado com c .

Exemplo4: Congruência módulo m .

Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e seja m um inteiro dado. Se a e b são dois inteiros quaisquer, define-se: a é congruente a b módulo m se, e somente se, existe um inteiro q tal que $a-b=qm$. Obtém-se assim, uma relação sobre $\mathbb{Z}$ que é denominada *congruência módulo m* e se a e b satisfazem esta relação escreve-se

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Se estiver claro que se está se trabalhando mod m , pode-se notar simplesmente

$$a \equiv b$$

A congruência módulo m é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Prova

- E_1 : $a - a = 0 = 0 \cdot m \Rightarrow a \equiv a \pmod{m}$
- E_2 : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b = q \cdot m \Rightarrow b - a = (-q)m \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad E_3: \quad & \left. \begin{aligned} a &\equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b = q \cdot m \\ b &\equiv c \pmod{m} \Rightarrow b - c = q' \cdot m \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - c = a - b + b - c = (q + q') \cdot m \\
 & \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}.
 \end{aligned}$$

A congruência módulo 12 pode ser considerada pensando na face de um relógio, com números de 0 a 11 e com 0 na posição do 12. O dia começa à 0h e 12 horas depois estaremos na metade do dia. Trocamos o 12 pelo 0 e começamos a contar novamente do começo. Duas horas depois, que seria 14h, pode ser trocado por 2h. Similarmente, 18h seria 6h e assim por diante.

Figura 183 – Relógio

Dizemos que:

$$0 \equiv 12 \pmod{12}$$

$$14 \equiv 2 \pmod{12}$$

$$18 \equiv 6 \pmod{12}$$

Pode-se mostrar que uma maneira de se achar o congruente mod 12 entre 0 e 11 de um número é dividindo-o por 12 e tomando o resto desta divisão, por exemplo, como o resto da divisão de 29 por 12 é 5, então 5 é congruente a 29 mod 12.

Definição 6 Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio E . Para todo a em E o subconjunto

$$\bar{a} = \{x \in E \mid x \equiv a \pmod{R}\}$$

é denominado *classe de equivalência módulo R determinada pelo elemento a*.

Exemplos:

$$\bar{2} \pmod{12} = \{-24, -12, 14, 24, \dots\}$$

$$\bar{1} \pmod{12} = \{-23, -11, 13, 25, \dots\}$$

Definição 7 Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio E. O conjunto de todas as classes de equivalência módulo R é denominado conjunto quociente de E pela relação de equivalência R e é indicado por E_R .

Exemplo: $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$

Definição 8 Adição módulo m

Define-se a operação + no conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ da seguinte maneira:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b},$$

qualquer que sejam $\bar{a}$ e $\bar{b}$ em $\mathbb{Z}_{12}$.

Pode-se provar que essa é uma boa definição, isto é, independe dos representantes escolhidos. (isto pode ser compreendido no exemplo seguinte: $\bar{2} + \bar{15} = \overline{2 + 15} = \bar{17}$. Como $\bar{2} = \bar{14}$ e $\bar{15} = \bar{3}$, poderíamos ter escolhido estes novos representantes, 14 e 3, para efetuar esta adição e o resultado seria o mesmo: $\bar{14} + \bar{3} = \bar{17}$).

Exemplos :

$$\bar{11} + \bar{2} = \bar{13} = \bar{1}$$

Pode-se escrever resumidamente, como:

$$11+2=13=1 \pmod{12}$$

$$26+3=29=5 \pmod{12}$$

Dessa forma, a adição pode ser feita desprezando-se os múltiplos de 12.

Nesse trabalho, por uma questão de simplificação de notação, utilizaremos a notação sem barras para a adição de classes de equivalência.

Exemplo: Seja $f: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \{0, 1, \dots, 11\}$ a aplicação que a X associa o seu representante pertencente ao conjunto $\{0, 1, \dots, 11\}$. Desse modo,

$$f(\overline{4})=4$$

$$f(\overline{16})=4$$

$$f(\overline{-4})= -4+12=8$$

$$f(\overline{1-10})=f(\overline{-9})=-9+12=3$$

$$f(\overline{5+9})=f(\overline{14})=2$$

Definição 11 Seja x um número real. O módulo de x é a distância de x ao número zero e é denotado por $|x|$. Desse modo,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja,

O módulo de um número x é o próprio x se ele for positivo e é o simétrico de x , se ele for negativo.

Definição 12 Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio.

- Um elemento a de A é dito elemento mínimo de A quando se verifica:

$$\forall x \in A, x \geq a$$

isto é, quando todos os elementos de A são maiores ou iguais a a .

- Um elemento b de A é dito elemento máximo de A quando se verifica:

$$\forall x \in A, x \leq b$$

isto é, quando todos os elementos de A são menores ou iguais a b .

Exemplo: $A=\{1,2,4\} \subset \mathbb{R}$. Então $1 = \min A$ e $4 = \max A$.

