UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

MOISÉS ALVES FRAGA

Significação do ângulo: indícios do conceito em
atividades de localização

São Paulo
2016

MOISÉS ALVES FRAGA

Significação do ângulo: indícios do conceito em
atividades de localização

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura

São Paulo

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catálogo na Publicação

375.3
F811s

Fraga, Moisés Alves

Significação do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização / Moisés Alves Fraga; orientação Manoel Oriosvaldo de Moura. São Paulo: s. n., 2016.

167 p.; ils.; anexos

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Ângulo 2. Movimento lógico-histórico 3. Atividade orientadora de ensino 4. Atividade de ensino 5. Localização 6. Programa observatório da educação I. Moura, Manoel Oriosvaldo de, orient.

FRAGA, Moisés Alves. **Significação do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização.** Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Educação.

Aprovada em: __/__/____

BANCA EXAMINADORA

Professor: _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Professor: _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Professor: _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

A Deus, origem de minha vida e de meu viver.

*Aos meus pais, Moisés e Maria das Graças, e avó, Benedita, por todo esforço
em propiciar uma educação de qualidade, acadêmica e humana.*

*A minha esposa, Mailla, pelo amor, zelo, companheirismo e compreensão
ao trilharmos os caminhos da vida.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em sua infinita graça e misericórdia deu-me a vida, e a Nossa Senhora, por estarem ao meu lado dando forças quando não mais as tinha.

Aos meus pais, Moisés e Maria das Graças, e avó, Benedita, por todo esforço, ajuda, dedicação e incentivo, que foram alicerce para construção de meus projetos. E, principalmente, por me fazer *acreditar*.

À minha esposa, Mailla, por todo amor e companheirismo nessa jornada juntos e, principalmente, pelo apoio e compreensão em minhas ausências.

Ao meu querido orientador, Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, por me acolher desde a iniciação científica, por me incentivar a ingressar na pós-graduação, e no decorrer desta socializar seu conhecimento e contribuindo imensamente para minha formação. Agradeço pelo incentivo, pela grande compreensão nos momentos de crise e pela confiança. Em especial, obrigado pela dedicação no final deste trabalho.

À Prof. Dra. Maria do Carmo de Sousa pela leitura minuciosa e contribuições no exame de qualificação.

À Prof. Dra. Flávia Dias pelos conhecimentos compartilhados e contribuições no exame de qualificação.

Às Prof. Dra. Maria Lucia Panossian, pelas discussões e estudos compartilhados e, pelas contribuições com as leituras de meu trabalho.

À Prof. Dra. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes, Prof. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos, Ms. Laura Pippi Fraga e Ms. Halana Garcez Borowsky Vaz pelas estudos compartilhados e contribuições no processo de desenvolvimento das atividades de ensino.

A todos os integrantes do projeto *Observatório da Educação*, que esteve em *Atividade*, possibilitando a realização desse trabalho. Em especial, à professora Amanda pelas produções conjuntas.

Ao coletivo Orientandos e GEPAPe, que de forma acolhedora me integraram, pelo aprendizado proporcionado e conhecimento socializados durante esses anos.

À Dra. Ana Paula Gladcheff pelo compartilhamento de estudos, diálogos, discussões, produções e, principalmente, pelas contribuições durante todo o processo de desenvolvimento de meu trabalho, desde identificação do objeto de pesquisa até o movimento de escrita da dissertação.

Aos estudantes e estagiários do 4º e 5º do *Clube de Matemática* da FEUSP (Tulyo, Caroline e Natália) pelas contribuições e empenho na realização da pesquisa.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo que me confiou a oportunidade de realizar este trabalho, e ao seu corpo docente e funcionários pelo aprendizado e apoio.

À *CAPES* que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho através do *Programa Observatório da Educação* concedendo a bolsa de estudos.

Aos meus mestres que me inspiraram a ser professor e até hoje influenciam minha prática pedagógica: Khadige, Sandra, Suzana, Marleide, Nelson, Meire, Paulina, José, Marlene, Angélica, Karen, Tânia, Amélia, Crélis, Yara, além de professora atualmente colegas de trabalho Fabiana, Mônica e Priscila, e meus formadores na universidade Brolezzi, Iole, Martha, Magalhães, Polcino, Lúcia, Vinício e novamente, ao Ori.

Ao meu querido irmão, Miler, por todo carinho e companheirismo em diversos momentos e apesar da distância, está presente em meus pensamentos e formação humana.

Aos meus grandes amigos Deborah, Saulo e Ricardo, por compartilhar todos os momentos. E por, principalmente, contribuir com escutas, conselhos, ações e orações.

A todos os meus familiares: tias, tios, primas, primos, sobrinhos, afilhados, sogro e sogra pela compreensão e carinho na ausência ou na dificuldade.

Finalmente, ao todas as pessoas que de diversas formas durante esses anos contribuíram de forma direta ou indireta para realização desse trabalho.

No crepúsculo da cultura mercantil, o futuro da razão humana depende cada vez mais, da compreensão das relações humanas, à luz da experiência histórica. Começamos a ver que já não nos basta uma matemática que nos permita mover-nos. Queremos uma que se preocupe com o “donde” viemos e “para onde” vamos.

Lancelot Hogben

RESUMO

FRAGA, Moisés Alves. **Significação do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização**. 2016. 167 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho caracterizou a organização do ensino dos conceitos de ângulo e de localização a partir dos documentos oficiais que norteiam o ensino da escola básica brasileira. Em conjunto com as fontes históricas de desenvolvimento desses conceitos, buscou-se uma possível influência nas dificuldades apresentadas pelos estudantes na apropriação do conceito de ângulo. Dessa forma, foram estudados os indícios do processo de significação do referido conceito, em situações de ensino desenvolvidas com crianças. Para isso, adotou-se como perspectiva teórica a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e os princípios da Atividade Orientadora de Ensino na organização de ações que desenvolvem o conceito a partir de seu movimento lógico-histórico. A pesquisa empírica foi realizada com estudantes dos 4º e 5º anos do Clube de Matemática e Ciências da Faculdade de Educação da USP, por entender que esse espaço de aprendizagem é adequado para o desenvolvimento de atividades de ensino para a apropriação do conceito de ângulo, visto que as ações formativas no Clube de Matemática estão orientadas pelas mesmas bases teóricas adotadas neste trabalho. A análise de propostas curriculares governamentais, o movimento lógico-histórico do conceito apreendido em fontes bibliográficas e a Teoria Histórico-Cultural orientaram a elaboração de atividades de ensino, que foram desenvolvidas com as crianças, de modo que possibilitassem a análise de suas ações em busca de indícios de formação do conceito de ângulo. As fontes de análise dos processos de apropriação do conceito são as gravações em vídeo do desenvolvimento das atividades com as crianças. Procurou-se, a partir dessas gravações, evidenciar as ações indiciadoras da apropriação do conceito que estão presentes no que foi chamado de episódios de apropriação, formados por cenas que, de modo interdependente, o perfazem.

Palavras-chave: Ângulo. Movimento lógico-histórico. Atividade Orientadora de Ensino. Atividade de ensino. Localização. Programa Observatório da Educação.

ABSTRACT

FRAGA, Moisés Alves. **Angle signification: evidences of concept in locational activities.** 2016. 167 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

This study characterized the organization of the teaching of angle and location concepts from official documents that guide the teaching of Brazilian elementary school. Together with the historical sources of development of these concepts, it was sought a possible reason for the difficulties presented by the students in the angle concept appropriation. Thus, the evidences of signification process regarding this concept have been studied, in teaching situations developed with children. In order to carry out this study, the following theories have been adopted: Cultural Historical Theory, the Theory of Activity and the principles of the Teaching Orienting Activity in organizing actions that develop the concept from its logical and historical period movement. The empirical research was conducted with students from the 4th and 5th years of the Club of Mathematics and Sciences from the School Education at University of Sao Paulo, due to the fact that learning space is suitable for the development of teaching activities for the appropriation of angle concept, since the formative actions at the Math Club are guided by the same theoretical basis adopted in this study. The analysis of government curricular proposals, the logical and historical concept movement grasped in bibliographic sources and the Cultural and Historical Theory guided the preparation of teaching activities which have been developed with the children, so that they would enable the analysis of their actions and the search for evidences regarding the formation of angle concept. The sources for the analysis of the concept appropriation process are the video recordings with the development of activities with the children. The purpose of such recordings was to highlight the actions which confirm that the appropriation concept that is present in what was called the episodes of the concept of acquiring, formed by scenes that interdependently, make up the revealing episode concept.

Keywords: Angle. Logical-historical movement. Teaching advisers activities. Teaching activities. Location. Education Observatory Program.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1. A LOCALIZAÇÃO COMO ATIVIDADE HUMANA	17
2. A LOCALIZAÇÃO E O ÂNGULO: o que nos diz a história.....	23
2.1 Movimento lógico-histórico do conceito de ângulo.....	24
2.2 Contribuições do conceito de ângulo para o aperfeiçoamento das técnicas de localização.....	29
2.2.1 Groma egípcia	32
2.2.2 Dioptra.....	33
2.2.3 Agulha de marear ou bússola.....	34
2.2.4 Quadrante náutico.....	37
2.2.5 Torquetum.....	38
2.2.6 Kamal, balestilha do mouro ou távolas das Índias	39
2.2.7 Balestilha	41
2.2.8 Astrolábio planisférico e astrolábio náutico	42
2.2.9 Teodolito.....	44
2.2.10 Anel náutico.....	45
2.2.11 Setor trigonal	47
2.2.12 Octante e sextante.....	49
2.2.13 Sistema Global de Posicionamento - GPS.....	51
2.2.14 O desenvolvimento do conceito de ângulo a partir das mudanças dos instrumentos	54
3. O ENSINO DE ÂNGULO E LOCALIZAÇÃO NOS ANOS INICIAIS DA ESCOLA BÁSICA	58
3.1 Ângulo: entre definições e nexos conceituais	59
3.2 Os conceitos de ângulo e localização nas orientações curriculares.....	63
3.3 Ângulo e localização nos cadernos de apoio e aprendizagem da prefeitura de São Paulo	69
3.4 Ângulo e localização nos descritores das avaliações de larga escala.....	72

3.4.1 Prova Brasil	72
3.4.2 Prova São Paulo.....	74
3.5 Panorama da organização do ensino	77
4. A PESQUISA REALIZADA NO CLUBE DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS.....	79
4.1 Fundamentos Metodológicos	79
4.2 O contexto em que se Clube de Matemática	81
4.3 Os sujeitos e a realização da pesquisa.....	85
4.4 As atividades de ensino	86
4.4.1 Módulo I: Localização.....	87
4.4.2 Módulo II: Ângulos	99
4.4.3 Nexos conceituais das atividades de ensino	110
5. ANÁLISE E SÍNTESE DOS DADOS	112
5.1 Os episódios de aprendizagem.....	112
5.2 Unidade de análise: Significação do conceito de ângulo	114
5.2.1 Episódio 1 - Identificação do ângulo como uma grandeza a partir da rotação, em atividades de localização	114
5.2.2 Episódio 2 - O instrumento no processo de medição do ângulo	130
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	143
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150
APÊNDICES	158

INTRODUÇÃO

Buscar uma rota ao digitar o endereço desejado em um GPS, interpretar um mapa presente em um parque ou zoológico, escolher os meios de transporte para chegar a determinado destino ou dirigir por um bairro. Tarefas consideradas simples nos dias de hoje, mas que são síntese de um longo e importante processo humano: localizar-se.

