UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

MAIRA MENDIAS LAURO

Percepção – Construção – Representação – Concepção
Os quatro processos do ensino da Geometria:
uma proposta de articulação

São Paulo

2007

MAIRA MENDIAS LAURO

Percepção – Construção – Representação – Concepção
Os quatro processos do ensino da Geometria:
uma proposta de articulação

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Educação.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Bonomi Barufi

São Paulo
2007

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo
Serviço de Biblioteca e Documentação da
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.32 (81)
L387p

Lauro, Maira Mendias

Percepção – Construção – Representação – Concepção: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação / Maira Mendias Lauro; orientadora Maria Cristina Bonomi Barufi. -- São Paulo, SP: s.n., 2007.

396 p.; il. + anexos

Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Geometria (Estudo e ensino; Brasil). 2. Currículo de ensino fundamental (Brasil). 3. Livros Didáticos (análise). I. Barufi, Maria Cristina Bonomi, orient.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Maira Mendias Lauro

Percepção – Construção – Representação – Concepção

Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Educação.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Aprovada em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

A meus pais, Sandra e Mauro, minhas irmãs Lizandra e Elaine, meus cunhados Fabiano e Marcus e meu sobrinho Breno, com amor, admiração e gratidão pela compreensão, carinho, presença e incansável apoio em todas as horas.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e pela vocação na apaixonante carreira docente.

À Professora Doutora Maria Cristina Bonomi Barufi, que muito mais que uma orientadora, dedicou atenção e apoio durante os processos de definição e elaboração deste trabalho, não me deixando desanimar a fim de alcançar os meus objetivos.

Aos Professores Doutores Vincenzo Bongiovanni, Antonio Carlos Brolezzi e Nílson José Machado pelas sugestões, comentários e críticas que muito contribuíram para a conclusão deste estudo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da FE-USP, por todo o incentivo e ajuda dados durante o curso.

À minha família e amigos pela paciência, compreensão e incentivo.

Aos milhares de alunos e ex-alunos, com os quais muito tenho aprendido.

Às bibliotecas do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (CAEM), do Instituto de Matemática e Estatística, da Faculdade de Educação e da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo pela concessão dos livros didáticos que forneceram informações valiosas para a realização deste estudo.

A todos que direta ou indiretamente tornaram possível a realização desta pesquisa.

“Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem do mundo, com o mundo e com os outros”.

Paulo Freire

RESUMO

LAURO, M.M. **Percepção – Construção – Representação – Concepção: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação.** 2007. 396 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

Nas aulas de Geometria, de modo geral, reconhece-se uma polarização entre atividades perceptivas, manipulativas – que são propostas principalmente nas primeiras séries da escolarização – e a sistematização conceitual, a teorização, sendo ela formal ou informal, nas séries seguintes. Em outras palavras, não há articulação entre os processos que dizem respeito à percepção com aqueles teóricos que se referem à concepção. Esse caminho geralmente faz com que os alunos não compreendam a Geometria, não construam um conhecimento significativo. Neste trabalho, consideramos que, em todos os níveis do ensino, é fundamental a articulação entre a percepção e a concepção e que, juntamente com elas, duas outras dimensões da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico – a construção e a representação – são essenciais. A primeira refere-se à elaboração de materiais em sentido físico e a segunda, à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos. Partindo do referencial teórico estabelecido, foi feito primeiramente, um estudo histórico a respeito do ensino da Geometria, particularmente no período que vai da 5ª até a 8ª série do Ensino Fundamental, ou seja, investigou-se como as principais Propostas Curriculares instituídas no sistema nacional de ensino, abordaram a articulação entre os quatro processos fundamentais na construção do conhecimento geométrico. Amparando-se nesse estudo histórico, observou-se a existência ou não de equilíbrio e trânsito entre os quatro aspectos, no caso específico de alguns livros didáticos que foram usados por alunos e professores desde o século XIX, mais especificamente desde a criação do Colégio Pedro II, no ano de 1837, até os dias atuais. Os resultados revelaram que, em todas as épocas, os autores dos livros didáticos sempre abordaram a representação no ensino da Geometria. Já com relação à construção não ocorreu o mesmo, ela foi estimulada apenas em alguns dos livros selecionados. Por fim, concluímos que, alguns dos livros didáticos analisados, são compatíveis com o referencial teórico estabelecido. Isso significa que, mesmo considerando livros mais antigos, sempre existiram autores que se preocuparam em articular os quatro processos fundamentais no ensino da Geometria. Finalizando, propomos um conjunto de atividades com o tema “Razão Áurea”, para serem aplicadas em sala de aula. Essas atividades foram elaboradas de forma tal a respeitar os atuais PCN’s e estabelecendo a articulação entre a percepção, a construção, a representação e a concepção.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Propostas Curriculares. Livros Didáticos. Proposta de ação pedagógica.

ABSTRACT

LAURO, M.M. **Perception – Construction – Representation – Conception: The four processes of the Geometry teaching: a articulation proposal.** 2007. 396 p. Dissertation (Mastership) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

In Geometry classes, in general way, are recognized a polarization between perceptive activities, manipulative – that are mainly propose in the firsts steps of education – and a conceptual systematization, a theorization, being formal or informal, in the following grades. In other words, there is no articulation between the processes that concern perception with those theoretical ones who concern conception. Generally these ways do that student do not understand the Geometry, do not build a concrete knowledge. In this work, considering that, in all levels of education, is fundamental the articulation between the perception and the conception and, together with then, two others dimensions of the dynamics constructions processes of the geometric knowledge – construction and representation – are essentials. The first one is related to elaboration of materials in physical way and the second one, to reproduction, by drawing, of perceived or constructed objects. Starting with theoretical referential established, first was done, a historical study about the Geometry teaching, particularly in the period around fifth grade to eighth grade of the Ensino Fundamental, in other words, investigated as the mains Curricular Proposals instituted in the national's education system, approaching the articulation between the four fundamental process necessary to construct the geometric knowledge. Supporting in these historical study, become notice the existence or not of a equilibrium and transit between the four aspects, in the specific case of some didactics books who was used by students and teachers since the XIX century, more specifically since the creation of the Colégio Pedro II, in the year 1837, until current day. The result shows that, in all times, authors of didactic books always approached the representation in the geometry teaching. With the construction doesn't occur the same fate, it was stimulated only in a few selected books. Finally, we conclude that, in a few didactic books that was investigated, are harmonious with the theoretical referential established. This means that, just considering older books, always existed authors who was preoccupied with an articulation between the four basics processes in Geometry teaching. Finishing, we propose a set of activities with the subject "Golden Ratio", to be applied in classroom. These activities were elaborated respecting the PCN's (National Curricular Parameters) and establishing the articulation between perception, construction, representation and conception.

Key-words: Geometry Teaching. Curricular Proposals. Didactic Books. Pedagogical Action Proposal.

SUMÁRIO

Introdução

Objeto e problema da pesquisa	12
Objetivos	15
Metodologia	16

Capítulo 1: Fundamentação Teórica

1.1. Introdução	17
1.2. Fundamentação Teórica	19

Capítulo 2: O ensino de Matemática no Brasil: o tratamento dado à Geometria

2.1. Introdução	37
2.2. Panorama histórico do ensino de Matemática: a Geometria	39
2.3. As propostas curriculares de Matemática para a 5ª até a 8ª série, ocorridas no Brasil a partir do século XIX – o tratamento dado à Geometria	45
2.3.1. Primeiro período: 1827 – 1930	46
2.3.1.1. Ponto de partida: Criação dos cursos jurídicos – 1827	46
2.3.1.2. Reforma Paulino de Souza – 1870	50
2.3.1.3. Reforma Leônicio de Carvalho – 1878	50
2.3.1.4. Reforma Homem de Mello – 1881	51
2.3.1.5. Reforma Benjamin Constant – 1890	52
2.3.1.6. Reforma Eptácio Pessoa – 1901	55
2.3.1.7. Reforma Rivadávia Correia – 1911	56
2.3.1.8. Reforma Carlos Maximiliano – 1915	57
2.3.1.9. Reforma Rocha Vaz – 1925	58
2.3.2. Segundo período: 1930 – 1960	60
2.3.2.1. Reforma Francisco Campos – 1931	60

2.3.2.2. Reforma Gustavo Capanema – 1942	64
2.3.3. Terceiro período: Matemática Moderna (1960 – 1980)	65
2.3.3.1. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 1961	65
2.3.3.2. Guias Curriculares para o ensino de 1º grau – 1975	68
2.3.4. Quarto período: Pós Matemática Moderna (1980 – 2006)	74
2.3.4.1. Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau – 1986	74
2.3.4.2. Movimento de Reorientação Curricular – 1991	78
2.3.4.3. A transição para o século XXI: o tratamento dado à Geometria na Matemática de hoje	80
2.3.4.3.1. Parâmetros Curriculares Nacionais – 1998	82

Capítulo 3: Análise de livros didáticos

3.1. Introdução	96
3.2. Os critérios de análise	97
3.3. Os livros didáticos	98
3.3.1. Primeiro período: 1827 – 1930	100
3.3.1.1. Sylvestre François Lacroix	100
3.3.1.2. Cristiano Benedito Ottoni	108
3.3.1.3. Thimotheo Pereira	116
3.3.1.4. Alexis Claude Clairaut e Francisco Cabrita	125
3.3.1.4.1. Alexis Claude Clairaut	127
3.3.1.4.2. Francisco Cabrita	135
3.3.1.5. F.I.C. e F.T.D.	139
3.3.1.5.1. F.I.C.	140
3.3.1.5.2. F.T.D.	154
3.3.2. Segundo Período: 1930 – 1960	163
3.3.2.1. Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza	163
3.3.2.2. Osvaldo Sangiorgi	201
3.3.3. Terceiro período: Matemática Moderna (1960 – 1980)	230
3.3.3.1. Osvaldo Sangiorgi	230

3.3.4. Quarto período: Pós Matemática Moderna (1980 – 2006)	266
3.3.4.1. José Ruy Giovanni e Eduardo Parente	266
3.3.4.2. Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis	290
3.4. Visualização dos resultados da pesquisa	322

Capítulo 4: Uma proposta de articulação entre as quatro faces do tetraedro no ensino da razão áurea

4.1. Introdução	331
4.2. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, arte e arquitetura	332

Considerações Finais e Perspectivas	356
--	------------

Referências Bibliográficas	361
---	------------

Anexos

ANEXO A – O Tangram como um recurso para o ensino da Geometria	371
ANEXO B – Quadros-síntese do Guia Curricular para o ensino de 1º grau para a 5ª a 8ª séries	375
ANEXO C – Quadros-síntese da Proposta Curricular para o ensino de Matemática de 1º grau para a 5ª a 8ª séries	383
ANEXO D – Homotetia	386
ANEXO E – Justificativa da construção do pentágono regular	391
ANEXO F – Passos e justificativa da seqüência de dobraduras utilizada para a construção de um ângulo central de 36º	394

INTRODUÇÃO

Objeto e problema da pesquisa

Este trabalho de pesquisa é um estudo a respeito do ensino de Geometria, particularmente no período que vai da 5ª até a 8ª série do Ensino Fundamental¹.

O nosso interesse pelo ensino de Geometria, resulta da experiência vivenciada nos cursos de aperfeiçoamento ministrados para professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio da rede estadual, bem como nas disciplinas específicas de Geometria e Desenho Geométrico, que são ministradas para os alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática em um Centro Universitário da rede particular do estado de São Paulo. Em ambos os casos, pudemos observar grandes problemas e, a cada ano, os alunos vêm apresentando maiores dificuldades no que diz respeito aos conceitos geométricos elementares.

Nos cursos para os docentes da rede estadual, tivemos contato com professores de diversos municípios do estado de São Paulo. Em muitos casos foi possível constatar a supervalorização de certos aspectos em detrimento de outros que parecem ser igualmente importantes. Bem poucos dos participantes incluíam Geometria entre os temas a serem abordados em sala de aula. E, ao sugerirmos o estudo da Geometria com o uso da régua e do compasso – Desenho Geométrico – a situação se mostrou mais complicada.

¹ Está prevista na Lei nº. 9.394/96, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB – e em uma das metas do Ensino Fundamental no Plano Nacional de Educação – PNE – a ampliação do Ensino Fundamental para nove anos, fato que se tornou objetivo da educação nacional pela Lei nº. 10.172, de 9 de janeiro de 2001, que aprovou o PNE. Essa alteração vem sendo discutida pela Secretaria de Educação Básica – SEB/MEC – com secretarias municipais e estaduais de educação desde 2003. A ampliação para mais um ano de estudo no Ensino Fundamental tem o objetivo de produzir um salto na qualidade da educação: inclusão de todas as crianças de seis anos, menor vulnerabilidade a situações de risco, permanência na escola, sucesso no aprendizado e aumento da escolaridade dos alunos. Como ponto de partida, para garantir uma nomenclatura comum às múltiplas possibilidades de organização desse nível de ensino (séries, ciclos, outros – conforme art. 23 da LDB nº. 9.394/96), sugere-se que o Ensino Fundamental seja assim mencionado: Anos Iniciais – do 1º ao 5º ano e Anos Finais – do 6º ao 9º ano. Foi elaborado o documento Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Gerais pela SEB/MEC, que é referência nacional para as questões pedagógicas, administrativas e de avaliação no que se refere à inclusão das crianças de seis anos no Ensino Fundamental. O movimento para ampliação já começou em muitos estados e municípios e, de acordo com a Lei nº. 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, os Municípios, os Estados, o Distrito Federal e as escolas particulares, terão prazo até 2010 para implementar a obrigatoriedade de 9 anos para o Ensino Fundamental. (MEC, 2006)

Temos a lamentar o fato de que o ensino de Desenho Geométrico vem sendo deixado de lado enquanto, nas aulas de Geometria, maior ênfase vem sendo dada à observação e à manipulação de objetos materiais nas primeiras quatro séries da escolarização e à sistematização conceitual sendo ela formal ou informal, nas últimas séries do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, bem como no Ensino Superior. E, sendo a Geometria trabalhada dessa forma, quase sempre os estudantes recorrem à memorização para enfrentarem as dificuldades lógicas apresentadas pelo método axiomático-dedutivo. Não há articulação entre os processos que dizem respeito à percepção com aqueles teóricos que se referem à concepção e, menos ainda, entre esses e os processos de construção de materiais que possam ser manipulados e aqueles de representação por meio de desenhos de objetos percebidos ou construídos.

A maioria dos professores parece não estabelecer nenhuma articulação entre os processos citados. Sentem-se inseguros para ensinar Geometria, pois não se sentem preparados. Dessa forma, os alunos chegam ao curso superior com pouquíssimas noções estabelecidas, sendo que muitos nunca tiveram contato com os instrumentos de desenho, pois a Geometria que lhes foi apresentada não articulou os quatro aspectos citados.

Acaba virando um círculo vicioso e o Desenho Geométrico vai gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. Nos últimos anos, muito se tem falado sobre o ensino de Geometria e o despreparo dos professores, sem, no entanto, questionar as razões desse despreparo.

Dessas constatações preliminares, ainda que empíricas, obtidas a partir de nossa atuação como docente no Ensino Superior e nos cursos de aperfeiçoamento para professores, efetuamos algumas leituras iniciais de trabalhos sobre o assunto, surgindo então a motivação para realizar uma pesquisa científica sobre o ensino da Geometria no Ensino Fundamental II, na tentativa de encontrar respostas para algumas de nossas inquietações.

Com o objetivo de situar o leitor no desenvolvimento deste trabalho, descremos, resumidamente, os pontos principais de cada capítulo, para que seja possível acompanhar o processo de evolução deste estudo.

No Capítulo 1, intitulado “Fundamentação Teórica”, apresentamos as pesquisas que fundamentaram e motivaram a elaboração deste trabalho. A fonte principal norteadora é a

dinâmica da construção do conhecimento geométrico (MACHADO, 1990, 2002) que garante que, nesse processo, em vez de uma polarização percepção/concepção, é fundamental a caracterização de quatro aspectos: a percepção, a construção, a representação e a concepção. Esses aspectos, metaforicamente, constituem as faces de um tetraedro com elementos comuns e articulados onde podem ser apreendidos não apenas o significado e as funções do ensino de Geometria, como também alguns elementos básicos na dinâmica dos processos cognitivos de uma maneira geral.

O Capítulo 2, cujo título é “O ensino de Matemática no Brasil – o tratamento dado à Geometria”, discorre sobre a história do ensino de Matemática analisando principalmente a trajetória percorrida pelo ensino da Geometria no decorrer das principais reformas curriculares instituídas no sistema nacional de ensino.

No Capítulo 3, intitulado “Análise de livros didáticos”, analisamos como algumas obras didáticas de Matemática, constantemente referenciadas no Ensino Fundamental II, desde o século XIX até os dias atuais, tratam a Geometria. Examinamos a maneira pela qual os autores apresentam e desenvolvem a Geometria no decorrer das quatro séries, se há equilíbrio e trânsito entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no seu ensino. Escolhemos livros significativos que foram adotados em diferentes momentos históricos brasileiros, editados de acordo com as principais reformas curriculares então vigentes.

No Capítulo 4, intitulado “Uma proposta de articulação entre as quatro faces do tetraedro no ensino da razão áurea” dedicamo-nos à elaboração de atividades respeitando os atuais PCN’s e onde estabelecemos equilíbrio e trânsito entre os quatro processos fundamentais no ensino da Geometria. Escolhemos o tema “razão áurea” e propomos atividades para serem aplicadas na 8ª série, por envolverem conteúdos que atualmente se encontram nos livros didáticos desse nível; no entanto, adaptações podem ser feitas para propor essas atividades em outras séries.

Por fim, apresentamos as Considerações Finais deste estudo.

Objetivos

Neste trabalho de investigação, vamos admitir como hipóteses de trabalho que, no ensino da Geometria, a polarização percepção/concepção é insatisfatória para a compreensão da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico em todos os níveis do ensino, mas, particularmente, ater-nos-emos ao período que vai da 5^a até a 8^a série do Ensino Fundamental.

Admitimos também, que o Desenho Geométrico – representação – bem como a elaboração de materiais de ensino em sentido físico – construção – são aspectos importantes no processo de construção do conhecimento geométrico e que, em razão da polarização acima citada, essas ênfases foram sendo excluídas do processo de ensino/aprendizagem da Geometria.

Nesse sentido, constatamos a importância de se estudar uma Geometria onde coexistam os quatro aspectos necessários ao processo de construção do conhecimento geométrico – a percepção, a construção, a representação e a concepção – esclarecendo que a Geometria não pode ser tratada de forma “esquartejada”, sendo privilegiados os extremos em detrimento dos meios.

Pretendemos assim, encontrar respostas pelo menos parciais para as perguntas:

Como ao longo da história do ensino da Matemática, as sucessivas propostas curriculares abordaram a articulação entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria?

Considerando os livros didáticos historicamente relevantes e que tiveram um papel importante de referência na atuação do professor em sala de aula, como os mesmos estabelecem equilíbrio e trânsito entre os quatro aspectos citados de construção do conhecimento geométrico?

Será possível em Geometria, propor atividades que estejam de acordo com a proposta curricular vigente, ou seja, os PCN's e que possibilitem o trânsito natural dos quatro processos citados?

Metodologia

Primeiramente, faremos um levantamento bibliográfico a fim de estabelecer um referencial teórico para embasar nosso trabalho.

Pesquisaremos ao longo da história do ensino da Matemática com ênfase no ensino de Geometria, com o intuito de investigar nas principais propostas curriculares o quanto o tetraedro metafórico é respeitado.

Analisaremos também, um conjunto de livros didáticos de 5^a a 8^a séries, a fim de verificar como a Geometria é tratada; se há autores que propõem o equilíbrio e o trânsito entre a percepção, a construção, a representação e a concepção em seus textos, já que partimos do princípio de que os livros didáticos “constituem modelos da abordagem do conteúdo que é realizada na sala de aula. Entendemos que o livro didático, escolhido pelo professor para suporte ou apoio ao seu trabalho, constitui um forte indício do tratamento que será dado ao curso” (BARUFI, 1999, p. 07). Tencionamos analisar alguns dos principais livros didáticos brasileiros utilizados por alunos e professores desde o século XIX, mais especificamente desde 1837, quando foi criado o Colégio Pedro II – instituição emblemática de ensino secundário no Brasil – até os dias atuais. O intuito é fazer uma análise sobre as modificações que foram ocorrendo com o ensino da Geometria no decorrer do tempo.

Finalmente faremos uma proposta de atividades em Geometria Plana, elaboradas de acordo com o quadro teórico proposto e respeitando os atuais PCN's, a fim de ilustrar a possibilidade de articulação entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. Introdução

No mundo em que vivemos os objetos do mundo físico possuem alguma forma, algum tamanho ou ocupam alguma posição no espaço. Assim, as formas ou padrões geométricos constituem os modelos mais elementares para muitos tipos de fenômenos da nossa vida cotidiana como, por exemplo, medir (as dimensões de um apartamento), examinar formas (a forma de um favo de mel, das moléculas de um cristal, das células, de algumas conchas do mar ou das pétalas de uma flor), comparar tamanhos (a água deste copo cabe naquela xícara?), analisar posições (a rua A é perpendicular ou paralela à rua B?), representar e construir (a planta e a maquete de uma casa). A Geometria é a ferramenta que o ser humano criou para estudar essas dentre outras questões.

Assim, podemos dizer que o ensino de Geometria, de modo geral, é importante para a criação de hábitos de ver e compreender as formas e os contornos dos objetos, o que estimula a imaginação e a intuição e desenvolve o raciocínio e a compreensão do espaço.

O estudo da Geometria auxilia a organizar o pensamento por meio do reconhecimento e da análise das propriedades características de modelos geométricos que representam os objetos do mundo a nossa volta. Todavia, apesar dessa intensa relação entre a Geometria e o mundo a nossa volta, pouca atenção tem sido dada a ela nas aulas de Matemática. Mesmo quando é estudada, a ênfase é colocada muitas vezes somente nas relações métricas de cálculo de medidas de comprimento de lados ou de medidas de áreas e de volumes; nas atividades perceptivas, manipulativas – nas quatro séries iniciais do Ensino Fundamental – e na sistematização conceitual – nas séries seguintes. (KALEFF, 1997)

Nos últimos anos, educadores/pesquisadores vêm investigando o ensino da Geometria/Desenho Geométrico com o uso do computador para levar a uma aprendizagem significativa dessas disciplinas².

É fato que a utilização do computador em sala de aula como uma ferramenta auxiliar no processo de ensino/aprendizagem facilita e melhora a execução de trabalhos. O computador é um instrumento que, sem dúvida, constrói rapidamente e com perfeição possibilitando o estabelecimento de conjecturas, despertando a criatividade, estimulando a curiosidade em conhecer, em descobrir. A partir de um projeto pedagógico bem elaborado e com *softwares* bem selecionados, os computadores podem ser instrumentos muito valiosos para os professores.

Atualmente, existem alguns *softwares* que permitem construir todas as figuras da Geometria elementar que podem ser traçadas com a régua e o compasso: o *Geometer's Sketchpad*³ é um exemplo. Ele permite construir e explorar objetos geométricos interativamente, e, uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, constituindo-se numa ferramenta muito rica para a validação experimental de fatos geométricos: é a chamada *Geometria Dinâmica*.

Muitas escolas, porém, ainda não possuem computadores e quando há um laboratório de informática, faltam professores que se aventurem na sua utilização em aulas de Matemática.

Margarida Junqueira e Sérgio Valente⁴, comprometidos com o uso do computador para trabalhar a Geometria, afirmam que:

² No Brasil, particularmente, alguns resultados podem ser vistos nos trabalhos publicados em eventos científicos. Como exemplos podemos citar o VII e o VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), respectivamente realizados em julho de 2001, no Rio de Janeiro e em julho de 2004, em Pernambuco; e o VII EPEM (Encontro Paulista de Educação Matemática), realizado em junho de 2004, em São Paulo, onde foram apresentados muitos trabalhos nesse contexto.

³ O *software Geometer's Sketchpad* foi desenvolvido por Nicholas Jackiw em cooperação com a *National Science Foundation to Key Curriculum Press* e a *Visual Geometry Project of Swarthmore College*. Ele possui uma versão demonstrativa que pode ser obtida via *Internet*. Outro exemplo é o *Igeom*, um *software freeware* que foi desenvolvido pelo professor Leônidas de Oliveira Brandão do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Temos também o *Cabri Géomètre*, um *software* comercial de origem francesa muito utilizado em diversos países, inclusive no Brasil, entre outros.

⁴ Margarida Junqueira e Sérgio Valente são membros da Associação dos Professores de Matemática (APM) de Portugal. O trecho foi tirado de um trabalho que se intitula *Realização e exploração de construções geométricas dinâmicas: materiais*

A Geometria é uma fonte por excelência de problemas não rotineiros que podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos na época actual e no futuro. Há já fortes indícios de que os modernos ambientes computacionais, que permitem fazer construções de figuras geométricas e explorá-las de forma dinâmica, podem contribuir de forma decisiva para uma nova relação de professores e alunos com a Geometria. Mas, só por si, esses ambientes pouco fazem. Reconhece-se a necessidade de a sua utilização ser suportada por materiais, devidamente testados, que motivem e rentabilizem o trabalho na sala de aula. (GTG, 2006)

O enorme avanço da informática possibilita uma reavaliação do ensino de Geometria e de Desenho Geométrico que devem ser desenvolvidos em sala de aula. Porém, neste trabalho não nos ateremos a esse desenvolvimento tecnológico, pois consideramos que o computador já faz parte dos processos educativos de modo geral, além de que, de acordo com o referencial teórico que será proposto, consideramos que é possível propiciar a construção do conhecimento geométrico com o uso do computador que é uma ferramenta auxiliar no processo de ensino/aprendizagem, ajudando a levar a um aprendizado significativo da Geometria.

Dessa forma, objetivamos descrever os aspectos mais relevantes das teorias que embasarão este trabalho. Serão expostos os pressupostos teóricos que o professor Machado (1990, 2002) apresenta a respeito da dinâmica da construção do conhecimento geométrico, os quais representam o principal referencial teórico desta pesquisa.

1.2. Fundamentação Teórica

Nas aulas de Geometria nas primeiras séries da escolarização, de modo geral, as atividades propostas envolvem somente a percepção, ou seja, a observação e a manipulação de objetos materiais e a caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à

nossa volta por meio de atividades empíricas. Já nas últimas séries do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e também no Superior, as atividades relacionadas com a Geometria, são direcionadas à concepção, isto é, à sistematização, ao exercício da lógica, dos elementos conceituais, onde têm predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações. Ou seja, “é como se a Geometria fosse organizada segundo um vetor com origem nas atividades perceptivas e extremidade na sistematização formal”. (MACHADO, 2002, p.53)

Figura 1: Organização do ensino de Geometria

René Descartes, em seu Discurso do Método – século XVII – estabeleceu quatro regras para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências. No terceiro preceito do método, Descartes afirmou ser necessário

Conduzir meus pensamentos com ordem, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para pouco a pouco me elevar, como por degraus, até o conhecimento dos mais complexos; e supondo mesmo uma ordem, entre aqueles que não se precedem naturalmente uns aos outros. (DESCARTES, 2002, p.90)

Constatamos, antes de qualquer coisa, que a ordem à qual Descartes se refere, não é aquela que se encontra na natureza, isto é, nos objetos físicos, mas é uma suposta ordem na construção do conhecimento proposta em sala de aula. Trata-se de uma ordem racional, que nem sempre corresponde à ordem natural. É a ordem da dedução, pela qual se passa das coisas fáceis às mais difíceis.

Para Barufi (1999), “a filosofia cartesiana norteou por muito tempo, e, em alguns ambientes, talvez continue norteando, as concepções vigentes de conhecimento em geral, e especificamente do conhecimento matemático”. (p. 09)

Nesse contexto, no campo educacional especificamente o trabalho com a Geometria parece, muitas vezes, ser concebido segundo a rigidez do pensamento do filósofo francês. O ensino de Geometria é feito de maneira linear, obedecendo a uma ordem hierárquica, partindo do mais simples – percepção – que constitui um conjunto de pré-requisitos, em direção ao mais complexo – concepção. Assim, a cadeia é a imagem cartesiana do conhecimento.

Figura 2: Concepção cartesiana de conhecimento geométrico – a cadeia

O educador Imenes (1989), afirma que esse fato decorre da adoção da obra de Euclides – *Os Elementos* – como modelo didático que influenciou todas as épocas: nos tempos antigos, na Idade Média, no período moderno, até a atualidade; “os ‘Elementos’ de Euclides foram não apenas o livro da Geometria, mas o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser”. (p. 206).

E completa:

Na organização curricular tradicional, se o conteúdo A é pré-requisito lógico para B, no sentido euclidiano⁵ do termo, então A vem antes de B. Isso confere ao currículo uma estrutura linear. Nesse modelo, aprender matemática tem como imagem subir uma escada. Essa forma de organizar os conteúdos matemáticos não

⁵ O sentido euclidiano refere-se à formalização, ao modo de organizar o conhecimento matemático que tem como modelo os “Elementos”. Toma-se como ponto de partida certas noções – os termos primitivos – e determinadas proposições – os postulados e axiomas – que Euclides aceitou sem demonstração. A seguir, novos conceitos vão sendo definidos, a partir dos termos primitivos, e novas proposições, os teoremas, vão sendo formuladas e justificadas, com base nos postulados e nos teoremas já demonstrados. (IMENES, 1989, p. 204)

está só no papel em que são impressos os currículos e nos livros didáticos. Tenho observado que ela também se instalou nas nossas cabeças, nas cabeças dos professores de matemática. (p. 209)

A passagem da percepção para a concepção é feita de maneira abrupta: o estágio inicial parece estar voltado a uma certa infantilização, havendo, em seguida, um rompimento, buscando o conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e a teorização. Machado (2002) abaliza essa visão, pois para ele, “para a compreensão da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico, a polarização entre as atividades perceptivas e a sistematização conceitual parece claramente insatisfatória”. (p. 52)

Ainda, para o mesmo autor, é essencial que exista uma articulação entre a percepção e a concepção, estabelecendo caminhos convenientes que permitam um trânsito natural entre ambas, com dupla mão de direção. (MACHADO, 2002, p. 53)

Assim, entendemos que a limitação a atividades de manipulação de objetos materiais mesmo nas séries iniciais do ensino é insuficiente; e, trabalhar apenas com o conceitual, sem relações com objetos materiais, em todos os níveis do ensino, seja talvez, ainda pior. É necessário haver articulação entre a percepção e a concepção.

Figura 3: Organização desejada do ensino de Geometria

O filósofo chinês Chang Tung-Sun (2000), estabelece uma distinção entre os diversos tipos de conhecimento e afirma que, de modo geral, existem dois tipos de conhecimento: o perceptivo – aquilo que pode ser tocado e percebido diretamente – e o conceitual – o que não pode ser verificado pelos sentidos. No entanto, para ele:

Pode-se observar que o conhecimento perceptivo não pode estar fora do conceitual, nem se pode separar o conceitual do perceptivo. Na realidade, todo conhecimento conceitual contém elementos perceptivos e vice-versa. A

diferenciação entre os dois visa sempre às simples conveniências da análise. Eles não existem isoladamente. (p. 170)

O problema torna-se maior ao constatarmos que, no processo de construção do conhecimento geométrico, outras duas dimensões da dinâmica do processo cognitivo no caso da Geometria – a construção e a representação – para as quais o Desenho Geométrico bem como a Geometria Projetiva e a Geometria Descritiva são fundamentais, praticamente foram banidas da maioria das escolas e dos livros didáticos.

Desde os tempos de *Os Elementos* de Euclides – 300 a.C. – até por volta da década de setenta do século passado, o Desenho Geométrico era apresentado integradamente com a Geometria. Embora a Geometria de Euclides esteja baseada em demonstrações, com nenhuma ligação com as experiências sensíveis, com as aplicações práticas, é também certo que ela se baseia em construções geométricas obtidas com o uso da régua e do compasso. Para os gregos não importava se as construções eram obtidas apenas com o compasso, ou apenas com a régua, ou com ambos os instrumentos. Na realidade, não havia para eles uma diferenciação entre Desenho Geométrico e Geometria. O Desenho Geométrico aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria. (ALVES, 1991)

Essa situação beneficiava ambas as disciplinas, pois enquanto a régua e o compasso davam certo ar de “concreto” aos teoremas da Geometria, tornando seu ensino mais palpável e interessante, esta por sua vez, dizia os “porquês” das construções geométricas efetuadas. Entretanto, nas últimas décadas, a interação Desenho Geométrico – Geometria foi quebrada, transformando a maioria dos cursos de Desenho, quando existe uma disciplina desse tipo, em meros receituários de algumas construções. (ALVES, 1991)

Acreditamos que o uso da régua e do compasso na resolução de problemas geométricos desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo, a coordenação motora, além do sentido de organização, limpeza, ordem, capricho, precisão, conservação. Independente da área a que possa se dedicar como profissional, o estudante terá elementos fundamentais na sua formação. Com efeito:

O Desenho é uma disciplina que tem uma importância singular dentro da formação do estudante, pois trabalha intuitiva e racionalmente a inteligência espacial (mesmo quando resolve problemas planos). Além da sua aplicação na Arquitetura,

Engenharia, Desenho Industrial, Publicidade, Computação Gráfica, Artes, Esportes etc. (MANDARINO, s.d., 15)

Dessa forma, a nosso ver, a Geometria pode, e deve ser iniciada por meio de atividades empíricas, visando a percepção, mas tais atividades estão diretamente relacionadas com a construção de objetos em sentido físico, bem como com a representação de objetos por meio de desenhos, onde suas propriedades e características possam ser concretizadas. A sistematização conceitual torna-se possível nas ações de representação e construção.

Machado (2002) destaca que:

Ocorre, no entanto, que essas atividades intermediárias, sobretudo as correspondentes à representação, não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos, sendo, muitas vezes, concebidas tendo em vista primordialmente alcançar-se, o mais rapidamente possível, a organização conceitual. (p. 54)

E completa:

[...] mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência percepções já sentidas ou construções anteriormente realizadas, ainda que se contraponham a seus pressupostos ou transcendam seus limites. (p.55)

Dessa forma, no processo de construção do conhecimento geométrico, não basta o estabelecimento de articulações entre atividades perceptivas, manipulativas e concepções; é fundamental a existência de ênfases em quatro dimensões desse tipo de conhecimento: a percepção, a construção, a representação e a concepção. De fato:

Muitas vezes realizamos com nossos alunos atividades que são encaradas como simples divertimentos tais como quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens etc, aparentemente mais indicadas às aulas de Artes do que as de Matemática. Porém, tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, mas têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo. (KALEFF, 1994, p. 21)

Figura 4: Organização desejada do ensino de Geometria

Consideramos, portanto que, na dinâmica da construção do conhecimento geométrico, em vez de uma polarização percepção/concepção, é fundamental a caracterização de quatro, por assim dizer, processos: a percepção, a construção, a representação e a concepção que, metaforicamente, constituem as faces de um tetraedro com elementos comuns e articulados nos quais podem ser apreendidos não apenas o significado e as funções do ensino de Geometria, como também alguns elementos básicos na dinâmica dos processos cognitivos de uma maneira geral. (MACHADO, 2002, p. 54)

Figura 5: O tetraedro: percepção/representação/construção/concepção

A representação do processo de ensino/aprendizagem em Geometria por meio de um tetraedro parece ser interessante e satisfatória, por não privilegiar nenhuma de suas faces, mas distribuindo igualmente a importância, obtendo um sólido geométrico que se apóia sobre qualquer uma delas.

A metáfora do tetraedro é tão frutífera justamente devido à possibilidade de haver equilíbrio quando o sólido está apoiado em qualquer uma de suas faces. Assim também o conhecimento geométrico encontra-se equilibrado quando a ênfase é colocada em qualquer uma das suas características principais: nesse momento essa ênfase constitui o apoio. Entretanto, assim como o sólido pode ser apoiado em qualquer outra de suas faces, o apoio, no caso da Geometria, pode estar situado em qualquer outro dos processos.

Em Machado (2002), encontramos que:

[...] não obstante o fato de a iniciação em geometria realizar-se por meio da percepção de formas e de suas propriedades características, através de atividades sensoriais, como a observação e a manipulação de materiais, desde muito cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a construção de objetos em sentido físico, através de massas, varetas ou papéis, por exemplo, bem como com a representação de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas. (p. 54)

Para cada uma das quatro faces do tetraedro mencionado é possível atribuir significados a fim de viabilizar melhor compreensão. A separação é puramente formal, pois cada face do tetraedro se relaciona com as demais, bem como cada um dos processos geométricos se relaciona com os outros.

1. A percepção

A percepção refere-se à observação e à manipulação de objetos materiais – atividades sensoriais – e à caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A percepção ocorre por meio de atividades empíricas. Esse processo precisa ser desenvolvido desde as séries iniciais do ensino e relaciona-se diretamente com os demais.

2. A construção

A construção refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção pode ocorrer com a utilização de massas de modelar, sabão em pedra, madeira, acrílico, papel, varetas, por exemplo. Em certo sentido, a construção reforça a percepção, bem como essa última estimula a construção.

3. A representação

A representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos. Nesse sentido, fazemos referência ao Desenho Geométrico, bem como à Geometria Projetiva e à Geometria Descritiva. Em qualquer um desses contextos, a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção.

4. A concepção

A concepção refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico; ao exercício da lógica, aos elementos conceituais, onde têm predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais. A concepção é favorecida pela percepção, representação e construção, mas também favorece essas dimensões.

No entanto, não podemos nos esquecer do “recheio” do tetraedro. Segundo o professor Ferreira (2005), o preenchimento do sólido se faz pela linguagem, e é ela que o sustenta. “A imagem, então, do tetraedro é de um sólido, onde seu interior é preenchido pela linguagem.” (FERREIRA, 2005, p. 03)

Para Ferreira (2005):

A linguagem não é um sistema unificado, não é uma linguagem de signos obedientes a uma gramática lógica específica. A filosofia da lógica fala de frases exatamente no sentido em que delas falamos na vida comum. Ainda mais claramente todas as proposições de nossa linguagem cotidiana, exatamente como elas se encontram, estão em perfeita lógica. A visão de certos lógicos, ou mesmo de todos, é muito unilateralmente ligada a um ideal não realizado na linguagem comum. (p. 04)

Neste momento, se faz necessário esclarecer algo que normalmente causa confusões: a distinção existente entre língua e linguagem. A professora Karrer (2006), estabelece um esclarecimento para essa questão:

A língua que falamos e que utilizamos em nossos escritos não pode ser vista como a única e exclusiva forma de linguagem que somos capazes de produzir e transformar. É possível estabelecer uma comunicação de outras formas, por meio de imagens, sinais, gráficos, números, sons, gestos, olhares, dentre outros. A língua é uma forma de linguagem, ou seja, a língua se manifesta como linguagem verbal oral ou escrita. Entende-se por linguagem algo muito amplo, ligado às formas sociais de comunicação e de significação. Deste modo, há outras linguagens, tais como as dos surdos-mudos, da culinária, dos sons, dos gestos, dentre inúmeras outras. (p. 12)

Assim, a linguagem possui como função a comunicação. Nos trabalhos realizados em sala de aula, as linguagens escrita e falada têm um papel fundamental na comunicação que se estabelece entre professor e alunos e entre os alunos entre si, tanto nas aulas expositivas, como nas propostas de atividades, nos trabalhos em grupo etc. Para Chomsky⁶ (1984):

Diz-se freqüentemente que a função da linguagem é a comunicação, e que o objetivo essencial é possibilitar a comunicação entre as pessoas. Acrescente-se ainda que só se consegue compreender a natureza da linguagem se se atender a esta finalidade essencial. (p. 19)

Ao se referir à linguagem escrita e à linguagem falada, Vygotsky⁷ (1989) declara que:

A linguagem escrita é um sistema particular de símbolos e signos cuja dominação prenuncia um ponto crítico em todo o desenvolvimento cultural da criança.

Um aspecto desse sistema é que ele constitui um simbolismo de segunda ordem que, gradualmente, torna-se um simbolismo direto. Isso significa que a linguagem escrita é constituída por um sistema de signos que designam os sons e as

⁶ Avram Noam Chomsky nasceu na cidade da Filadélfia, no estado da Pensilvânia, nos Estados Unidos da América, em 7 de dezembro de 1928. É professor de Linguística no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). O seu nome está associado à criação da gramática generativa transformacional, abordagem que revolucionou os estudos no domínio da linguística teórica. É também o autor de trabalhos fundamentais sobre as propriedades matemáticas das linguagens formais, sendo o seu nome associado à chamada Hierarquia de Chomsky. Os seus trabalhos, combinando uma abordagem matemática dos fenômenos da linguagem com uma crítica radical do behaviorismo, em que a linguagem é conceitualizada como uma propriedade inata do cérebro/mente humanos, contribui decisivamente para o arranque da revolução cognitiva, no domínio das ciências humanas. Além da sua investigação e ensino no âmbito da Linguística, Chomsky é também muito conhecido pelas suas posições políticas de esquerda e pela sua crítica da política externa dos Estados Unidos da América. Chomsky descreve-se como um socialista libertário havendo quem o associe ao anarco-sindicalismo. O termo chomskiano é habitualmente usado para identificar as suas idéias linguísticas embora ele próprio considere que esses tipos de classificações (chomskiano, marxista, freudiano) não fazem sentido em nenhuma ciência e que pertencem à história da religião, enquanto organização. (WIKIPÉDIA, 2007)

⁷ Lev Semionovitch Vygotsky, nasceu na Rússia, na cidade de Orsha, em 17 de novembro de 1896 e faleceu em 11 de junho de 1934, em Moscou. Foi um psicólogo descoberto nos meios acadêmicos ocidentais depois da sua morte, causada por tuberculose, aos 37 anos. Pensador importante, foi pioneiro na noção de que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida. (WIKIPÉDIA, 2007)

palavras da linguagem falada, os quais, por sua vez, são signos das relações e entidades reais.

Gradualmente, esse elo intermediário (a linguagem falada) desaparece e a linguagem escrita converte-se num sistema de signos que simboliza diretamente as entidades reais e as relações entre elas. Parece claro que o domínio de um tal sistema complexo de signos não pode ser alcançado de maneira puramente mecânica e externa; ao invés disso, esse domínio é o culminar, na criança, de um longo processo de desenvolvimento de funções comportamentais complexas. A única forma de nos aproximar de uma solução correta para a psicologia da escrita é através da compreensão de toda a história do desenvolvimento dos signos na criança. (p. 120)

Nas aulas de Matemática, de modo geral, as habilidades matemáticas e de linguagem desenvolvem-se juntamente conforme os alunos escrevem, lêem e discutem sobre idéias matemáticas. “De outra forma, podemos dizer que o desenvolvimento da comunicação auxilia o estabelecimento de conexões entre as idéias matemáticas e diversas formas de representação, tais como, gráficas, físicas, pictóricas e verbais”. (SOUZA *et al.*, 2003, p. 07)

Dessa forma, entendemos que a conexão estabelecida entre a Matemática e a linguagem

[...] permite o desenvolvimento das capacidades de interpretar, analisar, sintetizar, transcender o que é observado, enfim, permite o desenvolvimento da capacidade de melhor descrever o mundo e a explicitação de elementos que mostram as relações entre significados que o aluno está construindo. (SOUZA *et al.*, 2003, p. 07)

Mais ainda, as mesmas autoras afirmam que os professores devem criar um ambiente em sala de aula onde os alunos são incentivados a estabelecer “elos cognitivos significativos entre a linguagem corrente, as idéias do senso comum, as idéias específicas da matemática e as representações simbólicas” (SOUZA *et al.*, 2003, p. 08). Especificamente, para atingir esses objetivos, as atividades propostas em sala de aula necessitam, na medida do possível, fazer com que os alunos se expressem de diversas formas, o que pode ser conseguido por meio de algumas ações como:

- produzir textos, coletivos ou individuais, que envolvam as figuras criadas.
- explicar verbalmente uma determinada idéia ou solução para um problema proposto.
- elaborar textos que descrevam as construções feitas por dobradura, com régua e compasso, etc.

- discutir sobre os diferentes significados de um termo matemático. (SOUZA *et al.*, 2003, p. 08)

Dessa forma, especificamente no ensino da Geometria é fundamental que o professor proponha atividades que possibilitem a articulação entre as quatro faces do tetraedro e que trabalhem o seu “recheio”, ou seja, a linguagem que deve ser usada em sala de aula atendendo ao nível de amadurecimento dos alunos. Nesse sentido, as atividades apresentadas aos alunos podem ser facilitadas ou dificultadas, de acordo com a comunicação que se estabelece durante a atividade, a faixa etária ou escolar dos alunos, bem como o domínio que eles têm dos elementos e das propriedades do conceito estudado.

É importante ressaltar novamente, que o professor tenha em mente os objetivos do trabalho e para que alunos está dirigindo as atividades. Dessa forma, uma mesma atividade pode ser proposta a alunos de diferentes níveis escolares, usando diferentes linguagens oral e escrita e diferentes formas de exploração das propriedades e das relações matemáticas envolvidas⁸.

Souza *et al.* (2003), na introdução de seu livro, ao explicarem o caminho escolhido para as atividades de Geometria propostas para serem trabalhadas em sala de aula, afirmam que:

Este trabalho dirigido ao desenvolvimento do raciocínio geométrico requer que o aluno tenha oportunidade de:

- perceber formas geométricas (ver, tocar, ...),
- representar figuras geométricas (desenhar, escrever sobre, interpretar esquemas, ...),
- construir (fazer, modificar, ...),
- conceber (criar objetos e formas, imaginar, ...) (p. 3)

E completam:

De fato, quando o trabalho é estruturado com a preocupação de que o aluno *perceba, represente, construa e conceba* formas geométricas, ele tem chance de desenvolver habilidades de visualização, percepção espacial, análise e criatividade. As dificuldades de reconhecimento de formas geométricas e de suas propriedades e de relacionar diferentes propriedades de uma mesma figura ou de um conjunto de

⁸ A fim de ilustrar essas idéias, o Anexo A apresenta uma atividade com o Tangram que articula os quatro processos de construção do conhecimento geométrico, bem como exemplifica possíveis diferenças de linguagem.

figuras ficam superadas, pois o aluno deixa de perceber as formas como um todo para se deter em partes e em propriedades da figura, passando a um estágio de pensamento mais analítico e dedutivo.

Pelo que foi exposto aqui, o trabalho em geometria, com qualquer material, deve ser organizado em atividades que possibilitem as quatro ações descritas. (p. 4, grifo nosso)

Lamentavelmente, constatamos um “esquartejamento” no ensino da Geometria, por não haver articulação entre percepção, construção, representação e concepção. Quase sempre os estudantes recorrem à memorização para enfrentarem as dificuldades lógicas apresentadas pelo método axiomático-dedutivo. A esse respeito, o professor da Universidade de Oregon, Hoffer (1981) afirma que “às vezes é difícil para o professor deixar de dar ênfase às provas, mesmo quando os alunos estão sentindo dificuldades. No entanto, há outras habilidades de natureza geométrica que podem ser de igual importância para os alunos”. (p. 11)

O autor descreve cinco dessas habilidades para as quais o professor deveria dedicar mais tempo nos cursos de Geometria – habilidades visuais, verbais, de desenho, lógicas e aplicadas. Sobre essas habilidades Hoffer (1981) considera que:

Geometria é claramente uma matéria visual, mas com demasiada frequência seus aspectos visuais têm servido primariamente como uma ferramenta para provas. [...] Um curso de Geometria provavelmente salienta o uso de linguagem mais do que qualquer outro curso matemático. Há abundância de vocabulário para os alunos aprenderem. Há definições precisas. Há postulados e proposições que descrevem propriedades de figuras e relações entre figuras. Pede-se aos alunos que leiam muito material e que escrevam suas próprias demonstrações. [...] Os cursos de Geometria fornecem oportunidades para os alunos expressarem suas idéias em desenhos e diagramas. Na vida posterior, alguns alunos podem ter mais necessidade de fazer um desenho de uma situação geométrica do que em provar teorema. As habilidades de desenhar podem, e provavelmente devem, ser desenvolvidas em cursos de Geometria, e as atividades ajudam com frequência a preparar alunos para aprender mais tarde, relações geométricas. [...] A Geometria é uma das matérias do currículo que mais ajudam os alunos aprenderem a analisar a forma de um argumento e a reconhecerem a forma de argumentos válidos e não-válidos no contexto de figuras geométricas e, posteriormente, em problemas da vida diária. [...] Geometria significa mais do que apenas ‘medição da terra’. Os gregos usavam a palavra *mathema* para indicar ‘aquilo que é aprendido’. Eu imagino que os gregos viam a Matemática como um estudo aprofundado de fenômenos físicos. Essa visão é bem ilustrada na escola Pitagórica, que a utilizava para explicar música, arte e ciência. (p. 11 – 13)

E conclui dizendo que “dedicar tempo demais a provas formais tira um tempo precioso do desenvolvimento de outras habilidades geométricas”. (p. 14)

Não estamos afirmando que as provas formais não são importantes, elas são necessárias desde que o aluno entenda essa necessidade e que não precise usar o recurso da memorização para conseguir passar em um curso de Geometria. Como já discutimos acima, a concepção faz parte de um curso de Geometria desde que seja tratada articuladamente com os outros processos de construção do conhecimento geométrico.

As dificuldades dos raciocínios necessários para fazer uma demonstração em Geometria levando os alunos a memorizarem os teoremas, podem ser explicadas pelos estudos do casal de professores holandeses – Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof – que descreveram um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse modelo garante que os alunos progridem segundo uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem Geometria e que um aluno só atinge determinado nível de raciocínio após passar por todos os níveis inferiores⁹.

Os dois últimos níveis – Dedução formal e Rigor – referem-se às demonstrações formais. Hoffer (1981) explica resumidamente essas fases explicando que esses níveis, mais avançados, são raramente alcançados por alunos de nível secundário:

Dedução: o aluno entende o significado de dedução e o papel de postulados, teoremas e provas.

Rigor: o aluno entenderá a importância de precisão ao lidar com fundamentos e interrelações entre estruturas. (p. 14)

Dessa forma, conclui relatando que:

É minha opinião, baseada em numerosas observações de sala de aula, discussões com outros professores e com alunos, e (infelizmente) minhas próprias experiências, que muitos cursos de Geometria para o secundário dão uma ênfase grande demais no desenvolvimento pelos alunos, da habilidade de escrever provas formais. Quando isto acontece, retira-se da classe um tempo precioso que poderia ser usado para fornecer aos alunos experiências em outras habilidades, possivelmente mais práticas, de natureza geométrica. Além disso, por começar com

⁹ Os cinco níveis hierárquicos de aprendizagem em Geometria segundo Van Hiele são: Básico – Reconhecimento/Visualização; Nível 1 – Análise; Nível 2 – Dedução Informal/Ordenação; Nível 3 – Dedução formal; Nível 4 – Rigor.

provas formais cedo demais num curso de Geometria, podemos não levar em conta aqueles alunos que ainda não alcançaram um nível suficientemente alto de desenvolvimento mental que os capacite a trabalhar adequadamente no nível formal. (p. 14)

A consequência observada nesse panorama é o fato dos alunos não compreenderem a Geometria, no sentido de uma construção significativa.

Na concepção de rede de conhecimentos e significados, para Machado (2002), a compreensão não pode ser simplesmente fruto da transmissão de informações, mas sim da apreensão do significado do objeto do conhecimento.

Tal rede é constituída por nós – significados: objetos, pessoas, lugares, proposições, teses etc – e relações que interligam os diversos nós, não existindo isoladamente, mas apenas enquanto pontes entre pontos. Assim, desde o início, temos uma dualidade entre nós e ligações, entre interseções e caminhos, entre temas ou objetos e relações ou propriedades. Na metáfora da rede, temos a não-existência de um percurso necessário do ponto de vista lógico para se transitar pela rede de nó em nó, nenhum nó é privilegiado nem subordinado a um outro, sendo sempre possíveis diversos caminhos para os trajetos entre dois nós. Cada nó é um feixe de relações. Não é possível isolar um nó, nem mesmo uma relação. O conjunto todo tem sentido, não há partes que possam ser isoladamente consideradas. A rede varia de pessoa para pessoa, algumas relações que são importantes para uns, não o são igualmente para outros. (MACHADO, 2002, p. 137 – 140)

Mais ainda, a fractalidade como característica da rede, mostra que cada nó ou conexão podem ser examinados mais de perto, tornando-se outra rede. De acordo com Lévy (1993), a rede “[...] se organiza em um modo ‘fractal’, ou seja, qualquer nó ou conexão, quando analisado, pode revelar-se como sendo composto por toda uma rede, e assim por diante, indefinidamente, ao longo da escala dos graus de precisão”. (p. 26)

Figura 6: A Geometria: rede de conhecimentos e significados

Voltando a Machado (2002):

Assim, alimentando-se mutuamente, em interação contínua, percepções, construções, representações e concepções são como átomos em uma estrutura com características moleculares, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, cada uma das faces desse tetraedro tem uma importância muito restrita, seja a percepção que não prepara o terreno para a transcendência da realidade palpável, ou a concepção que se pretende inteiramente desvinculada do mundo físico, ou ainda a construção ou a representação sem compromissos com a ação, que não resultam na realização de um projeto – ou não visam a isso. (p. 55)

Cabe ao professor, portanto, procurar estratégias de ensino evitando o tratamento isolado de qualquer uma das quatro faces. Deve-se evitar, também, a “hipotrofia de algumas delas, como costuma acontecer com a representação”. (MACHADO, 2002, p. 55)

De fato, o Desenho Geométrico bem como a Geometria Projetiva e a Geometria Descritiva praticamente sumiram do currículo da maioria das escolas. O mesmo costuma acontecer com a construção, geralmente encarada como uma atividade que se destina às séries iniciais do ensino. Com relação a esses fatos, Machado (1990) afirma que:

A própria diminuição, nas últimas duas décadas, da importância do Desenho Geométrico, ou mesmo a exclusão da Geometria Descritiva dos currículos regulares constituem uma síndrome da hipotrofia da representação na concepção de Geometria que predomina na escola.

Quanto à construção, embora nas quatro séries iniciais ela seja cultivada entre os alunos, utilizando-se massas deformáveis, cartolina ou outros materiais, nas séries seguintes essa face do conhecimento geométrico não costuma mostrar a sua verdadeira importância. Ela é considerada com frequência e de modo paradoxal uma atividade ou tipicamente infantil ou profissional: constroem as crianças e os engenheiros ou os arquitetos, excluindo-se tal atividade dos anos escolares intermediários, como se ela fosse simples demais ou técnica demais. Em qualquer nível, no entanto, a construção pode ser uma atividade extremamente fecunda, que exige não apenas habilidade manual mas também capacidade de conceber e representar. (p. 145)

O mesmo autor nos dá um exemplo de tarefas que ilustram o que estamos afirmando:

1. Construir um cubo com certa porção de massa de modelar.
2. Construir um cubo com uma folha de papel sulfite.
3. Construir um cubo de aresta 5 cm.
4. Construir um cubo de volume 1 ℓ .
5. Construir um cubo de diagonal 10 cm. (p. 145)

É claro que essas atividades possuem graus de complexidade diferentes. As atividades 1 a 4, são passíveis de serem desenvolvidas nas primeiras quatro séries do Ensino Fundamental, “e decididamente a atividade de número 5 não se destina a crianças das quatro séries iniciais, envolvendo, em sua realização, um projeto ou uma representação”. (MACHADO, 1990, p. 145)

Para a realização de todas essas atividades de construção de um objeto físico, é necessário que o aluno conheça a definição de um cubo, bem como algumas características e propriedades. Pode-se trabalhar a representação plana e as planificações do sólido por meio de desenhos que devem ser feitos com orientação específica e, através disso, observar e constatar outras propriedades.

Atividades desse tipo possibilitam, ao aluno, transitar entre a percepção, a construção, a representação e a concepção, cabendo ao professor buscar meios que concretizem tal tarefa.

O autor também afirma que:

É tão importante transitar, como uma criança, da percepção à construção, daí à representação e, então, à concepção, quanto o é realizar o percurso do engenheiro ou do arquiteto, que concebe o objeto geométrico antes de representá-lo e construí-lo, e só então torná-lo palpável. (p. 146)

Assim, de modo geral, em todos os níveis do ensino, a Geometria não deveria ser tratada de forma dilacerada; seu ensino necessita de atividades integradoras que articulem os quatro processos, inseridas na construção da rede representativa do conhecimento geométrico.

Esses pressupostos indicados por Machado (1990, 2002) representam a base principal de elaboração e análise desta pesquisa. O leitor observará que a teoria perpassa por todo o nosso estudo, uma vez que é utilizada na análise dos livros didáticos do Capítulo 3 e na elaboração da proposta de atividades do Capítulo 4.

Optamos por iniciar a nossa pesquisa pela história do ensino de Matemática desenvolvido no Brasil, passando pelas principais Reformas Curriculares instituídas no sistema nacional de ensino das atuais 5^a a 8^a séries do Ensino Fundamental. Com este estudo, pretendemos verificar principalmente, o caminho percorrido pelo ensino da Geometria no decorrer dos anos. É o que faremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL: O TRATAMENTO DADO À GEOMETRIA

2.1. Introdução

Com as transformações que vêm ocorrendo na área da Educação, torna-se necessário que haja constantes adequações envolvendo análise, aprofundamento e mudanças nas propostas curriculares das diversas disciplinas.

Essa necessidade tem sido acrescida pelos avanços tecnológicos contínuos e significativos que ocorreram nos últimos anos nas áreas do ensino, mostrando que atualmente existe um conjunto de informações que se usado de maneira adequada, pode melhorar a qualidade do ensino em qualquer nível.

O professor Ubiratan D'Ambrosio, considera que:

O conteúdo matemático, isto é, as ciências matemáticas, está passando por grandes transformações. Estamos vendo novas direções nas pesquisas matemáticas, onde é evidente a assimilação total do computador na pesquisa matemática. Sobretudo a integração da matemática com outras disciplinas e o amplo uso dos recursos tecnológicos deu origem a teorias novas, tais como o processamento de imagens [wavelets], as biomatemáticas e os conjuntos *fuzzy*, as teorias de sistemas e os estudos do caos e da complexidade, e as ciências da mente e da consciência. Uma nova matemática começa a se delinear. (D'AMBROSIO, 2005)

Especificamente, na Proposta Curricular para o ensino de Matemática de 1988, encontramos que uma lista de conteúdos não é suficiente para caracterizar uma proposta curricular. No caso da Matemática, segundo essa proposta, ao longo de diversas reformas tal lista tem variado relativamente pouco. Considerando apenas os grandes temas geradores, os

assuntos tratados pertencem, essencialmente, a três grandes eixos: Números, Álgebra e Geometria. Tais assuntos, no entanto, podem ser desenvolvidos de modos significativamente diferentes segundo diferentes projetos e é por meio das abordagens realizadas que se pode caracterizá-los.

D'Ambrosio (2005) abaliza essa questão, afirmando que:

No que se refere à Matemática há excessiva ênfase nos conteúdos. Embora o currículo, como estratégia da ação educativa, contemple objetivos, conteúdos e métodos, todos numa ligação muito forte, somente conteúdos parecem ser considerados nas elaborações curriculares. Uma organização curricular que responda a essas novas direções em aprendizagem deve se libertar do caráter conteudista e adotar um conceito dinâmico de currículo. [...] O grande desafio é fazer um currículo que seja moderno, interessante e útil.

O autor define currículo como sendo “o conjunto de estratégias que favorecem a prática educativa” (D'AMBROSIO, 2005). Dessa forma, “o currículo tem como componentes solidários objetivos, conteúdos e métodos¹⁰. O solidário significa que não se pode alterar um dos componentes sem que se alterem os outros dois”. (D'AMBROSIO, 2005)

D'Ambrosio (2005) representa essa solidariedade dos componentes do currículo num esquema cartesiano, ressaltando que o currículo é como um ponto no espaço, sendo definido necessariamente pelas suas três coordenadas:

(objetivos, conteúdos, métodos) $\rightarrow$ (o , c , m)

¹⁰ Para o Ensino Fundamental, os objetivos referem-se à capacidade de lidar com questões do tipo: avaliar quantidades numéricas, habilidades no uso das calculadoras, porcentagens, as idéias centrais da Estatística, Razões e Proporções, contagem de tempo, medidas e mensurações e Matemática ambiental. O conteúdo é aquilo que é necessário para explicar, entender, refletir sobre a realidade e lidar com os fatos reais. A Metodologia significa entrar na prática, fazer. (D'AMBROSIO, 2005)

Figura 7: A metáfora do currículo.

De acordo com essa visão, as mudanças no currículo, que devem ocorrer freqüentemente nos sistemas educativos, só podem acontecer se considerarmos os três componentes solidariamente.

Pretendemos investigar as principais propostas curriculares, suas funções e importância nos diferentes projetos de ensino da Matemática no Brasil, com ênfase específica na Geometria, nos vários momentos históricos desde o século XIX até a atualidade.

2.2. Panorama histórico do ensino de Matemática: a Geometria

A História da Educação mostra que os gregos foram responsáveis por um modelo institucional que prevalece até hoje. O que corresponderia à Educação Fundamental era organizado no mundo grego como o *trivium* – Gramática, Retórica e Dialética. Essas disciplinas tinham como objetivo desenvolver aptidões como ler e escrever, discursar com clareza e argumentar sobre os temas mais diversos, o que respondia às necessidades do exercício de cidadania da época. (D'AMBROSIO, 2005)

A Matemática foi introduzida pela primeira vez na educação grega e reconhecida como um elemento de grande valor formativo, na escola filosófica de Pitágoras (580 – 500 a.C.). Porém, esse estudo restringia-se a essa escola e à formação dos filósofos.

Foi no século IV a.C., com Platão e Isócrates – o primeiro, defensor de uma formação filosófica, e o segundo, de uma formação retórica – que a educação grega sofreu uma modificação definitiva. A proposta pedagógica de Platão recomendava a introdução da Matemática em um plano educacional regular para todos os indivíduos desde o nível elementar e não apenas no Ensino Superior como acontecia até então.

Dessa forma, criaram-se outras necessidades educacionais, mais elaboradas. A demanda por uma formação mais aprofundada, de caráter científico passou a prevalecer. Tal necessidade refletiu-se no que seria o Ensino Secundário, preparatório para o Ensino Superior, organizado como o *quadrivium* – Aritmética, Música, Geometria e Astronomia que, juntamente com as disciplinas literárias – Gramática, Retórica e Dialética – foram estabelecidas definitivamente a partir do século I a. C. como as disciplinas básicas para a formação geral do estudante. (MIORIM, 1998, p. 24)

A Aritmética era basicamente o estudo dos números e de suas propriedades, tais como divisibilidade e algumas características místicas. A Música, por outro lado, era importante por tratar das relações entre os números – eram os primeiros estudos das razões e proporções. A Geometria tratava das formas estáticas e a Astronomia das formas em movimento.

O ensino da Geometria, desde essa época até a modernidade, baseou-se nos *Elementos* de Euclides. Seu desenvolvimento sempre privilegiava o rigor das demonstrações, sem praticamente nenhuma ligação com atividades práticas. Nesse sentido, a Geometria era considerada um elemento fundamental para a formação geral do estudante. Já a Geometria envolvendo atividades práticas, por ser considerada apenas uma aplicação, destinava-se apenas aos futuros técnicos. Na realidade, aplicações como o cálculo de áreas e volumes, pertenciam a outras disciplinas, como a Geodésia e a Metrologia, sendo assuntos reservados aos futuros agrimensores, arquitetos, engenheiros etc. (MIORIM, 1998, p. 24)

A influência da obra de Euclides no ensino da Matemática era tamanha, que chegou a ser considerado “quase um sacrilégio qualquer desvio de seu texto sagrado”. Isso dificultou

qualquer tentativa “de alteração no modo de ministrar o ensino de Geometria”. (ROXO apud MIORIM, 1998, p. 39)

O ensino da Aritmética possuía as mesmas características. A esse respeito, a educadora Miorim (1998), nos esclarece que:

As mesmas características podem ser também observadas na proposta do ensino de aritmética – a ciência teórica dos números. Sem nenhuma preocupação com as aplicações práticas, ou seja, desvinculada da logística, a aritmética foi inicialmente estudada segundo a forma geométrica apresentada por Euclides nos seus *Elementos*. (p. 24)

A partir do segundo século de nossa era, o ensino de Aritmética seguiu uma outra direção e passou a ser desenvolvido segundo o livro *Introdução à Aritmética*, de Nicômaco de Gerasa (100 d.C.). Segundo Miorim (1998), esse livro

[...] apresenta a ‘exposição mais completa existente da aritmética pitagórica’. Apesar de apresentar ‘em grande parte os mesmos assuntos tratados nos livros de aritmética dos *Elementos*’, enquanto ‘Euclides representa números por linhas retas, Nicômaco utiliza uma notação aritmética através de uma linguagem vulgar’. (STRUİK, apud MIORIM, 1998, p. 24)

Esse livro teve uma influência muito grande no ensino. Sua influência foi “tão profunda que desde então a aritmética suplantou a geometria e se tornou, em substituição a esta, a base e o campo mais importante do ensino das matemáticas”. (MARROU apud MIORIM, 1998, p. 24)

Nos primeiros anos da Idade Média¹¹ – século V – o ensino clássico¹² foi chegando ao fim, cedendo “lugar a um ensino de caráter estritamente religioso”. Dessa forma, os textos do período clássico “passaram a ser considerados fontes possíveis de heresias e começaram a

¹¹ Segundo os historiadores, a Idade Média estendeu-se de 476 a 1453.

¹² A educação clássica era preocupada com a formação integral do homem e não com uma formação técnica específica. Considerava a palavra como o seu elemento mais importante. Os estudos matemáticos eram privilégios apenas de uma restrita minoria – os matemáticos profissionais e os futuros imperadores. (MIORIM, 1998, p. 25)

desaparecer¹³”. Com isso, a educação baseou-se em resumos das sete artes liberais¹⁴, elaborados por alguns homens cultos da época. (MIORIM, 1998, p. 27).

No final da Idade Média, com os descobrimentos de novas terras, novos povos, novas naturezas, tornou-se imprescindível a existência de um maior número de indivíduos capazes de lidar com os novos meios de produção, de economia e de gestão das sociedades e naturalmente capazes de assimilar o pensamento novo gerado a partir dos descobrimentos e de suas conseqüências sociais, políticas e econômicas. A educação não poderia mais ficar restrita às elites. No entanto, Miorim (1998) afirma que, durante a Idade Média, o ensino da Matemática quase desapareceu na Europa. Na prática, foram os estudos literários que davam a orientação à educação.

Durante o Renascimento¹⁵ começaram a aparecer as primeiras obras didáticas de Geometria que buscavam modificar a abordagem euclidiana. Uma delas foi a do francês Charles Bouelles (1470 – 1553), onde o autor não apresenta uma exposição totalmente rigorosa da Geometria, “uma vez que alguns teoremas são meras constatações de fatos”. Introduz também novos conceitos; “em dois de seus capítulos são estudadas as relações da Geometria com a simetria, tal como se observa no mundo animado e no inanimado”. (ROXO apud MIORIM, 1998, p. 39)

O século XVIII pode ser considerado como o século da preocupação com relação aos aspectos práticos e teóricos do conhecimento, conforme afirma Miorim (1998). Com relação ao desenvolvimento da Matemática, a autora afirma que:

O século XVIII pode ser encarado como apenas um interlúdio, pois sucedeu o século em que a Matemática grega havia sido superada, particularmente pelo

¹³ De acordo com Miorim (1998), os únicos textos que sobreviveram, no caso da Matemática, adotados durante quase mil anos como livros escolares, foram os de Boécio (480 – 524) – o último filósofo da Antiguidade. Seus livros “eram abreviações insignificantes e extremamente elementares de clássicos mais antigos – uma *Arithmetica* que era apenas uma forma abreviada da *Introductio* de Nicômaco; uma *Geometria* baseada em Euclides e contendo apenas enunciados, sem prova, de algumas das partes mais simples dos quatro primeiros livros de *Os Elementos*”. (BOYER apud MIORIM, 1998, p. 28)

¹⁴ A expressão “sete artes liberais” começou a ser utilizada nos primeiros tempos da Idade Média para designar a soma total do saber, então constituído pelo *trivium* e pelo *quadrivium*. (MIORIM, 1998, p. 27)

¹⁵ O Renascimento representou o marco que dividiu a Idade Média da Época Moderna. Estendeu-se do século XIV ao XVII, variando de região para região, em seu grau de produção e intensidade. Dentre as personalidades mais notáveis do Renascimento, cita-se Leonardo da Vinci (1452 – 1519), exemplo clássico da multiplicidade de atuações: pintar, esculpir, gravar, projetar, dissecar, escrever. Leonardo da Vinci foi um dos defensores de um ensino de Matemática mais voltado para a prática e para as aplicações.

descobrimto da geometria analítica e do cálculo infinitesimal, e precedeu o século do desenvolvimento da geometria e do rigor matemático. (p. 42)

Especificamente, para o ensino da Geometria, a preocupação com a relação teoria–prática provocou reações nas escolas francesas, ainda totalmente baseadas no sistema dedutivo euclidiano. A mais importante dessas reações, especialmente pela influência que exerceu sobre futuras propostas de renovação do ensino de Matemática, manifestou-se, em 1741, através da obra *Eléments de Géométrie* de Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765).

Em 1789, com a Revolução Francesa, instituições de investigação e educação científica foram criadas. Dentre as mais importantes estão a *École Polytechnique* onde o professor Gaspard Monge (1746 – 1818) modificou o currículo ensinando conteúdos novos como a Geometria Descritiva e a Geometria Espacial. Podemos citar também a *École Normale Supérieure* que se dedicava à formação de professores. Nela, encontrava-se o professor Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) que, em 1794, publicou a obra *Eléments de Géométrie* que, segundo a professora Silva (2000), durante todo o século XIX, teve enorme repercussão, não só na Europa como também em vários países não-europeus. Durante a vida do autor, o livro teve vinte edições. Também Legendre desenvolveu uma Geometria na qual buscava, ao mesmo tempo, a clareza e a precisão de definições, a simplicidade e o rigor das demonstrações.

No século XIX, a Geometria sofreu uma mudança com relação à sua abordagem. Esse pode ser considerado o século da revolução na Geometria: foi nesse período que surgiram as Geometrias Não-Euclidianas de Gauss, Lobachevsky e Bolyai¹⁶.

A partir da segunda metade do século XIX, uma forte preocupação em modernizar o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas começou a surgir em diferentes países, culminando no primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática. Segundo Miorim (1998):

[...] esse movimento pode ser encarado como uma primeira reação organizada contra ‘o culto a Euclides’, pois foi a primeira ação coletiva no sentido de propor um ensino de Matemática, particularmente para o curso secundário,

¹⁶ As Geometrias Não-Euclidianas, durante séculos, surgiram como consequência da tentativa de demonstrar o 5º Postulado de Euclides. Gauss (1777 – 1855) é considerado um dos fundadores da Geometria Não-Euclidiana e foi o primeiro a ter uma clara visão da possibilidade de uma Geometria independente do 5º postulado. Porém não fez publicações oficiais a respeito e, em 1829, Lobachevsky apresentou um artigo contendo os princípios da Geometria descoberta por Gauss. Em 1832, John Bolyai publicou trabalho análogo. (OLIVA, 1983, p. 30)

baseado em princípios totalmente opostos aos apresentados pela obra de Euclides.
(p. 78)

No final desse século começaram a surgir os primeiros livros didáticos que seguiam essas novas tendências. Como exemplo, pode-se citar o livro de Holzmüller, *Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik*, editado entre 1894 e 1895. Nessa obra, o autor apresentou os temas da Aritmética e da Geometria alternados, estabelecendo conexões entre eles. O desenvolvimento dos conceitos geométricos foi baseado no desenho e nas construções, para os quais o autor recomenda executar com toda limpeza e exatidão. Além disso, freqüentemente enuncia um teorema geométrico como resultado de uma construção prática. (KLEIN, 1908, p. 313¹⁷)

No entanto, a Geometria euclidiana continuou ainda por muito tempo a ser a base do ensino, especialmente no nível médio. Essa situação não se alterou significativamente, nos diferentes países, até o início do século XX. (MIORIM, 1998, p. 49)

Nesse século, com os crescentes avanços tecnológicos, os currículos de todas as disciplinas foram sendo modificados, tornando-se mais realistas, práticos e técnicos. Especificamente no ensino da Matemática, foram introduzidos novos tópicos e novos livros didáticos passaram a ser utilizados.

Nessa época, o ensino da Geometria com o enfoque tradicional euclidiano já enfrentava questionamentos, tanto no que diz respeito ao conhecimento do professor, como aos métodos utilizados, ou ainda às dificuldades em se estabelecer uma ponte entre a Geometria prática preconizada para a escola elementar e a abordagem axiomática introduzida na secundária. É desse período o segundo Movimento Internacional do Ensino da Matemática conhecido como “Matemática Moderna”, que implantou a idéia de desenvolver a Geometria sob o enfoque das transformações. Entretanto, até mesmo os defensores da Matemática Moderna reconheciam não se tratar de tópico dominado pela maioria dos professores em exercício. Uma das conseqüências foi o fato de a Geometria acabar, muitas vezes, por não ser ensinada, sob qualquer enfoque. (PAVANELLO, 1989, p. 95)

Com relação ao primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática e à Matemática Moderna, Miorim (1998), afirma que:

¹⁷ T.A.

Apesar de diferentes, as posições assumidas pelos dois movimentos de modernização da Matemática ocorridos influenciaram profundamente o ensino da disciplina daquele momento em diante. Ainda hoje, podemos perceber a presença de suas idéias não apenas nas discussões teóricas sobre o assunto, mas também na prática da Educação Matemática. (p. 115)

2.3. As propostas curriculares de Matemática para a 5ª até a 8ª série, ocorridas no Brasil a partir do século XIX – o tratamento dado à Geometria

No prefácio do livro de Valente (2004a), o professor Antonio José Lopes afirma que:

[...] muitas características do ensino, praticado em décadas passadas, ainda estão muito presentes como marcas didáticas nos conhecimentos, concepções, crenças e práticas dos professores; nos conteúdos e organização dos livros didáticos atuais; nos programas curriculares e – por que não? – no ambiente familiar dos estudantes. (p. 07)

É evidente que a organização curricular encontra sua razão de ser no momento sociocultural e econômico de cada época. A fim de estabelecer um panorama da evolução da organização do currículo na escola brasileira, faremos uma revisão das principais reformas no ensino das atuais 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, ocorridas no período compreendido pelos séculos XIX e XX, chegando aos dias atuais. Daremos ênfase ao tratamento dado à Geometria em quatro diferentes períodos que consideramos marcos significativos na História do ensino de Matemática brasileiro:

- Primeiro período: de 1827 a 1930
- Segundo período: de 1930 a 1960
- Terceiro período: de 1960 a 1980
- Quarto período: de 1980 a 2006

Os dois primeiros períodos são anteriores à Matemática Moderna. No primeiro período, os diferentes ramos da Matemática – a Aritmética, a Álgebra e a Geometria – eram

ensinados separadamente e por professores diferentes. A Geometria, de modo geral, seguia a abordagem euclidiana. O segundo período caracteriza-se pela implementação da Reforma Francisco Campos, em 1931, quando houve a unificação dos diversos campos da Matemática sendo criada uma nova disciplina denominada “Matemática” que ficou sob a responsabilidade de um só professor, que deveria desenvolver integradamente, em cada série, o ensino dos vários assuntos. O terceiro período corresponde à Matemática Moderna e o quarto, ao período pós Matemática Moderna até os dias atuais.

2.3.1. Primeiro período: 1827 – 1930

2.3.1.1. Ponto de partida: Criação dos cursos jurídicos – 1827

A História da Educação no Brasil possui seu marco em 1549, com a chegada dos padres jesuítas que trouxeram a moral, os costumes e a religiosidade do povo europeu, além dos seus próprios métodos pedagógicos.

Em 1570, os jesuítas já haviam fundado cinco escolas de instrução elementar localizados nos pontos mais importantes do Brasil – Porto Seguro, Ilhéus, São Vicente, Espírito Santo e São Paulo de Piratininga – e três colégios – Rio de Janeiro, Pernambuco e Bahia. Além de ensinarem as primeiras letras nos cursos elementares, os jesuítas mantinham cursos secundários de Letras e Filosofia¹⁸ e cursos superiores de Teologia e Ciências Sagradas, para a formação de sacerdotes. (BELLO, 2004)

O método jesuítico perdurou por 210 anos – 1549 a 1759 – quando os jesuítas foram expulsos de Portugal e de todas as suas colônias pelo Marquês de Pombal¹⁹, que pretendia reerguer Portugal da decadência na qual se encontrava diante de outras potências européias da época. A educação primordialmente religiosa proposta pelos jesuítas, não se adequava aos interesses comerciais do Marquês. No Brasil:

¹⁸ No curso de Letras estudava-se Gramática Latina, Humanidades e Retórica e no curso de Filosofia estudava-se Lógica, Metafísica, Moral, Matemática e Ciências. (BELLO, 2004)

¹⁹ Sebastião José de Carvalho e Melo, o marquês de Pombal, foi o primeiro-ministro de Portugal de 1750 a 1777.

Se existia alguma coisa muito bem estruturada em termos de educação o que se viu a seguir foi o mais absoluto caos. Tentou-se as aulas régias, o subsídio literário, mas o caos continuou até que a Família Real, fugindo de Napoleão na Europa, resolve transferir o Reino para o Novo Mundo. Na verdade não se conseguiu implantar um sistema educacional nas terras brasileiras, mas a vinda da Família Real permitiu uma nova ruptura com a situação anterior. Para preparar terreno para sua estadia no Brasil D. João VI abriu Academias Militares, Escolas de Direito e Medicina, a Biblioteca Real, o Jardim Botânico e, sua iniciativa mais marcante em termos de mudança, a Imprensa Régia²⁰. [...] A educação, no entanto, continuou a ter uma importância secundária. Por todo o Império, incluindo D. João VI, D. Pedro I e D. Pedro II, pouco se fez pela educação brasileira e muitos reclamavam de sua qualidade ruim. (BELLO, 2004)

No período colonial (1500 – 1822), os estudos superiores eram cursados pelos interessados, principalmente, em Portugal, na Universidade de Coimbra, a mais famosa no campo das ciências jurídicas e teológicas e, na França, na Universidade de Montpellier, a mais procurada na área de Medicina. (PILETTI, 1996, p. 35)

Com relação ao ensino secundário, o mesmo autor, esclarece que:

[...] o período colonial legou ao imperial uma série de aulas avulsas e dispersas. Sua principal função era preparar os estudantes para o ingresso nos cursos superiores, constituídos por escolas isoladas de formação profissional. [...] Esse sistema de aulas avulsas, no nível secundário, e de escolas isoladas, no nível superior, só seria modificado no decorrer do período republicano. [...] O primário nada tinha a ver com o secundário: para cursar este último, o aluno não precisava ter concluído o primário [...]; não se exigia a conclusão do secundário para iniciar estudos de nível superior. (PILETTI, 1996, p. 45 - 49)

Com a independência do Brasil, surgiu a necessidade de criar uma Universidade em território brasileiro; não fazia mais sentido enviar os filhos da elite brasileira para estudar na Europa.

²⁰ Na Carta Régia de 1810, que instituiu a Academia Real Militar no Brasil, indicou-se Legendre para o ensino da Geometria na Academia. A tradução da obra *Elementos de Geometria* de Legendre foi feita pelo brasileiro Manoel Ferreira de Araújo Guimarães – aluno e professor da Academia Real da Marinha de Lisboa e, posteriormente, professor da Academia Militar do Rio de Janeiro. A edição do Rio de Janeiro, publicada em 1809, representou um dos primeiros livros gravados na Imprensa Régia. Posteriormente, em 1812, também para uso da Academia Real Militar, foi traduzida a Geometria de Lacroix por José Vitorino dos Santos e Souza, professor da Academia. (VALENTE, 1997, p. 96-99)

Dessa forma, uma lei de 11 de agosto de 1827, estabeleceu a criação dos cursos jurídicos²¹, passando a existir a necessidade de exames de ingresso a esses cursos. Estabeleceu-se que os candidatos deveriam prestar exames de Língua Francesa, Gramática Latina, Retórica, Filosofia racional e moral e Geometria²². A Geometria fazendo parte do rol dos exames parcelados, ou como eram conhecidos, exames preparatórios aos cursos jurídicos, fez com que a Matemática mudasse oficialmente de status.

De fato, a Matemática era inicialmente considerada como um conjunto de conteúdos de caráter técnico-instrumental, servindo prioritariamente ao comércio e à formação militar. Mas, sendo a Geometria necessária para o ingresso aos cursos jurídicos, os conteúdos matemáticos passaram à categoria de saber de cultura geral.

O sistema de ensino necessário para a formação de um candidato a esses exames perdurou por cerca de cem anos, atravessando o Império e as primeiras décadas da República.

A partir desse período, começaram a surgir livros direcionados aos exames preparatórios que se limitavam em descrever os “pontos” a serem memorizados pelos alunos e que, em certa medida, correspondem às atuais apostilas dos cursinhos pré-vestibulares. (VALENTE, 1997, p. 117)

Para a preparação a esses exames, eram usados como referência, os livros adotados pelo Colégio Pedro II²³ – primeira escola secundária pública da cidade do Rio de Janeiro, inspirada na organização dos colégios franceses. Em particular, para a Geometria, na década

²¹ As duas primeiras faculdades de Direito do Brasil foram instaladas, no Convento de São Francisco, em 1º de março de 1828, na cidade de São Paulo e, no Mosteiro de São Bento, em 15 de maio do mesmo ano, na cidade de Olinda, em Pernambuco. (PILETTI, 1996, p. 45)

²² Até se chegar a um consenso a respeito das disciplinas que seriam exigidas para o ingresso aos cursos jurídicos, ocorreram exaustivas discussões na Câmara e no Senado do Império. Como podemos perceber, dentre o conjunto dos conhecimentos solicitados ao ingressante nesses cursos, a Geometria é o elemento mais distanciado das demais disciplinas. A razão estabelecida pelos membros componentes da Câmara e do Senado para que a Geometria fosse solicitada para um curso de formação clássico-literária, foi a de que ela é a lógica prática e a que habilita a raciocinar com rigor e exatidão; o estudo da Geometria exercita a razão e possibilita aos estudantes, tirar conclusões precisas, sendo dessa forma, indispensável. Tais argumentos foram aceitos e aprovados por todos os componentes. (VALENTE, 1997, p. 107-110)

²³ Em 2 de dezembro de 1837, o Seminário de São Joaquim, antigo Seminário dos Órfãos de São Pedro, foi transformado pelo ministro do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos, em estabelecimento de instrução secundária com o nome de Colégio Pedro II. Primeiramente, tinha um regime de externato e, a partir de 1856, o duplo regime de internato e externato. (VALENTE, 2004a, p. 23)

de 1840, usou-se o livro de Cristiano Benedito Ottoni, *Elementos de geometria e trigonometria retilínea* – um dos primeiros livros-texto utilizado amplamente no ensino²⁴.

O livro, que segue a abordagem euclidiana, teve sua primeira edição em 1842 e desenvolve a Geometria Plana e Espacial e também a Trigonometria. Ele foi adotado pelo Colégio Pedro II até 1898, quando o programa do Colégio anunciou a substituição da Geometria e Trigonometria de Ottoni pela de Timotheo Pereira, que escreveu seu livro Curso de Geometria, seguindo as orientações de Ottoni²⁵. (VALENTE, 1997, p. 135)

O mesmo autor afirma que “[...] os livros compilados por Ottoni representaram uma referência fundamental para a matemática escolar da segunda metade do século XIX”. (VALENTE, 1997, p. 135)

É importante ressaltar que o livro de Ottoni serviu de referência para outros autores que foram surgindo no decorrer do século. Por exemplo, podemos citar a elaboração de um texto destinado à preparação aos exames de Geometria intitulado *Pontos de geometria para provas escritas nos exames da instrução pública da Corte*, de Jeronimo Pereira Lima em 1869.

De acordo com Valente (2004a), nesse livro, após a advertência ao leitor, começam os “pontos” de Geometria para os exames preparatórios, onde se percebe claramente o uso de um texto sintético, sem linguagem simbólica, pronto para ser decorado pelo candidato.

De um modo ou de outro,

[...] é por força dos exames preparatórios que as matemáticas vão sendo amalgamadas à cultura clássico-literária predominante. Através do caráter de preparatório que caracterizava a escolarização secundária de então, as matemáticas vão deixando de representar um saber técnico, específico das Academias Militares e vão passar a fazer parte da cultura escolar geral de formação do candidato ao ensino superior. (VALENTE, 1997, p. 112)

²⁴ Segundo Valente (1997), o primeiro livro de Geometria adotado no Colégio Pedro II foi a obra *Elementos de Geometria* de Lacroix, em razão da referência ao ensino nos liceus franceses (p. 116).