7.2 Preliminares de Música

7.2.1 Notação musical melódica

Para não desviar-se dos objetivos, não serão abordadas aqui as diversas particularidades e regras referentes à escrita e leitura musical, apenas apresentaremos noções básicas que podem ser aprofundadas em Pahlen (1949) e Almada (2009).

Notas são sons. Para falarmos sobre eles, necessitamos representá-los por alguns símbolos, de modo que estes permitam a um intérprete executar uma peça o mais próximo possível da maneira desejada pelo compositor. O sistema mais utilizado atualmente é o que utiliza símbolos grafados sobre uma pauta de 5 linhas, também chamada de pentagrama. Diversos outros sistemas de notação existem, principalmente na música moderna, na qual o compositor anexa à partitura uma espécie de “bula”, na qual define o que significa cada símbolo utilizado na peça musical.

As notas têm uma determinada altura e uma determinada duração. Em relação à altura, seus nomes podem ser encontrados na forma de sílabas (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) ou letras (C, D, E, F, G, A, B), as quais obedecem à seguinte ordem:

Figura 184 – Ciclo das notas musicais

Figura 185 – Ciclo das notas musicais com letras

Conforme se percorre o círculo, no sentido horário/anti-horário, as notas “sobem/descem” as linhas musicais. Na figura a seguir, se a nota “de baixo” for um si, por exemplo, as outras duas serão dó e ré. Se for um fá, as outras serão sol e lá e assim por diante.

Figura 186

Figura 187

Conforme a necessidade, foi-se acrescentando mais linhas.

Figura 188

Até que convencionou-se a utilizar 5 linhas (pentagrama) para se escrever as melodias.

Uma vez desenvolvido o pentagrama, nele caberiam nove notas: cinco sobre as linhas e quatro nos intervalos. Acrescentando mais duas, uma por cima da linha superior e outra por baixo da linha inferior, chega-se ao número de onze.

Figura 189 – Pentagrama

Todavia, a quantidade de notas que a notação deveria fixar era bem maior, é só pensar na distância entre a voz aguda da mulher e a voz grave do homem, é quase quatro oitavas. Ainda maior é a extensão dos registros instrumentais. Uma primeira alternativa que surgiu foi utilizar linhas suplementares para suprir estas necessidades. Veja a figura 190 a seguir:

Figura 190

Esta notação pode conter, em alguns casos, muitas linhas auxiliares, não resultando muito clara, então idealizou-se as “claves”, que daria sentido ao pentagrama. Mediante a

clave, pode-se fixar a posição de qualquer nota, aguda ou grave. As formas e nome das claves mais usadas são as seguintes:

Figura 191 – Clave de fá

Figura 192 – Clave de sol

Figura 193 – Clave de dó

Desse modo, a notação do grave para o agudo fica mais clara e menos trabalhosa. Veja a figura 194 a seguir.

Figura 194 –

No teclado, as notas são dispostas da seguinte maneira:

Figura 195 – Disposição das notas no teclado

A figura a seguir mostra notas intermediárias, que são inseridas entre as anteriores e são encontradas nas teclas pretas do piano, juntamente com as letras que hoje são utilizadas. São elas: C# ou Db, D# ou Eb, F# ou Gb, G# ou Ab e A# ou Bb. A figura 196, a seguir, exhibe estas notas.

Figura 196 – Nomes das notas “intermediárias”

Estas 12 notas podem se agrupar em diferentes sequências, gerando as escalas. Escala vem do latim *scala*, que significa escada. A escala musical é uma sequência de notas, ascendente ou descendente.

As escalas musicais são, a rigor, a divisão da sequência de notas contidas dentro de *uma oitava*⁴⁶. Essa divisão pode ser feita de diversas formas, obedecendo principalmente a critérios estéticos, quer em termos da melodia que as notas formam, quer em termos das relações harmônicas entre elas. Quando a oitava é dividida em 12 partes iguais, obtém-se o temperamento igual e a distância entre duas notas consecutivas chama-se *semitom* (ST). Cada dois semitons forma um tom (T).

O dó central (que fica aproximadamente no meio do teclado do piano) é chamado de dó₄. Ele é o quarto dó do piano, contando da esquerda para a direita.

⁴⁶ Uma oitava é um intervalo musical entre dois sons com frequências na razão 2:1.

Figura 197 – Tons e semitons

Intervalos Musicais

Um intervalo é a distância que separa dois sons distintos. Para os músicos, os intervalos são classificados de acordo com o número de semitons que eles contêm. A tabela a seguir mostra o nome de alguns intervalos tradicionais.