O fato de localizar-se e locomover-se no espaço, e nele encontrar o que é necessário, está tão naturalizado que pouco se pergunta sobre o modo como se desenvolveu essa capacidade ou como, ao longo do desenvolvimento humano, foram se aprimorando os instrumentos e as formas de melhor orientar-se.

No período pré-histórico, em seu dia a dia, o homem foi distanciando-se do lugar onde vivia motivado, principalmente, pela necessidade de alimentar-se. Com o objetivo de retornar, precisou aprender a localizar-se diante do espaço que o rodeava, guiando-se por meio de pontos de referência (MIGUENS, 1996a).

Com o desenvolvimento humano, as técnicas de localização mudaram de qualidade ante as novas necessidades. Na navegação, por exemplo, foi necessária uma maior precisão ao direcionar uma embarcação, por meios de rotações. Assim, ao longo da história, instrumentos como a bússola, o quadrante náutico e o sextante foram, ou são ainda hoje, fundamentais. Esses instrumentos são exemplos da contribuição que o conceito de ângulo trouxe à atividade de localização.

No entanto, o conceito de ângulo não se limita a esta aplicação em instrumentos náuticos. Tarefas como projetar uma rampa de acessibilidade, construir um gráfico de setores em planilhas eletrônicas ou elaborar uma peça metalúrgica são exemplos de outras utilizações.

O ângulo, por ser um de seus conceitos primordiais, propiciou o desenvolvimento da geometria, que se fez presente em diversas áreas do conhecimento humano, como a física, a química, a astronomia, a engenharia etc. Essa deve ser a razão para que o ensino do ângulo faça parte do currículo de matemática da escola básica, conforme apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série):

Espera-se que o aluno identifique características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e arredondadas, formas das faces, simetrias) e reconhecendo elementos que as compõem (faces, arestas, vértices, lados, ângulos) (BRASIL, 1997, p. 64, grifo nosso).

Embora seja feita referência ao conceito de ângulo no documento, ela é breve. Diferentemente do que se percebe em relação ao estudo da localização, sobre a qual há grande ênfase durante os anos iniciais do ensino fundamental, a fim de propiciar ao estudante a compreensão do espaço onde se vive, como se verifica em Brasil (1997, p. 49):

Para compreender, descrever e representar o mundo em que vive, o aluno precisa, por exemplo, saber localizar-se no espaço, movimentar-se nele, dimensionar sua ocupação, perceber a forma e o tamanho de objetos e a relação disso com seu uso.

E completa:

A exploração dos conceitos e procedimentos relativos a espaço e forma é que possibilita ao aluno a construção de relações para a compreensão do espaço a sua volta (BRASIL, 1997, p. 49).

Nosso interesse de pesquisa no estudo sobre a aprendizagem dos conceitos de ângulo e de localização se justifica, principalmente, por três razões. A primeira é a relevância dos referidos conceitos para apropriação de diversos conhecimentos produzidos pela humanidade e, por consequência, necessários ao desenvolvimento dos estudantes. A segunda é a dificuldade dos alunos em se apropriarem do conceito de ângulo, principalmente, a confusão existente com a grandeza comprimento, verificada em minha prática docente¹ e, também, indicada por Diniz e Smole (2008, p. 3):

[...] concepção errônea e comum de que a medida de ângulo é determinada pelo comprimento da marca de lápis usada para representar os lados do ângulo ou, como muitas vezes observamos nos nossos alunos, pela distância entre os dois lados do ângulo, [...].

E, finalmente, a terceira razão se dá pela organização do ensino enfatizar a localização em detrimento do desenvolvimento do ângulo (como uma medida) e, ainda, pelo fato de a localização estar, por diversas vezes, dissociada do conceito de ângulo.

Assim, essas razões apresentadas nortearam a questão inicial da pesquisa: *como organizar o ensino do conceito de ângulo objetivando seu processo de significação?* Movidos por essa questão, decidimos desenvolver o conceito de ângulo a partir de atividades de ensino de localização, pautando-nos na perspectiva histórico-cultural, na Teoria da Atividade e nos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, pela ótica de formação discente e docente discutida por Moura (1996, p. 32):

A atividade de ensino, assumida como núcleo da ação educativa, nos parece ter duas dimensões: a de formação do professor e a de formação do aluno. Ambas têm elementos comuns: a situação problema, uma dinâmica de

¹ Por se tratar de uma experiência pessoal, foi empregada a primeira pessoa do singular.

solução e uma possibilidade de avaliação. A situação-problema do aluno é aprendizagem, e a do professor, o ensino.

A inserção no projeto Observatório da Educação² – “Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: princípios e práticas da organização do ensino” (2011-2014) –, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), permitiu-nos aprofundar os estudos no conceito matemático de medida (CARAÇA, 1951) e na perspectiva teórica que orienta este trabalho, nortear a tomada de dados durante a aplicação e, principalmente, perceber a importância de desenvolver a pesquisa em pauta como uma das ações do projeto. Assim, o desenvolvimento desta pesquisa vai ao encontro de um objetivo específico do projeto, tratado por Moura (2010): “Contribuir para o aprofundamento teórico-metodológico sobre organização curricular para os anos iniciais do ensino fundamental, através do desenvolvimento de uma proposta curricular de educação matemática na infância, assentada na teoria histórico-cultural” (informação verbal)³.

A contribuição para a concretização do objetivo exposto anteriormente se dá a partir do **objetivo da pesquisa** que ora apresentamos:

- ✓ *Investigar indícios do processo de significação do conceito de ângulo a partir da necessidade de localização.*

As principais ações para a concretização desse objetivo foram:

- a) análise dos descritores da Prova Brasil e das Orientações Curriculares do município de São Paulo em busca da identificação de questões que requeiram os conceitos pertinentes ao tema localização espacial;
- b) estudo do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de ângulo na localização espacial;
- c) a partir da análise dos referenciais teóricos da Teoria da Atividade, a elaboração de um conjunto de atividades de ensino, a fim de que propiciem a investigação dos indícios de significação de conceitos essenciais para o desenvolvimento da localização;
- d) desenvolvimento das atividades de ensino estruturadas a partir dos princípios da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010) que tenham como objetivo a formação do pensamento teórico do conceito de ângulo.

² Programa de fomento realizado pela Capes com o objetivo de promover estudos e pesquisas em educação, de modo que integre educação básica, licenciatura e pós-graduação.

³ Informação fornecida por Moura na proposta do projeto da pesquisa “Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: princípios e práticas da organização do ensino”, enviado ao Observatório da Educação, em 2010.

Com a referida pesquisa, buscamos propiciar o desenvolvimento do conceito de ângulo, a partir da necessidade de localização e fundamentado no aporte teórico já citado. Para a sua efetivação, foram propostas e desenvolvidas atividades de ensino com crianças do 4º e 5º anos do ensino fundamental em busca de indícios sobre a formação do conceito em situações de ensino em atividades colaborativas.

Como produto final da pesquisa, temos a apresentação dos indícios do processo de significação observados durante o desenvolvimento das atividades de ensino. Entendemos significação como um processo e, segundo Leontiev (1983, p. 225, tradução nossa), é “a forma na qual um homem determinado chega a dominar a experiência da humanidade, refletida e generalizada”.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos a importância da localização como atividade humana, baseando-a na Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983). No capítulo 2, ao entendermos a localização como atividade, buscamos, no movimento lógico-histórico, observar a elaboração e o desenvolvimento do conceito de ângulo, e quais foram ou são suas contribuições à localização, atribuindo a esta uma mudança de qualidade.

O capítulo 3 trata da organização do ensino do conceito de ângulo e de localização, assim a análise contempla três esferas: a orientação do ensino (apresentada nos documentos curriculares oficiais), a materialização das orientações (presente nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem da prefeitura de São Paulo) e a avaliação dessa proposta de ensino (orientada pelos descritores das avaliações de larga escala).

Em seguida, no capítulo 4, são apresentadas a organização e a configuração do campo empírico de realização da pesquisa, a descrição das atividades de ensino e a metodologia desenvolvida. As categorias selecionadas para a realização da análise e as sínteses elaboradas a partir das análises dos episódios são apresentadas no capítulo 5, evidenciando os possíveis indícios de apropriação do conceito de ângulo, a partir das manifestações orais e escritas dos estudantes.

O capítulo 6 apresenta as considerações relativas ao ensino do conceito de ângulo, após a análise dos indícios de sua apropriação e os questionamentos gerados a partir do desenvolvimento desta pesquisa, buscando contribuir para a organização do ensino.

1 A LOCALIZAÇÃO COMO ATIVIDADE HUMANA

Conhecer e deslocar-se pelo local onde se vive e por outras regiões, estabelecendo pontos de referência, são necessidades humanas que remontam à pré-história. Neste período, segundo afirma Miguens (1996b), retornar ao local onde se vivia, após a busca por alimento, era uma questão de sobrevivência. Essas necessidades compõem a *atividade* de localizar-se, desempenhada pelo ser humano desde seu nascimento. Um recém-nascido, ao receber um toque em sua bochecha, vira seu rosto (BISINELA et al., 2011) e localiza, mesmo que instintivamente, o objeto executor do estímulo colocando-se a sugá-lo, pois crê que ele seja o seio materno e que, dessa forma, poderá saciar sua necessidade biológica de alimentar-se. Ao crescer, a criança identifica a si própria – seu próprio corpo – e o local onde vive – a configuração dos móveis e cômodos de uma residência. Este senso primário de localização não é algo inerente ao ser humano, mas sim motivado pelo instinto de sobrevivência e observado no comportamento de outros seres biológicos, os animais. Exemplo disso são os cachorros e gatos, que possuem a capacidade de sair do lar onde vivem, deslocar-se pelo bairro e retornar, ou mesmo os pássaros, que saem de seu ninho em busca de comida para seus filhotes e regressam portando o alimento.

Ao considerarmos a localização como *atividade* humana, entendemo-la na acepção de Leontiev (1991, p. 68) quando afirma: “Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo”. Por ser estruturada como *atividade*, a localização possui: necessidade, motivo, objetivo, ações e operações (LEONTIEV, 1983). Mediante esses elementos, o autor afirma que a atividade se realiza a partir da necessidade:

A primeira condição de toda a atividade é uma necessidade. Todavia, em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade, pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra a sua determinação: deve, por assim dizer, encontrar-se nele. Uma vez que a necessidade encontra sua determinação no objeto (se “objetiva” nele), o dito objeto torna-se motivo da atividade, aquilo que o estimula (LEONTIEV, 1983, p. 115, tradução nossa).

Portanto, é o motivo que estimula a atividade, ou seja, que a impulsiona.