²⁵ No entanto, o livro de Timotheo Pereira apresenta diferenças com relação ao de Ottoni, sobretudo no aspecto didático-pedagógico de apresentação dos conteúdos. A sequência é praticamente a mesma do livro de Ottoni; as diferenças ficam por conta de explicações mais extensas nas demonstrações dos teoremas, da inclusão de séries de exercícios propostos aos alunos ao final dos capítulos e da apresentação gráfica – as figuras aparecem no texto destacadas através de um fundo preto. (VALENTE, 1997, p. 157)

2.3.1.2. *Reforma Paulino de Souza – 1870*

O Colégio Pedro II tinha como objetivo principal se tornar um modelo pedagógico para o curso secundário. No entanto, ele “não conseguiu se organizar até o fim do Império para atingir tal objetivo”. (BELLO, 2004)

Desde a sua fundação, até o final do Império, o Colégio Pedro II passou por oito reformas, nos seguintes anos: 1841, 1855, 1857, 1862, 1870, 1876, 1878, e 1881. Em todas elas, a duração do curso secundário era de sete anos. (PILETTI, 1996, p. 47)

Em 1870, a Reforma Paulino de Souza procurou estabelecer no Colégio Pedro II, um ensino de caráter formativo, habilitando os alunos não só para os estudos superiores, mas para a vida, além de fazer com que a instituição se tornasse capaz de competir com os estabelecimentos particulares no aliciamento de candidatos às Academias. (BELLO, 2004)

Com relação ao ensino da Matemática, Miorim (1998) afirma que:

Em todas as várias reformas pelas quais passariam os planos de estudo do Colégio Pedro II, durante o período imperial, ora predominando o ensino clássico, ora o científico, as matemáticas – com a inclusão da trigonometria – estiveram sempre presentes, variando apenas a quantidade de horas destinadas ao seu ensino e, em alguns momentos, a profundidade de seus conteúdos. Foi o caso, por exemplo, do ensino de geometria, que, em alguns momentos, ficou restrito ao estudo da geometria plana, como na Reforma de 1870, e em outros seriam estudados tanto a geometria plana quanto a sólida. (p. 87)

De acordo com Haidar (1972), no plano de estudos da Reforma Paulino de Souza, instituiu-se o estudo da Aritmética no 1º, 2º e 3º anos do Ensino Secundário, a Álgebra era estudada no 3º e no 4º anos, já a Geometria Plana somente no 4º ano. Para os anos seguintes – 5º 6º e 7º – o programa não apresenta estudos matemáticos.

2.3.1.3. *Reforma Leôncio de Carvalho – 1878*

Em 1878, o Conselheiro Carlos Leôncio de Carvalho realizou uma Reforma do ensino – decreto nº 6884, de 20 de abril de 1878 – que permitia “a cada um expor livremente suas

idéias e ensinar as doutrinas que acredite verdadeiras, pelos métodos que julgue melhores”. (BELLO, 2004)

Para o desenvolvimento da instrução pública, Leôncio de Carvalho apresentou algumas medidas que o país deveria tomar: tornar livre o ensino, elevar o magistério à altura de um sacerdócio, reorganizar as escolas normais existentes e criar outras nas províncias, estabelecer Conferências Pedagógicas, bibliotecas e museus pedagógicos.

Segundo Haidar (1972, p. 127), essa Reforma teve o objetivo de elevar e enriquecer o ensino no Colégio Pedro II; dessa forma, “ampliou os estudos literários com a inclusão do italiano, e atribuiu especial importância ao preparo científico dos alunos”.

No plano de estudos da Reforma Leôncio de Carvalho, a Aritmética era estudada no 1º e no 2º anos do Ensino Secundário, a Álgebra somente no 3º ano, e no 4º ano eram estudadas Geometria no espaço e Trigonometria retilínea. Nos anos seguintes – 5º 6º e 7º – o programa continuou a não apresentar estudos matemáticos (HAIDAR, 1972, p. 160).

2.3.1.4. Reforma Homem de Mello – 1881

Segundo o educador Piletti (1996), em 1881, foi feito um novo regulamento no Colégio Pedro II – decreto nº 8051 de 25 de março de 1881 – que foi assinado pelo Ministro do Império Barão Homem de Mello.

Esse regulamento, destinado a vigorar até o fim do Império, conservou “os exames vagos, as matrículas avulsas e os exames finais por disciplina, manteve a desorganização vigente no primeiro estabelecimento de ensino secundário do país” (HAIDAR, 1972, p. 130).

O plano de estudos fixado pela Reforma do Barão Homem de Mello, instituiu as matérias que deveriam ser estudadas em cada um dos sete anos do ensino secundário, onde é possível perceber que a maior parte do tempo, era dedicada ao estudo de Humanidades:

1º ano: História Sagrada, Português, Geografia, Aritmética e Geometria.

2º ano: Português, Francês, Latim, Matemática elementar.

3º ano: Português, Francês, Latim, Geografia, Matemática elementar, Aritmética e Álgebra.

- 4º ano: Português, Francês, Latim, Geografia e Cosmografia, Matemática elementar (Geometria plana e no espaço e Trigonometria retilínea).
- 5º ano: Português, Inglês, Latim, História Geral, Física e Química.
- 6º ano: Alemão, Grego, História Natural e Higiene, Retórica, Poética e Literatura Nacional, Filosofia.
- 7º ano: Italiano, Alemão, Grego, Português e História Literária, Filosofia, Corografia e História do Brasil.

2.3.1.5. Reforma Benjamin Constant – 1890

Um ano antes da Proclamação da República, o Diário Oficial de 10 de abril publicou o “Programa de exames de preparatórios”, para 1888.

Tais exames constituíram a referência principal do ensino para todos aqueles que, depois de terem passado pelas primeiras etapas – ler, escrever e contar – desejavam o ingresso ao Ensino Superior. A aprovação em tais exames era exigida para a matrícula nos cursos superiores²⁶, ou seja, para os futuros advogados, médicos e engenheiros.

A primeira Reforma do ensino secundário na República, foi a de Benjamin Constant²⁷ – decreto nº 891, de 8 de novembro de 1890 – que procurou romper com a tradição clássico-humanista predominante até então, valorizando a ciência nesse nível de ensino. Um ponto forte dessa reforma foi a exclusão do ensino religioso obrigatório nas escolas.

²⁶ Em 1832, as Academias Médico-Cirúrgicas do Rio de Janeiro e da Bahia – criadas em 1808 por Dom João VI – converteram-se nas primeiras Faculdades de Medicina brasileiras. Em 1874, foi criada a primeira Escola de Engenharia no Rio de Janeiro. (BELLO, 2004)

²⁷ Benjamin Constant Botelho de Magalhães (1836 – 1891) foi professor do Colégio Pedro II e também da Escola Militar do Rio de Janeiro. Constant foi o principal articulador da conspiração que liquidou o regime monárquico no Brasil e, após a Proclamação da República, foi nomeado Ministro da Guerra. Não sendo a pessoa adequada para esse cargo, o chefe do Governo Provisório, Marechal Deodoro da Fonseca criou o primeiro ministério da educação brasileiro – Ministério dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos – nomeando Constant para o cargo, o qual tomou posse em junho de 1890.

Benjamin Constant pretendia fazer do curso secundário a oportunidade do jovem brasileiro entrar em contato com todo o saber humano. Assim, às disciplinas literárias tradicionais, foram acrescentadas as disciplinas científicas²⁸.

A Reforma Benjamin Constant foi elaborada de acordo com a filosofia de Auguste Comte²⁹ – o positivismo³⁰ – baseada nas Ciências e que considerava a Matemática como a ciência fundamental. Comte classificava e hierarquizava as ciências – lei enciclopédica da filosofia positiva – e, segundo ele, o ensino devia seguir uma ordem: Matemática, Astronomia, Física, Química, Biologia e Sociologia. A respeito da filosofia comtiana, a professora Silva (1994) esclarece que:

Embora o método seja fundamentalmente o mesmo em cada ciência, cada uma delas desenvolve um processo característico, de tal forma que só é possível alcançar-se o método positivo quando cada ciência foi estudada segundo a ordem enciclopédica. (p. 74)

No Brasil, a influência da filosofia positiva de Auguste Comte no ensino da Matemática, deu-se a partir de 1810 – fundação da Real Academia Militar do Rio de Janeiro – até 1920. Com relação a essa academia, Silva (1999), afirma que:

Lá a ideologia positivista encontrou uma forte sustentação e pôde, então, atingir a vida social, política, pedagógica e ideológica brasileira. Os docentes de Matemática desempenharam um papel muito importante na propagação das idéias positivistas. Nessa escola, a Matemática era, inclusive, a disciplina principal. Durante um período de mais de cem anos (1810 – 1920), a Academia Militar do Rio de Janeiro (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar, Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível

²⁸ Na proposta apresentada por Benjamin Constant constavam as disciplinas: Matemáticas, Física geral, Química geral, Biologia, Sociologia e Moral, Noções de Direito pátrio e de Economia política, Português, Latim, Francês, Inglês ou Alemão, Grego, Geografia política e econômica, Zoologia, Botânica, Meteorologia, Mineralogia, Geologia, História universal, História do Brasil e da literatura nacional, Desenho, Música e Ginástica. (MIORIM, 1998, p. 88)

²⁹ Isidore Auguste Marie François Xavier Comte (1798 – 1857) filósofo e matemático francês. Em suas obras *Filosofia Positiva* (1842) e *Política Positiva* (1854), propôs o estágio positivo do conhecimento, no qual os fenômenos deveriam ser observados, classificados e descritos de acordo com os métodos da ciência, mas negando qualquer atitude metafísica.

Em 1854, ele fez uma lista das obras mais recomendadas para o ensino, a qual chamou de *Bibliothèque Positiviste*. O número total de volumes é de 152 e dentre os livros de Matemática recomendados por Comte encontram-se: Condorcet – Aritmética; Clairaut – Álgebra e Geometria; Lacroix e Legendre – Trigonometria; Comte – Geometria Analítica; Descartes – Geometria; Navier – Análise; Carnot – Reflexão sobre o Cálculo Infinitesimal; Lagrange – Teoria das Funções. (SILVA, 1999, p. 126)

³⁰ Os historiadores consideram que o positivismo no Brasil foi um movimento determinante “no curso dos acontecimentos que levaram ao fim do Império do Brasil e à proclamação e primeiras décadas da República”. (SILVA, 1999, p. 10)

superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas. (p. 13)

A Reforma de Benjamin Constant influenciou também o currículo do Colégio Pedro II³¹, que tentou colocar em prática as idéias positivistas, ou seja, a hierarquia enciclopédica das ciências positivas:

Currículo do Colégio Pedro II, de 1890	
Ano	Disciplinas
1º	Aritmética e Álgebra, Português, Francês, Latim, Geografia, Desenho, Ginástica e Música
2º	Geometria e Trigonometria, Português, Francês, Latim, Geografia, Desenho, Ginástica e Música
3º	Geometria, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Latim, Inglês ou Alemão, Desenho, Ginástica e Música, Revisão de Português e Geografia
4º	Astronomia e Mecânica, Inglês ou Alemão, Grego, Desenho, Ginástica e Música, Revisão de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria, Português, Francês, Latim e Geografia
5º	Física e Química, Inglês ou Alemão, Grego, Desenho, Ginástica e Música, Revisão de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria, Mecânica, Astronomia, Geografia, Português, Latim e Francês
6º	Biologia, Zoologia, Botânica, Meteorologia, Mineralogia, Geologia, História Universal, Desenho e Ginástica, Revisão Cálculo Diferencial e Integral, Geometria, Mecânica, Astronomia, Química, Geografia, Francês, Inglês ou Latim, Grego
7º	Sociologia, Moral, Introdução à Economia e Jurisprudência, História do Brasil, História da Literatura, Ginástica e Revisão Geral

251

Figura 8: Currículo do Colégio Pedro II de 1890. (SILVA, 1999, p.251)

Miorim (1998) fornece uma idéia mais específica do programa de Matemática dos quatro primeiros anos do ensino secundário que prevaleceu nesse período:

1º ano: aritmética (estudo completo) e álgebra elementar (estudo completo); 2º ano: geometria preliminar, trigonometria retilínea, geometria espacial (estudo perfunctório das seções cônicas, da concóide, da limaçon de Pascal e da espiral de Arquimedes); 3º ano: geometria geral e seu complemento algébrico, cálculo diferencial e integral (limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita); 4º ano: 1º período:

³¹ Nessa Reforma, o Colégio Pedro II passou a denominar-se Ginásio Nacional. (HAIDAR, 1972, p. 137)

mecânica geral (limitada às teorias gerais de equilíbrio e movimento dos sólidos invariáveis e precedida das noções rigorosamente indispensáveis do cálculo das variações); 2º período: astronomia (precedida da trigonometria esférica), geometria celeste e noções sucintas de mecânica celeste (gravitação universal). (p. 88)

A Reforma Benjamin Constant manteve o ensino secundário de sete anos, mas, segundo Valente (2004a), ela nunca foi totalmente implementada, pois contrariava a concepção preparatória do ensino secundário. Benjamin Constant recebeu críticas até dos próprios positivistas que afirmavam que ele havia aplicado as idéias de Auguste Comte de forma errada.

2.3.1.6. Reforma Eptácio Pessoa – 1901

De 1891 a 1900, a Reforma Benjamin Constant foi descaracterizada por inúmeras sub-reformas. Com base na análise dessas sub-reformas foi decretada a Reforma Eptácio Pessoa³² – decreto nº 3.890, de 1º de janeiro de 1901. (ZOTTI, 2005)

Dessa forma, Eptácio Pessoa fez algumas alterações no currículo que descaracterizaram a orientação positivista da Reforma anterior. Incluiu a Lógica entre as disciplinas obrigatórias no ensino secundário e retirou a Biologia, a Sociologia e a Moral, “acentuando assim, a parte literária em detrimento da científica”. (BELLO, 2004)

A partir dessa Reforma consolidou-se, para o ensino secundário das escolas estaduais, municipais e particulares brasileiras, o regime de equiparação ao Colégio Pedro II, ou seja, as escolas funcionavam com a mesma estrutura didático-pedagógica desse estabelecimento. É preciso lembrar que o Colégio Pedro II foi criado na tentativa de instituir um curso secundário estruturado nos moldes franceses. A intenção era a de formar o homem culto, isto é, ter estabelecimentos de ensino que garantissem uma cultura clássico-literária para aqueles que pretendiam o acesso ao Ensino Superior.

Nesse período, os programas de ensino do Colégio Pedro II, indicavam, como modelo para o ensino de Geometria, os livros F.I.C. – Elementos de Geometria e de Geometria Descritiva. Os F.I.C. – coleção de livros elaborados pelas escolas da Congregação dos *Frères*

³² Eptácio Lindolfo da Silva Pessoa foi Ministro da Justiça e Negócios Interiores no governo do presidente Campos Sales, entre 1898 e 1902.

de *L'Instruction Chrétienne* – foram traduzidos no final do século XIX pelo professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, diretor e professor de Matemática do Colégio Pedro II.

Os F.I.C. seguiam o estilo euclidiano e foram adotados pelo Colégio Pedro II desde 1895 e permaneceram como modelo para os programas de ensino, pelo menos até 1930³³ (VALENTE, 2004b).

Paralelamente às impressões dos didáticos de Matemática dos F.I.C. foram editadas obras didáticas de outras congregações católicas, entre elas a coleção F.T.D., ligada à Congregação dos Irmãos Maristas de Lyon, na França. Essa Congregação, a partir de 1897, teve sua própria produção didática assinada pela sigla F.T.D. No Brasil, em 1902, a Editora F.T.D. – Frère Théophane Durand³⁴ – foi aberta no Rio de Janeiro e veio suprir a demanda de livros europeus pelos novos colégios católicos criados no Brasil pelos maristas, donos da Editora. Foram também utilizados em liceus provinciais, escolas normais e preparatórios. Os didáticos de Matemática da Coleção F.T.D. tornaram-se referência nacional, figurando nos programas do Colégio Pedro II. (VALENTE, 1997, p. 180-182)

A Reforma Eptácio Pessoa estruturou o ensino secundário em seis anos.

2.3.1.7. Reforma Rivadávia Correia – 1911

Rivadavia Correia³⁵, outro positivista, em 1911, retomou as idéias de Comte instituindo uma Reforma – decreto nº 8.660, de 05 de abril de 1911 – que refletiu a influência positivista nos currículos das escolas. (SILVA, 1999, p. 252)

Segundo Bello (2004), a Reforma Rivadávia Correia estabeleceu o ensino livre – possibilidade de oferta de ensino que não fosse por escolas oficiais e de frequência – e retirou do Estado o poder de interferência no setor educacional.

³³ Após esse período, os didáticos por F.I.C., traduzidos por Raja Gabaglia, ganharam revisão de professores do Colégio Pedro II e tiveram edições até meados da década de 1950. O livro *Elementos de Geometria* dessa coleção chegou à 14ª edição em 1954. (VALENTE, 1997, p. 177)

³⁴ Frère Théophane Durand foi diretor geral da Congregação Marista de 1883 a 1907. (MIORIM, 2005, p. 02)

³⁵ Rivadávia da Cunha Correia foi Ministro da Justiça e Negócios Interiores no governo do presidente Hermes da Fonseca, entre 1910 e 1914.

A Reforma tinha a pretensão de tornar o curso secundário formador do cidadão e não um simples promotor dos alunos a um nível superior. Além disso, pregou a abolição do diploma em troca de um certificado de assistência e aproveitamento e transferiu os exames de admissão ao ensino superior – vestibular – para as faculdades, independente de certificado ou atestado de estudos secundários.

Essa Reforma estruturou o ensino secundário em seis anos para o externato e em quatro anos para o internato.

Bello (2004) afirma que “os resultados desta Reforma foram desastrosos para a educação brasileira”.

2.3.1.8. Reforma Carlos Maximiliano – 1915

Diante dos problemas causados pela Reforma anterior, surgiu a Reforma de Carlos Maximiliano³⁶ – decreto nº 11.530, de 18 de março de 1915 – que reoficializou o ensino no Brasil, ou seja, devolveu ao Estado o poder de interferência no setor educacional.

Carlos Maximiliano estabeleceu que o objetivo do ensino secundário era o de “ministrar aos estudantes sólida instrução fundamental, habilitando-os a prestar em qualquer academia, rigoroso exame vestibular” (apud ZOTTI, 2005).

Assim, para a entrada nos cursos superiores era necessário ser aprovado no exame vestibular e possuir diploma de conclusão do curso secundário, sendo exigido para tal, o cumprimento das seguintes disciplinas: Português, Francês, Latim, Inglês ou Alemão, Aritmética, Álgebra elementar, Geografia e elementos de Cosmografia, História do Brasil, História Universal, Física, Química e História Natural. (ZOTTI, 2005)

Essa Reforma estruturou o ensino secundário em cinco anos.

³⁶ Carlos Maximiliano Pereira dos Santos foi Ministro da Justiça e Negócios Interiores do governo do presidente Venceslau Brás, entre 1914 e 1918.

2.3.1.9. Reforma Rocha Vaz – 1925

A década de 1920 foi marcada por diversos fatos importantes que modificaram as características da política brasileira.

No que se refere à educação, a partir desse momento, a ênfase clássica-literária na educação brasileira foi chegando definitivamente ao fim.

Até o final de 1925, os exames preparatórios para os futuros advogados, médicos e engenheiros, ainda continuaram a influenciar a organização das disciplinas matemáticas – Aritmética, Álgebra e Geometria/Trigonometria.

Os anos de 1925 a 1930 constituíram um período em que a obrigatoriedade da seriação para ingresso ao Ensino Superior adaptou-se ao sistema de cursos preparatórios. Instituiu-se uma época de transição entre o sistema antigo – dado pela possibilidade de eliminar exames para ingresso ao superior sem ter diploma do secundário – e o novo sistema – em que se tornava obrigatória a frequência a cada uma das séries do ensino secundário para a obtenção do diploma desse nível escolar.

O decreto nº 16.782A, de 13 de janeiro de 1925, do governo do presidente Arthur Bernardes, que ficou conhecido como Reforma Rocha Vaz, estabeleceu seis anos de duração para o curso secundário.

Esse decreto manteve a mesma concepção já praticada anteriormente, isto é, os exames é que davam referência às séries. Assim, o ensino seriado em todos os estabelecimentos de ensino, reforçava o caráter independente das disciplinas matemáticas. No caso específico da Geometria, seu desenvolvimento ocorria no terceiro e no quarto anos, conforme podemos verificar em Valente (2004a):

Conteúdos do 3º ano (1927):

1. Preliminares	7. Teoria da igualdade, casos fundamentais
2. Introdução	8. Relação entre lados e ângulos no triângulo
3. Medida da linha reta	9. Linhas envolvidas e envolventes
4. Ângulos, perpendiculares, bissetriz	10. Perpendiculares e oblíquas
5. Propriedades do triângulo isósceles	11. Noções de lugar geométrico
6. Teoria da igualdade de triângulos	12. Teoria das paralelas

13. Soma dos ângulos dos polígonos paralelogramos	20. Traçado de paralelas e perpendiculares
14. Retas concorrentes nos triângulos	21. Tangentes
15. Arcos e cordas	22. Linhas proporcionais
16. Tangente ao círculo	23. Divisão harmônica
17. Medida dos ângulos	24. Retas anti-paralelas
18. Quadrilátero inscritível	25. Semelhança de polígonos
19. Construção de ângulos de triângulos	26. Problemas sobre as tangentes

Conteúdos do 4º ano (1928):

1. Relações métricas no triângulo	25. Retas e planos paralelos
2. Relações métricas no quadrilátero	26. Transformação da soma em produto
3. Retas isogonais	27. Retas e planos perpendiculares
4. Cálculo das linhas notáveis do triângulo	28. Definição e uso das tábuas
5. Propriedades gráficas sobre as linhas proporcionais	29. Projeção de uma reta sobre um plano
6. Propriedades dos polígonos regulares	30. Ângulo de uma reta e um plano
7. Inscrição dos polígonos regulares	31. Formar uma fórmula calculável por logaritmos
8. Medida da circunferência	32. Ângulos diedros
9. Trigonometria	33. Relação trigonométrica de equação do 2º grau
10. Definição das linhas trigonométricas	34. Fórmulas relativas à resolução de triângulo
11. Cálculo de variação das linhas trigonométricas	35. Ângulos poliedros
12. Cálculo de inversão das linhas trigonométricas	36. Resolução do triângulo retângulo
13. Áreas poligonais	37. Propriedades gerais e área lateral do prisma
14. Relação entre as linhas trigonométricas de algumas áreas	38. Volume do prisma
15. Redução ao primeiro quadrante	39. Resolução de um triângulo qualquer
16. Relações algébricas entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco	40. Propriedades gerais e área lateral da pirâmide
17. Teoria das projeções	41. Volume da pirâmide
18. Áreas circulares	42. Propriedades de trigonometria prática
19. Adição e subtração de arcos	43. Cilindro
20. Áreas semelhantes	44. Cone
21. Multiplicação e divisão de arcos	45. Primeiras noções sobre a esfera
22. Primeiras noções sobre os planos	46. Propriedades dos triângulos esféricos
23. Volume da esfera	47. Área da esfera
24. Volume do segmento esférico	

Nessa época, a equiparação ao Colégio Pedro II ficou restrita aos estabelecimentos públicos estaduais.

Segundo a professora Romanelli (1986):

[...] a Reforma Rocha Vaz, no Governo Arthur Bernardes, em 1925, representou a última tentativa do período no sentido de instituir normas regulamentares para o ensino, tendo o mérito de estabelecer, pela primeira vez, um acordo entre a União e os Estados, com o fim de promover a educação primária, eliminar os exames preparatórios e parcelados, ainda vigentes e herança do Império. Foi, na verdade, uma tentativa de impor a sistematização sobre a desordem. (p. 43)

2.3.2. Segundo período: 1930 – 1960

2.3.2.1. Reforma Francisco Campos – 1931

Todas as reformas federais ocorridas na Primeira República – 1889 a 1930 – tentaram solucionar os problemas educacionais brasileiros. Segundo Romanelli (1986), nenhuma delas teve êxito:

Todas essas reformas, porém, não passaram de tentativas frustradas e, mesmo quando aplicadas, representaram o pensamento isolado e desordenado dos comandos políticos, o que estava muito longe de poder comparar-se a uma política nacional de educação. (p. 43)

Miorim (1998), confirma esse fato dizendo que:

Nenhuma das reformas que ocorreram após a de Benjamin Constant, até 1930, chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro, além de não resolver a antiga questão sobre a melhor formação secundária – literária ou científica. O ensino continuou a ser entendido como destinado à preparação apenas das profissões liberais – o direito, a medicina e a engenharia. (p. 89)

Em 1931, a Reforma Francisco Campos³⁷ – promulgada pelo decreto-lei nº 19.890, de 18 de abril de 1931 – fixou a duração de sete anos para o ensino secundário, no qual os cinco primeiros anos constituíam o ciclo fundamental e os dois últimos o complementar. Esses dois últimos anos eram destinados à preparação para os cursos superiores, tendo três subdivisões de acordo com a futura área profissional do candidato: médicas, exatas ou humanas.

Essa Reforma continuou caracterizada pelo enciclopedismo do currículo e pela retomada do sonho de Benjamin Constant de proporcionar aos jovens, no curso secundário, um pouco de todo o saber humano.

Como já foi dito, a partir de 1929, o regime misto que reunia a preparação aos exames parcelados e o ensino seriado, foi chegando ao fim. Dessa forma, segundo Valente (2004a), aqueles que desejavam cursar o Ensino Superior precisavam ingressar, após o primário, na primeira série do ensino secundário.

Valente (2004a), estabelecendo o contexto da época, esclarece que:

[...] com classes de alunos que só ao termo de seis, sete anos de estudo, tomariam o rumo do ensino superior, toda uma organização didático-pedagógica teve que ser construída. Todas as disciplinas deveriam ser repensadas para a nova clientela e as novas condições do trabalho escolar. Especificamente um novo ensino da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria necessitaria ser organizado para atender às classes de alunos com idade média de 11 anos. Esse, certamente, foi um dos motivos que levou o colégio-modelo do ensino secundário brasileiro – o Colégio Pedro II – a modificar o seu programa de ensino, a partir de discussões que haviam começado a serem feitas desde 1927. (p. 82)

O professor Euclides Roxo³⁸, diretor do Colégio Pedro II, foi o principal orientador dessas mudanças curriculares.

Tais modificações foram influenciadas pelo primeiro Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática. Esse movimento surgiu no final do século XIX, na Europa, presidido pelo matemático Felix Klein, mas foi fortalecido, em 1908, com a criação

³⁷ Francisco Luiz da Silva Campos foi primeiro ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública do governo do presidente Getúlio Vargas.

³⁸ Euclides de Medeiros Guimarães Roxo foi diretor do Colégio Pedro II a partir de 03/03/1926 até 1935.

da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática³⁹. Tinha como principal objetivo discutir e tentar solucionar as dificuldades no ensino da Matemática.

Esse foi um período de modernização, quando foram estabelecidas articulações entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, sendo criada uma nova disciplina denominada “Matemática”.

A nova proposta de ensino da Matemática no Brasil, tentava reunir as tendências do Movimento de Reforma Internacional: a importância de um ensino voltado para o ser humano, mais do que ao conteúdo a ser ensinado; a escolha do assunto a ensinar, tendo em vista as aplicações da Matemática ao conjunto das outras disciplinas, ou seja, a interdisciplinaridade. A esse respeito, Roxo destacava que:

A finalidade da matemática no ensino secundário seria preparar o aluno para a vida, utilizando aplicações práticas, de modo a torná-lo um cidadão para viver com dignidade em uma sociedade democrática. Tornava-se, pois, importante ensinar a matemática em perfeita interação com as outras disciplinas do curso, procurando aliviar o estudante de uma grande sobrecarga de estudos cujo interesse é puramente formalístico. (ROXO apud VALENTE, 2004a, p. 102)

Ainda em Valente (2004a) encontramos que, além disso, Roxo acentuava que essas tendências se complementavam e se harmonizavam, de forma que delas decorriam características que também se entrelaçavam e se completavam:

- a fusão dos diferentes ramos da Matemática: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, interligando-os em uma única disciplina;
- a introdução da noção de função, especialmente sob a forma gráfica;
- o abandono, em parte, da rígida Geometria Euclidiana;
- a introdução das noções de coordenadas e de Geometria Analítica, que são acessíveis aos alunos desde as primeiras séries;
- a introdução das noções de Cálculo Diferencial e Integral, mesmo que faltasse a base rigorosamente lógica, pois esta seria suprida com o processo intuitivo;

³⁹ Uma proposta formal para a criação dessa Comissão foi apresentada durante o Quarto Congresso Internacional de Matemática, realizado em abril de 1908 em Roma. Após a sua aprovação, estabeleceu-se a *Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* – CIEM, que foi denominada pelos alemães de IMUK – *Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission*. A partir de 1954, passou a ser conhecida como ICMI – *International Commission on Mathematical Instruction*. (MIORIM, 1998, p. 72)

- ainda em conexão com o estudo da Geometria elementar, o desenvolvimento do ensino do desenho projetivo e da perspectiva;
- a introdução do método de laboratório, que teria como propósito levar o aluno à descoberta de fatos matemáticos, de modo que áreas, volumes, comprimentos e ângulos fossem determinados por meio de experiências executadas pelos alunos;
- a utilização de réguas graduadas, compassos, instrumentos de medir ângulos, papel milimetrado, balanças, termômetros, alavancas, polias, aparelhos de demonstração, figuras e sólidos de vidro, de fios de seda etc, como recursos que, aliados ao método heurístico⁴⁰, permitiriam a experimentação e auxiliariam na descoberta, além de dar mais vivacidade e tornar mais interessante o ensino, ajudando o aluno a adquirir de modo suave a abstração Matemática;
- o desenvolvimento do método histórico, sustentando que os professores deveriam ter uma base sólida em História da Matemática. (ROXO apud VALENTE, 2004a, p.103)

Essa nova proposta foi oficializada pelo decreto-lei nº 18.564 de 15 de janeiro de 1929.

A partir da Reforma Francisco Campos, em 1931, tornou-se obrigatório, em todas as cinco séries do ciclo fundamental do ensino secundário, o ensino da nova disciplina Matemática, que deveria ser introduzida por meio de um ensino intuitivo, experimental, caminhando progressivamente para uma segunda etapa mais formal e abstrata.

No entanto, a proposta inovadora de Francisco Campos encontrou resistências para ser adotada. A esse respeito, Miorim (1998) afirma que:

A proposta de modernização do ensino de Matemática na escola secundária brasileira, contemplada pela Reforma Campos, encontrou algumas resistências para ser implantada. Essa resistência deveu-se, especialmente, a defensores do tipo de educação que havia caracterizado o ensino secundário brasileiro desde a sua origem, ainda no tempo dos jesuítas, ou seja, a escola clássico-humanista. (p. 81)

A autora declara ainda que houve oposição por parte de muitos professores que se sentiam inseguros para trabalhar a Matemática de forma diferente da habitual, fato agravado por não haver, inicialmente, livros didáticos que contemplassem as idéias modernizadoras:

⁴⁰ Método heurístico: permitir uma penetração lenta nas noções, dando ao estudante o sentimento de que ele mesmo descobre o que se lhe ensina.

Segundo as antigas orientações de ensino, os livros adotados até então eram compêndios separados de aritmética, álgebra, geometria ou trigonometria, que apresentavam, em geral, uma exposição formal dos conteúdos e uma quantidade extensa de exercícios.

As primeiras coleções que seguiram a moderna orientação do ensino de Matemática, publicadas a partir dos últimos anos da década de 20, foram Curso de matemática elementar, de Euclides Roxo, e Curso de matemática, de Cecil Thiré e Mello e Souza. (p. 98)

Assim, até a implementação da Reforma Campos, os diferentes ramos da Matemática – a Aritmética, a Álgebra e a Geometria – eram ensinados separadamente e por professores diferentes. Os livros didáticos utilizavam cada assunto sem a preocupação de estabelecer qualquer relação entre os diferentes ramos da Matemática. A partir dessa Reforma, o ensino da nova disciplina Matemática ficou sob responsabilidade de um só professor, que devia desenvolver integradamente, em cada série, o ensino dos vários assuntos. (PAVANELLO, 1993, p. 08 – 11)

2.3.2.2. Reforma Gustavo Capanema – 1942

A Reforma Gustavo Capanema⁴¹, também chamada Lei Orgânica do Ensino Secundário, promulgada pelo decreto-lei nº 4.244 de 09 de abril de 1942, criou o “ginásio” com quatro anos, em substituição ao ciclo fundamental do ensino secundário.

A Reforma Gustavo Capanema também manteve o caráter enciclopedista do ensino secundário e o dividiu em duas partes: o curso ginásial, de quatro anos, e o colegial, de três anos. Esse último era dividido em duas modalidades: o clássico e o científico. Somente mais tarde foi regulamentado o Curso Normal, por meio do decreto-lei nº 8.530 de 02 de janeiro de 1946.

Segundo a professora Pavanello (1989), os programas de Matemática dessa Reforma apresentaram algumas diferenças em relação aos da Reforma anterior: não mais se insistiu em que os três assuntos – Aritmética, Álgebra e Geometria – fossem abordados em cada uma das séries do curso ginásial. Dessa forma, a Geometria continuou a ser apresentada nas quatro séries, mas de maneira intuitiva nas duas primeiras e privilegiando o caráter dedutivo nas duas

⁴¹ Ministro do Ministério da Educação e Saúde Pública do governo Getúlio Vargas.

últimas. A Aritmética era ministrada somente nas séries iniciais e a Álgebra nas duas últimas. A Geometria tinha relativa prioridade no colegial, sendo programada para todos os anos.

A Reforma Capanema acentuou as críticas que há muito vinham sendo feitas ao ensino secundário: os programas eram considerados excessivamente longos para serem desenvolvidos em curto período de tempo, tornando meramente formal o ensino na maioria das escolas.

2.3.3. Terceiro período: Matemática Moderna (1960 – 1980)

2.3.3.1. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 1961

Diante do descontentamento existente, em 1951, Simões Filho⁴², pediu à Congregação do Colégio Pedro II, que elaborasse novos programas para o ensino secundário. Tais programas deveriam conter o conteúdo mínimo a ser desenvolvido nas escolas, ajustando-se às diferenças regionais.

De acordo com Pavanello (1989), esses programas não diferiram substancialmente do programa anterior. Os conteúdos permaneceram os mesmos, apenas distribuídos de forma diferente. A Geometria, não mais fez parte do programa da segunda série ginasial e, no colegial, ficou toda concentrada no primeiro ano, não mais sendo distribuída pelos três, como no anterior. As instruções metodológicas também não trouxeram novidades.

Na década de 1960, o Brasil passou por um desenvolvimento econômico, gerando um grande número de empregos, principalmente de nível médio, o que refletiu no campo da educação e, assim, no ensino da Matemática.

A Lei nº 4.024 de 20 de dezembro de 1961, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, considerou que o ensino de Matemática no curso ginasial, deveria ser, nas três primeiras séries, fundamentalmente de natureza instrumental, visando proporcionar aos educandos conhecimentos de ordem prática, exigidos pelas atividades cotidianas. Assim sendo, o programa teria que conter os conceitos de porcentagem, desconto, juros, conversão

⁴² Ernesto Simões da Silva Freitas Filho foi Ministro da Educação e Saúde Pública no governo do presidente Getúlio Vargas.

de medidas, problemas de velocidade e problemas de Geometria plana intuitiva. As preleções e memorizações deveriam ser reduzidas ao mínimo, dedicando-se o máximo do tempo possível à resolução de problemas e exercícios. Já na quarta série, dever-se-ia iniciar o estudo da Geometria plana dedutiva, limitada, porém, à demonstração dos teoremas mais importantes, e, sempre com vistas às aplicações de ordem prática. Nessa série, seriam também ministradas as primeiras noções de logaritmos decimais e de trigonometria. (PAVANELLO, 1989, p.160)

No mesmo período, imperava a segunda Reforma Internacional do Ensino da Matemática conhecida como “Matemática Moderna”. Seu desenvolvimento foi influenciado pelos trabalhos do Grupo Bourbaki⁴³, que tinham como principal objetivo, apresentar a Matemática de forma axiomática e unificada, com alto grau de rigor e abstração, sendo as estruturas os elementos unificadores.

A idéia central desse movimento foi a de adaptar o ensino às novas concepções surgidas com a evolução do conhecimento matemático. Indicou-se a mudança dos tópicos tradicionais que apareciam nos currículos da escola secundária até então. Isso significou trabalhar a Matemática do ponto de vista das estruturas algébricas, da teoria dos conjuntos e da lógica. Especificamente, com relação ao ensino da Geometria, Pavanello (1989) afirma que:

Se essa orientação, porém, pode ser facilmente posta em prática no tocante à álgebra e à aritmética, o mesmo não acontece com relação à geometria. [...] Desta forma, num primeiro momento, opta-se por acentuar, nos livros, as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, por adotar, para a geometria, a mesma simbologia usada para os conjuntos em geral, e por trabalhá-la segundo uma abordagem “intuitiva”. Esta abordagem se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização de teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. (p.163)

Mais ainda, para a mesma autora:

Para manter-se a coerência do movimento em questão, faz-se necessário, no entanto, propor um trabalho com a geometria sob o enfoque das estruturas, feito por planos vetoriais ou por transformações – e um trabalho sob este último enfoque já

⁴³ Nicolas Bourbaki foi um nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, na maioria franceses. Dentre eles, Cartan, Chevalley, Dieudonné e Weil.

vinha sendo feito por Dienes, que ministra vários cursos no Brasil, convidado pelos diversos grupos de estudo existentes nesse momento no país. [...] Mas poucos são os professores, no entanto, que dominam tais assuntos e acaba-se por abandonar essa idéia. (p.164)

Esse movimento acarretou o lançamento dos primeiros livros didáticos escritos sob influência da reforma. Para o curso ginásial, os primeiros textos foram os do professor Osvaldo Sangiorgi, editados pela Cia Editora Nacional.

A reforma, de alcance internacional, para sua implantação, determinou a formação de grupos de estudos para o ensino da Matemática no plano nacional de cada país e mesmo em nível internacional. No Brasil, os grupos mais importantes foram o GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – criado em 1961, em São Paulo; o GEEMPA – Grupo de Estudos de Ensino da Matemática de Porto Alegre – criado em 1964 e o GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Rio de Janeiro – criado em 1976.

Nas palavras da professora Lopes (2000), primeira presidente do GEPEM:

O GEEM, liderado por Osvaldo Sangiorgi e Renate Watanabe, teve como principal objetivo, preparar os professores para a Matemática Moderna. [...] Em fins da década de 70 o GEEM foi desativado. (p. 07)

Esse pode ser considerado um dos períodos mais importantes na história da Educação Matemática no Brasil. Em Miorim (1998), encontramos que:

Em nenhum outro momento o ensino da Matemática foi tão discutido, divulgado e comentado como naquele período. Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos ‘aprendiam’ a Matemática Moderna. (p.114)

No entanto, os professores reclamavam de um enfoque centralizado apenas na linguagem. A Matemática Moderna deu uma ênfase exagerada à simbologia da Teoria dos Conjuntos.

Conseqüentemente, no início da década de 1970, começaram a surgir fortes críticas ao movimento; no entanto, devido ao fato de ter alcançado uma forte penetração, as propostas de mudança aconteceram de maneira bastante lenta. “As reformas posteriores dedicaram-se mais

a se contrapor ao antigo ideário do que a esboçar um novo projeto, apresentando um conjunto de indicações relevantes mas sem referenciais explícitos”. (PIRES, 2000, p.16)

2.3.3.2. *Guias Curriculares para o ensino de 1º grau – 1975*

A Lei nº 5.692 de 11 de agosto de 1971⁴⁴, de reforma do ensino de 1º e 2º graus, estabeleceu que o ginásio deveria se deslocar do ensino secundário e integrar-se ao ensino primário.

Dessa forma, o primário e o ginásio foram unificados, formando a escola de 1º grau, instituindo a obrigatoriedade de oito anos escolares. Foi também criado o 2º grau profissionalizante, visando dotar o país de mão-de-obra qualificada para uma década que prometia mais crescimento na indústria e no comércio. Nessa época, supunha-se que o 2º grau visando o ingresso na universidade, seria dominado pelo ensino privado, o qual poderia ser remunerado pelas classes mais abastadas.

Após a promulgação dessa Lei, em 1975, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo divulgou os Guias Curriculares propostos para as disciplinas do núcleo comum⁴⁵ do ensino de 1º grau.

Esse Guia foi estruturado pelo Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais “Professor Laerte Ramos de Carvalho” – CERHUPE⁴⁶ – com o objetivo de reformular o currículo até então existente.

⁴⁴ Essa Lei foi instituída no período mais cruel da ditadura militar, onde qualquer expressão popular contrária aos interesses do governo era abafada, muitas vezes pela violência física. A característica mais marcante desta Lei era tentar dar à formação educacional um cunho profissionalizante. Dentro do espírito dos *slogans* propostos pelo governo, como "Brasil grande", "ame-o ou deixe-o", "milagre econômico" etc, planejava-se fazer com que a educação contribuísse, de forma decisiva, para o aumento da produção brasileira. É importante observar que, depois do golpe militar de 1964, muitos educadores passaram a ser perseguidos em função de posicionamentos ideológicos. Muitos foram calados para sempre, alguns se exilaram, alguns se recolheram à vida privada e outros, demitidos, trocaram de função. O Regime Militar espelhou na educação o caráter antidemocrático de sua proposta ideológica de governo: professores foram presos e demitidos; universidades foram invadidas; estudantes foram presos, feridos e mortos nos confrontos com a polícia. Os estudantes foram calados e a União Nacional dos Estudantes proibida de funcionar; o Ministro da Justiça declarou que "estudantes tem que estudar" e "não podem fazer baderna". (BELLO, 2004)

⁴⁵ As disciplinas do núcleo comum: Língua Portuguesa, Educação Artística, Educação Física, Estudos Sociais, Ciências, Programas de Saúde e Matemática.

⁴⁶ O CERHUPE foi criado pelo Decreto nº 2.204, de 22/08/1973.

Nele, encontramos as seguintes recomendações para o ensino de Matemática do 1º grau:

- Obter os conceitos com base nas atividades do aluno, na manipulação de instrumentos e materiais didáticos adequados, em situações tão próximas do concreto e da experiência do aluno quanto seja possível;
- A passagem ao abstrato deve ser feita gradativa e cuidadosamente, etapa por etapa, atendendo ao nível de amadurecimento do aluno;
- A orientação dada ao curso deve ser a da “Matemática Moderna” e, para isso, é necessário que se dê ênfase ao papel central desempenhado pelas estruturas matemáticas, que podem ser evidenciadas no estudo dos campos numéricos bem como na Geometria e ao conceito de relação e, mais especificamente, ao conceito de função, que pode ser abordado não só no estudo das funções numéricas, como também no estudo das transformações geométricas;
- Destacar o papel do raciocínio matemático. (p. 201)

Os assuntos que compõem o Guia Curricular são divididos em quatro temas: Relações e Funções, Campos Numéricos, Equações e Inequações e Geometria. O documento afirma ser, indiscutivelmente, o primeiro tema, o unificador da Matemática (p. 202) e apresenta um esquema geral de distribuição dos conteúdos:

Figura 9: Estrutura do Guia Curricular, 1975, p.213

Percebe-se, o enfoque “moderno”, enfatizando as estruturas algébricas dos conjuntos e apresentando o estudo das relações e funções como o aspecto fundamental da Matemática elementar.

Para a Geometria, os conteúdos estão assim especificados:

- Nível I – Figuras geométricas: introdução intuitiva ao estudo de propriedades topológicas.
- Nível II – Figuras geométricas: ampliação do estudo intuitivo de suas propriedades.
- Medidas: comprimento e área.
- 5ª série – Geometria intuitiva.
- 6ª série – Geometria intuitiva e construções geométricas.
- 7ª série – Início do emprego do raciocínio hipotético-dedutivo na Geometria.
- 8ª série – Homotetia e semelhança. Aplicações.
- Medidas: comprimento do círculo; áreas.

O Guia apresenta um quadro, por tema, esquematizando os conteúdos e os objetivos gerais. Nesses esquemas, foram utilizados dois tipos de sinais: o “x” – quando o conteúdo é citado explicitamente no Guia – e o “*” – quando o assunto está implícito nas atividades ou na resolução de problemas. Para o quarto tema – Geometria – encontramos:

TEMA IV GEOMETRIA									
OBJETIVOS: .. Adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo físico aparente. .. Adquirir habilidades em construções geométricas e processos de medida. .. Desenvolver a intuição geométrica.									
CONTEÚDO	NÍVEL I		NÍVEL II		5ª	6ª	7ª	8ª	OBSERVAÇÕES
	1ª	2ª	3ª	4ª					
1. Figuras geométricas.									Nos quatro primeiros anos, a Geometria deve ser desenvolvida como uma exploração do espaço físico aparente, iniciando pelas noções de caráter topológico como as de interior, exterior, fronteira, etc., dadas de modo completamente intuitivo, e continuando com o reconhecimento das formas geométricas comuns nesse mesmo mundo físico. Esse conhecimento deve ser obtido através da observação e manipulação de material didático conveniente. Mesmo nos quatro anos seguintes, a abordagem deve continuar intuitiva, baseada na experiência e observação. Utilizar as noções da Teoria dos Conjuntos como um meio auxiliar. Usar outros métodos além dos geométricos, na resolução de situações específicas. Empregar os resultados obtidos intuitivamente para chegar, por meio de deduções não muito longas nem complicadas, a outras propriedades. Destacar, sempre que possível, o conceito de transformação e procurar as propriedades invariantes por uma transformação. Procurar introduzir o conceito de segmento orientado, visando a noção posterior de vetor. A noção de área pode ser introduzida usando-se papel quadriculado, por contagem dos quadrados contidos na figura.
a. Noções topológicas: interior, exterior e fronteira; regiões, conexidade.	x	x	x	x	x	x			
b. Noções projetivas: retas, intersecções, convexidade.			x	x	x	x			
c. Noções afins: paralelismo; semelhança.				x	x	x	x	x	
d. Noções euclidianas: distâncias ângulos.			x	x	x	x	x	x	
2. Transformações geométricas.									
a. Conceito. Invariantes.						x	x	x	
b. Transformações através de coordenadas.								x	
3. Medidas.									
a. Comprimento.			x	x	(*)	x			
b. Áreas.			(*)	x	(*)	(*)	(*)	x	

Figura 10: Esquema de conteúdo por tema do Guia Curricular, 1975, p.212

Com relação a esse quadro, o documento esclarece que o fato de não aparecerem sinais nas séries subseqüentes, após a última ocorrência no sinal “x”, não significa que o conceito não seja mais utilizado; isso indica o momento em que o mesmo foi sistematizado, passando a ser utilizado, a partir daí, como instrumento de trabalho do aluno.

Pode-se verificar que o Guia sugere um curso de Geometria intuitiva, partindo da percepção para chegar ao estudo das propriedades, ou seja, à concepção. Propõe o uso de materiais manipuláveis e, pelo menos como objetivo, introduz o trabalho com as construções geométricas.

O Guia apresenta também, um quadro, por série, com especificações dos conteúdos, objetivos e algumas sugestões de atividades (Anexo B).

Pode-se verificar que o Guia Curricular propõe que o curso seja iniciado pela Geometria intuitiva, havendo sugestões de uso de materiais concretos, usando a linguagem e a simbologia da Teoria dos Conjuntos. Enfatiza que a Geometria possui um caráter abstrato e, sendo assim, símbolos e figuras que representam os seus conceitos, são apenas recursos que ajudam a entendê-los. A partir da 6ª série sugere o uso dos instrumentos de desenho – régua, compasso, esquadros e transferidor – para o estudo dos conceitos geométricos e introduz o estudo da Geometria das Transformações. Na 7ª e na 8ª séries, o estudo da Geometria é proposto de forma sistemática, através de definições formais e demonstrações.

Em 1978, uma Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP – da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, divulgou os Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática – Geometria para o 1º grau – 5ª a 8ª séries – publicação amparada pela Lei nº 5.988 de 14 de dezembro de 1973.

Esse documento foi elaborado com o objetivo de fornecer aos professores elementos para a identificação de atividades que permitam a efetiva implementação do Guia Curricular. Antes de apresentar tais atividades, na introdução, são discutidas as possíveis causas dos problemas encontrados no ensino da Matemática nos últimos vinte anos:

Muito papel e muita tinta têm sido gastos, nos últimos vinte anos, na discussão sobre os conteúdos da Matemática no ensino de 1º e 2º graus. Em nosso modo de ver, entretanto, há um erro de enfoque nessas discussões: não é no conteúdo que se encontra o problema do ensino da Matemática e sim na

metodologia utilizada na sua abordagem. Seria possível, até, afirmar que os objetivos propostos para a Matemática, no ensino de 1º grau, podem ser atingidos qualquer que seja o conteúdo selecionado. Fixados esses objetivos, o importante é verificar quais os assuntos, entre os vários existentes, que melhor se prestam à consecução dos mesmos. [...] mais que os conteúdos tradicionais, foi a arcaica metodologia utilizada no ensino da Matemática que levou à situação quase calamitosa atingida pelo ensino dessa matéria. (SÃO PAULO, 1978, p. 09)

Quanto aos problemas específicos relativos ao ensino da Geometria, encontramos:

No que diz respeito à Geometria, então, o problema se agravou com a insistência na utilização de um pseudo-raciocínio rigoroso, baseado, quase sempre, numa axiomática ‘furada’! [...] qualquer que seja o conteúdo abordado, achamos que o importante é explorar os conceitos sem preocupações de excessivo rigor. Qualquer situação explorada deve permitir que se façam pequenas ‘demonstrações locais’, em que devemos destacar:

- as condições admitidas como válidas (dados);
- o que deve ser demonstrado, chamando a atenção para o que pode ser deduzido das condições admitidas;
- os raciocínios efetuados para chegar a esses resultados, a partir dos dados e de outros conhecimentos já incorporados.

Desse modo, estamos dando uma idéia do método axiomático: as condições admitidas seriam os axiomas da teoria, os resultados seriam os teoremas e as ‘demonstrações locais’ fornecem o exemplo de aplicação do método dedutivo. (SÃO PAULO, 1978, p. 08-11)

Analisando as sugestões das atividades, é possível verificar que é proposto o uso de materiais concretos bem como construções geométricas em todas as séries. No entanto, valorizam-se os conceitos de transformação do plano nele mesmo, de invariante e de ponto fixo de uma transformação, usando-se a linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Como exemplo, podemos citar algumas atividades propostas na 6ª série:

Atividades:

1. Tome uma folha de papel comum e outra de papel transparente.
 - a) Marque na primeira folha dois pontos **a** e **b**, quaisquer.
 - b) Utilizando o compasso "transporte" o segmento $\overline{ab}$ para uma outra posição, obtendo o segmento $\overline{a'b'}$.
 - c) Pegue a folha de papel transparente. Coloque-a sobre a outra e decalque na folha de papel transparente os pontos **a** e **b**.
 - d) Dado um ponto **p** qualquer (marcado na folha comum) você pode associar a ele um outro ponto **p'** do seguinte modo:
 - com o papel transparente colocado como no item **c**, decalque no mesmo o ponto **p**;
 - desloque essa folha sobre a outra de modo que os pontos **a** e **b** se sobreponham aos pontos **a'** e **b'**;
 - decalque o ponto **p** sobre a folha comum: você obterá um ponto **p'**.
 - e) É fácil ver que:
 - todo ponto da primeira folha tem uma imagem sobre essa folha (determinada pelo processo acima);
 - os segmentos $\overline{ap}$ e $\overline{bp}$ se "sobrepoem" aos segmentos $\overline{a'p'}$ e $\overline{b'p'}$, respectivamente.
 - f) O processo acima permite associar a todo ponto do plano da folha de papel um outro ponto dessa mesma folha. Nesse caso, dizemos que está definida uma **transformação** do plano nele mesmo. Essa transformação pode ser, portanto, considerada como uma função cujo domínio e cujo conjunto de valores coincidem com esse plano.
 - g) Determine a imagem, por essa transformação:
 - dos pontos de um segmento $\overline{mn}$, qualquer;
 - dos pontos de um triângulo $\triangle pqr$, qualquer;
 - dos pontos de uma reta R , qualquer.
2. Numa folha de papel comum represente um ângulo qualquer: $\angle aOb$.
 - a) Coloque uma folha de papel transparente sobre a primeira folha e decalque o lado $\overrightarrow{oa}$ desse ângulo;
 - b) Fixe, com um alfinete ou com a ponta do compasso, o ponto correspondente ao vértice **o** e gire a folha de papel transparente até que o lado nele decalcado se sobreponha ao lado $\overrightarrow{ob}$;
 - c) Por esse processo, a cada ponto **p** do plano da folha comum fica associado um ponto **p'** desse mesmo plano.
 - d) Determine a imagem, por essa transformação:
 - de pontos que estejam sobre $\overrightarrow{oa}$;
 - de pontos que não estejam sobre $\overrightarrow{oa}$;
 - dos pontos de um segmento $\overline{mn}$ qualquer;
 - dos pontos de um $\triangle pqr$, qualquer.
 - e) Existem pontos do plano que coincidam com a sua imagem?

Este é um outro exemplo de uma transformação do plano nele mesmo.

Figura 11: Subsídios para a implementação do Guia Curricular, 1978, p. 25

Pavanello (1989) garante que a orientação de trabalhar a Geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores, acabou por fazer com que muitos deles deixassem de ensinar Geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a Álgebra. O estudo de Geometria passou a ser feito, quando muito, apenas no 2º grau. A substituição do Desenho Geométrico pela Educação Artística nos dois graus de ensino veio, no entanto, tornar ainda maior a dificuldade dos alunos em trabalhar com as figuras geométricas e suas representações.

É importante observar também que, nesse período, temos grande influência dos livros didáticos nos quais o ensino da Álgebra é realçado até pelo simples fato de a Geometria ser apresentada sempre nos capítulos finais das publicações.

2.3.4. Quarto período: Pós Matemática Moderna (1980 – 2006)

2.3.4.1. Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau – 1986

Em 1986, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo divulgou a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau – publicação amparada pela Lei nº 5.988 de 14 de dezembro de 1973.

A Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau possui diferentes versões⁴⁷ e foi estruturada pela Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP – da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. A partir de uma análise crítica aos Guias Curriculares anteriores, busca resolver os problemas relativos ao ensino de Matemática até então diagnosticados:

- preocupação excessiva com o treino de habilidades, com a mecanização de algoritmos, com a memorização de regras e esquemas de resolução de problemas, com a repetição e a imitação e não com uma aprendizagem que se dê, inicialmente, pela compreensão de conceitos e de propriedades, pela exploração de situações-problema nas quais o aluno é levado a exercitar sua criatividade, sua intuição;
- priorização dos temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de Geometria;
- tentativa de se exigir do aluno uma formalização precoce e um nível de abstração em desacordo com seu amadurecimento. (SÃO PAULO, 1988, p. 07)

⁴⁷ A 1ª edição foi publicada em 1986, havendo reimpressões em 1987 e 1988. A 2ª e a 3ª edições foram publicadas em 1988. A 4ª edição é de 1991, havendo reimpressões em 1991 e 1992.

A Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau modificou as orientações da Matemática Moderna. A terceira versão apresenta um paralelo com os Guias Curriculares explicitando as modificações. Para a Geometria encontramos:

	GUIAS CURRICULARES	NOVA PROPOSTA CURRICULAR
GEOMETRIA	<ul style="list-style-type: none"> • Objetivos gerais inovadores, como o desenvolvimento da <u>in</u>tuição geométrica, aquisição de habilidades em construções geométricas e processos de <u>me</u>didas, etc. • Propõe trabalhar a noção de transformação, até hoje <u>in</u>via bilizada. • Ênfase na utilização da <u>lin</u>guagem dos conjuntos na <u>geome</u>tria - o que desviou a <u>aten</u>-ção das propriedades <u>geométri</u>cas 	<ul style="list-style-type: none"> • Opção pelo ensino da Geometria a partir da manipulação, <u>explora</u>ção de objetos do mundo físico, reconhecimento das formas mais freqüentes de sua caracterização, através das propriedades, do <u>en</u>cadeamento e relacionamento <u>en</u>tre elas, caminhando para uma axiomatização provisória no <u>fi</u>nal do 1º grau.

Figura 12: Paralelo entre os Guias Curriculares de 1975 e a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau, 1992, p.181

Os assuntos que compõem essa Proposta Curricular são distribuídos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas. “Através deles pretende-se atingir as grandes metas para o ensino de Matemática na escola básica: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico” (SÃO PAULO, 1988, p. 17).

No documento, ao longo das oito séries, na medida do possível, os três temas são tratados simultaneamente. Como exemplo podemos citar o desenvolvimento da idéia de proporcionalidade, que envolve Números – razões e proporções – e Geometria – semelhança de figuras. Tais assuntos podem ser desenvolvidos paralelamente, sem delimitações rígidas.

Pretendia-se que o professor tratasse de todos os assuntos adequadamente, articulando-os sempre que possível, em vez de optar por um encadeamento linear de temas em que, começando com um deles, realizasse um tratamento exaustivo, prejudicando os demais. Segundo o documento, “essa alternativa, indesejável, tem sido muito freqüente, historicamente, com especial prejuízo para os temas de Geometria” (SÃO PAULO, 1988, p. 17).

A respeito da Geometria, o documento propõe que:

Pode-se estudar Geometria tendo como meta primordialmente a aprendizagem da lógica, da organização do conhecimento, partindo-se de pontos, retas e planos para somente ao final do percurso tratar de objetos tridimensionais. Pode-se ainda considerar o eixo para o ensino da Geometria o estudo de certas classes de transformações e das propriedades que elas preservam, desde as mais gerais que são as topológicas até as mais específicas que são as métricas, passando pelas propriedades projetivas. Ou pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização. Aqui a opção pelo último percurso citado se evidencia desde os primeiros contatos. (SÃO PAULO, 1988, p.11)

O documento também estabelece objetivos para o ensino de Matemática, que são as metas a serem alcançadas em cada série ou num conjunto de séries. Para a Geometria, encontramos que:

- No Ciclo Básico – 1ª e 2ª séries – a iniciação à Geometria parte da exploração sensorial dos objetos, da percepção das formas mais freqüentes. A composição e a decomposição de figuras são consideradas uma preparação necessária à noção de medida.
- Nas séries seguintes, procura-se, paulatinamente, caracterizar as formas por meio de propriedades e fazer sua classificação de acordo com essas propriedades. A noção de medida avança um pouco mais, sendo estabelecidas algumas unidades padronizadas do Sistema Métrico Decimal. Propriedades métricas simples, relacionadas com as formas geométricas, são também estudadas.
- Nas séries finais do 1º grau, são aprofundadas certas propriedades fundamentais dos números, das formas e das medidas. Agora já são estudadas relações entre propriedades tanto numéricas quanto geométricas, de modo que umas surgem como consequência de outras. Não há, ainda, uma preocupação sistemática com a formalização. (SÃO PAULO, 1988, p. 17 e 18)

É importante observar que a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau apresenta um quadro, por série, com sugestões de distribuição dos conteúdos. Nesses quadros, os conteúdos estão disponibilizados de forma que os assuntos que se encontram na mesma altura da página podem ser trabalhados integradamente (Anexo C).

Pode-se verificar que o documento sugere a integração entre os diversos temas da Matemática. Analisando as sugestões de atividades para a 5ª até a 8ª série, bem como os seus comentários, é possível verificar que, para a Geometria, propõe o uso da régua e do compasso bem como materiais manipuláveis no seu ensino em todas as séries, para poder estudar as propriedades, bem como as relações entre elas. Assim, parece haver uma preocupação em estabelecer articulações entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

Como exemplo, podemos citar o assunto Noção de circunferência que está proposto nos conteúdos a serem desenvolvidos na 5ª série. Após a apresentação do tema considerando os seus aspectos básicos e sempre estabelecendo relações com as formas presentes no mundo ao redor, encontramos sugestões para que o professor trabalhe a divisão da circunferência em partes iguais:

Deve-se explorar apenas os casos de divisão mais simples, que podem ser feitos intuitivamente. Através de dobraduras em discos de papel (de diâmetros variados), explorar casos de divisão de uma circunferência em 2, 4, 8, 16 ... arcos iguais.

Utilizando o compasso, os alunos poderão verificar experimentalmente, que, com a medida do raio de uma circunferência, é possível dividi-la em 6 arcos iguais. A partir desse fato, os alunos perceberão imediatamente a possibilidade de dividir essa circunferência em 3 arcos iguais.

Coordenando esses fatos, utilizando o compasso e dobraduras, os alunos poderão dividir a circunferência em 12, 24, 48 ... arcos iguais.

É conveniente associar a cada arco obtido na divisão da circunferência em 2, 3, 4, 6, 8 ... partes iguais, a porcentagem de 50%, 33,3%, 25%, 16,6%, 12,5%, que este arco representa em relação à circunferência toda.

Figura 13: Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau, 1992, p. 89

2.3.4.2. Movimento de Reorientação Curricular – 1991

Em 1991, a Secretaria Municipal de Educação de São Paulo divulgou o Movimento de Reorientação Curricular.

Na área da Matemática, o documento foi desenvolvido a partir de agosto de 1989. Em 1990, foi produzida uma versão preliminar – Matemática: Visão da Área – que discute as concepções da área e como ela se apresenta no currículo. Esse documento – de número 5 – passou por seguidas discussões com os educadores, chegando à versão definitiva no final de 1991.

Os objetivos do projeto foram assim definidos: ampliar a discussão sobre o ensino de Matemática nas escolas e propor parâmetros para a construção de programas pelos educadores. O Movimento de Reorientação Curricular foi organizado em três momentos: problematização, organização dos dados problematizados e devolução das informações às escolas.

De acordo com a professora Pires (2000), nesse projeto, escolheu-se a interdisciplinaridade como caminho para possibilitar a ação pedagógica da escola, com o objetivo de superar um problema apontado pelos educadores, qual seja, o de que:

[...] o conhecimento, concretizado nos conteúdos escolares, além de ser proposto e organizado em gabinetes, é compartimentado e fragmentado artificialmente, havendo uma desconsideração total com a interdisciplinaridade natural do objeto do conhecimento. (p. 52)

A partir da Psicologia Cognitiva de Jean Piaget, que garante que no processo de aprendizagem, a compreensão provém essencialmente da ação e reflexão do próprio educando, o projeto propõe a busca de métodos que favoreçam essa ação/reflexão:

- Resolução de Problemas
- Modelagem
- Uso de jogos matemáticos
- Computadores

Sugere também propostas para a sala de aula que derivem dos aspectos sociais e emocionais que possam influir na aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, são destacadas:

- A etnomatemática
- A utilização da História da Matemática

No documento, encontramos que:

O movimento atual da educação matemática permite vislumbrar um futuro no qual essa disciplina não mais parecerá destituída de sentido ou assustadora, como o foi para a maioria dos estudantes nos últimos dois ou três séculos. (p. 10)

De acordo com os objetivos gerais, o Movimento de Reorientação Curricular traz como estratégias específicas para promover o ensino e a aprendizagem da Matemática na sala de aula:

- O uso da Resolução de Problemas;
- O estímulo à comunicação matemática;
- O estabelecimento de conexões entre a Matemática e as demais disciplinas e entre os diferentes temas do conteúdo matemático⁴⁸;
- O desenvolvimento de formas de pensar – compor/decompor, combinar, pensar em transformações, estabelecer relações, abstrair, procurar regularidades, generalizar e deduzir.

Pretende-se que os professores sejam ousados e flexíveis, abandonando, sempre que necessário, a sequência de conteúdos estabelecida pelos livros didáticos. De fato, no documento, encontramos que:

[...] o professor, ao aderir a esta proposta, precisará de grande flexibilidade, devendo muitas vezes abandonar o cómodo programa linear, criado por ele ou sugerido pelo livro didático. Só assim poderá promover um aprendizado significativo, ligado à realidade. Só assim favorecerá uma construção do conhecimento centrada no educando. Planos, programas e livros didáticos permanecerão úteis, mas somente como apoios e não mais como guias.

Aceitar um trabalho pedagógico não previamente estabelecido requer ousadia e envolve um bocado de imprevisto, como se dá na própria vida. No entanto, o aprendizado sendo uma ação humana, as condições de sua realização dificilmente poderiam ser diferentes. (p. 33)

⁴⁸ O Movimento de Reorientação Curricular afirma que, nas propostas curriculares anteriores, os conteúdos da Matemática – Geometria, Álgebra e Aritmética – eram trabalhados isoladamente, não havendo articulações entre eles.

É importante observar que esse documento é uma proposta de ação pedagógica que foi elaborada simultaneamente à experimentação em sala de aula. Dessa forma, paralelamente a ele, também foi divulgado o documento 6 – Matemática: Relatos de Prática – que revelou algumas práticas de educadores que empreenderam a reorientação curricular através da sua ação cotidiana em sala de aula.

Nos relatos é possível observar o uso da interdisciplinaridade, via tema gerador, onde o ponto de partida são situações reais e significativas para os alunos e que permitem uma articulação entre os diversos campos da Matemática e também entre as demais disciplinas. Nessas conexões, sempre são citados conceitos geométricos, como se pode verificar no exemplo seguinte:

[...] os sistemas geográficos de orientação e localização utilizam ângulos e coordenadas parecidas às cartesianas; os mapas estão relacionados aos conceitos de semelhança e escala; as idéias de comprimento, área e volume são utilizadas nas ciências físicas e biológicas (a capacidade pulmonar dos mamíferos, por exemplo, só pode ser apreciada a partir de conhecimentos de área e volume); os sistemas de medida são fundamentais na experimentação científica; a Matemática disponível em cada momento histórico relaciona-se com a economia das sociedades da época. (p.24)

2.3.4.3. A transição para o século XXI: o tratamento dado à Geometria na Matemática de hoje

O educador Ubiratan D'Ambrosio afirma que:

Hoje o objetivo declarado de todos os governos é levar todas as crianças à escola, esperando que elas aprendam a ler, escrever e contar. Mas é uma ilusão acreditar que sabendo ler, escrever e contar, a criança estará preparada para o mundo moderno. O mundo de hoje não é o mesmo dos séculos XIX e XX. Estamos numa transição milenar. São outras percepções do grande e do pequeno, outro ritmo de evolução do tempo e outra mobilidade para o ser humano. Estão se definindo outros modos de produção e de propriedade, outras formas de organização familiar e social. Simplesmente, o mundo está mudando.

Que conteúdos servirão para o mundo de amanhã, no qual nossas crianças estarão atuando? Jamais foi tão verdade dizer que uma boa educação é aquela que prepara para o novo ..., um novo que desconhecemos. (D'AMBROSIO, 2005)

Em 1980, o NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*, grupo de estudos formado nos Estados Unidos a partir de 1956 para realizar a reforma do conteúdo e da filosofia para o ensino da Matemática – apresentou recomendações para o ensino de Matemática que repercutiram no mundo todo. Nelas, a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), afirmam que essas idéias influenciaram as sucessivas reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentaram pontos de convergência, como:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação. (p. 20)

No Brasil, a partir da década de 1990, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's – que estão em vigor até hoje.

2.3.4.3.1. *Parâmetros Curriculares Nacionais – 1998*

Em 1998, a Secretaria de Educação Fundamental divulgou os Parâmetros Curriculares Nacionais – publicação amparada pela Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 – a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB. Os PCN's denominam 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental a etapa escolar compreendida de 5ª até a 8ª série.

Esse documento é o resultado de um trabalho que contou com a participação de muitos educadores brasileiros e tem a marca de suas experiências e de seus estudos, permitindo assim que fossem produzidos no contexto das discussões pedagógicas atuais. Inicialmente foram elaborados documentos, em versões preliminares, para serem analisados e debatidos por professores que atuam em diferentes graus de ensino, por especialistas da educação e de outras áreas, além de instituições governamentais e não governamentais.

Surgiram a partir de uma análise crítica às Propostas Curriculares anteriores, ocorridas a partir da década de 1920, com apoio nas recomendações do NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics* dos Estados Unidos. Um dos focos principais da crítica foi à influência da Matemática Moderna.

As críticas e sugestões apresentadas contribuíram para a elaboração da versão atual, que deverá ser revista periodicamente, com base no acompanhamento e na avaliação de sua implementação.

Os Parâmetros têm por objetivo as discussões educacionais que envolvam escolas, pais, governos e sociedade e dêem origem a uma transformação positiva no sistema educativo brasileiro; o desenvolvimento dos projetos educativos das escolas; a reflexão sobre a prática pedagógica; o planejamento de aulas; a análise e seleção de materiais didáticos e de recursos tecnológicos; a formação e atualização dos professores.

Dessa forma, de modo geral, os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Existe a pretensão razoavelmente explícita de criar condições nas escolas, que permitam aos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício consciente e pleno da cidadania.

Para perseguir esses objetivos, a escola deverá trabalhar conteúdos que os PCN's dividem em:

- Áreas: Língua Portuguesa, Língua Estrangeira, Matemática, Arte, Ciências Naturais, História, Geografia e Educação Física.
- Temas transversais: Ética, Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo.

Especificamente, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, disponibilizando o todo ao conjunto dos professores brasileiros.

Nesse sentido, os PCN's têm por objetivo a construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no Ensino Fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de que o aluno venha a valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e que venha a percebê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Destacam a importância de que o aluno desenvolva atitudes que demonstrem sua segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, cultive a auto-estima, respeite o trabalho dos colegas e persevere na busca de soluções. Adotam como critérios para a seleção dos conteúdos a relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo. Indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação e da Informação.

Quanto aos conteúdos, apresentam um aspecto inovador ao explorá-los não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. Em função

da demanda social incorporam, já no Ensino Fundamental, o estudo da Probabilidade e da Estatística e evidenciam a importância da Geometria e das Medidas para desenvolver capacidades cognitivas fundamentais. (p.15 e 16)

Dessa forma, na área de Matemática, os conteúdos encontram-se divididos em:

- Conceituais: sub-áreas ou blocos:

Números e operações aritméticas e algébricas

Espaço e forma

Grandezas e medidas

Tratamento da informação (dados estatísticos, tabelas e gráficos, probabilidade e combinatória)

- Procedimentais: conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de

raciocínio lógico-algébrico

raciocínio geométrico

raciocínio combinatório

argumentação

capacidade de relacionamento entre conceitos

utilização de tecnologia

técnicas específicas de sub-áreas

capacidade de resolver problemas

- Atitudinais: conteúdos que possibilitem o desenvolvimento ou compreensão de

responsabilidade

iniciativa

cooperação

solidariedade

autonomia

observação

interesse

respeito

perseverança

socialização

valores – éticos, saúde, meio ambiente

criatividade

Segundo o documento,

As atitudes envolvem o componente afetivo – predisposição, interesse, motivação – que é fundamental no processo de ensino e aprendizagem. As atitudes têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam. (p. 50)

Os conteúdos selecionados aparecem organizados em blocos. Em dois deles, o assunto que permeia, é a Geometria, como será detalhado a seguir.

Espaço e Forma

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.

O trabalho com Espaço e Forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, a fim de possibilitar a visualização e a aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.

Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Deve-se destacar também no documento a importância das transformações geométricas – isometrias, homotetias – de maneira a permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e também como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Além disso, é fundamental que os estudos do Espaço e Forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de maneira a permitir ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (p. 51)

Grandezas e Medidas

Esse bloco caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento.

Na vida em sociedade, as Grandezas e as Medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano.

As atividades em que as noções de Grandezas e Medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao Espaço e às Formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica.

Nesse bloco devem ser tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura etc) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica etc). Deve ser explorada a utilização de instrumentos adequados para medi-las, iniciando também uma discussão a respeito de algarismo duvidoso, algarismo significativo e arredondamento. Outro conteúdo destacado nesse bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física.

Além disso, os conteúdos referentes a Grandezas e Medidas devem proporcionar contextos para analisar a interdependência entre grandezas e expressá-la algebricamente. (p. 52)

É importante observar que os PCN's incentivam as interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento. Também são colocados como ensino de procedimentos a construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro e transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. (p. 68)

O documento também sugere que, no quarto ciclo, os problemas de Geometria devam fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo, o que não significa fazer um estudo puramente formal e axiomático, ou seja, as verificações empíricas não devem ser abandonadas. (p. 86)

Os Parâmetros trazem, na parte final, algumas orientações didáticas que pretendem contribuir para que os professores reflitam sobre o ensino da Matemática. A respeito do ensino da Geometria, encontramos:

Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc, demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno.

No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (p. 122)

Dentre as sugestões de conteúdos que devem ser desenvolvidos ao longo das quatro séries, destacam-se atividades que:

- desenvolvam habilidades de percepção espacial, como a leitura e a utilização de mapas e de plantas; o uso de recursos como as maquetes tridimensionais que, por um lado, contribuem para melhorar as imagens visuais dos alunos e, por outro, favorecem a construção de diferentes vistas do objeto pelas mudanças de posição do observador, freqüentemente indispensáveis na resolução de problemas que envolvem a localização e movimentação no espaço e que, além disso, levam o aluno a observar as relações entre tamanhos e aproximar-se da noção de proporcionalidade;
- explorem a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans e poliminós que fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos e hexágonos regulares. Tais explorações permitem também a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos seus ângulos internos;
- envolvam as transformações de uma figura no plano que permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para esse estudo. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc. O estudo das transformações pode ser um ponto de partida para a construção dos conceitos de congruência e semelhança;
- desenvolvam a capacidade de desenhar, como a representação plana de figuras espaciais. Quando os alunos têm que representar um objeto geométrico por meio de um desenho, devem buscar uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizar o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto;

- promovam a construção de um caminho que, a partir de experiências concretas, leve os alunos a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. (p. 123 a 126)

Com respeito a essa última sugestão, o documento estabelece que é preciso tomar cuidado para que não haja confusão, da parte dos alunos, em quando realmente se está provando um teorema ou simplesmente fazendo um experimento que comprove a hipótese inicial. A esse respeito, encontramos:

Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como “provas” no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais. (p. 127)

Como exemplo, o documento cita o Teorema de Pitágoras, como sendo um assunto onde se encontram freqüentes desvios quando se tentam articular a atividade concreta de comprovação e a efetiva demonstração do fato.

Nesse sentido, às vezes, o professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, um modelo material de um quadrado. Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $c^2 = a^2 + b^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi “provado”.

Figura 14: Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, p. 126

Com relação a essa atividade os PCN's esclarecem ainda que:

No caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos. (p. 127)

Dessa forma, entendemos que os PCN's não obedecem ao modelo tradicional de listagem de conteúdos puramente como acontecia na maioria das Propostas Curriculares anteriores. Pires (2000) fortalece essa conjectura, dizendo que:

As novas concepções, parecem querer desvencilhar-se das correntes seculares que determinam a organização curricular. Embora as regras da linearidade ainda se façam bastante presentes, é possível perceber indícios de uma prática que, aos poucos, tende a se aproximar da idéia de rede. (p. 65)

Os PCN's pretendem fazer com que os professores mostrem a Matemática como necessária à formação do cidadão, estabelecendo as conexões existentes ao mundo do trabalho, nas diversas profissões, e não simplesmente levando as crianças e os jovens à escola, esperando que aprendendo a ler, escrever e contar seja suficiente para prepará-los para o mundo moderno.

Especificamente, com relação ao ensino da Geometria, consideramos que os PCN's sugerem a articulação entre a percepção, a construção, a representação e a concepção, mostrando um avanço com relação às propostas curriculares anteriores.

É importante destacar que os PCN's têm um caráter de orientar e não sejam confundidos com um programa oficial. A preservação da liberdade do professor na organização do currículo deve ser mantida para atender a especificidade de cada região.

Partindo desse estudo histórico, analisaremos agora, como livros didáticos de Matemática, atuais ou mais antigos, tratam o estudo da Geometria.

Com isso, pretendemos mapear como tais obras abordam a Geometria quanto aos quatro processos de construção do conhecimento geométrico descritos no Capítulo 1 e quanto

às Propostas Curriculares vigentes na época da publicação do livro. Para isso, foram selecionados alguns dos livros didáticos que foram usados por alunos e professores no decorrer do tempo. O nosso ponto de partida é o século XIX, mais precisamente o ano de 1837, em que foi criado o Colégio Pedro II, instituição que foi considerada referência didático-pedagógica para o ensino nos demais estabelecimentos nacionais.

A descrição detalhada desta análise será apresentada no próximo capítulo.

A fim de facilitar a leitura, apresentamos a tabela a seguir, que contém um resumo das Propostas Curriculares de Matemática estudadas nesta seção.

	PROPOSTA CURRICULAR	DATA	CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS GERAIS	CARACTERÍSTICAS DA PROPOSTA PARA A GEOMETRIA	
REFORMAS NACIONAIS DE ENSINO	Ponto de partida: criação dos cursos jurídicos	1827	<ul style="list-style-type: none"> - Para ingresso no ensino secundário não se exigia a conclusão do primário; para ingresso no ensino superior não se exigia a conclusão do secundário. - Criação, em 1837, do Colégio Pedro II, que deveria funcionar como padrão para os demais estabelecimentos de ensino secundário. - Para os exames preparatórios aos cursos jurídicos, usavam-se como referência, os livros adotados pelo Colégio Pedro II. 	<ul style="list-style-type: none"> - A Geometria era, juntamente com as matérias de humanidades, exigida nos exames de ingresso aos cursos jurídicos. 	PRIMEIRO PERÍODO 1827-1930
	Reforma Paulino de Souza	1870	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de sete anos para o ensino secundário. - Estabelecimento, no Colégio Pedro II, de um ensino de caráter formativo, habilitando os alunos não só para os estudos superiores, mas para a vida. 	<ul style="list-style-type: none"> - Era considerada a lógica prática e o que habilitava a raciocinar com rigor e exatidão, exercitando a razão e possibilitando aos estudantes, tirar conclusões precisas, sendo dessa forma, indispensável. 	
	Reforma Leôncio de Carvalho	1878	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de sete anos para o ensino secundário. - Permissão para cada professor expor livremente suas idéias e ensinar as doutrinas que acreditasse verdadeiras, pelos métodos que julgasse melhores. 	<ul style="list-style-type: none"> - Na Reforma de 1870, o ensino de Geometria, restringiu-se ao estudo da Geometria Plana. Em outros momentos, foram estudados tanto a Geometria Plana quanto a Sólida. 	
	Reforma Homem de Mello	1881	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de sete anos para o ensino secundário. - Dentre as matérias que deveriam ser estudadas em cada ano do ensino secundário, a maior parte do tempo era dedicada ao estudo de Humanidades. 	<ul style="list-style-type: none"> - Em 1881, a Geometria era estudada apenas no primeiro ano do ensino secundário. Em 1890, era estudada do segundo ao sexto anos. Em 1925, era estudada no terceiro e quarto anos. 	
	Reforma Benjamin Constant	1890	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de sete anos para o ensino secundário. - Exigência dos exames de preparatórios ou exames parcelados para a matrícula nos cursos superiores que formariam os futuros advogados, médicos e engenheiros. - Possibilidade de eliminar exames para ingresso ao superior sem ter diploma do secundário. - Rompimento com a tradição clássico-humanista predominante até então, valorizando a ciência. - Baseada no positivismo de Auguste Comte que considerava a Matemática como a ciência fundamental. 	<ul style="list-style-type: none"> - Os primeiros livros de Geometria adotados no Colégio Pedro II foram: <i>Elementos de Geometria</i> de Lacroix, <i>Elementos de Geometria e</i> 	
	Reforma Epitácio Pessoa	1901	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de seis anos para o ensino secundário. - Estabelecimento do Colégio Pedro II como referência do ensino secundário nas escolas estaduais, municipais e particulares brasileiras. - Inclusão da Lógica entre as disciplinas obrigatórias no ensino secundário e retirada da Biologia, da Sociologia e da Moral, acentuando assim, a parte literária em detrimento da científica. 		
	Reforma Rivadávia Correia	1911	<ul style="list-style-type: none"> - Duração, para o ensino secundário, de seis anos para o externato e de quatro anos para o internato. - Retomada das idéias de Auguste Comte refletindo a influência positivista nos currículos das escolas. - Retirada do Estado do poder de interferência no setor educacional. - Estabelecimento do curso secundário como formador do cidadão e não um simples promotor dos alunos a um nível superior. 		