Nome do intervalo	Número de semitons
Uníssonos	0
Segunda menor	1
Segunda maior	2
Terça menor	3
Terça maior	4
Quarta justa	5
Quarta aumentada (trítone)	6
Quinta justa	7
Sexta menor	8
Sexta maior	9
Sétima menor	10
Sétima maior	11
Oitava justa	12
Nona menor	13
Nona maior	14

A seguir é representada na pauta uma escala maior. As sete notas que compõem a escala maior são denominadas *graus*, que são numerados com algarismos romanos. Cada um dos graus recebe ainda uma designação especial. A figura a seguir mostra a escala maior de Dó com a denominação adotada para cada grau.

Figura 198 – Escala de Dó Maior

- I – Tônica;
- II – Supertônica;
- III – Mediante;
- IV – Subdominante;
- V – Dominante;
- VI – Superdominante;
- VII – Sensível.

Uma escala musical é definida por uma sucessão de intervalos e não por uma sucessão de alturas, porque, independentemente do ponto de partida da escala, o que conta para a sua descrição é a ordem dos intervalos.

A escala maior é formada por intervalos de segunda, ordenados na seguinte configuração:

Figura 199 – Estruturação das escalas maiores

A escala menor, por sua vez, ordena os intervalos de segunda da seguinte maneira:

Figura 200 – Estruturação das escalas menores

A construção de escalas maiores e menores a partir das doze diferentes notas (ou tônicas) existentes no sistema temperado traz como resultado vinte e quatro tonalidades que compõem o universo tonal. Para isso deve ser rigorosamente observada a disposição intervalar das fórmulas apresentadas anteriormente. Observe o exemplo, a seguir, da escala maior começando da nota si:

Figura 201 – Escala de Si Maior

Certas tonalidades, a exemplo da anterior, possuem um número grande de acidentes, o que acaba resultando em complicações de escrita e leitura. A solução surgida para simplificar esta situação foi a criação do sistema de armaduras de clave, as quais explicitam a configuração particular de acidentes de cada tonalidade. Os acidentes assinalados na armadura são automaticamente incorporados às notas correspondentes da pauta. A escala de Si Maior, exemplificada anteriormente, seria escrita como a seguinte figura mostra.

Figura 202 – Escala de Si Maior

Formação de acordes

Qualquer agrupamento de três ou mais sons simultâneos é considerado um acorde. A teoria da harmonia tonal é estruturada e solidamente baseada na disposição de acordes por intervalos de terças. Considerando a existência de duas qualidades de terças – maiores e

menores –, todas as superposições possíveis destes intervallos nos darão, conseqüentemente, todas as possibilidades de tríades⁴⁷. Escolheremos duas dessas possibilidades, as quais serão utilizadas neste trabalho. São elas:

- Tríade formada por uma 3ª. Maior e uma 3ª. menor: acorde perfeito maior;
- Tríade formada por uma 3ª. menor e uma 3ª. Maior: acorde perfeito menor.

Exemplos:

Figura 203 – Acordes de Dó M e dó m

Um acorde pode ser resumidamente indicado por meio de uma *cifra*. A cifragem adotada para os dois tipos de tríades anteriormente citados é:

- Tríade Maior: X (letra maiúscula);
- Tríade menor: Xm ou x (letra minúscula),

onde X é a nota que está na posição “mais baixa” da tríade, denominada fundamental.

Desse modo, os dois acordes anteriores seriam indicados por: C e Cm ou simplesmente c.

7.2.2 Notação musical rítmica

Na música, o tempo é representado horizontalmente. Por exemplo, se as figuras a seguir indicassem a pulsação de duas pessoas, qual delas estaria com a pulsação mais acelerada?

Figura 204 – Pulsação da Pessoa A

Figura 205 – Pulsação da Pessoa B

⁴⁷ Acordes de três sons, formados por terças superpostas.

A intuição nos leva a concluir que a pulsação da pessoa A é a mais acelerada, porque têm mais pontos nesta figura.

Na partitura musical é exatamente assim que funciona, quanto mais pulsos, mais rápidos são os sons.

As figuras musicais mais usadas são:

Semibreves (que duram 4 pulsações):

Mínimas (que duram 2 pulsações):

Semínimas (que duram 1 pulsação):

Colcheias (que duram meia pulsação):

Semicolcheias (que duram um quarto de pulsação):

Fusas (que duram um oitavo de pulsação):

E assim por diante, quanto mais rápida é a nota, menor o espaço que ela ocupa em relação ao eixo horizontal dos tempos.

Combinando os elementos rítmicos e melódicos, atinge-se a totalidade da escrita musical.

8 BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2003.

ALMADA, C. **Harmonia funcional**. Campinas: Ed. Unicamp, 2009.

ANTOKOLETZ, E. **Twentieth-Century Music**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1992.

APPLEBAUM, W. **Encyclopedia of the scientific revolution from Copernicus to Newton**. 2.ed. New York: Routledge, 2008.