A atividade é composta por ações. Leontiev (1983, p. 83, tradução nossa) define que a “ação é o processo que se subordina à representação daquele resultado que acaba de ser

alcançado, é assim o processo subordinado a um objetivo consciente”. Segundo o autor, as maneiras como se concretizam as ações são denominadas operações, que são ações que se automatizaram ao longo da prática social do sujeito, dessa forma, não são apreendidas de modo consciente por tal sujeito.

De maneira geral, como afirma Cedro (2008, p. 25): “A atividade encontra-se no nível superior e está necessariamente vinculada e orientada pelos motivos e pelas necessidades. Já as ações são orientadas pelos objetivos e, finalmente, as operações são orientadas pelas condições objetivas e subjetivas”. Tal entendimento pode ser exemplificado por meio dos comandantes das esquadras que, durante as Grandes Navegações, desempenhavam a atividade de localização em alto-mar: eles possuíam a necessidade de determinar sua posição, motivados por guiar a embarcação pela trajetória prevista, com o objetivo de chegar ao seu destino. A concretização desse processo se deu pelas ações que compõem os métodos de navegação (por exemplo, a determinação da latitude) e que foram operacionalizadas pelos instrumentos de navegação (por exemplo, o quadrante náutico).

A localização, por ser uma atividade, manifesta-se nas relações sociais e compõe o processo de humanização do sujeito. Segundo a perspectiva em que se apoia esta pesquisa, a teoria histórico-cultural, considera-se que o homem, ao nascer, é um ser biológico. Porém ele se torna um ser social, ou seja, ele se humaniza “ao se apropriar da cultura e de tudo o que está fixado nas formas de expressão cultural da sociedade” (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 16). Assim, a humanização ocorre quando o sujeito produz a si mesmo por meio do *trabalho*, sendo este “um processo em que o ser humano, com sua própria ação, impulsiona, regula e controla seu intercâmbio material com a natureza” (MARX, 2002, p. 211). Baseado nisso, Leontiev (1983), ao sistematizar a *atividade*, afirma que a humanização ocorre por meio das atividades principais desempenhadas pelo sujeito ao longo de sua vida: brincar, estudar e trabalhar. De modo que o desempenho destas é regulado pelo “lugar que o homem ocupa no sistema de relações sociais” (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 22).

Entendemos como expressão cultural o conhecimento científico, filosófico e artístico. E consideramos que a sua apropriação se dá por meio da educação, como aponta Leontiev (1978, p. 290):

As aquisições do desenvolvimento histórico das aptidões humanas não são simplesmente dadas aos homens nos fenômenos objetivos da cultura material e espiritual que o encarnam, mas são aí postas. Para se apropriar destes resultados [...], a criança [...] deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através de outros homens, isto é, num processo de comunicação com eles. Assim a criança aprende a atividade adequada. Pela sua função este processo é, portanto, um processo de educação.

Ao fundamentar-se em Leontiev (1978), Gladcheff (2015, p. 33) afirma que: “o processo de apropriação, mediado pelas relações entre os seres humanos por meio da comunicação, é considerado um ‘processo de aprendizagem’ (ou processo de educação)”.

Assim:

A relação entre aprendizagem e desenvolvimento, de acordo com a teoria histórico-cultural, tem a seguinte explicação: ao se apropriar de um objeto cultural, o homem apropria-se das operações motoras e intelectuais nele presentes, o que implica a formação ativa de novas aptidões, de funções psíquicas e motoras, correspondentes ao objeto apropriado (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011, p. 43).

Nesse contexto, a escola é considerada um local destinado à socialização do saber sistematizado, elaborado ao longo da história (DUARTE, 2001; SAVIANI, 1991), que objetiva a formação do pensamento teórico. Este, segundo Davídov (1988, p. 125, tradução nossa), é “o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução nela das formas universais das coisas”. E mais, ele “se constitui em um tipo de pensamento que tem por finalidade reproduzir a essência do objeto estudado no decurso da formação das ações mentais que ocorre no processo intencional de um ensino para o desenvolvimento” (DAVYDOV, 1986, p. 10).

Assim, ao se humanizar, o sujeito apropria-se de algumas das diversas expressões da localização, por exemplo: identificar em qual bairro, cidade, país e continente ele mora; estabelecer pontos de referência em seu bairro e cidade; estimar distâncias entre duas localidades; definir o trajeto ou qual ônibus pegar a fim de chegar a determinado lugar; utilizar as linhas ferroviárias ou, em casos mais específicos, ao ter que se localizar em alto-mar ou ao pilotar um avião.

Todas essas expressões que compõem a atividade de localização, apresentadas de maneira sintetizada, foram mudando de *qualidade* ao longo do tempo devido à necessidade humana de controle da localização. E, ao analisar todo o processo de surgimento de conceitos, de desenvolvimento de técnicas e de acurácia de instrumentos, pode-se concluir que há um movimento em busca de técnicas, conceitos e instrumentos mais precisos em relação aos anteriormente utilizados. Esse processo é o que Kopnin denomina de lógico-histórico. Diz o autor: “[...] histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. [...] O lógico é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento” (KOPNIN, 1978, p. 183).

Em relação ao conceito de *qualidade* aqui proposto, ele possui o seguinte significado para Caraça (1951, p. 113): o “conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com outros seres de um agregado, chamaremos as qualidades desse ser”. Segundo o autor, a qualidade é a relação entre dois componentes de um isolado. Caraça (1951, p. 112, grifo do autor) também é nossa referência para o conceito de *isolado*, que o autor expressa na seguinte afirmação: “Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador⁴ *recorta, destaca*, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados”.

A partir da definição do conceito de *qualidade*, Caraça (1951) aponta três consequências: dados dois objetos, um sempre possui qualidade(s) em relação ao outro e vice-versa; não existe qualidade intrínseca ao objeto, que esteja nele próprio, visto que, por ser uma relação de dois componentes, a qualidade de um é definida a partir da referência do outro; um isolado novo gerará novas qualidades, levando em consideração o contexto desse isolado.

Algumas qualidades podem ter graus de intensidade diferentes, admitindo comparações do tipo menor que/menos que, igual ou maior/mais que; a esses tipos de qualidades é possível atribuir uma *quantidade*, definida como um *atributo da qualidade* (CARAÇA, 1951). Essa intensidade não precisa necessariamente ser expressa por um número. Por exemplo, tomemos duas pessoas, Lucas e Heloísa, e as qualidades altura e bondade. Ao observarmos os dois em relação à qualidade altura, poderemos definir se Lucas é maior que Heloísa, se possuem a mesma altura ou se Heloísa é maior que Lucas e ainda quantificar suas alturas por meio de uma trena, definindo quantos centímetros um possui a mais que o outro, se for o caso. Agora, em relação à qualidade bondade, há níveis de intensidade: podemos concluir, por exemplo, que Heloísa é mais bondosa que Lucas. Nesse caso, se existir uma terceira pessoa, pode-se constatar a transitividade: se Lucas é mais bondoso que Lara, tem-se, por consequência, que Heloísa é mais bondosa que Lara.

A necessidade humana de controle da localização acarreta as mudanças de qualidade desta. Um exemplo disso, como apresenta seu movimento lógico-histórico, é a gênese de um conceito matemático essencial para o desenvolvimento humano: o ângulo, que surgiu da observação do movimento aparente do sol na eclíptica terrestre (HOGBEN, 1956). Este conceito será objeto principal do desenvolvimento desta pesquisa.

⁴ “Entendemos aqui o termo *observador* em um sentido muito largo: todo aquele – homem de ciência, agricultor, literato – que, num dado momento, empreende um estudo qualquer” (CARAÇA, 1951, p.112, grifo do autor).

O movimento lógico-histórico do conceito de ângulo evidencia que é a partir de sua gênese e aplicação que há um salto qualitativo nos conceitos, técnicas e instrumentos utilizados, chegando até a localização via satélite, como os serviços que compõem o Global Positioning System (GPS), que possui uma grande precisão em seu uso militar.

Leontiev (1978, p. 268) indica a importância do instrumento na história humana:

O instrumento é produto da cultura material que leva em si, da maneira mais evidente e mais material, os traços característicos da criação humana. Não é apenas um objeto de forma determinada, possuindo determinadas propriedades.

O instrumento é ao mesmo tempo um objeto social no qual estão incorporadas e fixadas as operações de trabalho historicamente elaboradas.

A mediação entre o homem e a natureza acontece pelos instrumentos (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011), que podem ser físicos ou simbólicos, respectivamente, objetos ou linguagem. A partir dessa concepção, os movimentos lógico-históricos de localização e do conceito de ângulo evidenciam de que maneira o homem se relacionou com a natureza mediado por instrumentos físicos (bússola, quadrante náutico, sextante) e simbólicos (ângulos, latitude, longitude).

Quando estudamos a história da produção do conhecimento, percebemos que os conhecimentos são produzidos na relação dos homens entre si e destes com a natureza, como um meio de potencializar as ações humanas de intervenção, modificação e controle dos fenômenos circundantes. Nesse processo, os conceitos criados se objetivam como instrumentos simbólicos, ou seja, neles está fixado o processo de trabalho humano (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011, p. 41).

Assim, ângulo é um conceito que, ao se objetivar como instrumento simbólico, possibilitou o controle da localização, quantificando-a. Dessa maneira, a apropriação do conceito de ângulo está intimamente ligada à necessidade de localização, que transcende um contexto histórico de gênese e configura-se como um nexo conceitual.

Logo, ao se apropriar do conceito de ângulo, o sujeito compreende-o como uma grandeza que quantifica a inclinação – expressa de maneira estática ou dinâmica (rotação) –, utiliza o grau (uma subdivisão da circunferência) como unidade de medida e apropria-se também dos nexos conceituais que o rodeiam, visto que eles “são conceitos dos quais o conceito em estudo resulta uma nova síntese” (LANNER DE MOURA, 2007, p. 69).

Os nexos conceituais são a expressão da *interdependência*, denominada por Caraça (1951, p. 109, grifo do autor): “Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta *Realidade*, em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros”. Eles “contém a

lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento” (SOUSA, 2004, p. 61). Entretanto, no que se refere ao processo de escolarização, os nexos conceituais no ensino do ângulo não são enfatizados. A organização do ensino se dá a partir de definições (GADOTTI, 2008), baseando-se na lógica formal. Essas definições são sínteses que não explicitam o longo processo lógico-histórico do conceito e que desconsideram relações essenciais, por exemplo, com a localização.

Logo, fundamentamos nossa pesquisa na lógica dialética que enfatiza o processo e propicia a manifestação dos nexos conceituais.

Para a lógica formal, o conceito não é outra coisa que uma representação geral, que se origina como resultado da distinção de uma série de características comuns [...]. O caminho da generalização é, portanto, um caminho que leva da riqueza da realidade concreta ao mundo dos conceitos, ao reino das abstrações esquálidas, separadas da vida real e do conhecimento vivo. Pelo contrário, para a lógica dialética, o conceito se revela mais rico de conteúdo que a representação, posto que a generalização não é a separação de traços singulares, mas sim a revelação dos vínculos e relações de um objeto com os outros, e se o objeto não se revela verdadeiramente na vivência direta, mas sim em toda a diversidade de nexos e relações que determinam seu lugar no mundo e sua conexão com o restante da realidade, o conceito é mais profundo, mais adequado à realidade, é o reflexo mais autêntico e pleno da mesma do que a representação (VYGOTSKI, 1997, p. 229-230, tradução nossa).