R E F O R M A S N A C I O N A I S D E E N S I N O	Reforma Carlos Maximiliano	1915	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de cinco anos para o ensino secundário. - Devolução, ao Estado, do poder de interferência no setor educacional. - Estabelecimento de que o objetivo do ensino secundário era o de ministrar aos estudantes sólida instrução fundamental, habilitando-os a prestar em qualquer academia, rigoroso exame vestibular. - Para a entrada nos cursos superiores era necessário ser aprovado no exame vestibular e possuir diploma de conclusão do curso secundário, sendo exigido para tal, o cumprimento de algumas disciplinas: Português, Francês, Latim, Inglês ou Alemão, Aritmética, Álgebra elementar, Geografia e elementos de Cosmografia, História do Brasil, História Universal, Física, Química e História Natural. 	<i>Trigonometria Retilínea</i> de Cristiano Benedito Ottoni e <i>Curso de Geometria</i> de Timotheo Pereira. A partir de 1895 até aproximadamente 1950, foram indicados os livros das coleções francesas F.I.C. e F.T.D., todos eles seguiam o estilo euclidiano.
	Reforma Rocha Vaz	1925	<ul style="list-style-type: none"> - Duração de seis anos para o ensino secundário. - Instituição da obrigatoriedade da frequência a cada uma das séries do ensino secundário para o ingresso ao ensino superior. - A equiparação ao Colégio Pedro II restringiu-se aos estabelecimentos públicos estaduais. 	<ul style="list-style-type: none"> - Na Reforma Benjamin Constant, de 1890, foi recomendado, nas Escolas Militares, o livro <i>Elementos de Geometria</i> de Clairaut.
	Reforma Francisco Campos	1931	<ul style="list-style-type: none"> - Divisão do ensino secundário em dois níveis: um Curso Fundamental de cinco anos, comum a todos os alunos, seguido de um Curso Complementar, de dois anos, dividido em três áreas – médicas exatas e humanas – destinado aos candidatos aos cursos superiores. - Estabelecimento de mudanças curriculares influenciadas pelo Primeiro Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática, tendo o professor Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, como o principal orientador dessas mudanças. - Estabelecimento de articulações entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, criando-se uma nova disciplina denominada “Matemática”. - Obrigatoriedade, em todas as cinco séries do ciclo fundamental do ensino secundário, do ensino da nova disciplina Matemática, devendo ser introduzida através de um ensino intuitivo, experimental, caminhando progressivamente para uma segunda etapa mais formal e abstrata. - O ensino da nova disciplina Matemática ficou sob responsabilidade de um só professor, devendo desenvolver integradamente, em cada série, o ensino dos vários assuntos – até a implementação dessa Reforma, os diferentes ramos da Matemática eram ensinados separadamente e por professores diferentes. - As primeiras coleções de livros que articularam os campos da Matemática foram <i>Curso de Matemática elementar</i>, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza publicadas a partir dos últimos anos da década de 1920. 	<ul style="list-style-type: none"> - A Geometria possuía as seguintes características: abandono, em parte, da rígida Geometria Euclidiana; introdução das noções de coordenadas e de Geometria Analítica desde as primeiras séries; desenvolvimento do ensino de desenho projetivo e de perspectiva, em conexão com o estudo da Geometria elementar; introdução do método de laboratório, levando o aluno à descoberta de fatos matemáticos, por meio de experiências executadas; utilização de régua graduada, compassos, instrumentos
	Reforma Gustavo Capanema	1942	<ul style="list-style-type: none"> - Divisão do ensino secundário em duas partes: o curso ginasial de quatro anos e o colegial de três anos, dividido em duas modalidades – o clássico e o 	

1930-1960

S
E
G
U
N
D
O

P
E
R
Í
O
D
O

			<p>científico.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Acentuação de críticas: os programas eram considerados excessivamente longos para serem desenvolvidos em curto período de tempo, tornando meramente formal o ensino na maioria das escolas. - Diferenças entre os programas de Matemática dessa Reforma e os da Reforma anterior: não mais se insistia em que os três assuntos – Aritmética, Álgebra e Geometria – fossem abordados em cada uma das séries do curso ginasial. A Geometria continuou a ser apresentada nas quatro séries, mas de maneira intuitiva nas duas primeiras e privilegiando o caráter dedutivo nas duas últimas. A Aritmética era ministrada somente nas séries iniciais e a Álgebra nas duas últimas. A Geometria tinha relativa prioridade no colegial, sendo programada para todos os anos. 	<p>para medir ângulos, papel milimetrado, figuras e sólidos de vidro, de fios de seda etc, que permitiam a experimentação e auxiliavam na descoberta, dando mais vivacidade e tornando o ensino mais interessante, de modo que a abstração Matemática aparecesse suavemente.</p>	
REFORMAS NACIONAIS DE ENSINO	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional	1961	<ul style="list-style-type: none"> - Manteve a mesma estrutura para o ensino secundário da Reforma anterior. - Influência da Segunda Reforma Internacional do Ensino da Matemática conhecida como Matemática Moderna que estabeleceu trabalhar a Matemática do ponto de vista das estruturas algébricas, da teoria dos conjuntos e da lógica, de forma axiomática e unificada, com alto grau de rigor e abstração. - Os primeiros livros didáticos escritos sob influência da Matemática Moderna foram os do professor Osvaldo Sangiorgi, editados pela Cia Editora Nacional. 	<ul style="list-style-type: none"> - A Geometria, não mais fez parte do programa da segunda série ginasial, na década de 1950. - A Geometria era trabalhada sob o enfoque das estruturas, feito por planos vetoriais e por transformações. - Acentuaram-se, nos livros didáticos, as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando, para a Geometria, a mesma simbologia usada para os conjuntos em geral. - A Geometria deveria ser trabalhada segundo uma abordagem intuitiva nas primeiras séries e dedutivamente nas últimas séries do ensino secundário, fazendo-se somente as demonstrações dos 	T E R C E I R O P E R Í O D O 1960-1980
	Reforma do ensino de 1º e 2º graus	1971	<ul style="list-style-type: none"> - Unificação do primário e do ginásio, formando a escola de 1º grau, instituindo a obrigatoriedade de oito anos escolares. - Criação do 2º grau profissionalizante. 		
REFORMAS ESTADUAIS DE ENSINO SÃO PAULO	Guias Curriculares para o ensino de 1º grau	1975	<ul style="list-style-type: none"> - Reformulação do currículo existente para cada disciplina, apresentando um quadro, por série, com especificações dos conteúdos, objetivos e algumas sugestões de atividades. - Para a Matemática, seguiu a orientação da Matemática Moderna, estabelecendo, porém, que deveria ser ensinada com base na manipulação de instrumentos e materiais didáticos adequados, em situações tão próximas do concreto e da experiência do aluno quanto fosse possível; fazendo com que a passagem ao abstrato fosse feita gradativa e cuidadosamente, etapa por etapa, atendendo ao nível de amadurecimento do aluno. - Divisão dos conteúdos da Matemática em quatro temas: Relações e Funções, Campos Numéricos, Equações e Inequações e Geometria. - Estabelecimento do estudo das Relações e Funções como aspecto fundamental e articulador da Matemática elementar. - Os livros didáticos, nesse período, apresentavam a Geometria nos capítulos finais das publicações, o que realçava o ensino da Álgebra. 		

				teoremas mais importantes.	
	Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau	1986	<ul style="list-style-type: none"> - Manteve a mesma estrutura para o ensino de 1º grau da proposta anterior. - Modificação das orientações da Matemática Moderna sugerindo a integração, para todas as séries, entre os diversos temas da Matemática através da qual pretende-se atingir as grandes metas para o seu ensino na escola básica: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico. - Distribuição dos assuntos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas que deveriam ser trabalhados simultaneamente ao longo das oito séries do 1º grau. 	<ul style="list-style-type: none"> - Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática. Por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. 	
REFORMA MUNICIPAL DE ENSINO SÃO PAULO	Movimento de Reorientação Curricular	1991	<ul style="list-style-type: none"> - Interdisciplinaridade como caminho para possibilitar a ação pedagógica da escola. - A Resolução de Problemas, a Modelagem, o uso de jogos matemáticos e os computadores como meios que favorecem a ação/reflexão dos educandos no ensino da Matemática. - Sugestão de propostas para a sala de aula que derivassem dos aspectos sociais e emocionais que pudessem influir na aprendizagem dos alunos como a etnomatemática e a utilização da História da Matemática. 	<ul style="list-style-type: none"> - A Geometria deve ser iniciada através da manipulação, exploração de objetos do mundo físico e reconhecimento das formas mais freqüentes, por meio das propriedades e relacionamento entre elas, caminhando para um raciocínio dedutivo nas séries finais por meio de verificações empíricas. 	
REFORMA NACIONAL DE ENSINO	Parâmetros Curriculares Nacionais	1998	<ul style="list-style-type: none"> - Denominação da etapa escolar compreendida de 5ª até a 8ª série de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. - Estabelecimento de que a escola deve trabalhar conteúdos que são divididos em Áreas – Língua Portuguesa, Língua Estrangeira, Matemática, Arte, Ciências Naturais, História, Geografia e Educação Física – e Temas transversais – Ética, Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo. - Estabelecimento de que os conteúdos devem ser explorados não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. - Para a Matemática, têm por objetivo a construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. - Destaque para a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática, para a História da Matemática e para as Tecnologias da Comunicação e da Informação. - Incentivo para que o trabalho em sala de aula proponha interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento. 	<ul style="list-style-type: none"> - Devem ser exploradas situações em que sejam necessárias construções de materiais em sentido físico, bem como construções geométricas com régua e compasso, esquadro e transferidor, a fim de possibilitar a visualização e a aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. 	QUARTO PERÍODO 1980-2006

Tabela 1: Resumo das Propostas Curriculares de Matemática para a 5ª até a 8ª série, ocorridas no Brasil

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

3.1. Introdução

Neste estudo, pretendemos verificar a organização do ensino da Geometria no Brasil desde o século XIX até a atualidade fazendo um levantamento bibliográfico. A premissa admitida é de que a polarização percepção/concepção é insatisfatória para a compreensão da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico. Dessa forma, faremos uma análise dos principais livros didáticos das atuais 5^a a 8^a séries⁴⁹ que foram utilizados por alunos e professores no decorrer do tempo. Examinaremos a maneira pela qual o autor apresenta e desenvolve a Geometria no decorrer dessas quatro séries do Ensino Fundamental; se há equilíbrio e trânsito entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

Considerando que os livros didáticos representam um dos referenciais mais significativos nas práticas pedagógicas dos professores – apesar de, muitas vezes, serem o único recurso – constituem uma fonte de pesquisa rica para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino que está sendo desenvolvido. De acordo com Imenes (1989):

[...] o livro constitui-se em referencial indispensável para quem deseja saber como a matemática chega à sala de aula. A precariedade das condições de trabalho do professor e do aluno, aliada aos problemas de formação do professor, faz com que, via de regra, as aulas se tornem simples reprodução de textos. (p. 65)

Com relação à análise de livros didáticos, Silva (2000) declara que:

⁴⁹ Ou 6º ao 9º ano conforme a nova nomenclatura proposta pelo MEC.

É possível pela análise dos livros-texto de uma época, conhecermos muito sobre o ensino ministrado, sobre as concepções de Matemática e ensino dos autores e, inclusive, as opiniões de pessoas que se manifestaram sobre os livros-texto e forma de pareceres públicos. O livro pode ser considerado não apenas como um meio de transmitir conhecimentos, mas também de preservá-los. Dessa forma, nós podemos, por meio de sua análise, saber um pouco mais sobre o tipo de conhecimento que era transmitido aos alunos das nossas escolas. (p. 157-158)

Dessa forma, escolhemos livros representativos que foram adotados nos diferentes períodos históricos brasileiros estabelecidos no Capítulo 2 e que foram editados de acordo com as principais reformas instituídas no sistema nacional de ensino. Os títulos analisados “podem ser considerados representativos de suas épocas também porque, via de regra, salvo raras exceções, os diversos livros didáticos de um mesmo período guardam entre si profundas semelhanças e pouquíssimas diferenças”. (IMENES, 1989, p.66)

O intuito é de fazer uma análise sobre as modificações que foram ocorrendo com o ensino da Geometria no decorrer do tempo.

3.2. Os critérios de análise

A fim de viabilizar a análise daquilo que é apresentado pelos autores nos livros didáticos escolhidos, torna-se necessário estabelecer critérios que irão nortear o trabalho de pesquisa. Para tanto, destacamos alguns que foram especialmente identificados a fim de verificar o quanto a metáfora do tetraedro é respeitada.

1. O contexto histórico: identificar a época em que o livro foi escrito e/ou traduzido, no sentido de qual era a lei curricular vigente que norteava a produção de livros didáticos.
2. A Estrutura do livro e a Geometria: a maneira pela qual esse conteúdo específico está contemplado pelo autor, no sentido de constituir um único bloco, separado em alguns capítulos da obra, ou encontrando-se distribuído ao longo do livro, permeando outros assuntos.

3. A Geometria, a Aritmética e a Álgebra: a maneira pela qual esses conteúdos específicos se relacionam na obra.
4. Desenvolvimento do conteúdo: a maneira pela qual os conteúdos de Geometria são desenvolvidos com ênfase em:
 - Geometria axiomática
 - Geometria puramente intuitiva
 - Modelo: Conceito – exemplos – exercícios
 - Polarização percepção / concepção
 - Trânsito entre a percepção, a construção, a representação e a concepção
 - Exercícios envolvendo a construção e/ou a representação
 - Problemas motivadores, situações problematizadoras que levam em consideração principalmente os aspectos visuais e intuitivos para chegar à construção do conceito
 - Relações da Geometria com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento

3.3. Os livros didáticos

Fizemos uma seleção dos principais livros didáticos de 5^a até a 8^a série que foram utilizados por alunos e professores desde o século XIX – a partir da criação do Colégio Pedro II, em 1837, primeira escola secundária pública da cidade do Rio de Janeiro e que exerceu influência didático-pedagógica nas demais escolas secundárias brasileiras – até os dias atuais.

Começaremos com o livro *Elementos de Geometria* de Lacroix, o primeiro livro de Geometria adotado no Colégio Pedro II. Esse livro também foi utilizado na Academia Real Militar do Rio de Janeiro a partir de sua criação em 1810.

Em 1842, tem-se a adoção, no Colégio Pedro II, do livro *Elementos de geometria e trigonometria retilínea* de Cristiano Benedito Ottoni, que foi utilizado até 1898 quando foi substituído pelo livro *Curso de Geometria* de Timotheo Pereira. Ambos os autores são brasileiros.

Em 1892, temos a tradução do livro *Elementos de Geometria* do matemático francês Alexis Claude Clairaut. Esse livro influenciou as futuras propostas de reformulação do ensino da Geometria como, por exemplo, os livros dos autores brasileiros Olavo Freire e Francisco Cabrita do final da década de 80 do século XIX, que procuraram modificar a abordagem da Geometria rompendo com o estilo euclidiano (SILVA, 2000, p. 151). Entretanto, o livro de Olavo Freire foi destinado ao ensino primário e, dessa forma, não será objeto de estudo desta pesquisa. O livro de Clairaut foi recomendado para uso nas Escolas Militares na Reforma Benjamin Constant, de 1890, baseada no positivismo de Auguste Comte.

Desde o final do século XIX até aproximadamente metade do século XX, as coleções F.I.C. de origem francesa – que foram elaboradas pelas escolas da Congregação dos *Frères de L'Instruction Chrétienne* – e F.T.D. – que foram traduzidas e editadas pela Congregação dos Irmãos Maristas – foram as referências no ensino. Dessa forma, analisaremos os livros de Geometria elaborados por essas Congregações.

É importante salientar que uma característica dos livros do século XIX, é que não há claras separações do público-alvo a quem o mesmo se destina. Isso significa que, um mesmo livro de Geometria, por exemplo, poderia ser usado tanto para o ensino primário e o secundário como para o ensino secundário e o superior. (SILVA, 1999, p. 236)

Conforme foi visto no Capítulo 2, no século XX, especificamente a partir da Reforma Francisco Campos, de 1931, tornou-se obrigatório, em todas as séries do ciclo fundamental do ensino secundário, o ensino da Matemática interligando-se a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Dessa forma, os livros separados desses ramos da Matemática que eram adotados até então, foram substituídos por coleções que seguiram a moderna orientação do ensino. Tais livros começaram a ser publicados a partir dos últimos anos da década de 1920 e, uma das primeiras coleções foi Curso de Matemática de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza.

No século XX, Imenes (1989), ao se referir aos livros didáticos de Matemática que desempenharam papel significativo, afirma ser:

[...] bastante reconhecida a penetração que tiveram no país, até bem pouco tempo, as obras da coleção F.T.D. – sobretudo os volumes referentes à geometria. Esse é também o caso das obras de Júlio César de Mello e Souza (famoso como Malba Tahan), Euclides Roxo e Cecil Thiré – estes últimos, professores do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro.

Nos anos 50, especialmente no Estado de São Paulo, muitos estudantes utilizaram os livros de Osvaldo Sangiorgi. Alguns volumes de sua coleção para o ginásio chegaram à 100ª edição. Na década de 60, com a chegada do movimento renovador, dois autores fizeram grande sucesso: o próprio Sangiorgi e Scipione de Pierro Netto.

A partir da década de 70, com o declínio da ‘matemática moderna’, novos autores passaram a dominar o mercado. Dentre estes destaca-se José Ruy Giovanni, que lidera a venda de livros didáticos de matemática nos 1º e 2º graus. Em diversas coleções este autor faz parceria com Benedito Castrucci. (p. 65)

Dessa forma, analisaremos os livros de Osvaldo Sangiorgi, publicados antes – década de 1950 – e após o Movimento da Matemática Moderna – década de 1960.

No período pós Matemática Moderna, examinaremos os livros de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente da década de 1980 e finalmente, a coleção de livros dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis como representativos da época atual.

3.3.1. Primeiro período: 1827 – 1930

3.3.1.1. Sylvestre François Lacroix

Título da obra: *Éléments de Géométrie*

16ª Edição – 1848

Figura 15: Capa do livro de Lacroix (1848)

O contexto histórico:

Conforme vimos no capítulo anterior, em 1837 surgiu no Brasil, a primeira escola pública de ensino secundário na cidade do Rio de Janeiro – o Colégio Pedro II – que foi inspirado na organização dos colégios franceses.

Dessa forma, desde a sua criação, o Colégio Pedro II usou como referência para o ensino de Geometria o livro *Elementos de Geometria* do francês Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843).

Esse livro, bem como os de Aritmética e Álgebra de Lacroix, juntamente com as obras de Legendre, Euler e Francouer, foi recomendado na Carta Régia de 1810, que regulamentou a questão dos livros didáticos que deveriam ser usados no ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, instituída por essa Carta. Assim, após o recebimento desse documento, houve

[...] um grande esforço inicial na tradução dos autores recomendados. Isso durou aproximadamente duas décadas. Foi somente a partir da década de trinta que os brasileiros tomaram a iniciativa de escrever livros próprios, afastando-se das meras traduções. (SILVA, 2000, p. 112)

A tradução da obra *Elementos de Geometria* de Lacroix foi feita, em 1812, pelo brasileiro José Vitorino dos Santos e Souza – professor da Academia Real Militar do Rio de Janeiro desde a sua fundação.

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de analisar a maneira segundo a qual a Geometria foi desenvolvida pelo autor no livro, reproduzimos o seu índice. A obra foi dividida em duas partes que tratam respectivamente a Geometria Plana e a Geometria Espacial:

ÍNDICE⁵⁰

Circular do Senhor Ministro da Instrução Pública aos diretores	IV
Aviso do editor	V
Tratado de Aritmética – Suplemento	XLV
 Elementos de Geometria – Noções gerais	 01
Primeira parte	
Primeira seção: Das propriedades das linhas retas e das circunferências	03
Definições e noções preliminares	03
Das linhas perpendiculares e das oblíquas	15
Das linhas paralelas	22
Das linhas proporcionais e dos triângulos semelhantes	32
Dos polígonos	52
Da linha reta e da circunferência	61
Dos polígonos inscritos e circunscritos à circunferência	85
Segunda seção: Da área dos polígonos e da circunferência	110
Segunda parte	
Primeira seção: Dos planos e dos corpos limitados por superfícies planas	132
Dos planos e das linhas retas	132
Dos corpos limitados pelos planos	153
Das medidas dos volumes	168
Segunda seção: Dos corpos redondos	184
Da comparação dos corpos redondos	213

⁵⁰ Adaptado do original em francês (T.A.).

Cada uma das partes que compõem o livro foi dividida em tópicos que são numerados de forma consecutiva, no decorrer do livro todo, perfazendo um total de 313.

A obra contém poucos exemplos numéricos e não apresenta exercícios propostos. Também não possui ilustrações no decorrer do texto; todas as figuras encontram-se no final do livro numa espécie de apêndice.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Antes de expor os conteúdos de Geometria, o livro apresenta um tratado sobre Aritmética Elementar que, segundo o autor, é necessário para que se comece a trabalhar com os *Elementos de Geometria*.

São trabalhadas as quatro operações fundamentais, raízes, razões e proporções com suas propriedades, produtos notáveis e unidades de medidas. É importante observar que, neste tratado, os conteúdos são desenvolvidos aritmética e também algebricamente, conforme podemos perceber no exemplo abaixo:

AU TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE. XLVII

cubiques qu'on puisse exprimer exactement : 19, par exemple, se trouvant entre 16, qui est le carré de 4, et 25, qui est le carré de 5, a pour racine un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait assigner exactement, même avec le secours des fractions : c'est un *incommensurable*.

De même, 89, se trouvant entre 64, qui est le cube de 4, et 125, qui est celui de 5, a pour racine cubique un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait non plus assigner exactement. On trouvera dans les *Éléments d'Algèbre*, des méthodes pour approcher aussi près qu'on voudra des racines carrées et des racines cubiques des nombres qui ne sont pas des carrés ou des cubes parfaits.

Figura 16: p. XLV – XLVII do suplemento do livro de Lacroix (1848)

Nos *Elementos de Geometria*, as conexões entre a Geometria e a Aritmética são encontradas nos poucos exemplos numéricos colocados no decorrer do texto. Com relação às conexões entre a Geometria e a Álgebra, é possível encontrar muitos exemplos, principalmente nas deduções de fórmulas. Podemos citar um exemplo na primeira seção da primeira parte do livro, no tópico intitulado “das linhas proporcionais e dos triângulos semelhantes”:

DE GÉOMÉTRIE. 49

73. *Corollaire*. — Il suit, du théorème précédent, que les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

En effet, les proportions

$$\begin{aligned} AD : AB :: AB : AC, \\ CD : BC :: BC : AC \end{aligned}$$

donnent

$$AD = \frac{AB^2}{AC}, \quad CD = \frac{BC^2}{AC},$$

et en ajoutant AD avec CD, on a

$$AC = \frac{AB^2 + BC^2}{AC}, \quad \text{puis} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Il suit de là que l'on peut trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on a les deux autres côtés. Si, par exemple, $AB = 3$, $BC = 4$, on aura

$$AC^2 = 9 + 16 = 25, \quad \text{d'où} \quad AC = \sqrt{25} = 5.$$

On peut aussi trouver un des côtés de l'angle droit, quand on connaît l'autre et l'hypoténuse, parce que de

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{on tire} \quad AB^2 = AC^2 - BC^2$$

Si, par exemple, $AC = 13$, $BC = 12$, on aura

$$AB^2 = 169 - 144 = 25, \quad \text{d'où} \quad AB = 5.$$

En général,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}, \quad AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

Figura 17: Início da p. 49 do livro de Lacroix (1848)

Desenvolvimento do conteúdo:

O autor segue o modelo euclidiano e, antes de iniciar os *Elementos de Geometria*, coloca uma observação onde são apresentados os conceitos de axioma, teorema, corolário, problema, lema e escólio:

Figura 18: Final da p. LXVII do suplemento do livro de Lacroix (1848)

A obra é iniciada com a apresentação das noções gerais que serão usadas no decorrer do texto:

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

Notions générales sur l'étendue.

1. L'espace que les corps occupent a trois dimensions, que l'on désigne par les noms de *longueur*, *largeur* et *profondeur* ou *épaisseur*.

Un corps ne saurait être privé de l'une de ces dimensions sans cesser d'exister; les limites qui le terminent, sans lesquelles il ne peut être conçu, et qui n'ont point d'épaisseur, sont des *surfaces*.

Quand un corps présente plusieurs faces, chacune a, dans le lieu où elle se joint à une autre, ses limites, qui n'ont ni épaisseur ni largeur, et qu'on nomme *lignes*.

Enfin, ces dernières ont elles-mêmes, aux endroits où elles se rencontrent, leurs limites ou leurs extrémités, qui n'ont ni épaisseur, ni largeur, ni longueur, et qui s'appellent *points*.

L'existence de ces diverses espèces de limites ne peut être révoquée en doute, puisque ce n'est que par leur moyen que nous jugeons de la figure des corps. Nous les considérons, par la pensée, chacune en particulier, en faisant abstraction d'une ou de deux des dimensions du corps, qui d'ailleurs ne sauraient être anéanties; car, comme nous ne pouvons que modifier les formes de la matière, nos opérations s'effectuent toujours sur des corps.

GÉOMÉTRIE, 16^e édit.

2

ÉLÉMENTS

et jamais sur des surfaces, des lignes ou des points; mais leur résultat s'éloigne d'autant moins de celui du raisonnement, que nous apportons plus de soin à diminuer les dimensions étrangères à celles de la limite que nous avons considérée sur le corps. Par le raisonnement, nous atteignons cette limite; par le calcul, nous pouvons en approcher indéfiniment, tandis que l'exactitude des opérations mécaniques trouve ses bornes dans l'imperfection inévitable des instruments.

2. Parmi les lignes, celle qui s'offre la première est la ligne droite, dont on donne une idée nette dès qu'on énonce que c'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

Dans cette idée se trouve aussi comprise la possibilité de prolonger la ligne droite indéfiniment au delà de chacun des termes qu'on lui a d'abord assignés, et l'impossibilité de le faire de plusieurs manières.

Il est évident qu'il n'y a qu'une seule ligne droite: toute ligne qui n'est pas droite, ou composée de plusieurs lignes droites, est *courbe*, et l'on sent qu'il doit y avoir un nombre infini de lignes courbes.

Parmi les différentes surfaces qui terminent les corps, on remarque d'abord le *plan* ou la surface plane, qui diffère de toute autre en ce qu'on peut y appliquer exactement ou y tracer une ligne droite dans tous les sens; il ne peut y avoir qu'une seule espèce de plan.

Toute surface qui n'est pas plane ou composée de plusieurs plans est courbe, et le nombre des surfaces courbes est infini.

J'exposerai successivement les propriétés les plus remarquables des lignes, des surfaces et des corps, en me bornant à celles qu'il est indispensablement nécessaire de connaître pour étudier avec fruit les diverses branches des Mathématiques pures et appliquées.

Figura 19: p. 01 e 02 do livro de Lacroix (1848)

Em todo o livro observa-se o modelo lógico-dedutivo com a apresentação de definições e axiomas, teoremas e corolários com suas demonstrações formais e problemas que se referem às construções geométricas. A linguagem é formal, sem exemplos práticos para ilustrar os conceitos desenvolvidos.

A título de exemplificação podemos observar na primeira seção da primeira parte do livro – “Das propriedades das linhas retas e das circunferências”, a parte final do tópico intitulado “Definições e noções preliminares”:

THÉOREME.

19. Si les côtés $A'B'$ et $B'C'$ du triangle $A'B'C'$ (fig. 11) sont respectivement égaux aux côtés AB et BC du triangle ABC , et que l'angle B' , compris entre les deux premiers, soit moindre que l'angle B , compris entre les deux derniers, le côté $A'C'$, opposé à l'angle B' dans le triangle $A'B'C'$, sera moindre que le côté AC , opposé à l'angle B dans le triangle ABC .

Démonstration. — En effet, lorsqu'on place le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC , en posant $A'B'$ sur AB , le point C' ne peut prendre que les trois positions représentées en C'' dans les nos 1, 2 et 3 de la figure.

Par la première, dans laquelle il tombe sur le côté AC , il est évident que AC'' , qui représente $A'C'$, est moindre que AC .

Par la seconde, qui suppose le point C'' au dedans du

DE GÉOMÉTRIE.

13

PROBLÈME.

21. Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire le triangle.

Solution. — Soient M , N , P (fig. 12) les trois lignes données; ayant pris la première, M , pour former le côté AB , on décrira du point A comme centre, et d'un rayon égal à la seconde, N , un cercle ADC' ; puis, du point B comme centre, et d'un rayon égal à la troisième, P , un autre cercle CEC' . Leurs circonférences se couperont en deux points, C et C' , situés l'un au-dessus de AB , et l'autre au-dessous. En joignant chacun de ces points avec les extrémités de la ligne AB , on formera deux triangles qui satisferont à la question, puisqu'ils auront leurs côtés respectivement égaux aux trois lignes données.

22. *Remarques.* — Si l'on prenait trois lignes au hasard, il pourrait arriver que les circonférences des deux cercles décrits ne se rencontrassent pas. Cette circonstance aurait lieu, 1^o dans le cas où $P + N$ serait moindre que M ; en effet, il est visible, et on le prouvera d'ailleurs dans la suite, que deux cercles ne peuvent se couper qu'autant que la distance de leurs centres est moindre que la somme de leurs rayons; 2^o dans le cas où l'un des cercles embrasserait l'autre, c'est-à-dire où l'on aurait

$$AD > AB + BE, \text{ ou } N > M + P.$$

Ces deux cas sont compris dans la condition générale que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle est toujours plus grande que le troisième, et qu'on peut simplifier en l'énonçant ainsi :

La somme des deux plus petits côtés d'un triangle est toujours plus grande que le troisième.

En effet, la condition $N + P > M$ doit suffire lorsque N et P sont moindres que M , puisque, dans ce cas, les

12

ÉLÉMENTS

triangle ABC , on aurait (15)

$$AC'' + BC'' < AC + BC;$$

d'où il résulterait encore

$$AC'' \text{ ou } A'C' < AC,$$

puisque BC'' , qui représente $B'C'$, est égal à BC par l'hypothèse.

Enfin, dans la troisième position, le point C'' étant extérieur au triangle ABC , on aurait

$$AC'' < OC'' + OA, \quad BC < OB + OC;$$

d'où l'on conclurait

$$AC'' + BC < OC'' + OA + OB + OC,$$

ce qui revient d'abord à

$$AC'' + BC < AC + BC'',$$

puisque $OC'' + OB = BC''$, $OA + OC = AC$; et retranchant ensuite, de part et d'autre, les lignes égales BC et BC'' , il resterait toujours

$$AC'' \text{ ou } A'C' < AC.$$

20. *Corollaire.* — Il suit de là que deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties, quand les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre; car si les côtés AB , AC , BC du triangle ABC (fig. 10) sont respectivement égaux aux côtés $A'B'$, $A'C'$ et $B'C'$ du triangle $A'B'C'$, l'angle compris entre deux côtés quelconques du premier sera égal à l'angle compris entre les deux côtés égaux à ceux-ci dans le second. Si, par exemple, l'un des deux angles B et B' était moindre que l'autre, l'un des côtés AC et $A'C'$ serait aussi moindre que l'autre (numéro précédent), ce qui est contre l'hypothèse; donc les triangles ABC et $A'B'C'$ ont en même temps leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun, et sont, par conséquent, égaux en tout (16 ou 18).

14

ÉLÉMENTS

conditions $N + M > P$ et $P + M > N$ sont nécessairement remplies.

La solution du problème précédent, qui met en état de construire un triangle égal à un autre, en faisant usage des côtés de ce dernier, offre le moyen de faire un angle égal à un autre.

PROBLÈME.

23. Par un point donné près sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné.

Solution. — Soient (fig. 13) CAB l'angle donné, $A'B'$ la droite sur laquelle on veut construire le nouvel angle qui doit avoir son sommet en A' ; je prends sur les côtés du premier, à partir du sommet, deux distances AB et AC , égales entre elles, et je joins par une droite les points C et B , où elles se terminent. Portant ensuite AB de A' en B' , je n'ai plus qu'à décrire sur $A'B'$ un triangle dont les deux côtés $A'C'$ et $B'C'$ soient respectivement égaux à AC et à BC , ce qui se fait en marquant l'une des intersections C' des circonférences des cercles décrits avec les rayons $A'C$ et BC , des points A' et B' comme centres (1). Tirant $A'C'$, l'angle $C'A'B'$ sera égal à l'angle CAB , puisque les triangles CAB et $C'A'B'$ sont égaux par construction (21).

Assim como nesses exemplos, a representação é trabalhada em forma de problemas no decorrer do livro todo.

Em nenhum momento o autor recorre à intuição ou apresenta problemas motivadores ou problemas de aplicação no desenvolvimento dos conteúdos; não mostra relações da Geometria com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Também não há propostas de construção de materiais que possam ser manipulados em momento algum.

Deste modo, concluímos que esse livro aborda apenas a concepção e a representação articuladamente.

3.3.1.2. Cristiano Benedito Ottoni

Título da obra: *Elementos de Geometria e Trigonometria Retilínea*

9ª Edição⁵¹

Figura 21: Capa do livro de Ottoni (9ª edição)

⁵¹ O exemplar analisado não possui data, porém sabemos que a sua 1ª edição é de 1842, a 2ª edição de 1857, a 10ª edição de 1904 e a 11ª edição de 1910. (SILVA, 2000, p.155)

O contexto histórico:

Conforme já foi dito, o livro de Cristiano Benedito Ottoni foi adotado no Colégio Pedro II a partir de 1842, sendo utilizado até 1898 quando foi substituído pelo livro de Timotheo Pereira inspirado no de Ottoni. Nessa época, a duração do curso secundário era de sete anos.

Nesse período, estava em vigor, no Brasil, a exigência de exames preparatórios para ingressar nos cursos superiores, que teve início em 1827 quando foram criados os cursos jurídicos. Dessa forma, começaram a surgir livros direcionados à preparação a esses exames. Os livros utilizados eram os livros adotados pelo Colégio Pedro II, onde para a Geometria, que era uma das disciplinas obrigatórias nos exames, juntamente com as disciplinas literárias, foi usado o livro de Cristiano Benedito Ottoni.

A Estrutura do livro e a Geometria:

O livro encontra-se dividido em duas partes: Geometria e Trigonometria Retilínea.

Na primeira parte que trata da Geometria, desenvolve a Geometria Plana e a Espacial, conforme podemos observar na sua divisão em quatro livros:

1º Livro: Das figuras planas.

2º Livro: Da extensão em um plano.

3º Livro: Das figuras consideradas no espaço.

4º Livro: Da extensão considerada no espaço.

Cada um dos livros é dividido em capítulos e esses, em parágrafos. Os tópicos são numerados de forma consecutiva no decorrer do livro todo perfazendo um total de 280.

A obra não possui índice, no entanto, com o objetivo de verificar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida, construímos um índice para o livro:

Introdução	01
Livro primeiro: Das figuras planas	
Capítulo primeiro Das figuras retilíneas	17
§1º Teoria das Perpendiculares e Oblíquas	17

	§2º Teoria das Paralelas	28
	§3º Propriedades dos triângulos: teoria da sua igualdade	41
	§4º Dos quadriláteros e suas variedades	62
	§5º Dos Polígonos	67
Capítulo segundo	Da circunferência e suas combinações com a linha reta	76
	§1º Das cordas, Secantes e Tangentes	79
	§2º Medida dos ângulos	86
	§3º Propriedades dos polígonos inscritos e circunscritos	103
	§4º Dos círculos secantes e tangentes uns a respeito de outros	111
Livro segundo: Da extensão em um plano		
Capítulo primeiro	Da extensão nas figuras retilíneas	117
	§1º Das linhas proporcionais	117
	§2º Das figuras semelhantes	125
	§3º Teoremas diversos	139
	§4º Avaliação e comparação das áreas	143
Capítulo segundo	Da extensão nas figuras circulares	157
	§1º Das linhas proporcionais consideradas no círculo	157
	§2º Avaliação dos lados e áreas dos polígonos regulares	164
	§3º Medida da circunferência e da área do círculo	168
Livro terceiro: Das figuras consideradas no espaço		
Capítulo primeiro	Dos planos e dos corpos terminados por superfícies planas	179
	§1º Das retas e dos planos perpendiculares e oblíquos entre si	184
	§2º Das retas e planos paralelos	194
	§3º Dos ângulos poliedros	201
	§4º Dos poliedros convexos	212
Capítulo segundo	Dos três corpos redondos – cilindro, cone e esfera	225
	§1º Do cilindro reto	225
	§2º Do cone reto	228
	§3º Da esfera	233
Livro quarto: Da extensão considerada no espaço		
Capítulo primeiro	Semelhança dos poliedros: avaliação e comparação de suas áreas e volumes	242
	§1º Da semelhança dos poliedros	242
	§2º Áreas e volumes dos poliedros	246
Capítulo segundo	Áreas e volumes dos corpos redondos	263
	§1º Do cilindro e da pirâmide cônica	263
	§2º Área dos triângulos e polígonos esféricos	266
	§3º Área e volume da esfera	270

O livro não apresenta exercícios propostos e os únicos exercícios resolvidos serão citados abaixo.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Há poucas conexões da Geometria com a Álgebra. A maioria dos resultados, como por exemplo, as fórmulas, são traduzidas em linguagem natural, porém é possível encontrar algumas exceções.

Alguns exemplos de relações entre esses conteúdos são encontrados no 2º Livro – “Da extensão em um plano”. Podemos citar o 2º Capítulo – “Da extensão nas figuras circulares”, 1º parágrafo – “Das linhas proporcionais consideradas no círculo”:

Figura 22: Final da p. 162 e início da p. 163 do livro de Ottoni⁵² (9ª edição)

⁵² Os tópicos de números 126, 165, 166 e 143 a que o autor está se referindo nesse exemplo, são:

“126. Construir uma quarta proporcional a três retas dadas m, n, p, isto é, achar uma linha que seja o 4º termo da proporção m:n::p:x” (p. 124)

“165. Construir uma terceira proporcional a duas linhas dadas M e N. Por outra achar o 4º termo da proporção M:N::N:X” (p. 160)

“166. Construir uma meia proporcional entre as linhas dadas M e N. Isto é, determinar o meio da proporção contínua M:X::X:N” (p. 161)

“143. Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados” (p. 141).

Encontramos também algumas conexões da Geometria com a Álgebra no 4º Livro – “Da extensão considerada no espaço”, presentes nas deduções das fórmulas referentes às figuras espaciais.

Com relação às conexões com a Aritmética, encontramos apenas dois problemas de aplicações de fórmulas no 2º Livro – “Da extensão em um plano”, 2º Capítulo – “Da extensão nas figuras circulares”, 3º parágrafo – “Medida da circunferência e da área do círculo”:

Figura 23: Final da p. 177 e início da p. 178 do livro de Ottoni (9ª edição)

Desenvolvimento do conteúdo:

A obra é iniciada com uma introdução que apresenta as noções preliminares que serão usadas no decorrer do texto – ponto, reta, plano, espaço, linhas e superfícies quebradas e curvas, círculo, ângulos e métodos de demonstração. Percebe-se o uso do modelo euclidiano, a linguagem é formal, sem exemplos práticos para ilustrar os conceitos desenvolvidos:

Figura 24: p. 01 e 02 do livro de Ottoni (9ª edição)

Figura 25: p. 12 a 15 do livro de Ottoni (9ª edição)

Nesse livro, o autor segue a abordagem euclidiana, com ênfase no método axiomático-dedutivo. Dessa forma, todos os parágrafos seguem o modelo: definições (preliminares), axiomas, teoremas e corolários com suas demonstrações e problemas que se referem às construções geométricas.

A título de exemplificação podemos citar o 1º Livro – “Das figuras planas”, 1º Capítulo – “Das figuras retilíneas”, 1º parágrafo – “Teoria das perpendiculares e oblíquas”, que é iniciado pela definição de ângulo reto e retas perpendiculares. A partir disso, segue uma série de teoremas e corolários onde aparecem outras definições intercaladas – ângulos agudos, obtusos, complementares, suplementares etc. O parágrafo finaliza com três problemas que envolvem a representação, onde as construções geométricas com régua e compasso são demonstradas e é discutido o número possível de soluções:

Figura 26: p. 17 e p. 24 a 26 do livro de Ottoni⁵³ (9ª edição)

⁵³ Os tópicos números 23. 1º, 10 e 22 a que o autor está se referindo nesse exemplo, são:

Dessa forma, podemos observar que, no decorrer do livro todo, o autor trabalha a representação e concluímos que esse livro trabalha a concepção e a representação articuladamente.

Não há problemas motivadores nem de aplicação. O autor não faz nenhum apelo à intuição, nem mostra qualquer relação da Geometria com o cotidiano. Com relação às aplicações da Geometria a outras áreas do conhecimento, o autor declara, no final da introdução do livro, que:

A Geometria applicavel à industria e às artes, intervindo nas modificações pelas quaes a mão do homem faz passar os productos da natureza, presta igualmente à astronomia, à navegação, à geographia e a outras sciencias um auxilio poderoso e indispensavel. D’ahi se conclue toda a extensão de sua utilidade. (p. 16)

Em nenhum momento o livro propõe a construção de objetos materiais que possam ser manipulados.

3.3.1.3. *Timotheo Pereira*

Título da obra: *Curso de Geometria*

1ª Edição – 1890

Figura 27: Capa do livro de Timotheo Pereira (1890)

“23. 1º: Se de um ponto O fora de uma reta AB se tira a perpendicular OD e qualquer número de oblíquas OE, OF, OG, as oblíquas OE, OF, que se desviam igualmente da perpendicular são iguais” (p. 22)

“10: A linha reta é menor que outra qualquer linha que tenha os mesmos extremos” (p. 06)

“22: Pelo mesmo ponto não pode passar mais de uma perpendicular a uma reta” (p. 21).

O contexto histórico:

O livro de Timotheo Pereira substituiu o de Cristiano Ottoni no Colégio Pedro II, a partir de 1898. No entanto, ele segue as mesmas orientações de Ottoni, apesar de não incluir a Trigonometria em sua obra.

A primeira edição da obra foi publicada em 1890, quando continuava a vigorar o programa de exames de preparatórios para ingresso ao Ensino Superior. Na capa do livro é possível observar esse fato onde está descrito que ele está de acordo com o Programa de Admissão à Escola Politécnica.

Conforme vimos no capítulo 2, tivemos nesse período no Brasil, o estabelecimento da primeira reforma do ensino secundário na República – a Reforma “Benjamin Constant”, de 1890, que procurou romper com a tradição clássico-humanista predominante até então, valorizando a ciência nesse nível de ensino. Essa Reforma foi elaborada de acordo o positivismo de Auguste Comte, baseada nas Ciências, onde a Matemática era considerada a ciência fundamental.

A Reforma Benjamin Constant manteve o ensino secundário de sete anos, sendo a Geometria ensinada do segundo ao sexto anos. De acordo com Silva (2000, p. 155), a partir do estabelecimento dessa Reforma, o Colégio Pedro II adotou o livro de Geometria de Timotheo Pereira no quarto e no quinto anos do ensino secundário.

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida no livro, transcrevemos o seu índice. A obra, da mesma forma que na primeira parte do livro de Ottoni, foi dividida em quatro livros que trabalham a Geometria Plana e a Espacial:

ÍNDICE

Introdução

Noções preliminares 05

Primeira seção

Primeiro livro: Das figuras planas

Teoria das Perpendiculares e Oblíquas	15
Teoria das Paralelas	26
Propriedades dos triângulos: teoria da sua igualdade	42
Dos quadriláteros e suas variedades	65
Dos polígonos em geral	74
Da circunferência e suas combinações com a linha reta	81
Das cordas secantes e tangentes	83
Medida dos ângulos	92
Polígonos inscritos e circunscritos; suas propriedades	108
Dos círculos secantes e tangentes, uns a respeito de outros	119
Segundo livro: Da extensão em um plano	
Das linhas proporcionais	125
Das figuras semelhantes	135
Das retas concorrentes cortadas por duas paralelas	148
Outros teoremas e propriedades dos triângulos	150
Das linhas proporcionais consideradas no círculo	158
Avaliação dos lados e áreas dos polígonos regulares	168
Retificação da circunferência	180
Avaliação e comparação das áreas	192
Áreas dos polígonos regulares	211
Áreas das figuras circulares	215
Exercícios numéricos	220
Segunda seção	
Terceiro livro: Das figuras consideradas no espaço	
Do plano e da linha reta	224
Das retas e dos planos perpendiculares e oblíquos entre si	225
Das retas e planos paralelos	233
Dos ângulos de lados paralelos não situados no mesmo plano	238
Dos ângulos diedros, sua geração e medida	239
Dos planos perpendiculares	244
Dos ângulos poliedros	247
Poliedros, propriedades dos prismas e das pirâmides, teoria da sua igualdade	259
Teorema de Euler	269
Dos três corpos redondos	270
Do cilindro	271
Do cone	274
Da esfera	279
Quarto livro: Da extensão considerada no espaço	
Semelhança dos poliedros	285

Poliedros inscritos e circunscritos	291
Áreas dos poliedros	294
Áreas dos poliedros regulares conhecendo a aresta	297
Volume dos poliedros	297
Volume dos poliedros regulares conhecendo a aresta	313
Área da esfera	328
Área da zona	330
Área do fuso	331
Volume da esfera	332
Volume do segmento	339
Volume da cunha esférica	340
Do cilindro e cone inscritos e circunscritos à esfera	341
Noções sobre as figuras traçadas sobre a superfície da esfera	345
Simetria	352
Noções sobre algumas curvas	359
Ciclóide	387
Epicyclóide	387
Seções cônicas	388
Nota sobre a área da esfera	393
Exercícios numéricos sobre as áreas dos poliedros	394
Exercícios numéricos sobre os volumes dos poliedros	395

Conforme foi dito, a obra de Timotheo Pereira foi escrita baseando-se no livro de Cristiano Ottoni. De fato, é possível perceber pelo índice que a sequência dos conteúdos desta obra é praticamente a mesma do livro de Ottoni. A esse respeito, o autor declara, numa nota destinada ao leitor no final do livro, que:

É minha mais íntima convicção que do que este livro contém nada é novo e nem mesmo tive em mira quando o organizei apresentar trabalho original: – *primeiro*, porque mathematica não se inventa; – *segundo*, porque as minhas apoucadas habilitações não o permitem. Tomando este ponto de partida claro está que fiquei reduzido a joeirar e é o que julgo ter feito. Relativamente ao *quantum* na dosagem, também não entrei com contingente individual; cingi-me ao programma que actualmente (1888) regula o exame de admissão à Escola Polytechnica e, se mais alguma cousa accrescentei, foi porque me pareceu que no *estado actual* não deve ser excluído das noções capitaes, embora não constituam matéria de exame. (PEREIRA, 1890, p. 397, grifos do autor)

Porém, ao analisarmos a obra, algumas diferenças são encontradas: as figuras colocadas ao longo do texto aparecem destacadas por meio de um fundo preto, foram incluídos exercícios numéricos propostos aos alunos no decorrer do livro que tratam de cálculos aritméticos de aplicações de fórmulas obtidas na teoria, as demonstrações dos teoremas possuem explicações mais extensas.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

As conexões entre a Geometria e a Álgebra são encontradas nas deduções de fórmulas presentes no Segundo livro – “Da extensão em um plano” e no Quarto livro – “Da extensão considerada no espaço”.

Por exemplo, podemos citar o tópico intitulado “Linhas proporcionais consideradas no círculo” que faz parte do Segundo livro e que termina com a divisão de um segmento em média e extrema razão, ou seja, com a construção geométrica do segmento áureo, tema que será explorado por nós neste trabalho no capítulo 4:

237. 3º PROBLEMA. *Dividir uma linha em meio e extremo.*
Dividir uma linha em meio e extremo quer dizer; dividir a linha em duas partes taes que uma d'ellas seja media proporcional entre a linha inteira e a outra parte.

Chama-se dividir em meio e extremo porque sendo a linha inteira primeiro termo, uma das partes é meio e a outra é extremo.

Seja AB a recta que queremos dividir em meio e extremo.

Solução. Levantemos pelo ponto B uma perpendicular a AB; tomemos n'ella uma porção igual a metade da recta AB seja $BC = \frac{AB}{2}$.

Com centro em C e com o raio CB descrevamos uma circumferencia, liguemos o ponto A ao ponto C e prolonguemos até encontrar a circumferencia, façamos centro em A e com um raio igual a AD descrevamos um arco que corte a recta AB num ponto seja F este ponto; a recta AB ficou no ponto F dividido em meio e extremo.

Demonstração. Começemos por notar que AB é tangente á circumferencia por ser perpendicular ao extremo do raio CB e que $AD = AF$ como raios. $DE = AB$, porque DE é o diametro e como o raio é metade de AB, o diametro que é o dobro do raio será o dobro da metade de AB, isto é, será AB. Considerando as duas rectas AE e AB vemos que são uma secante e uma tangente que concorrem; ora sabemos que a tangente é media proporcional entre a secante inteira e a parte externa logo temos

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

porém em toda a proporção a *diferença dos dous primeiros termos está para o segundo assim como a diferença dos dous ultimos está para o quarto*, logo applicando esta propriedade á proporção acima temos

$$(1) \quad \frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$$

mas por ser $AB = DE$, resulta $AE - AB = AE - DE = AD = FA$, e por ser $AD = AF$

168 CURSO DE GEOMETRIA

resulta $AB - AD = AB - AF = FB$ logo substituindo os numeradores das razões da proporção (1) por estes valores virá

$$\frac{FA}{AB} = \frac{FB}{AD}$$

ou substituindo AD por AF e invertendo

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AF}{FB}$$

Esta proporção nos mostra que a recta AB ficou no ponto F dividida em duas partes taes que uma d'ellas AF é media proporcional entre a recta toda AB e a outra parte FB.

N. B. A parte AF costuma-se chamar maior segmento da recta dividida em media e extrema razão.

237. SOLUÇÃO: *Calculo do maior segmento.*
Chamemos, para abreviar a , a recta AB, será $CD = CB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.
O triangulo rectangulo CBA dá

$$CA = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Porém $CA = AD + DC = AF + \frac{a}{2}$.

Logo $AF + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

Subtrahindo $\frac{a}{2}$ de ambos os membros d'esta igualdade resulta

$$AF = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$$

Pondo $\frac{a}{2}$ em evidencia virá finalmente

$$AF = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Figura 28: Final da p. 167 e início da p. 168 do livro de Pereira (1890)

Podemos verificar nesse exemplo o trabalho articulado entre a representação e a concepção, fazendo uma conexão da Geometria com a Álgebra.

Um outro exemplo que mostra as relações existentes entre esses conteúdos é encontrado ainda no Segundo livro, no tópico – “Avaliação dos lados dos polígonos regulares”. Nesse tópico são demonstradas diversas expressões relativas aos lados e aos raios das circunferências circunscritas aos polígonos regulares. No final, o autor apresenta o seguinte resumo:

Resumindo as diversas expressões dos lados dos polygonos achados temos

$$(A) \begin{cases} L_3 = R\sqrt{3} \\ L_4 = R\sqrt{2} \\ L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\ L_6 = R \\ L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \\ L_{15} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}} - R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{4} \end{cases}$$

Estes são os lados dos polygonos mais communmente empregados.
 244. Pode tambem ser preciso algumas vezes achar o raio do circulo circumscripto a um polygono regular sendo dado o lado d'este polygono; basta para isso nas igualdades do quadro acima tirar os valores de R em cada caso, assim.

$$R = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \quad \text{para o triangulo}$$

$$R = \frac{L_4}{\sqrt{2}} \quad \text{para o quadrado}$$

$$R = \frac{2 L_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad \text{para o pentagono}$$

$$R = \frac{L_6}{1} \quad \text{para o hexagono}$$

$$R = \frac{2 L_{10}}{\sqrt{5}-1} \quad \text{para o decagono}$$

$$R = \frac{4 L_{15}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)} \quad \text{para o pentadecagono.}$$

ou tornando os denominadores racionais.

$$R = \frac{L_3 \sqrt{3}}{3} \quad \text{para o triangulo}$$

$$R = \frac{L_4 \sqrt{2}}{2} \quad \text{para o quadrado}$$

$$R = \frac{L_5 \sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \quad \text{para o pentagono}$$

$$R = \frac{L_6}{1} \quad \text{para o hexagono}$$

$$R = \frac{L_{10}(\sqrt{5}+1)}{2} \quad \text{para o decagono}$$

$$R = \frac{L_{15}(\sqrt{50+10\sqrt{5}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4\sqrt{3})}{8} \quad \text{para o pentadecagono}$$

Figura 29: Trecho da p. 175 do livro de Pereira (1890)

Este livro não apresenta exemplo numérico algum. Conexões entre a Geometria e a Aritmética são encontradas apenas nos exercícios numéricos colocados no decorrer do texto. Como exemplo, podemos citar os exercícios propostos no Segundo livro – “Da extensão em um plano”, relativos aos tópicos: “Das linhas proporcionais consideradas no círculo” e “Avaliação dos lados e áreas dos polígonos regulares”:

- EXERCÍCIOS NUMÉRICOS
1. — Achar o maior segmento de uma recta de 20^m dividida em média e extrema razão.
 2. — Determinar o lado do triângulo regular inscripto n'um circulo de raio 8^m.
 3. — Determinar o raio de um circulo circumscripto a um triângulo regular de lado 1^m,5.
 4. — Determinar a bissectriz de um triângulo equilatero inscripto n'um circulo de raio 1^m,6.
 5. — Determinar o raio de um circulo circumscripto a um triângulo regular de perimetro igual a 160^m.
 6. — Determinar o diametro de um circulo circumscripto a um triângulo regular de altura 1^m,2.
 7. — Determinar o lado de um quadrado inscripto num circulo de raio 10^m.
 8. — Determinar o raio do circulo circumscripto a um quadrado de lado 1^m,55.
 9. — Determinar a diagonal de um quadrado de perimetro 6^m,5.
 10. — Dizer qual é o raio de um circulo circumscripto a um quadrado cuja diagonal é 6^m,5.
 11. — Determinar a diagonal de um quadrado inscripto n'um circulo em que o triângulo regular inscripto tem de perimetro 1^m,20.
 12. — Determinar o raio do circulo inscripto (o apothema) a um quadrado de lado 1^m,25. (Fazendo a figura fica um triângulo e rectangulo cuja hypotenusa é o raio do circulo circumscripto e cujos lados são; metade do lado do quadrado e o raio do circulo inscripto, exprime-se, o raio do circulo circumscripto pelo lado e resolve-se o exercicio).
 13. — Determinar o perimetro de um quadrado que tem de diagonal 1^m,20.
 14. — Determinar o perimetro de um quadrado que tem de apothema 0^m,5.
 15. — Determinar o lado do decagono regular inscripto n'um circulo de raio 20^m.

Figura 30: Final da p. 176 do livro de Pereira (1890)

Desenvolvimento do conteúdo:

Conforme já afirmamos, esta obra seguiu as orientações de Ottoni, no entanto, as demonstrações dos teoremas possuem explicações mais longas. Como o autor considera que, num bom livro didático devem prevalecer a concisão e a clareza, justifica ter escrito um livro muito extenso na nota destinada ao leitor no final do livro, onde declara que:

Sei que n'um livro didactico a concisão e a clareza são elementos primordiaes e, portanto, indispensaveis; sei, igualmente, que um auctor deve ser synthetico poisque o professor é necessariamente analytico em sua exposição; mas, tambem não me acanho em confessar que é extremamente difficil saber onde um auctor passa de conciso a obscuro; e sendo meu mais intimo desejo ser claro (temendo que de conciso me tornasse obscuro) é bem possivel que me tenha tornado prolixo, mas, se as demonstrações em mathematica não são para justificar as suas proposições, porém sim para constituir exercicios de logica, comprehende se que da pequena fadiga cerebral, proveniente da prolixidade (que por ventura houver) só pode resultar vantagem para quem pratica. (PEREIRA, 1890, p. 397)

A Geometria nesse livro foi desenvolvida com o objetivo de treinar os alunos ao exercício da lógica e percebemos o desenvolvimento da concepção.

O autor segue o modelo euclidiano e a obra é iniciada com uma introdução que apresenta as noções preliminares que serão usadas no decorrer do texto. Percebe-se o uso da linguagem formal, sem exemplos práticos para ilustrar os conceitos desenvolvidos:

Figura 31: p. 05 e início da p. 06 do livro de Pereira (1890)

Em seguida, ainda na introdução, são apresentados os postulados, os conceitos e as propriedades da linha reta, linha quebrada e curva, do plano, das superfícies quebradas e curvas, do círculo e dos ângulos. São apresentados ainda, os conceitos das diversas espécies de proposições empregadas em Geometria: axioma, teorema, corolário, lema, petição de princípio, círculo vicioso, problema, discussão de um problema e métodos de demonstração – demonstração direta, demonstração por absurdo e demonstração por superposição.

Em todo o livro observa-se o modelo lógico-dedutivo com a apresentação de definições e axiomas, intercalados por teoremas e corolários com suas demonstrações, problemas que se referem às construções geométricas e exercícios numéricos.

A título de exemplificação podemos citar no Primeiro livro – “Das figuras planas”, o primeiro tópico desenvolvido – “Teoria das perpendiculares e oblíquas”, que apresenta as definições de ângulo reto e retas perpendiculares, graus, minutos e segundos, ângulos agudos e obtusos, bissetriz de um ângulo, ângulos complementares e suplementares. Entre as

definições apresenta-se uma série de teoremas e corolários com suas demonstrações. O assunto finaliza com três problemas que envolvem a representação onde as construções geométricas com régua e compasso são demonstradas:

41. THEOREMA. — Se levantarmos a perpendicular ao meio de uma recta:
1º Qualquer ponto da perpendicular é equidistante dos extremos da recta.

2º Qualquer ponto fora da perpendicular dista desigualmente dos extremos da recta.

Primeiro. — Seja AC uma recta e B o meio d'ella; levantemos por B uma perpendicular, seja BD nós vamos provar que todos os pontos da recta DB são equidistantes dos pontos A e C.

Para provar que qualquer ponto de BD dista igualmente de A e de C, liguemos o ponto D aos dois pontos A e C; ora, como $BA = BC$, segue-se que as duas obliquas DA e DC afastam-se igualmente do pé da perpendicular DB, e portanto são em virtude do theorema anterior iguaes; logo o ponto D dista igualmente de A e C; se tomarmos outro ponto E, na perpendicular e o ligarmos aos pontos A e C, veremos, pela mesma razão, que o ponto E dista igualmente dos pontos A e C; para um outro ponto verificar-se-hia a mesma coisa e assim por diante; porém *dous pontos determinam completamente uma recta*, e portanto; desde que os dous pontos D e E são equidistantes de A e C, podemos concluir que todos os pontos da recta DE são equidistantes de A e C. Assim, pois, todos os pontos da perpendicular ao meio de uma recta são equidistantes dos extremos d'ella.

Segundo. — Seja AC uma recta, BF a perpendicular ao meio d'ella, D um ponto fora d'essa perpendicular; temos que provar que o ponto D dista desigualmente dos pontos A e C, isto é que as duas distancias DA e DC são desiguaes.

These: $DA > DC$.
Para o provar, liguemos o ponto E, em que a recta DA corta BF, ao ponto C; a recta EC será igual a AE, como obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular BE, isto é $EC = EA$.

Considerando a linha DEC, vemos que é uma linha quebrada, e que DC é uma linha recta que tem com ella os mesmos extremos D e C; ora, é claro que a linha quebrada DEC é maior que a linha recta DC, isto é (I) $DEC > DC$; porém DEC compõe-se das linhas DE e EC, logo, em lugar de DEC, podemos escrever $DE + EC$, e portanto, substituindo na desigualdade (I) DEC por este valor virá $DE + EC > DC$; ora, nós vimos que $EC = EA$, então onde está EC podemos escrever EA, e, fazendo isto, na ultima desigualdade, teremos:

24

CURSO DE GEOMETRIA

$$DE + EA > DC.$$

Porém $DE + EA$ é o mesmo que a recta DA, e portanto substituindo teremos finalmente:

$$DA > DC.$$

42. Reciprocamente. — 1º Qualquer ponto equidistante dos extremos de uma recta existe na perpendicular ao meio d'ella.

2º Todo o ponto que não for igualmente distante dos extremos d'uma recta existe fora da perpendicular ao meio d'essa recta.

Primeiro. — Se o ponto estivesse fora da perpendicular ao meio da recta, distaria desigualmente dos extremos da recta, o que é contrario á hypothese.

Segundo. — Se o ponto existisse na perpendicular ao meio da recta, distaria igualmente dos extremos da recta, o que é contrario á hypothese.

43. THEOREMA. — Dados dois pontos e outros dois equidistantes, a recta que passar pelos dous ultimos é perpendicular á recta que passar pelos dous primeiros.

Sejam A e B os dous pontos dados, C e D os outros dous equidistantes, vamos provar que a recta XY é perpendicular á recta X'Y'.

Já vimos que a perpendicular ao meio da recta AB tem todos os seus pontos equidistantes dos extremos A e B, de modo que a perpendicular ao meio de AB tem de passar por todos os pontos equidistantes de A e B, e portanto passará também pelos pontos C e D; ora, desde que a tal perpendicular ao meio da recta AB tem de passar pelos dous pontos C e D, está claro que se confunde com a recta CD, que também passa por esses pontos; portanto a perpendicular ao meio de AB não pode ser outra senão CD, e, desde que CD é perpendicular ao meio de AB, ella é perpendicular á recta X'Y', que passa pelos dous pontos A e B, como queríamos provar.

Problemas.

1º PROBLEMA. — Por um ponto dado em uma recta indefinida, levantar uma perpendicular a esta recta.

Seja XY a recta indefinida e A o ponto dado n'ella.

Figura 32: p. 23 a 26 do livro de Pereira (1890)

Da mesma forma que nesse exemplo, no decorrer do livro todo, é trabalhada a representação. Assim, concluímos que esse livro aborda a concepção e a representação articuladamente.

Em nenhum momento o autor apresenta problemas motivadores ou de aplicação, nem recorre à intuição no desenvolvimento dos conteúdos. Não mostra relações da Geometria com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Também não há propostas de construção de materiais que possam ser manipulados em momento algum.

3.3.1.4. Alexis Claude Clairaut e Francisco Cabrita

O contexto histórico:

É de conhecimento geral que a obra de Euclides influenciou o ensino da Matemática durante séculos, estabelecendo um padrão – a Geometria axiomática. Esse fato dificultou qualquer tentativa de alteração no modo de ensinar a Geometria. No século XVIII houve reações nas escolas francesas e começaram a aparecer as primeiras obras didáticas que pretendiam estabelecer uma alteração significativa na abordagem da Geometria. A primeira reação contrária à abordagem euclidiana, surgiu através da obra *Eléments de géométrie* de Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765). No Brasil, os autores Francisco Cabrita e Olavo Freire, no final do século XIX, foram os primeiros a tentar romper com o estilo euclidiano.

A importância maior do livro de Clairaut foi a influência que ele desempenhou nas futuras propostas de renovação do ensino da Matemática. Alguns pesquisadores atuais, como por exemplo, Miorim (1998), o considera a primeira obra que efetivamente se preocupou com o caráter pedagógico da Matemática.

De acordo com Silva (2000), Francisco Cabrita, professor da Escola Normal e da Escola Politécnica, escreveu seu livro *Elementos de Geometria*, baseado no livro de Clairaut. No entanto, no apêndice da tradução para o português da obra de Clairaut (1892), o tradutor José Feliciano afirma que:

Depois de começado este trabalho [de tradução da obra de Clairaut], veio-nos às mãos um livro intitulado ‘Elementos de Geometria’, em que o sr. F. Cabrita diz ter feito uma adaptação do plano traçado por Clairaut. Sua leitura, mesmo incompleta, mostra-nos que ahi, a par da tradução litteral de Clairaut, a par da supressão de muitos trechos insubstituíveis, se estadêa certa preocupação de demonstrar theoremas, com algum matiz algebrico, que desnatura de todo em todo a rôta gizada pelo ‘eminente precursor da regeneração do ensino mathematico’. (p. 198)

A obra de Clairaut foi publicada pela primeira vez em 1741, na França. No Brasil, a primeira edição da tradução do livro é de 1892. As obras de Francisco Cabrita e Olavo Freire também são do final do século XIX. O livro de Olavo Freire, no entanto, destina-se ao ensino primário e não será, portanto, objeto de estudo desta pesquisa.

Temos, nesse período no Brasil, o estabelecimento da primeira reforma do ensino secundário na República – a Reforma “Benjamin Constant”⁵⁴, de 1890. Conforme vimos, essa Reforma foi elaborada de acordo o positivismo, a filosofia de Auguste Comte, baseada nas Ciências sendo a Matemática a ciência fundamental. Em 1854, Comte fez uma lista das obras mais recomendadas para o ensino, a qual chamou de *Bibliothèque Positiviste* e dentre os livros de Geometria indicados encontra-se o livro de Clairaut. Segundo Silva (1999), foi devido a esse fato que “alguns autores brasileiros resolveram empreender a tarefa de traduzir esses títulos para o português”. (p. 275)

Para os demais critérios de análise estabelecidos, analisaremos os livros separadamente:

3.3.1.4.1. Alexis Claude Clairaut

Título da obra: *Elementos de Geometria*

Tradução: José Feliciano

2ª Edição – 1909⁵⁵

Figura 33: Capa do livro de Clairaut (1909)

⁵⁴ Há uma dedicatória de José Feliciano na tradução brasileira do livro de Clairaut à memória do Dr. Benjamin Constant, o patriarca da República brasileira.

⁵⁵ Primeira edição: 1892.

Nos primeiros parágrafos do prefácio de sua obra, já percebemos a posição contrária de Clairaut à introdução dos estudos geométricos com base nos *Elementos* de Euclides, os quais, para ele, seriam os principais responsáveis pelas dificuldades encontradas pelos alunos no estudo na Geometria:

Ainda que a geometria seja uma sciencia abstracta, devemos confessar que as difficuldades experimentadas pelos que começam a apprende-la , procedem as mais das vezes da maneira por que é ensinada nos elementos ordinarios. Logo no começo apresentam ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e principios preliminares, que só lhe parecem annunciar um estudo arido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espirito sobre objectos mais interessantes, e sendo além disso difficeis de conceber, acontece commummente que os principiantes se fatigam, se aborrecem, antes de terem uma idéa clara do que se lhes queria ensinar. (CLAIRAUT, 1909, p. ix)

Ainda no prefácio encontramos que:

Não nos surprehende que Euclides se dê ao trabalho de demonstrar que dous circulos secantes não têm o mesmo centro, e que um triangulo encerrado em outro tem a somma de seus lados menor que a somma dos lados do triangulo exterior. Este geometra tinha de convencer sophistas obstinados, que se gloriavam de recusar as verdades mais evidentes; e então era preciso que a geometria tivesse, como a logica, o auxilio de raciocinios em forma para tapar a boca á chicana. As cousas, porém, mudaram de face. Todo raciocinio que recae sobre o que o só bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores. (CLAIRAUT, 1909, p. xii)

A Estrutura do livro e a Geometria:

O livro possui 230 páginas sendo 192 páginas correspondentes à tradução do conteúdo e um apêndice de 38 páginas elaborado pelo tradutor⁵⁶.

O apêndice⁵⁷ é constituído por 3 capítulos com os seguintes assuntos:

⁵⁶ José Feliciano declara, no apêndice da obra, que “o livro que o leitor acaba de percorrer, é a fiel reprodução da obra de Clairaut. Tomei tanto a peito conservar a pureza desta obra, que não quiz inserir em seu corpo notas, prefácio etc., transportando tudo para o appendice, de modo que este pode ser arrancado por aquelles que tão sómente queiram guardar o tratado do grande geometra”. (1892, p. 198)

I. A geometria de Clairaut – escrito por Godofredo Furtado, apresenta elogios e expõe os valores da Geometria de Clairaut.

II. Postfácio (1. A geometria de Clairaut; 2. Bibliografia matemática; 3. Notícia biográfica de Clairaut) – escrito por José Feliciano, apresenta uma justificativa para a tradução da obra; a lista dos livros de matemática que Auguste Comte recomendou; a biografia de Clairaut.

III. Notas do tradutor (A. As demonstrações em geometria; B. A matemática e a lógica; C. Instrumentos angulares; D. O quadrado da hipotenusa; E. Quadratura do círculo; F. Sólido; G. Princípio de Clairaut sobre a teoria da semelhança).

As 192 páginas de conteúdo são formadas por parágrafos numerados com algarismos romanos. O livro é dividido em quatro partes:

- primeira parte: Dos meios que mais naturalmente se empregaram para medir os terrenos
- segunda parte: Do método geométrico para comparar as figuras retilíneas
- terceira parte: Da medida das figuras circulares e de suas propriedades
- quarta parte: Da maneira de medir os volumes e suas superfícies

Na primeira parte, o autor desenvolve os conceitos de comprimento e distâncias, retas perpendiculares e paralelas, figuras geométricas, áreas, ângulos e figuras semelhantes.

Na segunda parte, o autor retoma os conceitos vistos fazendo operações com régua e compasso para reunir ou decompor figuras semelhantes em outras da mesma espécie. Aqui, além dos conceitos já vistos na primeira parte, são desenvolvidos razão e proporção, regra de três e o Teorema de Pitágoras.

A terceira parte é dedicada às figuras limitadas por linhas curvas e às figuras mistas, isto é, as que são limitadas por segmentos de retas e linhas curvas. São desenvolvidos os conceitos de círculo e arcos de círculo, áreas, comprimento da circunferência, coroa e setor circular, polígonos inscritos a uma circunferência, ângulo inscrito e ângulo central, reta tangente a um círculo, arco capaz e média proporcional.

Finalmente, na última parte do livro, Clairaut trata dos sólidos geométricos. Desenvolve os conceitos e propriedades dos paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros,

⁵⁷ Em todos os textos do apêndice, as obras de Auguste Comte, Filosofia Positiva, Política Positiva e Síntese Subjetiva são citadas.

cones e esferas, seus volumes e áreas das superfícies. Trata também da semelhança dos sólidos.

O livro não possui exercícios resolvidos nem propostos e os exemplos práticos são escassos. Também não apresenta nenhuma fórmula, todos os resultados são dados em linguagem natural apoiados em figuras. As demonstrações de proposições que o autor considera serem necessárias, são feitas em linguagem pouco formal, acessível e clara.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Percebemos claramente o caráter independente dos ramos da Matemática – Aritmética Álgebra e Geometria – ao analisar o livro de Clairaut. Não há, a menos de raras exceções⁵⁸, tratamento aritmético dos resultados. E, quando há necessidade de cálculos algébricos, o autor explica que não será possível desenvolver determinado conceito, deixando-o para um outro livro. Isso fica bastante claro, por exemplo na primeira parte do livro, no parágrafo referente aos polígonos regulares:

Ao processo geométrico para descrever o triangulo equilatero e o quadrado, poderíamos acrescentar a maneira de traçar geometricamente um pentagono, como fizeram muitos autores nos elementos que nos deram. Mas os principiantes, a quem destinamos este trabalho, com dificuldade perceberiam o caminho que naturalmente seguiu o espirito, procurando o meio de traçar esta figura. Esse caminho é a algebra que nos ensina a descobrir. Por isso nos julgamos obrigados a remetter a descrição do pentagono para o tratado seguinte, no qual juntaremos esta descrição á de todos os outros polygonos que tiverem maior numero de lados, polygonos esses que não poderiam ser geometricamente descritos sem o auxilio da algebra. (p. 20-21)

O tratado a que Clairaut se refere, é um livro de Álgebra de sua autoria. Conforme nos esclarece o tradutor da obra, tal livro foi publicado em 1746, portanto cinco anos após a publicação do de Geometria. No entanto, ainda segundo o tradutor, Clairaut não tratou da questão nesse livro de Álgebra; reservou o esclarecimento necessário para uma obra de Geometria Analítica.

⁵⁸ Podemos citar, na primeira parte do livro, quando o autor explica o conceito de área do retângulo. Há um exemplo aritmético do cálculo da área do retângulo de dimensões 7 e 8 metros.

Desenvolvimento do conteúdo:

A respeito da maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos no livro, o autor esclarece que:

[...] propuz-me remontar ao que podia ser a fonte da geometria. Tratei delhe desenvolver os principios por um methodo tão natural que parecesse o empregado pelos inventores, fugindo entretanto todas as falsas tentativas que elles necessariamente fizeram.

[...] A fim de seguir nesta obra um caminho semelhante ao dos inventores, faço os principiantes descobrir, antes de tudo, as verdades de que pode depender a simples medida dos terrenos e das distancias accessíveis ou inaccessíveis, etc. Passo dahi a outras investigações, de tal modo analogas ás primeiras, que a natural curiosidade leva todos os homens a nellas se deterem. Justificando depois esta curiosidade por algumas applicações uteis, chego a ensinar tudo o que de mais interessante apresenta a geometria elementar.

[...] Em alguns passos destes elementos, talvez me censurem por me reportar demasiado ao testemunho dos olhos, e por me não cingir bastante á exactidão rigorosa das demonstrações. (CLAIRAUT, 1909, p. x - xii)

O autor partiu das medidas dos terrenos para introduzir as proposições da Geometria, pois, de acordo com suas palavras, é efetivamente daí que provém essa ciência, pois que Geometria, etimologicamente, significa medida de terreno.

A partir dessas declarações fica claro que Clairaut estava preocupado em romper com a Geometria tradicional apresentada até então e propor um caminho que pudesse ao mesmo tempo motivar e auxiliar na construção do conhecimento geométrico.

Nesse livro, os conteúdos são desenvolvidos na sua maioria intuitivamente, com estímulo da percepção. Muitas definições, propriedades e proposições são colocadas a partir de observações evidentes sobre determinadas situações problematizadoras, mas também alguns teoremas são omitidos. Nas suas palavras:

[...] só trato pela rama as proposições cuja verdade se patenteia, por pouco que nellas attentemos. Assim procedo sobretudo no começo, em que mais vezes se encontram proposições desse genero. E isto faço por haver notado que os predispostos ao estudo da geometria gostavam de exercitar um pouco seu espirito, ao passo que se

desalentavam quando eram atochados de demonstrações, por assim dizer, inúteis.
(CLAIRAUT, 1909, p. xii)

A título de exemplo, vamos citar os parágrafos X e XI da primeira parte do livro onde o autor introduz o conceito de retas paralelas:

Figura 34: Final da p. 8 e início da p. 9 do livro de Clairaut (1909)

Nesse exemplo, constatamos o desenvolvimento da percepção para desenvolver a idéia de retas paralelas, indicando inclusive a construção geométrica, estabelecendo uma representação para tais retas. Dessa maneira, a partir da análise de situações reais – muralhas, canais, ruas etc – o autor chegou à construção do conceito – concepção.

Apesar de não ser freqüente, em alguns tópicos o autor propõe a construção de materiais que possam ser manipulados. Como exemplo, podemos citar o parágrafo VII da quarta parte do livro, onde, com o objetivo de chegar ao volume dos prismas, o autor define

uma reta perpendicular a um plano dado e, para fazer o leitor compreender de uma maneira intuitiva que se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a todas as retas que partem de seu pé e estão contidas no plano dado, propõe a seguinte atividade:

Figura 35: Final da p. 118 e início da p. 119 do livro de Clairaut (1909)

Podemos citar também um outro exemplo nos parágrafos I, II e III da terceira parte do livro, onde é proposto o uso de material concreto para se chegar ao perímetro de uma circunferência e conseqüentemente poder medir a área de um círculo:

Figura 36: Final da p. 83 e início da p. 84 do livro de Clairaut (1909), grifo nosso

Quanto à representação, com exceção da quarta parte da obra que é dedicada aos volumes e às superfícies das figuras geométricas espaciais, o autor propõe o tempo todo o uso da régua e do compasso na resolução dos problemas geométricos, demonstrando as construções efetuadas sempre que achar necessário.

Dessa forma, podemos afirmar que, de modo geral, este livro aborda a Geometria de forma enriquecedora, articulando a percepção, a construção, a representação e a concepção. E, para isso, usa uma linguagem acessível e clara.

Ao se referir ao livro de Clairaut, Miorim (1998) esclarece que:

Clairaut preocupou-se mais com a ‘eficiência psicológica’ do que com o ‘rigor lógico’ e foi essa preocupação que levou a sua obra a ser encarada como a primeira tentativa efetiva de constituição de uma pedagogia psicológica da Matemática, tornando-a uma referência obrigatória para todas as futuras propostas de reformulação. (p. 48)

3.3.1.4.2. Francisco Cabrita

Título da obra: *Elementos de Geometria*

2ª Edição – 1894⁵⁹

Figura 37: Capa do livro de Cabrita (1894)

Conforme já comentamos, o livro de Francisco Cabrita foi baseado no livro de Clairaut. Nos primeiros parágrafos do prefácio da obra, o autor deixa claro que:

Quem entregar-se ao trabalho de confrontar estes – *Elementos de Geometria* – com os publicados em 1741 por CLAIRAUT, facilmente reconhecerá nelles uma adaptação do plano traçado por esse ‘eminente precursor da regeneração do ensino mathematico’ às actuaes exigencias didacticas.

Quem igualmente procurar segui-lo no ensino dessa imprescriptivel disciplina, reconhecerá, como eu, em pouco tempo, o mais suave e franco progresso de seus discipulos na assimilação de tudo quanto há na Geometria de util e interessante. (CABRITA, 1894, p. 03, grifos do autor)

⁵⁹ Primeira edição: final da década de 80 do século XIX (SILVA, 2000, p. 151).

A Estrutura do livro e a Geometria:

O livro é dividido em quatro partes, da mesma forma que na obra de Clairaut. As três primeiras partes constituem a Geometria Plana e a última parte, a Geometria Espacial:

- primeira parte: Dos meios que foram mais naturalmente empregados para se conseguir a medida dos terrenos
- segunda parte: Do método geométrico de comparar as figuras retilíneas
- terceira parte: Medida das figuras circulares e suas propriedades
- quarta parte: Da medida dos volumes e das superfícies dos corpos

Os tópicos são numerados de forma consecutiva no decorrer do livro todo perfazendo um total de 219.

Diferente da obra de Clairaut, esta apresenta alguns exemplos de aplicação no decorrer do texto e também uma lista de 100 exercícios propostos no final do livro com suas respectivas respostas e que tratam de cálculos algébricos e aritméticos.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Outra característica que difere o livro de Cabrita do de Clairaut, é a apresentação de fórmulas. Cabrita utiliza a Álgebra constantemente após a apresentação dos resultados em linguagem natural e exemplifica com cálculos aritméticos os resultados obtidos. Na introdução da segunda parte dos dois livros, é possível constatar esse fato:

[...] nas operações que fizermos, para descobrir suas justas relações, só nos serviremos da regua e do compasso. (CLAIRAUT, 1909, p. 60)

[...] nas operações que fizermos para descobrir suas justas relações, não nos serviremos para cada caso, primeiro, senão da regua e do compasso, e depois do *calculo*, para fazermos sentir a sua intervenção como verdadeiro instrumento da geometria, destinado essencialmente a facilitar as investigações geometricas. (CABRITA, 1894, p. 60, grifo do autor)

Podemos citar um exemplo ilustrativo na obra de Cabrita que trata da Geometria, da Álgebra e da Aritmética conjuntamente e que se encontra na primeira parte do livro. Nesse

exemplo, podemos verificar a menção ao uso do transferidor para construir figuras geométricas:

Figura 38: Final da p. 53 e p. 54 e 55 do livro de Cabrita (1894)

Podemos dizer que Cabrita apresenta a Geometria proporcionando articulações com a Aritmética e com a Álgebra, acrescentando, assim, alguns resultados de que Clairaut não tratou por necessitar da Álgebra.

Desenvolvimento do conteúdo:

Francisco Cabrita, ao seguir os passos de Clairaut, procurou modificar a abordagem da Geometria rompendo com o estilo euclidiano. Todos os resultados, assim como as poucas demonstrações de teoremas que o autor considera necessárias, são feitas em linguagem pouco formal, acessível e clara, conforme podemos perceber no prefácio da obra:

Tomando por ponto de partida a medida dos terrenos, seguindo uma rota analoga áquella que deveriam ter seguido os primeiros descobridores, evitando a monotona successão dos theoremas e inuteis demonstrações de verdades do dominio do bom senso, acostumando o espirito a investigar e descobrir, o plano de CLAIRAUT conduz suavemente o leitor ao legitimo destino da Geometria e a tirar de seu estudo todo o proveito necessario e sufficiente.

Estes *elementos* têm por fim aplinar difficuldades que, no aprendizado desta disciplina pelos moldes communs, surgem áquelles que estudam-n'a pela primeira vez ou que aspiram obter os conhecimentos indispensaveis aos usos da vida pratica. Na sua elaboração, ora traduzindo CLAIRAUT, ora escrevendo por conta propria, afastei-me do alto rigor logico a que deveria estrictamente cingir-me, se outro fosse o fim desta publicação. (CABRITA, 1894, p. 03 e 04, grifos do autor)

Dessa forma, o livro de Francisco Cabrita, em muitos trechos, é uma tradução literal da obra de Clairaut, podemos perceber a eliminação de alguns tópicos e o acréscimo de outros. Também observamos, na obra de Cabrita, o emprego maior de figuras para ilustrar os conceitos desenvolvidos.

Em consequência disso, grande parte dos conteúdos são desenvolvidos intuitivamente, por meio da percepção, através de observações evidentes sobre determinadas situações reais, as quais proporcionam meios de se chegar à concepção de maneira natural.

A título de exemplificação, e também para podermos observar e comparar as duas obras a que estamos nos referindo, podemos citar os parágrafos 9 e 10 da primeira parte do livro onde o autor introduz o conceito de retas paralelas. Nesse exemplo, é possível notar o estímulo da percepção na introdução do conceito de retas paralelas. Observamos também a ênfase na representação, ou seja, na construção geométrica com régua e compasso de retas perpendiculares e paralelas:

Figura 39: Final da p. 11 e início da p. 12 do livro de Cabrita (1894)

Dessa forma, a partir de situações reais e usando construções geométricas com régua e compasso, chegou-se à construção do conceito. O autor estabeleceu a articulação entre a percepção, a representação e a concepção e esse método se estende pela obra toda.

Quanto à construção de materiais que possam ser manipulados, a única referência encontrada foi na terceira parte do livro, no parágrafo 108, onde, da mesma forma apresentada por Clairaut, é proposto o uso de um fio que cubra uma circunferência com o objetivo de se chegar intuitivamente ao perímetro da mesma.

3.3.1.5. F.I.C. e F.T.D.

O contexto histórico:

Conforme vimos no capítulo 2, a Reforma “Epitácio Pessoa”, de 1901 estabeleceu o Colégio Pedro II como referência do ensino secundário nas escolas estaduais, municipais e particulares brasileiras, isso significa que todas as escolas deveriam funcionar com a mesma

estrutura didático-pedagógica dessa instituição, que pregava um curso secundário estruturado nos moldes franceses.

Nesse período, os programas de ensino do Colégio Pedro II, indicavam, como referência para o ensino de Geometria, as coleções de origem francesa F.I.C. – elaboradas pelas escolas da Congregação dos *Frères de L’Instruction Chrétienne* – e F.T.D. – sigla de Frère Théophane Durand, elaboradas pela Congregação dos Irmãos Maristas – que permaneceram como modelo para os programas de ensino até metade do século XX.

De acordo com Miorim (2005, p. 03), os livros das coleções F.I.C. e F.T.D. “eram produzidos por autores nem sempre explicitados, provavelmente muitos deles traduções de produções francesas”.

Para os demais critérios de análise estabelecidos, analisaremos os livros separadamente:

3.3.1.5.1. F.I.C.

Título da obra: *Elementos de Geometria*

Tradução: Eugenio de Barros Raja Gabaglia

Data: 1913⁶⁰

⁶⁰ No exemplar consultado não está explicitada a edição.

Figura 40: Capa do livro da coleção F.I.C. (1913)

Esse livro de Geometria da coleção F.I.C. foi revisto e adaptado às escolas de instrução secundária do Brasil, segundo encontra-se descrito na obra.

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida no livro, transcrevemos o seu índice. A obra foi dividida em oito livros e que trabalham a Geometria Plana e a Espacial.

Cada um dos livros é dividido em parágrafos. Os tópicos são numerados de forma consecutiva no decorrer do livro todo totalizando 954.

ÍNDICE

Introdução	01
Livro I – Generalidades sobre a reta e os ângulos	
I Ângulos	04
II Perpendiculares e oblíquas	08
III Triângulos	11

IV	Paralelas	18
V	Polígonos	24
	Exercícios sobre o Livro I	31
Livro II – Circunferência		
I	Arcos e cordas	37
II	Tangentes	44
III	Medida dos ângulos	48
IV	Polígonos regulares	54
V	Construções gráficas	57
	Exercícios sobre o Livro II	71
Livro III – Figuras Semelhantes		
I	Linhas proporcionais	86
II	Triângulos semelhantes	90
III	Polígonos semelhantes	98
IV	Relações numéricas das linhas nos triângulos	103
V	Relações numéricas no círculo	109
VI	Relações numéricas nos polígonos regulares	117
VII	Problemas sobre as figuras semelhantes	125
	Exercícios sobre o Livro III	134
Livro IV – Superfícies		
I	Avaliação das superfícies	149
II	Relações entre as superfícies	157
III	Problemas sobre as superfícies	162
	Exercícios sobre o Livro IV	174
Livro V – Generalidades sobre as retas e os planos		
I	Retas e planos perpendiculares	182
II	Retas e planos paralelos	189
III	Ângulos diedros	194
IV	Projeção de uma figura	199
V	Ângulos sólidos ou poliedros	201
	Exercícios sobre o Livro V	207
Livro VI – Poliedros		
	Preliminares	210
I	Prisma	213
II	Pirâmide	225
III	Poliedros semelhantes	236
IV	Simetria	240
	Exercícios sobre o Livro VI	245
Livro VII – Os três corpos redondos		

I	Cilindro	249
II	Cone	252
III	Esfera	256
IV	Superfície da esfera	259
V	Volume da esfera	263
VI	Figuras esféricas	274
	Exercícios sobre o Livro VII	282
Livro VIII – As curvas usuais		
	Preliminares	290
I	Elipse	291
II	Hipérbole	305
III	Parábola	314
IV	Hélice	324
Apêndice		
Parte primeira		
I	Polígonos estrelados – Decágono	329
II	Dos sinais em geometria – Convenção fundamental, vantagens	331
III	Transversais – Teorema de Menelaus – Hexagrama de Pascal – Teorema de Céva – Aplicações	332
IV	Razão anharmonica – Feixes anarmônicos – Emprego da razão anharmonica – Teorema de Desargues	337
V	Divisão harmônica – Proporção harmônica, pontos conjugados, feixes harmônicos – Propriedades do quadrilátero completo	345
VI	Pólo e polar – Pólo e polar em relação a um ângulo – em relação ao círculo – Reciprocidade polar – Hexágono de Brianchon – Pólo e plano polar com relação à esfera	348
VII	Figuras homotéticas – Homotetia direta e inversa; centros de homotetia ou de semelhança – Propriedades dos círculos	354
VIII	Figuras inversas – Centro e potência de inversão – Figura inversa de uma reta – de uma circunferência	359
IX	Eixos radicais – Potência de um ponto; lugar dos pontos de igual potência – Circunferências ortogonais – Centro radical de três círculos	360
Segunda parte		
I	Seções cônicas	365
II	Superfícies do segundo grau	371
III	Helicóides	375
IV	Curvas planas diversas	377
Parte terceira		
I	Teoremas de Guldin	382
II	Teoremas gerais sobre as superfícies e os volumes	388
III	Corpos limitados por um plano reverso	392

IV	Método somatório	397
V	Fórmulas de Simpson	400
Quarta parte		
I	Aplicações – Métodos aproximados	405

O livro apresenta uma grande quantidade de exercícios propostos – 1125 no total. A esse respeito Miorim (2005) esclarece que, nessa época:

[...] nos livros didáticos de matemática é explicitada a intenção dos autores em colocar no livro [...] uma quantidade significativa de exercícios extras. Essa preocupação relaciona-se diretamente à concepção de aprendizagem vigente naquele período. Segundo essa concepção, a aprendizagem ocorreria por meio da ‘memorização e da reprodução (imitação/repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelos livros’ (p. 02).

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

A abordagem da Geometria é a euclidiana. As conexões com a Aritmética são encontradas nos exercícios propostos e em alguns exercícios resolvidos. A título de exemplificação, podemos citar os exercícios finais propostos no Livro II – “Circunferência”:

Figura 41: Final da p. 84 e início da p. 85 do livro da coleção F.I.C. (1913)

E também os exercícios resolvidos do Livro IV – “Superfícies”, parágrafo I – “Avaliação das superfícies”, que apresenta exemplos de aplicação de fórmulas deduzidas na teoria:

Exercícios numéricos. — 1.º Qual é a área do triângulo equilátero de 1 metro de lado?

Tem-se :

$$S = \frac{1^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1^2,7321}{4} = 0^m,4330$$

aproximando-se a um centímetro quadrado.

2.º Pode-se o raio r do círculo inscrito a um triângulo, cuja superfície é $6^m,2$ e cujo perímetro é 12^m .

Tem-se :

$$r = \frac{6^m,2}{6^m} = 1^m.$$

3.º Qual o raio do círculo circunscrito ao triângulo cuja superfície é $6^m,2$ e cujos lados são 3^m , 4^m e 5^m ?

Tem-se :

$$R = \frac{3^m \times 4^m \times 5^m}{4 \times 6^m,2} = \frac{60^m,3}{24^m,8} = 2^m,5$$

Figura 42: Trecho da p. 154 do livro da coleção F.I.C. (1913)

No decorrer de todo o Livro IV, é possível verificar também as conexões existentes com a Álgebra nas deduções de fórmulas:

LIVRO IV
SUPERFÍCIES

SUMÁRIO. I. — Avaliação das superfícies. — II. Relações entre as superfícies. — III. Problemas sobre as superfícies. — Exercícios.