ASSIS, C. A. Fatores de coerência nos choros nº 5 (“Alma brasileira”), de H. Villa-Lobos. **PER MUSI – Revista Acadêmica de Música**, Belo Horizonte, nº 20, jul-dez., 2009, p.64-73.

BARBOSA, A. M. **Edição digital de som**: uma abordagem aos fundamentos da escultura sonora orientada para criadores. Imagem da Universidade Católica Portuguesa, 1999.
http://www.abarbosa.org/docs/edicao_digital_som.pdf.

BASTOS, R. Simetria. Notas sobre o ensino da geometria (GTG), **Educação e Matemática**, n.º 88, Maio/Junho de 2006. Lisboa: APM.

BENNETT, G. **Chaos, Self-Similarity, Musical Phrase and Form**.
<http://www.gdbennett.net/texts/Chaos.pdf>.

BOULEZ, P. **A música hoje 2**. São Paulo: Perspectiva, 1992.

CAMPOS, M. D. **Etnociência e etnocenologia**. II Seminário Conhecendo e Reconhecendo a Dança, realização do Departamento de Artes Corporais da Escola de Educação Física e Desportos da UFRJ. RJ. 2005

CASCINO, F. Interdisciplinaridade, vontade e força: exercício de afirmação de vida. In: FAZENDA, I. C. A. (Org). **A virtude da força nas práticas interdisciplinares**. Campinas: Papirus, 1999.

COELHO, F. C. **Música contemporânea brasileira**: Almeida Prado. São Paulo: Centro Cultural São Paulo, 2006.

COELHO DE SOUZA, R. Uma introdução às teorias analíticas da música atonal. In: BUDASZ, Rogério (Org). **Pesquisa em música no Brasil: métodos, domínios, perspectivas**. Goiânia: Anppom, 2009.

_____. **Da composição musical assistida por computadores: aspectos cognitivos**. 1994. Dissertação (Mestrado em Musicologia) Escola de Comunicação e Artes da Universidade de São Paulo, São Paulo.

_____. **Música**. São Paulo: Novas Metas, 1983.

CYRINO, M. C. C. T. **As várias formas de conhecimento e o perfil do professor de Matemática na ótica do futuro professor**. 2003. 256p. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

DENCKER, A. F. **Pesquisa e interdisciplinaridade no ensino superior**. São Paulo: Aleph, 2002.

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

DREYFUS, L. **Bach and the patterns of invention**. Cambridge, England: Harvard University Press, 1996.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

FAZENDA, I. C. A. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**. São Paulo: Loyola, 1979.

_____. **Interdisciplinaridade e integração dos saberes**. Conferência apresentada no Congresso Luso-Brasileiro sobre Epistemologia e Interdisciplinaridade na Pós-Graduação, realizado em Porto Alegre, Brasil, na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, nos dias 21, 22 e 23 de Junho de 2004.

_____. Práticas interdisciplinares. **Sociologias**, Porto Alegre, ano 8, nº 15, jan/jun 2006, p. 208-249.

_____. **Interdisciplinaridade na educação brasileira. 20 anos**. São Paulo: Criarp, 2006.

_____. Construindo aspectos teórico-metodológicos da pesquisa sobre interdisciplinaridade. **Anais** dos temas apresentados no VIII Congresso Sul-Brasileiro da Qualidade na Educação, realizado em 2001. JOINVILLE, SC.

_____. **Interdisciplinaridade** - um projeto em parceria. São Paulo: Loyola, 1991.

_____. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. Campinas: Papirus, 1995.

FRALEIGH, J. B. **A first course in abstract algebra**. Japan: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

FIGORE, T. M. **Music and Mathematics**.

<http://www.math.uchicago.edu/~fiore/1/musictotal.pdf>, 2009. Acesso em: 12 fev 2011.

_____. **What is mathematical music theory?**

<http://www.personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/FioreWhatIsMathMusTheorySlides.pdf>. Acesso em 20 set 2011.

FIGORE, T. M., SATYENDRA, R. , CRANS, A. S. [Musical Actions of Dihedral Groups](#). **American Mathematical Monthly**, Volume 116, Número 6, Junho-Julho 2009, pag. 479-495.

FORTE, A. **The structure of atonal music**. New Haven: Yale University Press, 1973.

GALDEMAN, S.; COHEN, S. **Cartilha rítmica para piano de Almeida Prado**. Rio de Janeiro: 2006.

_____. **A cartilha rítmica para piano de Almeida Prado**: vertentes pedagógicas.

http://www.anppom.com.br/anais/anaiscongresso_anppom_2005/sessao25/salomeagandelman_saracohen.pdf. Acesso em: 14 fev 2012.

GRANJA, C. E. S. **Música, conhecimento e Educação**: harmonizando os saberes na escola. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 2005.

HALL, R. W. **Linear contextual transformations**. Junho de 2009.

<http://www.sju.edu/~rhall/Contextual/contextual.pdf>. Acesso em: 16 jan 2011.