A atividade humana de localização possui diversos nexos conceituais, dentre eles, o conceito de ângulo. Nossa pesquisa é estruturada a partir dessa concepção, entendendo que ambos são indissociáveis.

Nos próximos capítulos, justificamos a importância da relação entre localização e o conceito de ângulo a partir de seu movimento lógico-histórico e buscamos, nas orientações curriculares, identificar a maneira como o ensino desse conceito está organizado. Alicerçados nisso, apresentamos a elaboração e aplicação de uma proposta de organização do ensino de ângulo baseada em atividades de localização, pautadas nos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, em que tentamos evidenciar possíveis indícios de apropriação do conceito.

2 A LOCALIZAÇÃO E O ÂNGULO: o que nos diz a história

A necessidade de localização é algo presente na vida humana. Desde os períodos pré-históricos, o homem, ao sair em busca de alimento (caça ou vegetais), precisava retornar a sua caverna (MIGUENS, 1996b). Assim, para não se perder em meio ao espaço que o rodeava, o homem fixava pontos de referência (por exemplo, um acidente natural), dando origem ao que Miguens (1996b) chama de *navegação terrestre*.

A navegação terrestre dava-se a partir do reconhecimento das características das proximidades onde se residia e se deslocava. Posteriormente, alguns grupos passaram a representar tais características através de gravuras, o que configurou um salto qualitativo em termos de localização. Nasceu, então, a cartografia com o mapa *Ga-Sur* (Figura 1), considerado o mais antigo do mundo, como afirma Oliveira (1993, p. 17):

É a propósito de origem babilônica, o mais antigo mapa que o mundo conhece. Trata-se de um tablete de argila cozida com a representação de duas cadeias de montanhas e, no centro delas, um rio, provavelmente o Eufrates [...]. Não se sabe, ao certo, a sua idade. Calculam os entendidos entre 2400 e 2200 anos antes da era cristã, havendo quem assegure que se origina de 3800 anos.

Outro exemplo das primeiras representações de localidades são as figuras rupestres encontradas no Vale do Pó (Figura 2), Itália, em que se destaca a figura originária de Bedolina. Estima-se que tenha sido feita por volta de 2400 a.C. pelos camônios. A pintura retrata detalhadamente a área onde viviam, inclusive com informações topográficas (OLIVEIRA, 1993).

Figura 1 – Mapa *Ga-Sur*

Figura 2 – Pinturas rupestres de Bedolina

Além do mapa mais antigo do mundo, também foi creditado aos babilônios o desenvolvimento de um conceito matemático que resultou da necessidade de localização e,

posteriormente, em muito contribuiu para o aperfeiçoamento de suas técnicas e de seus instrumentos: o conceito de ângulo.

2.1 Movimento lógico-histórico do conceito de ângulo

“*Olhe por outro ângulo*”, diz alguém ao sugerir que se observe determinada situação por outro ponto de vista; “*Ele estava sem ângulo para chutar a gol*” ou “*Ele chutou no ângulo! Na gaveta!*”, relata o narrador durante uma partida de futebol; e “*Meu ângulo de visão não está bom*”, afirma uma pessoa ao perceber que seu lugar na plateia não é bom para assistir ao espetáculo e, por tal razão, foi mais barato em relação aos outros ingressos. Esses são exemplos de expressões utilizadas no cotidiano que contêm o termo *ângulo* com diversas conotações, ainda que todas estejam atreladas ao seu significado.

Afinal, o que é ângulo? Ao tentar responder tal questão, uma das primeiras ideias pode ser recorrer aos livros didáticos de matemática para obter definições como resposta. Por exemplo, a definição de Dolce e Pompeu (1993, p. 64):

Chama-se “ângulo” à reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

$$A\hat{O}B = \vec{OA} \cup \vec{OB}$$

O ‘ponto O é o vértice do ângulo.

As semi-retas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são os lados do ângulo.”

Pode-se, também, verificar o que está presente na publicação histórica da geometria: *Os Elementos*, de Euclides (escrita por volta do século IV a.C.). Nessa obra, composta por 13 livros, o autor demonstrou de maneira formal as diversas propriedades geométricas a partir de definições, postulados e noções comuns inicialmente listadas.

No primeiro livro, dentre as 23 definições apresentadas, a definição 8 refere-se ao conceito de ângulo. Segundo Euclides (2009, p. 97): “E um ângulo plano é a inclinação, entre elas [retas], de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta”.

Nos exemplos descritos, observa-se a apresentação de sínteses do conceito de ângulo por meio de definições que não explicitam seu longo processo humano de formação. No contexto social e científico vivenciado por Euclides, essa abordagem foi necessária e importante para o desenvolvimento da matemática, visto que naquele momento era necessário um movimento de reunião do conhecimento produzido, que fosse justificado a partir de demonstrações lógicas (BOYER, 2010; EVES, 2004).

Entretanto, milhares de anos depois, tal fato se repete muitas vezes na escola básica, quando o conceito é apresentado aos estudantes em sua forma acabada e sintética. Dessa maneira, é deixado de lado seu caráter de grandeza, presente em sua essência, suas ações mentais e seus nexos conceituais. Como diversos conceitos matemáticos, o de ângulo não é evidente para o estudante, conforme afirma Hogben (1956, p. 31):

[...] No mundo matemático tudo é evidente para quem a ele se acostuma. Raramente nos dizem que foram necessários mil anos para que a raça humana percebesse que todos os passos da argumentação são “evidentes”. Para os sacerdotes egípcios, o funcionamento do nilômetro⁵ era evidente. Mas só se tornará evidente para nós, os que vivemos fora do templo, quando descobrirmos o canal subterrâneo que liga o templo ao rio da experiência social da humanidade.

Além disso, a escola básica, ao abordar grandezas e medidas, geralmente organiza seu ensino centrando-se no comprimento, área, volume, massa, tempo e temperatura. E, apesar de o ângulo ser uma grandeza, nos documentos oficiais de orientação curricular ele não é apresentado como tal (BRASIL, 1997; SÃO PAULO, 2007). A ausência da denominação do ângulo como grandeza oculta sua relevância histórica para o desenvolvimento do ser humano e das medidas, pois é provável que a necessidade de sua medição seja anterior à dos comprimentos, como relata Hogben (1956, p. 54): “A necessidade de medições exatas surgiu naturalmente, da prática de registrar o tempo, pré-requisito essencial da vida metropolitana. É quase certo que o homem aprendeu a medir ângulos muito antes de se dar o incômodo de medir comprimentos”. Dessa forma, para entender a gênese do conceito de ângulo é preciso voltar ao processo de registro do tempo.

A necessidade de medição do tempo deu-se a partir do momento em que se iniciaram os trabalhos com agricultura e pecuária. Assim, foi indispensável tomar conhecimento sobre a regularidade e a duração das estações do ano, tendo em vista que o plantio de vegetais e a reprodução de animais possuem uma determinada época do ano para ocorrer (HOGBEN,

⁵ Dispositivo egípcio que mensurava o aumento e a diminuição do nível do rio Nilo, ajudando na estimativa de produção da próxima colheita (PONCE, 1996).

1956). Para realizar essa tarefa, recorreu-se às regularidades e propriedades presentes nos eventos naturais:

[...] então o homem observou que a lua nasce e se põe um pouco mais tarde cada dia da noite, entre duas luas cheias, e começou a agrupar os dias em *luas*, ou meses de trinta dias. Observou naturalmente também – como quase todos os povos primitivos – que as constelações do firmamento noturno variam com as estações, e que cada noite, nascem e se põem um pouco mais cedo que na precedente. (HOGBEN, 1956, p. 44, grifo do autor)

Então, para medir o tempo, tornou-se importante verificar as localizações e direções dos movimentos dos corpos celestes como o Sol, a Lua e as constelações. Para isso, o homem recorreu à elaboração de dois meridianos:

[...] É bem provável que, já antes do início do grande calendário da civilização, o homem tivesse eleito duas linhas fundamentais de referência: o primeiro meridiano, que liga os pontos norte e sul do horizonte e outra linha perpendicular a ele, que liga os pontos leste e oeste. A descoberta destas duas referências foi o primeiro problema matemático da experiência social da humanidade. (HOGBEN, 1956, p. 55)

A determinação desses meridianos se deu a partir do estudo da sombra solar ao meio-dia, que apontava sempre na mesma direção, dividindo o horizonte (meridiano norte e sul), como exemplifica a figura 3, e explica Hogben (1956, p. 45): “A sombra solar, quando mais curta, isto é meio-dia, sempre aponta na mesma direção, e esta direção divide o horizonte por uma linha, o meridiano, que vai do que hoje chamamos norte, ao sul”.

Figura 3 – Meridiano norte-sul

Foi a partir da necessidade de determinar a localização dos corpos celestes que surgiu o conceito de ângulo, quando os babilônios, ao observarem a trajetória circular do Sol na eclíptica, dividiram a circunferência 360 partes, como afirma Hogben (1956, p. 59):

O primitivo ano babilônico tinha trezentos e sessenta dias e o acréscimo de cinco dias santificados aos doze meses egípcios [...]. Por isso a trajetória do sol na eclíptica foi estimada em trezentas e sessenta etapas, cada uma correspondendo a um dia e uma noite. Não resta dúvida que, dessas trezentas e sessenta divisões naturais do passeio do sol pelo arco descrito em sua trajetória circular, completa, se originou o grau. Já dois milênios antes da era

cristã, os sacerdotes do mundo mediterrâneo conheciam o valor do ângulo que a trajetória retrógrada do sol [...] fazia com o equador (obliquidade da eclíptica), com aproximação de fração de grau.

As contribuições dos babilônios para o conhecimento humano não se restringiram apenas à elaboração do conceito de ângulo. Seus estudos sobre astronomia foram essenciais, como as duas tábuas (denominadas *mul APIN*) que abordam estrelas fixas, da Lua e dos planetas (VENDET, 1991), e a base 60 utilizada na medição do tempo. É importante salientar, também, que esses avanços astronômicos alcançados pelos babilônios se deveram principalmente ao esforço em construir um calendário lunissolar⁶ (VENDET, 1991).

Segundo Boyer (2010, p. 24), “Nem egípcios, nem babilônios introduziram uma medida de ângulos no sentido moderno”, no entanto o mesmo autor, ao falar sobre a tableta *Plimpton 322*, aponta que nela existiam os valores aproximados, em ordem decrescente, por graus, de $\text{sec}^2 45^\circ$ até $\text{sec}^2 31^\circ$.

A partir dessas evidências, conclui-se que os babilônios, ao dividirem a circunferência em 360 partes, criaram o conceito de ângulo atribuindo-lhe uma unidade de medida, que posteriormente seria denominada grau. E, assim, puderam aplicar em suas tarefas cotidianas as três fases da medida proposta por Caraça (1951, p. 30): “Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos – *escolha* da unidade; *comparação* com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número”.