§ I. — AVALIAÇÃO DAS SUPERFÍCIES

Definições.

308. Superfície é a extensão a duas dimensões : comprimento e largura.

Para avaliar as superfícies, deve-se compará-las com outra superfície escolhida como unidade, a qual é geralmente o metro quadrado.

Área de uma figura é o número que exprime a relação entre a superfície d'essa figura e a respectiva unidade.

É comum empregar-se indistintamente as palavras *área* e *superfície*.

Dois superfícies são iguais quando, superpostas, coincidem; e são equivalentes quando têm a mesma extensão, a mesma área.

Theorema.

309. A área de um rectângulo é igual ao producto da base pela altura.

1º Consideremos primeiramente o caso em que a unidade linear está contida exactamente na base e na altura. Seja, por exemplo, o rectângulo ABCD com 7 metros de base e 4 de altura. É preciso provar que o numero de metros quadrados contidos neste rectângulo se acha expresso por 7×4 ou 28.

Fig. 226.

Esta figura pôde ser decomposta em rectângulos de 7 metros de comprimento por 1 metro de largura, e cada rectângulo parcial pôde ser dividido em 7 partes iguais, tendo cada uma d'ellas um metro quadrado. O rectângulo contém pois 4 vezes 7 metros quadrados ou 28 metros quadrados.

2º Supponhamos as dimensões fraccionárias, e seja $b = 7/3$ e $h = 4/2$. O numero de metros quadrados contidos no rectângulo será $7,3 \times 4,2$ ou 30,66.

450

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

Com effeito, o rectângulo considerado pôde ser decomposto em 42 rectângulos, cada um dos quaes contém 73 decímetros quadrados; e assim a superfície ha de ser 42 vezes 73 ou 3.066 decímetros quadrados, ou $3^m,066$.

Em todo caso este raciocinio pôde se repetir, por pequena que seja a fracção do metro; assim, o theorema é sempre exacto.

Portanto a área de um rectângulo é igual...

$$S = bh^2.$$

310. Escholios. I. Dois rectângulos quaisquer S e S' estão entre si como os productos das bases pelas alturas;

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'}$$

II. Dois rectângulos com a mesma base estão entre si como as alturas, e dois rectângulos da mesma altura estão entre si como as bases; com effeito, temos então :

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'} = \frac{h}{h'} \text{ ou } \frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'} = \frac{b}{b'}$$

III. A área d'um quadrado é igual ao producto do lado por si mesmo; porque o quadrado é um rectângulo cujas dimensões são iguaes. D'ahi vem o costume de chamar *quadrado* de um numero ao producto d'esse numero por si mesmo ^{2.º}.

* Qualquer que seja a superfície considerada, representaremos sua área por S , e as linhas por letras minúsculas, b , h , etc.; entretanto escreve-se C para a circunferencia, às vezes representa-se por R o raio do círculo circunscrito a um polygono e por P o perímetro de um polygono circunscrito a um círculo.

** A theoria da área do rectângulo pôde ser exposta assim :

que têm uma medida common contida por ex., 5 vezes em b e 8 vezes em b' ; temos :

$$\frac{b}{b'} = \frac{5}{8}$$

Se, pelos pontos de divisão, tirarmos perpendiculares ás bases, os dois rectângulos se acham divididos respectivamente, um em 5, e outro em 8 rectângulos, todos iguaes visto poderem ser superpostos. Temos pois

$$\frac{S}{S'} = \frac{8}{5} \text{ e por consequência } \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'}$$

2.^o Se as bases são *incomensuráveis*, transportemos o pequeno rectângulo CDEF sobre o grande CDGH, e dividamos CH em um numero qualquer n de partes iguaes. O ponto F se acha entre dois pontos de divisão, por exemplo entre o m^o , e o ponto seguinte, marcado $m+1$.

$$\text{Temos pois } \frac{m}{n} < \frac{FC}{CH} < \frac{m+1}{n}$$

Se, pelos pontos de divisão, tiram-se perpendiculares ás bases, o rectângulo CH se acha dividido em n rectângulos iguaes; e o rectângulo CE é maior que m d'esses rectângulos parciais, e mais pequeno que $m+1$ d'esses mesmos rectângulos.

$$\text{Temos pois } \frac{m}{n} < \frac{CDEF}{CDGH} < \frac{m+1}{n}$$

Em ambos os casos, as razões extremas differem de $\frac{1}{n}$; por consequencia, se dividirmos CH em grande numero de partes iguaes, a differença $\frac{1}{n}$ podendo tornar-se tão pequena quanto se queira, tende para zero; e sempre temos a proporção.

$$\frac{CDEF}{CDGH} = \frac{CF}{CH} \text{ ou } \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'}$$

Corollario. Dois rectângulos da mesma base estão entre si como as alturas. Porque podemos tomar a dimensão commum como altura, o que nos conduz ao caso precedente.

Theorema. Dois rectângulos quaisquer S e S' estão entre si como os productos bh e $b'h'$ das bases pelas alturas.

Imaginemos um terceiro rectângulo R tendo por dimensões b e h' , isto é a base do primeiro e a altura do segundo.

$$\text{Temos } \frac{S}{S'} = \frac{h}{h'} \text{ e } \frac{S'}{S} = \frac{b}{b'}$$

$$\text{D'onde, multiplicando membro a membro } \frac{SS'}{S'S} = \frac{bh}{b'h'} \text{ ou } \frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'}$$

Figura 43: p. 149 – 151 do livro da coleção F.I.C. (1913)

Observam-se também muitas conexões com a Álgebra nas definições e nas demonstrações dos teoremas do Livro III – “Figuras semelhantes”, conforme podemos verificar neste exemplo do parágrafo IV – “Relações numéricas das linhas nos triângulos”:

§ IV. — RELAÇÕES NUMERICAS DAS LINHAS NOS TRIANGULOS

Definições

245. Chama-se *quadrado de uma linha* o quadrado do numero que exprime o comprimento d'essa linha.

Chama-se *somma*, *differença*, *product*, *quociente* ou *razão* de duas linhas, a somma, a differença, o product, o quociente ou razão, dos numeros que exprimem os comprimentos d'essas linhas com relação á mesma unidade.

Chama-se *projectão* de uma recta sobre outra, a parte d'esta ultima comprehendida entre as perpendiculares baixadas dos extremos da primeira recta sobre a segunda.

Fig. 178.

Por exemplo $A'B'$ é a projectão de AB sobre CD (fig. 178).

104

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

N'um triângulo qualquer ABC, a altura BD determina sobre o lado CA segmentos DC e DA que são as projecções respectivas dos lados BC e BA sobre o lado CA.

Fig. 179.

Se duas rectas m e n são iguaes e parallelas, suas projecções m' e n' sobre a mesma recta XY são iguaes; porque os triângulos rectangulos ABE e CDF são iguaes (nº 54).

Fig. 180.

246. Observação. No estudo das relações numericas, frequentemente se empregam as seguintes fórmulas algebricas :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Os symbolos a e b podendo representar linhas, as fórmulas acima se enunciam como se segue :

1º O quadrado da somma de duas linhas é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, mais duas vezes o producto d'essas duas linhas.

2º O quadrado da differença de duas linhas é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, menos duas vezes o producto d'essas duas linhas.

3º A somma de duas linhas, multiplicada pela differença, é igual ao quadrado da primeira linha, menos o quadrado da segunda, isto é, igual á differença dos quadrados d'essas linhas.

Theorema.

247. N'um triângulo rectângulo :

1º Cada lado do angulo recto é media proporcional entre sua projecção sobre a hypotenusa e a hypotenusa inteira;

2º A altura é media proporcional entre os dois segmentos que ella determina sobre a hypotenusa.

Seja ABC um triângulo rectângulo, e seja AD a perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypotenusa.

1.º Os triângulos rectangulos CAB e CDA são semelhantes por terem um angulo agudo commum C (nº 224); podemos pois dizer (nº 220)

Fig. 181.

RELAÇÕES NUMERICAS

105

a , hypotenusa do primeiro triângulo, está para b , hypotenusa do segundo, como b , opposto ao angulo B no primeiro triângulo, está para m , seu homologo no segundo :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Assim tambem, os triângulos CAB e ADB são semelhantes, e dão :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

2.º Os triângulos CDA e ADB, semelhantes cada um a CAB, são semelhantes entre si, e dão a proporção

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Logo...

248. Escholio I. Em todo triângulo rectângulo, O quadrado d'um lado do angulo recto é igual á sua projecção sobre a hypotenusa, multiplicada pela hypotenusa inteira; O quadrado da altura é igual ao producto dos dois segmentos da hypotenusa.

Com effeito, das tres proporções acima, fazendo os productos dos meios e dos extremos, deduz-se :

$$b^2 = am$$

$$c^2 = an$$

$$h^2 = mn$$

249. Escholio II. O quadrado da hypotenusa d'um triângulo rectângulo é igual á somma dos quadrados dos lados do angulo recto.

Com effeito, adicionando membro a membro as igualdades $b^2 = am$ e $c^2 = an$, obtem-se :

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$= a(m + n) = aa = a^2$$

D'esta relação tambem resulta que o quadrado de um lado do angulo recto é igual ao quadrado da hypotenusa menos o quadrado do outro lado.

Fig. 182.

Figura 44: Final da p. 103, p. 104 e 105 do livro da coleção F.I.C. (1913)

Desenvolvimento do conteúdo:

A obra inicia com uma introdução onde são apresentadas as definições preliminares que serão usadas no decorrer do texto:

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

INTRODUÇÃO

Definições preliminares.

1. A *Geometria* é a sciencia da extensão.
O espaço é extenso sem interrupção e sem limite.
Um logar concebido sem extensão no espaço chama-se *ponto*.
Uma extensão é ou um *corpo* ou uma *superfície* ou uma *linha*.
2. *Corpo* ou *solido* é uma porção limitada do espaço.
O corpo tem trez dimensões : *comprimento*, *largura* e *altura*, denominada tambem *espessura* ou *profundidade*.
Superfície é o limite que separa um corpo do resto do espaço.
A superfície tem duas dimensões : *comprimento* e *largura*.
Linha é o limite entre duas superficies. Tambem pode-se definir como a intersecção de duas superficies.
A linha tem uma dimensão : o *comprimento*.
Ponto é o limite entre duas linhas. Tambem pode ser definido como a intersecção de duas linhas.
O ponto não tem dimensão.
Em uma linha, ha uma infinidade de pontos; em uma superfície uma infinidade de linhas; e em um corpo uma infinidade de superficies.
As noções de *superfície*, de *linha* e de *ponto* uma vez adquiridas pela consideração do corpo, podem em seguida serem concebidas independentemente do corpo, das superficies e das linhas, de que constituem os limites. É assim que se chega a con-

GEOMETRIA.

1

2

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

siderar inversamente uma *linha* como gerada por um ponto que se move no espaço; uma *superfície* como gerada por uma *linha* que se desloca, e um *corpo* como gerado por uma *superfície* que se desloca no espaço.

3. O numero que resulta da medida de uma linha chama-se *comprimento*; de uma superfície, *area*; de um corpo, *volume*.

4. A *linha recta* é o caminho mais curto entre dous pontos. — Um fio esticado representa bem a sua imagem.

De um ponto a outro, só se pôde traçar uma *linha recta*; podemos dizer : Dois pontos são suficientes para determinar uma *recta*.

Uma *recta* qualquer é mais curta do que qualquer outra *linha* que tenha as mesmas extremidades.

5. *Linha quebrada* ou *polygonal* é uma linha formada por varias *rectas* diferentes.

Linha curva é uma linha que não é *recta* em nenhuma de suas partes.

As vezes a *linha curva* é considerada como uma *linha quebrada* formada de elementos infinitamente pequenos.

6. Chama-se *plano* ou *superfície plana* uma superfície sobre a qual se pôde traçar *linhas rectas* em qualquer direcção.

7. *Superfície polyedrica* ou *quebrada* é uma superfície composta de muitos planos diferentes.

Superfície curva é uma superfície que não é *plana* em nenhuma das suas partes.

Entretanto, a *superfície curva* pode ser considerada como uma *superfície polyedrica* formada de elementos planos infinitamente pequenos.

8. Chama-se *linha convexa* uma *linha plana* que não pôde ser encontrada por uma *recta* em mais de dois pontos.

Chama-se *superfície convexa* uma superfície que não pôde ser encontrada por uma *recta* em mais de dois pontos.

9. Chama-se *figura geometrica* qualquer representação de linhas, de superficies ou de volumes.

10. Duas figuras são *iguais* quando podem coincidir por superposição;

Equivalentes quando têm a mesma grandeza.

Semelhanes quando têm a mesma forma.

INTRODUÇÃO

3

11. *Geometria plana* é a parte da geometria que estuda as figuras planas, isto é, as figuras cujos elementos estão todos no mesmo plano.

A *Geometria no espaço* é a parte da geometria que estuda as figuras cujos elementos não estão no mesmo plano.

12. *Axioma* é uma verdade evidente por si mesma.

EXEMPLOS. Duas grandezas iguaes a uma terceira são iguaes entre si.

Se fizermos a mesma operação sobre duas quantidades iguaes, os resultados são iguaes.

13. *Theorema* é uma verdade que, para se tornar evidente, carece de demonstração.

EXEMPLO. A *somma dos angulos d'um triangulo* é igual a dois angulos rectos.

14. *Problema* é uma questão a resolver.

A solução de um problema é a indicação do methodo que se deve seguir para resolvê-lo.

15. *Lemma* é uma proposição que serve para facilitar a demonstração d'um theorema, ou a solução de um problema.

16. Chama-se *proposição* o enunciado d'um axioma, d'um theorema ou d'um problema.

Hypothese é uma supposição; *corollario* é uma consequencia, e *escholio* (1) uma observação.

17. O enunciado d'uma proposição comprehende duas partes, a saber : a *hypothese* ou *supposição*, e a *consequencia* ou *conclusão*.

A *hypothese* é o que se toma como ponto de partida, ou o que se supõe verdadeiro.

A *conclusão* é a consequencia que decorre da *hypothese*.

Quando a consequencia não é evidente, deduz-se da *hypothese* por meio de um argumento chamada *demonstração*.

18. Duas proposições são *reciprocas* uma da outra, quando a segunda tem por *hypothese* a conclusão da primeira, e por conclusão a *hypothese* da primeira.

EXEMPLO. Ao maior angulo d'um triangulo oppõe-se o maior lado. — Reciprocamente, ao maior lado oppõe-se o maior angulo.

A reciproca de uma proposição verdadeira pôde ser falsa. Assim todos os angulos rectos são iguaes, mas todos os angulos iguaes não são rectos.

(1) Alguns escrevem *scotio*.

Figura 45: p. 01 a 03 do livro da coleção F.I.C. (1913)

Podemos perceber o uso de uma linguagem formal, sem exemplos práticos de ilustração dos conceitos. Segundo encontra-se descrito na obra:

* Os nossos *Elementos de Geometria*, tão abundantes em *questões theoreticas*, não podem propôr senão um numero mui pequeno de *problemas practicos*; mas o nosso *Curso superior de Geometria*, para o Ensino primario, contém mais de mil *problemas numericos*; além d'isso, elle termina por uma taboa muito util que dá as *cordas* de 10 em 10 minutos. Assim estas duas obras, feitas para corresponder a diversos usos, completam-se uma com a outra.

Figura 46: Final da p. 420 do livro da coleção F.I.C. (1913)

Esse livro segue a abordagem euclidiana. Dessa forma, a ênfase está no método axiomático-dedutivo e todos os parágrafos seguem o modelo: definições, axiomas, teoremas e corolários com suas demonstrações, exercícios resolvidos com o título de problemas e exercícios propostos.

A título de exemplificação podemos citar o Livro I – “Generalidades sobre as retas e os ângulos”, parágrafo I – “Ângulos”:

LIVRO I

GENERALIDADES SOBRE AS RECTAS E OS ANGULOS

SUMMARIO: I. Angulos. — II. Perpendiculares e obliquas.
III. Triangulos. — IV. Parallelas. — V. Polygonos. — Exercícios.

§ I. — ANGULOS

Definições.

19. Um *angulo rectilineo* é a figura formada por duas rectas que partem do mesmo ponto. Estas duas linhas são os *lados* do angulo, e a sua intersecção é o *vertice* do mesmo angulo.
As duas rectas AB e AC formam o angulo BAC ou o angulo A.
A grandeza d'um angulo depende unicamente da abertura comprehendida entre os lados, e não do comprimento d'esses lados.
Empregaremos, como é habitual, o termo *angulo* para indicar angulo rectilineo.

Fig. 1.

20. Chamam-se *angulos adjacentes* dois angulos que têm o mesmo vertice, e que estão situados de uma parte e outra de um lado commun.

Fig. 2.

EXEMPLO: os angulos m e n.

21. Uma recta é *perpendicular* a outra recta quando forma com esta angulos adjacentes iguaes; é *obliqua* quando os angulos adjacentes são desiguaes.

22. Chama-se *angulo recto* qualquer angulo cujos lados são perpendiculares entre si (fig. 3).
Chama-se *angulo agudo* qualquer angulo menor que o angulo recto, e *angulo obtuso* qualquer angulo maior que o angulo recto (fig. 4).

Fig. 3.

Fig. 4.

23. Um angulo de um grau é a 90ª parte do angulo recto. O grau se divide em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos. Um angulo de 23 graus 27 minutos 25 segundos se escreve 23° 27' 25".

5

ANGULOS

24. Dois angulos são *complementares* quando a sua somma é igual a um angulo recto; e são *supplementares* quando a sua somma é igual a dois angulos rectos.
Chama-se *complemento* de um angulo o que é preciso ajuntar a esse angulo para se ter um angulo recto, e *supplemento* de um angulo o que é preciso ajuntar a esse angulo para se ter dois angulos rectos.

25. Dois angulos iguaes têm complementos iguaes e supplementos iguaes.
Reciprocamente, dois angulos que têm complementos iguaes ou supplementos iguaes são iguaes.

26. Chamam-se *angulos oppositos pelo vertice* ou *angulos verticalmente oppositos* dois angulos taes que os lados de um d'elles são os prolongamentos dos lados do outro.

27. A *bissectriz* d'um angulo é a recta que divide esse angulo ao meio.

Theorema.

28. Por um ponto dado em uma recta pôde-se levantar uma perpendicular a essa recta, e sómente uma.
Seja o ponto A tomado sobre a recta CD.

1ª Uma obliqua qualquer AB forma com CD angulos desiguaes: n ou BAD e m ou BAC. A obliqua pôde girar em torno do ponto A.
O angulo n, primeiro menor que o angulo m, crescerá constantemente, enquanto que o angulo adjacente BAC ou m decrescerá; haverá por conseguinte uma posição AB' na qual os angulos m e n serão iguaes; então AB' será perpendicular sobre CD.

Fig. 5.

2ª Se a recta movel se afastar da posição AB', os dois angulos deixam de ser iguaes, e a recta é obliqua.
Logo, por um ponto dado em uma recta, pôde-se levantar uma perpendicular a essa recta, e sómente uma.

Theorema.

29. Todos os angulos rectos são iguaes.
Para provar que os angulos rectos m e n são iguaes aos angulos

Figura 47: p. 04 – 07 do livro da coleção F.I.C. (1913)

No final de cada Livro estão dispostos os exercícios propostos que perfazem um total de 1125 e que são divididos em demonstrações de teoremas, determinação de lugares geométricos e problemas que englobam exercícios numéricos e exercícios gráficos, de construções geométricas com régua e compasso.

Além de aparecer nos exercícios, a representação é trabalhada sempre no decorrer do texto, entre a teoria. Por exemplo, podemos citar no livro III – “Figuras semelhantes”, nos parágrafos V – “Relações numéricas no círculo” e VI – “Relações numéricas nos polígonos regulares”, as construções geométricas do segmento áureo e do decágono regular, temas que, conforme já foi dito, serão explorados por nós neste trabalho no capítulo 4:

descreve-se o arco GBE, e do ponto A o arco GD. O ponto D divide a recta AB em meia e extrema razão, de sorte que temos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}$$

Podemos verificar que esse exemplo trabalha a representação e a concepção, fazendo uma conexão da Geometria com a Álgebra e com a Aritmética.

No Livro II – “Circunferência”, o parágrafo V – “Construções gráficas”, dedica-se exclusivamente às construções geométricas com a régua e o compasso e também com o esquadro e o transferidor. Nesse parágrafo são propostos uma série de problemas que envolvem a representação com suas respectivas demonstrações:

CONSTRUÇÕES GRAPHICAS

57

§ V. — CONSTRUÇÕES GRAPHICAS

165. Os principaes instrumentos empregados para traçar as figuras geometricas são : a *regua* e o *compasso*.

A pratica do desenho utiliza tambem o *esquadro* e o *transferidor*.

A *regua* serve para traçar linhas rectas; o *compasso*, serve para descrever circunferencias ou arcos; o *esquadro*, serve para construir angulos rectos e perpendiculares; o *transferidor* serve para medir e construir angulos quaesquer.

Fig. 113.

Fig. 114.

166. *Verificações.* Verifica-se a *regua* por um duplo traçado que se faz entre dois pontos, virando a *regua*.

Algumas reguas, cortadas em forma de bisel, têm divisões metricas em centímetros e millímetros, muito uteis para os desenhos de figuras. Taes são os *duplos decímetros*.

Verifica-se um esquadro B A C, applicando-se um dos lados AB do angulo recto sobre uma *regua* bem exacta, e traçando-se a lapis uma recta segundo AC. Em seguida, volta-se o esquadro, como indica a figura, e traça-se uma nova recta ao longo de AC'. Conforme as duas rectas assim obtidas coincidem ou divergem, o angulo BAC do esquadro é recto ou não, isto é, o esquadro é perfeito ou não. Se o esquadro é defeituoso, a media das duas posições dá a verdadeira direcção da perpendicular.

Fig. 115.

Problema.

167. Traçar uma perpendicular ao meio da uma recta dada AB ou dividir uma recta em duas partes iguaes.

Dos extremos A e B com um mesmo raio descrevem-se

58

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

arcos que se cortam em C e em D, e traça-se a recta CD, que preenche a condição desejada. Porque o ponto C sendo equidistante de A e de B, pertence á perpendicular levantada no meio de AB; o mesmo acontece com o ponto D (nº 42).

Fig. 116.

168. Escholio. Repetindo a construção sobre cada parte obtida, divide-se a recta successivamente em 4, 8, 16, 32... partes iguaes.

Problema.

169. Por um ponto dado A, tirar uma perpendicular a uma recta dada CD.

1º Com o compasso. Se o ponto A é dado sobre a recta, tomam-se distancias iguaes AC e AD e volta-se ao problema precedente; dos pontos C e D, com o mesmo raio, descrevem-se arcos que se cortam em B. A recta AB é perpendicular a CD. — Porque o ponto A é o meio de CD, e o ponto B é equidistante dos pontos C e D. AB é pois perpendicular ao meio de CD (nº 42).

Fig. 117.

Fig. 118.

Se o ponto A é dado fóra da recta, descreve-se, d'esse ponto como centro, um arco que corte a recta em dois pontos C e D; d'esses pontos C e D, com o mesmo raio, descrevem-se arcos que se cortam em B; AB é a perpendicular que se procura. — Porque o ponto A é equidistante dos pontos C e D, e o mesmo acontece com o ponto B; portanto AB é perpendicular ao meio de CD (nº 42).

Fig. 119.

Se o ponto é dado n'um extremo da recta AB, e se esta linha não pôde ser prolongada, descreve-se d'um ponto O qualquer, tendo OB como raio, uma circumferencia CBD; traça-se o diametro COD, depois a recta BD, que é a perpendicular pedida. — Porque o angulo CBD é recto por estar inscripto n'um semi-circulo (nº 148, 2º).

2º Como esquadro.

Aplica-se a regua

ao longo da recta dada; faz-se escorregar o esquadro ao longo da

Fig. 120.

CONSTRUÇÕES GRAPHICAS

59

regua, até perto do ponto dado A, e traça-se AB, que é a perpendicular pedida, pois o angulo ABC é recto.

3º Com o transferidor. Se o ponto A é dado sobre a recta, colloca-se o transferidor de maneira que seu diametro fique sobre a linha recta CD, e seu centro sobre o ponto dado; marca-se um angulo de 90 grãos, e a linha AB, que dá esse angulo, é a perpendicular pedida.

Fig. 121.

Problema.

170. N'um ponto dado D de uma recta DE, construir um angulo igual a um angulo dado A.

Fig. 122.

1º meio, com o compasso.

Dos pontos A e D como centros, com o mesmo raio, descrevem-se os arcos BC e EF; do ponto E como centro, com uma abertura de compasso igual á distancia BC, corta-se o arco EF, e traça-se a recta DF. O angulo D é igual ao angulo A.

Porque esses angulos têm por medida os arcos BC e EF; e esses arcos são iguaes por estarem subtendidos por cordas iguaes em circulos iguaes.

2º meio, com o esquadro.

Com uma regua com divisões, ou com uma simples tira de papel, tomam-se comprimentos iguaes AB e DE; levantam-se as perpendiculares BC e EF; transporta-se o comprimento BC sobre EF, e traça-se DF, o que dá em D um angulo igual ao angulo A.

Porque os triangulos ABC e DEF são iguaes por terem um angulo igual ($B = E$) comprehendido entre lados respectivamente iguaes; e assim os angulos A e D são iguaes.

Fig. 124.

171. Observação. Para traçar e reproduzir os angulos, os operarios empregam ás vezes o falso esquadro.

Figura 50: p. 57 – 59 do livro da coleção F.I.C. (1913)

Não há problemas motivadores ou de aplicação no decorrer do livro. Em nenhum momento observamos o apelo à intuição ou alguma relação da Geometria com o cotidiano.

A única exceção é encontrada na quarta parte do apêndice – “Aplicações; Métodos aproximados”, cujas denominações dos seus tópicos já nos dão a idéia de que serão abordados temas práticos e interessantes: Cubatura das madeiras; Volume dos tonéis; Sarapanel; Pontes; Túneis; Abóbadas; Pontes pênséis ou suspensas; Estradas e Canais; Reflexão da luz, do calor, do som.

Em nenhum momento o livro propõe a construção de materiais que possam ser manipulados.

Dessa forma, podemos afirmar que, de modo geral, esse livro trabalha a Geometria articulando a representação e a concepção.

É importante observar ainda que, na mesma época, para o ensino de Geometria, foi também usado no Colégio Pedro II o livro *Elementos de Geometria Descritiva* por F.I.C., igualmente traduzido no final do século XIX pelo professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, diretor e professor de Matemática do Colégio Pedro II:

Figura 51: Capa do livro *Elementos de Geometria Descritiva* da coleção F.I.C. – 11ª Edição – 1946

Esse livro segue o mesmo modelo de apresentação dos conteúdos que o livro *Elementos de Geometria* analisado acima, isto é, definições, teoremas e corolários com suas demonstrações e exercícios propostos.

As definições e os teoremas são numerados de forma consecutiva ao longo do livro todo, totalizando 622. Os exercícios seguem a mesma característica e perfazem um total de 446.

3.3.1.5.2. F.T.D.

Título da obra: *Geometria Elementar com noções de Agrimensura e de Nivelamento*

Data: 1925⁶¹

Figura 52: Capa do livro da coleção F.T.D. (1925)

Segundo orientações descritas na obra, esse livro de Geometria da coleção F.T.D. foi designado ao programa ginásial e de admissão a várias escolas superiores.

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida, mencionamos o índice do livro que foi dividido em três partes:

ÍNDICE

Noções preliminares	03
Primeira parte: Geometria Plana	
Capítulo I Linhas e ângulos	05
Capítulo II Polígonos	21
Capítulo III Do círculo	38

⁶¹ O exemplar que consultamos não possui edição, porém tivemos contato também com a 3ª edição do livro que data de 1920, o que permite concluir que esse que foi analisado, seja da 4ª edição em diante.

Capítulo IV	Construções gráficas	53
Capítulo V	Figuras semelhantes	78
Capítulo VI	Superfícies	108
Segunda parte: Geometria no espaço		
Capítulo I	Planos e ângulos poliedros	137
Capítulo II	Poliedros	151
Capítulo III	Corpos redondos	177
Capítulo IV	Avaliação do volume de vários corpos	201
Terceira parte: Noções de agrimensura e de nivelamento		
Capítulo I	Agrimensura	213
Capítulo II	Avaliação da superfície de terrenos	225
Capítulo III	Levantamento de plantas	232
Capítulo IV	Questões práticas	243
Capítulo V	Nivelamento	253
	Fórmulas geométricas	320

O livro apresenta uma quantidade significativa de exercícios propostos – 1077 no total.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

A Geometria segue o estilo euclidiano, porém há algumas aplicações práticas. As conexões com a Aritmética ocorrem nos exercícios propostos que são, na sua maioria, exercícios numéricos conforme denominação utilizada no livro, ou nos poucos exercícios resolvidos. Já com a Álgebra observam-se muitas conexões nas demonstrações dos teoremas e nas deduções de fórmulas.

A título de exemplificação, podemos citar na primeira parte do livro, no Capítulo VI – “Superfícies”, no item I – “Várias fórmulas de superfícies planas”, a parte referente ao triângulo:

da base AB pela altura CD; logo, a superfície do triângulo é igual à metade do produto destas duas dimensões.

Designando por T a superfície de um triângulo, por b a base e por h a altura, temos a fórmula:

$$T = \frac{bh}{2}$$

194. Corolários. — 1.º Dois triângulos de mesma base estão entre si como as alturas.

2.º Dois triângulos de mesma altura estão entre si como as bases.

195. Observação I. — Vários triângulos de mesma base são equivalentes quando os vértices se acham numa paralela a esta base, porque a superfície de cada triângulo é o produto das mesmas rétas. Assim os tres triângulos representados pela fig. 190 têm por superfície

$$\frac{1}{2} AB \times CD.$$

FIG. 190.

196. Observação II. — Na medição dos terrenos, é preciso muitas vezes determinar a superfície de um triângulo conhecendo os tres lados. Para isso, emprega-se o modo seguinte:

Faz-se a semi-soma dos tres lados do triângulo; subtrai-se successivamente cada lado desta semi-soma; faz-se o produto da semi-soma e dos tres restos obtidos, e extrai-se a raiz quadrada deste produto.

Representando por T a superfície de um triângulo, por p o semi-perímetro, e por a, b, c , os lados, temos a fórmula seguinte (1).

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(1) Ver uma demonstração nos n.ºs 234 e 235.

TRIÂNGULO.

193. Teorema. — A superfície de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

Seja o triângulo ABC (fig. 189), cuja base é AB e a altura CD. Pelo vértice C deste triângulo, se traçarmos uma paralela á base AB, e, pelo ponto B, uma paralela ao lado AC, formamos o paralelogramo ABEC, cuja superfície é o dobro da do triângulo ABC (n.º 53).

Ora, a superfície do paralelogramo é igual ao produto

FIG. 189.

FIG. 191.

Exemplo. — Achar a superfície de um triângulo cujos lados têm respectivamente os comprimentos seguintes 30 m., 28 m. e 26 m.

O semi-perímetro deste triângulo é

$$\frac{30+28+26}{2} = 42.$$

Portanto, na fórmula precedente, substituindo a, b e c por seus valores, teremos:

$$T = \sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = 336 \text{ m}^2.$$

Figura 53: Final da p. 110, p. 111 e início da p. 112 do livro da coleção F.T.D. (1925)

Desenvolvimento do conteúdo:

Nesse livro, é desenvolvida a Geometria axiomática, seguindo o modelo: definições, teoremas com suas demonstrações, corolários e exercícios propostos. No entanto, encontramos alguns exemplos que mostram o desenvolvimento da intuição para ilustrar os conceitos desenvolvidos.

A obra é iniciada com algumas noções preliminares que serão usadas no decorrer do livro e onde é possível perceber o apelo à intuição:

Figura 54: p. 3 e 4 do livro da coleção F.T.D. (1925), grifos nossos

No decorrer do texto, prevalece uma linguagem rigorosa, formal, no entanto, no início de cada uma das partes que compõe o livro, é possível observar o uso de uma linguagem formal misturada com uma linguagem mais simples, intuitiva, que apela para a percepção, conforme podemos verificar nos exemplos seguintes, o primeiro referente à primeira parte e o segundo, à segunda parte do livro:

PRIMEIRA PARTE

Geometria plana

CAPÍTULO PRIMEIRO

LINHAS E ÂNGULOS

I. — Linhas.

4. — Distinguem-se tres espécies de linhas : *rêta*, *quebrada* e *curva*.

Linha *rêta*, ou simplesmente *rêta*, é o caminho mais curto de um ponto a outro. Um fio bem esticado representa uma rêta.

FIG. 1. — Diferentes espécies de linhas.

Linha *quebrada*, ou *poligonal*, é uma linha composta de rétas. Um metro articulado, mais ou menos em ziguezague, dá uma ideia da linha quebrada.

Linha *curva* é a que não é nem rêta nem composta de rétas. O contorno de uma roda é uma curva.

6

GEOMETRIA, C. MEDIO

5. — Por um ponto dado A (fig. 2), pôde-se fazer passar uma infinidade de rétas ; mas por dois pontos B e C, não se pôde fazer passar senão uma só rêta, porque duas rétas que têm dois pontos comuns confundem-se.

FIG. 2.

FIG. 3.

Dois pontos bastam, pois, para determinar a posição de uma rêta. Designa-se uma rêta por duas letras postas nas suas extremidades. Assim, diz-se a rêta AB (fig. 3).

6. — *Medir uma rêta*, é procurar quantas vezes ela contem o metro, tomado como unidade de medida, ou partes de metro. Para isso empregam-se o duplo-decmetro, o metro ou o decametro, conforme o comprimento da linha que se quer medir.

Retificar uma linha quebrada ou uma *linha curva*, é traçar uma linha rêta de comprimento igual ao da linha quebrada ou da linha curva.

7. Conforme a sua direção, uma rêta pôde ser *horizontal* ou *vertical*.

Uma rêta é horizontal quando segue o nível de água em repouso.

Uma rêta é vertical quando segue a direção do fio de prumo (fig. 4).

Por um ponto dado, não se pôde traçar senão uma só rêta vertical, mas pôde-se traçar uma infinidade de rétas horizontais.

FIG. 4. — Fio de prumo.

Figura 55: p. 5 e 6 do livro da coleção F.T.D. (1925), grifos nossos

SEGUNDA PARTE

Geometria no espaço.

CAPÍTULO PRIMEIRO

PLANOS E ÂNGULOS POLIEDROS

I. — Plano.

236. **Definição.** — *Plano* é a superfície sobre a qual se pôde aplicar, em todos os sentidos, uma régua bem rêta. Representa-se geralmente por um *paralelogramo*. Tem *extensão ilimitada*.

237. — Por dois pontos ou por uma rêta pôde-se fazer passar uma infinidade de planos.

Fazendo girar uma porta (fig. 221) sobre as dobradiças A e B, haverá tantos planos diferentes passando pela rêta que une as dobradiças, quantas fôrem as posições da porta.

FIG. 221

Figura 56: p. 137 do livro da coleção F.T.D. (1925), grifo nosso

No final de cada capítulo estão dispostos os exercícios que são divididos em exercícios numéricos e, em alguns capítulos, também há exercícios gráficos, de construções geométricas com régua e compasso. Em nenhum momento são propostos exercícios que pedem para o aluno demonstrar algum teorema.

Quanto à representação, o livro propõe com frequência o uso da régua e do compasso na resolução dos problemas geométricos, demonstrando as construções efetuadas. O capítulo IV – “Construções gráficas”, da primeira parte do livro, dedica-se exclusivamente às construções geométricas com régua e compasso, onde podemos observar, no início do capítulo, uma linguagem informal:

Figura 57: p. 53 e 54 do livro da coleção F.T.D. (1925)

Em outros capítulos, também há construções geométricas entre a teoria. Por exemplo, podemos citar, na primeira parte do livro, no capítulo V – “Figuras semelhantes”, a construção geométrica do segmento áureo:

180. Problema VII. — Dividir uma réta AB em meia e extrema razão.

Dividir uma réta em meia a extrema razão, é dividi-la em dois segmentos tais que o maior seja meia proporcional entre a réta inteira e o menor segmento.

Fig. 180.

Para resolver este problema, numa das extremidades da réta, em B por exemplo (fig. 180), eleva-se

RELAÇÕES NUMÉRICAS

99

a perpendicular BO igual á metade de AB : depois, do ponto O como centro, com o raio OB, descreve-se uma circunferência. Une-se o ponto A ao ponto O e transporta-se AC sobre AB, em E. Os dois segmentos procurados são as rétas AE e EB.

Com efeito, se prolongarmos AO até D, podemos escrever (n.º 168) :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

Mas, em toda a proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a diferença dos dois ultimos está para o quarto. Portanto :

$$\frac{AD-AB}{AB} = \frac{AB-AC}{AC}, \text{ ou } \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{EB}$$

ou ainda, substituindo AC pelo seu valor AE e invertendo as razões :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$$

Observação. — A construção do decágono regular inscrito em um círculo baseia-se no problema precedente, porque o lado do decágono regular é igual ao maior segmento do raio dividido em meia e extrema razão. (Para a demonstração, vê a *Geometria curso superior*).

Figura 58: Final da p. 98 e início da p. 99 do livro da coleção F.T.D. (1925)

Quanto aos problemas motivadores ou de aplicação, eles são trabalhados na segunda parte do livro, no capítulo IV – “Avaliação do volume de vários corpos”, cujas denominações dos seus parágrafos já nos dão a idéia de que serão abordados temas práticos: Volume de montões de areia; Volume de pipas e barris; Cubagem de madeiras; Volume de vários objetos. Como no exemplo:

Fig. 361.

357. Esquadria das madeiras brutas. — Para esquadriar um tronco de árvore bruta, inscreve-se um quadrado em um dos círculos da extremidade, e depois, corta-se de cada lado da árvore, toda a madeira exterior a este quadrado. Póde-se calcular de antemão o volume da madeira obtida pela esquadria de um tronco ainda bruto. Para isso, aplica-se uma das fórmulas seguintes, segundo a espessura da casca.

358. Cubagem deduzindo 1/5. — Para se obter o volume de uma árvore deduzindo 1/5, toma-se 1/5 da circunferência média, eleva-se este quinto ao quadrado e multiplica-se este quadrado pelo comprimento da árvore.

Estas operações são indicadas pela fórmula :

$$Vol. = \left(\frac{C}{5}\right)^2 \times l.$$

Emprega-se esta fórmula para a generalidade das madeiras. Para as de casca muito delgada, emprega-se a fórmula da cubagem deduzindo 1/6.

Na cubagem deduzindo 1/5, supõe-se que o desbaste para esquadriar a madeira faz perder 1/5 ao perímetro.

359. Cubagem deduzindo 1/6. — Para obter o volume de uma árvore deduzindo 1/6, toma-se da circunferência média 1/6 que se subtrai depois desta circunferência, toma-se do resto 1/4 que se eleva ao quadrado, e multiplica-se o resultado pelo comprimento da árvore.

As operações a efectuar são indicadas na fórmula :

$$Vol. = \left(\frac{5C}{6.4}\right)^2 \times l.$$

Na cubagem deduzindo 1/6, supõe-se que o desbaste para esquadriar a madeira faz perder 1/6 ao perímetro.

Na cubagem do quarto sem dedução, supõe-se que o lado da madeira esquadriada vale o quarto da circunferência.

O volume da árvore é então :

$$Vol. = \left(\frac{C}{4}\right)^2 \times l.$$

Figura 59: p. 206 do livro da coleção F.T.D. (1925)

São trabalhados problemas de aplicação principalmente na terceira parte do livro: Noções de agrimensura e de nivelamento. Podemos citar um exemplo no capítulo II – “Avaliação da superfície de terrenos”:

399. Problema V. — Avaliar a área de um terreno no interior do qual não se póde penetrar.

Seja o terreno representado pela figura 333. Primeiro circunscreve-se um retângulo a este terreno. Para isso, traça-se a réta KL, passando pelos vértices G e D ; depois, sobre esta réta, elevam-se as perpendiculares KN e LM passando pelos pontos A e E, e sobre KN eleva-se a perpendicular NM passando por B.

Fig. 333.

Terminada esta operação, abaixam-se as perpendiculares CC', DD' e FF' sobre o perímetro do retângulo. Agora resta só achar a soma das superfícies dos trapézios e dos triângulos exteriores ao terreno a medir, e subtrair esta soma da superfície do retângulo circunscrito.

Figura 60: p. 230 do livro da coleção F.T.D. (1925)

Em nenhum momento o livro propõe a construção de materiais que possam ser manipulados.

Dessa forma, podemos afirmar que, de modo geral, esse livro trabalha a Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção.

3.3.2. Segundo período: 1930 – 1960

3.3.2.1. Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza

– Autores: Cecil Thiré, Mello e Souza

Título da obra: *Matemática*

1º ano – 1941 (12ª edição)⁶²

2º ano – 1936 (5ª edição)⁶³

⁶² Primeira edição: 1930.

- Autores: Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza

Título da obra: *Curso de Matemática*

3º ano – 1936 (3ª edição)⁶⁴

4º ano – 1934 (2ª edição)⁶⁵

5º ano – 1940 (4ª edição)⁶⁶

O contexto histórico:

Os autores foram professores do Colégio Pedro II. Os livros foram escritos na década de 1930, quando, sob a direção de Euclides Roxo, o Colégio Pedro II viveu um período de reorganização didática e administrativa, reflexos do primeiro Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática que surgiu no final do século XIX, na Europa. Esse movimento foi presidido pelo matemático Felix Klein e tinha como principal objetivo discutir e tentar solucionar as dificuldades no ensino da Matemática tornando-o mais humano. Foi, portanto um período de modernização no ensino dessa disciplina, havendo uma fusão entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, com a criação de uma nova disciplina denominada “Matemática”.

Nesse período entrou em vigor no Brasil, a Reforma Francisco Campos de 1931 que organizou o sistema nacional de ensino e dividiu o ensino secundário em dois níveis: um Curso Fundamental de cinco anos, comum a todos os alunos – onde a nova disciplina “Matemática” deveria ser ensinada obrigatoriamente em todos os anos, começando de forma intuitiva, experimental e caminhando progressivamente para uma segunda etapa mais formal e abstrata – seguido de um Curso Complementar, de dois anos, destinado aos candidatos aos cursos superiores.

⁶³ Primeira edição: 1931.

⁶⁴ Não temos informação sobre a data da primeira edição do livro.

⁶⁵ Primeira edição: 1933

⁶⁶ Primeira edição: 1933

Para os demais critérios de análise estabelecidos acima, analisaremos os livros separadamente:

1º ano:

Figura 61: Capa do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 1º ano (1941)

No prefácio da 1ª edição (1930), os autores colocam que:

Se na verdade, como dizia A. Comte, a escola é a caserna das creanças, o ensino da Matemática tem sido uma verdadeira sala de torturas por onde todos os jovens estudantes são obrigados a passar.

Os professores de Matemática, com raras exceções, têm a preocupação de complicar e dificultar o ensino dessa matéria. Em vez de problemas práticos, interessantes e simples, exigem sistematicamente de seus alunos a decifração de questões complicadíssimas, verdadeiras charadas, cujo sentido o estudante não chega a penetrar. Para a resolução de um problema ou para a dedução de uma fórmula banal, ensinam dois, três, e, às vezes, até quatro processos diferentes, quando, por um princípio mezinho de boa pedagogia, deveriam ensinar apenas um desses processos e banir os demais.

No curso secundário o professor de Matemática julga que há grande vantagem em fazer com que o aluno aprenda, desde logo, a demonstrar uma série de teoremas inúteis e complicados, na ilusão de que tais demonstrações, apesar de enfadonhas, vão constituir uma ótima ginástica mental, para o fim de desenvolver as faculdades de raciocínio. Há nisso um lamentável erro didático. As demonstrações fastidiosas de teoremas inúteis, só podem trazer como consequência esse ‘horror à Matemática’, tão comum entre os estudantes.

[...] Sem fugir ao programa oficial, que seguimos ‘pari passu’, procurámos abordar as diferentes partes da Aritmética, Álgebra e Geometria, em conjunto, com simplicidade e máxima clareza, sem a confusão de assuntos. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1941, p.vii - ix)

Percebemos claramente a preocupação dos autores com as dificuldades existentes no ensino da Matemática e a busca de um ensino mais humanístico. Além disso, acentuam a fusão entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Prefácio da 1ª edição	VII
Capítulo I Numeração	11
Capítulo II Adição	20
Capítulo III Subtração	30
Capítulo IV Multiplicação	41
Capítulo V Divisão	58
Capítulo VI Potência de um número	73
Capítulo VII Múltiplo e divisor. Divisibilidade	82
Capítulo VIII Propriedade dos restos. Provas por um divisor	94
Capítulo IX Máximo divisor comum	105
Capítulo X Números primos	112
Capítulo XI Mínimo múltiplo comum	122
Capítulo XII Frações ordinárias	129
Capítulo XIII Adição e subtração de frações ordinárias	146
Capítulo XIV Multiplicação de frações	157
Capítulo XV Divisão de frações	169
Capítulo XVI Frações decimais. Números decimais	176
Capítulo XVII Estudo das principais noções e formas geométricas	197
Capítulo XVIII Números complexos	221
Capítulo XIX Sistema métrico decimal	247
Capítulo XX Sistema inglês de pesos e medidas	287
Capítulo XXI Determinação de áreas. Volume do paralelepípedo	294
Capítulo XXII Números relativos ou qualificados	303

Capítulo XXIII	Representação das quantidades por meio de letras. Expressões algébricas	326
Capítulo XXIV	Termos semelhantes – Adição e subtração de polinômios	337
Capítulo XXV	Equação do 1º grau	347
Capítulo XXVI	Eixos coordenados. Gráficos	368
Capítulo XXVII	Raiz quadrada	386

Observando o índice parece que a Geometria só será tratada em alguns capítulos após o Capítulo XVII. Porém, ao analisarmos o livro verificamos que os autores distribuíram os conteúdos da Geometria ao longo do livro todo. Ou seja, os conteúdos de Aritmética são tratados algebricamente e também geometricamente na maioria dos capítulos.

Para exemplificar podemos citar o Capítulo II – “Adição”, onde os autores introduzem as noções preliminares por meio de um exemplo prático e, após discutirem a operação com as suas propriedades via exemplos aritméticos e algébricos, falam da adição de segmentos:

Figura 62: Início da p. 28 do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 1º ano (1941)

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme já observamos acima, os autores abordaram as diferentes partes da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, em conjunto.

No Capítulo XXVI – “Eixos Coordenados. Gráficos”, os autores introduzem as noções de coordenadas e de Geometria Analítica. Euclides Roxo (ROXO apud VALENTE, 2004a) ao se referir à nova proposta de ensino de matemática brasileira, acentua que às tendências do movimento de reforma internacional, decorriam outras características que se entrelaçavam e se completavam. Algumas dessas características foram assim descritas por ele:

A fusão dos diferentes ramos da matemática: a aritmética, a álgebra e a geometria, interligando-as em uma única disciplina; [...] introdução das noções de coordenadas e de geometria analítica, que são acessíveis aos alunos desde as primeiras séries [...] (p. 102-103)

Para exemplificar podemos citar um exercício resolvido que consta nesse capítulo após a introdução das noções preliminares através de uma situação problematizadora:

Figura 63: Final da p. 372 do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 1º ano (1941)

Desenvolvimento do conteúdo:

A respeito da maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos no livro, os autores colocam, no prefácio da 1ª edição (1930), que:

Tivemos o cuidado de formular com precisão e rigor todos os conceitos e definições. É evidente que algumas noções foram apresentadas terra-a-terra, despidas de todo formalismo teórico, que seria descabido, pois que êste compêndio é destinado aos alunos do 1ª ano ginasial.

[...] Êste compêndio – repetimos – tem um cunho acentuadamente prático, e proporcionará ao estudante do 1º ano uma soma de conhecimentos, metódicos e exatos, que servirão de base para os estudos teóricos que serão feitos nos anos subsequentes.

A partir do 2º ano irão aparecendo, em ordem crescente de complexidade, diversos princípios com suas demonstrações rigorosas; os alunos exercitarão, sem esforço, as suas faculdades de raciocínio sobre teoremas de aplicação quasi imediata. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1941, p.ix - x)

A partir dessa declaração fica claro que, nesse livro, os conteúdos de Geometria são desenvolvidos intuitivamente, por meio da percepção com o objetivo de que, a partir dos próximos anos, será desenvolvida a concepção, buscando o conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e a teorização. Assim, percebemos a polarização percepção / concepção.

Os conceitos geométricos são introduzidos, na sua maioria, a partir de exemplos práticos e de problemas motivadores que levam em consideração principalmente os aspectos intuitivos. Por exemplo, no Capítulo XVII – “Estudo das principais noções e formas geométricas”, os autores iniciam o parágrafo 2 – “O ponto”, da seguinte maneira:

Se tocarmos com a ponta de uma agulha, ou de um lápis bastante fino, sobre uma folha de papel, fazendo um pequeno sinal, obtemos a imagem aproximada de um ponto geométrico. [...] Podemos ter uma idéia aproximada de um ponto quando observamos um corpo muito pequeno, como um grão de areia, por exemplo. Uma estrela, visível a olho nú, aparece aos nossos olhos como um ponto luminoso. (p.197)

Há conceitos, como por exemplo, no Capítulo XXI – “Determinação de áreas. Volume do paralelepípedo”, em que os autores optaram pela seqüência conceito – exemplos – exercícios, no desenvolvimento do conteúdo.

Em nenhum momento os autores propõem a construção de objetos em sentido físico.

Quanto à representação, apesar dos autores não citarem o uso da régua e do compasso na resolução dos problemas geométricos, há exercícios que pedem que os alunos reproduzam, por meio de desenhos, alguns objetos geométricos. Por exemplo, nos exercícios referentes ao Capítulo XVII – “Estudo das principais noções e formas geométricas”, temos exercícios que envolvem a representação, que estão propostos entre exercícios de cálculos de perímetros, comprimentos etc:

Trace um quadrilátero não convexo.

Trace dois segmentos iguais e perpendiculares.

Trace um triângulo obtusângulo isósceles e o eixo de simetria desse triângulo.

Trace um triângulo retângulo isósceles.

(p. 218-219)

2º ano:

Figura 64: Capa do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 2º ano (1936)

No prefácio da 1ª edição (1931), encontramos que:

A grande impopularidade da Matemática resulta principalmente da maneira defeituosa e absurda pela qual é ensinada.

É incontestável que a metodologia dessa ciência tem evoluído profundamente. A tendência moderna é para tornar a Matemática cada vez mais simples, mais interessante e mais racional. Nas escolas não há mais lugar para os livros pesados, enfadonhos ou incongruentes.

Não poucos autores, entretanto, levados por uma lamentável ignorância e por um descabido exagêro, julgam modernizar a Matemática escrevendo compendios ridículos e pejados de erros crassos.

É evidente, porém, que num livro perfeito os conceitos devem ser apresentados com rigor, impecáveis as definições e as teorias desenvolvidas com máxima precisão e clareza. Do contrário daremos aos alunos uma noção falsa, não só da Matemática como também da finalidade primordial dêsse estudo. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1936, p. v)

Percebemos a preocupação dos autores com a maneira pela qual a Matemática estava sendo ensinada. Dessa forma, neste livro objetivam torná-la mais simples e mais agradável, não fugindo, porém, de sua característica rígida e formal.

A Estrutura do livro e a Geometria:

Para analisar a maneira pela qual a Geometria está contemplada pelos autores no livro, reproduzimos o seu índice:

ÍNDICE

Prefácio da 1ª edição	V
Comentário	VII
Capítulo I Ângulos e Rotações – Arcos	9
Capítulo II Perpendiculares e oblíquas	33
Capítulo III Paralelas	41
Capítulo IV Triângulos	48
Capítulo V Quadriláteros	61
Capítulo VI Razões e proporções	67
Capítulo VII Números proporcionais – Grandezas proporcionais	105
Capítulo VIII Noção de figuras semelhantes. Escalas	122
Capítulo IX Medida indireta das distâncias. Funções trigonométricas	134
Capítulo X Regra de três	153
Capítulo XI Porcentagem	172
Capítulo XII Juros simples – Métodos comerciais	191
Capítulo XIII Desconto	215
Capítulo XIV Moeda e Câmbio	234
Capítulo XV Divisão proporcional	267
Capítulo XVI Equações literais. Problema do 1º grau. Interpretação das soluções negativas	284

Capítulo XVII	Variável e função – Representação gráfica das funções	307
Capítulo XVIII	Sistema de equações do 1º grau	336
Capítulo XIX	Divisão algébrica	359
Capítulo XX	Decomposição em fatores	377
Capítulo XXI	Frações algébricas	385

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos primeiros nove capítulos do livro. Nesses capítulos, os autores tratam a Geometria trabalhando com a Aritmética e a Álgebra sempre que necessário. Ao analisar o livro, percebemos que nos capítulos posteriores, a Geometria não mais é tratada em nenhum momento.

Euclides Roxo (ROXO apud VALENTE, 2004a), ao se referir às características da nova proposta do ensino de Matemática brasileira, declarou ser importante “o desenvolvimento do método histórico, sustentando que os professores deveriam ter uma base sólida em História da Matemática” (p.103). Dessa forma, os autores intercalaram entre todos os capítulos do livro, algumas páginas sobre a História da Matemática, na sua maioria, textos sobre Geometria.

Um exemplo interessante é o texto “Os Elementos de Euclides” colocado no final do Capítulo V – “Quadriláteros”, onde percebemos claramente uma discordância, por parte dos autores, com a rígida Geometria Euclidiana:

Não poucas foram as modificações e alterações – por vezes descabidas – que os diversos comentadores introduziram nos ‘Elementos’; apesar disso êsse livro foi considerado, durante muitos séculos, como uma obra clássica, perfeita e indispensável ao estudo da Matemática pura.

Os ‘Elementos’, de Euclides, são uma obra puramente teórica, sem aplicações práticas, nem cálculos numéricos; as proposições são, porém dispostas de modo a formar um encadeamento lógico de raciocínios geométricos, que partem de hipóteses quasi evidentes para chegar, sem dificuldade, aos resultados mais complexos. As demonstrações são rigorosas, muitas vezes elegantes, e não embaraçam os estudantes neófitos.

Tem, entretanto, a obra clássica de Euclides defeitos gravíssimos, e não pôde ser, por isso, considerada modernamente como um livro didático – como já o foi durante largos anos na Inglaterra. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1936, p. 65)

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme já observamos acima, nos capítulos referentes à Geometria, os autores abordaram a Aritmética e a Álgebra em conjunto.

Vamos a dois exemplos que comprovam esse fato; ambos encontram-se no Capítulo I – “Ângulos e Rotações – Arcos”. O primeiro exemplo mostra o uso da Álgebra num tópico teórico e o segundo num exercício resolvido:

Figura 65: Trecho da p. 16 do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 2º ano (1936)

É importante observar que, nessa mesma página 16, os autores colocaram, em nota de rodapé, que “a construção de um ângulo igual a um ângulo dado será estudada no n.º. 48 dêste capítulo”. Nesse item, é apresentada a construção geométrica com régua e compasso do transporte de um ângulo dado, passo a passo.

Figura 66: Trecho da p. 30 do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 2º ano (1936)

Desenvolvimento do conteúdo:

Para explicar a maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos no livro, os autores, no prefácio da 1ª edição (1931), colocam que:

O plano único que nos orientou na elaboração deste trabalho foi o seguinte: Escrever, sem fugir ao programa oficial, um compêndio de feição moderna, acentuadamente prático e de leitura agradável ao aluno – formulando com absoluto rigor, clareza e método todos os conceitos e definições. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1936, p. v - vi)

E, em nota de rodapé no mesmo livro, que:

As noções preliminares de Geometria, indispensáveis para o estudo deste capítulo e dos capítulos seguintes, encontram-se no livro Matemática – 1º ano. (THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1936, p. 09)

Nesse livro, diferentemente do livro do 1º ano, onde os conteúdos de Geometria foram, por meio da percepção, abordados intuitivamente, será desenvolvida a concepção, buscando a organização conceitual, a sistematização do conhecimento geométrico, aonde, embora utilizando uma linguagem acessível, predominarão as definições formais e o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais.

A estrutura de todos os capítulos é basicamente: conceitos – exercícios resolvidos – exercícios propostos. Tanto na parte teórica como nos exercícios, há problemas que envolvem a representação, ou seja, o uso da régua e do compasso.

Existem alguns conceitos, embora sejam bem poucos nesse segundo volume, em que os autores utilizaram problemas motivadores ou situações problematizadoras para desenvolverem o conteúdo. Como exemplo, podemos citar no Capítulo IX – “Medida indireta das distâncias. Funções trigonométricas”, o uso de uma situação problematizadora para explicar o conceito de ângulo de elevação:

Figura 67: Início da p. 147 do livro de Cecil Thiré e Mello e Souza – 2º ano (1936)

Em nenhum momento os autores propõem a construção de materiais em sentido físico.

3º ano:

Figura 68: Capa do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Esse livro do 3º ano não possui prefácio como os dois anteriores.

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelos autores, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo I	Equações e identidades. Equações do 1º grau com uma incógnita	05
	Leitura – História das notações algébricas (I)	30
Capítulo II	Equações do 1º grau com duas ou mais incógnitas. Sistemas	31
	Leitura – História das notações algébricas (II)	56
Capítulo III	Problemas do 1º grau com uma ou mais incógnitas	58
	Leitura – História das notações algébricas (III)	77
Capítulo IV	Desigualdades. Inequações do 1º grau	79
	Leitura – História das notações algébricas (IV)	97
Capítulo V	Potências e raízes. Números imaginários	98
	Leitura – História das notações algébricas (V)	115
Capítulo VI	Estudo das funções $y=x^m$; $y=1/x^m$ e $y=\sqrt{x}$. Representação gráfica	117
	Leitura – Omar Khayyam	127
Capítulo VII	Cálculo dos radicais; expoentes fracionários	128
	Leitura – Omar Khayyam	150
Capítulo VIII	Equação do 2º grau. Resolução analítica; resolução gráfica	151
	Leitura – Viète	169
Capítulo IX	Equação do 2º grau; propriedade das raízes. Discussão da equação do 2º grau	172
	Leitura – A obra de Viète	184
Capítulo X	Trinômio do 2º grau. Representação gráfica. Variação. Inequações do 2º grau	186
	Leitura – O progresso da Álgebra	201
Capítulo XI	Conjunto de propriedades fundamentais que servem de base à Geometria Dedutiva	203
	Leitura – Origens da Geometria	210
Capítulo XII	Noções sobre os deslocamentos elementares no plano. Translação e rotação de figuras	212
	Leitura – As demonstrações matemáticas	219
Capítulo XIII	Simetria no plano	221
	Leitura – Pitágoras e a sua escola	229
Capítulo XIV	Estudo dos triângulos	231
	Leitura – Pitágoras e a sua escola	240
Capítulo XV	Estudo dos polígonos; soma dos ângulos internos e externos	242
	Leitura – Hipócrates e a redução ao absurdo	254
Capítulo XVI	Estudo dos quadriláteros	255
	Leitura – Pons asinorum	269

Capítulo XVII	Noções e exemplos de lugar geométrico	270
	Leitura – Trissecção de um ângulo	278
Capítulo XVIII	Círculo, propriedades dos arcos e das cordas	280
	Leitura – Platão	292
Capítulo XIX	Tangente e normal	294
	Leitura – “Os Elementos” de Euclides	305
Capítulo XX	Medida dos ângulos	307
	Leitura – “Os Elementos” de Euclides	321
Capítulo XXI	Linhas proporcionais; linhas proporcionais no triângulo	323
	Leitura – Axiomas e postulados	343
Capítulo XXII	Semelhança; homotetia	344
	Leitura – O postulado de Euclides	362
Capítulo XXIII	Relações métricas no triângulo	364
	Leitura – O postulado de Euclides	378
Capítulo XXIV	Relações métricas no círculo	380
	Leitura – O teorema de Pitágoras	385

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos capítulos finais do livro. Nesses capítulos, os autores trabalham a Geometria sem praticamente nenhum tratamento algébrico ou aritmético. As únicas exceções são as poucas aplicações de fórmulas. Ao analisar o livro, percebemos que nos capítulos anteriores que tratam da Álgebra, existem poucas conexões com a Geometria.

Nesse volume, como no do 2º ano, os autores intercalaram entre os capítulos do livro, algumas páginas sobre a História da Matemática, sendo que, os textos sobre a Geometria só se encontram no final dos capítulos que tratam a Geometria e não no livro todo.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme já observamos acima, nos capítulos que trabalham a Geometria, não há articulações com a Álgebra ou com a Aritmética.

Os primeiros capítulos tratam de cálculos algébricos. Em poucos itens de alguns desses capítulos há conexões com a Geometria. Por exemplo, podemos citar o Capítulo II – “Equações do 1º grau com duas ou mais incógnitas – Sistemas”, que apresenta dois exemplos

com a resolução gráfica de um sistema de duas equações e duas incógnitas, ou seja, utiliza a Geometria Analítica conforme está proposto na Reforma Campos:

Figura 69: Final da p. 45 e início da p. 46 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Temos também, no final desse mesmo capítulo, a apresentação das possíveis interpretações geométricas de um sistema linear; porém, não há nenhuma figura, os autores só escrevem em linguagem natural:

Figura 70: Final da p. 52 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Podemos notar, na nota de rodapé desse exemplo, uma conexão com a Geometria Projetiva conforme está sugerido nas características da nova proposta do ensino de Matemática brasileira propostas na Reforma Francisco Campos.

Vamos a um outro exemplo que comprova a conexão da Álgebra com a Geometria presente nesse livro:

No Capítulo III – “Problemas do 1º grau com uma ou mais incógnitas”, encontramos o interessante problema denominado “Problema dos correios”. Antes de exporem o problema, os autores explicam que: “A palavra correios é empregada aí para designar dois móveis quaisquer. O problema dos correios tornou-se clássico no estudo da Álgebra e é estudado desenvolvidamente por quasi todos os autores”. (ROXO, THIRÉ, MELLO e SOUZA, 1936, p. 67):

Figura 71: Final da p. 67, p. 68 e início da p. 69 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Após essa apresentação do problema, há dois exercícios resolvidos de aplicação da fórmula encontrada que resolve o problema e, em seguida, a resolução geométrica do mesmo problema:

20 — Resolução gráfica do problema dos correios.

Dois móveis partem no mesmo instante, sendo um da estação A e outro de B, seguindo ambos para S. O 1º percorre 7 km.

PROBLEMAS DO 1.º GRAU COM UMA OU MAIS INCOGNITAS 71

por hora e o outro 5 km .por hora. A distância AB é de 6 km. A que distância da estação A o 1º móvel deverá encontrar o 2º.

Sobre uma folha de papel quadriculado tracemos a reta MS que representará o caminho retilíneo percorrido pelos correios.

Marquemos sobre a reta MS dois pontos A e B, sendo AB = 6. (O km. será representado

no desenho pelo lado de uma quadricula).

No ponto A levantemos uma perpendicular AP, sendo AP = 7; no ponto B levantemos a perpendicular BQ, sendo BQ = 5. As perpendiculares AP e BQ representarão respectivamente as velocidades dos móveis.

Os pontos P e Q determinarão a reta PQ que irá cortar MS num certo ponto E. Esse ponto E será o ponto em que o 1º móvel encontrará o segundo.

Para se achar a distância pedida basta contar as unidades contidas no segmento AE.

A figura nos mostra que a distância AE é igual a 21 km.

21 — Observação.

Seja v a velocidade do 1º correio, v' a velocidade do 2º e d a distância entre as estações.

A figura ao lado — conforme já mostramos — apresenta a resolução gráfica do problema dos correios.

Vamos demonstrar que a distância AE ou x é dada pela fórmula

$$x = \frac{vd}{v - v'}$$

Com efeito. Tracemos do ponto Q o segmento QL paralelo a AB.

PROBLEMAS DO 1.º GRAU COM UMA OU MAIS INCOGNITAS 73

no denominador é igual a zero e o valor de x , dado pela fórmula, será

$$x = \frac{vd}{0}$$

ou

$$x = \infty$$

Esse resultado indica que o problema, nesse caso, não admite solução, isto é, não existe o ponto de encontro a uma distância finita de A.

Com efeito. Se os correios partem de pontos diversos com a mesma velocidade, é evidente que nenhum deles poderá alcançar o outro.

O gráfico nos mostra que PQ e AB são paralelas.

III) Quando v é menor que v' , o valor de x dado pela fórmula é negativo.

Nesse caso x representa uma distância que deve ser contada para a esquerda do ponto A. Nos termos em que foi enunciado, o problema é impossível.

Para que a solução negativa fosse perfeitamente aceitável deveríamos enunciar o problema do seguinte modo:

Dois móveis percorrem um caminho retilíneo MS, no mesmo sentido, de M para S (*); o 1º com a velocidade v e o 2º com a velocidade v' . Em dado momento acham-se respectivamente nos pontos A e B, sendo a distância AB igual a d . Pergunta-se: a que distância do ponto A acha-se o ponto de MS em que os dois móveis estiveram juntos?

2º CASO:

d é igual a zero.

(*) O movimento é suposto uniforme. (Veja "Matemática, 2º ano" — pag. 351).

72

CURSO DE MATEMÁTICA

Os triângulos PQL e PAE são semelhantes.

Temos:

$$\frac{AE}{AP} = \frac{QL}{PL}$$

Façamos:

$$AE = x \quad AP = v \quad QL = d \quad PL = v - v'$$

Substituindo os termos da proporção por esses valores, temos:

$$\frac{x}{v} = \frac{d}{v - v'}$$

Dessa equação, tiramos:

$$x = \frac{vd}{v - v'}$$

22 — Discussão do problema dos correios.

Na discussão do problema dos correios, dois casos podemos considerar:

1º caso — a distância d é diferente de zero;

2º caso — a distância d é igual a zero.

1º CASO:

d é diferente de zero.

Suposta diferente de zero, a distância d , três hipóteses se podem apresentar:

$$v > v'$$

$$v = v'$$

$$v < v'$$

I) Quando v é maior que v' a fórmula $x = \frac{vd}{v - v'}$,

indica que o valor de x é positivo, isto é, x representa uma distância AE, contada para a direita do ponto A.

II) Quando v é igual a v' a diferença $v - v'$ que figura

74

CURSO DE MATEMÁTICA

Sendo a distância d igual a zero os pontos A e B coincidem, isto é, os correios partem do mesmo ponto.

Se as velocidades v e v' forem desiguais, a fórmula

$$x = \frac{vd}{v - v'}$$

apresentará, para $d = 0$, o resultado $x = 0$.

O ponto E coincidirá com o ponto de partida.

Supondo $d = 0$ e $v = v'$, da fórmula

$$x = \frac{vd}{v - v'}$$

tiramos:

$$x = \frac{v \times 0}{v - v'}$$

ou

$$x = \frac{0}{0}$$

Esse resultado nos mostra que o valor de x é indeterminado. Com efeito. Se os correios partem do mesmo ponto, e com a mesma velocidade, caminham sempre juntos, logo qualquer ponto do caminho é um ponto de encontro.

Figura 72: Final da p. 70 e p. 71 a 74 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Uma última exploração geométrica é encontrada no Capítulo V – “Potências e Raízes – Números imaginários”, que trata, no final do capítulo dos números complexos. Após a definição, as propriedades e as operações com os números imaginários, encontramos o exemplo:

Figura 73: Final da p. 114 e início da p. 115 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Desenvolvimento do conteúdo:

Na análise do livro do 1º ano feita acima, observamos que os autores declararam que, naquele livro, introduziram os conteúdos intuitivamente, por meio de um ensino experimental, com o objetivo de, nos anos subsequentes, caminharem progressivamente, em ordem crescente de complexidade, para uma segunda etapa mais formal e abstrata, onde aparecem diversos princípios com suas demonstrações rigorosas. Essa característica já começou a ser sentida no livro do 2º ano e nesse livro do 3ºano, ela aparece com mais força.

A partir dessa declaração fica claro que, nesse livro, os conteúdos de Geometria são desenvolvidos formalmente, trabalhando a concepção, buscando o conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e a teorização:

Figura 74: Início da p. 203 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Após essa explicação de como será feito o estudo da Geometria, são dados os conceitos e alguns exemplos de proposições geométricas – as definições, os axiomas, os postulados, os teoremas e os corolários. Os autores explicam e dão exemplos das partes que compõem um teorema – hipótese e tese – e de como se faz uma demonstração, esclarecendo ao leitor que “não é possível fixar um método geral para a demonstração de todos os teoremas de Geometria. Veremos nos capítulos seguintes, as várias formas de demonstração entre as quais faremos destacar a *demonstração pela redução ao absurdo*”. (ROXO, THIRÉ, MELLO e SOUZA, 1936, p. 207, grifos dos autores)

No entanto, apesar dos autores recorrerem ao método axiomático, o texto é escrito em uma linguagem simples, como podemos verificar no exemplo:

Figura 75: Final da p. 206 e início da p. 207 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

No final do Capítulo XI – “Conjunto de proposições fundamentais que servem de base à Geometria Dedutiva”, é feita uma lista das proposições fundamentais, aquelas que serão admitidas sem demonstração. É interessante observar que, em nota de rodapé, os autores esclarecem que:

Dessas proposições algumas são simples postulados; outras são teoremas já demonstrados; outras, finalmente, poderiam ser demonstradas, mas, como não podemos ter, nesta fase do curso, a preocupação de um rigor absoluto, preferimos aceitá-las sem demonstração. (ROXO, THIRÉ, MELLO e SOUZA, 1936, p. 209)

A partir desses esclarecimentos, nos capítulos que se seguem são dadas uma série de definições usando linguagem simples, porém formal, sem praticamente nenhuma aplicação prática ou exemplos motivadores.

Algumas das poucas aplicações práticas são encontradas, por exemplo, no Capítulo XII – “Noções sobre deslocamentos elementares no plano – Translação e Rotação de figuras”:

Figura 76: Trecho da p. 217 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Ou no Capítulo XIII – “Simetria no plano”:

Figura 77: Início da p. 227 e trecho da p. 228 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Os exercícios propostos e resolvidos, em número reduzido, são colocados no decorrer da teoria e são exercícios que pedem para demonstrar propriedades e teoremas como os exemplificados abaixo que se encontram no Capítulo XIV – “Estudo dos triângulos”:

Figura 78: Trecho da p. 238 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Outros são exercícios de aplicações diretas de fórmulas deduzidas na teoria. Um exemplo, que possui uma conexão com a Álgebra, está no Capítulo XV – “Estudo dos polígonos; soma dos ângulos internos e externos”:

Figura 79: Final da p. 246 e início da p. 247 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Quanto à construção de objetos em sentido físico, encontramos um único exemplo no final do Capítulo XV – “Estudo dos polígonos; soma dos ângulos internos e externos”, que trata dos mosaicos no plano:

Figura 80: p. 253 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

Os autores não citam o uso da régua e do compasso na resolução dos problemas geométricos em momento algum, no entanto, há exercícios, embora sejam poucos, que pedem que os alunos reproduzam, por meio de desenhos, alguns objetos geométricos. Por exemplo, nos exercícios referentes ao Capítulo XIII – “Simetria no plano”, temos exercícios que envolvem a representação:

Figura 81: Final da p. 228 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 3º ano (1936)

4º ano:

Figura 82: Capa do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério de análise estabelecido, mencionamos o índice do livro:

ÍNDICE

	Prefácio	05
Capítulo I	Equações bi-quadradas	07

	Leitura – Diophante de Alexandria	13
Capítulo II	Equações irracionais	15
	Leitura – Equações algébricas	26
Capítulo III	Problemas do 2º grau; Discussão	28
	Leitura – A divisão Áurea	43
Capítulo IV	Progressões aritméticas	46
Capítulo V	Progressões geométricas	59
Capítulo VI	Função exponencial	74
Capítulo VII	Logarithmos	90
Capítulo VIII	Logarithmos decimaes	108
Capítulo IX	Taboas de logarithmos	124
	Leitura – Logarithmos (Esboço histórico)	138
Capítulo X	Juros compostos. Anuidades	140
Capítulo XI	Polygonos regulares	166
Capítulo XII	Medida da circunferência; Cálculo de π (Methodo dos perimetros)	192
	Leitura – O número π	219
Capítulo XIII	Áreas; Figuras equivalentes; Relação entre áreas de figuras semelhantes	222
	Leitura – A quadratura do círculo	252
Capítulo XIV	Planos e rectas no espaço	255
Capítulo XV	Ângulos polyedricos. Triedros suplementares	278
Capítulo XVI	Polyedros. Prisma. Pyramide	285
Capítulo XVII	Geração e classificação das superfícies	306
	Leitura – Monge	319
Capítulo XVIII	Cylindro e cone	322
Capítulo XIX	Esphera; Secções planas. Pólos; Plano tangente; Cone e cylindro circumscriptos	336
Capítulo XX	Funcções trigonométricas	352
Capítulo XXI	Variações das funcções trigonométricas	363
Capítulo XXII	Arcos complementares e arcos suplementares. Reducção ao 1º quadrante	374
	Leitura – A Trigonometria de Hipparco	388
Capítulo XXIII	Relações trigonométricas fundamentaes	389
Capítulo XXIV	Addição e subtracção de arcos	398
	Leitura – A Trigonometria dos Árabes	408
	Formulário – Perímetros e áreas das figuras planas	411
	Formulário – Áreas e volumes dos sólidos	413
	Índice alphabetico da matéria	415
	Índice alphabetico dos autores	419

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, a partir do capítulo XI. Os autores tratam a Geometria trabalhando com a Aritmética e a Álgebra sempre que necessário. Ao analisar o livro, percebemos que nos capítulos anteriores, que tratam de cálculos algébricos, há várias conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, com a proposição de exercícios nesse sentido.

Nesse volume, os autores também intercalaram algumas páginas sobre a História da Matemática entre os capítulos do livro, porém, os textos não se encontram em todos os capítulos.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Nos primeiros capítulos do livro, correspondentes aos cálculos algébricos, há vários exemplos de conexões com a Geometria. Podemos citar, no Capítulo I – “Equações Bi-Quadradas”, um exemplo do estabelecimento dessa conexão:

6 — Exemplo III.

Problema: Um terreno rectangular $ABCD$ tem $60m^2$ de area. Determinar as dimensões desse terreno sabendo-se que diagonal AC mede $13m$.

Solução:

Designemos a base por x ; a altura CB será $\frac{60}{x}$.

Apliquemos ao triangulo rectangular ABC o theorema de Pythagoras (**):

$$x^2 + \left(\frac{60}{x}\right)^2 = 13^2$$

Effectuando, temos:

$$x^2 + \frac{3600}{x^2} = 169$$

Expellindo os denominadores obteremos a seguinte equação bi-quadrada:

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$$

cuja raiz são:

$$\pm 12 \text{ e } \pm 5$$

(**) Veja Euclides Roxo — “Curso de Mathematica”, 3.ª serie, pag. 331.

12 CURSO DE MATHEMATICA

As soluções negativas não convêm ao problema; as dimensões do rectangulo são, portanto, respectivamente iguaes a $12m$. e $5m$.

Figura 83: Final da p. 11 e início da p. 12 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

No Capítulo III – “Problemas do 2º grau; Discussão”, a maioria dos problemas propostos trata da Álgebra, da Aritmética e da Geometria articuladamente. No final desse capítulo, os autores trabalham a divisão em média e extrema razão, ou a divisão áurea de um segmento:

11 — Divisão em média e extrema razão.

Dividir um segmento em média e extrema razão é dividi-lo em duas partes tais que uma delas seja média proporcional entre o segmento dado e a outra parte.

Seja AB ou l um segmento qualquer.

Um ponto M tomado sobre AB dividirá o segmento AB em duas partes: AM e MB .

Vamos supor que AM é média proporcional entre AB e a outra parte; temos:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} \quad (4)$$

Essa proporção define a divisão do segmento AB em *média e extrema razão*, também denominada *divisão áurea*.

Na proporção (4) AM é o *segmento áureo* de AB .

12 — Cálculo do segmento áureo.

Seja AB ou l um segmento dado (veja figura anterior); vamos calcular o segmento áureo de AB .

38 CURSO DE MATEMÁTICA

Representemos o segmento áureo por x e façamos $AM = x$.

Temos $MB = l - x$

Na proporção (4) substituíamos AB , AM e MB por seus respectivos valores. Temos:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x}$$

Expellindo os denominadores, vem:

$$x^2 = l^2 - lx \quad (5)$$

Escrevendo essa equação do 2º grau sob forma geral, temos:

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

Resolvendo-a:

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2}$$

ou

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2}$$

Simplificando o radical, temos:

$$x = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}$$

Separando as raízes:

$$x' = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2} \quad x'' = \frac{-l - l\sqrt{5}}{2}$$

PROBLEMAS DO 2.º GRÁU: DISCUSSÃO 39

Escrevendo l em evidência, vem:

$$x' = \frac{l(-1 + \sqrt{5})}{2} \quad x'' = \frac{l(-1 - \sqrt{5})}{2}$$

Esses resultados nos mostram que as raízes são obtidas multiplicando-se o segmento l por certos coeficientes numéricos. Esses coeficientes, calculados aproximadamente, nos dão os seguintes resultados:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618 \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618$$

Os valores de x' e x'' são portanto:

$$x' = 0,618l \quad x'' = -1,618l$$

A 1ª raiz sendo positiva o valor de x' deve ser contado para a direita do ponto A (*); a 2ª raiz sendo negativa o valor de x'' deve ser contado para a esquerda do ponto A.

Conclusão:

Um segmento AB pôde ser dividido em média e extrema razão por dois pontos M e M' ; um desses pontos (M) divide o segmento AB em duas partes (AM e MB) cuja somma é AB ; o outro ponto (M') divide o segmento AB em duas partes (AM' e $M'B$) cuja diferença é AB (**).

AM é o segmento aureo interno e AM' é o segmento aureo externo (***).

(*) Convençionamos o suporte de AB orientado de A para B .

(**) Diz-se que um segmento dado é dividido *interna* ou *externamente* por um ponto, conforme este é marcado sobre o próprio segmento dado ou sobre o seu prolongamento. Cfr. Euclides Roxo, ob. cit. pag. 269.

(***) Quando dizemos simplesmente *segmento aureo* devemos entender que se trata do *segmento aureo interno*.

40 CURSO DE MATHEMATICA

Exercício.

I — O raio de um círculo mede 5m. Calcular o segmento aureo desse raio.

II — Qual é a relação entre R e o segmento aureo interno de R ?

13 — Construção geometrica do segmento aureo.

Retomemos a equação (5) do paragrapho anterior:

$$x^2 = l^2 - lx$$

Nessa equação l é o segmento dado e x o segmento aureo de l . Vamos determinar geometricamente os dois valores de x .

Transpondo o termo $-lx$ para o 1º membro, temos:

$$x^2 + lx = l^2$$

Sommando a quantidade $\frac{l^2}{4}$ a ambos os membros dessa equação, vem:

$$x^2 + lx + \frac{l^2}{4} = l^2 + \frac{l^2}{4}$$

O trinomio que constitue o 1º membro é o quadrado do binomio

$$x + \frac{l}{2}$$

Podemos, pois, escrever:

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Essa equação nos mostra que $x + \frac{l}{2}$ é a hypotenusa de um triangulo rectangulo cujos cathetos são l e $\frac{l}{2}$.

PROBLEMAS DO 2.º GRÁU: DISCUSSÃO 41

Seja AB ou l o segmento dado. No extremo B levantemos a perpendicular BF igual á metade de l .

A hypotenusa AF será igual ao segmento aureo augmentado de $\frac{l}{2}$.

Façamos centro no ponto F e descrevamos uma circumferencia; essa circumferencia vae determinar os pontos S sobre AF e S' sobre o prolongamento de AF .

AS será o segmento aureo interno e AS' será o segmento aureo externo.

Exercícios.

I — Construa um triangulo isosceles ABC no qual o angulo A tenha 36° . Mostre que a base BC é o segmento aureo do lado AB .

II — Construa um rectangulo cuja base seja l e a altura o segmento aureo interno de l (rectangulo aureo).

Figura 84: p. 37 - 41 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

O texto colocado no final do capítulo aborda o mesmo tema, mostrando aplicações práticas da divisão áurea:

Figura 85: p. 43 - 45 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

Assim, podemos notar, nesse exemplo, as conexões entre a percepção, a representação e a concepção.

Ainda com relação aos primeiros capítulos que trabalham os cálculos algébricos, observa-se que as conexões com a Geometria Analítica continuam com força, conforme a proposta de Euclides Roxo na Reforma Campos.

Desenvolvimento do conteúdo:

Para explicar a maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos no livro, os autores colocam que:

Destinando-se este livro especialmente aos estudantes da 4ª série do curso secundário, tivemos ao elaborá-lo, a preocupação de seguir *pari passu* o programa oficial, distribuindo pelos diferentes capítulos toda a matéria exigida.

Procuramos, sempre que foi possível, acompanhar os pontos estudados de questões simples e problemas numéricos que fizessem resaltar as múltiplas aplicações práticas da Mathematica.

Tivemos, ainda, o cuidado de evitar as demonstrações longas e fastidiosas, cheias de subtilezas; contorná-mos as dificuldades dessa natureza, que se nos deparavam, sem sacrificar a precisão de linguagem e o indispensável rigor dos raciocínios. Assim procedemos pois tínhamos em vista – dada a finalidade deste compendio – escrever um livro simples, didactico, e não um repositório inútil de theorias mathematicas para algebristas. (ROXO, THIRÉ, MELLO E SOUZA, 1934, p. 05)

A característica observada nos livros do 2º e do 3º anos de fazer um estudo progressivamente mais formal, de forma mais abstrata, onde aparecem diversos princípios com suas demonstrações rigorosas, continua com força nesse livro do 4º ano.

Dessa forma, foi desenvolvida principalmente, a concepção, buscando a organização conceitual, aonde, embora utilizando uma linguagem simples e acessível, predominam as definições formais e o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais.

A estrutura de todos os capítulos é basicamente: definições – propriedades com suas demonstrações – exercícios resolvidos – exercícios propostos. Todos os exercícios resolvidos e propostos são de aplicações diretas das fórmulas obtidas na teoria, conforme o exemplo abaixo.

Na parte teórica, os autores recorrem constantemente à representação, com o uso da régua e do compasso na resolução dos problemas geométricos. Um exemplo encontra-se no Capítulo XI – “Polígonos regulares”, onde entre a apresentação de definições e propriedades de polígonos, há propostas de construções geométricas estabelecendo uma conexão entre as resoluções geométrica e algébrica do mesmo problema:

24 — Inscrição de polygonos regulares no circulo.

O problema da inscrição de polygonos regulares no circulo pode ser encarado de duas maneiras diversas:

- I) do ponto de vista da construção geometrica;
- II) do ponto de vista da resolução algebraica.

No primeiro caso — quando se trata da solução puramente geometrica — o problema ficará reduzido ao seguinte:

Dividir graphicamente a circumferencia, com o auxilio da regua e do compasso (), em n partes iguaes.*

Na solução algebraica — que alguns autores denominam *solução analytica* — procuramos uma relação algebraica entre o lado e o raio do polygono. Sendo l o lado do polygono regular (de especie p) e R o raio desse mesmo polygono, é evidente que l será uma função de R . Temos pois:

$$l = f(R)$$

A resolução algebraica terá, pois, por objecto, a determinação da forma dessa função (**).

25 — Divisão da circumferencia em partes iguaes.

O problema da divisão da circumferencia em n partes iguaes foi objecto da attenção dos grandes géometras desde os tempos remotos, quando a Mathematica ainda se achava nos primeiros periodos de seu desenvolvimento.

GAUSS (***) demonstrou que só podem ser construidos euclidianamente, isto é, com a régua e com o compasso, os polygonos regulares de n lados nos seguintes casos:

(*) Um problema de construção geometrica é resolvido *euclidianamente* quando a sua solução rigorosa é obtida pelo emprego exclusivo da regua e do compasso. (Veja a leitura, "Geometria do Compasso").

(**) Tal solução só é possível para um numero limitado de polygonos.

(***) CARLOS FREDERICO GAUSS, mathematico allemão (1777-1855).

I) quando n for da forma

$$2^m \quad (I)$$

II) quando n for um numero primo da forma

$$2^{m'} + 1 \quad (II)$$

III) quando n for um producto de factores differentes das formas (I) e (II) (*).

Resulta, do theorema de GAUSS, que podem ser construidos euclidianamente os polygonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24... lados (**).

Não admittem construção euclidiana os polygonos de 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25... lados.

Não é possível, por exemplo, construir rigorosamente, com régua e compasso, o heptagono regular. Esse polygono é, por isso, raramente empregado nas ornamentações ou em Architectura.

26 — Construção do quadrado.

A construção do quadrado inscripto num circulo de raio R é um problema elementar.