HARKLEROAD, L. **The math behind the music**. Cambridge, NY: Cambridge University Press, 2006.

HOWAT, R. **Debussy in proportion**. Cambridge, NY: Cambridge University Press, 1983.

HUNGERFORD, T. W. **Graduate texts in mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1974.

HUNTLEY, D. **The divine proportion**. Mineola, NY: Dover Publications, 1970.

IEZZI, G., DOLCE, O. **Álgebra III**. São Paulo: Moderna, 1973.

KLINE, M. **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. México: Addison–Wesley, 1992.

KLUMPENHOUWER, H. Some remarks on the use of Riemann transformations. **Music Theory Online**, Vol.0, nº 9, july, 1994.

LAZZARINI, V. **Elementos de acústica**. Maynooth: Music Department of National University of Ireland, 1998. In: http://www.may.ie/academic/music/vlazzarini/papers/Elementos_de_Acustica.doc. Acesso em: 01 out 2010.

LENDVAI, Ernő. **Béla Bartók: uma análise de sua música**. Espanha: Idea Books, 1971, reeditado em 2003.

LEWIN, D. **Generalized musical interval and transformations**. New Haven: Yale University Press, 1987.

_____. **Musical form and transformation**. Four Analytic Essays. New York: Oxford University Press, 2007.

LINHARES, C. Memórias e projetos nos percursos interdisciplinares e transdisciplinares. In: FAZENDA, I. C. A. **A virtude da força nas práticas interdisciplinares**. Campinas: Papirus, 1999.

LIVIO, M. **Razão áurea**, 1945. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e matemática. **Pró-Posições**, vol.4, nº 1 [10]. Março de 1993.

MONTEIRO, L.H.J. **Iniciação às estruturas algébricas** – São Paulo. GEEM. 1968. Acesso em: 19 jun 2010.

OLIVEIRA, J. P. P. **Teoria analítica da música do século XX**. Lisboa: Gulbenkian, 1998.

Orquestra Filarmônica Juvenil da UFPR – Comemoração dos 40 anos. Brasil: Independente, 2006.

PAHLEN, K. **Introdução à música**. São Paulo: Melhoramentos, 1949.

POMBO, O. **Epistemologia da interdisciplinaridade**. Seminário Internacional sobre Interdisciplinaridade, Humanismo e Universidade. Faculdade de Letras da Universidade do Porto, 12 a 14 de Novembro 2003

_____. **Interdisciplinaridade e integração dos saberes**. Conferência apresentada no Congresso Luso-Brasileiro sobre Epistemologia e Interdisciplinaridade na Pós-Graduação, realizado em Porto Alegre, Brasil, na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, nos dias 21, 22 e 23 de Junho de 2004.

_____. Práticas interdisciplinares. **Sociologias**, Porto Alegre, ano 8, nº 15, jan/jun 2006, p. 208-249.

PRADO, L. A. G. **Matemática, física e música no renascimento**: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo.

PUTZ, J. F. **The golden section and the piano sonatas of Mozart** (1995). In: http://pt.wikipedia.org/wiki/Cat%C3%A1logo_K%C3%B6chel. Acesso em 19 jun 2010.

SALZMAN, E. **Introdução à música do século XX**. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

SCHWARTZ, E.; CHILDS, B. (ed. with Jim Fox) **Contemporary composers on contemporary music**. U. S. A.: Da Capo Press, 1998.

SHAFFER, K. **A transformation approach to collection and mode in the music of Béla Bartók**. Yale University. Music 980a. Prof. David Clampitt. 2005.

SNOW, C. P. **The two cultures and a second look**: an extended version of the two cultures and the scientific revolution. London: Cambridge University Press, 1964.

SOLOMON, L. J. **Symmetry as a compositional determinant**, 1973, revisado em 2002. In <http://solomonsmusic.net/diss.htm>. Acesso em: 4 out 2010.

SOMMERMAN, A. **Inter ou transdisciplinaridade?** São Paulo: Paulus, 2006.

SOUSA FILHO, S.G. Comunicação e interdisciplinaridade. In: **FERNANDES, A. et alli (Org.) O fio que une as pedras**. São Paulo: Biruta, 2002.

STRAUS, J. **Introduction to post-tonal theory**. 3.ed. New Jersey: Pearson Education, 1990.

WEYL, H. **Symmetry**. New Jersey: Princeton University Press, 1952.

WEBSTER, J. Sonata form. In: **Grove Music Online**. Oxford Music Online, <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/26197>. Acesso em: 19 jun 2010.

<http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/musica-escolas-432857.shtml>. Acesso em: 01 ago 2011.

http://en.wikipedia.org/wiki/David_Lewin. Acesso em: 14 abr 2011.

<http://math.boisestate.edu/~tconklin/MATH124/Main/Notes/3%20Number%20Theory/PDFs/JSTOR/The%20Golden%20Section%20and%20the%20Piano%20Sonatas%20of%20Mozart.pdf>. Acesso em: 12 jun 2010.