O conceito de ângulo foi utilizado nas construções das pirâmides egípcias, visto que se preocupavam em manter constante a inclinação de suas faces. Além disso, no Papiro de Rhind há o cálculo da área de um triângulo isósceles a partir da decomposição em dois triângulos retângulos e uma teoria sobre triângulos semelhantes (BOYER, 2010). Isso nos leva a acreditar que, mesmo não possuindo uma unidade de medida para ângulo, este era imprescindível para a realização de suas atividades.

Posteriormente, como afirma Maor (2002, p. 16, tradução nossa, grifo do autor), originaram-se na Grécia os termos grau, minuto de grau e segundo de grau.

A palavra *grau* teve origem com os gregos. De acordo com o historiador matemático David Eugene Smith, eles usaram a palavra *μοῖρα* (moira), que os árabes traduziram para *daraja* (semelhante ao hebraico *dar'ggah*, um passo em uma escada ou escala); este por sua vez, tornou-se o latim *de gradus*, a partir do qual veio a palavra grau. Os gregos chamaram a sexagésima parte do grau de “primeira parte”, a sexagésima parte desta de “segunda parte”, e assim por diante. Em latim a primeira foi chamada de *pars minuta prima* (“primeira parte pequena”) e a última *pars minuta prima* (“segunda parte pequena”), a partir do qual veio nosso *minuto* e *segundo*.

⁶ Um calendário é denominado lunissolar quando se baseia nos movimentos do Sol e da Lua.

A contribuição dos gregos vai além da nomenclatura. Foram os gregos que exploraram e sistematizaram o conceito de ângulo. Tales de Mileto descobriu algumas propriedades, Pitágoras utilizou-as e Euclides sistematizou o conhecimento e realizou suas demonstrações a partir do conceito de ângulo (BOYER, 2010).

Em seguida, com o objetivo de simplificar expressões matemáticas e aperfeiçoar a aproximação de ângulos muito pequenos, surgiu uma nova unidade chamada *radiano*. A palavra *radiano* é mais recente em relação à palavra ângulo, tendo sido proposta por James Thomson, em 1871 (MAOR, 2002). Segundo Hogben (1956), o *radiano* é a unidade angular que resulta do *método da roda*, visto que ele relaciona o arco do ângulo em questão com a circunferência correspondente a este arco.

Dessa maneira, baseando-se na *Teoria da Atividade* proposta por Leontiev (1983) e no processo lógico-histórico de elaboração do conceito ângulo, pode-se concluir que a atividade de agricultura e pecuária gera a necessidade de medir o tempo. Esta, por sua vez, torna-se uma outra atividade, inicialmente composta pela ação de identificar as regularidades e diferenças dos eventos naturais. Dentro da atividade de medir o tempo, essa ação ocasiona o surgimento de uma nova ação: determinar o movimento, localização e direção dos corpos celestes, que em seu desenvolvimento gera o conceito de ângulo. A seguir, propõe-se um esquema que representa uma síntese desse processo humano:

Esquema 1 – Processo de surgimento do conceito de ângulo

A ligação entre localização e conceito de ângulo não se dá apenas na origem deste. O movimento lógico-histórico mostra que a partir de sua sistematização ocorrem grandes avanços nos métodos e instrumentos de localização. Da mesma maneira, a aplicação do conceito de ângulo transcende os muros da localização e influencia os conhecimentos arquitetônicos egípcios, por exemplo, sendo utilizado atualmente nos mais diversos ramos da ciência.

2.2 Contribuições do conceito de ângulo para o aperfeiçoamento das técnicas de localização

A partir do conceito de ângulo, tornou-se possível a determinação de distâncias astronômicas, por exemplo, da Terra à Lua e da Lua ao Sol, realizadas respectivamente pelos gregos Hiparco (190 a.C. a 120 a.C.) e Aristarco (310-230 a. C.). Houve, assim, um desenvolvimento da astronomia, tornando seus cálculos mais precisos (HOGBEN, 1956).

O conceito de ângulo influenciou diretamente as técnicas e instrumentos de localização, contribuindo muito para o aperfeiçoamento e desenvolvimento tecnológico destes. Ele se fez presente da maneira de localização geral mais antiga até os instrumentos mais utilizados nos dias de hoje. Entende-se como localização geral a maneira de se localizar emancipada dos pontos de referência próximos ao lugar em que se vive ou a trajetos percorridos.

A maneira mais antiga de localização de que se tem conhecimento, é aquela que utiliza o céu como referência, mais especificamente, o polo norte celeste. Este foi determinado a partir da sombra do meio-dia, que indicava o ponto no céu em que as estrelas giram ao seu redor (ou seja, um ponto de rotação das estrelas). A estrela da constelação de dragão foi a primeira estrela identificada como a mais próxima ao polo norte, com cerca de 3° de variação (HOGBEN, 1956; MIGUENS, 1996b). Porém, devido à movimentação das constelações ao longo do tempo, atualmente o polo norte do céu está mais próximo a *polaris* (chamada de estrela polar), cerca de 1° (HOGBEN, 1956).

Por meio da referência da estrela polar e do zênite⁷ e da utilização do conceito de ângulo, houve a emancipação das referências próximas, chegando a dois conceitos importantes, como relata Hogben (1956, p. 365):

Já na época da construção das Grandes Pirâmides, e possivelmente antes, as castas sacerdotais do Egito e da Suméria, conheciam muito bem dois fatos sobre as estrelas: primeiro, que sempre transcorre um mesmo intervalo de tempo entre os instantes em que duas determinadas estrelas cortam o meridiano, [...] segundo, que em um dado lugar o ângulo formado pela estrela com o horizonte (sua altura) ou com zênite (sua distância zenital) no momento em que ela corta o meridiano é sempre a mesma.

Ao ser aplicado no cálculo da distância zenital e se aliar ao conceito de tempo, o ângulo atribuiu uma nova qualidade à localização, contribuindo para a elaboração de dois conceitos: a latitude e a longitude. Essenciais para a localização e o deslocamento, essas coordenadas permitiram determinar quantitativamente a posição de um objeto.

A latitude teve base para sua determinação nos mapas estelares, que foram elaborados por babilônios; já a longitude baseou-se no horário, que atualmente possui sua referência na cidade inglesa de Greenwich (HOGBEN, 1956).

O processo de determinação da latitude é antigo e baseava-se na distância zenital, visto que, para determinar a latitude de um ponto do globo terrestre, basta medir o ângulo formado pelo polo celeste com o horizonte (HOGBEN, 1956). Posteriormente, com o avanço dos instrumentos e métodos de definição, a latitude passou a ser denominada conforme Estados Unidos⁸ (1979 apud OLIVEIRA, 1993, p. 52): “[...] o ângulo entre fio de prumo e o plano do equador celeste, ou o ângulo entre o plano do horizonte e o eixo de rotação da terra”.

Em relação à longitude, sua determinação foi mais complicada (OLIVEIRA, 1993) e está intimamente atrelada ao conceito de tempo, que, por sua vez, está ligado ao movimento de rotação terrestre. Na Antiguidade, o homem deu-se conta de que o horário não era o mesmo nos diversos pontos da Terra mediante o movimento de planetas e dos eclipses. Ao buscar a determinação da longitude, os babilônios utilizaram ampulhetas para mensurar o tempo entre o meio dia de uma data determinada e o início ou final de um eclipse (HOGBEN, 1956). A determinação da longitude com precisão aceitável, ocorreu somente em 1759, quando John Harrison construiu seu quarto cronômetro com tal objetivo. Mas os meridianos já eram utilizados desde o século I, como é o caso do meridiano das ilhas Afortunadas (arquipélago das Canárias) usado por Marino (OLIVEIRA, 1993).

⁷ Segundo Hogben (1956, p. 45), “Zênite é o nome dado pelos astrônomos ao ponto do céu que fica bem por cima de nossa cabeça”.

⁸ ESTADOS UNIDOS. Geological Survey. *Maps for America*, Washington, 1979.

Assim como a latitude, posteriormente a longitude passou a ser denominada, conforme Estados Unidos (1979 apud OLIVEIRA, 1993, p. 52): “[...] o ângulo entre o plano do meridiano celeste e o plano do meridiano de origem (ou primeiro meridiano), escolhido arbitrariamente”.

Apesar de serem conceitos antigos, somente em Alexandria a latitude e a longitude se uniram à cartografia, como afirma Hogben (1956, p. 181): “Os gregos jamais lograram em construir mapas baseados em latitude e longitude. Isto só foi conseguido quando a geometria grega se transferiu para o grande centro navegador do mundo clássico, a cidade de Alexandria”.

Figura 4 – Latitude

Figura 5 – Longitude

Nos dias de hoje, os conceitos de latitude e longitude são indispensáveis à localização e à cartografia, visto que, a partir deles, traçaram-se linhas imaginárias no globo terrestre, os meridianos e os paralelos, sendo representadas em graus (meridianos de 0° a 180°; paralelos de 0° a 90°). A partir da determinação dessas duas coordenadas, é possível localizar qualquer ponto da superfície terrestre.

O movimento lógico-histórico do processo de localização apresenta-nos os diferentes interesses que impulsionaram diversos povos a se afastarem cada vez mais da costa e durante um maior período de tempo. Os polinésios, um dos primeiros povos de que se tem conhecimento a atravessar grandes distâncias marítimas, fizeram-no em busca de colonizar outra ilha devido à explosão demográfica na ilha onde viviam (AIRES, 2012; FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011); as expedições chinesas, lideradas por Zheng He, possuíam interesses políticos, diplomáticos, militares e econômicos (PEREIRA; PING, 2006); os árabes almejavam o comércio marítimo, assim como os europeus, que pretendiam descobrir terras e

traçar uma nova rota marítima que os levasse às Índias (FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011).

Baseado nos conhecimentos astronômicos socializados pelos árabes, o povo ibérico pôde prosseguir com seus estudos e ações, como indica Mourão⁹ (2004 apud FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011, p. 65), a fim de desenvolver as técnicas de navegação. Nesse movimento, os instrumentos desempenharam protagonismo: os já existentes foram aprimorados e novos foram elaborados.

Além da sistematização dos conceitos de latitude e longitude, o conceito de ângulo contribuiu para aprimorar as técnicas de localização e, por consequência, os instrumentos utilizados nesse processo. A seguir, são apresentados alguns dos instrumentos que se valem desse conceito. Essa seleção levou em consideração a relevância matemática e histórica desempenhada por eles. Logo, não foram considerados instrumentos projetados e descritos de forma teórica, mas que não possuam algum exemplar ou fonte histórica que comprove sua construção e utilização. O objetivo não é explorá-los matematicamente, mas evidenciar a presença do referido conceito em cada um deles e mostrar, a partir do movimento lógico-histórico, o desenvolvimento do ângulo e suas contribuições para as atividades humanas, em especial, localização e geodésia¹⁰.