Si traçarmos dois diametros perpendiculares AB e CD as extremidades desses diametros serão os vertices do quadrado inscripto.

(*) A demonstração do theorema de GAUSS, relativo aos polygonos regulares de n lados, não se enquadra em um curso elementar da Mathematica.

(**) Entre os polygonos euclidianos são conhecidos até hoje apenas 5, cujo numero n de lados satisfaz a condição II. Esses polygonos são os de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24 e 4537 lados. O ultimo dos polygonos regulares ali citados — com 4537 lados — foi estudado durante 39 annos, no seculo passado, pelo mathematico allemão HERMÈS, de Göttingen. É interessante assignalar que o polygono regular de 4537 lados, inscripto num circulo de 10 metros de raio, terá menos de 1 millimetro de lado.

27 — Expressão do lado quadrado.

Do triangulo rectangulo AOC tiramos:

$$AC^2 = OC^2 + OA^2$$

Designemos AC por l ; como os lados OC e OA são raios, temos:

$$l^2 = R^2 + R^2$$

ou

$$l^2 = 2R^2$$

Extrahindo a raiz quadrada, resulta:

$$l = R \sqrt{2} \quad (31)$$

Conclusão:

O lado do quadrado é igual ao raio multiplicado pela raiz de 2 (*).

28 — Exercício V.

Calcular o lado de um quadrado inscripto em um circulo de 3m de lado.

Resolução:

Da fórmula (31) tiramos:

$$l = 3 \times \sqrt{2}$$

ou

$$l = 3 \times 1,414$$

Effectuando o producto, temos:

$$l = 4,242$$

Resposta: 4m.242

(*) Na pratica tomamos para $\sqrt{2}$ o valor 1,414.

Figura 86: p. 179 - 181 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

Nesse quarto volume, praticamente não há problemas motivadores ou de aplicação ou situações que usam a intuição para desenvolvimento do conteúdo. Como uma das raras exceções, podemos citar um exemplo presente no Capítulo XIV – “Planos e retas no espaço”, que tenta exemplificar de maneira mais informal uma forma de se obter um plano por uma reta móvel:

Figura 87: Final da p. 261 do livro Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 4º ano (1934)

Em nenhum momento os autores propõem a construção de materiais em sentido físico.

5º ano:

Figura 88: Capa do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 5º ano (1940)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelos autores no livro, transcrevemos o seu índice:

ÍNDICE

Capítulo I	Resolução de triângulos	05
Capítulo II	Relações nos triângulos retângulos	11
Capítulo III	Relações nos triângulos obliquângulos	19
Capítulo IV	Uso das Tábuas Trigonométricas	30
Capítulo V	Resolução de triângulos retângulos	49
Capítulo VI	Resolução de triângulos obliquângulos	57
Capítulo VII	Noções de análise combinatória	75
Capítulo VIII	Binômio de Newton	95
Capítulo IX	Noções de limites	105
Capítulo X	Determinação do limite de certas expressões. Limites singulares. Formas ilusórias	127
Capítulo XI	Variável. Função. Continuidade de uma função	140
Capítulo XII	Razão dos acréscimos. Derivada de uma função. Interpretação gráfica	164
Capítulo XIII	Derivadas das funções elementares. Diferencial de uma função	180
Capítulo XIV	Derivadas das funções transcendentais: $\text{sen} x$, $\text{cos} x$, $\text{tg} x$ e $\text{cot} x$	199
Capítulo XV	Derivadas sucessivas de uma função	206
Capítulo XVI	Sinal da derivada. Máximo e mínimo de uma função	211
Capítulo XVII	Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas	222
Capítulo XVIII	Interpretação geométrica da integração. Integral definida. Aplicação ao cálculo de certas áreas	233
Capítulo XIX	Volume. Determinação do volume do prisma e da pirâmide	246
Capítulo XX	Volumes do cilindro e do cone. Área e volume da esfera	267
Capítulo XXI	Estudo sucinto das seções cônicas	284
Capítulo XXII	Noções elementares sobre séries. Convergência de uma série	300
Capítulo XXIII	Desenvolvimento em séries	317
	Tábuas dos senos, cossenos e tangentes	329
	Formulário – Perímetros e áreas das figuras planas	330
	Formulário – Áreas e volumes dos sólidos	332

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria está dividida em dois blocos: nos primeiros seis capítulos do livro e nos capítulos XIX a XXI. No primeiro bloco, os autores tratam a Geometria Plana juntamente com a Trigonometria e no segundo, a Geometria

Espacial. A Geometria é desenvolvida com a Álgebra e com a Aritmética. Nos demais capítulos, que tratam de cálculos algébricos, percebemos, ao analisarmos o livro, que há várias conexões entre a Álgebra, a Aritmética e a Geometria.

Podemos observar também que foi introduzido o Cálculo Diferencial e Integral conforme Euclides Roxo indicou na nova proposta de ensino de Matemática brasileira, que estabelecia:

A introdução da noção de função, especialmente sob a forma gráfica; a introdução das noções de coordenadas e de Geometria Analítica, que são acessíveis aos alunos desde as primeiras séries; a introdução das noções de Cálculo Diferencial e Integral, mesmo que faltasse a base rigorosamente lógica, pois esta seria suprida com o processo intuitivo. (ROXO apud VALENTE, 2004a, p.103)

Dessa forma, é possível notar neste livro, um equilíbrio existente entre a intuição e a formalidade.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme já observamos acima, nos capítulos referentes à Geometria, os autores abordaram a Álgebra e a Aritmética em conjunto:

3 — Como se resolve um triângulo.

Há dois processos principais empregados em Matemática para a resolução dos triângulos:

o processo geométrico
e o processo trigonométrico.

Consiste o primeiro na construção gráfica — com auxílio da régua e do compasso (*) — de um triângulo do qual conhecemos certos elementos.

O processo trigonométrico consiste em determinar-se, com auxílio de fórmulas próprias — denominadas fórmulas trigonométricas — os elementos desconhecidos em função dos elementos dados.

A diferença essencial entre esses dois processos é, pois, a seguinte: no primeiro, a solução é dada por uma construção gráfica (**), e no segundo, resulta do emprego de fórmulas matemáticas.

4 — Resolução geométrica. Exemplo.

Resolver geometricamente um triângulo ABC dados o lado a e os dois ângulos adjacentes B e C .

Tracemos um segmento BC igual ao lado a ; da extremidade B desse segmento tiremos BF que forma com BC um ângulo

(*) A resolução gráfica de um problema com auxílio exclusivo do compasso não deixa de constituir, na verdade, um processo geométrico. Trata-se, entretanto, de um processo especial que não pode ser apreciado neste curso.
(**) No cálculo gráfico comum, os números são transformados, por meio de uma escala métrica, em segmentos de reta sobre os quais efetuamos uma construção geométrica e chegamos a um novo segmento que medido pela mesma escala vai nos fazer conhecer o resultado pedido. Cfr. Maurice D'Ocagne — "Le calcul simplifié", pag. 84.

CÁLCULO DE c

Da terceira fórmula resulta:

$$c = \frac{42 \times 0,906}{0,966}$$

Efetuando:

$$c = 39,3$$

Resposta:

$$A = 75^\circ \quad b = 27m,9 \quad c = 39m,3$$

Fica assim resolvido o triângulo proposto.

6 — Fórmulas trigonométricas.

Como acabamos de mostrar, o método trigonométrico, para a resolução de triângulos, baseia-se no emprego de fórmulas.

Ora, os elementos principais de um triângulo são de duas naturezas: três elementos lineares (lados) e três angulares (ângulos).

Para que possamos introduzir numa mesma fórmula lados e ângulos (elementos heterogêneos), substituímos os ângulos por certas funções denominadas funções trigonométricas (*).

As fórmulas que encerram funções trigonométricas são denominadas fórmulas trigonométricas.

7 — Trigonometria; definição.

A Trigonometria é a parte da Matemática que tem por objeto o estudo das funções trigonométricas e a resolução dos triângulos por meio de fórmulas próprias denominadas fórmulas trigonométricas. (**)

A Trigonometria pode ser plana ou esférica, conforme estuda os triângulos retilíneos ou os triângulos esféricos. (***)

(*) As funções trigonométricas foram definidas na 2.ª série e estudadas, com o necessário desenvolvimento, na 4.ª série.
(**) Vimos encontrar na obra de Hiparco (que viveu dois séculos antes de Cristo) os primeiros fundamentos da Trigonometria. Ptolomeu contribuiu igualmente para o desenvolvimento desse importante ramo da Matemática. Os Árabes, a partir do IX Século, dedicaram-se aos estudos da Trigonometria; são notáveis os trabalhos de Albatênio (apelidado o "Ptolomeu dos Árabes") e de Abul Wefa.

(***) Veja definição de triângulos esféricos no livro Curso de Matemática — 4.º ano.

igual a B ; da extremidade C tiremos CH que forma com BC um ângulo igual a C .

As semi-retas BF e CH cortam-se no ponto A .

O triângulo ABC resolve a questão.

5 — Resolução trigonométrica. Exemplo.

Resolver o triângulo ABC para os seguintes valores:

$$a = 42m; B = 40^\circ \text{ e } C = 65^\circ.$$

Resolução:

Dados: a, B, C

Calcular: A, b, c .

O ângulo A e os lados b e c são calculados com auxílio das fórmulas (*):

$$A = 180^\circ - (B + C) \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

CÁLCULO DE A

Substituídos os elementos dados por seus valores, temos:

$$A = 180^\circ - 105^\circ$$

donde

$$A = 75^\circ.$$

CÁLCULO DE b

Com auxílio das tábuas naturais (**), temos:

$$b = \frac{42 \times 0,643}{0,966}$$

Efetuando, achamos:

$$b = 27,9$$

(*) Dessas fórmulas, a primeira é tirada do teorema de Tales; as outras duas serão deduzidas no Cap. III deste compêndio.

(**) O uso das tabuas naturais já foi explicado na 2.ª série do curso, secundário.

8 — Processo geométrico; processo trigonométrico.

O método geométrico baseado, como vimos, em construções gráficas, é, por sua natureza, mais simples do que o método trigonométrico.

O emprego de uma fórmula trigonométrica exige, não raramente, cálculos mais ou menos trabalhosos — uso de tabelas, tábuas de logaritmos, régua de cálculo, etc.

Apresenta, entretanto, o método geométrico um inconveniente que devemos apontar: a resolução geométrica não nos permite avaliar a precisão dos resultados obtidos. Construído o triângulo que resolve o problema, e medidos os elementos que foram achados, obtemos certos números. Nada podemos afirmar em relação ao limite dos erros que as soluções apresentam, embora as medidas tenham sido feitas com o máximo rigor. Esse erro será menor que um centésimo da unidade? Será menor do que um milésimo? Não sabemos (*).

Já o mesmo não sucede aos resultados obtidos com os recursos da Trigonometria. Dados, por exemplo, os elementos a, B e C de um triângulo podemos calcular o lado b desse triângulo com um erro menor do que $1/2$ da unidade (**).

Os métodos gráficos são ainda claudicantes, em certos casos, pela incapacidade teórica de se resolver euclidianamente muitos problemas: dividir um ângulo em três partes iguais; retificar um arco de circunferência, etc.

9 — Observação.

Apesar dos defeitos essenciais que apresenta, o método gráfico é, com vantagem, empregado na resolução de um grande

(*) Cfr. J. Hoag, "Cours complet de Mathématiques Elementaires", tomo I pag. 88.

(**) O erro em Matemática é como o alirio nas máquinas: não se pode evitar. Basta dizer que os problemas são resolvidos com auxílio de dados numéricos e estes obtidos pela medida de grandezas físicas. Ora, quando se procede à medida de uma grandeza física, essa medida não pode ser perfeita; o resultado vai depender da maior ou menor perfeição dos nossos instrumentos de medida.

Figura 89: p. 06 a 10 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 5º ano (1940), grifos nossos

Nesse exemplo pertencente ao Capítulo I – “Resolução de triângulos”, podemos perceber por parte dos autores, um incentivo com o trabalho da Álgebra na resolução de problemas geométricos, o que será desenvolvido nos capítulos seguintes.

Nos capítulos correspondentes aos cálculos algébricos, há vários exemplos de conexões com a Geometria. Podemos citar, no Capítulo IX – “Noções de Limites”, dois exemplos do estabelecimento dessa conexão:

Figura 90: Final da p. 106 e início da p. 107 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 5º ano (1940)

Um outro exemplo que comprova a conexão da Álgebra com a Geometria presente nesse livro, está no Capítulo XVIII – “Interpretação geométrica da integração; Integral definida; Aplicação ao cálculo de certas áreas”:

Figura 91: Final da p. 239, p. 240 e início da p. 241 do livro de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza – 5º ano (1940)

Desenvolvimento do conteúdo:

A característica que foi observada nos livros do 2º, 3º e 4º anos de fazer um estudo progressivamente mais formal, de forma mais abstrata, onde aparecem diversos princípios

com suas demonstrações, continua nesse livro do 5º ano. Porém, não é trabalhada a Geometria axiomática.

Assim, em todos os capítulos são trabalhadas as propriedades e as relações encontradas nos triângulos e nas figuras espaciais, com as respectivas demonstrações. Os exemplos, os exercícios resolvidos e os exercícios propostos são de aplicações diretas das fórmulas obtidas na teoria.

Dessa forma, foi desenvolvida principalmente, a concepção, buscando a organização conceitual. No entanto, os autores utilizaram uma linguagem simples, porém formal, sem nenhuma aplicação prática, exemplos motivadores ou situações que usam a intuição para o desenvolvimento dos conteúdos.

Conforme já observamos, nesse livro a Geometria é trabalhada algebricamente. Dessa forma, os autores não estimulam, com uma única exceção presente no Capítulo I citada acima, a representação.

Em nenhum momento os autores propõem a construção de materiais em sentido físico.

Concluindo, podemos afirmar que os livros de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, de forma geral, abordam a Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção, usando uma linguagem acessível e clara, não fugindo, porém, da formalidade.

3.3.2.2. Osvaldo Sangiorgi

Título da obra: *Matemática: curso ginasial*

1ª série – 1962 (59ª edição)⁶⁷

2ª série – 1955 (13ª edição)⁶⁸

3ª série – 1964 (78ª edição)⁶⁹

4ª série – 1963 (64ª edição)⁷⁰

⁶⁷ Não temos informação sobre a data da primeira edição do livro.

⁶⁸ Não temos informação sobre a data da primeira edição do livro.

⁶⁹ Primeira edição: 1954.

O contexto histórico:

Os livros tiveram a sua primeira edição na década de 1950, portanto antes da reformulação do ensino da Matemática conhecida como “Matemática Moderna”. No entanto, continuaram a ser editados nos anos subseqüentes, sofrendo algumas revisões e ampliações – exercícios de fixação complementares – mas conservando os conteúdos exigidos nos programas de ensino em vigor.

Na nota ao leitor a propósito da 77ª edição de novembro de 1963, do livro da 3ª série ginásial, é possível constatar que esses livros de Sangiorgi continuaram a ser editados no início da Matemática Moderna juntamente com os novos livros que passaram a vigorar – Matemática: curso moderno – que o autor começou a publicar em 1964 e que substituíram esses que estamos analisando, usando a nova linguagem exigida pelo movimento, ou seja, os conjuntos e as estruturas:

É do conhecimento de todos os estudiosos a atual reformulação do ensino da Matemática. Em boa hora a chamada Matemática Moderna irá permitir, também aos jovens brasileiros, conhecer o verdadeiro caráter estrutural da Matemática, sem que isto implique alteração radical dos programas até agora vigentes, embora desenvolvidos de maneira diversa daquela tradicionalmente usada.

A nossa coleção de livros didáticos, acompanhando o presente estado de modernização da Matemática, iniciou *progressivamente*, a partir da 1ª série ginásial – ‘Curso Moderno’, edição de 1964 – a usar de uma nova linguagem baseada nas idéias de *conjunto* e de *estruturas*, o que faremos sucessivamente com os livros da 2ª série, com este, da 3ª série, e finalmente com o da 4ª.

Essa a principal razão porque o atual livro da 3ª série ainda permanece sem modificações, na expectativa de que – continuando a prestar a mesma colaboração que até agora tem prestado por indicação de prezados colegas – chegue rapidamente sua vez de usar da *mesma linguagem* ora iniciada com a 1ª série. (SANGIORGI, 1964, p. 23, grifos do autor)

Na década de 1950 “são iniciadas ações que provocariam mudanças significativas relacionadas ao ensino de matemática brasileiro”. Nessa década as primeiras gerações de professores de Matemática formados pelas Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras começaram a atuar nos ensinos secundário e superior e a ter uma participação mais efetiva nas discussões acerca do ensino de Matemática que começaram com força nos primeiros

⁷⁰ Primeira edição: 1954.

Congressos Nacionais de Ensino de Matemática, realizados a partir de 1955. (MIORIM, 2005, p. 06)

O autor dos livros, Osvaldo Sangiorgi, licenciou-se em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e foi professor do Ginásio do Estado da Capital.

É importante observar que, durante a década de 1950, segundo Miorim (2005, p.07), juntamente aos livros didáticos mais recentes, tais como os de Osvaldo Sangiorgi e Benedito Castrucci, por exemplo, continuaram a ser editados e utilizados, os livros didáticos de outros períodos, como os de Cecil Thiré e Mello e Souza. “Apesar de algumas modificações terem sido realizadas em edições mais recentes de alguns desses livros, essa permanência de livros de períodos anteriores parece apontar para a existência de uma certa estabilidade da matemática escolar, apesar das reformas e mudanças oficiais”.

Nesse período, conforme vimos no Capítulo 2, estava em vigor no Brasil, a Reforma Gustavo Capanema de 1942, que dividiu o ensino secundário em duas partes: o ginásio com quatro anos em substituição ao ciclo fundamental, e o colegial, de três anos. De acordo com essa Reforma, não mais se insistia em que os três ramos da Matemática fossem abordados em cada uma das séries do curso ginásial. Dessa forma, a Aritmética era trabalhada somente nas duas séries iniciais e a Álgebra nas duas últimas, mas a Geometria continuou a ser apresentada nas quatro séries, intuitivamente nas duas primeiras e de maneira dedutiva nas duas últimas.

Em 1951, a Portaria Ministerial nº 966, que apresentou programas para o ensino secundário, pediu à Congregação do Colégio Pedro II a elaboração de novos programas, nos quais a única mudança foi com relação à distribuição dos conteúdos: a Geometria, não mais fez parte do programa da segunda série ginásial e, no colegial, ficou toda concentrada no primeiro ano, não mais sendo distribuída pelos três, como no anterior.

Para os demais critérios de análise estabelecidos acima, analisaremos os livros separadamente:

1ª série:

Figura 92: Capa do livro de Sangiorgi – 1ª série (1962)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelo autor, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

	Programa oficial	13
	Prefácio	15
Capítulo I	Números inteiros; operações fundamentais; números relativos	
	§1. Números inteiros	23
	§2. Operações fundamentais	34
	§3. Números relativos	71
Capítulo II	Divisibilidade aritmética; números primos; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum	
	§1. Divisibilidade aritmética	85
	§2. Números primos	95
	§3. Máximo divisor comum	105
	§4. Mínimo múltiplo comum	111
Capítulo III	Números fracionários; operações fundamentais; métodos de resolução de problemas sobre frações; frações decimais como números decimais	
	§1. Números fracionários	117
	§2. Operações fundamentais com as frações	133

	§3. Métodos de resolução de problemas sobre frações	148
	§4. Frações decimais como números decimais	157
Capítulo IV	Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais; sistema métrico decimal; sistema de medidas não decimais	
	Sistema legal de unidades de medir	179
	§1. Unidades de comprimento	181
	§2. Unidades de superfície	189
	§3. Áreas das principais figuras planas	193
	§4. Unidades de volume	204
	§5. Volumes dos principais sólidos	210
	§6. Unidades de peso (massa)	217
	§7. Sistemas de medidas não decimais	225
	Exercícios de recapitulação (Aritmética)	245
	Apêndice	261

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado no último capítulo do livro. Nesse capítulo, o autor trabalha a Geometria articulando a Álgebra e a Aritmética constantemente. Ao analisar o livro, percebemos que nos capítulos anteriores que tratam da Aritmética, existem raras conexões com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observamos acima, nos capítulos iniciais que trabalham a Aritmética, as duas únicas conexões com a Geometria são encontradas no capítulo I – “Números inteiros; operações fundamentais; números relativos”. A primeira ocorrência de uma ligação com a Geometria localiza-se no parágrafo 1 – “Números inteiros”, onde após as definições acompanhadas por exemplos práticos de números naturais e inteiros, igualdade e desigualdade, sistema de numeração decimal escrito e falado e numeração escrita romana, o autor faz a representação geométrica dos números:

7. Representação geométrica dos números. É de muita conveniência associar a cada número um *segmento de reta*. Para isso considera-se um segmento qualquer $\overline{AB}$ como *unidade* para representar o número 1; o número 2 será representado por um segmento $\overline{CD}$, *duplo* da unidade $\overline{AB}$; o número 3 por um segmento $\overline{EF}$, *triplo* da unidade, e, assim por diante (fig. 1).

Fig. 1

Figura 93: Trecho da p. 28 do livro de Sangiorgi – 1ª série (1962)

A segunda ocorrência de uma conexão com a Geometria encontra-se no parágrafo 3 – “Números relativos”. Após as definições e exemplos de números negativos e números positivos, o autor faz a representação geométrica dos números relativos:

Fig. 4

teremos assim que:

O ponto O (denominado origem),	representa geomèt. o número 0 (zero).
O ponto A	representa geomèt. o número + 1.
O ponto B	representa geomèt. o número + 2.
O ponto C	representa geomèt. o número + 3.
O ponto A'	representa geomèt. o número - 1.
O ponto B'	representa geomèt. o número - 2.
O ponto C'	representa geomèt. o número - 3.

ou seja, os *números positivos* estão situados à *direita* da origem e os *números negativos* à *esquerda*. Dois números *simétricos* estão situados a igual distância da origem 0, nas duas semi-retas em que a mesma divide a reta. Exemplos:

- 1	e	+ 1
- 2	e	+ 2

Figura 94: Trecho da p. 74 do livro de Sangiorgi – 1ª série (1962)

No capítulo IV que aborda a Geometria há muitas articulações com a Aritmética e com a Álgebra, já que o autor apresenta diversas fórmulas para calcular áreas e volumes de figuras geométricas e logo em seguida, expõe aplicações das mesmas.

A título de ilustração, podemos citar o parágrafo 3 – “Áreas das principais figuras geométricas planas”:

§ 3. Áreas das principais figuras geométricas planas.

1. Retângulo. A área do retângulo é igual ao produto da base pela altura (fig. 18).

$$\text{Área do retângulo} = \text{base} \times \text{altura}$$

Base de um retângulo é qualquer um de seus lados;

Altura de um retângulo é a distância entre a base e o lado oposto.

Indicando a base por b ; a altura por h e a área por S , temos a seguinte igualdade:

$$S = b \times h$$

denominada *fórmula da área do retângulo*.

APLICAÇÕES:

1) Calcular a área de um retângulo que tem 3,56 dm de base e 22 cm de altura.

Reduzem-se, primeiramente, a base e a altura na mesma unidade de medida, isto é,

$$\text{base} = 3,56 \text{ dm}$$

$$\text{altura} = 22 \text{ cm} = 2,2 \text{ dm}$$

Aplicando a fórmula

$$S = b \times h$$

temos:

$$S = 3,56 \text{ dm} \times 2,2 \text{ dm}$$

$$S = 7,8320 \text{ dm}^2$$

2) Um retângulo tem 96 cm² de área. Sabendo-se que a base mede 12 cm, calcular o comprimento da altura.

Como:

$$S = b \times h$$

$$96 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm} \times h$$

segue-se que a altura h é obtida dividindo-se a área 96 cm² pela base 12 cm, isto é,

$$96 \text{ cm}^2 : 12 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Logo: o comprimento da altura é de 8 cm.

Figura 95: Final da p. 193 e início da p. 194 do livro de Sangiorgi – 1ª série (1962)

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro segue o modelo: conceitos – exemplos – exercícios, para a apresentação dos conteúdos geométricos. Os exercícios são, na sua maioria, de aplicações de fórmulas apresentadas na teoria. As respostas dos exercícios estão sempre colocadas logo após a sua proposta. Podemos citar como exemplo, o parágrafo 5 – “Volumes dos principais sólidos geométricos”, que apresenta as diversas fórmulas sem justificativa para calcular os volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera:

5. **Cilindro.** O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura (fig. 43).

$$\text{Volume do cilindro} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

Fig. 43

Como a base B do cilindro é um círculo, cuja área é $\pi \times R^2$ (§3 n.º 8), a fórmula ficará:

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

APLICAÇÃO.

Calcular o volume de um cilindro de altura igual a 10 cm e raio da base igual a 5 cm.

Aplicando a fórmula:

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

temos: $V = 3,1416 \times (5 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm}$

$$V = 3,1416 \times 25 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm}$$

$$V = 785,400 \text{ cm}^3$$

6. **Cone.** O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura (fig. 44).

$$\text{Volume do cone} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

Como a área da base, que é um círculo, é $\pi \times R^2$

Temos a fórmula:

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$$

Fig. 44

7. **Esfera.** O volume de uma esfera é igual a $\frac{4}{3}$ do produto de π por R^3 . (fig. 45).

A fórmula será:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

APLICAÇÃO.

Calcular o volume de uma esfera cujo diâmetro é igual a 8 dm. O raio é igual a $8 \text{ dm} : 2 = 4 \text{ dm}$. O volume será:

Fig. 45

$$V = \frac{4}{3} \times 3,1416 \times (4 \text{ dm})^3 = 268,083200 \text{ dm}^3$$

EXERCÍCIOS SOBRE VOLUMES DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1. Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são: comprimento 6 dm, altura 5 dm e largura 4 dm.
2. Conhecendo-se de um paralelepípedo retângulo o seu volume que é de 144 dm^3 e a sua altura que mede 9 dm, calcular o valor da área da base desse paralelepípedo.
3. Calcular o volume de um cubo de 4 dm de aresta.
4. A soma de todas as arestas de um cubo é 36 m. Calcular, em dm^3 , o seu volume.
5. A base de um prisma é um trapézio cujas bases medem, respectivamente, 12 dm e 8 dm e a altura 5 dm. A altura do prisma é igual 28 dm. Calcular o seu volume.
6. Uma pirâmide de 12 dm de altura tem por base um retângulo cujas dimensões são 5 dm e 3 dm, respectivamente. Calcular o volume desta pirâmide.
7. Calcular a altura de uma pirâmide de volume igual a 93 dm^3 e cuja área da base é de 31 dm^2 .
8. Qual é o volume de um cilindro de 2 dm de raio e 14 dm de altura? ($\pi = 3,14$).
9. O raio de uma esfera é igual a 6 cm. Calcular o volume dessa esfera.
10. Determinar o volume de um cone de 10 dm de altura, sabendo-se que a circunferência da sua base mede 28,26 dm.
11. Pagaram-se Cr\$ 40 500,00 pela construção de um muro de 3 m de altura por 0,30 m de espessura. Qual é o seu comprimento, se o preço do m^3 foi de Cr\$ 900,00?
12. As dimensões de uma árvore Jequitibá, de forma cilíndrica, são altura 15 m e raio da base 0,70 m. Sabendo-se que o m^3 dessa árvore, foi vendido à razão de Cr\$ 900,00, pergunta-se quanto rendeu toda a árvore.
13. Antão tem um sapo de borracha que cheio de ar ocupa um volume igual ao volume de uma esfera de 3 dm de raio. Qual é o volume do sapo?
14. Um vagão de estrada de ferro medindo 18 m de comprimento por 3 m de largura e 2,5 m de altura está cheio de areia. Qual é o preço total do transporte dessa areia se o preço do transporte de $\frac{1}{3}$ de m^3 de areia custa Cr\$ 30,00?
15. Um reservatório de forma cilíndrica, cujas dimensões são: raio 2 m e altura 10 m está cheio de uma certa substância. Qual é o valor dessa substância, sabendo-se que 10 m^3 valem Cr\$ 12 000,00?

RESPOSTAS:

1. 120 dm^3 .	6. 60 dm^3 .	11. 50 m.
2. 16 dm^2 .	7. 9 dm.	12. Cr\$ 20 771,10.
3. 64 dm^3 .	8. $175,840 \text{ dm}^3$.	13. $113,040 \text{ dm}^3$.
4. 27000 dm^3 .	9. $904,320 \text{ cm}^3$.	14. Cr\$ 12 150,00.
5. 1400 dm^3 .	10. $211,950 \text{ dm}^3$.	15. Cr\$ 150 720,00.

É importante observar que, no início do livro, numa observação à 59ª edição, o autor declara que:

Acompanhando as instruções baixadas, em boa hora, pelo Ministério de Educação, no sentido de serem estabelecidas *classes experimentais* no curso secundário de todo o país, cuidamos de provocar (como fizemos, por enquanto com os sistemas de numeração) assuntos onde possam prevalecer noções importantíssimas aos futuros estudos que os ginásianos farão. Por outro lado, o início de um *Laboratório de Matemática*, tão em voga em outros países, viria *completar* a efetivação de um eficiente aprendizado.

Se cada aluno puder ‘fabricar’, de início, a sua ‘caixinha de numeração’, ‘tábuas de operações’, depois estudar as figuras geométricas a partir de ‘modêlos’ por êle manufaturado, então, ao lado dos conhecimentos de Matemática que adquiriu nas aulas, terá no Laboratório uma constante fonte de emulação artística. (SANGIORGI, 1962, p. 19, grifos do autor)

Dessa forma, entendemos que o autor considera importante que o aluno tenha contato com a percepção e também com a construção, mas que isso deve ser realizado de maneira separada às aulas de Matemática, num Laboratório. Dessa forma, o autor não trabalha a percepção para desenvolver a Geometria, não utiliza problemas motivadores que levam em consideração os aspectos visuais e intuitivos para chegar à construção do conceito.

Uma única exceção é encontrada no parágrafo 1 – “Unidades de comprimento”. Nesse parágrafo, o item 4 trata da “medida dos comprimentos de linhas poligonais e da circunferência”:

b) *Determinação do comprimento de uma circunferência.*

Consideremos, por exemplo, uma roda de bicicleta. Contornêmo-la com um barbante que fique bem ajustado à sua periferia e sobre uma régua procuremos ler, com a melhor aproximação possível, o resultado dessa medida.

Dividindo-se esse resultado pelo diâmetro ($2R$) da circunferência, representada por essa roda, obteremos para quociente um número, não exato, de valor aproximado a 3,1415926...

Repetindo-se a experiência com outras circunferências representadas por outras rodas, ou arcos de barris, notaremos que os quocientes entre as medidas de seus contornos e dos respectivos diâmetros é *sempre o mesmo*, valendo aproximadamente 3,1415926...

Indicando por C o comprimento de qualquer circunferência e por $2R$ o seu diâmetro, temos que

$$\frac{C}{2R} = 3,1415926 \dots$$

Esse número *não exato*, já conhecido dos antigos, é indicado com a letra " π ", que se lê "pi", e pertencente ao alfabeto grego.

Logo: $\frac{C}{2R} = \pi$

ou $C = 2R \times \pi$ ou $C = 2 \cdot \pi \cdot R$ isto é:

o comprimento de uma circunferência é dado pelo produto de seu diâmetro por π

Nos cálculos práticos, o valor de π é tomado com um erro menor que 0,0001 por excesso, isto é, com o valor 3,1416. Exemplos:

1) Calcular o comprimento de uma circunferência que tem 5 cm de raio.

Devemos aplicar a fórmula:

$$C = 2 \times \pi \times R$$

ou $C = 2 \times 3,1416 \times 5 \text{ cm}$

Logo: $C = 31,416 \text{ cm}$.

2) Determinar o valor do raio de uma circunferência, cujo comprimento é 12,5664 cm.

Como $C = 2 \cdot \pi \cdot R$, segue-se que dividindo-se o valor do comprimento ($C = 12,5664 \text{ cm}$) por π (3,1416) encontramos o diâmetro ($2R$). Dividindo-se o diâmetro por 2 encontramos o raio (R).

$$\text{Cálculos: } 12,5664 \text{ cm} : 3,1416 = 4 \text{ cm}$$

$$4 \text{ cm} : 2 = 2 \text{ cm}$$

Resposta: O raio vale 2 cm.

Figura 97: p. 186 e início da p. 187 do livro de Sangiorgi — 1ª série (1962)

Em nenhum momento o autor trabalha a representação ou propõe a construção de objetos em sentido físico. Dessa forma, consideramos que, nesse livro, predomina o desenvolvimento da concepção, ou seja, a organização conceitual, feita de forma informal, já que não há demonstrações de proposições e teoremas.

2ª série:

Figura 98: Capa do livro de Osvaldo Sangiorgi – 2ª série (1955)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

	Programa oficial	11
Capítulo I	Potências e raízes. Expressões irracionais	
	§1. Potências	15
	§2. Expressões do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números. Interpretações geométricas respectivas ..	23
	§3. Raiz quadrada	31
	§4. Raiz cúbica	44
	§5. Grandezas comensuráveis e grandezas incommensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais	53
Capítulo II	Cálculo literal. Polinômios	
	§1. Expressão algébrica. Monômios e polinômios	69
	§2. Operações algébricas	79
	§3. Casos simples de fatoração	95
	§4. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de expressões algébricas	101
	§5. Frações literais. Propriedades. Operações fundamentais	103
Capítulo III	Binômio linear. Equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas lineares com duas incógnitas. Aplicações	

§1. Igualdade. Identidade. Equação	115
§2. Binômio linear	128
§3. Desigualdade. Inequação	133
§4. Sistemas lineares com duas incógnitas	140
§5. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas. Generalização e discussão	151
Exercícios de recapitulação sobre o programa de Álgebra	161

Observando o índice, podemos verificar que esse livro só trabalha a Aritmética e a Álgebra, não há Geometria conforme estabelecido na Portaria Ministerial nº 966 de 1951. Ao analisarmos o livro, constatamos que existem raras ligações com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observado acima, encontramos apenas duas conexões entre a Aritmética e a Álgebra, com a Geometria, no capítulo I – “Potências e raízes; expressões irracionais”. A primeira delas localiza-se no parágrafo 2 – “Expressões do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números; interpretações geométricas respectivas”:

§ 2. Expressões do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números. Interpretações geométricas respectivas.

7. Quadrado da soma indicada de dois números. Aplicações. Querendo achar a expressão do quadrado da soma indicada de dois números, por exemplo,

$$4 + 3$$

procedemos da seguinte maneira:

Marcamos sobre uma reta um segmento $\overline{AB}$ de medida igual a $4 + 3 = 7$ (centímetros, por exemplo), e formamos o quadrado que tenha essa medida por lado e que é represen-

tado pela figura $ABCD$ (fig. 1). Essa figura, cuja área é igual a $(4 + 3)^2$, é formada de:

1. Um quadrado de área igual a 4^2 ;
2. Um retângulo de área igual a 4×3 ;
3. Um retângulo de área igual a 3×4 ;
4. Um quadrado de área igual a 3^2 .

Fig. 1

Teremos, assim, a seguinte igualdade:

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 4 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2$$

ou

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2$$

que nos permite dizer:

O quadrado da soma indicada de dois números é igual ao quadrado do primeiro número mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo número, mais o quadrado do segundo número.

Exemplos: $(2 + 6)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 6 + 6^2$

$$(40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2$$

De um modo geral, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

onde a e b , representam dois números quaisquer.

Figura 99: Final da p. 23, p.24 e início da p. 25 do livro de Sangiorgi – 2ª série (1955)

Fig. 2

Como essas partes (I e II) podem ser dispostas de outra maneira (fig. 2-A), ou seja:

Fig. 2-A

segue que:

$$\text{parte I} + \text{parte II} = (5 + 2) \times (5 - 2)$$

isto é,

$$(5 + 2) \times (5 - 2) = 5^2 - 2^2$$

De um modo geral, temos:

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$$

8. Produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números. A expressão do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números, pode ser obtida, geometricamente, do seguinte modo:

Seja o produto: $(5 + 2) \times (5 - 2)$

Construímos o quadrado $ABCD$, cujo lado $\overline{AB}$ tenha por medida 5 (centímetros, por exemplo). Sobre o lado $\overline{AB}$ consideremos o segmento $\overline{MB}$ que tenha por medida 2 (cm). (fig. 2). Temos, assim:

O quadrado $ABCD$ de área igual 5^2 e o quadrado $MBPN$ de área igual a 2^2 . Observemos, agora, que a soma das partes assinaladas (I e II) representam a área da figura toda (5^2) menos a área do quadrado de lado 2 (2^2), isto é:

$$5^2 - 2^2$$

Figura 100: Final da p. 27 e p.28 do livro de Sangiorgi – 2ª série (1955)

A segunda ocorrência de uma ligação com a Geometria encontra-se no parágrafo 5 – “Grandezas comensuráveis e grandezas incommensuráveis; números racionais e números irracionais; radicais”:

§ 5. Grandezas comensuráveis e grandezas incommensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais.

28. Grandezas comensuráveis. Números racionais. Duas grandezas são comensuráveis quando admitem uma medida comum. Assim, os comprimentos dos segmentos (fig. 3):

$$\overline{AB} = 21 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \overline{CD} = 15 \text{ cm}$$

Fig. 3

constituem um exemplo de grandezas comensuráveis, pois, admitem a medida comum 3 cm que está contida 7 vezes em AB e 5 vezes em CD.

54

Oswaldo Sangiorgi

Outro exemplo: as áreas dos quadrados ABCD (16cm^2) e MNPQ (4cm^2) são grandezas comensuráveis pelo fato de admitirem medida comum (a maior é 4cm^2 , que cabe quatro vezes em ABCD e uma vez em MNPQ) (fig. 4).

Fig. 4

A relação entre duas grandezas comensuráveis é expressa mediante um número denominado racional. Os números racionais compreendem os números inteiros e os números fracionários.

Nos exemplos dados, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{21 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{7}{5} \text{ (fracionário);}$$

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } MNPQ} = \frac{16\text{cm}^2}{4\text{cm}^2} = 4 \text{ (inteiro).}$$

Exemplos de números racionais:

$$2; \frac{3}{7}; 0; 215; 0,31; 3,555\dots; 2\frac{1}{9}$$

A consideração dos números inteiros e fracionários relativos permite as denominações de números racionais relativos aos números inteiros e fracionários relacionados com os sinais + ou -, e, racionais absolutos aos números inteiros e fracionários que não estão relacionados com sinal algum. Exemplos:

Matemática – Segunda Série

55

números que não estão relacionados com sinal algum. Exemplos:

$$\frac{3}{4}; 12; 5; 0; 3413; 3\frac{2}{7}; 0,444\dots; 2,39;$$

são números racionais absolutos, enquanto que:

$$-4; +\frac{11}{35}; +13; -1\frac{1}{2}; -0,8; +2; -19,424242\dots$$

são números racionais relativos.

29. Grandezas incommensuráveis. Números irracionais. Duas grandezas são incommensuráveis quando não admitem medida comum. Assim, por exemplo, os comprimentos da diagonal e do lado de um quadrado (fig. 5) são grandezas in-

Fig. 5

Fig. 6

commensuráveis, pois, escolhida uma unidade de medida, ela nunca estará contida um número exato de vezes na diagonal e no lado do quadrado. Esse fato significa também que podemos ter uma medida que esteja contida exatamente na diagonal, porém a mesma medida nunca estaria contida exatamente no lado e vice-versa.

Já encontramos na primeira série ginasial um outro exemplo clássico de grandezas incommensuráveis: os comprimentos de uma circunferência e o de seu diâmetro (fig. 6).

3ª série:

Figura 102: Capa do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

	Programa	15
	Prefácio	17
	Observação à 9ª edição	19
	Observação à 40ª edição	21
	Nota ao leitor (a propósito da 77ª edição)	23
Capítulo I	Razões e proporções. Aplicações aritméticas	
	§1. Razões e proporções. Propriedades e aplicações	25
	§2. Números proporcionais. Propriedades e aplicações	53
	§3. Grandezas proporcionais. Regras de três. Aplicações	63
	§4. Porcentagem. Taxa milésima. Juros simples. Aplicações	76
Capítulo II	Figuras geométricas planas. Reta e círculo	
	§1. Entes geométricos. Proposições geométricas. Congruência	89
	§2. Ângulos. Classificação e propriedades	102
	§3. Linha poligonal. Polígonos. Classificação e propriedades	116
	§4. Triângulos. Congruência. Aplicações	121
	§5. Perpendiculares e oblíquas. Lugares geométricos	143
	§6. Teoria das paralelas. Aplicações	151
	§7. Soma dos ângulos de um triângulo e de um polígono. Consequências	164

	§8. Quadriláteros. Classificação e propriedades. Translação. Retas concorrentes no triângulo	174
	§9. Circunferência e círculo	196
	§10. Correspondência entre arcos e ângulos. Medidas respectivas. Construções geométricas	219
Capítulo III	Linhas proporcionais. Semelhança de polígonos	
	§1. Divisões de um segmento. Divisão harmônica	241
	§2. Feixe de paralelas	248
	§3. Linhas proporcionais no triângulo	251
	§4. Semelhança de triângulos. Semelhança de polígonos	259
Capítulo IV	Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais	
	§1. Razões trigonométricas	277
	§2. Tábuas naturais. Cálculo dos lados de um triângulo retângulo	284
Apêndice	Exercícios de recapitulação (Aritmética)	295
	Algumas observações interessantes sobre a Geometria Dedutiva	311

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, a partir do capítulo II correspondendo à maioria dos conteúdos propostos. Nesses capítulos, o autor trabalha a Geometria articulando a Álgebra e a Aritmética sempre que necessário. Ao analisar o livro, percebemos que no capítulo anterior que trata da Aritmética e da Álgebra, existem raras conexões com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observamos acima, no capítulo I – “Razões e proporções; aplicações aritméticas”, praticamente não existem conexões com a Geometria. A única exceção encontra-se no parágrafo 1 – “Razões e proporções; propriedades e aplicações”, onde após a definição e alguns exemplos de razões entre dois números, o autor define a razão entre duas grandezas:

Figura 103: Trecho da p. 26 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Entre os exercícios propostos desse capítulo, que estão em grande quantidade objetivando a fixação do conteúdo, encontramos alguns que articulam a Geometria:

20. Os ângulos de um quadrilátero estão entre si como os números 2, 3, 5 e 8. Determinar os valores desses ângulos sabendo-se que a soma deles é igual a 360° .
21. Os volumes de dois cubos estão entre si assim como 3 está para 4. Calcular o volume de cada cubo sabendo-se que a soma deles é igual 21dm^3 .
25. Determinar as dimensões de um retângulo sabendo-se que elas estão na razão $\frac{4}{3}$ e que a área desse retângulo é igual a 48m^2 .
26. Determinar a base e altura de um triângulo de área igual a 48m^2 sabendo-se que a razão entre elas é $\frac{5}{2}$.

Figura 104: Trecho da p. 51 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Nos capítulos que abordam a Geometria há muitas aplicações envolvendo a Álgebra, já que nas demonstrações dos teoremas relativos às propriedades das figuras geométricas, o autor deduziu diversas fórmulas.

Podemos citar no capítulo II – “Figuras geométricas planas; reta e círculo”, no parágrafo 2 – “Ângulos; classificação e propriedades”, alguns exemplos que articulam a Aritmética e a Álgebra que estão dispostos após a apresentação de diversas definições e propriedades:

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Determinar o valor dos $\frac{3}{4}$ do suplemento de um ângulo de 60° .

Se o ângulo dado vale 60° o seu suplemento valerá $120^\circ = (180^\circ - 60^\circ)$ e os $\frac{3}{4}$ deste suplemento valerão:

$$\frac{3}{4} \times 120^\circ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Resp.: 90° (ângulo reto).

2.º) Calcular o valor de um ângulo que é igual ao *dobro* de seu complemento.

Seja x o valor do ângulo procurado. O seu complemento será: $90^\circ - x$ e a equação resultante do problema:

$$x = 2(90^\circ - x).$$

114 *Oswaldo Sangiorgi*

Resolvendo, temos: $x = 180^\circ - 2x$
 ou $3x = 180^\circ$
 e $x = 60^\circ.$ *Resp.: 60° .*

3.º) O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento deste ângulo. Determinar o valor do ângulo.

Seja x o valor do ângulo procurado. Devemos ter:

$90^\circ - x$ como valor de seu complemento,
 e $180^\circ - x$ como valor de seu suplemento.

Pelo enunciado do problema, resulta a equação:

$$3(90^\circ - x) = \frac{1}{3}(180^\circ - x).$$

Resolvendo-a, vem:

$$\begin{aligned} 9(90^\circ - x) &= 180^\circ - x \\ 810^\circ - 9x &= 180^\circ - x \\ 8x &= 630^\circ \\ \therefore x &= \frac{630^\circ}{8} = 78^\circ 45'. \end{aligned}$$

Resp.: $78^\circ 45'$.

Figura 105: Final da p. 113 e início da p. 114 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro segue o modelo euclidiano para a apresentação dos conteúdos. Assim, o autor inicia a Geometria esclarecendo que:

Figura 106: Início da p. 89 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

No apêndice, também são colocadas algumas observações sobre a Geometria Dedutiva que, segundo o autor, é “a principal responsável pela educação mental do adolescente” (SANGIORGI, 1964, p. 21):

Figura 107: Início da p. 311 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

É importante observar que, apesar do autor trabalhar a sistematização conceitual, o rigor, o encadeamento lógico de raciocínios, também faz uso, pelo menos no início do capítulo, da intuição:

2. Grupo dos entes geométricos: ponto, linha, superfície, reta e plano. Como toda ciência, a Geometria dedutiva tem por ponto de partida um conjunto de noções primitivas que atingem o nosso espírito através de os sentidos.

Figura 108: Final da p. 89 e p. 90 e 91 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964), grifos nossos

Sobre a maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos, o autor inicia o prefácio da 1ª edição do livro da 3ª série (1954), colocando que:

Tem este terceiro volume, a nosso ver, grande responsabilidade na iniciação geométrica dedutiva dos alunos da escola secundária. De fato, é nesta fase do curso, que os conhecimentos geométricos devem ser aprofundados, de modo a permitir uma assimilação segura aos alunos, dentro de uma *técnica demonstrativa*, acessível e uniforme, tanto quanto possível.

Com este objetivo, o processo demonstrativo que empregamos, é composto de partes numeradas, das quais a primeira visa, quase sempre, às construções auxiliares necessárias à demonstração, acompanhadas de propriedades evidentes; a segunda envolve dedução, à base de raciocínios sucessivos, e a conclusão. Só,

excepcionalmente, existe uma terceira parte com a finalidade de dividir um raciocínio muito extenso da segunda. (SANGIORGI, 1964, p. 17, grifos do autor)

A partir dessa declaração fica claro que, nesse livro, os conteúdos de Geometria são desenvolvidos dedutivamente, trabalhando a concepção, de acordo com os programas de ensino vigentes no período. No entanto o autor desenvolve simultaneamente a representação para facilitar a compreensão das demonstrações, conforme podemos perceber neste exemplo correspondente ao capítulo II – “Figuras geométricas planas; Reta e círculo”, parágrafo 4 – “Triângulos, Congruência, Aplicações”:

Figura 109: Final da p. 128 e início da p. 129 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

A respeito da representação, no prefácio da 1ª edição do livro (1954), o autor esclarece que:

As construções geométricas, com a régua e com o compasso, mereceram de nossa parte um trato especial, não só pela importância que representam na formação do espírito dedutivo do aluno, como também, na aplicação, que realmente são, da Geometria ao Desenho. (SANGIORGI, 1964, p. 17, grifos do autor)

Encontramos alguns itens onde o autor observa que a construção geométrica pode também ser feita com o uso do esquadro:

Figura 110: Início da p. 155 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Além de estar presente entre as demonstrações dos teoremas, o livro tem também algumas partes que se dedicam exclusivamente à representação. Podemos citar, a título de exemplificação, no capítulo II, o parágrafo 10 – “Correspondência entre arcos e ângulos; medidas respectivas; construções geométricas”:

Figura 111: Início da p. 231 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Nesses trechos, as construções geométricas são sempre acompanhadas pela suas respectivas demonstrações, o que nos indica que, esse livro articula a representação e a concepção:

Figura 112: Final da p. 234 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Nesse livro, em todos os capítulos, para a apresentação dos conteúdos, encontramos o seguinte modelo: após uma série de definições das figuras geométricas planas e das propriedades com suas demonstrações, aparecem exemplos e exercícios propostos.

No primeiro capítulo que trata a Geometria – capítulo II – os primeiros exercícios são relacionados à intuição e os demais pedem a demonstração de teoremas, conforme o exemplo a seguir. No decorrer do texto, os exercícios são de demonstrações de teoremas, de aplicações de fórmulas deduzidas ou de construções geométricas:

Figura 113: Final da p. 100 e início da p. 101 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

Figura 114: Início da p. 239 do livro de Sangiorgi – 3ª série (1964)

É interessante observar que as respostas dos exercícios ou sugestões de resolução, estão sempre colocadas logo após a sua proposta.

Em nenhum momento o autor propõe a construção de objetos em sentido físico e nem utiliza exemplos práticos ou problemas motivadores para desenvolver os conteúdos.

4ª série:

Figura 115: Capa do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelo autor, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

	Prefácio	11
	Observação à 20ª edição	13
Capítulo I	Trinômio do segundo grau. Equações e inequações do segundo grau com uma incógnita	
	§1. Números reais	17
	§2. Equações do segundo grau	19
	§3. Trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau	49
	§4. Equações redutíveis ao segundo grau. Aplicações	75
	§5. Problemas do 2º grau. Aplicações à geometria	87
Capítulo II	Relações métricas nos polígonos e no círculo. Cálculo de π	
	§1. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras	99
	§2. Relações métricas num triângulo qualquer. Relação com co-senos	108
	§3. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo	113
	§4. Relações métricas no círculo. Aplicações. Potência de um ponto em relação a um círculo	122
	§5. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot	136
	§6. Polígonos regulares. Propriedades. Semelhança	142
	§7. Relações métricas nos polígonos regulares convexos em função do raio R. construção de polígonos regulares	148
	§8. Lado do polígono regular convexo de $2n$ lados em função do de n lados	156
	§9. Medição da circunferência. Cálculo de π	159
Capítulo III	Áreas das figuras planas	
	§1. Definições e propriedades fundamentais	173
	§2. Área dos polígonos	176
	§3. Área das figuras circulares	187
	§4. Relações métricas entre as áreas das figuras planas. Construções de figuras equivalentes	195
Apêndice	I – Sistemas algébricos do segundo grau	207
	II – Representações gráficas. Coordenadas cartesianas	213

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui grande parte do livro a partir do capítulo II. Nesses capítulos, o autor trabalha a Geometria fazendo as conexões necessárias com a Álgebra e com a Aritmética. No primeiro capítulo, que trata da Álgebra e da Aritmética, existem algumas ligações com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

No capítulo I – “Trinômio do segundo grau; equações e inequações do segundo grau com uma incógnita”, que trata a Álgebra e a Aritmética, não há quase nenhuma conexão com a Geometria. Encontramos uma exceção no final desse capítulo, no parágrafo 5 – “Problemas do segundo grau; aplicações à geometria”, onde, após a definição, a discussão sobre as fases da resolução e alguns exemplos algébricos de problemas do segundo grau, há um último exemplo que envolve a Geometria, abordando o tema “Divisão Áurea”:

Figura 116: Final da p. 92, p.93 e início da p. 94 do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963), grifos nossos

Podemos observar que o autor já avisa que tratará desse tema novamente no próximo capítulo.

É importante salientar que dentre os quarenta exercícios sobre problemas do segundo grau colocados no final do capítulo, somente os três últimos são relativos à Geometria, em particular, à divisão áurea:

38. Calcular, com a aproximação de 0,01, o valor do segmento áureo do segmento de 12 cm de comprimento.
 39. Qual a área de um quadrado, cujo lado é o segmento áureo do segmento de 10 cm de comprimento. (Aproximação de 0,01).
 40. As dimensões de um retângulo são 8 cm e 6 cm. Calcular a área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, os segmentos áureos das dimensões do primeiro retângulo. (Aproximação de 0,01).

Figura 117: Trecho da p. 97 do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963)

Nos capítulos finais que abordam a Geometria há conexões com a Álgebra e com a Aritmética na teoria, nos exemplos e nos exercícios de aplicações das fórmulas deduzidas.

Podemos citar um exemplo no capítulo II – “Relações métricas nos polígonos e no círculo; cálculo de π ”, no parágrafo 1 – “Relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras”:

Matemática – Quarta Série 105

ou $d^2 = 2a^2$
 donde, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, vem:

$$d = a\sqrt{2}$$

8. Cálculo da altura de um triângulo equilátero.
 Seja o triângulo equilátero ABC (fig. 6), cujo lado tem por medida l , e cuja altura, relativa à base BC , tem por medida h . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC , vem:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

ou $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$

Tirando o valor de h^2 :

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

donde, extraindo a raiz quadrada:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

FIG. 6

OBSERVAÇÕES:

1.ª) No triângulo retângulo em que um dos ângulos agudos vale 30° (e portanto o outro agudo vale 60°), o cateto oposto ao ângulo de 30° vale a metade da hipotenusa (no $\triangle AHC$, fig. 6, o cateto HC vale $\frac{l}{2}$);

2.ª) Para o cálculo, os valores de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, assim como outros números irracionais, serão tomados com a aproximação por falta, a menos de 0,01, de preferência.

Exemplos:

1. Calcular a altura de um triângulo equilátero cujo perímetro igual a 15 dm.

106 Oswaldo Sangiorgi

Como o perímetro é 15 dm, cada lado valerá 5 dm e, portanto, aplicando a fórmula que dá a altura do triângulo equilátero, temos:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ ou } h = \frac{5 \times 1,73}{2} = \frac{8,65}{2} = 4,325$$

Logo, a altura é igual a 4,325 dm.

2. Calcular o perímetro de um quadrado cuja diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm.

Como $d = a\sqrt{2}$, segue-se que $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, onde substituindo $d = 3\sqrt{2}$, obtemos:

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

Logo, o perímetro do quadrado será $4 \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Figura 118: Final da p. 104 e p. 105 e início da p. 106 do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963)

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro continua a trabalhar o mesmo modelo para a apresentação dos conteúdos do livro da 3ª série: conceitos, teoremas com suas respectivas demonstrações, exercícios resolvidos e propostos. Os exercícios apresentam-se em grande quantidade e englobam somente a aplicação de fórmulas deduzidas na teoria.

O autor continua a abordar a representação com frequência, com as respectivas justificativas das construções geométricas realizadas. Citemos uma construção geométrica proposta no capítulo II – “Relações métricas nos polígonos e no círculo; cálculo de π ”, no parágrafo 4 – “Relações métricas no círculo; aplicações; potência de um ponto em relação a um círculo”, que utiliza conceitos trabalhados nessa parte com a Divisão Áurea desenvolvida no capítulo I, de que já comentamos acima:

Figura 119: Final da p. 133 e início da p. 134 do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963)

O mesmo tema é trabalhado novamente no parágrafo 7 – “Relações métricas nos polígonos regulares em função do raio R ; construção de polígonos regulares”:

Matemática – Quarta Série 155

$$a_{10}^2 = R^2 - \frac{R^2 (\sqrt{5} - 1)^2}{16} = R^2 - \frac{R^2 (5 - 2\sqrt{5} + 1)}{16} =$$

$$= \frac{16R^2 - 6R^2 + 2\sqrt{5} R^2}{16}$$

ou $a_{10}^2 = \frac{(10 + 2\sqrt{5})R^2}{16}$

donde $a_{10} = \frac{R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

Figura 120: Final da p. 152, p. 153, p. 154 e início da p. 155 do livro de Sangiorgi – 4ª série (1963)

É importante salientar ainda, que no apêndice do livro, encontra-se uma introdução à Geometria Analítica, objetivando iniciar o aluno num assunto do colegial – segundo ciclo do ensino secundário – conforme afirma o autor na observação à 20ª edição:

[...] no Apêndice, constante da parte final, acrescentamos o estudo de *Sistemas simples do segundo grau*, bem como introduzimos as *Representações gráficas de funções*, usando o *Sistema cartesiano* (na reta e no plano). A necessidade que o aluno de segundo ciclo, logo ao iniciá-lo, tem dos conhecimentos da Geometria Analítica, levou-nos à presente ampliação. (SANGIORGI, 1963, p. 13, grifos do autor)

Em nenhum momento o autor utiliza exemplos práticos ou problemas motivadores para desenvolver os conteúdos ou propõe a construção de objetos em sentido físico

Dessa forma, podemos concluir que os livros de Osvaldo Sangiorgi, de modo geral, abordam a Geometria articulando a concepção e a representação, usando uma linguagem formal.

3.3.3. Terceiro período: Matemática Moderna (1960 – 1980)

3.3.3.1. Osvaldo Sangiorgi

Título da obra: *Matemática: curso moderno*

Volume 1 – 1966 (8ª edição)⁷¹

Volume 2 – 1965 (1ª edição)

Volume 3 – 1971 (9ª edição)⁷²

Volume 4 – 1970 (5ª edição)⁷³

O contexto histórico:

Os livros começaram a ser publicados em 1964, no período da reformulação do ensino da Matemática conhecida como “Matemática Moderna”.

Segundo Miorim (2005, p. 08), o volume 1 da coleção, foi o primeiro livro publicado para o ensino ginásial, tendo em seu título a denominação moderno.

⁷¹ Primeira edição: 1964.

⁷² Não temos informação sobre a data da primeira edição do livro.

⁷³ Primeira edição: 1967 (MIORIM, 2005, p. 08).

O professor Osvaldo Sangiorgi, foi presidente do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – fundado em 1961 e que contribuiu de maneira decisiva na implantação da Matemática Moderna no Brasil. (FIORENTINI, 1995, p. 14)

Conforme vimos no Capítulo 2, esse movimento foi caracterizado pela exigência de um novo tratamento utilizando os conjuntos e as estruturas. Dessa forma, a Teoria dos Conjuntos, as Estruturas Algébricas, a Lógica, as Relações e as Funções foram os elementos unificadores dos três campos da Matemática. De acordo com o professor Fiorentini (1995), nesse período houve uma preocupação exagerada

[...] com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que os produzem; porque enfatiza o lógico sobre o psicológico, o formal sobre o social, o sistemático-estruturado sobre o histórico; porque trata a Matemática como se ela fosse ‘neutra’ e não tivesse relação com interesses sociais e políticos. (p. 16)

Nessa época estava em vigor no Brasil, a Lei nº 4.024 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 20 de dezembro de 1961, que considerou que o ensino de Matemática no curso ginásial, deveria ser, nas primeiras séries, de natureza instrumental, visando proporcionar aos educandos conhecimentos de ordem prática, exigidos pelas atividades cotidianas. Dessa forma, especificamente para a Geometria, o programa teria que conter os conceitos de Geometria plana intuitiva. Já nas últimas séries do ensino secundário, dever-se-ia iniciar o estudo da Geometria plana dedutiva, limitada, porém, à demonstração dos teoremas mais importantes, e, sempre com vistas às aplicações de ordem prática. Para seguir as orientações do programa curricular em vigor, o trabalho com a Geometria deveria enfatizar as estruturas, por meio dos planos vetoriais e das transformações. Procurou-se trabalhar as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, procurando adotar a mesma simbologia usada para os conjuntos em geral. (PAVANELLO, 1989).

É importante ressaltar que devido ao Movimento da Matemática Moderna ter alcançado forte penetração, as propostas de mudança que começaram a acontecer no início da década de 1970, aconteceram de forma bastante lenta.

De fato, vimos no Capítulo 2, que em 1971, entrou em vigor a Lei nº 5.692, de reforma do ensino de 1º e 2º graus, que estabeleceu que o ginásio deveria se deslocar do

ensino secundário e integrar-se ao ensino primário, formando a escola de 1º grau com oito anos escolares. De acordo com essa Lei e com o objetivo de reformular o currículo até então existente, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo divulgou, em 1975, os Guias Curriculares propostos para as disciplinas do núcleo comum do ensino de 1º grau. No entanto, nesse guia, propõe-se que o professor ainda deve seguir as orientações da Matemática Moderna em suas aulas.

Para os demais critérios de análise estabelecidos acima, analisaremos os livros separadamente:

Volume 1:

Figura 121: Capa do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelo autor, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Noção de conjunto; número; correspondência	05
	Numeral	14
	Sucessão de números; estrutura de ordem	17
	Comparação de números	19

	Sistemas de numeração. Bases	24
	Sistema de numeração decimal. Valor; posição	25
	Sistemas de numeração antigos e modernos	29
	Experimentos em diversas bases	34
	Classes experimentais – Laboratório de Matemática	40
Capítulo 2	Idéia geral de operação; operação inversa	47
	Adição de números inteiros; propriedades estruturais	50
	Subtração; associação de adições e subtrações	55
	Expressões numéricas – “pontuação”. Problemas de aplicação	62
	Multiplicação de números inteiros; propriedades estruturais	67
	Divisão; associação de multiplicações e divisões	72
	Problemas de aplicação; estruturas	86
	Potenciação e radiciação de números inteiros	96
	Divisibilidade; relações “múltiplo de”, “divisor de”	105
	Crêterios de divisibilidade; propriedades dos restos	110
	Número um; números primos; números compostos	120
	Fatoração completa	125
	Técnica operatória da radiciação; raiz quadrada	134
	Operações: m.d.c. e m.m.c.; propriedades estruturais	141
Capítulo 3	Números fracionários	161
	Classe de equivalência entre frações	174
	Estrutura de ordem com os números fracionários	181
	Operações; propriedades estruturais	188
	Problemas de aplicação; estruturas	207
	Números decimais; operações	214
	Dízimas periódicas; geratrizes	224
	Potenciação e radiciação	232
Capítulo 4	Medidas. Sistemas usuais	240
	Sistema Métrico Decimal (S.M.D.)	246
	Comprimento de poligonais; circunferência	254
	Unidades de área	260
	Áreas das principais figuras planas	265
	Unidades de volume; medidas de capacidade	282
	Volumes dos principais sólidos; áreas laterais	289
	Unidades de massa	302
	Sistemas de medidas não-decimal	307
	Medida do tempo; ângulos planos	308
	Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.)	315
	Conversões; operações com números não-decimais	318

O autor inicia o livro com algumas palavras direcionadas ao aluno que está iniciando o ginásio:

Meu caro estudante: você vai iniciar agora o estudo da Matemática de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê? Porque Matemática, para eles, na maioria da vezes, era um ‘exagêro de cálculos’, ‘problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade’ que a tornavam, quase sempre, um *fantasma*!

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrónicos de que tanto falam os jornais ...), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa semelhança entre o modo de raciocinar em Matemática e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer Matemática dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar Matemática com prazer! (SANGIORGI, 1966, p. xiii, grifos do autor)

Dessa forma, podemos verificar por essas palavras e observando o índice do livro, o enfoque moderno da Matemática, por meio das estruturas.

A Geometria constitui um único bloco, separado no último capítulo do livro. Nesse capítulo, existem conexões entre a Geometria, a Álgebra e a Aritmética. Analisando o livro, percebemos que nos capítulos anteriores que tratam da Aritmética, existem raras conexões com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Os três primeiros capítulos do livro trabalham a Aritmética, onde encontramos apenas duas conexões com a Geometria. A primeira delas localiza-se no Capítulo 2, no item “Radiciação de números inteiros”:

Figura 122: Final da p. 101 e início da p. 102 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

A segunda ocorrência de ligação com a Geometria encontra-se no Capítulo 3, no item “Números fracionários”. Após serem trabalhadas a noção intuitiva e a leitura de um número fracionário, o autor apresenta a “Interpretação do número fracionário através de desenhos geométricos”:

Figura 123: p. 164 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

No Capítulo 4 que desenvolve a Geometria, encontramos articulações com a Aritmética e com a Álgebra nas apresentações das diversas fórmulas para os cálculos das áreas e dos volumes das figuras geométricas, onde são mostradas aplicações das mesmas.

A título de exemplificação, podemos citar o item “Áreas das principais figuras geométricas planas”:

ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

16. Medida de um polígono

A medida da superfície de um polígono é expressa pela sua área. Assim, pode-se escolher qualquer figura geométrica conhecida (triângulo, quadrado, etc...) para medir a superfície de um polígono.

Seja, por exemplo, medir a superfície de um hexágono regular (fig. 61), de 1cm de lado, tomando por unidade o triângulo equilátero u , de 1cm de lado.

É fácil verificar, experimentalmente, que o hexágono conterá exatamente 6 desses triângulos. Basta desenhar, em papel à parte,

FIG. 61

265

o triângulo equilátero u e, a seguir, com uma tesoura (que siga o contorno do triângulo) destacar o pedaço de papel que contenha a sua superfície e constatar que tal superfície está contida 6 vezes na superfície do hexágono. Logo:

$$\left[\begin{array}{l} \text{medida da superfície do hexágono,} \\ \text{em relação à unidade } u \end{array} \right] = 6$$

ou

$$m(\text{Hexágono})_u = 6$$

e, mais praticamente:

$$\text{área do Hexágono} = 6u$$

Calcule você, agora, como exercício, a área do triângulo equilátero (fig. 62) que possui 2cm de lado, usando a mesma unidade anterior u . O resultado será:

$$\text{área do Triângulo} = \dots u$$

Nas expressões usuais da área de uma figura plana, dentro do S.M.D., emprega-se como unidade de medida o quadrado, cujo lado é dado pelas unidades de comprimento (do S.M.D.) conhecidas.

FIG. 62

17. Área do quadrado

Seja, por exemplo, calcular a área do quadrado de 4cm de lado (fig. 63) tomando por unidade de medida o quadrado que possui 1cm de lado, isto é:

$$u = 1 \text{ cm}^2$$

Como cada “faixa” do quadrado dado contém 4u e existindo quatro faixas no total, segue-se que a medida do quadrado, ou seja, a sua área é dada por: $4 \times 4u = 16u$, isto é:

$$A_{\square} = 16 \text{ cm}^2$$

FIG. 63

266

Se o lado do quadrado for medido em m a área será expressa em m^2 ; se for em dm, a área será em dm^2 , e assim por diante. Portanto: a área do quadrado é expressa sempre na unidade de superfície que corresponde à unidade de comprimento utilizada para a medida do lado.

Do que foi visto decorre que a área de um quadrado é obtida multiplicando a medida de seu lado por si mesma. Como técnica de cálculo, usa-se a fórmula:

$$\text{área do quadrado} = \text{lado} \times \text{lado}$$

ou indicando o lado de um quadrado qualquer por l :

$$A_{\square} = l \times l = l^2$$

OBSERVAÇÃO: Pode acontecer, que o quadrado não contenha um número exato de centímetros quadrados, como por exemplo, no caso do lado medir (fig. 64)

$$34 \text{ mm} = 3,4 \text{ cm}$$

a área será:

$$(34 \times 34) \text{ mm}^2 = 1156 \text{ mm}^2 = 11,56 \text{ cm}^2$$

FIG. 64

Preste, agora, atenção nas DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

- 1.ª) Para calcular a área de um quadrado, conhecida a medida de seu lado, basta elevar ao quadrado essa medida;
- 2.ª) INVERSAMENTE, conhecida a área do quadrado, a medida de seu lado é calculada aplicando a operação inversa de “elevar ao quadrado”, isto é, extrair a raiz quadrada.

Logo:

$$A_{\square} = l^2 \quad \Leftrightarrow \quad l = \sqrt{A_{\square}}$$

267

Aplicações:

- Determinar a área do quadrado, cujo lado mede 15cm.
Temos: $A_{\square} = l^2$
ou $A_{\square} = (15)^2 \text{cm}^2 = 225 \text{cm}^2$
- Um quadrado tem 144m^2 de área. Qual a medida de seu lado?
Temos: $l = \sqrt{A_{\square}}$
ou $l = \sqrt{144} = 12 \text{m}$
- O perímetro de um quadrado é de 52dm. Calcular a área do quadrado.
Temos: medida de um lado: $52 \text{dm} : 4 = 13 \text{dm}$
área do quadrado: $(13)^2 \text{dm}^2 = 169 \text{dm}^2$

18. Área do retângulo

Seja, por exemplo, o retângulo (fig. 65) de 5cm de base e 3cm de altura. Esse retângulo contém: $3 \times 5 = 15$ quadrados de 1cm de lado ou seja 15cm^2 . Portanto, a área do retângulo, em cm^2 é obtida pelo produto:

$$(3 \times 5) \text{cm}^2 = 15 \text{cm}^2$$

FIG. 65

Logo: a área de um retângulo é calculada multiplicando a medida da base pela medida da altura.

Área do retângulo = base $\times$ altura

Indicando a medida da base por b e a da altura por a a técnica de cálculo usa a fórmula:

$$A_{\square} = b \times a$$

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

- Para calcular a área de um retângulo, conhecidas as medidas da base e da altura, basta multiplicar essas medidas;
- INVERSAMENTE, conhecidas a área do retângulo e a medida de uma das dimensões, para calcular a medida da outra dimensão, basta dividir a área pela medida conhecida.

Logo:

$$A_{\square} = b \times a \iff b = A_{\square} : a$$

$$\iff a = A_{\square} : b$$

Aplicações:

- Calcular a área do retângulo que possui 3,5 dm de base e 22 cm de altura.
Reduzem-se, primeiramente, as medidas da base e da altura à mesma unidade de medida (de preferência na menor delas), isto é:
base = 3,5dm = 35cm
altura = 22cm
área = $(35 \times 22) \text{cm}^2 = 770 \text{cm}^2$
- Um retângulo tem 96cm^2 de área. Sabendo-se que a base mede 12cm, calcular a medida da altura.
Como: $a = A_{\square} : b$
vem: $a = (96 : 12) \text{cm} = 8 \text{cm}$

Figura 124: Final da p. 265, p. 266 - 268 e início da p. 269 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

Desenvolvimento do conteúdo:

Podemos perceber no exemplo acima – p. 265 – que a Geometria é desenvolvida, nesse livro, por meio de um estudo intuitivo, experimental e que o autor propõe a construção em sentido físico de materiais de manipulação. Essa característica se estende pelo livro todo, não há referências à Geometria Dedutiva, ou seja, o autor não apresenta axiomas, teoremas e demonstrações, o que também pode ser facilmente verificado no exemplo seguinte que se encontra no item “Volume dos principais sólidos geométricos”:

Figura 125: Início da p. 300 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

Fazendo uma comparação entre os conteúdos desse com o mesmo volume do livro de Sangiorgi analisado no período anterior à Matemática Moderna, não há grandes alterações, com exceção da linguagem que se tornou mais simples, informal e intuitiva. O que pode ser constatado, no exemplo acima – p. 266 a 268 – pelo uso dos quadradinhos como unidade de medida. No entanto, observamos que, nesse primeiro volume da coleção *Matemática: curso moderno*, a Geometria não foi afetada pela linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Para a apresentação dos conteúdos geométricos, esse livro segue o modelo: conceitos – exemplos – exercícios de aplicação, exercícios de fixação e, em alguns tópicos, exercícios exploratórios.

Os exercícios de aplicação referem-se a aplicações de fórmulas apresentadas na teoria ou a exercícios práticos de medidas de segmentos, áreas e volumes realizadas com régua ou com materiais manipuláveis. Como exemplo, podemos citar os exercícios do item “Sistemas de medidas usuais”:

Figura 126: Final da p. 243 e início da p. 244 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

Os exercícios de fixação, na sua maioria, objetivam o treino e a memorização. Já os exercícios exploratórios, referem-se a problemas que envolvem os aspectos visuais e intuitivos para chegar à construção do conceito, ou seja, desenvolve a percepção e estimula a construção para chegar à concepção. A título de ilustração, podemos citar o item “Medida do comprimento da circunferência”:

Figura 127: p. 257 e 258 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

O autor também estabelece relações entre a Geometria e o cotidiano no decorrer do texto. Como exemplo, podemos citar o item “Unidades de massa”:

Figura 128: p. 302 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

A representação é encontrada no decorrer do livro em alguns exercícios de aplicação e exploratórios. No entanto o autor só propõe o uso da régua, dos esquadros e do transferidor, em nenhum momento, há referências ao uso do compasso. Para exemplificar, podemos citar o item “Medida de ângulos planos”:

Figura 129: Final da p. 312, p. 313 e p. 314 do livro de Sangiorgi – volume 1 (1966)

Dessa forma, consideramos que, nesse livro, há o tratamento da Geometria articulando percepção, construção, representação e concepção feita de forma informal.

Volume 2:

Figura 130: Capa do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Conceito de número racional absoluto; Operações com conjuntos	05
	Reta numerada	17
	Operações com números racionais; propriedades estruturais	22
	Razões; aplicações	27
	Razões especiais; velocidade, densidade demográfica, densidade específica	34
	Proporções; propriedades	38
	Proporções especiais: médias usuais; transformações	44
	Por cento; Porcentagem	56
Capítulo 2	Números proporcionais	73
	Problemas com novas estruturas	79
	Grandezas proporcionais	86
	Regra de três (R3S, R3C)	92
	Juros simples	98
	Desconto; Câmbio	103
Capítulo 3	Números inteiros relativos; Operações com conjuntos	111
	Estrutura de ordem; valor absoluto	122
	Operações com números inteiros relativos	129
	Adição; propriedades estruturais; subtração	129
	Multiplicação; propriedades estruturais; divisão	140
	Potenciação; técnicas de cálculo, radiciação	148
	Conceito de número racional relativo; Operações; propriedades estruturais	154
Capítulo 4	Moderno tratamento da Álgebra	169
	Sentenças e Expressões; Sentenças abertas; Variáveis	169
	Conjunto Universo (U); Conjunto Verdade (V)	174
	Equações e Inequações – Equações do primeiro grau	181
	Resolução de equações no $\mathbb{Q}$; Técnicas	185
	Quantificadores; Identidade	210
	Inequações do primeiro grau	213
	Inequações simultâneas	222
	Técnicas operatórias	227
	Relações Binárias; sentenças abertas com duas variáveis	237
	Sistemas de equações simultâneas	242
	Técnica da substituição; Discussão	247
Apêndice	Lembrando Relações	256

Lembrando Sentenças abertas	262
Sistemas Matemáticos	266

Observando o índice, podemos verificar que esse livro não trabalha a Geometria, só aborda a Aritmética e a Álgebra, segundo o enfoque da Matemática Moderna. Porém, ao analisarmos o livro, constatamos que existem algumas ligações com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observado acima, encontramos algumas conexões entre a Aritmética e a Álgebra, com a Geometria.

A primeira delas localiza-se no capítulo 1, no item “Razões; aplicações”, onde após a definição, exemplos e exercícios de aplicação, fixação e exploratórios sobre a Razão, o autor apresenta “Aplicações da noção de razão na Geometria Prática”:

Figura 131: Final da p. 31, p. 32 e 33 do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

A segunda ocorrência de ligação com a Geometria encontra-se no capítulo 2, no item “Grandezas Proporcionais”, que aborda primeiramente as definições de Grandezas diretamente e inversamente proporcionais com seus respectivos exemplos. No final do tópico, apresenta uma observação sobre a proporcionalidade de duas grandezas, onde o exemplo dado refere-se à Geometria:

Figura 132: Final da p. 88 do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

Logo em seguida, o autor trabalha o conceito de “proporcionalidade composta” e novamente o exemplo dado refere-se à Geometria:

7. Proporcionalidade composta. Propriedade característica

Para você saber se uma grandeza variável é proporcional, diretamente ou inversamente, a várias outras, basta saber se tal grandeza é diretamente ou inversamente proporcional a cada uma delas, quando as demais não variam. Exemplos:

1. A área de um retângulo é diretamente proporcional tanto à medida de sua base como à medida de sua altura. De fato, seja o retângulo:

onde:

	med. da base = 4cm	$\rangle$ área: 12cm ²	$\leftarrow$ duplicou
	med. da alt. = 3cm		
	med. da alt. = 6cm	$\rangle$ área: 48cm ²	$\leftarrow$ duplicou
	med. da base = 8cm		

Portanto, duplicando a base e conservando a altura fixa a área também duplicará, o que mostra ser a *área diretamente proporcional à base*; o mesmo você concluirá, duplicando a altura e conservando a base: a *área é diretamente proporcional à altura*.

Se, agora, você duplicar a base e duplicar a altura, a área resultará *quadruplicada*, isto é:

med. da base (duplicada): 8cm $\rangle$ área: 48cm² (quadruplicada!)
 med. da altura (duplicada): 6cm

Logo:

Se uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras, então os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos produtos dos valores correspondentes das outras.

Figura 133: Início da p. 89 do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

Encontramos uma outra articulação com a Geometria no capítulo 4, no item “Resolução de equações do primeiro grau com uma variável no Q; Técnicas operatórias”. Nesse tópico, após uma série de exemplos e exercícios de resolução de uma equação do primeiro grau, encontramos dois problemas de aplicação e os exercícios de fixação de números 07 e 16 abordando a Geometria:

2.º) O perímetro de um retângulo é igual a 52m. Quanto mede a base desse retângulo, a qual é 10m maior que a altura?

Temos:

	altura: x
	base: x + 10
	perímetro: x + (x + 10) + x + (x + 10)

e a equação: $x + (x + 10) + x + (x + 10) = 52$

ou $(x + x + x + x) + (10 + 10) = 52$ Por quê?
 ou $4x + 20 = 52 \iff 4x = 52 - 20$
 ou $4x = 32 \iff x = 32 : 4$
 ou $x = 8 \implies$ raiz: 8

Logo: a base do retângulo mede: 8m + 10m = 18m

9.º) O perímetro de um triângulo é 60cm. Um dos lados é igual à base mais 8cm e o outro mede o dobro da base. Quanto mede cada lado?

Temos: base: x
 um dos lados: x + 8
 outro lado: 2x

Equação: $x + (x + 8) + 2x = 60$ raiz: 13

Logo: a base mede 13cm, um dos lados 21cm e o outro 26cm.

7. Sabe-se que num retângulo a medida da base é três vezes maior que a da altura, e que o perímetro é igual a 48 metros. Determinar as medidas da base e da altura desse retângulo.
8. Dois números inteiros consecutivos têm por soma 27. Quais são esses números?
9. Três números ímpares consecutivos têm por soma 45. Quais são esses números? (Sugestão: n.º ímpar: x ; seu consecutivo: $x + 2$; consecutivo seguinte: $(x + 2) + 2$.)
10. A soma de quatro números pares consecutivos é 412. Quais são eles?
11. Pense em um número. Acrescente-lhe 5 e divida a soma obtida por 8. Se o resultado é 40, qual foi o número pensado?
12. Pense em um número. Diminua 3 do dobro desse número e multiplique a diferença obtida por 9. Se o resultado é 54, qual foi o número pensado? E se o número a ser pensado tivesse de ser *inteiro*, o problema admitiria solução?
13. O triplo da idade que eu tinha há dois anos é igual à idade do primo Lufs, que é de 27 anos. Qual a minha idade?
14. Raul tem 3 anos a mais que Rosinha. A soma das atuais idades de ambos é igual a 25 anos. Qual a idade de cada um? Esquematize a *estrutura* (repartição) deste problema.
15. Repartir 72 balas entre Aninha, Luluzinha e Glória, de modo que Aninha ganhe o dobro das balas que Glória receber e Luluzinha duas a mais do que Aninha.
16. O perímetro de um triângulo é igual a 120cm. Um dos lados mede o triplo da medida da base e o outro 12cm a mais que a base. Quanto mede cada lado?

Figura 134: Trechos das p. 198, 200 e 201 do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

A última conexão com a Geometria encontrada nesse livro localiza-se no capítulo 4, nos exercícios finais do item “Técnicas operatórias”, que se refere a algumas técnicas para simplificar os cálculos na resolução de equações e inequações:

Figura 135: Final da p. 235 do livro de Sangiorgi – volume 2 (1965)

Volume 3:

Figura 136: Capa do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Números reais; estrutura de corpo	
	Números racionais	05
	Números irracionais	07
	Números reais	12
	Reta real	16
	Operações no conjunto $\mathbb{R}$	21
	Adição e multiplicação; estrutura de corpo	21
	Potenciação e radiciação	25
Capítulo 2	Cálculo algébrico; estudo dos polinômios	
	Expressões literais; operações em $\mathbb{R}$	41
	Expressões equivalentes; uso do quantificador $\forall$	45
	Termos semelhantes; expressões literais	48
	Cálculo com termos semelhantes; reduções	49
	Técnicas para o cálculo algébrico	57
	Técnicas usuais na multiplicação; “produtos notáveis”	63
	Técnicas de fatoração	71
	Técnicas de simplificação expressões	76
	Complementação do estudo das equações, inequações e sistemas do primeiro grau:	
	Equações e inequações com uma variável, redutíveis ao primeiro grau	81

	Sistemas de equações simultâneas	84
	Tratamento elementar moderno dos polinômios: Conceito de polinômio em uma variável ..	94
	Igualdade de polinômios	98
	Operações com polinômios; estrutura de anel	98
Capítulo 3	Estudo das figuras geométricas	
	Objetivos da Geometria	115
	Figuras geométricas planas; curvas fechadas simples	121
	Um pouco de Topologia	130
	Relações e operações com conjuntos de pontos no plano	132
	Estrutura de ordem; relação ...estar entre...	138
	Semi-reta; segmento de reta; semi-plano	139
	Medida de segmentos; segmentos congruentes	146
	Conceito de ângulo	154
	Medida de ângulos; ângulos congruentes	159
	Ângulos complementares; ângulos suplementares	173
	Práticas demonstrativas	177
	Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal	183
Capítulo 4	Estudo dos polígonos e da circunferência	
	Conceito de polígono; diagonais	201
	Estudo dos triângulos	205
	Congruência de triângulos	214
	Construção lógica da Geometria	231
	Da necessidade de provas	232
	Postulados e Teoremas da Geometria em estudo	234
	Primeiros teoremas; forma “se-então”	237
	Como efetuar uma demonstração logicamente	239
	Teorema recíproco de outro teorema	244
	Método indireto na demonstração de um teorema	246
	Alguns teoremas fundamentais: ... sobre triângulos	248
	... sobre retas paralelas	252
	... sobre ângulos	253
	... sobre polígonos convexos	256
	Quadriláteros: paralelogramos; teoremas fundamentais	259
	Trapézios; teoremas fundamentais	266
	Circunferência; teoremas fundamentais	269
	Círculo ou disco fechado; propriedades das cordas	271
	Posições relativas de duas circunferências	275
	Posições relativas da reta e circunferência	279
	Arcos de circunferência; medida	282

	Propriedades fundamentais entre arcos e cordas	285
	Ângulos relacionados com arcos; medidas	287
	Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência	296
Apêndice	Transformações geométricas planas	
	Grupo das translações	301
	Grupo das rotações	306
	Simetrias	310

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos dois capítulos finais do livro. Nesses capítulos, o autor trabalha a Geometria fazendo articulações com a Álgebra e com a Aritmética sempre que necessário. Ao analisar o livro, percebemos que nos capítulos anteriores que tratam da Aritmética e da Álgebra, existem conexões com a Geometria em alguns exercícios.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observamos, os dois primeiros capítulos abordam o estudo da Aritmética e da Álgebra. Encontramos uma primeira conexão com a Geometria no capítulo 1 – “Números reais; estrutura de corpo”, nos exercícios exploratórios do item “Reta real”. Nesses exercícios, percebemos também propostas de uso da régua e do compasso, o que já nos mostra articulações com a representação que o autor trabalha bastante no decorrer do texto todo:

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 8

Você já deve ter ouvido falar no famoso *Teorema de Pitágoras*. Além de famoso é de muita utilidade, razão por que vai ser “explorado” agora.

Considere o *triângulo retângulo*, cujos catetos medem, por exemplo: 3cm e 4cm, isto é:

Você será capaz de dizer quanto mede a hipotenusa desse triângulo? Bem, medindo com a régua você encontrará 5cm. Experimente.

E se você não dispusesse de régua, poderia conhecer a medida da hipotenusa? Sim, e é o Teorema de Pitágoras que responde: *a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*. Que quer dizer isso?

Basta quadrar as medidas dos catetos: 3^2 e 4^2 (sem escrever as unidades), somá-las: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, e o resultado obtido (25) representa o *quadrado* da medida da hipotenusa. Portanto, a hipotenusa mede: 5cm (lembre-se que 5 é a raiz quadrada de 25, isto é: $\sqrt{25} = 5$).

Agora você já pode dizer quanto mede a hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem, respectivamente: 6cm e 8cm. Acompanhe:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Como: $\sqrt{100} = 10$ temos: a hipotenusa mede 10cm.

E se os catetos do triângulo retângulo medirem 1cm cada um, qual será a medida da hipotenusa? Vale ainda o Teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

e, portanto, a hipotenusa medirá: $\sqrt{2}$, que é um *número irracional*.

E se os catetos medirem: 1cm e 2cm, respectivamente? A medida da hipotenusa será obtida ainda pelo Teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

e, portanto, a hipotenusa medirá: $\sqrt{5}$, que é também *número irracional*.