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 01 ago 2011.

<http://www.allenforte.com/serial.html>. Acesso em: 14 abr 2011.

<http://www.americanscientist.org/issues/pub/1998/1/did-mozart-use-the-golden-section>. Acesso em: 19 jun 2010.

<http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/26197>

<http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/musica-escolas-432857.shtml>. Acesso em: 01 ago 2011.

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 01 ago 2011.

<http://www.americanscientist.org/issues/pub/1998/1/did-mozart-use-the-golden-section>. Acesso em: 19 jun 2010.

<http://math.boisestate.edu/~tconklin/MATH124/Main/Notes/3%20Number%20Theory/PDFs/JSTOR/The%20Golden%20Section%20and%20the%20Piano%20Sonatas%20of%20Mozart.pdf>. Acesso em: 12 jun 2010.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Ant%C3%B4nio_Rezende_de_Almeida_Prado. Acesso em: 14 fev 2012.

ANEXOS

ANEXO 1

METRÓPOLIS

para sintetizadores comandados por computador

Rodolfo Coelho de Souza

(1990-91)

METROPOLIS

1.

RODOFEO COLLINS de OLIVEIRA
1955. II

(♩ = 145)

3^a ACIMA]

3^a BAIXO]

4

100 70 60 90 80 110 80 120 90 100 80 90 70 50 60 90 100 70 80 60

90 60 100 70 80 110 70 80 100 90 100 120 90 80 110 90 80 50 70 60 90 110 100 80 70 80 100 70 60 90 80 90 110 100 80 70 80 100 70 60 90 80 110 120 90 100 80 90 50 60 80 70 110 70 100 80 90 100 120 90 110 80

120 80 90 110 100 80 90 60 70 50 90 100 70 60 80 110 100 70 90 80 100 80 60 90 70 110 80 100 90 70 110 120 90 100 80 90 50 60 80 70 110 70 100 80 90 100 120 90 110 80

110 70 100 80 90 100 120 90 110 80

2.

Handwritten musical score for a four-part setting, labeled "2.". The score consists of four staves (Soprano, Alto, Tenor, Bass) and is divided into four measures, each marked with a repeat sign and a "(2x)" instruction. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat (B-flat), and various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Numerical figures (e.g., 40, 80, 120, 90, 100) are written below the notes in each measure, likely indicating fingerings or specific pitch values. The first measure starts with a Soprano line and a Bass line, while the second and third measures have a Soprano line and a Bass line, with the Alto and Tenor lines being empty. The fourth measure has all four staves filled with notes.

Handwritten musical score for a four-part setting, continuing from the previous system. It consists of four staves (Soprano, Alto, Tenor, Bass) and is divided into four measures, each marked with a repeat sign and a "(2x)" instruction. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat (B-flat), and various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Numerical figures (e.g., 90, 50, 80, 60, 70) are written below the notes in each measure, likely indicating fingerings or specific pitch values. The first measure has a Soprano line and a Bass line, while the second and third measures have a Soprano line and a Bass line, with the Alto and Tenor lines being empty. The fourth measure has all four staves filled with notes.

Handwritten musical score for a four-part setting, continuing from the previous system. It consists of four staves (Soprano, Alto, Tenor, Bass) and is divided into four measures, each marked with a repeat sign and a "(2x)" instruction. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat (B-flat), and various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Numerical figures (e.g., 70, 100, 90, 80, 60) are written below the notes in each measure, likely indicating fingerings or specific pitch values. The first measure has a Soprano line and a Bass line, while the second and third measures have a Soprano line and a Bass line, with the Alto and Tenor lines being empty. The fourth measure has all four staves filled with notes.

3.

25
8a

100 70 60 90 80 70 60 90 80 110 80 120 90 110 80 120 90 100

8a

100 80 100 60 90 70 60 90 70 110 70 100 90 80 70 100 90 80 80 90 70 50 60 90 70 50 80 90 100 70 80 100 70 90 60 60

8a

90 60 100 70 80 60 100 70 90 80 120 90 100 120 70 110 80 110 110 90 80 70 100 110 80 70 90 80 110 80 70 90 120 80 110 100 90 80 110 100 90

usp/cca/serviço de difusão de partituras

4.

89

Handwritten musical score for system 89, measures 1-8. The notation includes treble and bass clefs, notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 100, 70, 80, 60, 100, 70, 90). The key signature has one flat (B-flat).

89

Handwritten musical score for system 89, measures 9-16. The notation continues with four staves, including notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 100, 70, 80, 60, 100, 70, 90). The key signature remains one flat.

89

Handwritten musical score for system 89, measures 17-24. The notation concludes the system with four staves, including notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 100, 70, 80, 60, 100, 70, 90). The key signature remains one flat.

5.