2.2.1 Groma egípcia

Wallis (2005) afirma que o primeiro instrumento de medição de ângulos de que se tem conhecimento é a groma egípcia. Na agrimensura ela era utilizada, em superfícies planas, no alinhamento de direções até objetos distantes e na marcação, com retas no solo, das direções observadas (UFRGS, [2008?]). A utilização dela com o objetivo de medir ângulos ocorreu nas diversas construções egípcias, como as pirâmides (WALLIS, 2005; UFRGS, [2008?]).

Durante milhares de anos, a groma foi utilizada para a medição de ângulos retos, exemplo disso são os romanos, que a empregavam em suas construções, principalmente em suas estradas, que deveriam sempre ser dispostas em linhas retas (WALLIS, 2005).

⁹ MOURÃO, R. R. F. *Copérnico: pioneiro da revolução astronômica*. São Paulo: Odysseus, 2004. (Coleção Imortais da Ciência).

¹⁰ Ciência que tem o objetivo de medir e representar a superfície terrestre.

Composta por duas madeiras perpendiculares de mesmas dimensões, que se cruzam ao centro, a groma egípcia (Figura 6) possui nas quatro extremidades cordas de mesmo comprimento com pedras nas pontas. Wallis (2005, p. 3, tradução nossa) explica como se dava sua utilização:

[...] medições eram realizadas pelo alinhamento visual de duas das cordas suspensas e o ponto a ser delimitado. Ela era bastante limitada em sua aplicação pelo fato de que só era capaz de ser usada em terrenos razoavelmente planos e por sua precisão ser limitada pela distância.

Figura 6 – Groma Egípcia

Embora limitada, a groma foi um marco para o conceito de ângulo, pois, pela primeira vez, um instrumento destinou-se a medi-lo e usou tal conceito de maneira direta. Wallis (2005) indica que houve utilização maciça da groma na medição de ângulos retos. Entende-se que tal fato ocorreu pela ausência de uma escala angular que propiciasse a quantificação de diversos ângulos, limitando-a ao ângulo mais evidente em sua estrutura: o de 90° .

2.2.2 Dioptra

Descrita por Heron de Alexandria (10-70 d.C.), a dioptra carrega no significado de seu nome – *o instrumento para ver através* – a forma como era utilizada. Wallis (2005) afirma que o primeiro instrumento data, possivelmente, de 150 a.C. O mesmo autor relata como era a dioptra apresentada por Heron:

[...] era um instrumento que consiste de uma placa metálica circular, que poderia ser girada 360 graus horizontalmente através de uma roda dentada, e outra placa, que pode ser inclinada em relação ao plano vertical [...]. Por

estas placas poderia ser preso um dispositivo de nivelamento, que consiste em dois tubos interligados contendo água, a linha de nível sendo o alinhamento dos dois meniscos de líquido nas partes superiores dos tubos. A Dioptra tinha uma grande placa circular horizontal, na qual foram marcados os ângulos, estes poderiam ser alinhados com uma régua de metal rotativo, que foi fixada com um par de miras abertas [...] (WALLIS, 2005, p. 4, tradução nossa).

Primeiramente, os astrônomos gregos utilizaram a dioptra (SOUZA, 2014), depois ela foi utilizada na topografia pelos romanos, que possuíam conhecimentos avançados de trigonometria, mas necessitavam de um instrumento que “combinasse a medição horizontal de ângulos com movimentos verticais de alidade de visualização” (GALLO, 2006, p. 379, tradução nossa).

Figura 7 – Dioptra

A dioptra representou um salto qualitativo na medição de ângulo, pois o disco circular é a representação do conceito em sua estrutura e, além disso, traz consigo um novo elemento a essa categoria de instrumentos: a quantificação.

2.2.3 Agulha de marear ou bússola

Utilizada para determinar direções e apontada como um dos instrumentos de navegação mais importantes ao longo da história, a agulha de marear ou bússola é originária da China (TAYLOR¹¹, 1956 apud NUNES, 2012; SOUSA, 2010; ACZEL, 2002). Há suspeitas de que a bússola teria sido elaborada por volta do século I, segundo afirmam alguns autores chineses. Contudo, o registro mais antigo sobre a bússola data de 1040 d.C. (ACZEL, 2002):

¹¹ TAYLOR, E. G. R. **The Haven Finding Art**. A History of Navigation from Odisseus to Captain Cook. Londres: Hollis & Carter, 1956.

O indício mais convincente do desenvolvimento de uma bússola magnética na China foi descoberto pelo especialista Li Shu-Hua, da Columbia University, na década de 1950. Shu-Hua descobriu um texto antigo genuíno, o *Wu Ching Tsung Yao*, que foi conclusivamente datado de 1040 d.C. [...]. Esse texto chinês autêntico, que se conservou intacto, dá uma clara descrição de um instrumento inusitado: um peixe de ferro suspenso na água. O autor do livro, Tsêng Kung-Liang, faz uma descrição completa e cientificamente verificável de como a bússola do peixe de ferro era fabricada e usada (ACZEL, 2002, p. 67, grifo do autor).

O autor defende ainda que a invenção da bússola é anterior à data do texto:

Seja como for, com base no *Wu Ching Tsung Yao* podemos concluir sem sombra de dúvida que os chineses inventaram a bússola magnética antes de 1040 d. C. Essa data precede em quase 150 anos a primeira referência conhecida ao uso de uma bússola magnética na Europa. Foram os chineses que inventaram a bússola magnética (ACZEL, 2002, p.74).

Além do formato de peixe citado, os chineses desenvolveram bússolas no formato de concha e de tartaruga, que eram suspensas no ar – a primeira apoiava-se em uma base quadrada, já a segunda, em um pivô.

Figura 8 – Bússola de concha chinesa

Figura 9 - Bússola

Ao contrário do que geralmente se pode imaginar, a primeira função desempenhada pela bússola foi a de instrumento do *feng shui*¹²: por meio de sua movimentação, ela auxiliava os adivinhos a tomar decisões e a profetizar. A utilização na navegação ocorreu por volta de 1086 d.C., tal fato se deu devido à economia chinesa ser predominantemente agrária e à navegação ocorrer nos canais e rios existentes (ACZEL, 2002), não havendo a necessidade de utilização da bússola, já que o percurso e a direção a serem seguidos eram determinados.

Como a bússola chegou à Europa, não se sabe ao certo. As fontes consultadas não contêm informações a respeito. Sabe-se que a primeira referência encontrada em terras ocidentais data de 1187 d.C., no livro *De naturis rerum*, escrito por Alexander Neckam, um monge inglês que relatou a utilização da bússola por marinheiros (ACZEL, 2002). Mas, o primeiro trabalho de relevância sobre a bússola foi escrito em 1269, por Pedro de Maricourt

¹² Filosofia chinesa, denominada como “ciência dos ventos e das águas”, caracteriza-se como uma disciplina na esfera da espiritualidade cósmica, exercendo grande relevância na cultura chinesa (ACZEL, 2002)

ou Petrus Peregrinus, descrevendo o funcionamento da bússola a seco – apoiada no pivô – e da bússola flutuante – apoiada na água (ACZEL, 2002; NUNES, 2012).

O aperfeiçoamento da, até então, agulha de marear, ocorreu na nação de Amalfi, uma potência comercial e marítima da bacia do Mediterrâneo durante os séculos XII e XIV e que hoje pertence à Itália.

[...] entre os anos 1295 e 1302 uma verdadeira inovação teve lugar em Amalfi. Segundo fontes medievais e modernas, o povo da cidade levou a bússola magnética à “perfeição”, transformando-a de uma agulha que flutuava na água ou era suportada no ar na bússola que conhecemos hoje: uma caixa redonda em que um quadrante com uma rosa dos ventos e uma divisão em 360 graus gira, preso a um elemento magnético. Outros indícios relativos ao intervalo de datas em que se chegou à bússola aperfeiçoada são fornecidas por cartas náuticas traçadas na Itália durante a Idade Média. A famosa *Carta Pisana* de 1275 não demonstra que seu elaborador estivesse familiarizado com a bússola com graus e rosa dos ventos, mas aquelas traçadas pelos cartógrafos venezianos Vesconte em 1311 e Dalorto em 1325 exibem claros sinais desse novo conhecimento (ACZEL, 2002, p. 52, grifo do autor).

Na Itália, a agulha de marear não só ganhou novos elementos, como também foi batizada de bússola. Em 1380, em um comentário de Francesco da Buti sobre *A Divina Comédia* (de Dante Alighieri), a palavra bússola foi utilizada pela primeira vez, como discorre Aczel (2002, p. 36, grifo do autor):

O termo *bussola* é derivado da antiga palavra italiana *bussolo*, que por sua vez é uma corrupção linguística das palavras do latim medieval *buxida* e *buxus*, “um recipiente de madeira”, ambos originários da palavra do latim clássico *pyxis*, que significa “caixa”. Francesco da Buti descreveu a *bussola nautica* como uma caixa de madeira com uma cobertura de vidro em que um disco redondo preso a um elemento magnético gira livremente, indicando direções em graus de 0 a 360 e incluindo uma rosa dos ventos. Essa rosa dos ventos exibia 16 pontos.

Utilizada inicialmente por navegadores italianos entre 1274 e 1280 (ACZEL, 2002), a bússola espalhou-se pela Europa, trazendo outra qualidade à atividade de navegar, pois possibilitou a referência horizontal de orientação e, dessa maneira, a emancipação da dependência em relação à orientação astronômica.

Dentre os desdobramentos importantes da utilização da bússola, pode-se citar: a navegação por lugares mais distantes e inexplorados e a navegação durante o inverno, esta que não ocorria pois, durante a referida estação, o céu permanecia nublado diversos períodos, impossibilitando a orientação (ACZEL, 2002).

A importância da bússola transcendeu os séculos: durante o século XVI ela era descrita em todos os tratados de navegação (NUNES, 2012), atualmente, “toda embarcação

transporta uma bússola magnética pelo menos como reserva para seus instrumentos eletrônicos” (ACZEL, 2002, p. 7).

A bússola é um instrumento magnético criado para orientação e direcionamento. Ao longo da história, mudou de formato e apropriou-se de conceitos como a escala angular de 360° (variando sua graduação a cada 5°, 10°, 15°, 20°, entre outras) e os pontos cardeais e colaterais. Esse movimento de mudança ocorreu no sentido de torná-la mais prática e eficiente. Atualmente, existem aplicativos de celular que simulam uma bússola virtual, por exemplo, o Smart Compass.

2.2.4 Quadrante náutico

O quadrante, como sugere seu nome, é um instrumento que representa um quarto de círculo (graduado de 0° a 90°). Possui um fio de prumo a ele atrelado e pínulas em um de seus dois lados, dessa maneira permite mensurar a altura dos corpos celestes e as horas.

Apesar de a obra *Libros del Saber da Astronomía* (escrita no século XIII) já possuir parte dedicada ao instrumento, o *Libro del Cuadrante* (RAPOSO, 2006; REIS, 1988), que data do século XI, é a primeira e mais antiga referência que se conhece sobre o quadrante, que era chamado de *quadrans vetus*, como afirma Michel¹³ (1947 apud REIS, 1988, p. 247).