18

Com a correspondência estudada entre o conjunto $\mathbb{R}$ e os pontos da reta, a cada número irracional corresponde um ponto da reta. Como você determinaria, por exemplo, o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$?

Guarde bem a seguinte construção geométrica: com o centro do compasso na origem 0 e a abertura na extremidade da hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 1 (ou seja, 1cm), determina-se o ponto de interseção do arco de circunferência traçado com a reta. O ponto encontrado é o *ponto correspondente* a $\sqrt{2}$.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 9

- Represente na *reta real* (sendo de 2cm a unidade escolhida, a partir de uma origem 0 fixada) os pontos correspondentes aos seguintes números reais:

1.º) $-0,333 \dots$	3.º) $-\sqrt{2}$
2.º) $\frac{22}{10}$	4.º) 1,4
- Sabendo que no triângulo retângulo, cujos catetos medem (tomando como unidade o cm), respectivamente: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{1}$ (o mesmo que 1), a hipotenusa mede $\sqrt{3}$ (lembre-se do Teorema de Pitágoras), construa o ponto correspondente ao número irracional $-\sqrt{3}$. Observe como foi construído o ponto correspondente a $\sqrt{3}$.

19

- Observando a construção da $\sqrt{5}$, determine na *reta real* o ponto correspondente ao número irracional $-\sqrt{5}$.

- Se a, b e c são números reais e A, B e C os respectivos pontos correspondentes na *reta real*, e se $a < c < b$, qual das duas sentenças é verdadeira:
 - o ponto B está à esquerda do ponto A
 - o ponto B está à direita do ponto A ?

Ainda Pitágoras...

Quanto mede (em cm) a hipotenusa dos seguintes triângulos retângulos?

20

Figura 137: p. 18, 19 e 20 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

No capítulo 2 – “Cálculo algébrico; estudo dos polinômios”, há outros estabelecimentos de conexões com Geometria nos exercícios. A título de exemplificação, podemos citar os exercícios do item “Técnicas para o cálculo algébrico”:

Figura 138: Final da p. 62 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

Nos capítulos que abordam a Geometria há aplicações da Aritmética e da Álgebra. Podemos citar um exemplo no capítulo 3 – “Estudo das figuras geométricas”, no item “Ângulos complementares; ângulos suplementares”:

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — Grupo 64

1. medida do ângulo: 30° 15°20' 90° 45° 0°
 medida do complemento: 60° 74°40' 0° 45° 90°
 medida do suplemento: 150° 164°40' 90° 135° 180°

2. Preencha os claros:
 medida do ângulo: 40° 89°15' ...
 medida do complemento: ... 65° 60°30'18"
 medida do suplemento: 130°

NOTA: Já foi estudada, na 1.ª Série, a prática de operações com medidas não-decimais.

3. Complete as seguintes sentenças, a fim de torná-las verdadeiras:
 1.ª) Se os ângulos $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ e $\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ são suplementares, então $m(\hat{A}\hat{O}\hat{B}) + m(\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) = \dots$
 2.ª) Se $m(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + m(\hat{N}\hat{O}\hat{P}) = 90^\circ$, então o ângulo $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ é o do ângulo $\hat{N}\hat{O}\hat{P}$
 3.ª) O suplemento de um ângulo raso é o ângulo

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — Grupo 65

Representando por x a medida, em graus, de um ângulo qualquer:

temos, em linguagem simbólica, as seguintes representações para as medidas:

do <i>dôbro</i> desse ângulo	2x
do <i>tríplo</i> desse ângulo	3x
da <i>metade</i> desse ângulo	$\frac{x}{2}$
de um <i>terço</i> desse ângulo	$\frac{x}{3}$
do <i>complemento</i> desse ângulo	90 - x
do <i>suplemento</i> desse ângulo	180 - x
do <i>dôbro do complemento</i> desse ângulo	2(90 - x)
da <i>metade do suplemento</i> desse ângulo	$\frac{1}{2}(180 - x)$

que serão aplicadas na resolução de alguns problemas:

174

1. A medida da metade de um ângulo, somada com 20° é igual a 70°. Qual a medida desse ângulo?

Temos: x representa a medida do ângulo procurado
 $\frac{x}{2}$ representa a medida da metade desse ângulo

e a sentença matemática relativa ao problema conduz à equação:

$$\frac{x}{2} + 20 = 70$$

ou $x + 40 = 140 \iff x = 140 - 40 \iff x = 100$

Logo, a medida, em graus, do ângulo pedido é 100, vulgarmente escrita 100°.

2. Calcule a medida de um ângulo sabendo que ela é igual ao *dôbro* da de seu complemento.

Temos: x representa a medida do ângulo procurado
 $90 - x$ representa a medida do complemento desse ângulo

e a equação que traduz o problema:

$$x = 2(90 - x)$$

ou $x = 180 - 2x \iff 3x = 180 \iff x = 60$

Resposta: a medida do ângulo procurado é 60°.

3. A diferença entre o *tríplo* da medida de um ângulo e a medida de seu suplemento é 122°. Determine a medida do ângulo.

É fácil chegar à equação: $3x - (180 - x) = 122$

onde $x = 75^\circ 30'$

Resposta: a medida do ângulo procurado é 75°30'.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 66

1. Representando por x a medida, em graus, de um ângulo, escreva em linguagem simbólica:

- 1.ª) o *quádruplo* da medida desse ângulo;
- 2.ª) *três quartos* da medida desse ângulo;
- 3.ª) a medida do *complemento* desse ângulo;
- 4.ª) o *dôbro* da medida do *suplemento* desse ângulo;
- 5.ª) a soma da medida desse ângulo com a metade dessa medida;
- 6.ª) a diferença entre as medidas do *suplemento* e do *complemento* desse ângulo;
- 7.ª) o *tríplo* da medida desse ângulo mais a metade da medida de seu complemento;
- 8.ª) *dois terços* da medida desse ângulo menos 10.

175

Figura 139: p. 174 e 175 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

Desenvolvimento do conteúdo:

Antes de iniciar o desenvolvimento dos conteúdos do livro, o autor apresenta algumas palavras direcionadas ao estudante do terceiro ano do ginásio. Após falar sobre os conteúdos algébricos, refere-se ao estudo que será feito em Geometria, esclarecendo que:

[...] Finalmente, vem o ‘bom-bocado’ do livro: o estudo da *Geometria*. Agora, não será mais preciso que você ‘decore’ enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam ‘preveni-lo’.

Na verdade, trata-se de uma das partes da Matemática de valor e beleza reconhecidos desde antes de Cristo, pela notável cultura grega da época. Por quê? Porque as figuras geométricas – suas velhas conhecidas desde os primeiros anos de escola – quando tratadas ‘racionalmente’, constituem ótimo estímulo para a *dedução* de certas propriedades comuns a elas e que jamais poderiam ser aceitas se apenas as *observássemos*. E, se *deduzir* é uma das principais qualidades de ‘ser racional’, o estudo da Geometria o fará mais racional ainda!

Seja, pois, muito feliz nesta viagem ao maravilhoso 'país da Geometria', e até a quarta série! (SANGIORGI, 1971, grifos do autor)

Dessa forma, nos capítulos dedicados à Geometria, apesar de tratar da percepção, tem-se o modelo euclidiano para a apresentação dos conteúdos, ou seja, foi desenvolvida a Geometria Dedutiva, onde o autor procurou utilizar a linguagem da Matemática Moderna em algumas definições e notações.

Assim, o autor inicia a Geometria, esclarecendo que:

Figura 140: p. 115 a 118 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

Nessas páginas, podemos notar a ênfase na percepção para desenvolver os conteúdos geométricos.

É importante observar também a tentativa do uso da linguagem moderna no desenvolvimento dos conteúdos, o que será feito no decorrer dos dois capítulos. Assim, é possível encontrar no decorrer do texto comentários sobre as Geometrias não-euclidianas e uma nota sobre Topologia:

Figura 141: p. 130 e 131 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

O livro apresenta também um apêndice sobre as Transformações geométricas planas, onde são trabalhados o grupo das translações, o grupo das rotações e as simetrias. Miorim (2005, p. 13), considera que "isso é um indicativo de que o autor não parece ter se sentido à vontade para incorporar as discussões mais teóricas acerca das transformações geométricas no corpo do texto".

Para a apresentação dos conteúdos geométricos, encontramos o seguinte modelo: conceitos – exemplos – exercícios (nomeados como teste de atenção, práticas modernas, exercícios práticos, de fixação, de aplicação e exploratórios). No item "Práticas demonstrativas", do capítulo 3 e no capítulo 4, aparecem os postulados e uma série de teoremas com suas respectivas demonstrações. Com relação a esse fato, Miorim (2005, p. 14), considera "interessante observar que nesse momento o autor parece retornar a Euclides. A linguagem da teoria dos conjuntos é abandonada e as demonstrações assumem o estilo euclidiano, incluindo o tradicional final c.q.d.".

Assim inicia-se o item “Construção lógica da Geometria” do capítulo 4:

Figura 142: p. 231, final da p. 232 e início da p. 233 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

A representação e a construção são encontradas no decorrer do livro. Para exemplificar, podemos citar os exercícios exploratórios do item “Relações e operações com conjuntos de pontos no plano”, do capítulo 3:

Relações e operações com conjuntos de pontos no plano

7. Primeiras relações e operações

Com os pontos e com as retas serão estabelecidas as primeiras relações:

... é igual a pertence a ...

e a operação: interseção de retas, onde as retas são pensadas como conjuntos de pontos. Tais relações e operação serão "sentidas" através dos exercícios que se seguem.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 50

1. Com um lápis (ponta bem afiada...) e uma régua (preferivelmente de material transparente), você vai "explorar" as seguintes questões:

1.ª) (esta é para auxiliar...) Desenhe uma reta qualquer e indique-a por r . Com a ponta do lápis marque, em r , um ponto P .

Como o ponto P pertence à reta r (lembre-se de que a reta r é um conjunto de pontos e P é um elemento desse conjunto), indica-se tal relação empregando o símbolo já conhecido: $\in$.
Logo: $P \in r$

2.ª) Desenhe um ponto e represente-o por P . Quantas retas você pode traçar por P ? Na figura estão assinaladas quatro retas: a, b, c e d . Portanto:

$$P \in a, \quad P \in b, \quad P \in c, \quad P \in d$$

Será que só "passam" estas retas por P ?

132

A flecha, com dupla seta nas extremidades, procura indicar os dois sentidos que traduzem a *infinitude* da reta. Tanto faz indicar a reta r por $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$, uma vez que os pontos A e B determinam sempre a mesma reta.

Logo: $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA} = r$

Nota: Se $A = B$, isto é, A e B representam o mesmo ponto, então costuma-se dizer que os pontos A e B *coincidem*. Neste caso, tem-se só um ponto e , de acordo com o que foi "explorado" no exercício 1.ª), por ele passarão quantas retas você quiser!

Considere numa folha de desenho os pontos distintos A e B . Você já sabe que eles determinam a reta $\overleftrightarrow{AB}$:

Desenhe, a seguir, um ponto C fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, C não pertence a $\overleftrightarrow{AB}$:

Em símbolos, temos: $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Por sua vez:

os pontos A e C determinam a reta $\overleftrightarrow{AC}$

e os pontos B e C determinam a reta $\overleftrightarrow{BC}$

Qual é a interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$?

É o ponto A . Indicação: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$

134

2. Se a e b , como retas, são conjuntos de pontos, então você pode determinar a interseção delas. Ora, as retas a e b , do exercício anterior, *interceptam-se* (ou seja, "encontram-se") no ponto P . Sendo a interseção de dois conjuntos um conjunto, segue-se que a interseção de a e b é o conjunto unitário constituído pelo ponto P . Indicação:

$$a \cap b = \{P\}$$

Você conclui facilmente, examinando a fig. da 2.ª questão do Exercício 1, que também:

$$a \cap c = \{P\} \quad a \cap d = \dots \quad b \cap c = \dots \quad b \cap d = \dots$$

3. Sobre uma tábua fixe dois pregos que a furem em dois "pontos" A e B em posições diferentes, isto é, *distintos*.

Passando por A e B dois ou mais fios (bem fininhos) e esticando-os bem, você perceberá que os fios se *superpõem*, dando a impressão que *coincidem*. Essa experiência sugere a seguinte afirmação, que passa a constituir uma *propriedade* que caracteriza a reta:

Dois pontos distintos determinam uma única reta

Para "testar" essa afirmação, marque dois pontos distintos numa folha do caderno. Represente-os, respectivamente, por A e B :

Quantas linhas você pode traçar ligando A com B ? Muitas, não é verdade? Usando a régua, porém, poderá traçar uma *só* reta, que será indicada por r .

Agora você já pode indicar uma reta também por dois pontos distintos, precisamente os dois pontos que a determinam, da seguinte maneira:

$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

133

Nota: Diz-se também que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são *incidentes* ou *concorrentes* no ponto A .

Responda, agora, às seguintes perguntas:

1.ª) Qual é a interseção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CB}$? Indique com símbolos.

2.ª) Qual é a interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$?

3.ª) Como se torna verdadeira a sentença: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{\dots\}$?

5. No plano α , representado pela sua folha de caderno, está desenhada uma reta r :

Neste caso a reta r (que é um conjunto de pontos) está *contida* no plano (que também é um conjunto de pontos). Tal relação de inclusão é indicada por:

$$r \subset \alpha$$

Por sua vez, o plano *contém* a reta r :

$$\alpha \supset r$$

6. Preste bem atenção a esta questão:

Considerados, numa folha de desenho, a reta $\overleftrightarrow{AB} = r$ e o ponto C , fora de $\overleftrightarrow{AB}$, será que nessa folha você poderia traçar por C alguma reta que não *interceptasse* ("não encontrasse") a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$?

Com auxílio de um esquadro e uma régua é possível traçar uma reta (indicada por s) que não encontrará a reta r :

135

Figura 143: p. 132 a 136 do livro de Sangiorgi – volume 3 (1971)

O autor não apresenta situações problematizadoras para desenvolvimento dos conteúdos e também não estabelece relações entre a Geometria e o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, consideramos que, esse volume da coleção *Curso Moderno*, também aborda a Geometria articulando a percepção, a construção, a representação e a concepção.

Volume 4:

Figura 144: Capa do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelo autor, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Números reais: práticas com números irracionais	
	Cálculo com radicais	03
	Transformação de radicais	04
	Operações combinadas	08
	Casos simples de racionalização	14
	Equações do segundo grau	17
	Como resolver	20
	Discussão	36
	Relações entre os coeficientes e as raízes	39
	Consequências	43
	Equações biquadradas	47
	Equações irracionais	51
	Sistemas simples do segundo grau	55
	Problemas do segundo grau	57
Capítulo 2	Funções	
	Conceito de função	67
	Domínio e conjunto imagem	77
	Funções definidas por sentenças matemáticas (equações)	81
	Coordenadas cartesianas no plano	85
	Gráficos das funções definidas por equações	87
	Funções lineares (afins), gráfico	93
	Iniciação à Geometria Analítica	96
	Gráficos de inequações do primeiro grau	104
	Função trinômio do segundo grau, gráfico	110
	Estudo algébrico, aplicações	116
	Inequações do segundo grau	128
Capítulo 3	Semelhança	
	Razão e proporção de segmentos	141
	Feixe de paralelas; Teorema de Tales	145
	Semelhança como correspondência	152
	Semelhança de triângulos e de polígonos	153
	Similitude Central ou Homotetia	169

	Razões trigonométricas de ângulos agudos	173
	Relações métricas no triângulo retângulo	182
	Teorema de Pitágoras	185
	Práticas usuais	189
	Projeção ortogonal	193
	Relações métricas num triângulo qualquer	195
	Relações métricas no círculo	199
	Polígonos regulares	204
	Relações métricas nos polígonos regulares	209
	Medida da circunferência	216
	Cálculo de π	221
Apêndice	Números complexos	227
	Área de regiões planas; práticas usuais	233
	Mapas topológicos	244

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria Plana está concentrada no capítulo final do livro. Nesse capítulo, o autor trabalha a Geometria fazendo conexões com a Álgebra e com a Aritmética. Nos capítulos anteriores, que tratam da Álgebra e da Aritmética, a única ligação com a Geometria encontra-se no capítulo 2, onde o autor inicia o estudo da Geometria Analítica.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Nas palavras colocadas no início do livro direcionadas ao aluno que está terminando o ginásio, podemos constatar o trabalho com as funções como elemento unificador do ensino da Matemática, estando presente, portanto, no estudo da Álgebra e também da Geometria:

Ao final dêste volume, você ficará de posse dos assuntos de Matemática relativos aos quatro anos de estudos do Ginásio. E não se esqueça: você estará incluído no primeiro grupo de jovens brasileiros que completa o seu curso ginasial conhecendo as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*, a exemplo do que já vem ocorrendo nos grandes países civilizados de nossa época.

Neste livro o conceito moderno de *função* é o dominante, participando ativamente da Álgebra e da Geometria. As *equações do segundo grau*, bem como os problemas que envolvem, terão um tratamento atualizado, seguindo a linha já empregada no estudo das equações em outras séries.

Haverá um ‘introito’ à Geometria Analítica, principal responsável pela primeira tentativa da unidade da Matemática, desde o tempo de Descartes. A *semelhança* comanda o estudo da Geometria, iniciado axiomáticamente na 3ª série. Agora, enfatizará os teoremas de *Tales* e de *Pitágoras*, ressaltando-lhes importantes aplicações. (SANGIORGI, 1970, grifos do autor)

Conforme observamos acima, nos capítulos iniciais que tratam a Aritmética e a Álgebra, a única conexão com a Geometria encontra-se no capítulo 2 – “Funções”, no item – “Iniciação à Geometria Analítica”:

Iniciação à Geometria Analítica

8. Problemas equivalentes tratados algebricamente e geometricamente

O estudo das *funções lineares* e dos respectivos gráficos permite que você faça o tratamento algébrico e geométrico de um mesmo problema, dentro daquela *unidade da Matemática*, preconizada por René DESCARTES em sua *Geometria Analítica*.

1.ª) -a- Problema (em Geometria): Determinar as coordenadas do ponto-interseção da reta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) com o eixo-x.

1.ª) -b- Problema equivalente (em Álgebra): Resolver a equação do primeiro grau: $ax + b = 0$ ($a > 0$)

96

Exemplo: Determinar o ponto-interseção da reta $y = 2x - 4$ com o eixo-x. O ponto-interseção dessa reta com o eixo-x tem a ordenada $y = 0$, e a abscissa (x) correspondente é a raiz da equação:

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

isto é: 2

Logo, o ponto-interseção é (2, 0).

2.ª) -a- Problema (em Geometria): Determinar as abscissas dos pontos da reta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) localizados “acima” do eixo-x.

2.ª) -b- Problema (em Álgebra): Resolver a inequação do primeiro grau: $ax + b > 0$ ($a > 0$)

Como os pontos da reta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) situados “acima” do eixo-x têm as ordenadas positivas, isto é, $y > 0$, a resolução da inequação: $ax + b > 0$ ($a > 0$), permite determinar as abscissas (x) desses pontos.

Exemplo: Determinar, no conjunto dos números inteiros, as abscissas dos pontos da reta $y = 2x - 4$ localizados “acima” do eixo-x.

Basta resolver a inequação:

$$2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$$

e a solução é constituída dos números inteiros maiores que 2, isto é:

$$V = \{x | x > 2\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$$

e, portanto, os pontos localizados “acima” do eixo-x são: (3, 2), (4, 4), (5, 6), ... (fazendo $x = 3 \Rightarrow y = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$, etc.)

97

Observação: O problema equivalente ao de determinar as abscissas dos pontos da reta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) localizadas "abaixo" do eixo- x é resolver a inequação: $ax + b < 0$ ($a > 0$).

3.º) -a- Problema (em Geometria): Determinar o ponto-interseção das retas r e s , respectivamente de equações:

$$\begin{aligned} \text{reta } r: y &= a_1x + b_1 \quad (a_1 \neq 0) \\ \text{reta } s: y &= a_2x + b_2 \quad (a_2 \neq 0) \end{aligned}$$

3.º) -b- Problema equivalente (em Álgebra): Resolver o sistema das duas equações simultâneas do primeiro grau nas variáveis x e y :

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \quad (a_1 \neq 0) \\ y = a_2x + b_2 \quad (a_2 \neq 0) \end{cases}$$

Como o ponto (x, y) , interseção das retas r e s , deve satisfazer, simultaneamente, as equações dessas retas, segue-se que a solução do sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \quad (a_1 \neq 0) \\ y = a_2x + b_2 \quad (a_2 \neq 0) \end{cases}$$

que é um par ordenado de números reais, representa as coordenadas do ponto-interseção.

Exemplos:

1. Determinar o ponto-interseção P das retas r e s , respectivamente de equações:

$$\text{reta } r: y = -2x + 8 \quad \text{reta } s: y = \frac{4x-6}{3}$$

Solução geométrica:

$$\text{reta } r: y = -2x + 8$$

x	y	pontos
0	8	(0, 8)
4	0	(4, 0)

$$\text{reta } s: y = \frac{4x-6}{3}$$

x	y	pontos
0	-2	(0, -2)
3	0	(3, 0)

Na figura as retas se interceptam no ponto $P(3, 2)$.

98

Solução algébrica:

Basta resolver o sistema formado pelas equações das retas:

$$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{4x-6}{3} \end{cases}$$

Pelo método da substituição (nesse caso é só comparar), temos:

$$-2x + 8 = \frac{4x-6}{3} \Leftrightarrow -6x + 24 = 4x - 6 \Leftrightarrow -10x = -30 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Portanto: } y = -2 \times 3 + 8 = -6 + 8 = 2 \text{ e } V = \{(3, 2)\}$$

Geomêtricamente as coordenadas do ponto-interseção são dadas pelo par $(3, 2)$, isto é, $P(3, 2)$.

2. Determinar o ponto-interseção das retas: $x + y = 3$ e $x + y = 5$

Solução geométrica:

$$\text{reta: } x + y = 3$$

x	y	pontos
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$$\text{reta: } x + y = 5$$

x	y	pontos
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)

Na figura as retas não se interceptam, isto é, são paralelas.

Solução algébrica:

$$\text{Seja o sistema: } \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Substituindo o valor de $x = 3 - y$ (da primeira equação) na segunda:

$$3 - y + y = 5 \Leftrightarrow -y + y = 5 - 3 \Leftrightarrow 0 \cdot y = 2$$

portanto:

$$\frac{1}{2}y|0 \cdot y = 2 \text{ (não existe valor de } y \text{ tal que multiplicado por 0 dê 2)}$$

Portanto, o sistema proposto é impossível de ser resolvido, ou seja, não admite solução, por envolver duas condições incompatíveis.

Geomêtricamente, não existindo a ordenada y do ponto procurado, não existirá o ponto-interseção das retas desenhadas e, por isso, elas são paralelas.

99

Figura 145: Final da p. 96 e p.97 a 99 do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

No capítulo final que aborda especificamente a Geometria há conexões com a Álgebra e com a Aritmética na teoria, nos exemplos e nos exercícios propostos.

Podemos citar um exemplo no item – “Polígonos regulares”, onde após a apresentação de definições e alguns teoremas com suas demonstrações, o autor trabalha a construção dos polígonos regulares e o cálculo das medidas de seus elementos principais. Para o decágono encontramos o segmento áureo:

26. Construção do decágono regular; cálculo da medida do lado (l_{10}) do decágono regular inscrito

Seja $\overline{AB}$ o lado do decágono regular inscrito na $C(O, r)$. O ângulo cêntrico $\widehat{AOB}$ vale: $w_{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ e, portanto:

$$m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{ABO}) = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

Como os ângulos $\widehat{OAB}$ e $\widehat{ABO}$ são congruentes, por ser o $\triangle AOB$ isósceles ($OA = OB = r$), tem-se:

$$m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{ABO}) = 72^\circ$$

212

Traçada a bissetriz BP do ângulo $\widehat{B}$, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle APB, \text{ isósceles} \iff AB = PB = l_{10} \\ \triangle OPB, \text{ isósceles} \iff OP = PB = l_{10} \end{array} \right\} \implies \boxed{OP = l_{10}}$$

Observação: Diz-se que se efetua uma divisão *dura* de um segmento $\overline{OA}$, por meio de um ponto P , quando esse ponto divide o segmento $\overline{OA}$ em duas partes desiguais, tais que a maior delas é *média* proporcional entre o segmento todo e a menor.

O segmento maior $\overline{OP}$, resultante da divisão, é denominado *segmento duro* do segmento $\overline{OA}$.

Logo: $\{OP, \text{ segmento duro de } \overline{OA}\} \iff \overline{OP}$ é média proporcional entre $\overline{OA}$ e $\overline{PA}$ $\iff$

$$\iff \left[\frac{OP}{OA} = \frac{PA}{OP} \right] \iff \left[(OP)^2 = OA \cdot PA \right]$$

Qual é a relação, no estudo que está sendo feito, entre o lado do decágono e o segmento duro de um segmento? É a seguinte:

O segmento $\overline{OP}$, que representa o lado do decágono, é o *segmento duro* do raio ($OA = r$), onde se acha inscrito o decágono.

De fato, pelo T.4 (sobre a bissetriz do ângulo interno de um triângulo) tem-se, no $\triangle OAB$:

$$\frac{OP}{PA} = \frac{OB}{AB} \text{ e, como: } \begin{cases} OP = PB = AB \\ OB = OA = r \end{cases}$$

$$\text{vem: } \frac{OP}{PA} = \frac{OA}{OP} \iff (OP)^2 = OA \cdot PA$$

ou seja, o segmento $\overline{OP}$, cuja medida é l_{10} , é o *segmento duro* do raio r .

O valor de l_{10} é tirado de:

$$(OP)^2 = OA \cdot PA$$

$$\text{ou } l_{10}^2 = r(r - l_{10}) \iff l_{10}^2 + r \cdot l_{10} - r^2 = 0$$

$$\text{cujo } V = \left\{ \frac{-r}{2} (\sqrt{5} - 1), \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) \right\}$$

Rejeitando-se a raiz negativa, temos:

$$\boxed{l_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)}$$

213

Figura 146: Final da p. 212 e p. 213 do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

Desenvolvimento do conteúdo:

Para a apresentação dos conteúdos geométricos, esse livro segue o modelo: conceitos, teoremas com suas respectivas demonstrações, exemplos e exercícios (nomeados como teste de atenção, de fixação, de aplicação, exploratórios, problemas e teoremas). A título de ilustração podemos citar o item “Feixe de paralelas – Teorema de Tales”:

Feixe de paralelas — Teorema de Tales

3. Feixe de paralelas

Ao conjunto de três ou mais retas de um plano, paralelas entre si, dá-se o nome de *feixe de paralelas*.

Qualquer reta (t , na figura) que não pertença ao feixe é uma transversal que intercepta todas as retas do feixe (corolário do Postulado de Euclides).

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., determinados sobre a transversal por um feixe de paralelas, gozam de certas propriedades que serão estudadas pelos teoremas que se seguem:

T.1 Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina sobre outra qualquer transversal desse feixe segmentos também congruentes.

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \mid \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Afirmarções

1. $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$; $\overline{NS} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PT} \parallel \overline{CD}$ (... construído)
2. Os quadriláteros $\overline{AMRB}$, $\overline{BNSC}$ e $\overline{CPTD}$ são paralelogramos
3. $\overline{AB} \cong \overline{MR}$, $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ e $\overline{CD} \cong \overline{PT}$
4. $\overline{MR} \cong \overline{NS} \cong \overline{PT}$
5. $\triangle MRN \cong \triangle NSP \cong \triangle PTQ$
6. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$

Justificações

1. Postulado de Euclides
2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. Lados correspondentes de triângulos congruentes

c.q.d.

145

T.2 TEOREMA DE TALES: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c; s \text{ e } t, \text{ transversais} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \in s; \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \in t \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \text{ são proporcionais} \\ \text{ou} \\ \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, então existe um segmento de medida u contido um número p de vezes em $\overline{AB}$ e um número q de vezes em $\overline{BC}$. Vale, pois, a razão:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q} \quad \left(\text{na figura: } \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \right)$$

Traçando-se, pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, as retas paralelas às retas do feixe, elas interceptarão os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ respectivamente em segmentos congruentes entre si (pelo T.1). Nestas

146

condições, existe um segmento de medida v , também contido p vezes em $\overline{MN}$ e q vezes em $\overline{NP}$, isto é, vale a razão:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{p}{q} \quad \left(\text{na figura: } \frac{MN}{NP} = \frac{3}{5} \right)$$

Portanto, as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{MN}{NP}$ são iguais, isto é:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais.

c.q.d.

NOTA: Por escapar ao conteúdo deste livro, será admitido sem prova o caso no qual $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos incommensuráveis.

CONSEQUÊNCIA IMPORTANTE:

Lembrando o estudo das transformações de proporções, você sabe que:

$$\text{se } \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

$$\text{então: } \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

(alternando os meios da primeira proporção)

e também:

$$\text{se } \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

$$\text{então: } \frac{AB+BC}{AB} = \frac{MN+NP}{MN}$$

(a soma dos dois primeiros termos está para ...)

$$\text{ou } \frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN}$$

147

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 49

1. Se $a \parallel b \parallel c$, preencha os claros:

$$1.^{\circ}) \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$2.^{\circ}) \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CE}$$

$$3.^{\circ}) \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{EC}$$

$$4.^{\circ}) \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

2. Se $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{MN}$, preencha os claros:

$$1.^{\circ}) \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{ED}$$

$$2.^{\circ}) \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

$$3.^{\circ}) \frac{DP}{PE} = \frac{EM}{MN}$$

$$4.^{\circ}) \frac{DN}{DF} = \frac{CM}{CF}$$

$$5.^{\circ}) \frac{OC}{ON} = \frac{OD}{DN}$$

$$6.^{\circ}) \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{DN}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 50

Nos diversos feixes de paralelas, calcular o valor de x :

1.º)

$$\text{Temos: } \frac{4}{6} = \frac{5}{x} \text{ (Tales)}$$

$$\text{ou } x = \frac{6 \times 5}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$$

Logo: o valor de x é 7,5

2.º)

$$\text{Temos: } \frac{4}{x} = \frac{6}{8} \text{ (Tales)}$$

$$\text{ou } x = \frac{4 \times 8}{6} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Logo: o valor de x é $5\frac{1}{3}$

3.º)

$$\text{Temos: } \frac{5}{20} = \frac{x}{16} \text{ (Tales)}$$

$$\text{ou } x = \frac{5 \times 16}{20} = 4$$

Logo: o valor de x é 4

148

Figura 147: p. 145 a 148 do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

Com relação aos conteúdos desenvolvidos neste quarto volume, Miorim (2005, p. 15), considera que “os tratamentos dados à semelhança, às relações métricas, aos polígonos regulares e à medida da circunferência, seguem o estilo tradicional, o retorno a Euclides, sem o uso de conjuntos, de transformações geométricas ou de elementos de topologia”.

No entanto, analisando cuidadosamente o livro é possível encontrar o trabalho com as transformações geométricas no item “Similitude Central ou Homotetia”:

Similitude Central ou Homotetia

9. Uma importante transformação para reduzir e ampliar figuras

Você, que já estudou a semelhança entre figuras geométricas planas, vai agora aprender a ampliar ou a reduzir figuras, graças a uma transformação geométrica plana denominada **similitude central** ou **homotetia**.

Um ponto A' de um plano diz-se **transformado homotético** de um ponto A em relação a um centro O e a um número real k se as seguintes condições forem satisfeitas:

- 1.º) o ponto A' pertence à reta $\overleftrightarrow{OA}$
- 2.º) existe um número real k tal que $OA' = |k| \cdot OA$
- 3.º) Se $k > 0$, o ponto O é exterior ao segmento $\overline{AA'}$ e se $k < 0$ o ponto O é interior ao segmento $\overline{AA'}$.

O ponto O é chamado **centro da similitude** ou **centro da homotetia** e o número real k , **coeficiente da similitude** ou **coeficiente da homotetia**. Exemplo:

Logo:

Uma transformação na qual qualquer ponto A de um plano é transformado num ponto A' , homotético de A em relação a um centro O e a um número real k (constante para todos os pontos), é denominada uma **similitude central** ou **homotetia** do plano.

Exemplos:

- 1.º) Se $k = 2$, o transformado homotético do $\triangle ABC$, de centro O , é o $\triangle A'B'C'$ cujos vértices A' , B' e C' pertencem, respectivamente, às semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Então:

$$OA' = 2 \cdot OA$$

$$OB' = 2 \cdot OB$$

$$OC' = 2 \cdot OC$$

NOTA IMPORTANTE

Mais uma estrutura de grupo...

A operação composição de duas transformações homotéticas sucessivas de mesmo centro O e de coeficientes, respectivamente, k_1 e k_2 , é ainda uma transformação homotética de centro O e coeficiente $k = k_1 \cdot k_2$.

Assim, por exemplo: se A' é o transformado de A , de centro O e coeficiente 2, e A'' o transformado de A' , de centro O e coeficiente 3, então A'' é o transformado de A , de centro O e coeficiente 6.

De fato: $OA' = 2 \cdot OA$ e $OA'' = 3 \cdot OA' = 3 \times 2 \cdot OA = 6 \cdot OA$.

Verifique que, para três transformações homotéticas sucessivas, vale a propriedade associativa (A).

Por outro lado, existe a transformação homotética **neutra**, de mesmo centro O e coeficiente $k = 1$, pois neste caso: $OA' = 1 \cdot OA = OA$, e o transformado A' é o próprio A .

Também, para cada transformação homotética, de centro O e coeficiente k (por ex.: 2), existe a transformação homotética **inversa**: é a que possui o mesmo centro O e coeficiente $\frac{1}{k}$ (por ex.: $\frac{1}{2}$).

Logo, o Sistema Matemático constituído:

- f) pelo conjunto de todas as homotetias do plano, de mesmo centro
- l) pela operação composição de duas homotetias consecutivas

possui estrutura de grupo comutativo, porque valem as propriedades:

- Associativa, Existência do elemento neutro, Existência do elemento inverso e a Comutativa (A-N-I-C)

LEMBRETE AMIGO

No curso de Geometria da 3.ª série (ver Apêndice do Volume 3) você estudou as seguintes transformações geométricas:

translação, rotação e simetrias (central e axial)

que transformam polígonos em polígonos congruentes, isto é, transformações que conservam as distâncias.

Agora, você estudou a transformação geométrica:

homotetia (ou similitude central)

que transforma polígonos em polígonos semelhantes, ou seja, transformações que conservam as proporções.

Figura 148: p. 169, final da p. 172 e início da p. 173 do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

O livro apresenta também um apêndice que trabalha “Área de regiões planas” e “Mapas topológicos” que procuram abordar a linguagem da Teoria dos Conjuntos.

O autor não trabalha a representação no decorrer do livro com exceção do item “Relações métricas nos polígonos regulares” onde podemos encontrar citações sobre a construção geométrica desses polígonos:

24. Construção do hexágono regular; cálculo das medidas do lado (l_6) e do apótema (a_6) do hexágono regular inscrito

Para inscrever um hexágono regular na circunferência $C(O, r)$, é preciso dividi-la em seis arcos congruentes. Como o ângulo cêntrico do hexágono regular vale: $w_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, seja $\widehat{AB}$ o arco, de medida 60° , cuja corda $\overline{AB}$ (de medida l_6) é um dos lados desse hexágono.

No $\triangle AOB$, que é isósceles (por quê?), a soma dos outros dois ângulos ($\widehat{OAB}$ e $\widehat{OBA}$) é igual a 120° e, portanto, cada um deles mede 60° . Então, o $\triangle AOB$ é *equiângulo* e também *equilátero*, isto é: $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{AB}$.

Sendo: $OA = OB = r$, segue-se que $AB = r$, ou seja, $l_6 = r$.

210

Logo, a medida do lado do hexágono regular inscrito na $C(O, r)$ é a própria medida do raio da circunferência:

$$l_6 = r$$

A medida do apótema (a_6) é obtida aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMA , onde:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \text{ ou } r^2 = a_6^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2$$

$$\text{Como } l_6 = r, \text{ temos: } r^2 = a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = a_6^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$\text{e, portanto: } a_6^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow a_6 = \frac{\sqrt{3}r}{2}$$

OBSERVAÇÃO: Dividida a circunferência em seis arcos congruentes e traçando-se os diâmetros bisetores dos ângulos formados pelos diâmetros $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, ..., a circunferência resultará dividida em doze arcos congruentes.

Analogamente, dividindo-se a circunferência em $24, 48, 96, \dots, 3 \times 2^n$ ($n \geq 1$) arcos congruentes e unindo-se os pontos de divisão, obtêm-se os respectivos polígonos regulares inscritos.

Figura 149: Final da p. 210 e início da p. 211 do livro de Sangiorgi – volume 4 (1970)

Em nenhum momento o autor utiliza exemplos práticos ou problemas motivadores para desenvolver os conteúdos ou propõe a construção de objetos em sentido físico; também não estabelece relações entre a Geometria e o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, consideramos que, esse volume da coleção *Curso Moderno*, aborda a Geometria trabalhando somente a concepção usando uma linguagem formal.

3.3.4. Quarto período: Pós Matemática Moderna (1980 – 2006)

3.3.4.1. José Ruy Giovanni e Eduardo Parente

Título da obra: *Matemática*

5ª série – 1988

6ª série – 1988

7ª série – 1988

8ª série – 1988

O contexto histórico:

Os livros foram publicados em 1988, portanto no período posterior à Matemática Moderna.

Conforme vimos no Capítulo 2, nessa época ainda estava em vigor no Brasil a Lei nº 5.988 de 14 de dezembro de 1973. Amparando-se nessa Lei, em 1986, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo divulgou a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau.

Essa proposta procurou reformular o currículo até então existente, ou seja, modificar as orientações da Matemática Moderna. No entanto, Imenes (1989), ao se referir aos livros didáticos publicados na década de 1980, afirma que:

Em algumas páginas dos mesmos veêm-se marcas deixadas pela ‘matemática moderna’. [...] pode-se observar uma superposição de épocas, tendências e abordagens. [...] Essa superposição de tendências, descaracterizadas em relação às suas origens, é típica dos livros atuais que parecem ‘colchas de retalhos’. Sem considerar outros agravantes, pode-se afirmar que essa mixórdia é o traço característico da ‘cara’ do ensino de matemática espelhada pela maioria dos textos didáticos publicados hoje no Brasil. [...] vê-se que as propostas do movimento de educação matemática, posteriores à crítica da ‘matemática moderna’, salvo raríssimas exceções, ainda não foram incorporadas por autores e editores, não chegaram às cabeças dos professores de matemática e portanto estão ausentes das salas de aula do país. (p. 156)

A Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau, estabeleceu que, ao longo das oito séries, na medida do possível, os três temas, Números, Geometria e Medidas, deveriam ser tratados simultaneamente. Especificamente para a Geometria, o programa propôs o reconhecimento, a manipulação e a exploração de objetos do mundo físico e a sua caracterização, por meio de propriedades, do encadeamento e relacionamento entre elas, caminhando para uma axiomatização no final do 1º grau, sem, no entanto, haver preocupações sistemáticas com a formalização. O documento também sugeriu o uso da régua e do compasso e de materiais manipuláveis no ensino da Geometria em todas as séries, para poder estudar as propriedades, bem como as relações entre elas. Assim, parece haver uma preocupação em estabelecer articulações entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

Para os demais critérios de análise estabelecidos acima, analisaremos os livros separadamente:

5ª série:

Figura 150: Capa do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelos autores, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	O conjunto de números naturais (IN)	05
Capítulo 2	Sistemas de numeração	20
Capítulo 3	Operações fundamentais com números naturais	37
Capítulo 4	Divisibilidade	92
Capítulo 5	Mínimo múltiplo comum	113
Capítulo 6	Conjunto dos números racionais – Representação na forma fracionária	124
Capítulo 7	Conjunto dos números racionais – Representação na forma decimal (números decimais)	182
Capítulo 8	Introdução à Geometria	210
Capítulo 9	Sistema métrico decimal – Medidas de comprimento	228
Capítulo 10	Sistema métrico decimal – Medidas de superfície	242
Capítulo 11	Sistema métrico decimal – Medidas de volume	267
Capítulo 12	Sistema métrico decimal – Medidas de capacidade	279
Capítulo 13	Sistema métrico decimal – Medidas de massa	283

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos capítulos finais do livro. Nesses capítulos, existem conexões entre a Geometria, a Álgebra e a Aritmética sempre que necessário. Analisando o restante do livro, percebemos que nos capítulos anteriores que tratam de Aritmética e também um pouco de Álgebra, existe uma única conexão com a Geometria.

É importante observar que a Linguagem da Teoria dos Conjuntos permanece, confirmando as declarações de Imenes (1989).

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme dissemos acima, nos capítulos iniciais do livro que abordam a Aritmética e a Álgebra, encontramos apenas uma conexão com a Geometria no capítulo 3 – “Operações fundamentais com números naturais”, no parágrafo 3 – “Multiplicação”, no item “Propriedades estruturais da multiplicação”, onde após o autor expor, por meio de exemplos, as propriedades do fechamento, comutativa, associativa e elemento neutro, apresenta os exemplos seguintes para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

e) **Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.**

Observe o terreno retangular da figura ao lado, onde:
comprimento = 80 metros.
largura = 30 metros.

Para saber quanto de muro devemos construir em todo o contorno do terreno, podemos proceder de duas maneiras diferentes, completando:

- $2 \times (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) = 2 \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
ou
• $(2 \times \dots\dots\dots) + (2 \times \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Agora, usando os sinais = ou ≠, complete:
 $2 \times (80 + 30) \dots\dots\dots (2 \times 80) + (2 \times 30)$

Observe, agora, a figura ao lado. Para contarmos quantos quadrados há no interior da figura, podemos proceder de duas maneiras diferentes:

- $6 \times (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) = 6 \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
ou
• $(6 \times \dots\dots\dots) + (6 \times \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Agora, usando = ou ≠, complete:
 $6 \times (5 + 4) \dots\dots\dots (6 \times 5) + (6 \times 4)$

Então, podemos dizer que:

Para multiplicar um número natural por uma soma, podemos multiplicar o número por cada uma das parcelas e, a seguir, adicionar os resultados obtidos.
Logo, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

58

Figura 151: p. 58 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

Nos capítulos que tratam a Geometria, encontramos articulações com a Aritmética e com a Álgebra nas apresentações do sistema métrico decimal. A título de exemplificação, podemos citar o parágrafo 6 – “Cálculo de áreas”, pertencente ao capítulo 10 – “Sistema métrico decimal – Medidas de superfície”:

6. Cálculo de áreas

Sabemos que nem sempre é possível determinar a área de uma região fechada (por exemplo: terreno, salas, fazendas etc.) contando quantas unidades cabem nessa região.

Na região quadrada da figura ao lado, a área é maior que 4 cm².

A área da região retangular ABCD da figura ao lado é maior que 15 cm².

Por isso, vamos aprender a calcular áreas de figuras geométricas partindo de elementos dessas figuras.

Área de uma região quadrada

Observe as regiões quadradas:

Complete:

a) A área da região quadrada ABCD é cm².

b) Como $4 = 2 \times 2 = 2^2$, a área da região quadrada ABCD é: cm² = cm x cm = cm².

Complete:

a) A área da região quadrada MNPO é cm².

b) Como $9 = 3 \times 3 = 3^2$, a área da região quadrada MNPO é: cm² = cm x cm = cm².

A área de uma região quadrada cujo lado mede l unidades de comprimento é dada por:

$$S = l \times l = l^2$$

Figura 152: p. 253 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

Desenvolvimento do conteúdo:

Para a apresentação dos conteúdos geométricos, esse livro segue o modelo: conceitos – exemplos – exercícios de aprendizagem e exercícios de fixação.

De modo geral, os assuntos são desenvolvidos por meio de situações-problema onde os alunos são incentivados a chegar à construção dos conceitos. A título de ilustração, podemos citar o capítulo 9 – “Sistema métrico decimal – Medidas de comprimento”:

Figura 153: p. 228 e 229 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

Os exercícios de aprendizagem estão dispostos logo após a apresentação da parte teórica e, no suplemento para o professor, o autor sugere que, esses exercícios, devem ser feitos no próprio livro e em sala de aula, orientados pelo professor. Os objetivos desses exercícios é verificar, numa primeira sondagem, se o texto foi compreendido pelo aluno.

Os exercícios de fixação são encontrados no final de cada unidade e objetivam fixar os assuntos abordados.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro:

Introdução à Geometria

1. Ponto, reta e plano

Observando o mundo em que vivemos, certas idéias surgem de modo intuitivo.

A ponta de um lápis, uma marca no quadro negro, a localização de uma cidade no mapa nos dá a idéia de **ponto** em Geometria; o ponto não tem dimensões e é, normalmente, indicado por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Representação:

A aresta de uma régua, um fio esticado por duas pessoas, a linha divisória de um campo de futebol sugerem a idéia de **reta** em Geometria; a reta é imaginada sem espessura, sem começo e sem fim, ilimitada nos dois sentidos.

Normalmente, as retas são indicadas por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Representação:

A reta é um conjunto cujos elementos são pontos; dizemos, então, que uma reta tem infinitos pontos.

Na figura ao lado, os pontos A e B estão sobre a reta, ou seja, $A \in r$ e $B \in r$.

210

Qualquer superfície como a parede de uma sala, um pedaço de madeira compensada, um campo de futebol sugerem a idéia de **plano** em Geometria; o plano é imaginado sem fronteiras, ilimitado em todas as direções.

Usualmente, os planos são indicados por letras do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama).

Representação:

O plano é um conjunto cujos elementos são pontos; dizemos, então, que um plano tem infinitos pontos.

Na figura ao lado, o ponto A pertence ao plano α ($A \in \alpha$) e a reta r está contida no plano α ($r \subset \alpha$).

O ponto, a reta e o plano são noções intuitivas, ou seja, são modelos criados por nossa imaginação e que são usados justamente para podermos compreender melhor certos aspectos do mundo em que vivemos.

Exercícios de aprendizagem

- Observando a sua sala de aula, reconheça nela algo que sugira:
 - um ponto
 - uma reta
 - um plano
- Utilizando **ponto, reta e plano**, indique a idéia que sugere:
 - a porta de uma geladeira. (..... plano)
 - a linha lateral de um campo de basquete. (..... reta)
 - um furo de agulha numa folha de papel. (..... ponto)
 - uma mesa de pingue-pongue. (..... plano)
 - uma estrela no céu. (..... ponto)
 - o encontro de duas paredes de uma sala. (..... reta)
 - a marca do centro de um campo de futebol. (..... ponto)
 - os fios de força, esticados entre dois postes na rua. (..... reta)
 - o assento de uma cadeira. (..... plano)

211

2. A reta

Noções intuitivas

Usando uma régua, desenhe:

- retas que passam pelo ponto A dado.
- retas que passam pelos pontos A e B dados.

Pelos desenhos feitos, você deve notar que:

- por um ponto A qualquer de um plano (no caso, a folha do seu livro) passam infinitas retas.
- por dois pontos A e B distintos de um plano (a folha do livro) passa uma e uma só reta.

Posições de uma reta em relação a um plano

A figura ao lado nos mostra um campo de vôleibol, onde:

- cada vara lateral sugere a idéia de **reta**.
- cada faixa da rede sugere a idéia de **reta**.
- o campo sugere a idéia de **plano**.

Em relação ao campo (plano α), a vara lateral (reta r) ocupa a posição vertical.
Em relação ao campo (plano α), a faixa da rede (reta s) ocupa a posição horizontal.

A figura ao lado nos mostra um banquinho com três pés, assentado sobre o piso, e:

- o piso sugere a idéia de **plano**.
- cada pé do banquinho sugere a idéia de **reta**.

Em relação ao piso (plano α), cada pé do banquinho (reta r) ocupa a posição inclinada.

212

Figura 154: p. 210 a 212 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

Podemos perceber nesse exemplo, que a Geometria é desenvolvida nesse livro, com ênfase na percepção, com um estudo intuitivo. Essa característica se estende por todos os capítulos.

Com relação à representação, encontramos apenas dois exemplos referindo-se ao uso do compasso. O primeiro deles encontra-se no capítulo 8 – “Introdução à Geometria”, no item “Medida de um segmento”, que faz parte do parágrafo 2 – “A reta”:

Medida de um segmento

Observe os segmentos seguintes:

Use um compasso e complete as seguintes afirmações:

- O segmento CD “cabe” 4 vezes no segmento AB.
- O segmento MN “cabe” 6 vezes no segmento AB.
- O segmento PQ “cabe” 8 vezes no segmento AB.

216

Com isto você comparou o segmento AB com o segmento CD, com o segmento MN e com o segmento PQ, obtendo em cada comparação um número, ou seja, você está medindo o segmento AB.

A medida de um segmento é um número que obtemos quando comparamos o segmento com outro segmento, tomado como unidade de referência.

Assim, de acordo com as respostas dadas para a situação-problema inicial, podemos dizer que:

- A medida do segmento AB é 4 , quando tomamos como unidade de referência o segmento CD.
- A medida do segmento AB é 6 , quando tomamos como unidade de referência o segmento MN.
- A medida do segmento AB é 8 , quando tomamos como unidade de referência o segmento PQ.

Figura 155: Final da p. 216 e início da p. 217 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

A segunda referência ao uso do compasso localiza-se no parágrafo 6 – “A circunferência” do capítulo 9 – “Sistema métrico decimal – Medidas de comprimento”:

6. A circunferência

Com um compasso, pode-se facilmente construir uma circunferência de centro O e raio OA (é um segmento).

Observamos que todos os pontos da circunferência estão a uma mesma distância do centro O.

Numa circunferência, vamos destacar dois elementos: o raio, cuja medida vamos indicar por r , e o diâmetro, cuja medida vamos indicar por D .

Pela figura ao lado, você observa que:

Medida do diâmetro = $2 \times$ medida do raio

ou

$$D = 2 \times r$$

Exercícios de aprendizagem

- Calcule o diâmetro de uma circunferência cujo raio mede:
 - 8,4 cm
 $D = 2 \times r = 2 \times 8,4 \text{ cm} = 16,8 \text{ cm}$
 - 0,35 m
 $D = 2 \times r = 2 \times 0,35 \text{ m} = 0,70 \text{ m}$
 - 12,65 m
 $D = 2 \times r = 25,30 \text{ m}$
- Calcule a medida do raio de uma circunferência cujo diâmetro mede:
 - 120 cm
 $r = D : 2 = 120 \text{ cm} : 2 = 60 \text{ cm}$
 - 410 mm
 $r = D : 2 = 410 \text{ mm} : 2 = 205 \text{ mm}$
 - 9 m
 $r = D : 2 = 9 \text{ m} : 2 = 4,5 \text{ m}$

Figura 156: Início da p. 239 do livro de Giovanni e Parente – 5ª série (1988)

Em nenhum momento o autor propõe a construção de materiais manipuláveis. Concluímos que esse livro trabalha a Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção feita de forma informal.

6ª série:

Figura 157: Capa do livro de Giovanni e Parente – 6ª série (1988)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Potenciação e radiciação	05
Capítulo 2	O conjunto dos números inteiros	14
Capítulo 3	O conjunto dos números racionais	41
Capítulo 4	Equações	58
Capítulo 5	Resolução de problemas do 1º grau a uma variável	75
Capítulo 6	Inequação do 1º grau a uma variável	83
Capítulo 7	Equações do 1º grau a duas variáveis	89
Capítulo 8	Sistemas de equações do 1º grau a duas variáveis	95
Capítulo 9	Razões e proporções	99
Capítulo 10	Números proporcionais – Regra de três	114
Capítulo 11	Porcentagem	133
Capítulo 12	Juro simples	142
Capítulo 13	Ângulos	149
Capítulo 14	Triângulos e quadriláteros	181

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos dois últimos capítulos do livro. Nesses capítulos, existem conexões entre a Geometria, a Álgebra e a Aritmética. Porém, no restante do livro, que aborda a Aritmética e a Álgebra não existem conexões com a Geometria, o que nos mostra que os autores não seguiram, no livro todo, as sugestões da Proposta Curricular no que diz respeito a trabalhar os três temas, Números, Geometria e Medidas, simultaneamente.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observado acima, nos capítulos 13 e 14 que tratam de Geometria, é possível encontrar ligações com a Aritmética e com a Álgebra. Como exemplo, podemos citar o parágrafo 3 – “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo”, do capítulo 14 – “Triângulos e quadriláteros”, na apresentação de alguns exemplos e exercícios de aplicações dessa propriedade:

1º exemplo: Na figura abaixo temos: $\text{med}(\hat{a}) = 80^\circ$, $\text{med}(\hat{b}) = 40^\circ$ e $\text{med}(\hat{c}) = x$. Calcular o valor de x .

Aplicando a propriedade dada:

$$\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180^\circ$$

$$80^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$$

$$120^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 120^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

2º exemplo: As medidas dos ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais aos números 3, 6 e 9. Calcular essas medidas.

Vamos chamar de x , y e z as medidas procuradas. Daí:

$$\begin{cases} x + y + z = 180^\circ \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} \end{cases} \rightarrow \text{propriedade das sucessões diretamente proporcionais}$$

Então: $\frac{x+y+z}{3+6+9} = \frac{x}{3}$; $\frac{x+y+z}{3+6+9} = \frac{y}{6}$; $\frac{x+y+z}{3+6+9} = \frac{z}{9}$

$$\frac{180}{18} = \frac{x}{3} \Rightarrow 10 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 30 \text{ graus, alguma medida de um ângulo}$$

$$\frac{180}{18} = \frac{y}{6} \Rightarrow 10 = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 60 \text{ graus, alguma medida de um ângulo}$$

$$\frac{180}{18} = \frac{z}{9} \Rightarrow 10 = \frac{z}{9} \Rightarrow z = 90$$

Resposta: As medidas procuradas são 30° , 60° e 90° .

Exercícios de aprendizagem

1. Calcule em cada item o valor de x :

a)

$$x + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 110^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$

b)

$$x + 50^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$$

c)

$$x + 2x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{5} \Rightarrow x = 36^\circ$$

d)

$$x + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{6} \Rightarrow x = 30^\circ$$

2. Resolva os seguintes problemas:

a) Num triângulo ABC, as medidas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são indicadas por x , $2x$ e $3x$, respectivamente. Determine as medidas desses ângulos.

$$x + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

$$\text{med}(\hat{a}) = x \Rightarrow \text{med}(\hat{a}) = 30^\circ$$

$$\text{med}(\hat{b}) = 2x \Rightarrow \text{med}(\hat{b}) = 60^\circ$$

$$\text{med}(\hat{c}) = 3x \Rightarrow \text{med}(\hat{c}) = 90^\circ$$

Figura 158: Final da p. 184 e p. 185 do livro de Giovanni e Parente – 6ª série (1988)

Desenvolvimento do conteúdo:

Analogamente ao livro da 5ª série, para a apresentação dos conteúdos geométricos, esse livro segue o modelo: conceitos – exemplos – exercícios de aprendizagem e exercícios de fixação. Os assuntos continuam sendo desenvolvidos intuitivamente, por meio de situações-problema, tentando fazer com que os alunos cheguem à construção dos conceitos naturalmente.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro:

13 Ângulos

1. A idéia de ângulo

Uma das idéias mais importantes em Geometria é a idéia de **ângulo**, que pode ser sugerida pelas figuras:

- Uma placa indicativa na estrada
- Uma janela basculante
- Um calendário de mesa

Modelo matemático

O modelo matemático das figuras sugere duas semi-retas com a mesma origem e que não estão numa mesma reta.

149

Exercícios de aprendizagem

Em cada desenho, assinale duas figuras que sugerem ângulos:

2. Definições

Denomina-se **ângulo** a figura geométrica constituída por duas semi-retas que têm a mesma origem e não são coincidentes.

<p>Na figura, temos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O ponto B, origem das semi-retas, é chamado vértice do ângulo. • As semi-retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são denominadas lados do ângulo. • Indica-se: $\widehat{ABC}$ ou $\angle ABC$ 	<p>Na figura, temos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O ponto O, origem das semi-retas, é chamado vértice do ângulo. • As semi-retas $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ são denominadas lados do ângulo. • Indica-se: $\widehat{MON}$ ou $\angle MON$ 	<p>Na figura, temos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O ponto E, origem das semi-retas, é chamado vértice do ângulo. • As semi-retas $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$ são denominadas lados do ângulo. • Indica-se: $\widehat{DEF}$ ou $\angle DEF$
---	---	---

150

Quando os lados do ângulo são representados por semi-retas opostas, o ângulo é chamado **ângulo raso** ou de **meia-volta** (figura ao lado).

3. Medida de ângulos

Assim como fizemos para medir segmentos de reta, regiões planas fechadas e sólidos, também devemos considerar uma unidade de referência para medir ângulos.

Observe as figuras:

Complete corretamente:

- Considerando o ângulo $\widehat{MON}$ como unidade de referência, vemos que ele cabe 6 vezes no ângulo $\widehat{ABC}$.
- A medida do ângulo $\widehat{ABC}$ é 6 , quando tomamos como unidade de referência o ângulo $\widehat{MON}$

Exercícios de aprendizagem

Utilizando a unidade de ângulo u como unidade de referência, complete as afirmações:

151

Figura 159: p. 149 a 151 do livro de Giovanni e Parente – 6ª série (1988)

No capítulo 13 – “Ângulos”, há propostas do uso da régua, compasso, transferidor e esquadros, o que nos mostra que este livro trabalha a representação. A título de exemplificação vamos citar o parágrafo 6 – “Bissetriz de um ângulo”:

6. Bissetriz de um ângulo

Observe a figura seguinte:

Responda:

- a) Os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBD}$ são adjacentes?
 b) Os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBD}$ são congruentes?
 Se dois ângulos adjacentes são congruentes, o lado comum denomina-se **bissetriz** do ângulo formado pelos lados não comuns.

Nesse caso, de acordo com a figura, complete:

A semi-reta é a bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$.
 É intuitivo que todo ângulo possui uma única bissetriz.

Construção da bissetriz de um ângulo

Consideremos o ângulo de vértice no ponto V:

1. Com centro de compasso no vértice V e com uma abertura qualquer, traçamos um arco que intercepta os lados do ângulo nos pontos A e B.

2. Com centro de compasso no ponto A e abertura conveniente, traçamos um arco; com centro no ponto B e mesma abertura, traçamos um outro arco que corta o primeiro no ponto C.

3. Traçando a semi-reta $\overrightarrow{VC}$, obtemos dois ângulos $\widehat{AVC}$ e $\widehat{BVC}$, que são adjacentes e congruentes.
 Logo, $\overrightarrow{VC}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AVB}$.

165

Exercícios de aprendizagem

1. Trace a bissetriz dos seguintes ângulos:

2. Usando um transferidor, complete corretamente:

- a) $\text{med}(\widehat{AOB}) = \dots\dots\dots$
 b) $\text{med}(\widehat{BOC}) = \dots\dots\dots$
 c) Os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$ são
 d) A semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é do ângulo $\widehat{AOC}$.

3. Na figura seguinte, $\overrightarrow{OX}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$, e $\overrightarrow{OY}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{BOC}$. Observando a figura, complete:

- a) $\text{med}(\widehat{XOB}) = \dots\dots\dots$
 b) $\text{med}(\widehat{AOB}) = \dots\dots\dots$
 c) $\text{med}(\widehat{YOC}) = \dots\dots\dots$
 d) $\text{med}(\widehat{BOC}) = \dots\dots\dots$
 e) $\text{med}(\widehat{XOY}) = \dots\dots\dots$
 f) $\text{med}(\widehat{AOC}) = \dots\dots\dots$
 g) $\widehat{AOB}$ é congruente com $\dots\dots\dots$

4. Na figura seguinte, $\overrightarrow{VT}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AVB}$. Determine, em graus, as medidas x e y:

$$x = 75^\circ$$

$$y = 75^\circ + 75^\circ = 150^\circ$$

166

Figura 160: p. 165 e 166 do livro de Giovanni e Parente – 6ª série (1988)

Com relação à construção de objetos que podem ser manipulados, encontramos dois exemplos no capítulo 14 – “Triângulos e quadriláteros”:

3. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Muitas vezes, certas propriedades importantes da Matemática podem ser verificadas através de processos muito simples. Veja.

Tome uma folha de papel, um lápis, uma régua e uma tesoura, e faça conosco a seguinte experiência:

1. Desenhe um triângulo qualquer (não precisa ser igual ao nosso):

2. Com a ajuda da tesoura, separe o triângulo em 3 partes (cada uma contendo um dos ângulos do triângulo):

3. Junte os três ângulos do triângulo conforme a figura abaixo:

Observe, então que, tanto na figura que você montou quanto na nossa, $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180^\circ$.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

5. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero

Para obter a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero (convexo), vamos considerar um procedimento semelhante ao que fizemos no caso dos triângulos.

Tome uma folha de papel, um lápis, uma régua e uma tesoura e faça conosco a seguinte experiência:

1. Desenhe um quadrilátero (convexo) qualquer (não precisa ser igual ao nosso):

2. Com a ajuda da tesoura, separe o quadrilátero em quatro partes (cada uma contendo um dos ângulos do quadrilátero):

3. Junte os quatro ângulos do quadrilátero conforme a figura abaixo.

Observe, então, que, tanto na figura que você montou quanto na nossa, $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) + \text{med}(\hat{d}) = 360^\circ$.

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

Figura 161: Início da p. 184 e da p. 189 do livro de Giovanni e Parente – 6ª série (1988)

Concluímos que esse livro trabalha a Geometria articulando a percepção, a representação, a construção e a concepção feita também de forma informal.

7ª série:

Figura 162: Capa do livro de Giovanni e Parente – 7ª série (1988)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	O conjunto dos números reais (IR)	05
Capítulo 2	Expressões algébricas	14
Capítulo 3	Polinômios	26
Capítulo 4	Produtos notáveis	54
Capítulo 5	Fatoração	65
Capítulo 6	Frações algébricas	84
Capítulo 7	Equações do 1º grau	104
Capítulo 8	Sistemas de equações do 1º grau	118
Capítulo 9	Introdução à Geometria	136
Capítulo 10	Ângulos	145
Capítulo 11	Triângulos	169
Capítulo 12	Polígonos	193
Capítulo 13	Quadriláteros	200

Capítulo 14	Circunferência e círculo	218
Capítulo 15	Arcos e ângulos	227

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria constitui um único bloco, separado nos capítulos finais do livro. Nesses capítulos, o autor trabalha a Geometria fazendo articulações com a Álgebra e com a Aritmética constantemente. Da mesma forma que no livro da 6ª série, nos demais capítulos, que abordam a Aritmética e a Álgebra não existe nenhuma conexão com a Geometria.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observamos, nos capítulos que abordam a Geometria, existem diversas ligações com a Aritmética e com a Álgebra. Como exemplo, podemos citar o item “Ângulos complementares e ângulos suplementares”, que se encontra no parágrafo 2 – “Medida de ângulos”, do capítulo 10 – “Ângulos”:

■ Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são chamados **complementares** quando a soma de suas medidas é 90° . Nesse caso, dizemos que um ângulo é o **complemento** do outro.

Exemplo: Os ângulos representados ao lado são complementares, pois:

$$\text{med } (\widehat{ABC}) + \text{med } (\widehat{DEF}) = 90^\circ$$

$\widehat{ABC}$ é o complemento de $\widehat{DEF}$.
 $\widehat{DEF}$ é o complemento de $\widehat{ABC}$.

Dois ângulos são chamados **suplementares** quando a soma de suas medidas é 180° . Nesse caso, dizemos que um ângulo é o **suplemento** do outro.

Exemplo: Os ângulos representados ao lado são suplementares, pois:

$$\text{med } (\widehat{GHI}) + \text{med } (\widehat{JKL}) = 180^\circ$$

$\widehat{GHI}$ é o suplemento de $\widehat{JKL}$.
 $\widehat{JKL}$ é o suplemento de $\widehat{GHI}$.

Observe, agora, outros exemplos envolvendo ângulos complementares e suplementares.

1.º exemplo: Calcular a medida do complemento e a medida do suplemento de um ângulo cuja medida é 38° .

Vamos chamar de: x a medida do ângulo dado.
 y a medida do seu complemento.
 z a medida do seu suplemento.

$$\text{Então: } x + y = 90^\circ \Rightarrow 38^\circ + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - 38^\circ \Rightarrow y = 52^\circ$$

$$x + z = 180^\circ \Rightarrow 38^\circ + z = 180^\circ \Rightarrow z = 180^\circ - 38^\circ \Rightarrow z = 142^\circ$$

2.º exemplo: Determinar o ângulo cuja medida é igual ao dobro do complemento. Chamando o ângulo de x , o seu complemento será $90^\circ - x$. Dai:

$$x = 2(90^\circ - x) \Rightarrow x = 180^\circ - 2x \Rightarrow$$

$$x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

3.º exemplo: Determinar a medida de um ângulo que excede a medida do seu suplemento em 30° .

Chamando de x o ângulo procurado, o seu suplemento será $180^\circ - x$.

$$\text{Dai: } x - (180^\circ - x) = 30^\circ \Rightarrow x - 180^\circ + x = 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 30^\circ + 180^\circ \Rightarrow 2x = 210^\circ \Rightarrow x = \frac{210^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow x = 105^\circ$$

4.º exemplo: Dois ângulos são complementares. A medida do maior é igual aos $\frac{5}{4}$ da medida do menor. Determinar as medidas dos dois ângulos.

Chamando de x e y as medidas procuradas, temos:

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x = \frac{5}{4}y \end{cases}$$

$$x = \frac{5}{4}y$$

Resolvendo o problema:

$$\frac{5}{4}y + y = 90^\circ \Rightarrow 5y + 4y = 360^\circ \Rightarrow 9y = 360^\circ \Rightarrow y = 40^\circ$$

$$x + y = 90^\circ \Rightarrow x + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

Resposta: Os ângulos medem 50° e 40° .

Exercícios de aprendizagem

1. Escreva nos parênteses S, caso os ângulos sejam suplementares, C, caso sejam complementares, e N caso não sejam nem suplementares nem complementares:

a) 10° e 80° (C)	b) 30° e 80° (N)
c) 20° e 150° (N)	d) 35° e 145° (S)
e) 36° e 54° (C)	f) 27° e 153° (S)

2. Dê as medidas do complemento e do suplemento de cada ângulo:

a) 15° 75° e 165°
b) 50° 40° e 130°
c) 63° 27° e 117°

3. Resolva os problemas:

- a) Calcule o ângulo cuja medida é igual ao dobro da medida do seu suplemento.
 $x = 2(180^\circ - x) \Rightarrow x = 360^\circ - 2x \Rightarrow 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$
- b) Calcule o ângulo cuja medida excede a medida do seu complemento em 20° .
 $x = (90^\circ - x) + 20^\circ \Rightarrow x - 90^\circ + x = 20^\circ \Rightarrow 2x = 110^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$

Figura 163: p. 152 e 153 do livro de Giovanni e Parente – 7ª série (1988)

Desenvolvimento do conteúdo:

Analogamente aos dois livros da mesma coleção anteriormente analisados, para a apresentação dos conteúdos geométricos, esse livro segue o modelo: conceitos – exemplos – exercícios de aprendizagem e exercícios de fixação. De modo geral, os assuntos continuam sendo desenvolvidos intuitivamente; no entanto, é possível encontrar algumas demonstrações de certos resultados.

Em todos os capítulos, os autores procuraram retomar os conceitos vistos nos livros das séries anteriores, para em seguida aprofundar esses conceitos. Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro:

Figura 164: p. 136 e 137 do livro de Giovanni e Parente – 7ª série (1988)

No capítulo 10 – “Ângulos”, os autores começam a trabalhar um pouco da Geometria Dedutiva, fazendo demonstrações de alguns resultados. A título de ilustração podemos citar o parágrafo 3 – “Ângulos formados por retas”:

3. Ângulos formados por retas

■ Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas distintas de um mesmo plano podem ocupar as seguintes posições relativas:

I – As retas têm um único ponto em comum

Nesse caso, as retas são chamadas **concorrentes**.

Os quatro ângulos formados por duas retas concorrentes são congruentes (cada um deles medindo 90°) e as retas são chamadas **perpendiculares**.

Indica-se: $r \perp s$

II – As retas não têm nenhum ponto em comum

Nesse caso, dizemos que as retas são **paralelas**.

Observação:

No caso de duas retas terem todos os pontos em comum podemos considerar as retas coincidentes.

Indica-se: $r \parallel s$

■ Ângulos formados por retas concorrentes

Na figura abaixo, observe que duas retas r e s concorrentes determinam quatro ângulos não rasos.

$\hat{A}OB$, $\hat{B}OC$, $\hat{C}OD$ e $\hat{D}OA$

Os pares de ângulos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}OB \text{ e } \hat{C}OD \\ \text{ou} \\ \hat{C}OB \text{ e } \hat{D}OA \end{array} \right\}$ são chamados **ângulos opostos pelo vértice**.

Indicaremos ângulos opostos pelo vértice por **opv**.

Observe na figura anterior que, se dois ângulos são opv, então os lados de um são semi-retas opostas dos lados do outro.

156

■ Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Essa propriedade pode ser demonstrada, isto é, comprovada matematicamente. Veja:

Sejam $\hat{A}OB$ e $\hat{D}OC$ dois ângulos opv.

Na figura, observe que: $\left\{ \begin{array}{l} \text{med}(\hat{A}OB) = a \\ \text{med}(\hat{B}OC) = c \\ \text{med}(\hat{C}OD) = b \end{array} \right.$

$\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são suplementares $\Rightarrow a + c = 180^\circ$

$\hat{D}OC$ e $\hat{C}OD$ são suplementares $\Rightarrow b + c = 180^\circ$

Resolvendo o problema formado pelas equações obtidas:

$$\begin{cases} a + c = 180^\circ \Rightarrow a = 180^\circ - c \\ b + c = 180^\circ \Rightarrow b = 180^\circ - c \end{cases} \text{ Dai: } a = b$$

Logo, $\hat{A}OB$ e $\hat{D}OC$ são congruentes.

Segundo a mesma linha de raciocínio, podemos provar também que $\hat{C}OB \cong \hat{D}OA$.

Observação:

Quando uma propriedade pode ser demonstrada ela recebe o nome de **teorema**. Assim, a propriedade que acabamos de ver é um teorema.

1.º exemplo: Determinar o valor de x indicado na figura.

Os ângulos de medidas x e 26° são opv.

Dai: $x = 26^\circ$

2.º exemplo: Determinar os valores de x e y indicados na figura:

Os ângulos de medidas x e 115° são opv.

Dai: $x = 115^\circ$

Os ângulos de medidas y e 115° são suplementares.

Dai: $y + 115^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 115^\circ$
 $\Rightarrow y = 65^\circ$

3.º exemplo: Provar o seguinte teorema: "Se duas retas são perpendiculares, então os quatro ângulos que elas determinam são retos."

Da definição de retas perpendiculares sabemos que um dos ângulos por elas formado é reto.

Suponhamos, então, $\hat{A}OB$ reto, isto é, $x = 90^\circ$.

Como $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ são opv: $x = z \Rightarrow z = 90^\circ$.

Como $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OB$ são suplementares $\Rightarrow x + y = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 90^\circ$.

Como $\hat{A}OB$ e $\hat{A}OD$ são suplementares $\Rightarrow x + t = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + t = 180^\circ \Rightarrow t = 90^\circ$.

Assim: $x = y = z = t = 90^\circ$.

157

Figura 165: p. 156, 157 e início da p. 158 do livro de Giovanni e Parente – 7ª série (1988)

Em nenhum momento os autores estimulam a representação, nem sugerem a construção de objetos que possam ser manipulados. Também não há relações da Geometria com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, consideramos que, esse livro, aborda a Geometria articulando somente a percepção e a concepção de forma mais formal.

8ª série:

Figura 166: Capa do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelos autores, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Potenciação	05
Capítulo 2	Cálculo com radicais	16
Capítulo 3	Equações do 2º grau	56
Capítulo 4	Função polinomial do 1º grau	111
Capítulo 5	Função polinomial do 2º grau (ou função quadrática)	128
Capítulo 6	Segmentos proporcionais – Semelhança	152
Capítulo 7	O triângulo retângulo	177
Capítulo 8	O triângulo qualquer	195
Capítulo 9	A circunferência	205
Capítulo 10	Áreas das figuras geométricas planas	228

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria está concentrada nos capítulos finais do livro. Os capítulos iniciais tratam do estudo da Aritmética e da Álgebra, onde é possível encontrar algumas conexões com a Geometria. Já nos capítulos que abordam a Geometria, os autores fazem muitas conexões com a Álgebra e com a Aritmética.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

No capítulo 3 – “Equações do segundo grau”, o parágrafo 8 corresponde ao estudo das “Aplicações da resolução de equações do 2º grau”, onde entre os quatro exemplos apresentados, o terceiro se refere à Geometria:

3.º exemplo: As dimensões de um terreno retangular são expressas, em metros, por x e $x + 3$, respectivamente. A área do terreno é de 460m^2 . Quais são as dimensões do terreno?

Resolução:

Comprimento = $x + 3$
Largura = x

Equação do problema: $(x + 3)x = 460$.

$$(x + 3)x = 460 \Rightarrow x^2 + 3x = 460 \Rightarrow x^2 + 3x - 460 = 0$$

$$x^2 + 3x - 460 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -460 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(-460) = 9 + 1840 = 1849$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{1849}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 43}{2} \quad \begin{cases} x' = \frac{-3 + 43}{2} = \frac{40}{2} = 20 \\ x'' = \frac{-3 - 43}{2} = \frac{-46}{2} = -23 \end{cases}$$

Como o valor $x = -23$ não serve, pois uma medida não pode ser negativa, temos:
 $x = 20$, então, $x + 3 = 20 + 3 = 23$

Resposta: As dimensões do terreno são 20m e 23m.

Figura 167: Final da p. 82 e início da p. 83 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

Nos exercícios de aprendizagem e de fixação do mesmo parágrafo também existem alguns que envolvem conceitos geométricos:

c) Pela Geometria, sabemos que o número d de diagonais de um polígono de n lados é calculado pela fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Calcule o número n de lados de um polígono que tem 5 diagonais.

Resolução:

Equação do problema: $5 = \frac{n(n-3)}{2}$

$$5 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = 5 \Rightarrow \frac{n^2 - 3n}{2} = 5 \Rightarrow \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-10) = 9 + 40 = 49$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{3 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} n' = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ n'' = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ (não serve, no caso)} \end{cases}$$

Resposta: O polígono tem ...5... lados.

d) Um quadrado de lado x tem a mesma área que um triângulo de base $(x + 2)$ e altura x . Calcule a medida x do lado do quadrado.

Resolução:

Área do quadrado = (medida do lado)² = x^2

Área do triângulo = $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(x + 2) \cdot x}{2}$

Equação do problema: $x^2 = \frac{(x + 2) \cdot x}{2}$

$$x^2 = \frac{x^2 + 2x}{2} \Rightarrow \frac{2x^2}{2} - \frac{x^2 + 2x}{2} \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(0) = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x' = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Resposta: O lado do quadrado mede ...2...

Figura 168: Trechos das p. 84 e 85 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

Uma última conexão com a Geometria é encontrada no capítulo 4 – “Função polinomial do 1º grau”, na introdução do parágrafo 4 – “Função linear”:

Notamos, então, que a medida y do perímetro depende da medida x do lado do quadrado, o que pode ser verificado pela tabela seguinte:

Medida do lado (x)	Medida do perímetro (y)
0,5	$4 \cdot (0,5) = 2$
1	$4 \cdot (1) = 4$
1,6	$4 \cdot (1,6) = 6,4$
2	$4 \cdot (2) = 8$
2,5	$4 \cdot (2,5) = 10$
3	$4 \cdot (3) = 12$
.....	

Pela tabela, você nota que:

- a todos os valores de x estão associados valores de y .
- a cada valor de x está associado um único valor de y .

Dizemos, então, que:

a) A medida y do perímetro de um quadrado é dada **em função** da medida x do lado.
b) A relação $y = 4x$ chama-se **fórmula matemática** dessa função.

4. Função linear

■ Introdução

Consideremos um quadrado cujo lado mede x .

Representando por y a medida do perímetro desse quadrado, podemos estabelecer entre y e x a seguinte relação expressa pela fórmula matemática ao lado:

$y = 4x$

■ Definição

Denomina-se **função linear** a função definida por $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e válida para todo x real.

Exemplos:

$y = 4x$
 $y = -2x$

$y = \frac{1}{3}x$
 $y = \sqrt{3}x$

Figura 169: Final da p. 115 e início da p. 116 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

Nos capítulos finais que abordam a Geometria há conexões com a Álgebra e com a Aritmética na teoria, nos exemplos e nos exercícios. Podemos citar um exemplo no parágrafo 1 – “Relações métricas no triângulo retângulo”, do capítulo 7 – “O triângulo retângulo”:

A partir das semelhanças apresentadas, podemos obter as chamadas **relações métricas no triângulo retângulo**:

1.ª relação:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

2.ª relação:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc$$

Num triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela é igual ao produto das medidas dos catetos.

3.ª relação:

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

4.ª relação: Teorema de Pitágoras

Da 1.ª relação, sabemos que:

$$b^2 = an \text{ e } c^2 = am$$

Adicionando membro a membro as igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

178

Vejamos, agora, algumas aplicações das relações métricas na resolução de triângulos retângulos:

1.º exemplo: Calcular a altura h do triângulo ao lado.

Inicialmente, vamos calcular a hipotenusa, usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{100} \Rightarrow a = 10$$

Agora, vamos calcular a altura h , usando a 2.ª relação:

$$bc = ah \Rightarrow 6 \cdot 8 = 10 \cdot h \Rightarrow$$

$$h = \frac{6 \cdot 8}{10} \Rightarrow h = 4,8$$

2.º exemplo: Calcular os valores indicados na figura ao lado.

Inicialmente, observemos que $a = 3 + 6 \Rightarrow a = 9$

Usando a 1.ª relação:

$$b^2 = an \Rightarrow b^2 = 9 \cdot 3 \Rightarrow b^2 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

$$c^2 = am \Rightarrow c^2 = 9 \cdot 6 \Rightarrow c^2 = 54 \Rightarrow c = 3\sqrt{6}$$

Usando a 3.ª relação:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 3 \cdot 6 \Rightarrow h^2 = 18 \Rightarrow h = 3\sqrt{2}$$

Exercícios de aprendizagem

1. Observe a figura e complete os espaços de acordo com as relações métricas:

a) $r^2 = \dots \cdot p$ b) $s^2 = \dots \cdot u$

c) $t \cdot \dots = u \cdot \dots$ d) $t^2 = p \cdot \dots$

e) $u^2 = \dots + s^2$

2. Aplicando o teorema de Pitágoras, calcule a medida x nos seguintes triângulos retângulos:

$$x^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 45 \Rightarrow x = 3\sqrt{5}$$

$$5^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$(x+3)^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (não convém)} \text{ ou } x = 3$$

179

Figura 170: p. 178 e 179 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro continua a trabalhar o mesmo modelo para a apresentação dos conteúdos dos livros anteriores: conceitos – exemplos – exercícios de aprendizagem e exercícios de fixação. No entanto, os autores não trabalham com a percepção, ou seja, em nenhum momento são considerados os aspectos visuais e intuitivos para chegar à construção de algum conceito. Analogamente ao livro da 7ª série, aqui também encontramos demonstrações de alguns resultados.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro:

Segmentos proporcionais — Semelhança

1. Medida de segmentos

Já sabemos que medir um segmento significa compará-lo a outro segmento escolhido como referência.

Indicamos: $\overline{AB}$ = segmento $\overline{AB}$ $\overline{AB}$ = medida do segmento $\overline{AB}$

Exemplo: Usando o $\overline{1cm}$ como referência, na figura seguinte, temos:

$\overline{AB} = 2cm$
 $\overline{BC} = 4cm$
 $\overline{AC} = 6cm$

2. Razão de segmentos — Segmentos proporcionais

Razão entre dois segmentos é a razão entre as medidas desses segmentos, tomadas na mesma unidade.

Acompanhe os exemplos:

1.º exemplo: Determinar a razão entre os segmentos representados abaixo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3cm}{2cm} = \frac{3}{2} \rightarrow \text{razão}$$

2.º exemplo: Determinar a razão entre os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, sabendo que $\overline{MN} = \sqrt{2}cm$ e $\overline{PQ} = 3cm$.

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{\sqrt{2}cm}{3cm} = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow \text{razão}$$

Observações:

Dois segmentos são chamados **comensuráveis** quando a razão entre eles é um número racional, e são chamados **incomensuráveis** quando essa razão for um número irracional. Assim, os segmentos dados no 1.º exemplo são comensuráveis, enquanto os dados no 2.º exemplo são incomensuráveis.

152

Exercícios de aprendizagem

1. Determine a razão entre:

a) $\overline{AB} = 8cm$ e $\overline{BC} = 5cm$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{8cm}{5cm} = \frac{8}{5} \rightarrow \text{razão}$$

b) $\overline{AB} = 5m$ e $\overline{BC} = 100cm$

$$5m = 500cm \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{500cm}{100cm} = 5 \rightarrow \text{razão}$$

c)

$$\overline{AB} = 5u \text{ e } \overline{CD} = 3u \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5u}{3u} = \frac{5}{3} \rightarrow \text{razão}$$

2. Resolva os seguintes problemas:

a) A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é $\frac{5}{3}$. Determine $\overline{BC}$, sabendo que $\overline{AB} = 10cm$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{10cm}{\overline{BC}} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5\overline{BC} = 30cm \Rightarrow \overline{BC} = 6cm$$

b) A razão entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é $\frac{x}{3}$. Determine x , sabendo que $\overline{AB} = 20cm$ e $\overline{BC} = 9cm$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{20cm}{9cm} = \frac{x}{3} \Rightarrow 9x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{9} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

■ Segmentos proporcionais

Quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são chamados **proporcionais** quando suas medidas (tomadas na mesma unidade) formam uma proporção. Isto é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Observe os exemplos:

1.º exemplo: Verificar se os segmentos $\overline{AB} = 5cm$, $\overline{CD} = 3cm$, $\overline{EF} = 15cm$ e $\overline{GH} = 9cm$ formam, nessa ordem, uma proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5}{3} \text{ e } \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \text{ Então, } \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Os números dados, na ordem dada, formam uma proporção.

2.º exemplo: Dividir o segmento $\overline{AB} = 20cm$ em duas partes proporcionais aos números 2 e 3.

Sejam $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ as duas partes procuradas ($P \in \overline{AB}$).

$$\text{Assim: } \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{3}$$

Das propriedades das proporções sabemos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{2 + 3}{3} = \frac{5}{3}$$

Como $\overline{AP} + \overline{PB} = 20$, temos:

$$\frac{20}{\overline{PB}} = \frac{5}{3} \Rightarrow 20 \cdot 3 = 5 \cdot \overline{PB} \Rightarrow 60 = 5\overline{PB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\overline{PB} = 60 \Rightarrow \overline{PB} = \frac{60}{5} \Rightarrow \overline{PB} = 12cm$$

$$\overline{AP} + \overline{PB} = 20 \Rightarrow \overline{AP} + 12 = 20 \Rightarrow \overline{AP} = 20 - 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = 8cm$$

Então, as partes procuradas medem 8cm e 12cm.

153

Figura 171: p. 152, 153 e início da p. 154 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

A fim de ilustrar as demonstrações efetuadas para alguns resultados geométricos, podemos citar o parágrafo 3 – “Feixe de retas paralelas” do capítulo 6 – “Segmentos proporcionais – Semelhança”:

3. Feixe de retas paralelas

Um conjunto de retas de um mesmo plano, paralelas entre si, chama-se **feixe de retas paralelas**, ou simplesmente feixe de paralelas.

Qualquer reta que corte as retas de um feixe chama-se **reta transversal**.

Exemplo: Na figura ao lado, as retas a, b, c e d são retas de um feixe. A reta t é uma transversal a esse feixe.

Observe, agora, algumas propriedades envolvendo um feixe de retas paralelas cortadas por transversais:

1.ª propriedade

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Confira:

$$\left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ t_1 \text{ e } t_2 \text{ são transversais} \\ AB \cong BC \end{array} \right] \Rightarrow [DE \cong EF]$$

Construção auxiliar

1. Por D, traçamos $DM \parallel AB$
2. Por E, traçamos $EN \parallel BC$

Demonstração

1. $ABMD$ é um paralelogramo.
2. $DM \cong AB$.
3. $BCNE$ é um paralelogramo.
4. $EN \cong BC$.
5. $DM \cong EN$.
6. $\hat{D} \cong \hat{E}$.
7. $\hat{M} \cong \hat{N}$.
8. $\triangle DME \cong \triangle ENF$.

Portanto, $DE \cong EF$.

Justificação

1. $a \parallel b$ e $DM \parallel AB$.
2. DM e AB são lados opostos de um paralelogramo.
3. $b \parallel c$ e $EN \parallel BC$.
4. EN e BC são lados opostos de um paralelogramo.
5. Pela propriedade transitiva, pois $AB \cong BC$.
6. São ângulos correspondentes, para $DM \parallel EN$.
7. São ângulos de lados paralelos de mesmo sentido.
8. Caso A.L.A. (ângulo, lado, ângulo).