Handwritten musical score for system 5, measures 110-120. The system consists of four staves. The first staff has a treble clef and a key signature of one flat (B-flat). The second staff has a treble clef and a key signature of one flat. The third staff has a bass clef and a key signature of one flat. The fourth staff has a bass clef and a key signature of one flat. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Fingerings are indicated by numbers 1-5 above notes. Measure numbers 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, and 120 are written below the staves.

Handwritten musical score for system 6, measures 121-130. The system consists of four staves. The first staff has a treble clef and a key signature of one flat. The second staff has a treble clef and a key signature of one flat. The third staff has a bass clef and a key signature of one flat. The fourth staff has a bass clef and a key signature of one flat. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Fingerings are indicated by numbers 1-5 above notes. Measure numbers 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, and 130 are written below the staves.

Handwritten musical score for system 7, measures 131-140. The system consists of four staves. The first staff has a treble clef and a key signature of one flat. The second staff has a treble clef and a key signature of one flat. The third staff has a bass clef and a key signature of one flat. The fourth staff has a bass clef and a key signature of one flat. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and accidentals. Fingerings are indicated by numbers 1-5 above notes. Measure numbers 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, and 140 are written below the staves.

6.

Handwritten musical score for the first system, measures 1-8. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat, and various musical notations such as notes, rests, and fingerings. Fingering numbers (e.g., 70, 100, 90, 80, 100, 90, 70, 60, 5) are written below the notes.

Handwritten musical score for the second system, measures 9-16. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat, and various musical notations such as notes, rests, and fingerings. Fingering numbers (e.g., 120, 100, 90, 110, 80, 100, 90, 110, 80) are present.

Handwritten musical score for the third system, measures 17-24. The notation includes treble and bass clefs, a key signature of one flat, and various musical notations such as notes, rests, and fingerings. Fingering numbers (e.g., 100, 70, 60, 90, 80, 70, 110, 60, 40, 80, 60, 90, 70, 60, 100, 80, 110, 80, 120, 90, 100, 80, 120, 90, 110) are present.

insp/eca/serviço de difusão de partituras

8.

The image displays a handwritten musical score for guitar, organized into three systems, each containing four staves. The notation is written in ink on aged, yellowed paper. The first system (top) begins with a treble clef and a key signature of one flat (B-flat). It features a series of eighth and sixteenth notes, often grouped with slurs and fingerings (1-5) indicated above the notes. The second system (middle) continues the melodic line, incorporating some rests and maintaining the same notation style. The third system (bottom) concludes the piece with a final cadence. The paper shows signs of age, including slight discoloration and faint smudges. The overall layout is clean, with clear notation and consistent handwriting throughout.

9.

Handwritten musical score for guitar, numbered 10. The score is written on three systems of three staves each. It features various musical notations including treble and bass clefs, key signatures (one flat), time signatures (3/4 and 6/8), and numerous numerical figures (e.g., 100, 60, 70, 90, 80) written below the notes, possibly indicating fret positions or fingerings. The notation includes eighth, sixteenth, and thirty-second notes, as well as rests and accidentals. The score is divided into measures by vertical bar lines.

100 60 100 70 90 80 70 90 80 60 100 70 90 80 70 90 80

70 100 80 100 110 80 70 110 80 100 90 90 90 110 80 70 100

110 80 70 120 90 70 120 90 80 110 70 120 90 110 70 120 80

90 110 70 100 80 100 90 110 70 100 80 70 100 80 70 100 80

100 120 90 80 120 90 110 110 100 120 90 80 100 120 90 110

60 90 70 80 90 70 60 90 70 80 50 50 50 90 70 80 60

90 50 80 60 70

100 90 60 80 70 110 100 90 60 80 70

insp/eca/servico de difusao de partituras

11.

Handwritten musical score for three staves (treble, alto, and bass clefs). The music is written in a key with one flat (B-flat) and includes various musical notations such as notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 10, 110, 120). The score is labeled with a treble clef and a key signature of one flat.

Handwritten musical score for three staves (treble, alto, and bass clefs). The music is written in a key with one flat (B-flat) and includes various musical notations such as notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 10, 110, 120). The score is labeled with a treble clef and a key signature of one flat.

Handwritten musical score for three staves (treble, alto, and bass clefs). The music is written in a key with one flat (B-flat) and includes various musical notations such as notes, rests, and fingerings (e.g., 5, 10, 110, 120). The score is labeled with a treble clef and a key signature of one flat.