Figura 10 – Quadrante náutico

Segundo Raposo (2006), ele foi o primeiro instrumento astronômico usado pelos navegadores portugueses, logo o quadrante é a materialização do uso de uma medida angular na localização baseada nos corpos celestes.

¹³ MICHEL, A. *Traité de L'astrolabe*. Paris: [s.n.], 1947.

Devido às propriedades geométricas nele presentes, a medição era realizada de maneira simples: bastava direcionar o olhar, alinhando-o com o objeto, utilizando as pínulas, que o fio de prumo indicava o ângulo correspondente à altura do astro (RAPOSO, 2006).

2.2.5 Torquetum

Desenvolvido possivelmente no século XII pelo matemático e astrônomo espanhol de origem árabe Jabir ibn Aflah, o torquetum é um instrumento de medir ângulos que auxiliava na determinação das coordenadas eclípticas de um corpo celeste (LORCH¹⁴, 1976 apud TEN; MONRÓS, 1985).

A data exata do primeiro relato do torquetum é desconhecida. Os primeiros a descrevê-lo foram Bernadus de Virduno, em *Tractus super totum astrologium*, de data desconhecida, e Franco da Polônia, em seu manuscrito de 1284. Os primeiros registros de observações utilizando o torquetum datam do século XII. Dentre os adeptos do instrumento, está o astrônomo francês Jean de Murs (PASELK, 2015).

Figura 11 – Torquetum

O trabalho de Franco teve versões manuscritas e foi referência até meados do século XV. Dessa maneira, ele é considerado o principal divulgador do instrumento. No fim do século XV e início do XVI, os relatos de Franco deram lugar à relatos como os de Johannes Regiomontanus e de Peter Apian, ambos astrônomos alemães (PASELK, 2015).

O torquetum foi muito usado na Europa durante os séculos XV e XVI (COSTA, 2009). Ten e Monrós (1985, p. 54, tradução nossa) explicam a composição e a medição realizada com o instrumento:

¹⁴ LORCH, R. P. The astronomical instruments of Jabir ibn Aflah and the Torquetum. **Centaureus**, n. 20, p. 11-34, 1976.

[...] o torquetum consiste numa plataforma horizontal sobre a qual se situa outra inclinada em relação a primeira a um ângulo preciso: 90° menos a latitude do lugar para a qual tenha sido construído. Isto significa que este plano orientado no Norte está colocado paralelamente ao Equador celeste e, por consequência, o seu paralelo perpendicular ao eixo do mundo. Sobre a plataforma inclinada é desenhado um círculo graduado e no centro deste é aparafusado uma peça composta de dois círculos inclinados um em relação ao outro com um ângulo que é igual à obliquidade da elíptica no momento em que foi construído [...]. Isto faz com que o círculo superior possa ser colocado paralelo ao plano da elíptica em cada momento. Este círculo é graduado de 0° a 360° com a sua origem 90° para a esquerda do ponto de contato. Esta origem representa o ponto de Áries. Sobre este círculo e perpendicular a esta é parafusado outra peça que pode mover-se livremente em torno do parafuso que atua de eixo. Esta peça é composta de uma alidade com duas pínulas, que serve para orientar toda a peça e a inferior na direção de uma estrela conhecida próxima à eclíptica, situando assim o conjunto no plano da eclíptica e uma vez orientado e realizada a medida de posição da estrela ou planeta objeto de nosso interesse, obter a sua longitude eclíptica. Perpendicular à alidade, um suporte segurando um círculo graduado que está ligado a outra alidade com pínulas. Esta alidade nos dará, ao observar a estrela com suas pínulas, sua latitude eclíptica. Desse modo, obteremos as duas coordenadas em uma única medida. A observação do movimento ligado das duas alidades permite visualizar facilmente o intervalo de variação das coordenadas na esfera celeste.

Assim, o torquetum tem toda sua estrutura baseada no conceito de ângulo, desde a inclinação da segunda plataforma horizontal, de acordo com a latitude do local, até o círculo graduado de 0° a 360° .

2.2.6 Kamal, balestilha do mouro ou tábola das Índias

Durante o traslado de Melinda à Calicute, na Índia, a frota portuguesa de Vasco da Gama foi guiada pelo marinheiro árabe Malemo Cana, conhecido como Ahmad Ibn Mājīd. Ele foi o responsável por apresentar ao comandante luso um instrumento criado e utilizado pelos navegadores árabes: o kamal (UFRGS, [2008?]; SILVA, 1924; BARROS¹⁵, 1945 apud SOUZA, 1953).

A palavra kamal deriva do árabe *al-kemal*, que significa linha guia. Ele é composto por uma placa de madeira retangular e um cordão com diversos nós fixados em um orifício ao centro, que tem por função medir a altura dos astros e, assim, determinar a latitude da

¹⁵ BARROS, J. A *Ásia*: década I, v. 1. Lisboa: Edição da agência geral das colônias, 1945.

embarcação. Dessa forma, os nós presentes no cordão correspondiam aos locais de latitudes anteriormente delimitadas (MIGUENS, 1996b).

Figura 12 – Kamal

Vasco da Gama denominou esse instrumento de tábua da Índia e o levou à Portugal (MIGUENS, 1996b; SOUZA, 1953). Ele também ficou conhecido como tábua da Índia e balestilha do Mouro.

Silva (1924, p. 365) descreve como realizar a medição utilizando o kamal:

Para tomar a altura de uma estrela por este instrumento, segura-se a tabuinha com uma das mãos e o cordel na outra. A tabuinha pode colocar-se com o lado menor, ou o maior, vertical, conforme a grandeza do ângulo a medir, e aproxima-se ou afasta-se do olho do observador até que o horizonte H se veja pelo lado inferior, e a estrela E pelo lado superior, do retângulo de madeira [Figura 13].

Figura 13 – Utilização do kamal

Entretanto, Pereira (2003) aponta um erro na prática de observação com o kamal: prendiam-no entre os dentes ao invés de posicionar o cordel em frente aos olhos, segurando-o com as mãos, como na figura 14. Essa prática, segundo os estudos do mesmo autor, ocasionava uma diferença pequena e precisava de uma correção, exceto para dois valores, que estavam acima de 1° ($66' \cong 1^\circ$ $6' 77' \cong 1^\circ 17'$).

Figura 14 – Utilização do kamal prendendo o cordel entre os dentes

2.2.7 Balestilha

Apontada por Miguens (1996b) como o primeiro instrumento a usar o horizonte como uma das referências para determinação das alturas dos astros, a construção balestilha pode ter sido inspirada no kamal, conforme relata UFRGS ([2008?]), devido ao funcionamento muito semelhante. Porém, não há evidências que comprovem tal fato. Caso este seja confirmado, a afirmação de Miguens (1996b) seria substituída por uma similar, que teria o kamal como precursor.

A balestilha foi usada para observação dos astros. Seu nome origina-se da palavra *balesta* ou *besta*, segundo Ramos¹⁶ (2004 apud FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011, p.65), sendo essa uma arma medieval de formato semelhante. Ela é composta por duas partes perpendiculares entre si: *virote* (parte maior) e *soalha* (parte menor que desliza sobre o virote), de madeira ou marfim, formando um T. O responsável por sua primeira descrição, segundo Souza (1953) e Mathew (1988), foi Levi ben Gerson, um catalão que a batizou de báculo de São Tiago. Em 1342, a descrição realizada por Gerson foi traduzida para o latim.

O objetivo da utilização da balestilha era medir o ângulo entre o horizonte e a linha de visada do astro e, assim, definir a altura¹⁷ do astro em questão, auxiliando na orientação da navegação e na determinação da latitude (FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011).

O uso da balestilha era realizado da seguinte maneira: na posição horizontal, a extremidade do virote (também chamada de *cós*) era colocada próxima ao olho; logo após, a

¹⁶ RAMOS, F. P. **No tempo das especiarias**: o império da pimenta e do açúcar. São Paulo: Contexto, 2004.

¹⁷ Altura na acepção astronômica: distância angular entre o astro e o plano do horizonte.

soalha era movimentada até que, ao olhar para sua parte inferior, esta coincidia com o horizonte e, ao olhar para a parte superior, esta coincidia com o astro, conforme a figura 15. Assim, o ângulo formado pelos olhares do observador em direção ao horizonte e ao astro, aliado à posição da soalha, permitiam a determinação da altura do astro. Devido à semelhança dos processos de medição realizados com os dois instrumentos, balestilha e kamal, seus princípios geométricos são os mesmos.

Figura 15 – Balestilha

A utilização da balestilha possuía suas desvantagens: utilização apenas ao crepúsculo ou com o luar, pois as estrelas e o horizonte estavam visíveis; dificuldade de mira simultânea dos dois pontos de referência (astro e horizonte), em razão do balanço da embarcação; imprecisão, pelo fato de não ter uma escala graduada (FERNANDES; LONGHINI; MARQUES, 2011).

2.2.8 Astrolábio planisférico e astrolábio náutico

Originário da Grécia clássica, o astrolábio é um instrumento antigo que, segundo Morrison (2010), teve suas projeções inicialmente estudadas por Apolonio de Perga (século III a.C.), Hiparco (século II a.C.) e Ptolomeu (século II d.C.). Hiparco foi responsável pela refinação da teoria de projeção, porém não inventou o astrolábio (MORRISON, 2010), ao contrário do que alguns autores acreditam e até mesmo afirmam (COSTA, 2009; MIGUENS, 1996b). Já Ptolomeu foi o primeiro a escrever sobre a projeção, em sua obra *Planisferium*, que, segundo Morrison (2010), faz grande referência ao astrolábio.

Por volta da metade do século VIII, os árabes tiveram o primeiro contato com o instrumento. O interesse foi tamanho que chegaram a publicar tratados resultantes de estudos sobre o astrolábio. Eles também foram os responsáveis por introduzi-lo na cultura europeia (MIGUES, 1996a; MORRISON, 2010).

O astrolábio tratado até o momento é chamado de *astrolábio planisférico*, antecessor do *astrolábio náutico*. Este é uma versão simplificada do primeiro, mais adequado às condições objetivas de seu uso em alto-mar, conforme relata Costa (2009, p. 8): “[...] o Astrolábio Náutico só apresenta um disco (vazado para oferecer menos resistência ao vento quando colocado no convés do navio)”.

O astrolábio náutico mais antigo de que se tem conhecimento data de 1540 (CRATO, 2003a). Em relação a sua origem, acredita-se que sua adaptação foi realizada em Portugal, por volta do século XV (GESTEIRA, 2014; GESTEIRA; VALENTE; VERGARA, 2011).

O que ocorreu provavelmente em Portugal foi a adaptação do instrumento para uso no mar, que em vez de ser planisférico, fabricado para observação noturna das estrelas, passou a ter a forma anelada, viabilizando a observação do Sol, uma vez que permitia tomar a altura sem a necessidade de voltar os olhos para o astro. O anel graduado continha pínulas com orifícios por onde entrava a luz do Sol, propiciando a leitura dos graus no instrumento por meio de sua projeção (GESTEIRA, 2014, p. 1020).