155

1.º exemplo: Calcular o valor de x indicado na figura abaixo, sabendo que $a \parallel b \parallel c$.

Aplicando a 1.ª propriedade, temos
 $x = 3$

2.º exemplo: Calcular o valor de x indicado na figura abaixo, sabendo que $MN \parallel BC$.

Traçando por A a reta $r \parallel MN$, temos o feixe $r \parallel MN \parallel BC$.

Aplicando a 1.ª propriedade, $x = 5$.

2.ª propriedade (teorema de Tales)

Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

Confira:

$$\left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ t_1 \text{ e } t_2 \text{ são transversais} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \right]$$

Demonstração:

1. Suponhamos que AB e BC sejam comensuráveis e seja u a unidade padrão de medida. Logo:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5u}{3u} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$$

2. Traçamos pelos pontos de divisão de AB e BC as paralelas à reta $a = \overrightarrow{AM}$ do feixe, que vão interceptar t_2 em segmentos congruentes (v), de acordo com a propriedade do feixe de paralelas.

Então:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{5v}{3v} = \frac{MN}{NP} = \frac{5}{3}$$

156

3. Comparando ① e ②, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \Rightarrow AB, BC, MN, NP \text{ são proporcionais.}$$

Observação:

Se AB e BC forem incomensuráveis, o teorema também é verdadeiro, fato que aceitaremos sem demonstração.

1.º exemplo: Aplicando o teorema de Tales, determinar o valor de x na figura abaixo, sabendo que $a \parallel b \parallel c$.

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

2.º exemplo: Na figura, tem-se $a \parallel b \parallel c$. Calcular os valores de x e y , sabendo que $x + y = 15$.

$$\text{Pelo teorema de Tales: } \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Pela propriedade das proporções: } \frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5y = 3 \cdot 15 \Rightarrow 5y = 45 \Rightarrow y = 9$$

$$x + y = 15 \Rightarrow x + 9 = 15 \Rightarrow x = 15 - 9 \Rightarrow x = 6$$

3.º exemplo: Calcular o valor de x indicado na figura ao lado, sabendo que $DE \parallel BC$.

Traçando por A a reta $r \parallel BC$, temos o feixe $r \parallel DE \parallel BC$.

$$\text{Aplicando o teorema de Tales: } \frac{30}{20} = \frac{x}{10}$$

$$\Rightarrow 20x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{20} \Rightarrow x = 15$$

157

Figura 172: p. 155 a 157 do livro de Giovanni e Parente – 8ª série (1988)

Também nesse livro, em nenhum momento os autores estimulam a representação ou propõem a construção de objetos físicos. Também não há relações da Geometria com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, consideramos que esse livro aborda a Geometria fazendo uso somente da concepção usando uma linguagem formal.

3.3.4.2. Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis

Título da obra: *Matemática para todos*

5ª série – 2002

6ª série – 2002

7ª série – 2002

8ª série – 2002

O contexto histórico:

Esses livros foram publicados em 2002 e são uma reedição da primeira coleção escrita pelos autores em 1997. Segundo escrito na capa, nesta reedição, os autores aperfeiçoaram a obra, aproximando-a ainda mais das recentes indicações da Educação Matemática, ou seja, aplicar a Matemática à vida, favorecendo a real aprendizagem dos alunos.

Conforme vimos no Capítulo 2, desde 1998, estão em vigor no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's – que denominam 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental a etapa escolar compreendida de 5ª até a 8ª série. Essa publicação está amparada pela Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 – a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB.

Os PCN's surgiram a partir de uma análise crítica às Propostas Curriculares anteriores, sendo novamente para a Matemática um dos focos principais, a crítica à influência da Matemática Moderna que prevaleceu ainda durante vários anos.

Os autores iniciam os livros com duas cartas: uma direcionada aos alunos e a outra direcionada aos pais. Nessa última é possível ter idéia da maneira pela qual os conteúdos são desenvolvidos nestes livros, já que os autores declaram que alguns pais:

[...] terão dúvidas em relação a certos conteúdos de nossa proposta, porque analisarão o livro baseados em sua própria experiência escolar. O problema é que a sociedade mudou, o ensino tem-se transformado e os critérios de competência que foram adequados no passado já não se aplicam ao nosso tempo. Atualmente, os objetivos são outros. Comparando os dois quadros seguintes, pode-se ter uma idéia do que é novo. Embora os dados se refiram à matemática, eles expressam um espírito de mudança que envolve a educação como um todo.

O que já foi importante	O que importa hoje
Possuir destreza em cálculo numérico e algébrico feito com lápis e papel.	Possuir habilidades em cálculo mental, estimativa e uso de calculadora.
Fazer muitos exercícios mecânicos para fixação.	Compreender o papel da matemática na sociedade atual.
Conhecer receitas para resolver problemas típicos.	Ter competência para enfrentar problemas novos.
Decorar fórmulas e definições.	Compreender conceitos e saber como as fórmulas se originaram.

(IMENES e LELLIS, 2002, p. 04)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática indicam, como ponto de partida da atividade Matemática, a Resolução de Problemas e propõem que sejam trabalhados em sala de aula, a História da Matemática e as Tecnologias da Informação e da Comunicação. Também incentivam as interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento.

Especificamente para a Geometria estabelecem que sejam trabalhados conteúdos relacionados com espaço e forma, grandezas e medidas, de forma tal que, sempre partindo da observação e da identificação em objetos do mundo real, desenvolvam habilidades de percepção espacial; explorem a composição e decomposição de figuras; trabalhem com as transformações de uma figura no plano; desenvolvam a capacidade de desenhar, como as representações planas de figuras espaciais; promovam, no quarto ciclo, a construção de um caminho que, a partir de experiências concretas, leve os alunos a compreender a importância e

a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas, o que não significa fazer um estudo puramente formal e axiomático, ou seja, as verificações empíricas não devem ser abandonadas. É importante observar que os PCN's propõem também que devem ser exploradas situações em que sejam necessárias construções geométricas com régua e compasso, esquadro e transferidor, bem como a construção de materiais concretos. Assim, entendemos que há uma preocupação em estabelecer articulações entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

Para os demais critérios de análise estabelecidos acima, analisaremos os livros separadamente:

5ª série:

Figura 173: Capa do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de analisar a maneira pela qual a Geometria está contemplada pelos autores, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Um panorama da matemática	06
Capítulo 2	Formas tridimensionais	27
Capítulo 3	Operações fundamentais	43

Capítulo 4	Formas planas	58
Capítulo 5	Múltiplos e divisores	80
Capítulo 6	Frações e porcentagens	98
Capítulo 7	Construções geométricas	116
Capítulo 8	Medidas e números decimais	127
Capítulo 9	Operações com números decimais	143
Capítulo 10	Estatística	159
Capítulo 11	Linguagem matemática	172
Capítulo 12	Áreas e perímetros	185
Capítulo 13	Simetria	199
Capítulo 14	Generalizações	214
Capítulo 15	Adição e subtração de frações	224
	Sugestões de leitura para o aluno	236
	Referências bibliográficas	236
	Problemas e exercícios complementares	237
	Supertestes	268
	Dicionário	281
	Conferindo respostas	299

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria encontra-se distribuída ao longo do livro, permeando os demais assuntos.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Os capítulos 3, 5, 6, 8, 9, 11 e 15 abordam a Aritmética; o capítulo 14 começa a introduzir um pouco de Álgebra. Nesses capítulos é possível encontrar algumas conexões com a Geometria. A título de exemplificação podemos citar o item “Expressando conclusões gerais” que se encontra no capítulo 14 – “Generalizações”:

Expressando conclusões gerais

Você já sabe que:

$$3 \cdot 0 = 0 \quad 16 \cdot 0 = 0 \quad 2,75 \cdot 0 = 0$$

Também já deve ter tirado esta conclusão geral: qualquer número multiplicado por zero dá zero.

Em matemática, conclusões como essas costumam ser escritas de maneira abreviada, sem usar palavras. A expressão "qualquer número" é trocada pela letra x . Então, escrevemos:

$$x \cdot 0 = 0$$

A letra x está representando qualquer número, isto é, x pode ser 3 ou 16 ou 2,75 ou outro número.

A sentença $x \cdot 0 = 0$ está escrita em linguagem matemática simbólica. Nessa linguagem, não se usam palavras, como já foi dito, somente números, letras que representam números e sinais de operações, isto é, símbolos.

Observe outro exemplo de uma conclusão geral escrita em linguagem matemática. Preste atenção aos cubos arrumados sobre a mesa:

um cubo: 5 faces visíveis
2 cubos: 8 faces visíveis
3 cubos: 11 faces visíveis

Quando há muitos cubos, você pode achar a quantidade de faces visíveis pensando desta maneira:

Logo, em 5 cubos, as faces visíveis são $5 \times 3 + 2$, ou seja, 17.

Se fossem 13 cubos arrumados dessa maneira, o raciocínio seria o mesmo e o número de faces visíveis seria $13 \times 3 + 2$.

É possível tirar uma conclusão geral sobre aquela fileira de cubos: o número de

faces visíveis é igual ao número de cubos vezes 3, mais 2.

A frase poderia ser abreviada deste modo:

$$n^{\circ} \text{ de faces} = n^{\circ} \text{ de cubos} \times 3 + 2 \quad \text{ou} \quad n^{\circ} \text{ de faces} = 3 \times n^{\circ} \text{ de cubos} + 2$$

Podemos abreviá-la ainda mais, representando, pela letra F , o número de faces visíveis e, pela letra C , o número de cubos. Assim, a conclusão geral é resumida nesta fórmula:

$$F = 3 \cdot C + 2$$

A linguagem matemática é vantajosa não somente porque economiza papel e tinta, mas também porque cria um código mundial. Pense nisto: se você escrever uma conclusão geral em português, uma pessoa que não conhece essa língua não irá entendê-la. No entanto, se usar a linguagem matemática, que é universal, ela será capaz de compreendê-la.

Com o tempo, você descobrirá outras vantagens dessa linguagem.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Qual é o perímetro de um quadrado com 3 cm de lado? E com 5 cm de lado?
- Vamos generalizar: o perímetro de um quadrado é sempre igual a $4l$.
- Como a conclusão da questão anterior pode ser abreviada numa fórmula?
- O que significa dizer que a linguagem matemática é universal?
- Os músicos também utilizam uma linguagem universal. Você já viu uma partitura?
- Você conhece outra linguagem universal?

Sei que muitos de vocês gostam de desenhar. Então, vamos fazer um desenho de um quadrado. O lado de um quadrado é sempre igual a l . Então, o perímetro de um quadrado é sempre igual a $4l$.

PROBLEMAS

12. Escreva, em linguagem matemática simbólica, as seguintes frases:

- a) Qualquer número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo.
- b) Qualquer número multiplicado por ele mesmo é igual a esse número elevado ao quadrado.

13. Copie as tabelas no caderno e complete-as:

Número	Metade
6	3
9	4,5
24	
25	
x	$x : 2$

Número	Dobro
4	8
7,2	
19	
131	
x	

Número	Tripló
4	12
5,5	
17	
133	
x	

218

14. Estes hexágonos são regulares:

- a) Calcule o perímetro de cada um.
- b) No caderno, copie e complete a conclusão geral: o perímetro de um hexágono regular é sempre igual a $6l$.
- c) Resuma a conclusão do item anterior numa fórmula, sem usar palavras. A letra P representará o perímetro do hexágono regular, e l indicará a medida de seu lado.

15. a) Meça o que for preciso e calcule a área de cada triângulo colorido:

- b) Agora, vamos a uma conclusão geral. Escreva uma fórmula para obter a área do triângulo azul.

Figura 174: p. 218, 219 e início da p. 220 do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

Nos capítulos que tratam especificamente a Geometria – capítulos 2, 4, 7, 12 e 13 – encontramos articulações com a Aritmética e com a Álgebra. Para ilustrar, podemos citar o item “Área de retângulos”, pertencente ao capítulo 12 – “Áreas e perímetros”:

Área de retângulos

Obter a área de retângulos grandes contando um a um os quadradinhos unitários é, de fato, trabalhoso. Mas, pensando um pouco, podemos calcular a área de qualquer retângulo sem tanto esforço. Para você saber como é, vamos calcular a área de um retângulo com 80 cm de comprimento e 37 cm de largura.

- No lado de 80 cm, imaginamos uma fileira de 80 quadradinhos, cada um com 1 cm².
- Repetindo essa fileira 37 vezes, cobrimos o retângulo todo, porque o outro lado tem 37 cm.

- Concluímos que o retângulo com 80 cm de comprimento e 37 cm de largura tem 37 × 80 quadradinhos de 1 cm². Como 37 × 80 = 2 960, a área desse retângulo é 2 960 cm².

Podemos repetir esse mesmo raciocínio para obter a área de outros retângulos. Então, vamos fazer uma generalização, ou seja, vamos tirar uma conclusão geral, válida para todos os retângulos que podemos imaginar: a área de qualquer retângulo é igual ao comprimento multiplicado pela largura.

(Área e perímetros)

• 189

Essa conclusão geral pode ser escrita desta maneira resumida:

Na fórmula, a letra A representa a área do retângulo, c representa o comprimento e l representa a largura. Se as medidas c e l estão em centímetros, a área é indicada em centímetros quadrados.

A fórmula da área do retângulo também serve para calcular a área do quadrado, porque podemos considerar o quadrado como um retângulo com todos os lados iguais. A fórmula, então, é esta:

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Você sabe explicar por que o quadrado pode ser considerado um tipo especial de retângulo?
- Qual é a área de um quadrado com 5 cm de lado? E a de um com 9 cm de lado? E a de um com 2 cm de lado?
- Na sua opinião, o que é uma generalização?

• 190

Figura 175: p. 189 e 190 do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

Desenvolvimento do conteúdo:

Com relação à maneira pela qual os conteúdos de Geometria são desenvolvidos nesses livros, Imenes e Lellis declaram na Assessoria Pedagógica das quatro séries que:

No âmbito da geometria, a coleção mantém a multiplicidade de recursos e olhares para as formas planas e espaciais, num constante vai-e-vem entre o estudo do plano e do espaço, de forma complementar e em constante relação com a observação da geometria no mundo que cerca o aluno e em outros campos do conhecimento. O tema simetria aperfeiçoa-se, indo além do reconhecimento desta propriedade em figuras e de sua relação com a estética nas artes. A simetria é usada para o estudo de propriedades geométricas relacionadas a triângulos, quadriláteros e os polígonos, em geral. Deste modo, é oferecida ao aluno a oportunidade de perceber que as figuras podem ser estudadas por meio do movimento das simetrias e através das relações clássicas da geometria euclidiana sobre semelhança e congruência (aqui abordada de modo experimental e intuitivo). (IMENES e LELLIS, 2002, p. 03)

Para a exposição dos conteúdos geométricos, esse livro começa cada item com um texto de apresentação do mesmo que apresenta os conceitos por meio de exemplos práticos do dia-a-dia. Após o texto, os autores propõem uma seção intitulada “Conversando sobre o texto” que oferece uma discussão através de questões a respeito do texto e que os autores sugerem que devem ser respondidas oralmente ou por escrito, com o objetivo de incentivar a troca de idéias, a exposição e a organização do pensamento e a verbalização das idéias matemáticas de cada aluno. Em seguida, aparece uma seção denominada “Ação” que varia entre apresentações de jogos, construções com material concreto, atividades de medida, etc.

Logo após, são propostos “Problemas e Exercícios” para resolver em sala de aula individualmente ou em grupos. Segundo os autores, “essa série de problemas e exercícios aborda novos conceitos e convida os alunos a descobertas, não visando apenas à fixação. Por isso, o momento destinado a ela pode ser tratado como aula de resolução de problemas” (IMENES e LELLIS, 2002, p. 12).

Todos os itens terminam com “Problemas e Exercícios para casa” que têm o objetivo de fazer com que o aluno, trabalhando individualmente, possa comprovar a interiorização dos conceitos e das técnicas aprendidos em sala de aula. Caso o professor julgue necessário, o livro também possui uma seção de “Problemas e exercícios complementares”.

Dessa forma, o livro inicia o estudo da Geometria no capítulo 1 – “Um panorama da matemática” pelo item “Uma pesquisa sobre formas geométricas”:

Uma pesquisa sobre formas geométricas

Você vai fazer uma investigação que está relacionada com uma forma geométrica. Antes de começá-la, vamos dar-lhe algumas informações.

Você já notou que muitos edifícios e a maioria das caixas de presentes têm algo em comum, ou seja, ambos têm a forma de um bloco retangular?

Esplanada dos Ministérios – Brasília.

Observe algumas das propriedades do bloco retangular.

A menina está desenhando uma caixa com a forma do bloco retangular. Ela vê três faces da caixa: a azul, a vermelha e a amarela. As faces que não vê também são três: uma embaixo da azul e as outras opostas às faces vermelha e amarela.

Para saber o tamanho de um bloco retangular, é preciso conhecer as medidas de três arestas: o comprimento, a largura e a altura. Essas são as três dimensões do bloco.

Se as três dimensões são iguais, o bloco retangular é chamado cubo.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Quantas faces tem um bloco retangular? Quantos vértices? E quantas arestas?
- Sua sala de aula tem a forma de um bloco retangular? (Repare que, nesse caso, você estaria dentro do bloco.) Se tiver, quais são as dimensões aproximadas da sala? Faça estimativas.
- Cite objetos ou embalagens que têm a forma do bloco retangular.

[UM PANORAMA DA MATEMÁTICA]

13

- Estes edifícios não têm a forma do bloco retangular:

Comente o uso dessas formas na construção de edifícios, ou seja, diga se as construções ficam mais bonitas com essas formas e se há vantagens e desvantagens em seu uso.

AÇÃO

Investigação sobre a forma geométrica de um pacote

Imagine que você seja um dos técnicos da empresa de alimentos que fabrica os famosos biscoitos Croc-croc.

A empresa tem um problema que você deve estudar e resolver. Depois, você fará um relatório para a diretoria mostrando a solução. Primeiro, conheça qual é o problema.

Os biscoitos Croc-croc são vendidos em uma caixa pequena, com forma de bloco retangular. A empresa deseja fazer uma promoção vendendo um pacote de biscoitos também com forma de bloco retangular, constituído por meia dúzia de caixas pequenas. Você deve encontrar as dimensões adequadas para o pacote.

Agora, veja o que fazer.

- Usando a planificação, monte um das caixinhas de Croc-croc.

- Meça o comprimento, a largura e a altura da pequena embalagem e anote esses valores.
- Forme um grupo com mais 5 colegas e reúnam suas 6 caixinhas de modo que formem um pacote também com a forma de um bloco retangular. Com 6 caixinhas, é possível formar diversos pacotes, com diferentes dimensões, dependendo da disposição das

caixinhas. Monte dois pacotes diferentes. Desenhe cada um deles e anote suas medidas (comprimento, largura e altura).

- Redija um relatório com as seguintes partes:

- título — Projeto para pacote com 6 caixinhas de Croc-croc;
- desenho da caixinha com as dimensões escritas;
- desenho de dois pacotes (inclua as dimensões de cada pacote) que podem ser formados;
- recomendação para a empresa adotar um dos pacotes que você mostrou, explicando por que o que ele é o melhor (porque é mais fácil de embalar, de transportar, etc.);
- seu nome.

PROBLEMAS

- Veja um aquário de vidro com a forma de um bloco retangular:

A aresta AB (que vai do vértice A até o vértice B) mede 20 cm, a aresta AD mede 40 cm e a aresta AE mede 25 cm.

- Quais são as arestas que medem 40 cm?
- E as que medem 20 cm?
- E as que medem 25 cm?

- Vamos juntar caixas iguais a esta e formar novos blocos retangulares.

Dê o comprimento c , a largura ℓ e a altura a de cada bloco:

- Uma embalagem está sendo desmontada. Cortamos algumas arestas.

Abrimos e tiramos as orelhas.

Finalmente, temos a caixa planificada.

Quando a caixa estava montada, F era a tampa da direita e E, a da esquerda. As faces E e F são opostas. Quais são os outros pares de faces opostas?

[UM PANORAMA DA MATEMÁTICA]

15

12

13. Você sabia que, nos dados, os pontos das faces opostas têm soma igual a 7?

a) Sabendo disso, diga quantos pontos têm as faces opostas às que você vê.

b) Quantos pontos tem a face apoiada sobre a mesa?

14. A soma dos pontos das 3 faces que você vê no dado abaixo é 9. A face apoiada sobre a mesa tem 2 pontos. Quantos pontos deve ter cada face que você vê? Pense bem antes de responder.

PROBLEMAS PARA CASA

No final do livro, há a seção *Conferindo respostas*, com orientações para você descobrir se acertou o problema.

15. Esta é a rua principal de uma cidade:

Quais são os edifícios que têm a forma de um bloco retangular?

16. Vamos colar dois blocos retangulares. Na forma geométrica que obtivemos, quanto medem: c, ℓ , a, d?

17. Fábio desenhou a planificação abaixo e montou um cubo:

Paula fez outra planificação e também montou um cubo:

Agora, observe esta planificação:

É possível montar um cubo com ela? Por quê?

18. Um dado está sobre a mesa. Você só consegue ver a face 4 e a face 5. A pessoa que está à sua frente só vê a face 3 e a face 5. Qual é a face que está apoiada na mesa?

Faça um desenho. E não esqueça: as faces opostas somam 7.

Figura 176: p. 12 a 17 do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

Nesse exemplo, bem como no decorrer do livro todo, podemos perceber que os autores trabalham a Geometria articulando a percepção, a construção e a concepção feita de forma informal.

Com relação à representação, há exemplos referindo-se ao uso da régua e dos esquadros no item “Perpendiculares e paralelas” que se encontra no capítulo 4 – “Formas planas”:

Nesses desenhos, é comum o traçado de linhas retas perpendiculares e o de linhas retas paralelas. Vamos aprender a desenhá-las usando esquadro e régua.

Construção de linhas perpendiculares

- Trace a reta r .

- ▶ Apóie um lado do ângulo reto do esquadro na régua. Trace a reta s .

- Prolongue a reta s com uma régua.

- Observe que você traçou duas retas perpendiculares, r e s .

Retas
perpendiculares
formam ângulos
retos

64 •

Construção de linhas retas paralelas

- Trace a reta r .

- Mantendo a régua fixa sobre r , apóie o esquadro sobre a régua.

- Deslize o esquadro sobre r e trace as retas s , t e u perpendiculares à r .

- Note que as retas s , t e u são paralelas entre si e perpendiculares à r .

Você também pode traçar retas paralelas desta maneira:

- Deslize o esquadro como no exemplo anterior, mas faça os traços utilizando o lado do ângulo de 45° . Se estiver usando o esquadro de 30° e de 60° , faça o traço utilizando o lado comum aos ângulos de 30° e de 60° .

- Observe que as retas s , t e u são paralelas entre si e oblíquas em relação à r .

Duas retas paralelas nunca se encontram. Elas mantêm sempre uma mesma distância.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Os esquadros de plástico, usados pelos desenhistas, têm a forma de qual figura?
- Quais profissionais usam esquadros?
- Qual é a sua opinião: será que, com o tempo, as pessoas irão desenhar somente na tela do computador, sem esquadros e régua?
- Se uma pessoa lhe perguntar "A reta t é paralela?", o que você responderá?
- Responda oralmente, usando suas palavras: quando duas retas são paralelas? Quando duas retas são perpendiculares?
- Agora, escreva as duas respostas anteriores.

(forces planes)

• 65

Figura 177: Final da p. 63 e p. 64 e 65 do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

É interessante observar nesse exemplo, na seção “Conversando sobre o texto” a proposta dos autores com relação a uma discussão sobre a substituição do uso dos instrumentos de desenho pelos computadores. Podemos constatar também, nesse exemplo, as relações da Geometria com o cotidiano e com outras áreas do conhecimento que são tratadas pelos autores em todos os capítulos.

Outros exemplos do uso da representação são encontrados no capítulo 7 – “Construções geométricas”, que é dedicado às construções em papel quadriculado, com régua e esquadro e com régua e compasso, estabelecendo conexões entre a Geometria e a Arte. A esse respeito, os autores esclarecem na Assessoria Pedagógica que:

Há escolas que optam por desenvolver a geometria em aulas de desenho geométrico ou de educação artística. Qualquer decisão dessas demanda cuidado, por dois motivos:

- embora no livro seja explorada a relação arte-geometria, sua abordagem é predominantemente matemática, podendo ser inadequada para o professor de educação artística;

- apesar de serem trabalhadas no livro construções geométricas, não tivemos a intenção de propor um curso de desenho geométrico com suas regras e códigos estritos, e sua abordagem pode colidir com a do professor de desenho. (IMENES e LELLIS, 2002, p. 19)

Um pouco mais a frente, na Assessoria Pedagógica, encontramos que:

É importante observar que, no desenho geométrico clássico, há uma regra rígida que permite apenas o uso do compasso e da régua sem graduação. Os capítulos de construção geométrica desta obra não constituem um curso de desenho geométrico. Portanto, o aluno poderá usar livremente todos os instrumentos de desenho e outros materiais, como o papel quadriculado. Além disso, muitas vezes, não se faz a distinção teórica entre construção aproximada e construção exata. (IMENES e LELLIS, 2002, p. 36)

Assim, concluímos que esse livro, procura trabalhar a Geometria articulando a percepção, a construção, a representação e a concepção feita de forma informal. No capítulo 13 – “Simetria”, encontramos um exercício proposto que ilustra esse fato:

Figura 178: Trecho da p. 205 do livro de Imenes e Lellis – 5ª série (2002)

É importante observar também que os autores fazem uso de uma linguagem informal para se referirem aos conceitos matemáticos. Estabelecem conexões com a História da Matemática e apresentam oportunidades de o professor trabalhar com os temas transversais, propostos nos PCN's. Também sugerem o uso de calculadoras e dos computadores.

6ª série:

Figura 179: Capa do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

A Estrutura do livro e a Geometria:

A fim de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Números	06
Capítulo 2	Construções geométricas	22
Capítulo 3	Padrões numéricos	46
Capítulo 4	Cálculos com números decimais e frações	63
Capítulo 5	Medidas	78
Capítulo 6	Números negativos e contabilidade	97
Capítulo 7	Proporcionalidade	117
Capítulo 8	Mapas e localização	132
Capítulo 9	Tratamento da informação	150
Capítulo 10	Multiplicação e divisão de números com sinais	173
Capítulo 11	Usando letras em matemática	189
Capítulo 12	Áreas e volumes	204
Capítulo 13	Equações	223
Capítulo 14	Geometria tridimensional	241
	Sugestões de leitura para o aluno	253
	Referências bibliográficas	253
	Problemas e exercícios complementares	254
	Supertestes	287
	Dicionário	301
	Conferindo respostas	321

Pelo índice, podemos verificar que a Geometria está distribuída ao longo do livro, entre outros assuntos. Dessa forma, os capítulos, 2, 5, 8, 12 e 14 tratam especificamente da Geometria e é possível encontrar algumas conexões com a Álgebra e com a Aritmética. Os capítulos 1, 3, 4, 6, 7 e 10 abordam a Aritmética e os capítulos 11 e 13 trabalham a Álgebra. A Geometria é encontrada em apenas dois exemplos do capítulo 11; nos demais capítulos, é encontrada apenas em alguns exercícios propostos.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Conforme observado acima, o capítulo 11 – “Usando letras em matemática”, que desenvolve a Álgebra, é introduzido por meio de um exemplo sobre a área do retângulo. Logo após, no item “Calculando com letras”, os autores apresentam quatro exemplos onde o último é sobre a Geometria:

Figura 180: Final da p. 197 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Nos capítulos 3, 4, 7, 10, 11 e 13 encontramos algumas conexões com a Geometria nos exercícios propostos. A título de exemplificação podemos citar o “exercício para casa” de número 12 do item “Forças e multiplicações” que se encontra no capítulo 10 – “Multiplicação e divisão de números com sinais”:

12. O triângulo ABC foi desenhado num sistema de eixos cartesianos. Lembre-se da ideia: multiplicar o triângulo ABC por um número significa multiplicar as coordenadas de seus vértices por esse número.

Multiplicando o triângulo ABC por 2, obtém-se o triângulo RST.

Faça o que se pede:

- Copie os eixos e o triângulo ABC no caderno. A seguir, obtenha o triângulo A'B'C' fazendo $(-2) \times ABC$. **Dica:** como B tem coordenadas 2 e 1, B' terá coordenadas -4 e -2.
- Responda: que relações você observa entre os triângulos ABC e A'B'C'? Como se relacionam os ângulos de um com os ângulos do outro? E com relação aos lados, o que você nota?
- Agora um desafio. Responda: por quanto devemos multiplicar o triângulo A'B'C' para que o resultado seja o triângulo ABC?

A ideia citada no exercício 12 foi explorada no capítulo 8. Logo, quando se multiplica uma figura por um número negativo.

Figura 181: Trecho da p. 179 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Nos capítulos que tratam especificamente a Geometria encontramos algumas articulações com a Aritmética e com a Álgebra. Para ilustrar, podemos citar o item “Volume do bloco retangular”, pertencente ao capítulo 12 – Áreas e volumes:

Volume do bloco retangular

Para obter o volume de um bloco retangular, contamos quantos cubos unitários ele contém. No entanto, não precisamos contar os cubinhos um a um porque podemos usar a multiplicação. Veja:

Numa camada, há $8 \cdot 3$ cubinhos.

Multiplicando essa quantidade pelo número de camadas, temos o total de cubinhos. São $8 \cdot 3 \cdot 5$ cubinhos.

Logo, o volume desse bloco é: $8 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^3$.

Esse mesmo raciocínio poderia ser feito para o bloco retangular de dimensões 9, 25 e 17 ou para o de dimensões 48, 15 e 22. Portanto, é possível fazer uma **generalização** para encontrar o volume de um bloco retangular, basta multiplicar as medidas do comprimento, da largura e da altura.

O QUE É, O QUE É?
generalização
Procure no dicionário.

Figura 182: p. 216 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro segue o mesmo modelo para a apresentação dos conteúdos geométricos que o livro da 5ª série. Os assuntos continuam sendo desenvolvidos intuitivamente, por meio de textos que apresentam situações cotidianas, tentando fazer com que os alunos cheguem à construção dos conceitos naturalmente.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro:

22 •

[CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS]

• 23

24 •

[construções geométricas]

• 25

Figura 183: p. 22 a 25 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Nesse exemplo, podemos perceber que os autores trabalham a Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção feita de forma informal. Observamos ainda o uso da régua, do transferidor e dos esquadros, e, no mesmo capítulo, encontramos também muitas referências ao uso do compasso.

A construção também é trabalhada nesse mesmo capítulo. A título de exemplificação podemos citar os itens “Simetrias” e “Medida dos ângulos dos polígonos regulares”, onde também é possível percebermos conexões entre a Geometria, a Álgebra e a Aritmética:

AÇÃO

Esta construção sobre uma folha de papel é do *Resumo Pedagógico*, página 24.

Uma investigação sobre os ângulos dos triângulos

Procedimento 1

Numa folha de papel, desenhe com capricho um triângulo com lados de mais de 5 cm. O formato do triângulo fica por sua conta.

Em cada lado do triângulo, marque dois pontos, cada um a 1 cm da extremidade. Faça uma linha tracejada como mostra a figura.

Para destacar os ângulos do triângulo, pinte as três pontas delimitadas pelas linhas tracejadas. Recorte essas pontas pelas linhas tracejadas e junte-as, como se vê na figura.

Observe o resultado e tire suas conclusões.

Procedimento 2

Faça outro triângulo seguindo as mesmas instruções do procedimento 1. Recorte-o. O novo triângulo não precisa ser igual ao primeiro.

Com base no modelo da figura seguinte, marque os ângulos do triângulo, tanto na frente quanto no verso do papel. Depois, faça as dobras 1, 2 e 3.

Observe o resultado e tire suas conclusões.

Relatório

Prepare um relatório das duas tarefas. Coloque o título: "Investigação sobre ângulos de triângulos".

Descreva o que você fez nos procedimentos 1 e 2. Você pode fazer desenhos para ilustrar os procedimentos.

Depois, escreva as conclusões.

38

somente uma diferença: no início, ele aponta para a direita e, no final, para a esquerda. Isso indica que o lápis deu meia volta, ou girou 180° , no total. Concluímos, então, que, em todo triângulo, com ângulos quaisquer, de medidas a , b , c , temos $a + b + c = 180^\circ$.

Com base nessa propriedade universal dos triângulos, vamos calcular os ângulos dos polígonos regulares. Tomemos o caso do pentágono.

Para construí-lo, dividi-se uma circunferência em cinco partes iguais.

Os triângulos AOB , BOC , COD , etc. são todos iguais e têm uma particularidade. Qual é?

O triângulo AOB é isósceles. Portanto, tem um eixo de simetria que passa por O e é perpendicular a AB . Concluímos, então, que seus ângulos B e A têm a mesma medida x .

eixo de simetria

Como a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° , é verdadeira a igualdade:

$$x + x = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Portanto, se o dobro de x é 108° , então x vale $108^\circ : 2 = 54^\circ$.

Observando de novo a figura, vemos que cada ângulo de um pentágono regular contém dois ângulos de 54° . Logo, cada ângulo do pentágono mede 108° .

Em resumo, para calcular a medida do ângulo do pentágono regular, calcule-se:

- a medida do ângulo central correspondente ao pentágono regular;
- a medida dos ângulos da base do triângulo isósceles determinada pelo ângulo central.

40

Medida dos ângulos dos polígonos regulares

Ao executar os procedimentos descritos na Ação, você percebeu que a soma das medidas dos três ângulos do triângulo é 180° .

Veja um argumento que comprova que esse fato é válido em todos os triângulos. Pense num triângulo qualquer, isto é, um triângulo sem nenhuma particularidade (não precisa ser regular, nem ter um ângulo reto, nem...). Vamos imaginar também um lápis que vai fazer giros correspondentes a cada ângulo do triângulo. Agora, acompanhe:

Seguir esse lápis para percorrer um triângulo e reproduzir o desenho é equivalente a girar.

Viu o que aconteceu? O lápis girou sempre no mesmo sentido. (No caso, o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.) Com isso, os giros foram se acumulando, o que corresponde a somar os ângulos do triângulo. A posição inicial e a final do lápis têm

[CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS]

39

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Você já sabia que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° ?
- Existem infinitos triângulos, logo não seria possível examinar cada um deles. Na entanto, raciocinando, concluímos que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° . Não é fantástico? O que você acha?
- Observe, na figura, o polígono regular de 9 lados. Quanto mede o ângulo central AOB ? E quanto mede o ângulo OAB ?
- Quanto mede cada ângulo do polígono regular de 9 lados?

As duas últimas questões devem ser resolvidas seguindo o mesmo raciocínio usado para o triângulo e o pentágono.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

37. Quanto mede x em cada triângulo?

Resolução:
Primeiro, faça um rascunho do triângulo:

Partindo de A , avance 40 mm e chegue em B . Depois, dê um giro de 120° para a esquerda, porque cada ângulo do triângulo regular mede 60° . Então as instruções são:

Avance 40 mm.
Esquerda 120° .
Avance 40 mm.
Esquerda 120° .
Avance 40 mm.
Esquerda 120° .

Duas observações:

- Com a última instrução, o cursor retorna à posição inicial.
- Podem-se racionalizar as instruções. Assim: Repita 3 vezes:
Avance 40 mm.
Esquerda 120° .

Uma sugestão de uso de compasso para a construção do triângulo regular.

38. Calcule a medida dos ângulos de um octógono regular.

39. Existem programas de computador que fazem desenhos segundo instruções do tipo "Avance tantos milímetros", "Gire tantos graus para a direita (ou para a esquerda)". Usando um desses programas, quero desenhar, na tela do computador, um triângulo regular de lados iguais a 40 mm. Que instruções devo dar?

[CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS]

41

Figura 184: p. 38 a 41 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Outros exemplos do trabalho com construção são encontrados no capítulo 12 – “Áreas e volumes”. No capítulo 14 – “Geometria tridimensional”, encontramos referências à construção e também à representação, o que mostra o estabelecimento de conexões entre a percepção, a construção, a representação e a concepção:

AÇÃO

Analizando poliedros

Primeira parte:

Forme grupo com mais dois colegas. Cada membro do grupo será responsável pela montagem de dois poliedros com base em suas planificações. Essa construção poderá ser feita em casa.

Segunda parte:

Os poliedros devem ser analisados por todos os membros do grupo para evitar erros.

Para cada poliedro, faça uma ficha com estes itens:

- desenho do poliedro à mão livre;
- vistas superior, frontal e lateral (para fazer isso, escolha uma posição do poliedro sobre a mesa);
- número de vértices, de arestas e de faces;
- nome dos polígonos das faces;
- quantidade de arestas que saem de cada vértice; por exemplo, no caso da pirâmide de base quadrada, registre: de um vértice, saem 4 arestas e, dos outros quatro, saem 3 arestas;

Blanco de Folhas Especiais, páginas 243, 244, 245 e 246. No site do editor, você encontra todo o conteúdo do Blanco de Folhas Especiais.

- comprimento das arestas em milímetros; por exemplo, no caso do prisma pentagonal, registre: são 10 arestas com 10 mm e outras 5 com 5 mm.

Agora, atenção: foram montados dois **prismas**, duas **pirâmides**, um **octaedro** e um **tronco de pirâmide** (uma espécie de pirâmide cortada). Com essas informações e examinando as ilustrações que constam deste capítulo, complete as fichas colocando o nome dos poliedros montados.

(geometria tridimensional)

• 243

Figura 185: Final da p. 243 e início da p. 244 do livro de Imenes e Lellis – 6ª série (2002)

Os autores continuam, nesse volume, a usar uma linguagem coloquial para se referirem aos conceitos matemáticos, a estabelecer conexões com a História da Matemática, a apresentar oportunidades de trabalho com os temas transversais e a estabelecer relações da Geometria com o cotidiano e com outras áreas do conhecimento.

7ª série:

Figura 186: Capa do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o objetivo de responder ao segundo critério estabelecido, reproduzimos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Números primos	06
Capítulo 2	Operações com frações	20
Capítulo 3	Construções geométricas	40
Capítulo 4	Aplicações da matemática	55
Capítulo 5	Retomando a álgebra	69
Capítulo 6	Ângulos, paralelas e polígonos	85
Capítulo 7	Potências e raízes	112
Capítulo 8	Simetrias	134
Capítulo 9	Estatística e possibilidades	149
Capítulo 10	Desenhando figuras espaciais	168
Capítulo 11	Cálculo algébrico	182
Capítulo 12	Áreas e volumes	204
Capítulo 13	Sistemas de equações	230
Capítulo 14	Geometria experimental	245
	Sugestões de leitura para o aluno	267
	Referências bibliográficas	267
	Problemas e exercícios complementares	269
	Supertestes	295
	Dicionário	308
	Conferindo respostas	328

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria está espalhada ao longo do livro, entre os demais assuntos. Os capítulos 1, 2, 5, 7, 11 e 13 abordam a Aritmética e a Álgebra. Neles, a Geometria é encontrada em alguns exercícios propostos e também em um exemplo do capítulo 7 e em um exemplo do capítulo 11. O capítulo 4 trata de diversas aplicações matemáticas abordando tópicos de Aritmética, Álgebra, Estatística e Geometria. Os capítulos 3, 6, 8, 10, 12 e 14 tratam especificamente da Geometria e é possível encontrar algumas conexões com a Álgebra e com a Aritmética.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Com relação ao tratamento dado no livro no que diz respeito à não-separação entre Geometria, Aritmética e Álgebra, os autores esclarecem, na Assessoria Pedagógica do final da edição destinada ao professor, que:

No quarto ciclo (7ª e 8ª séries), há escolas que separam álgebra e geometria. Nesta obra, a separação de capítulos entre os professores não deve ser realizada mecanicamente, porque o livro foi elaborado integrando esses dois aspectos da matemática. (IMENES e LELLIS, 2002, p. 19)

Conforme observado acima, nos capítulos que tratam especificamente da Álgebra e da Aritmética, existem algumas conexões com a Geometria em exemplos e exercícios propostos. A título de ilustração, podemos citar os exemplos do item “Raízes” que se encontra no capítulo 7 – “Potências e raízes”:

Raízes

Quanto mede o lado do quadrado que tem área igual a 81 cm²?

O segundo problema é o inverso do primeiro: conhecendo a área do quadrado, calcula-se o lado dele. Dizemos, na matemática, que se calculou uma raiz quadrada. Indica-se assim:

É certo que -9 ao quadrado dá 81, porque $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$. No entanto, isso não muda o resultado já apresentado da raiz quadrada de 81.

Acontece que as operações matemáticas sempre têm resultado único. Como se deseja que a radiciação seja uma operação matemática, convencionou-se que a raiz quadrada de 81 é o número positivo 9. O resultado de uma raiz quadrada nunca é negativo.

[potências e raízes]

123

Agora, das áreas, passaremos aos volumes. Qual é o volume de um cubo com arestas de 5 cm?

E quanto mede a aresta de um cubo cujo volume é 64 cm³?

Dizemos que a raiz cúbica de 64 é igual a 4, porque $4^3 = 64$. Indica-se assim:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Veja também que $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$.

Por isso, a raiz cúbica de -64 é igual a -4. Usando símbolos, escrevemos:

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

Por que o nome raiz? E seu símbolo, como surgiu?

No século IX, os matemáticos árabes imaginavam um número quadrado como algo que tinha uma origem, uma raiz. Por exemplo, a origem do 25 seria 5, ou, em outras palavras, 5 seria a raiz de 25. Da mesma forma, a medida do lado de um quadrado, que origina a área, seria a raiz dessa área.

Quando os textos árabes tornaram-se conhecidos na Europa, passou-se a usar a palavra *radix* (raiz em latim). No século XV, era costume abreviar essa palavra com a letra R. Por exemplo, $\mathcal{R} 25$ podia indicar raiz quadrada de 25.

O símbolo atual pode ter surgido de uma modificação da letra r minúscula e manuscrita:

$\mathcal{R}$ $\sqrt$ $\sqrt$

Nas raízes usamos estes nomes:

índice $\rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$ radical

radicando

124

Figura 187: p. 123 e p. 124 do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

E os exercícios propostos do capítulo 11 – Cálculo algébrico:

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PARA CASA

13. Veja a dúvida do rapaz:

Imagine que $a = 2$ e $b = 3$.

a) Quanto vale $3a + 8b$?
 b) Quanto vale $11ab$?
 c) Responda à pergunta do rapaz.

14. Efetue os cálculos em seu caderno, simplificando as expressões:

a) $(5x^2) \cdot (2x^4)$
 b) $3 + 2x - (x + 5)$
 c) $x^2 - x(x + 3) + x^2 + x$
 d) $2x^2 + 3y - 4x + 5y - 3(y + 2)$

15. Simplifique as frações em seu caderno e, depois, efetue os cálculos indicados:

a) $\frac{4x^2}{4x} - 5x$ c) $\frac{y}{y} \cdot x$
 b) $\frac{x^2}{2x^2} - \frac{3x}{5}$ d) $\frac{x^2y^2}{x^2y^2} \cdot x$

16. Efetue os cálculos em seu caderno. No item b, tome cuidado com os sinais.

a) $\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}x$ b) $5x - \frac{x+2}{3}$

17. Veja um modelo de caixa de papelão sem tampa:

Encontre a fórmula que fornece a área de papelão utilizado nessa caixa.

Resolução:
 Devemos somar a área de um quadrado com as áreas de quatro retângulos iguais.

18. Observe a montagem da caixa sem tampa:

A área total é:

$$A = x^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

Observe que é possível constatar que a área total é realmente 3 vezes x^2 .

25. A moldura que envolve o retângulo da figura tem largura x .

a) Deduza uma fórmula para área A da moldura, em função de x .
 b) Se $x = 10$ cm, qual é a área da moldura?

26. Na figura seguinte temos um esboço de uma base de concreto, sobre a qual serão colocadas esculturas num parque. Ela tem a forma de um bloco retangular com um cubo em cima.

a) Deduza a fórmula do volume v da peça.
 b) Se $x = 2$ m, quantos metros cúbicos de concreto são necessários para fazer a peça?
 c) Se $x = 4$ m, quantos metros cúbicos de concreto são necessários para fazer a peça?

27. Um tanque com 8 000 L de combustível começa a ser esvaziado às 4 h de certo dia à razão de 400 L por hora. Quantos litros de combustível haverá no tanque na hora x desse dia? Note, pelo contexto, que devemos ter $x \geq 4$ e $x \leq 24$. **Dica:** a resposta será uma fórmula do tipo $Q = \square - \square \cdot x$.

Figura 188: Final da p. 188 e trechos das p. 189 e 190 do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

Nos capítulos que abordam a Geometria, existem diversas ligações com a Aritmética e com a Álgebra. Como exemplo, podemos citar o item “Algumas propriedades dos ângulos”, que se encontra no capítulo 6 – “Ângulos, paralelas e polígonos”:

6 Ângulos, paralelas e polígonos

Algumas propriedades dos ângulos

As retas s e t se cruzam formando vários ângulos. O que está assinalado em amarelo mede 37° . O outro mede x . Qual é o valor de x ?

Para responder, vamos fazer uma dedução.

- Observe que o ângulo azul mais o ângulo de 37° , juntos, dão um ângulo raso de 180° .

- Da mesma forma, x mais a medida do ângulo azul também resultam 180° .

[Ângulos, paralelas e polígonos]

85

86

- Logo $x = 37^\circ$, porque tanto x quanto 37° , somados com a medida do ângulo azul, dão o mesmo resultado de 180° .

Esse raciocínio pode ser generalizado. Ou seja, podemos provar que ângulos desse tipo sempre têm medidas iguais. Veja a figura e acompanhe a prova ao lado dela:

$$a + c = 180^\circ. \text{ Portanto, } a = 180^\circ - c.$$

$$b + c = 180^\circ. \text{ Portanto, } b = 180^\circ - c.$$

Conclusão: $a = b$.

O ângulo de medida a e o de medida b , formados por duas retas que se cruzam, são chamados ângulos opostos pelo vértice. Provamos que dois ângulos opostos pelo vértice sempre são iguais, pois têm medidas iguais.

Vejamos agora outra propriedade dos ângulos. Neste caso, as retas r e s são paralelas entre si, cortadas pela reta t . Há vários ângulos na figura. Um deles, assinalado em verde, mede 50° . Outro, assinalado em amarelo, mede x . Quanto vale x ?

- Imagine que a reta r vá se deslocando, mantendo-se paralela à posição inicial, carregando o ângulo verde consigo. Esse movimento se chama translação.

- A translação acaba superpondo as retas r e s e os ângulos verde e amarelo. Constatamos, assim, que esses ângulos são iguais.

Os ângulos assinalados em verde e amarelo são chamados ângulos correspondentes. Eles são iguais apenas quando formados por retas paralelas. Confira:

As retas r e s são paralelas. Os ângulos correspondentes (azuis) são iguais.

A reta r' não é paralela à s . Os ângulos correspondentes (azul e laranja) não são iguais.

Vamos ver outra propriedade dos ângulos formados por duas retas paralelas r e s , cortadas por uma reta transversal t .

O ângulo azul e o ângulo amarelo também são iguais. Por quê?

Veja o argumento: a é igual a x , já que são medidas de ângulos opostos pelo vértice. Mas b também é igual a x , pois são medidas de ângulos correspondentes formados por retas paralelas. Então, a é igual a b .

Os ângulos de medidas a e b são chamados ângulos alternos internos.

Ângulos correspondentes e alternos internos aparecem com muita frequência na geometria. Você deve ser capaz de reconhecê-los em diversas posições. Observe:

[Ângulos, paralelas e polígonos]

87

x e y são ângulos correspondentes, mas não são iguais.

a e b são ângulos alternos internos, mas não são iguais.

c e d são ângulos correspondentes e iguais, pois $r \parallel s$.

g e h são ângulos alternos internos e são iguais, pois as retas u e v são paralelas.

Observações sobre linguagem e símbolos

- Um ângulo (objeto geométrico) é diferente de sua medida (um número com uma unidade). Por isso, neste livro, representamos o ângulo por $\hat{a}$ e a medida por a . Não se preocupe se você confundir os símbolos. Isso não deve levar a raciocínios incorretos.
- Dois ângulos de mesma medida mas com vértices ou lados diferentes (por exemplo, um vértice no ponto A, outro no ponto B) são diferentes. Quando dizemos que esses ângulos são iguais, queremos dizer que são iguais apenas na medida. Também se pode dizer que são congruentes.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

Os alunos devem perceber que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida, mas não são iguais, pois não têm o mesmo vértice. Isso não leva a raciocínios incorretos, pois os ângulos são iguais apenas na medida.

Para justificar essa conclusão geral, usamos letras para representar as medidas dos ângulos, que são números. Você se lembra de alguma outra situação em que usamos letras para exprimir conclusões gerais?

- Os ângulos destacados na figura ao lado são opostos pelo vértice?

- Explique, com suas palavras, o que são ângulos opostos pelo vértice.

- Explique com suas palavras por que dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais. Que significa dizer que essa é uma conclusão geral?

- Para justificar essa conclusão geral, usamos letras para representar as medidas dos ângulos, que são números. Você se lembra de alguma outra situação em que usamos letras para exprimir conclusões gerais?

Figura 189: p. 85 a 88 do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

Nesse exemplo, podemos perceber que os autores começam a trabalhar a demonstração em Geometria, conforme sugerem os PCN's, o que também será feito em outros tópicos.

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro segue o mesmo modelo para a apresentação dos conteúdos geométricos dos dois livros anteriormente analisados. Os assuntos continuam sendo desenvolvidos intuitivamente; no entanto, é possível encontrar algumas demonstrações de certos resultados.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro, com ênfase na representação:

3 **Construções geométricas**

Usando os instrumentos de desenho

Neste capítulo, você vai construir figuras geométricas usando os seguintes instrumentos de desenho:

Em algumas construções, você recordará fatos que já aprendeu. Em outras, aprenderá fatos novos. Há construções que têm utilidade prática e há também algumas que são bonitas, que podem dar a satisfação do trabalho feito com capricho.

Comece, então, a trabalhar. No meio dos exercícios e problemas, há informações que ajudarão a realizar as tarefas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

1. Um avião decola da cidade A, seguindo a rota 138, e faz escala na cidade B, depois de percorrer 380 km. Em seguida, toma a rota 52 e vai de B até a cidade C percorrendo 250 km. Desenhe o trajeto feito pela aeronave, adotando uma escala em que 1 mm equivale a 10 km.

O número da rota AB é 138. Isso significa que, a partir da direção norte, gira-se 138° no sentido horário, para se obter a direção AB.

40

Resolução:

- Traçamos com a régua a reta r para representar a direção Norte.
- Marcamos A.
- Com o transferidor, traçamos o ângulo de 138° com vértice A.
- Marcamos B a 38 mm de A porque 38 mm equivalem a 380 km na escala adotada.
- Colocamos o lado do esquadro em AN como mostra a figura. Usando a régua como apoio, deslizamos o esquadro até B. Assim traçamos s , paralela a r , para indicar o Norte. Consulte novamente a figura.
- Com o transferidor traçamos o ângulo de 52° com vértice B.
- Marcamos C a 25 mm de B.

2. a) Em relação ao problema anterior, qual é a distância em linha reta da cidade A até a cidade C?
b) Qual é o número da rota AC?

3. A tabela a seguir refere-se ao voo que parte da cidade L com destino a I, fazendo escala na cidade A.

	Rotas	Distâncias (km)
LA	231	630
AI	150	780

a) Desenhe o trajeto feito pela aeronave. Use a escala 1 mm / 10 km, isto é, faça o 'desenho de modo que cada 1 mm represente 10 km na realidade. (Não vá confundir esta escala com a escala do avião!)

b) Quantos quilômetros a mais tem o voo com escala em comparação com um voo em linha reta de L para I?

c) Qual é a rota LI?

Quando se podem medir as distâncias em linha reta, sempre há alguma diferença devido às imprecisões na leitura da régua e do transferidor. É a qualidade desses instrumentos que importa.

41

4. Júlia estava construindo **ângulos centrais** para dividir a circunferência em partes iguais.

a) Ligando os pontos que dividem a circunferência, ela construiu um **polígono regular**. Qual?

b) Com essa divisão da circunferência também se pode fazer um desenho decorativo como a **estrela** da figura. Faça uma dessas em tamanho maior.

O QUE É, O QUE É?
Ângulo central, polígono regular. Procure no dicionário.

5. Neste mapa do interior da Bahia, 1 mm representa 1,25 km.

O QUE É, O QUE É?
Mapa. Procure no dicionário.

6. Neste exercício você vai construir um triângulo e algo mais. Siga as instruções.

- Desenhe o segmento de reta AO de medida 85 mm.
- Desenhe a circunferência de centro A e raio igual a 62 mm.
- Desenhe a circunferência de centro O e raio igual a 50 mm.
- Indique por M e R os pontos em que as circunferências se cruzam.

Agora responda:

a) Quais são as medidas dos lados do triângulo AMR ?

b) O quadrilátero $AMOR$ é um **losango**? Explique sua resposta.

7. Construa os triângulos nas condições dadas.

a) $\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 32^\circ$ e $AB = 52$ mm. **Dica:** para esse tipo de construção é bom começar por um rascunho, no qual os elementos com medidas conhecidas ficam em destaque.

O QUE É, O QUE É?
Losango. Procure no dicionário.

Problema: Construa um triângulo com o ângulo $\hat{A} = 48^\circ$ e o lado $AB = 52$ mm. Depois, construa o triângulo com o ângulo $\hat{B} = 32^\circ$ e o lado $AB = 52$ mm. Em $\hat{C}$, se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são conhecidos, então o ângulo $\hat{C}$ também é conhecido. Então, se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são conhecidos, então o ângulo $\hat{C}$ também é conhecido. Então, se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são conhecidos, então o ângulo $\hat{C}$ também é conhecido.

Olhando o rascunho, percebe-se que é melhor começar o desenho traçando o lado AB .

b) $AB = 5,5$ cm, $BC = 7,3$ cm e $\hat{B} = 64^\circ$. **Dica:** faça o rascunho. Você perceberá que é melhor começar traçando o ângulo. Depois, sobre os lados do ângulo, assinale os segmentos AB e BC .

c) AB é do tamanho que você quiser, $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 80^\circ$, $\hat{C} = 50^\circ$. Neste problema não encontramos nenhuma dica para dar. Será que você consegue construir o triângulo?

d) São dadas apenas duas condições: $BC = 63$ mm e $\hat{B} = 65^\circ$. Mostre com seu desenho que, nesse caso, é possível construir uma infinidade de triângulos.

O QUE É, O QUE É?
Problema. Procure no dicionário.

Problema: Construa um triângulo com o ângulo $\hat{A} = 48^\circ$ e o lado $AB = 52$ mm. Depois, construa o triângulo com o ângulo $\hat{B} = 32^\circ$ e o lado $AB = 52$ mm. Em $\hat{C}$, se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são conhecidos, então o ângulo $\hat{C}$ também é conhecido. Então, se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são conhecidos, então o ângulo $\hat{C}$ também é conhecido.

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Figura 190: p. 40 a 43 do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

Podemos perceber o tratamento da Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção. Observamos também as relações da Geometria com o cotidiano e com outras áreas do conhecimento, que são feitas no decorrer do livro todo.

A construção também é trabalhada nesse mesmo capítulo no item “A construção de formas tridimensionais”, o que nos mostra que os autores procuram abordar a Geometria articulando os quatro processos fundamentais na construção do conhecimento geométrico:

A construção de formas tridimensionais

Acompanhe a desmontagem da caixa:

Sua forma é a de um prisma pentagonal.

As bases são pentágonos...

... e as outras faces são retângulos.

Esta é a planificação.

O prisma é uma figura espacial. Sua planificação, obviamente, é uma figura plana. Fazendo o caminho inverso, veja como se vai do plano para o espaço, montando um outro prisma:

Agora, as faces são retângulos e quadrados.

A caixa tem a forma de um prisma de base quadrada.

Engenheiros, desenhistas industriais, arquitetos, publicitários e outros profissionais projetam silos, caldeiras, caixas e embalagens diversas ou contêineres para armazém.

46

nar mercadorias. A execução dessas peças, quase sempre, exige que se faça sua planificação. Será que você se daria bem neste trabalho? Descubra resolvendo os próximos problemas e exercícios.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- Na última planificação do texto há dois erros. Há uma aba de colagem a mais e outra a menos. Quais são elas?
- O texto se refere a ir do plano para o espaço ou do espaço para o plano. Explique o significado dessa ideia.
- Dê o significado destas palavras: prisma, pirâmide e poliedro.
- Na planificação do prisma de base quadrada, colocando corretamente todas as abas de colagem, quantas abas serão?
- E na planificação do prisma pentagonal, quantas abas de colagem serão?

[CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS]

47

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

16. Numa folha quadriculada, desenhe estas planificações. Os quadrados devem ter 3 cm de lado.

a)

b)

c)

d)

17. Veja a planificação de um cubo multicolorido. Quando o cubo estiver montado, a face amarela será a oposta da face azul. Quais são as cores dos outros dois pares de faces opostas?

18. Construa uma planificação como esta, porém maior. Convém usar cartolina. Trace os lados do quadrado e dos triângulos com 5 cm. Depois, monte a pirâmide.

19. Responda:

a) Quantos vértices, arestas e faces possui a pirâmide do exercício anterior?

b) Junte, pelas bases, sua pirâmide com a de um (uma) colega e monte um "balãozinho". O nome matemático dessa nova figura espacial é octaedro. (Oito se refere a oito; octaedro porque tem 8 faces.) Quantos vértices e arestas possui esse poliedro?

c) Esse octaedro é regular?

20. Olhando a figura espacial, pode-se fazer um esboço de sua planificação, à mão livre. Veja o caso da pirâmide de base triangular:

Também pode ser assim:

Agora é com você. Para cada caso, faça um esboço da planificação. Não é preciso desenhá-la com abas de colagem.

a)

b)

21. Em que casos é possível montar o cubo? Dica: tente imaginar a montagem de cubo, sem construir as planificações.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

22. Há seis quadrados na primeira figura. Colocando o quadrado laranja na posição A, pode-se montar o cubo. Na posição B isso não é possível.

Há mais três posições para o quadrado laranja que resultam em planificações do cubo. Quais são? Responda com desenhos.

48

AÇÃO

Quebra-cabeça espacial

Faça uma planificação como esta que se vê ao lado. A sua será maior. Siga as indicações:

- lados do quadrado: 5 cm;
- os dois triângulos são regulares;
- os dois trapézios são iguais e seus lados (dois deles são paralelos) medem 5 cm, 5 cm, 5 cm e 10 cm; seus ângulos medem 60° e 120°;
- não esqueça as abas de colagem.

Depois recorte, dobre e cole, montando a figura espacial.

a) Quantos vértices, arestas e faces possui essa figura?

b) Agora, forme dupla com seu (sua) colega. Juntando suas figuras espaciais (que são iguais), tentem montar uma pirâmide de base triangular. É um desafio!

c) Quantos vértices, arestas e faces possui essa pirâmide?

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PARA CASA

21. Em que casos é possível montar o cubo? Dica: tente imaginar a montagem de cubo, sem construir as planificações.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

22. Há seis quadrados na primeira figura. Colocando o quadrado laranja na posição A, pode-se montar o cubo. Na posição B isso não é possível.

Há mais três posições para o quadrado laranja que resultam em planificações do cubo. Quais são? Responda com desenhos.

49

Figura 191: Final da p. 46 e p. 47 a 49 do livro de Imenes e Lellis – 7ª série (2002)

Nos demais capítulos que tratam especificamente de Geometria, encontram-se outras referências à construção e também à representação. O capítulo 10 – “Desenhando figuras espaciais”, trabalha o desenho em perspectiva que, segundo os autores, “desenvolve a percepção geométrica, é fonte de prazer e meio de expressão [...] além de ter importância em várias profissões técnicas ou artísticas” (IMENES e LELLIS, 2002, p. 47).

8ª série:

Figura 192: Capa do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

A Estrutura do livro e a Geometria:

Com o intuito de analisar a maneira pela qual a Geometria foi desenvolvida pelos autores, transcrevemos o índice do livro:

ÍNDICE

Capítulo 1	Semelhança	06
Capítulo 2	A quinta e a sexta operações	35
Capítulo 3	Equações e Fatoração	55
Capítulo 4	Medidas	73
Capítulo 5	Estatística	90
Capítulo 6	Equações e sistemas de equações de 2º grau	110
Capítulo 7	Geometria dedutiva	126
Capítulo 8	Matemática, comércio e indústria	146
Capítulo 9	Trigonometria	160
Capítulo 10	Funções	180

Capítulo 11	Construções geométricas	205
Capítulo 12	Círculo e cilindro	228
Capítulo 13	Classificação dos números	241
Capítulo 14	Técnica algébrica	260
	Sugestões de leitura para o aluno	271
	Referências bibliográficas	271
	Problemas e exercícios complementares	272
	Supertestes	294
	Você e os vestibulinhos	308
	Dicionário	324
	Conferindo respostas	348

Observando o índice, podemos verificar que a Geometria encontra-se distribuída ao longo do livro, entre os demais assuntos.

A Geometria, a Aritmética e a Álgebra:

Os capítulos 2, 3, 6, 8, 10, 13 e 14 abordam a Aritmética e a Álgebra. A exceção dos capítulos 8 e 14, nos demais é possível encontrar algumas conexões com a Geometria em exemplos e exercícios. A título de exemplificação podemos citar o item “Conceito e propriedades da radiciação” que se encontra no capítulo 2 – “A quinta e a sexta operações”:

Considere a região colorida do triângulo equilátero da figura. Essa região corresponde a um triângulo retângulo, no qual podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

A competência para ler e interpretar textos matemáticos está relacionada ao entendimento de como se organizam os conteúdos matemáticos. Não se trata apenas de ler, mas de compreender o que está sendo dito e como isso se relaciona com o conhecimento prévio.

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 &= l^2 \\ h^2 + \frac{l^2}{4} &= l^2 \\ h^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} \\ h^2 &= \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4} \\ h^2 &= \frac{3l^2}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \end{aligned}$$

Agora, simplificamos o radical usando as propriedades já apresentadas:

$$\sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{l^2}}{\sqrt{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Conclusão: } h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Neste item, você viu cálculos em que usamos estas propriedades:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Esteja atento porque, em adições ou subtrações, não valem propriedades como essas. Observe:

$$\begin{aligned} \sqrt{9} + \sqrt{16} &= \\ = 3 + 4 &= \\ = 7 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9+16} &= \\ = \sqrt{25} &= \\ = 5 & \end{aligned}$$

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- A radiciação é a operação inversa da potenciação. O que significa isso?
- Você já conhece outras duas pares de operações inversas. Quais são?
- Extrair a raiz de um número pode ter alguma utilidade prática?
- No problema do telhado, quantos metros e centímetros mede a viga inclinada?

44 •

- Como se calcula $\sqrt{30}$ fazendo tentativas? Não é para calcular; apenas descreva o processo.
- Raiz quadrada de 36 mais raiz quadrada de 64 é o mesmo que raiz quadrada de 100? Por quê?
- Explique o que é radicando e índice.
- Quais foram as propriedades dos radicais apresentadas no texto? Dê exemplos.
- Quanto é 3^2 ? E $(-3)^2$? Agora atenção: dois números com quadrados iguais têm de ser iguais?
- No texto afirma-se que números com quadrados iguais são iguais?
- O que significa "calcular h em função de l"?

No texto afirma-se que números com quadrados iguais são iguais. Isso é verdade ou não? Justifique.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

17. No texto, há a justificativa de uma propriedade das raízes quadradas. Aqui, você deve justificar essa propriedade para as raízes cúbicas. Explique por que $\sqrt[3]{a \cdot b}$ é igual a $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

$$\begin{aligned} \text{f) } \sqrt[3]{64} &= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{60} \\ \text{g) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} &= \sqrt[3]{a \cdot b} \quad (\text{Suponha que } a \text{ e } b \text{ não sejam números negativos}) \end{aligned}$$

18. Utilize as propriedades dos radicais que você aprendeu e calcule:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{81 \cdot 121} &= \sqrt{10^6} & \text{e) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \\ \text{b) } \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}} & & \text{f) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \\ \text{c) } \sqrt{17 \cdot 17} & & \text{g) } \sqrt[3]{8 \cdot 27} \cdot \sqrt[3]{25} \\ \text{d) } 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} & & \text{h) } \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

19. Copie em seu caderno e complete trocando $\sqrt{}$ por $\sqrt[3]{}$ ou $\sqrt[4]{}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{100} + \sqrt{25} &= \sqrt{125} \\ \text{b) } \sqrt{100} + 4 &= 10 + 2 \\ \text{c) } \sqrt{100} \cdot 4 &= 10 \cdot 2 \\ \text{d) } \sqrt{9} + \sqrt{3^2} &= 5 + 3 \\ \text{e) } \sqrt{9} + 3^2 &= 5 + 3 \\ \text{f) } \sqrt{9} + 3^2 &= \sqrt{34} \\ \text{g) } \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} &= \frac{8}{2} \end{aligned}$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\text{Suponha que } a \text{ não seja negativo e } b \text{ seja positivo.})$$

20. Calcule a área do triângulo equilátero da figura. Neste caso, não vamos nos importar com a unidade de medida usada.

Resolução:

Calculamos a altura h usando a fórmula $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$:

$$h = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Calculamos a área A usando a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Como a base é o lado l, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{9 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

No item h do exercício 19, o número a não pode ser zero, pois é raio.

• 45

O problema 23 envolve a observação de regularidades.

21. Calcule a área do triângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{7}$. (Novamente, não vamos nos importar com a unidade de medida usada.)

22. Faça o que se pede:

- Use o teorema de Pitágoras e mostre que a medida da diagonal do quadrado é dada pela fórmula $d = l\sqrt{2}$.
- Use a fórmula do item anterior e calcule d para $l = \sqrt{8}$.

23. Os chifres de alguns carneiros lembram a forma de uma curva chamada espiral.

Na matemática, existem diversas espirais. Uma delas pode ser desenhada a partir de triângulos retângulos. Veja:

- Encontre as medidas dos raios da espiral: primeiro x, depois y, z e w.
- Sem fazer cálculos, diga quais serão as medidas dos três próximos raios.

Figura 193: p. 44, 45 e início da p. 46 do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

Os capítulos 1, 4, 7, 9, 11 e 12 tratam especificamente da Geometria e existem diversas conexões com a Álgebra e com a Aritmética. Para ilustrar, podemos citar o item “Triângulos semelhantes”, pertencente ao capítulo 1 – “Semelhança”:

Triângulos semelhantes

O pentágono SALIN foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:

Os pentágonos SALIN e SALUM têm ângulos iguais, mas não são semelhantes porque de SN para SM o lado diminuiu, enquanto outros lados, como AS, não mudaram.

Agora vamos cortar o triângulo PIN por uma reta paralela a um de seus lados. Os triângulos PIN e PUM têm ângulos iguais:

O que o garoto percebeu é correto. Basta que dois triângulos tenham os ângulos respectivamente iguais para serem semelhantes.

Essa propriedade só é válida para os triângulos, ou seja, não se aplica a outros polígonos, como se pôde perceber no exemplo dos pentágonos SALIN e SALUM.

A forma de um triângulo fica completamente definida quando são conhecidos os seus ângulos. Aliás, basta conhecer dois ângulos, pois o terceiro é o que falta para a soma dos três dar 180°.

Todos os triângulos com um ângulo de 40° e outro de 60° têm esse mecanismo fixado.

[SPRECHER]

• 15

Essa propriedade dos triângulos tem inúmeras aplicações. Uma delas é determinar medidas, como a largura de um rio. Com instrumentos apropriados, os agrimensores medem os ângulos B e C e o lado BC de um triângulo imaginário.

A seguir, o desenhista constrói um triângulo semelhante ao imaginado. Medindo os lados desse triângulo e usando proporcionalidade, encontra-se a largura desejada.

Logo, a largura aproximada do rio é 152 m.

Calculando a largura dessa maneira, evita-se muito trabalho; repare que nem é preciso atravessar o rio!

Problemas desse tipo são comuns em várias atividades e há muitos séculos existem instrumentos para medir ângulos. Na astronomia e na navegação, é essencial saber usá-los, bem como conhecer semelhança de triângulos.

• 16 •

Nas ruas, você já deve ter visto equipes trabalhando sob a orientação de um topógrafo ou um agrimensor. Com um aparelho chamado teodolito, eles medem ângulos e distâncias. Associados a conhecimentos matemáticos, esses dados são usados na elaboração de plantas e mapas.

Teodolito

Topógrafo e seu assistente usando o teodolito.

Foto: Agência de Notícias

Figura 194: p. 15, 16 e início da p. 17 do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

Nesse exemplo, podemos observar uma característica presente no livro todo, as conexões entre a Geometria e o cotidiano, bem como outras áreas do conhecimento.

Desenvolvimento do conteúdo:

Esse livro continua trabalhando o mesmo modelo para a apresentação dos conteúdos dos livros anteriores da coleção. Os assuntos continuam sendo desenvolvidos intuitivamente,

com ênfase na percepção. Analogamente ao livro da 7ª série, aqui também encontramos demonstrações de alguns resultados.

Assim é iniciado o estudo da Geometria nesse livro, onde podemos perceber a ênfase na representação:

Figura 195: p. 06 a 08 e início da p. 09 do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

A representação também é trabalhada nesse livro em outros capítulos, porém com menos frequência do que nos livros das séries anteriores. É importante observar que, nesse livro, praticamente não há propostas que estimulam a construção de materiais que possam ser manipulados; quase sempre os autores pedem para que os alunos “imaginem” determinada situação, como por exemplo: “imagine um quadrilátero construído com ripinhas de madeira e parafusos nos vértices” (p. 214) ou “com uma folha de papel pode-se construir a superfície lateral de um cilindro” (p. 236).

Localizamos uma exceção no capítulo 11 – “Construções geométricas”, onde podemos encontrar um exemplo que trabalha os quatro processos fundamentais na construção do conhecimento geométrico articuladamente:

Dá para construir?

Carlos quer fazer a planta do terreno. Para isso, mediu os quatro lados, anotando os valores na caderneta:

No escritório, quando foi fazer a planta, Carlos percebeu que poderia desenhar mais de um quadrilátero com as medidas indicadas. Veja dois deles:

Os dois quadriláteros foram desenhados na escala 1 para 1 000 e ambos têm as medidas anotadas na caderneta. (Você pode conferir com sua régua.)

[CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA]

• 213

214 •

Como é que dois quadriláteros tão diferentes podem ter os mesmos lados? Esse é um fato geométrico tão curioso quanto importante.

Para compreender o que se passa, imagine um quadrilátero construído com ripinhas de madeira e parafusos nos vértices. Compare-o com um triângulo construído da mesma forma. Há uma grande diferença no comportamento desses dois polígonos.

O quadrilátero de ripinhas não tem rigidez. As medidas dos ângulos podem ser alteradas sem que se alterem as medidas dos lados.

Faça a experiência e comprove. O triângulo de ripinhas não se deforma. Ele tem rigidez geométrica.

Devido a essa propriedade, dizemos que as medidas dos quatro lados não determinam o quadrilátero, isto é, não o caracterizam de forma única. Por outro lado, a rigidez geométrica do triângulo significa que as medidas dos três lados determinam o triângulo, isto é, dois triângulos cujos lados têm respectivamente as mesmas medidas são absolutamente iguais (ou congruentes). Esse fato é conhecido como caso LLL de congruência de triângulos; a sigla LLL significa *lado-lado-lado*.

Assim, num terreno triangular, bastam as medidas dos três lados para construir a planta:

Acompanhe a construção da planta, na escala 1 : 1 000.

Um segmento de 45,7 mm, aproximadamente.

Um arco de raio 28,1 mm.

Outro arco, de raio 39,2 mm. Está pronta a planta de forma triangular.

Voltando ao terreno de Carlos, cuja planta não estava determinada, é preciso conhecer outra medida para construí-la. Você é capaz de dizer que medida pode ser essa?

Uma relação de desigualdade

Imagine que, ao registrar as medidas dos lados do terreno triangular, uma pessoa cometesse um engano e anotasse 75,7 no lugar de 45,7. Ao tentar construir a planta, veja o que aconteceria:

Não se forma o triângulo porque um lado (75,7) não pode ser maior do que (e nem igual a) a soma dos outros dois (28,1 + 39,2). Afinal, a experiência de vida ensina às pessoas que, para ir de A a B, o caminho AB é sempre mais curto do que o caminho AC + CB.

Dito de outro modo: em todo triângulo, qualquer lado é sempre menor do que a soma dos outros dois.

Figura 196: Final da p. 213, p. 214 e início da p. 215 do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

Conforme dissemos acima, esse livro apresenta demonstrações de vários resultados geométricos, o que é feito em todos os capítulos. Esse fato aparece com maior frequência se compararmos esse livro com o da 7ª série; no livro da 8ª série os autores começam a usar a linguagem dedutiva. O capítulo 7 – “Geometria Dedutiva”, dedica-se quase exclusivamente às

deduções e às demonstrações de teoremas. A fim de ilustrar como as demonstrações são tratadas, podemos citar o item “Ângulos nos polígonos”:

Ângulos nos polígonos

Você se lembra deste teorema, que foi apresentado no livro da 7ª série?

Em um polígono de n lados, a soma das medidas dos ângulos internos é

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Atenção: um polígono é delimitado por uma linha poligonal fechada. Esta figura está representando um polígono genérico de n lados.

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Esse teorema pode ser provado dedutivamente. Acompanhe.

Primeiro, imaginamos o polígono de n lados dividido em triângulos, assim:

Aparecem n triângulos. A soma das medidas de todos os seus ângulos é $n \cdot 180^\circ$. Nessa soma estão incluídas as medidas dos ângulos em torno de O , que totalizam 360° . Como esses ângulos não são ângulos internos do polígono, subtraímos 360° da soma $n \cdot 180^\circ$.

Temos, então: $S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$.

Colocando 180° em evidência, provamos o que queríamos:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Toda dedução se apóia em fatos já conhecidos. Nesse caso, o fato anterior é o teorema sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos.

[GEOMETRIA DEDUTIVA]

Agora, usaremos o resultado $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ para demonstrar um novo teorema surpreendente. Ele afirma que a soma das medidas dos ângulos externos dos polígonos é sempre 360° . Acompanhe a argumentação.

Por exemplo, nos pentágonos, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 360^\circ$.

Em cada vértice do polígono, há um ângulo interno e um externo, cujas medidas somam 180° .

Portanto, a soma das medidas de todos os ângulos, internos e externos, é $n \cdot 180^\circ$. Subtraindo desse total a soma das medidas dos ângulos internos, obtemos a soma das medidas dos ângulos externos.

$$S_e = n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_e = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

Isso é o que queríamos provar.

Este teorema que acabamos de demonstrar tem um “pequeno porém”: ele só é válido para os **polígonos convexos**. Veja o que ocorre num polígono não-convexo.

Quando demonstramos o teorema, partimos do fato de que as medidas dos ângulos interno e externo de mesmo vértice somam 180° . Esse fato não se aplica aos polígonos não-convexos, nos quais há pelo menos um ângulo interno que mede mais que 180° .

Portanto, o teorema dos ângulos externos deve ser enunciado assim: Em todo polígono convexo, a soma das medidas dos ângulos externos é 360° .

• 129

130 •

Figura 197: Final da p. 129 e p. 130 do livro de Imenes e Lellis – 8ª série (2002)

Dessa forma, consideramos que esse livro trabalha a Geometria articulando a percepção, a representação e a concepção de forma mais formal que os livros anteriores.

3.4. Visualização dos resultados da pesquisa

As figuras a seguir, constituem uma visualização dos resultados da pesquisa realizada nos livros didáticos selecionados. Em cada uma delas, referente a uma obra específica, observa-se a existência de ênfase ou não nas dimensões percepção, representação, construção e concepção na abordagem realizada pelo autor no desenvolvimento da Geometria, bem como das articulações estabelecidas. As faces do tetraedro coloridas representam o fato de que o

autor se preocupou com determinada dimensão; as arestas com linha contínua representam que houve conexão e com linhas tracejadas significam que não houve conexão entre as faces do tetraedro metafórico.

Sylvestre François Lacroix

Esse livro aborda apenas representação e concepção articuladamente.

Figura 198: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Éléments de Géométrie* de Lacroix, 16ª edição, 1848

Cristiano Benedito Ottoni

Esse livro trabalha apenas representação e concepção articuladamente.

Figura 199: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Elementos de Geometria e Trigonometria Retilínea* de Ottoni, 9ª edição, s.d.

Timotheo Pereira

Esse livro aborda apenas representação e concepção articuladamente.

Figura 200: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Curso de Geometria* de Pereira, 1ª edição, 1890

Alexis Claude Clairaut

Esse livro aborda a Geometria de forma enriquecedora, articulando a percepção, a construção, a representação e a concepção.

Figura 201: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Elementos de Geometria* de Clairaut, 2ª edição, 1909

Francisco Cabrita

O autor estabelece a articulação entre percepção, representação e concepção.

Figura 202: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Elementos de Geometria* de Cabrita, 2ª edição, 1894

F.I.C.

Esse livro trabalha a Geometria articulando apenas representação e concepção.

Figura 203: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Elementos de Geometria* da coleção F.I.C., 1913

F.T.D.

Esse livro trabalha a Geometria articulando percepção, representação e concepção.

Figura 204: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a obra *Geometria Elementar com noções de Agrimensura e de Nivelamento* da coleção F.T.D., 1925

Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza

Os livros de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, de forma geral, abordam a Geometria articulando percepção, representação e concepção.

Figura 205: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para as obras *Matemática* (1º ano – 1941 – 12ª edição; 2º ano – 1936 – 5ª edição) de Thiré e Mello e Souza e *Curso de Matemática* (3º ano – 1936 – 3ª edição; 4º ano – 1934 – 2ª edição; 5º ano – 1940 – 4ª edição) de Roxo, Thiré e Mello e Souza

Osvaldo Sangiorgi

No livro da 1ª série – 1962 (59ª edição) predomina a concepção. O livro da 2ª série – 1955 (13ª edição) não apresenta Geometria. Os livros da 3ª série – 1964 (78ª edição) e da 4ª série – 1963 (64ª edição) articulam representação e concepção. Dessa forma, consideramos que os livros de Osvaldo Sangiorgi publicados antes do Movimento da Matemática Moderna, de modo geral, abordam a Geometria articulando apenas concepção e representação.

Figura 206: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática: curso ginásial* de Sangiorgi

Osvaldo Sangiorgi

Nos volumes 1 e 3 da coleção *Matemática: curso moderno*, há o tratamento da Geometria articulando percepção, representação, construção e concepção.

Figura 207: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática: curso moderno* de Sangiorgi, volume 1, 8ª edição, 1966 e volume 3, 9ª edição, 1971

O volume 2 – 1965 (1ª edição) não trabalha Geometria.

O volume 4 da coleção, aborda a Geometria trabalhando somente a concepção.

Figura 208: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática: curso moderno* de Sangiorgi, volume 4, 5ª edição, 1970

José Ruy Giovanni e Eduardo Parente

O livro da 5ª série trabalha a Geometria articulando percepção, representação e concepção.

Figura 209: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática* de Giovanni e Parente, 5ª série, 1988

O livro da 6ª série aborda a Geometria articulando percepção, representação, construção e concepção.

Figura 210: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática* de Giovanni e Parente, 6ª série, 1988

O livro da 7ª série aborda a Geometria articulando somente percepção e concepção.

Figura 211: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática* de Giovanni e Parente, 7ª série, 1988

O livro da 8ª série trabalha a Geometria desenvolvendo somente a concepção.

Figura 212: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática* de Giovanni e Parente, 8ª série, 1988

Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis

Os livros de Imenes e Lellis, de modo geral, trabalham a Geometria articulando os quatro processos de construção do conhecimento geométrico.

Figura 213: O tetraedro percepção/representação/construção/concepção para a coleção *Matemática para todos* de Imenes e Lellis, 2002

Podemos verificar que alguns dos livros didáticos selecionados são compatíveis com o referencial teórico, ou seja, com as idéias de Machado (1990, 2002). No entanto, a sua utilização depende dos critérios estabelecidos pelo professor que pode ou não propiciar articulações entre os referidos processos de construção do conhecimento geométrico.

No próximo capítulo propomos, a título de ilustração, um conjunto de atividades que possibilitam aos alunos e professores estabelecerem as articulações e o trânsito entre os quatro processos fundamentais na construção do conhecimento geométrico. Tais atividades foram elaboradas de forma tal que as orientações propostas nos atuais PCN's sejam respeitadas.

CAPÍTULO 4

UMA PROPOSTA DE ARTICULAÇÃO ENTRE AS QUATRO FACES DO TETRAEDRO NO ENSINO DA RAZÃO ÁUREA

4.1. Introdução

Conforme discutido nos capítulos anteriores, no processo de construção do conhecimento geométrico, consideramos fundamental a existência de ênfases em quatro dimensões desse tipo de conhecimento: a percepção, a construção, a representação e a concepção. Assim, a título de exemplificação, propomos um conjunto de atividades que possibilitam aos alunos e professores estabelecer essas ênfases.

Iniciaremos com atividades empíricas e exploratórias, tendo em vista a percepção, mas tais atividades estarão diretamente relacionadas com a construção de objetos em sentido físico, bem como com a representação de objetos por meio de desenhos, onde suas propriedades e características serão explicitadas respeitando o nível de amadurecimento dos alunos. Como sugerem os PCN's, por meio da intuição e de experiências concretas os estudantes serão levados a estabelecer conclusões definindo um percurso que os levem à compreensão da importância e necessidade de argumentos para legitimar as conjecturas formuladas.

Escolhemos o tema 'razão áurea' que permite a exploração a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, esculturas, obras arquitetônicas e também da natureza, de maneira a exibir conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. As atividades propõem caminhos para fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e também permitindo o uso do computador.

As atividades estão propostas para serem aplicadas na 8ª série, por envolverem conteúdos como semelhança de figuras geométricas planas e equações do 2º grau, temas esses que se encontram nos atuais livros didáticos dessa série. Uma eventual adaptação sempre pode ser feita para propor essas atividades em outra série.

Comentários para o professor estão disponíveis nos quadros à direita.

4.2. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, arte e arquitetura

Com a classe dividida em grupos, os seguintes problemas podem ser propostos:

Atividade 1: Um sitiante possui um casal de coelhos adultos de uma certa espécie, em um espaço completamente murado. Se nenhum coelho morrer, ele quer saber quantos casais de coelhos adultos existirão ao final de um ano, uma vez que a natureza desses coelhos é tal que cada casal de coelhos adultos gera um casal de filhotes por mês e que cada coelho atinge a maturidade após um mês.

Cada grupo deve preencher uma tabela, conforme indicado abaixo, lembrando que o número de casais a ser preenchido só diz respeito aos coelhos adultos e sabendo que a observação é feita no início de cada mês.

mês	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
casais de adultos													

É importante lembrar que, de acordo com os PCN's, os conteúdos devem ser explorados não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes.

Dessa forma, as atividades propostas aos alunos devem possibilitar o desenvolvimento dos raciocínios lógico, algébrico e geométrico, da argumentação, da capacidade de relacionamento entre os conceitos e da capacidade de resolver problemas; além disso, devem permitir a compreensão de responsabilidade, iniciativa, cooperação, solidariedade, autonomia, observação, interesse, respeito, perseverança, socialização, valores e criatividade, que podem ser desenvolvidos com os trabalhos realizados em grupos.

Caso seja necessário, encaminhe o preenchimento da tabela utilizando o esquema seguinte, onde 1A corresponde a um casal de coelhos adultos e 1a corresponde a um casal de filhotes.

As atividades 1 e 2 são de exploração do conceito de ‘razão áurea’, elas não trabalham diretamente com a Geometria que é o objetivo principal, mas foram colocadas para propiciar a aproximação ao conceito proposto.

De modo geral, a aplicação dessas atividades – principalmente a segunda – em sala de aula, causa grande interesse e estímulo nos alunos a ponto dos próprios professores ficarem impressionados!

Após o preenchimento da tabela, convém contar para os alunos que o problema acima foi proposto pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, também chamado Fibonacci (1180-1250), em seu livro *Liber Abaci*, de 1202. Tal problema deu origem à seqüência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Essa seqüência, onde todo termo após o segundo é igual à soma dos dois que o precedem, recebeu o nome de seqüência de Fibonacci.

Em seguida, peça para que cada grupo calcule o quociente de dois números sucessivos da seqüência de Fibonacci e preencha uma tabela como a seguinte:

Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, nasceu em Pisa, cidade mercantil da Itália. Foi educado na África e viajou muito pela Europa e Ásia Menor. Em 1202, ele publicou o *Liber Abaci*, ou Livro do Cálculo, que foi importante por tornar a Matemática dos árabes e hindus conhecida na Europa. Esse livro popularizou no Ocidente o uso dos algarismos arábicos e os métodos hindus de cálculo com números inteiros, frações e raízes. (ÁVILA, 1985, p. 12)

$1 \div 1$	$1 \div 2$	$2 \div 3$	$3 \div 5$	$5 \div 8$	$8 \div 13$	$13 \div 21$	$21 \div 34$

$34 \div 55$	$55 \div 89$	$89 \div 144$	$144 \div 233$	...