DA CAPO - ♩ = 217

NA REPETIÇÃO EXECUTAR OS RITORNELLI
DUPLAS COMO SIMPLES

IN THE REPETITION DOUBLE RITORNELLI
BECOME SIMPLE

ANEXO 2

ESTAÇÃO PARAÍSO
Rodolfo Coelho de Souza
(1994)

I - Estação Paraíso

Rodolfo Coelho de Souza

$\text{♩} = 176$

Flute *mp*

Oboe *mp*

Clarinet in Bb *mp*

Bassoon *mp*

Keyboard *mp*
simile

Violin *mp*

Viola *mp*

Cello *mp*

A

Fl. *f* *mp*

Ob. *f* *mp*

Bb Cl. *mp* *f* *mp*

Bbn. *mp* *f* *mp*

Keyb. *mp*
simile

Vln. *f* *mp*

Vla. *f* *mp*

Vc. *f* *mp*

B

Fl. *mp* *f* *mp*

Ob. *mp* *f* *mp*

B♭ Cl. *f* *mf*

Bsn. *f* *mf*

Keyb. *mf*

Vln. *f* *mf*

Vla. *f* *mf*

Vc. *f* *mp*

Section B consists of 8 measures. The woodwinds (Flute, Oboe, B♭ Clarinet, Bassoon) and strings (Violins, Violas, Cellos) have melodic lines, while the keyboard provides a rhythmic accompaniment. Dynamics range from *f* (forte) to *mp* (mezzo-piano).

C

Fl. *f* *mf* *mp*

Ob. *f* *mp*

B♭ Cl. *mf*

Bsn. *mp*

Keyb. *f* *mf*

Vln. *mp* *f* *mp*

Vla. *mp* *f* *mp*

Vc. *f* *mf*

Section C consists of 8 measures. The woodwinds and strings continue their melodic development, with the keyboard providing a steady accompaniment. Dynamics include *f*, *mf*, and *mp*.

FL. **D**

Ob.

B♭-CL.

Bsn.

Keyb.

Vln.

Vla.

Vc.

f

f

f

f

f

mp

mp

mp

FL. **E**

Ob.

B♭-CL.

Bsn.

Keyb.

Vln.

Vla.

Vc.

mp

f

mp

mp

f

mp

mp

mp

mp

mp

FL. **F**

Ob.

B♭ Cl.

Hrn.

Keyb.

Vln.

Vla.

Vc.

Measures 1-8 of section F. The Flute part begins with a melodic line marked *f*. The Oboe and Horn parts have rests. The B♭ Clarinet and Keyboard parts provide harmonic support. The Violin, Viola, and Cello parts enter in measure 3. Dynamics include *f*, *mp*, and *mf*.

FL. **G**

Ob.

B♭ Cl.

Hrn.

Keyb.

Vln.

Vla.

Vc.

Measures 9-16 of section G. The Flute part has a melodic line marked *mf*. The Oboe and Horn parts have rests. The B♭ Clarinet and Keyboard parts provide harmonic support. The Violin, Viola, and Cello parts enter in measure 9. Dynamics include *f*, *mf*, and *mp*.

Fl. **H** *mf*

Ob. *f* *mp*

B♭ Cl. *mp* *f* *mp* *f*

Bsn. *f* *mf*

Keyb. *f* *mf* *f*

Vln. *f* *mf* *f*

Vla. *mp* *f* *mf* *f*

Vc. *f* *mf* *f*

Fl. **I** *mp* *mf* *mp*

Ob. *mp* *mf* *mp*

B♭ Cl. *mp*

Bsn. *mp*

Keyb. *mp* *mf* *mp* *p*

Vln. *mp* *mf* *mp*

Vla. *mp* *mf* *mp*

Vc. *mp* *mf* *mp*

ritar.

molto ritar.

ANEXO 3**CD**

CD contendo as composições:

- 1 **Bach, J. S.** – Invenção no. 1 a duas vozes em Dó M.
- 2 **Bach, J. S.** – Fuga XXI – SibM – BWV 866
- 3 **Ringo Starr** – Octopus's Garden
- 4 **Jacob do Bandolim** – Migalhas de Amor
- 5 **Pixinguinha** – Naquele Tempo
- 6 **Beethoven, L. V.** – Nona Sinfonia – trecho do 2º. Movimento:
Scherzo: Molto Vivace – Presto
- 7 **Beethoven, L. V.** – Nona Sinfonia – 2º. Movimento:
Scherzo: Molto Vivace – Presto
- 8 **Coelho de Souza, R.** – Estação Paraíso
- 9 **Coelho de Souza, R.** – Metrópolis
- 10 **Bartók, B.** – Da Ilha de Bali
- 11 **Almeida Prado** - Mudança de Compassos
- 12 **Almeida Prado** Variações de acentos em 12/8
- 13 **Almeida Prado** Pulsação fixa de 3 colcheias com articulações de 3 semicolcheias
- 14 **Almeida Prado** Pulsação fixa de 4 colcheias e articulações de 4 e 3 semicolcheias
- 15 **Almeida Prado** Pulsação fixa de 5 colcheias com articulações de 5 semicolcheias
- 16 **Almeida Prado** Pulsação fixa de 7 colcheias com articulações de 7 semicolcheias