Os alunos devem perceber que os quocientes se aproximam de um valor particular, que era conhecido pelos gregos como *razão áurea* ou *divina proporção* e tem valor aproximado de 0,618.

A sequência de Fibonacci e a razão áurea têm muitas aplicações na vida real, vamos trabalhar com algumas delas!

Atividade 2:

- Material necessário: fita métrica

Cada grupo deve preencher uma tabela como a seguinte onde ‘A’ corresponde à altura de cada aluno e ‘U’ corresponde à medida do umbigo ao chão.

Aluno	A	U	U/A	A/U
1				
2				
3				
4				
5

Os alunos devem medir uns aos outros, registrando as respectivas medidas na tabela e, após, calcular os quocientes solicitados. As razões obtidas serão as mesmas para a maioria

dos alunos: $\frac{U}{A} \cong 0,618$ e o seu inverso $\frac{A}{U} \cong 1,618$.

Os PCN's incentivam o trabalho com as Grandezas e as Medidas que estão presentes em muitas atividades realizadas na vida cotidiana.

De acordo com o documento, as atividades em que as noções de Grandezas e Medidas são exploradas, proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao Espaço e às Formas.

Nessa atividade é tratada a grandeza comprimento. Os PCN's indicam, ainda, que se deve explorar a utilização de instrumentos adequados para fazer as medições, iniciando também uma discussão a respeito de algarismo duvidoso, algarismo significativo e arredondamento.

Conte a eles que nos últimos anos tem sido muito discutida a relação da razão áurea com a beleza. Ela representa a beleza e a harmonia no corpo humano. Um corpo perfeitamente harmonioso traz relações áureas. Dessa forma, a atividade pode ser complementada tomando medidas de outras partes do corpo como, por exemplo:

Na mão, o tamanho dos dedos está relacionado de maneira áurea com cada uma das suas articulações.

b)

A linha dos olhos marca uma divisão áurea no comprimento total da face. O número áureo também é encontrado quando se considera a medida do comprimento de um olho e a distância entre os cantos internos dos dois olhos, conforme mostrado na figura acima à direita. E ainda o número áureo encontra-se na distância entre a base do nariz e a linha da boca e entre essa e a extremidade do queixo.

Atividade 3: Retângulo Áureo

Antes de propor a atividade, pode-se contar aos alunos – ou pedir para que façam uma pesquisa sobre a razão áurea na arquitetura e nas artes – que as propriedades estéticas e artísticas da razão áurea são mostradas no ‘retângulo áureo’ – um

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no Ensino Fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de que o aluno venha a valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e que venha a percebê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

retângulo cujo quociente entre as medidas dos lados é a razão áurea. Esse retângulo é considerado como o mais agradável aos olhos.

Muitas obras famosas de arquitetura e arte, tais como o *Partenon* grego ou templo da deusa Atena, construído no século V a.C. pelo arquiteto e escultor Fídias; a catedral de *Notre Dame de Chartres* na França, considerada a rainha das catedrais góticas⁷⁴ e alguns quadros de Leonardo da Vinci, como a *Monalisa*, foram baseados no retângulo áureo:

Figura 214: O *Partenon* possui na fachada principal um quase exato retângulo áureo (TV CULTURA, 2001).

Figura 215: Catedral de *Chartres*: vista da entrada principal – a catedral tem medidas gigantescas, comparáveis a um estádio e é a mais alta igreja gótica que existe. A razão áurea se encontra em muitas proporções espaciais na catedral. O retângulo áureo foi utilizado na própria planta da igreja:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{A} \cong 0,618 \text{ (KLUG, 2002, p. I e p. 75).}$$

Os PCN's recomendam que o professor deve sempre estabelecer conexões entre o conteúdo tratado com a História da Matemática. Nessa atividade, consideramos que a História tem papel enriquecedor e também motivador.

Considerando novamente os PCN's, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Além disso, é fundamental que os estudos do Espaço e Forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de maneira a permitir ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

⁷⁴ Gótico: estilo arquitetônico que nasceu na Europa no século XIII e se caracteriza pelo arco ogival – cruzamento de dois arcos iguais que se cortam superiormente – e a distribuição da luz através de vitrais.

Figura 216: Retângulos áureos observáveis no quadro da Monalisa de Leonardo da Vinci (TV CULTURA, 2001).

Agora que os alunos já conhecem o retângulo áureo e algumas de suas várias ocorrências no mundo real, é possível e necessário que se proponha uma definição um pouco mais formal dessa figura geométrica. Vamos lá!

Chama-se retângulo áureo – ou retângulo de ouro – um retângulo com a seguinte propriedade: se o dividirmos em um quadrado e um outro retângulo, o novo retângulo será semelhante ao original, ou seja, será também de ouro.

Figura 217: Retângulo áureo

As atividades 3 e 4, partem da percepção, ou seja, da observação da presença do retângulo áureo no mundo ao redor e destacamos suas propriedades e características. Essas atividades também se relacionam diretamente com a construção de objetos em sentido físico, bem como com a representação do retângulo áureo, por meio de desenhos, onde as propriedades são concretizadas.

Dessa forma, a atividade propicia ao professor estabelecer um trânsito natural entre a percepção, a concepção, a representação e a construção no ensino da Geometria.

Sendo a e b as dimensões do retângulo original, a definição acima se traduz na relação $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$.

De onde segue que $b^2 = a^2 - ab \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita $b > 0$, tem-se:

$$b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Invertendo a razão entre os segmentos tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

É comum usar a letra grega φ (*fi*) para denotar a razão áurea. Denotaremos por ϕ o inverso dessa razão:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,618 \quad \text{e} \quad \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618$$

Agora que já se conhece o retângulo áureo bem como as suas características, o próximo passo será construí-lo!

Construção 1:

Material necessário: régua e compasso⁷⁵ e cartolina

Desenhando um retângulo cujo quociente entre os comprimentos dos lados menor e maior é igual ao número áureo,

É importante observar que os PCN's incentivam as interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento.

O documento também sugere que, no quarto ciclo, os problemas de Geometria devam fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo, o que não significa fazer um estudo puramente formal e axiomático, ou seja, as verificações empíricas não devem ser abandonadas.

No alfabeto grego, φ é a letra minúscula enquanto que Φ é a maiúscula.

⁷⁵ Essa atividade pode também ser proposta com o uso do computador usando algum *software* de Geometria Dinâmica como, por exemplo, o *Geometer's Sketchpad*, o *Igeom* ou o *Cabri Géomètre*.

obtem-se um retângulo de ouro. Dessa forma, construa um retângulo cujos lados têm medidas $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ unidades e 1 unidade.

Em primeiro lugar, é preciso obter um segmento de medida $\sqrt{5}$ unidades*. Para isso, pode-se usar uma das construções seguintes utilizando a régua e o compasso. Faça-a na cartolina!

Comece com um triângulo retângulo isósceles de catetos 1 unidade. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{2}$ unidades. Construa um novo triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$ unidades, que terá como medida da hipotenusa $\sqrt{3}$ unidades. O próximo triângulo retângulo deve ter como medidas dos catetos 1 e $\sqrt{3}$ unidades, dessa forma, obtém-se $\sqrt{4}$ unidades como a medida da hipotenusa. Finalmente, construa um triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{4}$ unidades, que terá como medida da hipotenusa $\sqrt{5}$ unidades⁷⁶:

Figura 218: Construção do segmento de medida $\sqrt{5}$ unidades

Podemos também obter um segmento de medida $\sqrt{5}$ unidades, simplesmente construindo um triângulo retângulo de

* Para obter um segmento de medida $\sqrt{5}$ unidades, também se pode usar a construção da Média Geométrica:

Justificativa da construção:

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são tais que $AB = 1$ unidade e $BC = 5$ unidades e foram traçados consecutivamente em uma reta auxiliar. Dessa forma,

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \Leftrightarrow \\ AC &= 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

M é o ponto médio do segmento AC, portanto

$$AM = \frac{AC}{2} = 3.$$

$$\begin{aligned} AM &= AB + BM \Leftrightarrow 3 = 1 + BM \\ \Leftrightarrow BM &= 2 \end{aligned}$$

Com centro no ponto M e raio AM, foi traçada uma semicircunferência e o ponto D foi determinado na semicircunferência, traçando uma reta perpendicular ao segmento AC e que passa pelo ponto B. Dessa forma, $AM = MC = MD = 3$ pois são todos raios da semicircunferência.

Assim, por construção, o triângulo MBD é retângulo. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$MD^2 = BD^2 + BM^2$$

$$3^2 = BD^2 + 2^2$$

$$BD^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$BD = \sqrt{5} \text{ unidades.}$$

⁷⁶ A idéia é interessante, pois pode ser generalizada.

catetos 1 unidade e 2 unidades. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{5}$ unidades:

Figura 219: Construção do segmento de medida $\sqrt{5}$ unidades

Agora que já temos um segmento $\overline{AB}$ de medida $\sqrt{5}$ unidades, é fácil obter o segmento $\overline{AD}$ de medida $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ unidades!

Figura 220: Construção do segmento $\overline{AD}$ de medida $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ unidades

Vamos finalizar a construção, desenhando o retângulo cujos lados têm medidas $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ unidades e 1 unidade, respectivamente:

Figura 221: Construção do Retângulo Áureo

Os PCN's colocam como ensino de procedimentos a construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro e transferidor, estabelecendo a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.

Nessa atividade o professor pode e deve incentivar os alunos a usar os instrumentos apropriados.

Acreditamos que o uso da régua e do compasso na resolução de problemas geométricos desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo, a coordenação motora, além do sentido de organização, limpeza, ordem, capricho, precisão, conservação. Independente da área a que possa se dedicar como profissional, o estudante

Qualquer retângulo semelhante a esse que foi construído, é áureo! Dessa forma, pode-se usar o recurso da homotetia⁷⁷ e desenhar vários retângulos áureos:

Figura 222: Construção de Retângulos Áureos usando a homotetia

É importante lembrar que os PCN's sugerem atividades que trabalhem com as transformações geométricas – isometrias, homotetias – de maneira a permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e também como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Construção 2:

Material necessário: régua e compasso

Nessa construção, partimos de um quadrado para obter o retângulo áureo:

Construa um quadrado ABCD qualquer. Encontre o ponto médio M do lado $\overline{AB}$. Com o compasso com centro em M e abertura MC, trace um arco de circunferência que intercepta o prolongamento do lado $\overline{AB}$ no ponto E. $\overline{AE}$ é a base do retângulo áureo. Para completá-lo, basta traçar uma reta perpendicular a $\overline{AE}$ pelo ponto E, que intercepta o prolongamento de $\overline{CD}$ no ponto F. AEFD é um retângulo áureo:

⁷⁷ O Anexo D apresenta comentários sobre o recurso da homotetia.

Por construção, o triângulo MBC é retângulo. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 \Leftrightarrow MC^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2 \Leftrightarrow MC^2 = \frac{5L^2}{4}$$

$$\text{Portanto: } MC = \frac{L\sqrt{5}}{2}.$$

ME = MC, por construção. Assim, temos:

$$AE = AM + ME \Leftrightarrow AE = \frac{L}{2} + \frac{L\sqrt{5}}{2} = \frac{L}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{L}{\frac{L}{2}(\sqrt{5} + 1)} \Leftrightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} \Leftrightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0,618$$

Dessa forma comprovamos que o retângulo AEFD é áureo, não importando qual a medida L do quadrado originalmente considerado.

Atividade 4: Espiral Áurea

- Material necessário: régua e compasso

Como vimos, um retângulo áureo tem a interessante propriedade de que, se o dividirmos num quadrado e num retângulo, o novo retângulo é também de ouro. Repetindo este processo infinitamente, temos:

Nessa atividade, partimos da percepção à representação do retângulo áureo. Em seguida, buscamos novamente a percepção para chegarmos à concepção.

É importante o professor perceber que esse caminho não deve ser linear e sim buscar meios que possibilitem uma articulação entre todos os processos necessários para a construção do conhecimento geométrico.

Figura 225: Seqüência de Retângulos Áureos

E unindo os vértices diametralmente opostos dos quadrados gerados, obtém-se uma espiral a que se dá o nome de ‘espiral áurea’.

Solicite aos alunos que construam uma espiral áurea utilizando os retângulos construídos na atividade anterior!

Figura 226: Espiral Áurea

Após essa atividade pode-se mostrar aos alunos que a espiral fornece o padrão matemático para o princípio biológico que regula o crescimento das conchas: o tamanho aumenta, mas o formato não se altera.

Aqui está um bom momento de estabelecer uma conexão entre a Geometria e o Meio Ambiente, o que os PCN's colocam como um dos Temas Transversais.

Figura 227: Concha do molusco Náutilo (ROCHA, 1999, p. 63)

Atividade 5: Pentagrama

- Material necessário: régua e compasso

Proponha aos alunos que construam um pentágono regular. Para isso deverão seguir os seguintes passos:

Construa uma circunferência λ de raio qualquer e centro O na qual o pentágono será inscrito. Trace em λ dois diâmetros perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Determine o ponto E , médio do segmento DO . Com o compasso centrado em E e abertura EA , trace um arco de circunferência que intercepta o diâmetro CD no ponto F . O lado do pentágono regular é o segmento de medida AF . Dessa forma, com o compasso de abertura AF , determine os pontos G , H , I e J na circunferência, obtendo os vértices do pentágono⁷⁸.

Figura 228: Construção do pentágono regular

Agora peça para que os alunos desenhem as diagonais do pentágono, formando, assim, uma estrela. Essa figura recebe o nome de ‘pentagrama’. A seguir, peça para que eles meçam os

Estamos começando, essa atividade com a representação, ou seja, com a reprodução do desenho do pentágono regular usando a régua e o compasso, no entanto, o professor pode também partir da construção, isto é, usar dobraduras para construir o polígono solicitado.

Por meio de dobraduras é possível dividir um círculo em 10 setores congruentes, ou seja, o problema consiste em construir um ângulo central de 36° :

Como o ângulo central de um pentágono regular tem medida 72° , basta tomar o dobro do ângulo construído para construir o pentágono regular.

O professor pode também apresentar a justificativa da sequência de dobraduras utilizada, o que recai na razão áurea.

O Anexo F apresenta os passos da construção efetuada bem como a justificativa da dobradura realizada.

⁷⁸ O Anexo E apresenta a justificativa da construção do pentágono regular.

segmentos AL, LI e AI, conforme mostra a figura abaixo e que

calculam as razões $\frac{AL}{LI}$ e $\frac{LI}{AI}$.

Figura 229: Pentágono regular estrelado

As atividades 5, 6 e 7, trabalham com o pentagrama. Na atividade 5, partimos da representação chegando à percepção. Em seguida, buscamos meios para chegarmos à concepção embora seja de maneira informal.

Os alunos irão verificar experimentalmente a ocorrência da divisão áurea num pentágono regular. Conte a eles que a interseção de duas de suas diagonais divide qualquer uma delas

de forma áurea. Por exemplo $\frac{AL}{LI} = \frac{LI}{AI} \cong 0,618$.

Atividade 6: Construindo um pentagrama com uma tira de papel

Peça aos alunos que peguem uma tira de papel de aproximadamente 2 cm de largura e que a dobrem dando um “nó plano”, como está mostrado na figura abaixo.

Figura 230: Tira de papel dobrada formando um “nó plano”

Em seguida, na atividade 6, recorreremos à construção, embora seja importante comentar com os alunos que se trata de uma construção aproximada, para chegarmos à percepção.

A seguir, proponha que olhem o nó formado contra a luz. Eles observarão, no interior da figura, a formação da estrela de cinco pontas, isto é, o pentagrama!

Após essas atividades, conte aos alunos que a razão áurea fascinou os antigos gregos e foi largamente usada por artistas e arquitetos por razões estéticas. Ela é conhecida desde os pitagóricos – século V a.C. Ao que tudo indica, essa razão foi descoberta no pentágono regular, que exhibe segmentos divididos na razão áurea, conforme foi visto. Talvez esse tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama como símbolo de seu grupo.

É importante lembrar de sempre fazer uso da História da Matemática conforme sugerem os PCN's.

Essa figura envolvia um misticismo, provavelmente, devido às suas propriedades, pois ao desenhar um pentágono regular e traçar as suas diagonais, elas se cruzam e formam um novo pentágono interior ao primeiro.

O pentágono também é encontrado na natureza. Se sobrepuermos um pentágono estrelado à azaléia, veremos que essa flor está formada por proporções áureas.

Figura 231: Azaléia (GUIMARÃES, 1997, p. 65).

O professor pode pedir para os alunos trazerem algumas dessas flores para uma verificação experimental do fato.

Novamente temos uma boa oportunidade de estabelecer uma conexão entre a Geometria e a natureza, o que pode favorecer um trabalho integrado entre a Matemática e outras disciplinas.

O mesmo pode ser visto com outras flores como, por exemplo, na petúnia e no jasmim estrela.

Figura 232: A petúnia e o jasmim estrela (ROCHA, 1999, p. 67)

Atividade 7: Triângulos em um pentagrama⁷⁹

A partir do pentagrama construído na atividade 5, peça para que os alunos respondam as questões seguintes, onde trabalharemos as noções de semelhança e congruência.

Figura 233: Pentagrama

A atividade 7, partindo da representação, permite ao professor relacionar os outros processos – percepção, concepção e novamente a representação – através de um conjunto de perguntas que relaciona o pentagrama com suas propriedades e características.

É importante ressaltar novamente que o professor não precisa seguir um caminho “linear” e sim busque meios que possibilitem uma articulação entre todos os processos necessários na construção do conhecimento geométrico.

⁷⁹ Essa atividade é uma adaptação do artigo *Pentagrams and Spirals* da revista *Mathematics Teacher* de novembro de 1996.

- Determine as medidas de todos os ângulos formados na figura, sem usar o transferidor. Cheque suas respostas com as de seus colegas.
- Dentre todos os triângulos do pentagrama, quantos não são isósceles?
- Suponha que a designação de um triângulo seja feita pelas medidas de seus ângulos. Por exemplo, alguns dos triângulos do pentagrama poderiam ser chamados de triângulos $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$. Que outras combinações são possíveis? Quantos triângulos de tamanhos diferentes são possíveis para cada tipo? Liste triângulos de tamanhos diferentes que você encontrar para cada formato.
- Liste cada conjunto de triângulos congruentes que você consegue achar na figura.
- Considere somente o triângulo ACD e os dois triângulos nos quais é dividido por DJ. O triângulo ACD é semelhante a qual deles? Por quê?
- Você pode verificar que a relação de proporcionalidade entre os lados desses dois triângulos semelhantes nos dá a razão áurea!

Figura 234: Pentagrama

Exemplos de resolução das questões da Atividade 7:

Como o pentágono é regular, temos:

$$EA=AB=BC=CD=DE.$$

E podemos calcular a medida de cada um de seus ângulos internos:

$$\begin{aligned} m(\widehat{EAB}) &= m(\widehat{ABC}) = \\ &= m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{CDE}) = \\ &= m(\widehat{DEA}) = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ. \end{aligned}$$

Dessa forma, nos triângulos isósceles e congruentes $\triangle EAB$, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$ e $\triangle DEA$ as medidas de seus ângulos internos são dadas por: 108° , 36° e 36° , como ilustrado na figura abaixo, onde:

$$\begin{aligned} m(\widehat{ABE}) &= m(\widehat{AEB}) = \\ &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ. \end{aligned}$$

Da mesma figura podemos deduzir facilmente as medidas de todos os outros ângulos do pentagrama:

De acordo com as medidas dos ângulos obtidas acima, todos os triângulos do pentagrama são isósceles.

As possíveis combinações de triângulos formados no pentagrama são:

- Triângulos $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$, que possui três triângulos de tamanhos diferentes:
 - $\triangle AHI \cong \triangle BIJ \cong \triangle CJF \cong \triangle DFG \cong \triangle EGH$

- Note que o triângulo $\triangle ACD$ é um triângulo isósceles especial, ou seja, a bissetriz de um dos ângulos da base divide o triângulo em dois novos triângulos isósceles. Tal triângulo é chamado 'triângulo isósceles áureo'. Assim como o retângulo áureo, ele tem a propriedade de que se traçarmos a bissetriz de um dos ângulos da base, o novo triângulo é também de ouro. Repetindo este processo infinitamente, temos:

Figura 235: Sequência de Triângulos Áureos

- E você também pode obter uma espiral. Construa-a com o auxílio do compasso!

Figura 236: Espiral Áurea

$$\begin{aligned} \text{ii) } \triangle ABJ &\cong \triangle AGE \cong \triangle BAH \\ &\cong \triangle BCF \cong \triangle CBI \cong \triangle CDG \\ &\cong \triangle DCJ \cong \triangle DEH \cong \triangle EDF \\ &\cong \triangle EAI \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \triangle ACD &\cong \triangle BDE \cong \\ &\triangle CEA \cong \triangle DAB \cong \triangle EBC \end{aligned}$$

- Triângulos $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$, que possui dois triângulos de tamanhos diferentes:

$$\begin{aligned} \text{i) } \triangle FCD &\cong \triangle GDE \cong \triangle HEA \\ &\cong \triangle IAB \cong \triangle JBC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \triangle ABE &\cong \triangle BCA \cong \triangle CDB \\ &\cong \triangle DEC \cong \triangle EAD \cong \\ &\triangle FEB \cong \triangle GAC \cong \\ &\triangle HBD \cong \triangle ICE \cong \triangle JD \end{aligned}$$

O triângulo $\triangle ACD$ é semelhante ao $\triangle DJC$, pois possuem os ângulos congruentes. Medindo os lados correspondentes desses dois triângulos semelhantes e calculando as razões entre esses lados, é possível verificar que a relação de proporcionalidade entre os lados desses dois triângulos semelhantes nos dá a razão

$$\text{áurea: } \frac{DJ}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{JC}{CD} \cong 0,618$$

Considerando que $AC=AD=a$ e $DC=DJ=b$, e como $\triangle AJD$ é isósceles, temos que $DJ=AJ=b$ e, assim, $CJ=a-b$.

$$\text{Logo, } \frac{DJ}{AC} = \frac{JC}{CD} \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow b^2 = a(a-b)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita $b > 0$:

$$b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,618$$

Atividade 8: Segmento Áureo

Euclides (323 - 285 a.C.), o matemático grego autor de *Os Elementos*, a obra que foi fundamental para a Geometria durante muitos séculos, descreveu em seu livro VI, proposição 30, uma maneira de se buscar o modo mais harmonioso de se “dividir um segmento de reta em média e extrema razão”, ou seja, dividir um segmento de reta em duas partes de tal modo que a razão entre a menor parte e a maior parte fosse igual à razão entre a maior parte e o segmento total.

As atividades 8 e 9, trabalham com o segmento áureo. Estamos partindo da História e explorando as dimensões da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico.

Cabe ao professor, portanto, procurar estratégias de ensino evitando o tratamento isolado de qualquer um dos quatro processos.

Seja o segmento AB de comprimento ‘a’ com um ponto C em seu interior dividindo-o em duas partes com a propriedade acima:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

O segmento AC com essa propriedade é chamado “segmento áureo interno de AB” (divisão áurea ou divisão em média e extrema razão de um segmento).

A relação $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$ é precisamente a relação $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$

se pusermos $AB = a$ e $AC = b$.

Logo, $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$.

Podemos ainda obter um outro ponto C’ de forma que o segmento AC’ será chamado de “segmento áureo externo de AB”. Ele é obtido pela seguinte relação:

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC'}{BC'}$$

Vamos construir um segmento áureo!

- Material necessário: régua e compasso

Considere um segmento AB de medida 'a' do qual queremos obter a divisão áurea. Determine o ponto médio M de AB. Trace uma reta perpendicular ao segmento AB pela extremidade B. Determine o ponto D na perpendicular construída, tal que BD = BM. Trace uma reta pelos pontos A e D. Com o compasso centrado no ponto D, trace uma circunferência de raio BD. Determine os pontos E e E' de intersecção entre a reta AD e a circunferência anterior.

AE = AC = segmento áureo interno de AB:

$$AE = AC = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) AB.$$

AE' = AC' = segmento áureo externo de AB:

$$AE' = AC' = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) AB.$$

Figura 237: Construção do segmento áureo

Justificativa da construção do segmento áureo:

Consideremos $AB = a$. M é o ponto médio do segmento AB,

$$\text{portanto } AM = MB = \frac{a}{2}.$$

$BM = BD = DE$, por construção. Dessa forma,

$$BD = DE = \frac{a}{2}.$$

O triângulo ABD é retângulo por construção. Assim, considerando $AE = AC = b$ e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(b + \frac{a}{2} \right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

Fazendo $y = b + \frac{a}{2}$, temos:

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{2} a$$

$$\text{Logo, } b + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \Leftrightarrow AC \cong 0,618 AB.$$

Por outro lado, temos que:

$$AC' = AE' = AD + DE' \Leftrightarrow$$

$$AC' = \left(b + \frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$AC' = b + a$$

Substituindo o valor de b encontrado, temos:

$$AC' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a + a \Leftrightarrow$$

$$AC' = \frac{a\sqrt{5}-a+2a}{2} \Leftrightarrow$$

$$AC' = \frac{a\sqrt{5}+a}{2} \Leftrightarrow AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$$

$$\therefore AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB$$

Ou seja, $AC' \cong 1,618 AB$.

Atividade 9:

- Material necessário: régua e compasso

Retomando à Atividade 2, onde os alunos mediram as suas alturas e as medidas do umbigo ao chão, solicite que agora verifiquem a divisão áurea (por meio da construção com régua e compasso do segmento áureo) no Doryphoros ou “portador de lança” – obra de escultura grega pertencente ao século V a.C. que foi criada por Policleto, que escreveu um tratado sobre as proporções áureas no corpo humano.

Dividindo o segmento de reta AB, que representa a altura de Doryphoros, em média e extrema razão, a reta perpendicular que passa pelo ponto da divisão áurea, toca que parte do corpo de Doryphoros?

Figura 238: Doryphoros, o portador de lança (DOCZI, 1990, p. 104)

Atividade 10: Uma última sugestão é o vídeo *Donald no país da Matemática* que mostra de forma divertida uma aventura do Pato Donald descobrindo várias aplicações da Matemática ao mundo real, dentre elas, a razão áurea!

A fim de elaborar esse conjunto de atividades foi utilizada a seguinte Bibliografia:

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Brasília: SBM, 1984.

ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 6, p. 9 – 14, 1985.

CARVALHO, J.P. Um problema de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 17, p. 4 – 9, 1990.

DOCZI, G. *O poder dos limites – Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura*. São Paulo: Mercuryo, 1990.

DONALD no país da matemágica. Produção de Milt Banta, Bill Berg, Dr. Heinz Haber. Distribuição de Buena Vista Home Video. Califórnia: Walt Disney Co., 1959. 1 fita de vídeo (30 min.), son., color.

DOUGLAS, L. Pentagrams and Spirals. *Mathematics Teacher*, NCTM, v. 89, n. 8, p. 680 – 686, 1996.

EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. São Paulo: Atual, 1992.

GUIMARÃES, J.L. Números camuflados. *Revista Superinteressante*, São Paulo, n. 10, p. 63 – 67, 1997.

KLUG, S.U. *Catedral de Chartres – A Geometria Sagrada do Cosmos*. São Paulo: Madras, 2002.

KUMAYAMA, H.; WAGNER, E. Origami. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 29, p. 41 – 44, 1995.

MANDARINO, D.G. *et al. Desenho Geométrico e Introdução ao Projeto*. São Paulo: Plêiade, s.d.

RAMALHO, R. *Construções Geométricas com régua e compasso*. Pernambuco: UFP, 1984.

ROCHA, A.J.F. *Estratégias de aplicação do segmento áureo no design*. 1999. 158p. Tese (Doutorado em Comunicação e Artes) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 1999.

TV CULTURA. *Arte & Matemática*. São Paulo: TV Cultura, 2001. Disponível em: <<http://www.tvcultura.com.br/artematematica/home.html>>. Acesso em: 02 abr. 2005.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. São Paulo: Coleção do professor de matemática, SBM, 1993.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Coerente com a teoria defendida por Machado (1990, 2002) que, conforme vimos, garante que, no processo de construção do conhecimento geométrico em qualquer nível do ensino, em vez de uma polarização percepção/concepção, é fundamental o trabalho articulado de quatro aspectos: a percepção, a construção, a representação e a concepção, nossa pesquisa envolveu:

- i.) um estudo sobre o desenvolvimento histórico do ensino da Geometria ancorado nas principais reformas curriculares instituídas no sistema nacional de ensino particularmente no período que vai da 5ª até a 8ª série do Ensino Fundamental;
- ii.) a análise de alguns livros didáticos que foram usados por alunos e professores no decorrer do tempo;
- iii.) a proposta de algumas atividades de ensino elaboradas com a preocupação de englobar e articular os processos descritos e necessários para a construção do conhecimento geométrico bem como as indicações estabelecidas na proposta curricular vigente, ou seja, nos PCN'S.

Tanto nas propostas curriculares como nos livros didáticos analisados, tivemos como intenção principal a investigação do quanto o tetraedro metafórico é respeitado. A data fixada como ponto de partida de nossos estudos foi o ano de 1837, quando foi criado o Colégio Pedro II – escola que ditou as diretrizes para o ensino secundário no Brasil por um longo tempo.

A partir do levantamento histórico realizado no Capítulo 2, concluímos que a aprendizagem da Geometria sempre foi considerada fundamental desde essa época. De fato, o ensino da Geometria era obrigatório no Brasil desde a criação dos cursos jurídicos em 1827. Juntamente com matérias literárias, a Geometria fazia parte do conjunto de disciplinas necessárias para ingresso nesses cursos.

Nessa época, de modo geral, exceção feita ao livro de Clairaut⁸⁰, os livros didáticos usados no primeiro período fixado na pesquisa – 1827 a 1930 – caracterizado pelo fato de que os diferentes ramos da Matemática – a Aritmética, a Álgebra e a Geometria – eram ensinados separadamente e por professores diferentes, seguiam a abordagem euclidiana no estudo da Geometria e abordavam apenas a representação e a concepção articuladamente.

No segundo período fixado na pesquisa – 1930 a 1960⁸¹ – os autores Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, que trabalhavam no Colégio Pedro II, sendo diretamente atingidos pela reforma, abordaram a Geometria articulando percepção, representação e concepção, procurando “fugir” da rígida Geometria Euclidiana, ou seja, a Geometria procurou ser introduzida por meio de um ensino intuitivo, experimental, caminhando progressivamente para uma etapa mais formal e abstrata. No entanto, os livros de Osvaldo Sangiorgi desse mesmo período e que foram muito utilizados no ensino, de forma geral, abordavam a Geometria articulando apenas concepção e representação, seguindo a abordagem euclidiana.

Com relação à abordagem euclidiana no tratamento da Geometria, Barufi (1999) afirma que:

[...] o conteúdo da Geometria Euclidiana era trabalhado, durante alguns anos da escola fundamental, através de uma grande relação de postulados, definições, propriedades, lemas e teoremas. As demonstrações necessárias eram efetuadas, principalmente para tornar explícito o caráter dedutivo da Geometria, embora não houvesse garantia alguma de convencimento. Nesse contexto, os alunos começavam a formar algumas idéias, e, não muito mais do que isso, a respeito do que pudesse vir a ser uma teoria dedutiva, pois o trabalho com o conteúdo da Geometria, logicamente estruturado, constituía, normalmente, uma simples revelação. Aquilo que ficava claro para os estudantes era a existência de um certo tipo de linguagem e talvez de algumas propriedades das figuras geométricas. Nada disso, entretanto, garantia aprendizagem significativa e, por isso mesmo, precisou ser revisto. Uma vez que o esquema anterior era ineficiente, ao se pensar em conhecimento construído significativamente, a Geometria passou a ser tratada de maneira muito diferente. Normalmente, o tratamento lógico-formal dedutivo foi

⁸⁰ Como vimos, Clairaut procurou articular os quatro processos fundamentais no ensino da Geometria.

⁸¹ O segundo período é caracterizado pela unificação dos diversos campos da Matemática sendo criada uma nova disciplina denominada “Matemática” e que ficou sob a responsabilidade de um só professor – fato que foi implementado pela Reforma Francisco Campos, em 1931.

sendo atenuado, buscando mais o convencimento através de verificações, deixando, muitas vezes de lado, as demonstrações rigorosas. (p. 149)

Com a Matemática Moderna, as tentativas de ensinar a Geometria sob o enfoque das transformações e dos planos vetoriais respeitando as orientações do movimento⁸², fizeram com que, a partir da década de 1960, o ensino da Geometria fosse relegado a um segundo plano. Dessa forma, como muitos professores não dominavam esses assuntos, passaram a trabalhar preferencialmente a Álgebra (PAVANELLO, 1989), o que pode ser constatado pelo fato de que os livros didáticos passaram a abordar a Geometria nos capítulos finais, característica essa que permaneceu até a década de 1990.

Como vimos no desenvolvimento da pesquisa, as marcas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna foram muito fortes e as tentativas de modificação que foram ocorrendo, aconteceram de forma bastante lenta. Os livros didáticos publicados após as críticas à Matemática Moderna, ainda apresentavam sinais deixados pelo movimento. Os próprios PCN's, que surgiram a partir de uma análise crítica às Propostas Curriculares anteriores, possuem como um dos focos principais, a crítica à influência da Matemática Moderna que prevaleceu ainda durante vários anos.

No entanto, nessas décadas que correspondem ao terceiro período fixado na pesquisa – 1960 a 1980 – correspondente à Matemática Moderna e também ao início do quarto período fixado na pesquisa – período pós Matemática Moderna – 1980 a 2006 – os livros didáticos abordaram a Geometria de modo diferente em cada um de seus volumes: ora articulando os quatro processos, como nos volumes 1 e 3 da coleção *Matemática: curso moderno*, de Osvaldo Sangiorgi e no livro da 6ª série de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, ora trabalhando somente a concepção, como no volume 4 da coleção *Matemática: curso moderno*, de Osvaldo Sangiorgi e no livro da 8ª série de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente. Já o livro da 5ª série de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente trabalha a Geometria articulando percepção, representação e concepção. O livro da 7ª série desses mesmos autores aborda a Geometria articulando somente percepção e concepção.

⁸² As orientações propostas no Movimento da Matemática Moderna eram o de trabalhar a Matemática segundo a linguagem da Teoria dos Conjuntos, fazendo um estudo de estruturas de ordem, algébricas e topológicas, por meio de um estudo axiomático.

Nos dias atuais, os livros didáticos de forma geral, distribuem a Geometria no decorrer do livro todo articulando os quatro processos de construção do conhecimento geométrico, como pudemos constatar nos livros de Imenes e Lellis que foram analisados como representantes desse período. Esses livros foram escritos com base nas recomendações dos PCN's que estão em vigor e que, como vimos, estimulam o desenvolvimento e o trânsito entre a percepção, a construção, a representação e a concepção no ensino da Geometria.

É importante observar novamente que escolhemos alguns livros representativos de cada período histórico estabelecido já que, de acordo com Imenes (1989), os diferentes livros didáticos de uma mesma época, apresentam profundas semelhanças e poucas diferenças, salvo raras exceções.

Dessa forma, nos livros selecionados que são significativos foi possível verificar que alguns deles são compatíveis com o modelo constituído a partir das idéias de Machado (1990, 2002). Mesmo considerando livros publicados muitos anos atrás, constatamos que já existiam alguns que apresentavam propostas diferenciadas para o tratamento da Geometria – é o caso, por exemplo, do livro de Clairaut. “Em poucas palavras, podemos dizer que livros bons sempre existiram”. (BARUFI, 1999, p. 127)

Do exposto, também é possível verificar que, em todos os períodos, sempre houve preocupação, por parte dos autores dos livros didáticos, em trabalhar com a representação. O mesmo não aconteceu com a construção de objetos em sentido físico, que foi desenvolvida somente em alguns dos livros analisados.

Apesar disso, os alunos continuam chegando ao Ensino Superior sem praticamente nenhuma noção dos conteúdos geométricos elementares e sem ter praticado o uso dos materiais de desenho, já que a representação, embora estando presente nos livros didáticos, praticamente sumiu do conteúdo desenvolvido pelos professores na maioria das escolas.

É importante observar novamente que os autores dos livros didáticos atuais estão preocupados em transitar entre as quatro faces do tetraedro no ensino da Geometria. Dessa forma, espera-se que os alunos que estão sendo formados atualmente com o uso desses livros apresentem uma melhor compreensão da Geometria quando chegarem ao Ensino Superior daqui a alguns anos. Entretanto, isso não depende apenas dos livros didáticos, mas principalmente das concepções que os professores apresentam sobre a Geometria e o seu

ensino, bem como de suas práticas em sala de aula. Cabe ao professor desenvolver a Geometria evitando o tratamento isolado de qualquer uma das quatro faces do tetraedro metafórico.

A utilização do livro didático, conforme os critérios do professor, poderá ser um instrumento mais ou menos facilitador do processo de ensino/aprendizagem da Geometria, no sentido de propiciar maior ou menor vivência no equilíbrio e no trânsito dos quatro aspectos que podem otimizar a construção do conhecimento geométrico. “A figura do professor é absolutamente necessária, pois apenas ele tem a capacidade de encontrar problemas adequados, pertinentes e compatíveis com o grupo de seus alunos. O professor precisa definir assim o seu projeto para viabilizar a construção do conhecimento desejado”. (BARUFI, 1999, p. 154-155)

Dessa forma, deixamos como sugestão para futuras pesquisas o estudo das concepções dos professores de Matemática, bem como dos alunos de Licenciatura em Matemática, com relação ao ensino da Geometria. Ressaltamos que o estudo aqui descrito optou por analisar nas Propostas Curriculares e nos livros didáticos o quanto o tetraedro metafórico é privilegiado. Uma pesquisa focada no educador poderia avaliar em que medida a questão da exploração do tetraedro é considerada nas práticas dos professores, ou seja, qual a visão que eles possuem sobre os quatro aspectos fundamentais na construção do conhecimento geométrico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, S. *Introdução às construções geométricas*. São Paulo: IME/USP, 1991.

BARUFI, M.C.B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 1999. 184p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BELLO, J.L.P. *História da Educação no Brasil*. 2004. Disponível em:
<<http://www.pedagogiaemfoco.pro.br>>. Acesso em: 10 jan. 2006.

BRANDÃO, L.O. *Igeom*. Disponível em: <<http://www.matematica.br/iggeom>>. Acesso em: 25 jun. 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática*. Brasília : MEC/SEF, 1998.

BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M.H.W.L. Geometria Dinâmica: uma nova Geometria?
Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 49, p. 22 – 26, 2002.

CHANG TUNG-SUN. A teoria do conhecimento de um filósofo chinês. In: CAMPOS, H. (org.). *Ideograma: lógica, poesia, linguagem*. São Paulo: EDUSP, 2000.

CHOMSKY, N. Linguagem – Enunciação. Tradução de Francisca Xavier. In: *Enciclopédia Einaudi*. Vila da Maia: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1984. v. 2, p. 11-56.

CLAIRAUT, A.C. *Elementos de Geometria*. Tradução de José Feliciano. São Paulo: Empresa Bibliópola, 1892.

D'AMBROSIO, U. *Sobre o conceito de currículo*. Disponível em:

<<http://vello.sites.uol.com.br/palestras.htm>>. Acesso em: 14 maio 2005.

DANTAS, M.M.S. Entrevista. *A educação Matemática em Revista*, São Paulo, n. 12, ano 9, p. 04 – 10, 2002.

DANTE, L.R. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 6, p. 32 – 35, 1985.

DESCARTES, R. *Discurso do método: para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências*. São Paulo: Paulus, 2002.

FAINGUELERNT, E.K. *Educação Matemática: representação e construção em geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FERREIRA, E.S.; GAZZETTA, M. O tetraedro cultural. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, Porto, 17 a 22 de julho de 2005. *Anais do V CIBEM*. Porto: Universidade do Porto, 2005.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, Campinas, n. 04, p. 01 – 37, 1995.

FREIRE, O. *Noções de Geometria Prática*. 25.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1922.

GTG. *Para a renovação do ensino da geometria*. 1998. Disponível em:

<<http://www.apm.pt/apm/geometria/homegtg.html>>. Acesso em: 25 jun. 2006.

HAIDAR, M.L.M. *O Ensino Secundário no Império Brasileiro*. São Paulo: Grijalbo, USP, 1972.

HOFFER, A. Geometria é mais que prova. Tradução de Antonio Carlos Brolezzi. *Mathematics Teacher*, NCTM, v. 74, n. 1, p. 11 – 18, 1981.

IMENES, L.M.P. *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática*. 1998. 326p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

IMENES, L.M.P.; JAKUBOVIC, J. Poliedros, abelhas, arquitetura e ... futebol. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 3, p. 5 – 11, 1983.

KALEFF, A.M.M.R. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. *A educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 2, p. 19 – 25, 1994.

KALEFF, A.M.M.R.; REI, D.M.; GARCIA, S.S. *Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas*. Série Conversando com o professor sobre Geometria – volume 1. Rio de Janeiro: EDUFF, 1997.

KANEGAE, C.F.; LOPES, E.T. *Desenho Geométrico*. São Paulo: Scipione, 1999.

KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2006. 413p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KLEIN, F. *Matemática Elemental desde un punto de vista superior – vol. II: Geometria*. Tradução de R. Fontanilla. Madrid: Nuevas Gráficas S. A., 1908.

KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna*. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Tradução de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, M.L.M.L. Entrevista. *A educação Matemática em Revista*, São Paulo, n. 8, p. 05 – 09, 2000.

MACHADO, N.J. *Matemática e língua materna (Análise de uma impregnação mútua)*. São Paulo: Cortez, 1990.

MACHADO, N.J. *Epistemologia e Didática. As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 2002.

MANDARINO, D.G. *et al. Desenho Geométrico e Introdução ao Projeto*. São Paulo: Plêiade, s.d.

MEC. Secretaria de Educação. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br>>. Acesso em: 25 jun. 2006.

MIORIM, M.A.; MIGUEL, A. FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. *Revista Zetetiké*, Campinas, n. 01, ano 01, p. 19 – 39, 1993.

MIORIM, M.A. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M.A. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, Porto, 17 a 22 de julho de 2005. *Anais do V CIBEM*. Porto: Universidade do Porto, 2005.

NASSER, L.; LOPES, M.L.M.L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

OLIVA, W.M. A independência do axioma das paralelas e as Geometrias Não-Euclidianas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 02, p. 28 – 31, 1983.

PAVANELLO, R.M. *O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica*. 1989. 196p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989.

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, Campinas, n. 01, ano 01, p. 07 – 17, 1993.

PILETTI, N. *História da Educação no Brasil*. São Paulo: Ática, 1996.

PIRES, C.M.C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000

PIRES, R.C. *A Geometria dos positivistas brasileiros*. 1998. 281p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

PUTNOKI, J.C. Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 13, p. 13 – 17, 1988.

RAMALHO, R. *Construções Geométricas com régua e compasso*. Tópicos de Ensino de Ciências. Pernambuco: UFP, 1984.

ROMANELLI, O. O. *História da Educação no Brasil (1930 / 1973)*. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 1986.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. *Guias Curriculares para o ensino de 1º grau*. São Paulo: CERHUPE, 1975.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Subsídios para a implementação do Guia Curricular de Matemática: Geometria para o 1º grau – 5ª a 8ª séries*. São Paulo: SE/CENP, 1978.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o ensino de Matemática, 1º grau*. 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1988.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o ensino de Matemática, 1º grau*. 4.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

SÃO PAULO (Município) Secretaria de Educação. *Movimento de Reorientação Curricular: Matemática – Visão da Área*. São Paulo: SE, 1991.

SÃO PAULO (Município) Secretaria de Educação. *Movimento de Reorientação Curricular: Matemática – Relatos de Prática*. São Paulo: SE, s.d.

SILVA, C.M.S. A concepção de Matemática de Auguste Comte. *Revista Zetetiké*, Campinas, n. 02, p. 71 – 83, 1994.

SILVA, C.M.S. *A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES, 1999.

SILVA, C.M.S. O livro didático de Matemática no Brasil no século XIX. In: FOSSA, J.A. (org.). *Facetas do diamante: Ensaio sobre educação matemática e história da matemática*. Rio Claro: Editora da SBHMat, 2000.

SOUZA, E.R. *et al.* *A Matemática das sete peças do Tangram*. 3.ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2003.

VALENTE, W.R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930)*. 1997. 204p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

VALENTE, W.R. *O Nascimento da Matemática do Ginásio*. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004a.

VALENTE, W.R. *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: Universidade de Brasília, 2004b.

VII Encontro Nacional de Educação Matemática. *Educação Matemática e Novas Tecnologias*. 2001. Disponível em :<<http://www.viienem.ufrj.br>>. Acesso em: 23 fev. 2006.

VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. *Educação Matemática: um compromisso social*. 2004. Disponível em :<<http://www.sbem.com.br/index.php?op=VIII%20ENEM>>. Acesso em: 23 fev. 2006.

VII Encontro Paulista de Educação Matemática. *Matemática na escola: conteúdos e contextos*. 2004. Disponível em: <<http://www.sbempaulista.org.br/epem>>. Acesso em: 23 fev. 2006.

VYGOTSKY, L.S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. São Paulo: Coleção do professor de matemática, SBM, 1993.

WERNECK, A.P. *et al.* Os debates em torno das reformas do ensino de Matemática: 1930 - 1942. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 04, n. 05, p. 49 – 54, 1996.

WIKIPÉDIA. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/>>. Acesso em: 13 jan. 2007.

ZOTTI, S.A. *O currículo do ensino secundário e a formação das elites republicanas*. 2005. Disponível em: <<http://www.anpuh.uepg.br/xxiii-simposio/anais/textos/SOLANGE%20APARECIDA%20ZOTTI.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2006.

Os livros didáticos analisados

CABRITA, F. *Elementos de Geometria*. 2.ed. Rio de Janeiro: Companhia Industrial de Papelaria, 1894.

CLAIRAUT, A.C. *Elementos de Geometria*. Tradução de José Feliciano. 2.ed. São Paulo: Typ. Augusto Siqueira & C., 1909.

F.I.C. *Elementos de Geometria*. Tradução de Eugenio de Barros Raja Gabaglia. Rio de Janeiro: Livraria Garnier Irmãos, 1913.

F.I.C. *Elementos de Geometria Descritiva*. Tradução de Eugenio de Barros Raja Gabaglia. 11.ed. Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia, 1946.

F.T.D. *Geometria Elementar com noções de agrimensura e de nivelamento*. São Paulo: Livraria Paulo de Azevedo & C^a, 1925.

GIOVANNI, J.R.; PARENTE, E. *Matemática: 5ª série*. São Paulo: FTD, 1988.

GIOVANNI, J.R.; PARENTE, E. *Matemática: 6ª série*. São Paulo: FTD, 1988.

GIOVANNI, J.R.; PARENTE, E. *Matemática: 7ª série*. São Paulo: FTD, 1988.

GIOVANNI, J.R.; PARENTE, E. *Matemática: 8ª série*. São Paulo: FTD, 1988.

IMENES, L.M; LELLIS, M. *Matemática para todos: 5ª série, 3º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L.M; LELLIS, M. *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L.M; LELLIS, M. *Matemática para todos: 7ª série, 4º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L.M; LELLIS, M. *Matemática para todos: 8ª série, 4º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.

LACROIX, S.F. *Éléments de Géométrie*. 16.ed. Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1848.

OTTONI, C.B. *Elementos de Geometria e Trigonometria Retilínea*. 9.ed. Rio de Janeiro: Alves & C^{ia}, s.d.

PEREIRA, T. *Curso de Geometria*. Rio de Janeiro: B. L. Garnier, 1890.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA. *Curso de Matemática: 3º ano*. 3.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1936.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA. *Curso de Matemática: 4º ano*. 2.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1934.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA. *Curso de Matemática: 5º ano*. 4.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1940.

SANGIORGI, O. *Matemática: curso ginasial – 1ª série*. 59.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1962.

SANGIORGI, O. *Matemática: curso ginasial – 2ª série*. 13.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

SANGIORGI, O. *Matemática: curso ginasial – 3ª série*. 78.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1964.

SANGIORGI, O. *Matemática: curso ginasial – 4ª série*. 64.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.

SANGIORGI, O. *Matemática 1: Curso Moderno para cursos ginasiais*. 8.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966.

SANGIORGI, O. *Matemática 2: Curso Moderno para cursos ginasiais*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

SANGIORGI, O. *Matemática 3: Curso Moderno para os ginásios*. 9.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1971.

SANGIORGI, O. *Matemática 4: Curso Moderno para os ginásios*. 5.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970.

THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA. *Matemática: 1º ano*. 12.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1941.

THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA. *Matemática: 2º ano*. 5.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1936.

ANEXOS

ANEXO A – O Tangram como um recurso para o ensino da Geometria

Para a realização dessa atividade, é necessário que as propriedades das peças que compõem o Tangram e as relações entre elas, tenham sido estudadas.

Construindo o Tangram por dobradura⁸³:

- Pré-escola e 1ª a 4ª séries:

Cada aluno deve ter uma folha de papel no formato de um quadrado. O professor apresenta à classe um quadrado de tamanho maior com os vértices pintados e acompanha cada etapa da dobradura:

1. Pinte cada canto do quadrado conforme mostra a figura.
2. Dobre o quadrado, de modo que a ponta azul encoste na ponta vermelha.
3. Abra o quadrado e risque com um lápis preto a marca da dobra. Essa linha é chamada de *diagonal* do quadrado. Quando dobramos o quadrado, que figuras apareceram? Elas são iguais ou diferentes? Por quê?
4. Dobre o quadrado de modo que a ponta amarela encoste na ponta verde. Atenção! Marque a dobra da ponta vermelha até a linha preta da marca anterior. Quais figuras você acha que vão aparecer? Elas são iguais ou diferentes? Por quê?
5. Abra o quadrado e risque a marca da dobra. Formamos duas peças do Tangram, dois triângulos grandes (T_g).
6. Pinte em seu Tangram uma bolinha preta no centro do quadrado onde se cruzam as duas dobras feitas. Este é o *ponto médio* da diagonal do quadrado, ou seja, ele divide a diagonal em duas partes iguais.
7. Encoste a ponta azul na bolinha preta. Vinque a dobra. Que figura aparecerá? Quantas pontas (*vértices*) tem essa figura?
8. Abra e risque a marca da dobra. Formamos mais uma peça do Tangram, o triângulo médio (T_m).

⁸³ SOUZA, E.R et al. *A Matemática das sete peças do Tangram*. 3.ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2003.

9. Encoste novamente a ponta amarela na ponta verde e marque a dobra até a linha do triângulo médio.
10. Abra e risque a marca da dobra.
11. Encoste a ponta amarela na bolinha preta. Marque a dobra da linha preta até chegar no vértice do triângulo médio. Que figuras irão aparecer? Elas são iguais ou diferentes?
12. Abra e risque a marca da dobra. Formamos o quadrado (Q) e um triângulo pequeno (T_p).
13. Faça em seu Tangram uma bolinha rosa no vértice do triângulo médio que não encosta no quadrado Q.
14. Encoste a bolinha rosa na bolinha preta. Marque a dobra da linha preta até o triângulo médio.
15. Abra e risque a marca da dobra. Formamos o paralelogramo (P) e o outro triângulo pequeno (T_p).
16. O seu Tangram está pronto! Pinte cada peça de uma cor, recorte e monte as figuras que você quiser. Podem ser figuras de animais, pessoas, objetos, polígonos ou o que mais você imaginar. Mas atenção! Existe uma regra nessa montagem, você não pode colocar uma peça sobre outra⁸⁴.

Figura 239: Sequência dos passos da dobradura do Tangram

⁸⁴ Com o objetivo de desenvolver a comunicação em Matemática, o professor pode propor para que os alunos descrevam oralmente a posição e o que representa cada peça do Tangram na figura feita.

- 5ª a 8ª séries⁸⁵:

1. Utilizando uma folha de papel, desenhe utilizando a régua e o compasso e recorte, um quadrado ABCD.

2. Dobre o quadrado pela diagonal BD. Abra e risque essa linha de dobra.

Pela dobradura feita, o que você pode concluir a respeito das medidas dos ângulos $\hat{A}DB$, $\hat{B}DC$, $\hat{A}BD$ e $\hat{CBD}$?

3. Dobre o quadrado pela outra diagonal AC. Vinque apenas a linha que, partindo do vértice A, encontra a diagonal BD já traçada. Abra e risque essa linha, nomeando de O o ponto de intersecção das diagonais. Formamos duas peças do Tangram, os triângulos grandes $\triangle AOB$ e $\triangle AOD$.

O ponto O divide as diagonais do quadrado em dois segmentos BO e OD; AO e OC. Esses segmentos são congruentes? Considere os triângulos $\triangle AOB$, $\triangle AOD$ e $\triangle BCD$. Quais são as medidas dos ângulos internos desses triângulos? Quanto às medidas de seus lados, como eles são chamados? E quanto às medidas de seus ângulos? Quais são congruentes? Quais são semelhantes? Por quê?

4. Dobre de maneira que o vértice C encontre o ponto O. Abra e risque a linha de dobra EF. Formamos mais uma peça do Tangram, o triângulo médio $\triangle CEF$.

Pela dobradura feita, o que você pode dizer sobre as medidas dos segmentos DF e FC e dos segmentos BE e EC? E dos segmentos CE e CF? Classifique o triângulo $\triangle CEF$ quanto às medidas de seus lados e de seus ângulos.

5. Dobre novamente a diagonal AC e faça um vinco até o encontro do segmento EF. Nomeie o ponto de intersecção de G. Risque essa linha de dobra. Dobre, então, de modo que o ponto E toque o ponto O. Vinque a dobra entre o ponto G e a diagonal BD. Abra e risque esse segmento e nomeie-o de GH. Formamos mais duas peças do Tangram, o triângulo pequeno $\triangle GHO$ e o paralelogramo BEGH.

Classifique o triângulo $\triangle GHO$ quanto às medidas de seus lados e de seus ângulos. Quais são as medidas dos ângulos internos do paralelogramo BEGH?

⁸⁵ É importante ressaltar que atividades para o reconhecimento das peças e das relações entre elas, devem ser feitas com os alunos de qualquer série, pois, as relações entre as peças formam a base para o uso do material no estudo de vários conceitos, bem como para a construção do quebra-cabeça. No entanto, com alunos de maior escolaridade pode-se aprofundar a reflexão colocando outros questionamentos, promovendo discussões e novas sistematizações das conclusões do aluno ou da classe como um todo. (SOUZA *et al.*, 2003, p. 64)

6. Dobre de maneira que o vértice D toque o ponto O. Vinque essa dobra do ponto F até a diagonal BD. Abra e risque esse segmento e nomeie-o de FI. Formamos mais duas peças do Tangram, o outro triângulo pequeno $\triangle DFI$ e o quadrado OGFI.

Classifique o triângulo $\triangle DFI$ quanto às medidas de seus lados e de seus ângulos.

7. Recorte as peças obtidas.

Agora que você conhece o Tangram bem como as propriedades das peças que o compõem, forme outros polígonos e escreva as medidas dos ângulos das outras figuras formadas.

Figura 240: Sequência dos passos da dobradura do Tangram

ANEXO B – Quadros-síntese do Guia Curricular para o ensino de 1º grau para a 5ª a 8ª séries

5ª SÉRIE

GEOMETRIA INTUITIVA.

OBJETIVOS:

- . Adquirir conhecimentos mais amplos de geometria com base nos conhecimentos obtidos nas quatro séries anteriores.
- . Aplicar a linguagem e simbologia da Teoria dos Conjuntos para conceitos geométricos.
- . Reconhecer que os conceitos da Geometria são essencialmente abstratos e que os símbolos e figuras que os representam são meros recursos no sentido de ajudar a entendê-los.

CONTEÚDO

OBJETIVOS

OBSERVAÇÕES

1. PONTO, RETA E PLANO.

- . Reconhecer uma figura geométrica como um conjunto de pontos.
- . Distinguir figuras geométricas planas e figuras geométricas não planas.
- . Representar e nomear retas através de dois de seus pontos.
- . Estabelecer a relação de pertinência e empregar os símbolos correspondentes entre:
 - ponto e reta;
 - ponto e plano.
- . Estabelecer a relação de inclusão e utilizar a simbologia entre:
 - reta e plano;
 - plano e espaço.

A fim de ressaltar a unidade e coerência entre os vários assuntos com os quais a Matemática trabalha, convém aplicar os conhecimentos relativos a conjuntos, aos outros campos da Matemática, além da Geometria.

Em virtude da geometria estar servindo de veículo para a introdução da linguagem de Teoria dos Conjuntos, a notação de letras minúsculas para pontos (elementos) e letras maiúsculas para retas, planos e figuras geométricas (conjuntos), se adotada, dará maior uniformidade notacional aos diversos assuntos matemáticos.

2. CURVAS ABERTAS; SEGMENTO DE RETA.

- . Identificar segmento de reta como curva aberta simples.
- . Descrever um segmento de reta como o conjunto formado por dois pontos e os pontos entre esses pontos dados.

3. CURVAS FECHADAS SIMPLES.

- . Reconhecer um polígono como uma curva fechada simples formada apenas de segmentos de reta.
- . Escrever:
 - o conjunto dos seus lados;
 - o conjunto dos seus vértices;
 - o conjunto das suas diagonais.

4. CONJUNTOS CONVEXOS.

- . Distinguir conjuntos convexos e não convexos.
- . Reconhecer um polígono convexo como aquele cujo interior é um conjunto convexo.

5. ÂNGULO.

- . Distinguir os subconjuntos de uma reta, determinados por um de seus pontos.
- . Estabelecer a relação de pertinência entre ponto e semi-reta.
- . Estabelecer a relação de inclusão entre:
 - semi-reta e reta;
 - segmento de reta e reta;
 - segmento de reta e semi-reta.
- . Reconhecer um ângulo como reunião de duas semi-retas de mesma origem, porém não colineares.
- . Nomear um ângulo.
- . Nomear o vértice e os lados de um ângulo.
- . Determinar o conjunto dos pontos interiores (interior) e o conjunto dos pontos exteriores (exterior) de um ângulo.

6. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS EM UM PLANO.

- . Identificar, num plano, por meio da noção de intersecção de conjuntos:
 - retas secantes;
 - retas paralelas, coincidentes ou não.

7. PARTIÇÕES DO PLANO.

- . Identificar as partições do plano determinadas por:
 - uma curva fechada simples nele contida;
 - um ângulo nele contido;
 - uma reta nele contida.
- . Explicitar através da simbologia de conjuntos os fatos acima mencionados.
- . Reconhecer semi-plano.

6 A SÉRIE

GEOMETRIA INTUITIVA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS.

OBJETIVOS:

- Estabelecer intuitivamente alguns resultados geométricos com base na experiência e observação.
- Estabelecer a relação de congruência de segmentos de reta e de congruência de ângulos.
- Relacionar ângulos determinados por duas paralelas e uma transversal.
- Adquirir habilidades no uso do compasso, régua, esquadro e transferidor.

CONTEÚDO	OBJETIVOS	OBSERVAÇÕES
1. NOÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO.	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar a idéia de função à de transformação do plano nele mesmo. • Saber que a isometria é um tipo de transformação que conserva as distâncias. • Reconhecer figuras congruentes como figuras que se correspondem por uma isometria. 	
2. CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS DE RETA.	<ul style="list-style-type: none"> • Construir segmentos congruentes. • Identificar a congruência de segmentos como uma relação de equivalência. 	
3. CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS.	<ul style="list-style-type: none"> • Construir ângulos congruentes. • Reconhecer a congruência de ângulos como uma relação de equivalência. 	
4. RETAS PERPENDICULARES.	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer retas perpendiculares como retas secantes que determinam quatro ângulos congruentes. • Associar a noção de ângulo reto com a de retas perpendiculares. 	
5. MEDIDA DE ÂNGULO.	<ul style="list-style-type: none"> • Saber o que é o grau, o minuto e o segundo. • Efetuar cálculos simples, envolvendo estas unidades. • Empregar um transferidor para medir ângulos. • Reconhecer e representar ângulos retos, agudos e obtusos. 	
6. ÂNGULOS ESPECIAIS.	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer representar e relacionar: <ul style="list-style-type: none"> — ângulos suplementares; — ângulos complementares; — ângulos adjacentes; — ângulos consecutivos; — ângulos opostos pelos vértices. 	

7. RETAS PARALELAS (AXIOMA DE EUCLIDES).	<ul style="list-style-type: none"> Explicitar a transitividade do paralelismo de retas. 	
8. CONCEITO DE PARALELOGRAMO, NOÇÃO DE TRANSLAÇÃO.	<ul style="list-style-type: none"> Determinar segmento correspondente a outro por meio de uma translação. Associar o conceito de paralelogramo ao de translação. 	
9. RETAS PARALELAS E TRANSVERSAL.	<ul style="list-style-type: none"> Estabelecer relações entre os ângulos determinados por duas retas e uma transversal por meio de um transferidor. 	
10. CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS E TRIÂNGULOS	<ul style="list-style-type: none"> Reconhecer um trapézio como um quadrilátero de apenas dois lados paralelos. Reconhecer um paralelogramo como um quadrilátero de lados opostos paralelos. Reconhecer um retângulo como um paralelogramo de ângulos congruentes. Reconhecer um losango como um paralelogramo de lados congruentes. Reconhecer um quadrado como um paralelogramo que é retângulo e losango. Classificar triângulos segundo os lados em isósceles, equilátero e escaleno. Classificar triângulos segundo os ângulos em retângulo, obtusângulo e acutângulo. Verificar em que condições três segmentos podem ser lados de um triângulo. Estabelecer intuitivamente em um triângulo as relações entre: <ul style="list-style-type: none"> — ângulo de maior medida e lado de maior medida e vice-versa. 	<p>Para este estudo, ajuda muito a exploração de um material constituído de varetas de vários comprimentos que podem ser atarrachadas umas às outras.</p>
11. CIRCULO.	<ul style="list-style-type: none"> Definir, representar e identificar círculos. Reconhecer e representar raio, centro, corda, diâmetro, arco e região circular. Reconhecer e representar retas tangentes e retas secantes a um círculo. Reconhecer e representar círculos externos, tangentes e secantes. 	<p>Consolidar a noção de distância.</p> <p>Variar o centro ou o raio e estudar os conjuntos de círculos obtidos.</p> <p>Relacionar as posições relativas de duas retas e de dois círculos com a intersecção de conjuntos.</p>

7ª SÉRIE

INÍCIO DO EMPREGO DO RACIOCÍNIO HIPOTÉTICO-DEDUTIVO NA GEOMETRIA.

OBJETIVOS:

- Adquirir habilidades em construções geométricas com régua e compasso.
- Reconhecer que os conceitos da Geometria são essencialmente abstratos e que os símbolos e figuras que os representam são meros recursos no sentido de ajudar a entendê-los.
- Obter conhecimentos que permitam um posterior estudo sistemático da geometria.
- Compreender a simetria axial e a central como uma transformação do plano (nele mesmo).
- Desenvolver a capacidade de obter resultados válidos em situações novas a partir de condições dadas (demonstrações locais).

CONTEÚDO

OBJETIVOS

OBSERVAÇÕES

1. SIMETRIA AXIAL; RETAS PERPENDICULARES; MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO.

- Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a uma reta.
- Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a uma reta (vice-versa).
- Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de".
- Reconhecer os eixos de simetria numa figura geométrica.
- Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um eixo de simetria.
- Determinar os invariantes por uma simetria axial.

Explorar a seguinte situação:
Dada uma reta R e um ponto p de um dos semi-planos determinados por R , construir, usando uma distância r , o losango $pabp$; sendo $a, b \in R$.

Considerar a transformação:

$$s : p \longrightarrow p'$$

Verificar que:

- s não depende de r ;
 - s conserva as distâncias.
- s é a simetria axial determinada por R .

Observar que:

- a) R permanece invariante por s ;
- b) A reta $\overleftrightarrow{pp'}$ corta R em o , tal que

$$\begin{aligned} d(o,p) &= d(o,p') \text{ e} \\ d(o,a) &= d(o,b) \\ \overleftrightarrow{pp'} &\perp R \end{aligned}$$

- c) s é uma isometria.

Definir mediatriz a partir da observação (b).

2. SIMETRIA CENTRAL

- Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a um ponto.
- Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a um ponto (vice-versa).
- Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de" em relação a um ponto.
- Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um ponto.
- Determinar os invariantes por uma simetria central.
- Relacionar a simetria central com a simetria axial.

3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS; APLICAÇÃO AO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS.

- Construir triângulos, sendo dados três dos seus elementos.
- Identificar os quatro casos de congruência de triângulos.
- Utilizar os conhecimentos adquiridos para demonstrar as principais propriedades dos triângulos.
- Aplicar os conhecimentos adquiridos para demonstrar as propriedades dos quadriláteros.

Se a classe permitir, mostrar que, se dois triângulos são congruentes, um pode ser obtido do outro, compondo no máximo 3 simetrias axiais.

4. TRANSLAÇÕES.

- Construir os pontos correspondentes por uma translação.
- Fazer diagramas de "é o correspondente de" por uma translação.
- Determinar os invariantes por uma translação.
- Demonstrar as propriedades dos quadriláteros sobre lados opostos, ângulos opostos e diagonais.

5. TRIÂNGULOS RETÂNGULOS. TEOREMA DE PITÁGORAS.

- Enunciar e aplicar os casos de congruência de triângulos para triângulos retângulos a partir dos casos gerais.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo qualquer.

Justificar intuitivamente o Teorema de Pitágoras, admitindo, por exemplo, o cálculo da área de regiões determinadas por quadrados, retângulos e triângulos retângulos e empregando a seguinte figura para a demonstração:

6. CÍRCULO. POSIÇÕES RELATIVAS. ÂNGULOS E ARCOS.

- Empregar a noção de distância, para distinguir um disco aberto de um disco fechado.
- Estabelecer, com a noção de distância, as relações existentes entre: a distância dos centros e os raios em cada uma das posições relativas de dois círculos.
- Distinguir duas medidas para arco: comprimento e amplitude.
- Reconhecer dois arcos congruentes.
- Relacionar arcos com ângulos inscritos.

8^A SÉRIE

HOMOTETIA E SEMELHANÇA: APLICAÇÕES.

OBJETIVOS:

- Adquirir conhecimentos mais amplos sobre o conceito de transformação.
- Integrar os métodos algébricos na resolução de problemas geométricos.
- Adquirir noções trigonométricas necessárias às aplicações em outras disciplinas.

CONTEÚDO	OBJETIVOS	OBSERVAÇÕES
1. PROJEÇÕES PARALELAS. TEOREMA DE TALES. NOÇÃO DE HOMOTETIA. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar o ponto correspondente de um ponto dado por uma projeção paralela. • Verificar que numa projeção paralela a razão entre as medidas dos segmentos paralelos é igual à razão entre as medidas de suas projeções. • Determinar o homotético de um ponto dado. • Relacionar o valor da razão com: <ul style="list-style-type: none"> — a posição dos pontos homotéticos em relação ao centro da homotetia; — a ampliação, conservação ou redução da figura. • Traçar o diagrama de uma homotetia. • Determinar os invariantes por uma homotetia. • Demonstrar e aplicar o Teorema de Tales e o seu recíproco. • Reconhecer os casos de semelhança de triângulos. • Deduzir as relações métricas no círculo. 	<p>Definir projeções paralelas; mostrar que conservam a congruência de segmentos, a soma e o produto por um número. Estudar o Teorema de Tales e o seu recíproco. Aproveitar para estabelecer o conceito de grandezas proporcionais.</p> <p>Dar as relações métricas num círculo como exercício.</p>
2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS, TÁBUAS, RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS E NÃO RETÂNGULOS.	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o que é cosseno e seno de um ângulo. • Encontrar o valor do cosseno e do seno de um ângulo mediante o uso de uma tabela trigonométrica. • Relacionar os lados e a altura de um triângulo retângulo com o cosseno de seus ângulos. • Relacionar o seno e o cosseno de um mesmo ângulo. • Deduzir e aplicar as relações métricas nos triângulos retângulos e não retângulos. 	<p>As relações métricas nos triângulos retângulos podem ser demonstradas, usando as razões trigonométricas.</p> <p>Dar as noções trigonométricas necessárias às aplicações em outras disciplinas.</p> <p>Mostrar o uso das tábuas.</p>

MEDIDAS: COMPRIMENTO DO CÍRCULO; ÁREAS.

OBJETIVOS:

- Relacionar a noção do polígono regular com a de círculo.
- Adquirir habilidades em determinar áreas das principais regiões planas.

CONTEÚDO

OBJETIVOS

OBSERVAÇÕES

1. POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS; COMPRIMENTO DO CÍRCULO.

- Inscrever um polígono regular em um círculo.
- Calcular as medidas dos lados e apótemas dos principais polígonos regulares em função do raio do círculo no qual estão inscritos.
- Calcular o comprimento de um círculo em função de seu raio.

Estudar os polígonos regulares apenas para dar uma noção de comprimento do círculo.

2. CONCEITO DE ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA; ÁREAS DAS PRINCIPAIS REGIÕES PLANAS.

- Calcular a área de uma região determinada por:
 - um retângulo qualquer;
 - um quadrado;
 - um paralelogramo qualquer;
 - um losango;
 - um trapézio;
 - um polígono regular;
 - um círculo.

Dar uma noção do problema da medida. Admitir a existência de uma função A que a toda região E do plano associa um $n.º$ real positivo $A(E)$, satisfazendo a:

$$1 - \text{Se } \overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} & (\overset{\circ}{E} : \text{interior de } E), \text{ então} \\ & A(E \cup F) = A(E) + A(F) \end{aligned}$$

$$2 - \text{Se } E \cong F, \text{ então} \\ A(E) = A(F)$$

$$3 - A(\emptyset) = 0; \quad A(Q) = 1$$

onde Q é o quadrado de lado unitário.

$A(E)$ recebe o nome de área de E .

Admitir a fórmula do cálculo da área do retângulo.

Seria conveniente que o aluno conhecesse o aparelho chamado planímetro, utilizado para o cálculo de áreas.

3. ÁREAS DE UMA REGIÃO PLANA QUALQUER. NOÇÃO SOBRE O MÉTODO.

- Aplicar métodos convenientes para a determinação da área de uma região plana qualquer.

ANEXO C – Quadros-síntese da Proposta Curricular para o ensino de Matemática de 1º grau para a 5ª a 8ª séries

5.ª SÉRIE

NÚMEROS	MEDIDA	GEOMETRIA
<p>Sistemas de Numeração: Comparação entre o sistema de numeração decimal com outros sistemas de numeração.</p> <p>Operações com números naturais: Utilização das operações em diversas situações-problema.</p> <p>Potenciação: conceito, representação, propriedades.</p> <p>Divisibilidade: Decomposição de um número em fatores primos. Principais regras de divisibilidade. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum: Conceito, propriedades e resolução de problemas.</p> <p>Números racionais absolutos: Comparação de frações quaisquer. Adição e subtração de frações quaisquer. Multiplicação de frações quaisquer. Divisão de frações quaisquer. Representação na forma decimal. Problemas envolvendo medidas e porcentagem.</p>	<p>Ampliação e redução de figuras (áreas e perímetros).</p> <p>Volume: Conceito de volume. Medida de volume, utilizando unidades não-padronizadas. O metro cúbico. Cálculo do volume do prisma reto de base retangular.</p>	<p>Noções de reta, semi-reta, segmento de reta.</p> <p>Alturas de triângulos, paralelogramos e trapézios: identificação e construção com esquadro.</p> <p>Noção de circunferência: Conceito de círculo, circunferência, superfície esférica e esfera. Elementos de uma circunferência: centro, raio, corda, diâmetro, arco. Elementos de uma superfície esférica: centro, raio, corda, diâmetro, arco e circunferência máxima. Posições relativas de duas circunferências. Posições relativas de uma reta e uma circunferência. Divisão da circunferência em partes iguais</p>

6.^a SÉRIE

NÚMEROS	MEDIDA	GEOMETRIA
<p>Números inteiros: A noção de número inteiro; soma algébrica. Comparação, ordenação e representação geométrica dos números inteiros. Operações com números inteiros.</p> <p>Números racionais: A noção de número racional relativo. Comparação, ordem e representação geométrica. Operações, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Propriedades das operações.</p> <p>Cálculo literal: Noções de cálculo literal. Soma algébrica e expressões algébricas. Multiplicações de expressões algébricas. Divisão de monômios. Divisão de polinômios por monômios.</p>	<p>Medidas de ângulos. O grau e seus submúltiplos.</p> <p>Comprimento de uma circunferência e de arcos de circunferência.</p>	<p>Circunferência e ângulo: Conceito de ângulo. Classificação dos ângulos quanto à medida. Classificação dos triângulos quanto à medida de seus ângulos internos. Perpendicularismo entre retas e entre segmentos de reta. Perpendicularismo entre retas e planos. Bissetriz de um ângulo. Ângulos adjacentes e opostos pelo vértice.</p> <p>Ângulos formados por retas coplanares cortadas por uma transversal.</p> <p>Verificação experimental e demonstração do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.</p> <p>Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.</p> <p>Polígono regular: Noção de polígono regular. Construção de polígonos, com auxílio de régua e transferidor. Construção de polígonos regulares com régua e transferidor (usando a medida do ângulo interno) ou com régua, compasso e transferidor (usando a circunferência circunscrita a ele).</p>

7.^a SÉRIE

NÚMEROS	MEDIDA	GEOMETRIA
<p>Equações e inequações do 1.º grau com uma incógnita: Noção de equação-tradição algébrica de situação-problema. Propriedades de uma igualdade numérica. Resolução de equações do 1.º grau. Resolução de problemas do 1.º grau. Conceito de inequação do 1.º grau. Propriedades de uma desigualdade numérica. Resolução de inequações do 1.º grau. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Representação gráfica de uma equação do 1.º grau com duas incógnitas.</p> <p>Proporcionalidade: Noção de interdependência entre duas ou mais grandezas e a noção de variável. Grandezas diretamente proporcionais. Representação gráfica e analítica desse tipo de interdependência. Grandezas inversamente proporcionais. Representação gráfica e analítica desse tipo de interdependência. Grandezas não proporcionais. Grandezas que variam proporcionalmente ao quadrado de outras. Razões e proporções-aplicações em problemas. Juros simples.</p>	<p>Áreas e perímetros: Sistematização das áreas do paralelogramo, triângulo e trapézio. Área do losango. Área do círculo. Área de um setor circular. Problemas envolvendo áreas e perímetros.</p>	<p>Diagonais de um polígono: Conceito. Propriedades das diagonais de um paralelogramo-verificação experimental. Número de diagonais de um polígono de n lados.</p> <p>Teorema de Pitágoras: Uma verificação experimental do Teorema de Pitágoras. Uma demonstração do Teorema de Pitágoras. Uma generalização do Teorema de Pitágoras. Congruência de figuras planas. Congruência de triângulos e aplicações.</p>

8.^a SÉRIE

NÚMEROS	MEDIDA	GEOMETRIA
<p>Noções de Estatística: Levantamento e tabulação de uma amostra. Construção e interpretação de gráficos: histogramas, gráficos de barras, de setores, de linhas poligonais e de curvas.</p> <p>Números racionais: Representação fracionária das dízimas periódicas. Localização de números racionais na reta numérica.</p> <p>Números irracionais: A necessidade da nova ampliação dos conjuntos numéricos: o número irracional $\sqrt{2}$. Operações com radicais. Sistematização dos conjuntos numéricos. O conjunto dos números reais.</p> <p>Fatoração de expressões algébricas.</p> <p>Equações do 2.º grau com uma variável. Equações redutíveis a uma equação de 2.º grau. Problemas.</p>	<p>Área de um polígono. Determinação da área de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio dado. Determinação da área total da superfície de prismas, cilindros, pirâmides e cones.</p>	<p>Semelhança: Noção de semelhança; semelhança de figuras planas. Teorema fundamental da proporcionalidade: verificação experimental e demonstração. Teorema de Tales e aplicações. Verificação experimental e demonstração dos casos de semelhança de triângulos. Relações métricas no triângulo retângulo. Demonstração do teorema de Pitágoras.</p> <p>Relações métricas nos polígonos regulares. Cálculo do lado e do apótema de um polígono inscrito numa circunferência de raio dado.</p>

ANEXO D – Homotetia

Sabemos que dois polígonos são semelhantes quando:

- Os ângulos correspondentes são congruentes, isto é, os ângulos são ordenadamente congruentes;
- Os lados correspondentes⁸⁶ são proporcionais, isto é, as razões entre as medidas dos lados que se correspondem são iguais.

Em consequência, os lados correspondentes são paralelos.

Observações:

- Os ângulos correspondentes são chamados de *homólogos*, bem como os lados.
- A razão entre os lados homólogos é chamada *razão de semelhança* (k).

Duas figuras semelhantes dispostas de tal modo que os seus lados homólogos sejam paralelos são chamadas *figuras homotéticas*.

Por exemplo:

Figura 241: Os triângulos ABC e A'B'C' são homotéticos, pois, além de serem semelhantes, os lados homólogos são paralelos: $\overline{AB} // \overline{A'B'}$; $\overline{BC} // \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} // \overline{A'C'}$

⁸⁶ Lados correspondentes são lados opostos a ângulos congruentes.

Figura 242: Os triângulos ABC e A'B'C' não são homotéticos, pois, apesar de serem semelhantes, os lados $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ e $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, não são paralelos

As retas que passam pelos vértices homólogos em polígonos semelhantes encontram-se em um mesmo ponto O chamado *centro de homotetia* ou *ponto polar*:

Figura 243: Os triângulos homotéticos ABC e A'B'C'

Dizemos que um ponto A' é homotético de A, em relação ao centro de homotetia O e à razão de homotetia dada pelo número real k quando:

- A' pertence à reta $\overrightarrow{OA}$;
- Existe um número real k, de modo que $OA' = |k| \cdot OA$.

Exemplo:

Para $k = 3$:

$k > 0$: Homotetia direta

Para $k = -3$:

$k < 0$: Homotetia inversa

Podemos usar a homotetia como um recurso para ampliar e reduzir qualquer figura:

- Por meio de uma homotetia direta ($k > 0$), podemos:

ampliar a figura, se $k > 1$

reduzir a figura, se $0 < k < 1$

- Por meio de uma homotetia inversa ($k < 0$), podemos:

ampliar a figura, se $k < -1$

reduzir a figura, se $-1 < k < 0$

Figura 244: Homotetia direta e inversa

Consideremos, por exemplo, o $\triangle ABC$ e um ponto O (centro de homotetia):

Figura 245: Triângulo ABC e ponto O

Vamos construir o $\triangle A'B'C'$ homotético do $\triangle ABC$, de centro O e razão $k = 3$. Para isso, devemos seguir os seguintes passos:

- Traçar as retas que passam por O e pelos vértices A , B e C .
- Determinar o ponto A' em $\overrightarrow{OA}$, com $OA' = 3 \cdot OA$.
- Usar o mesmo procedimento anterior para obter B' e C' ou, a partir de A' , determinar nas retas OB e OC , respectivamente, os pontos B' e C' , de modo que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$.
- O triângulo $A'B'C'$ é homotético ao triângulo ABC , na razão $k = 3$. Isto é, ampliamos o triângulo ABC através da homotetia direta.

Figura 246: Os triângulos homotéticos ABC e $A'B'C'$

Justificativa da construção:

$$\text{Por construção, } \begin{cases} OA' = 3 \cdot OA & (1) \\ OB' = 3 \cdot OB & (2) \\ OC' = 3 \cdot OC & (3) \end{cases}$$

Dessa forma, os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OA'B'$ são semelhantes (caso LAL).

$$\text{Logo, } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$\text{Por (1) e (2), } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 3, \text{ logo temos que } \frac{A'B'}{AB} = 3 \Leftrightarrow A'B' = 3 \cdot AB$$

Analogamente, $B'C' = 3 \cdot BC$ e $A'C' = 3 \cdot AC$

ANEXO E – Justificativa da construção do pentágono regular

Na construção do pentágono regular, o ângulo central de 360° é dividido em cinco ângulos de 72° :

Figura 247: O ângulo central de 72°

Dessa forma, devemos verificar se, na construção efetuada, os ângulos $\widehat{HÔA} = \widehat{AÔG} = \widehat{GÔI} = \widehat{IÔJ} = \widehat{JÔH}$ são iguais a 72° .

Primeiramente, temos que encontrar o valor de x , medida do lado do pentágono regular que, por construção, é o segmento de medida AF .

Figura 248: O pentágono regular inscrito na circunferência

Seja R a medida do raio da circunferência λ construída e E o ponto médio do segmento DO , portanto $DE = EO = \frac{R}{2}$:

Por construção, o triângulo AOE é retângulo. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$EA^2 = OE^2 + OA^2 \Leftrightarrow EA^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2 \Leftrightarrow EA^2 = \frac{5R^2}{4}$$

Portanto: $EA = \frac{R\sqrt{5}}{2}$.

$EA = EF$, por construção.

Assim, temos: $EF = EO + OF \Leftrightarrow OF = EF - EO \Leftrightarrow OF = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

O triângulo AOF também é retângulo por construção. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$AF^2 = OA^2 + OF^2 \Leftrightarrow AF^2 = R^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AF^2 = R^2 \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$$

Portanto: $AF = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

Agora que já calculamos a medida do lado do pentágono regular, vamos verificar se o ângulo $\widehat{HOA}$ mede 72° . Para isso podemos aplicar a ‘Lei dos Cossenos’ no triângulo HOA:

Figura 249: Triângulo HOA

Assim temos, $HA^2 = OH^2 + OA^2 - 2 \cdot OH \cdot OA \cdot \cos(\widehat{HOA})$. Ou seja:

$$\left(\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(\widehat{HOA}) \Leftrightarrow \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4} = 2R^2 - 2R^2 \cos(\widehat{HOA})$$

$$R^2(10-2\sqrt{5}) = 8R^2 - 8R^2 \cos(\widehat{HOA}) \Leftrightarrow 10-2\sqrt{5} = 8-8\cos(\widehat{HOA}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{HOA}) = \frac{8-10+2\sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow \cos(\widehat{HOA}) = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow \cos(\widehat{HOA}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{Portanto, consultando uma calculadora, temos: } \widehat{HOA} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = 72^\circ.$$

Dessa forma comprovamos a validade da construção do pentágono regular, não importando qual a medida R do raio da circunferência originalmente considerada.

ANEXO F – Passos e justificativa da seqüência de dobraduras utilizada para a construção de um ângulo central de 36°

Vamos detalhar os passos das dobraduras efetuadas para construir um ângulo central de 36° ⁸⁷:

1º passo: dobrar um disco de papel, de modo a obter o centro O, intersecção dos diâmetros perpendiculares AB e CD:

Figura 250: 1º passo da construção do ângulo central de 36°

2º passo: dobrar de modo que o ponto A coincida com o centro O. Dessa forma, obtemos os pontos E e F conforme a figura:

Figura 251: 2º passo da construção do ângulo central de 36°

3º passo: dobrar de modo que o ponto C fique sobre o raio OB conforme a figura. Dessa forma, obtemos o ponto G em OB:

Figura 252: 3º passo da construção do ângulo central de 36°

⁸⁷ KUMAYAMA, H.; WAGNER, E. Origami. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 29, p. 41 – 44, 1995.

4º passo: dobrar de modo que o ponto B coincida com o ponto G. Dessa forma, obtemos os pontos H e I conforme a figura:

Figura 253: 4º passo da construção do ângulo central de 36º

5º passo: o ângulo BÔI mede 36º:

Figura 254: 5º passo da construção do ângulo central de 36º

Vamos agora apresentar a justificativa dos passos das dobraduras efetuadas para construir um ângulo central de 36º:

Seja R a medida do raio da circunferência inicialmente construída. O ponto E é médio do segmento OA, portanto $OE = \frac{R}{2}$.

O triângulo EOC é retângulo por construção. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$EC^2 = OE^2 + OC^2 \Leftrightarrow EC^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2 \Leftrightarrow EC^2 = \frac{5R^2}{4} \Leftrightarrow EC = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Também por construção, $EG = EC$.

Assim, temos:

$$OG = EG - EO \Leftrightarrow OG = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$GB = OB - OG \Leftrightarrow GB = R - R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \Leftrightarrow GB = R\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Vamos calcular agora a medida do segmento OH. Como H é ponto médio de GB, temos:

$$OH = OG + \frac{GB}{2} \Leftrightarrow OH = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + R\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow OH = R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

O triângulo HOI é retângulo:

Figura 255: Triângulo retângulo HOI

Dessa forma, temos:

$$\cos(\widehat{HOI}) = \frac{OH}{OI} \Leftrightarrow \cos(\widehat{HOI}) = \frac{R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}{R} \Leftrightarrow \cos(\widehat{HOI}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Portanto, consultando uma calculadora, temos: $\widehat{HOI} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = 36^\circ$.

Dessa forma comprovamos a validade das dobraduras efetuadas, não importando qual a medida R do raio da circunferência originalmente considerada.