A adaptação do astrolábio para torná-lo um instrumento náutico trouxe maior precisão na determinação de localização das embarcações durante a navegação, tornando sua utilização predominante em relação aos demais instrumentos (por exemplo, a balestilha e o quadrante) – principalmente entre os navegadores portugueses (GESTEIRA, 2014).

Figura 16 – Astrolábio náutico de 1572, construído por Gualterus Arsenius

Figura 17 – Astrolábio náutico

Alves e Romeiro (2000) relatam e ilustram (Figura 18) como utilizar o astrolábio na determinação da altura do corpo celeste:

O observador suspende o astrolábio pela argola, numa cábrea, orienta a roda no plano vertical do Sol e gira a medeclina de modo a que a luz do Sol passe pelos dois furos das pínulas. A leitura, feita pela ponta afiada na graduação da roda, indica a altura do Sol ($h = 90^\circ - z$) ou a distância zenital z .

Figura 18 – Utilização em terra do astrolábio

Figura 19 – Aspecto geométrico da utilização do astrolábio

O formato circular do astrolábio náutico, associado aos conceitos de ângulo e de incidência paralela dos raios do Sol, nele presentes, permitiram simplificar e melhorar a acurácia na determinação da altura de um astro, significando um avanço no desempenho de tal tarefa.

2.2.9 Teodolito

O teodolito é um instrumento utilizado para medir ângulos verticais e horizontais, utilizado principalmente nas tarefas relacionadas à agrimensura e à geodésia (ZILKHA, 2014). A sua invenção é atribuída ao inglês Leonard Digges, matemático e agrimensor, que citou o instrumento pela primeira vez, em 1571, no seu livro *Pantometria*, batizando-o de *theodolitus* (WALLIS, 2005).

Como mostra a figura 20, ele possuía formato circular com graduação de 0° a 360° (em intervalos de 10°) e, em uma das metades, outra graduação, em formato retangular. Ao centro, eram encaixadas duas réguas, que efetuariam o movimento de rotação. Tais réguas continham em suas extremidades marcações que auxiliavam no processo de medição.

Figura 20 – Teodolito de Leonard Digges

Muito semelhante ao astrolábio náutico, ao longo do tempo o teodolito diferenciou-se e foi aperfeiçoado, sofrendo alterações em seu formato e composição até chegar a sua forma mais elaborada, utilizada até os dias de hoje: o teodolito eletrônico, elaborado por volta dos anos 1970 (ZILKHA, 2014).

O desenvolvimento da tecnologia e o aperfeiçoamento das técnicas de medição de ângulos e de distâncias, aliados ao objetivo de facilitar os trabalhos em geodésia, resultaram na criação de um novo instrumento: a estação total, construída em 1971 pela empresa Zeiss (WOLHUTER, 2015).

Resultante da junção de um teodolito a um distanciômetro, ambos eletrônicos, a estação total possui seu funcionamento baseado na reflexão de feixes de luz (MATOS, 2010; SILVA et al., 2009; ZILKHA, 2014). O acúmulo de funções e sua precisão tornam-na um instrumento importante, principalmente em tarefas topográficas.

Figura 21 – Teodolito do século XIX

Figura 22 – Teodolito eletrônico

Essa mudança trouxe uma grande precisão à medição de ângulos. Existem estações totais que possuem precisão angular superior a 1'' (um segundo), que corresponde a 1/360 de 1° (FAGGION et al., 2013).

2.2.10 Anel náutico

A elaboração do anel náutico é atribuída a Pedro Nunes, grande matemático português do século XVI, que descreveu o instrumento em sua obra *De arte atque ratione navigandi*, de

1573 (MEDEIROS; MEDEIROS; MONTEIRO JR., 2004; CRATO, 2003b). Inicialmente chamado de astrolábio, devido a sua estrutura assemelhar-se à de um astrolábio náutico (CRATO, 2003b), o anel náutico mede a distância zenital do Sol a partir de seu ângulo.

Pedro Nunes¹⁸ (2008 apud NUNES, 2012, p. 121) argumentava que o astrolábio náutico seria impreciso devido ao desvio ocasionado pela presença da medeclina: “[...] pode suceder que a parte da medeclina que tem a posição mais elevada – e por isso é mais pesada, como Jordano demonstrou acerca das balanças – estando aderente ao instrumento, o desvie ligeiramente da vertical”. Assim, o anel náutico surgiu como uma alternativa mais precisa em relação ao seu precursor, graças à ausência da medeclina.

Contudo, o anel também possuía um fator que poderia ocasionar imprecisão nas medidas angulares: o orifício de entrada dos raios solares. Para que isso não acontecesse, Pedro Nunes sugeriu a retirada da mesma massa extraída para a construção do orifício, porém oposto a este (NUNES, 2012).

Figura 23 – Anel náutico

Outra vantagem do anel náutico seria a ampliação da escala: suas marcas são o dobro das presentes no astrolábio (CRATO, 2003b; COSTA, 2009), uma aplicação da proposição 20 do livro III d’*Os Elementos* de Euclides (2009, p. 169): “Em um círculo, o ângulo junto ao centro é o dobro do sobre a circunferência, quando os ângulos tenham a mesma circunferência como base”.

Apesar de Nunes defender as vantagens do anel náutico, as desvantagens influenciaram a não adesão por parte dos navegantes, tanto que não há registros sobre sua utilização em alto-mar (NUNES, 2012). Além de encontrar dificuldade na projeção da luz solar, que se dá no formato de disco (e não de um ponto), ocupando cerca de $0,5^\circ$ na escala, outros fatores importantes relativos à construção do instrumento influenciavam a sua precisão:

¹⁸ NUNES, P. **Obras**. De arte atque ratione navigandi. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008. v. IV.

[...]a eficácia do instrumento dependia da colocação de um orifício de reduzido diâmetro e o raio do anel náutico tinha de ser ajustado de forma que a difusão da luz não fosse exagerada. Atualmente, conhecemos os fenómenos de difração da luz que, de certo, influenciariam muito as observações com este instrumento (NUNES, 2012, p. 123).

Embora não fosse utilizado durante as navegações, o anel náutico contribuiu para o aperfeiçoamento do astrolábio e das observações astronômicas, como conclui Nunes (2012, p. 127):

Pensamos que se alguma vez o instrumento fora utilizado pelos marinheiros, depressa se aperceberam das suas limitações. No entanto, os seus princípios de construção não caíram no esquecimento, pelo contrário, difundiram-se pelo mundo científico e náutico. Perduraram e serviram de base para as posteriores adaptações ao astrolábio como demonstrado através do exemplo do Atocha V e foram utilizados em observações astronômicas decorridos praticamente dois séculos sobre a apresentação do instrumento por Pedro Nunes.

Esse fato demonstra que a precisão de um instrumento, se inferior a outros, pode fazer com que ele caia em desuso, mas isso não impede que os conceitos utilizados em sua construção sejam aproveitados para melhorar o desempenho dos próximos.

2.2.11 Setor trigonal

Um instrumento de diversas funções, entre elas medir ângulo, esse é o setor trigonal, descrito em 1650 por Jonh Chatfeild no tratado *The Trigonal Sector*. Não existe certeza em relação a sua invenção. Há quem atribua os créditos ao médico Thomas Hood (1557-1598) (TAYLOR¹⁹, 1954 apud DIAS; SAITO, 2014, p. 1230), devido à publicação *The Making and use of the Geometrical Instrument called a sector*, datada de 1598. Outros apontam os italianos como inventores do instrumento (DIAS; SAITO, 2014).

Chatfeild²⁰ (1650 apud DIAS; SAITO, 2014, p. 1234) descreve o setor trigonal:

Ele consiste de uma placa quadrada de metal, ou de madeira, em cujos lados são fixadas lâminas, ou longos filetes, que se projetam um pouco além da placa nas beiradas dos lados. Além disso, contém dois marcadores que são fixados em duas extremidades de um dos lados da placa. Estes marcadores movem-se em torno de seus respectivos centros (ou extremidades) e podem ser aplicados um sobre o outro de modo a cruzarem-se e a formarem um

¹⁹ TAYLOR, E. G. R. **The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England**. Cambridge: Institute of Navigation, Cambridge University Press, 1954.

²⁰ CHATFEILD, J. **The Trigonal Sector**. London: Robert Leybourn, 1650.

ângulo entre si. Este ângulo deverá completar 180gr. juntamente com os outros dois ângulos formados pelos dois marcadores e o Raio, isto é, o lado do quadrado que contém os dois centros em que são fixados os marcadores [...].

Dias e Saito (2014, p. 1235), a partir de uma figura de Chatfeild, nomeiam suas partes:

Figura 24 – Setor Trigonal

As diversas funções do setor trigonal (medir ângulos, representar triângulos, encontrar áreas, encontrar senos, entre outras) fizeram dele um instrumento muito usado até o século XVIII por navegadores, arquitetos e agrimensores. Seu funcionamento é baseado na semelhança de triângulos e contém dois tipos de escalas: linear e angular. Em seu tratado, Chatfeild relaciona os conceitos presentes na utilização do instrumento com as necessidades de calcular distâncias, alturas e profundidades, além de descrever as quatorze instruções de utilização, das quais a primeira se refere a “encontrar qualquer quantidade de ângulo” (CHATFEILD, 1650, p. 6-7 apud DIAS; SAITO, 2014, p. 1236), ou seja, ele descreve o processo de medição de ângulos.

O setor trigonal transcende o fato de ser um exemplo da materialização do conceito de ângulo, pois também o faz com diversas relações que decorrem desse conceito.

2.2.12 Octante e sextante

Precursor do sextante, o octante foi inventado em 1731, por John Hadley, e possui esse nome graças ao seu formato corresponder à oitava parte da circunferência, ou seja, um setor de 45° (SANZ, 2007; JOSÉ; GÓMEZ, 2010). Ele foi desenvolvido com o objetivo de calcular alturas de astros e conseguia mensurá-las até 90° . Seu sistema baseado nos princípios de reflexão trouxe avanços ao processo de mensurar alturas (SANZ, 2007).

Figura 25 – Octante

Inspirado no octante, em 1757, John Campbell aumentou o setor de 45° para 60° com o objetivo de medir maiores ângulos, criando assim o sextante (nome dado por representar a sexta parte da circunferência). Cerca de vinte anos depois, impulsionado pelo desenvolvimento dos vidros, Tomaz Godfrey aperfeiçoou o sextante agregando dois espelhos a ele. O português Gago Coutinho incluiu um horizonte artificial, permitindo a utilização do sextante na prática da navegação aérea, fato que se deu primeiramente na travessia de Lisboa ao Rio de Janeiro, em 1922 (JOSÉ; GÓMEZ, 2010; UFRGS, [2008?]; FERNÁNDEZ, 2007). As partes de um sextante são relatadas por UFRGS ([2008?], p. 39):

O sextante é formado por um suporte metálico, normalmente latão ou outro metal mais leve e rígido, com a forma de um sector. Em torno do centro move-se a alidade cujo extremo se desloca sobre um limbo graduado em graus, com um dispositivo de fixação. Neste extremo da alidade existe outro dispositivo que, pelo princípio de Vernier, permite leituras até de segundo, com grande precisão. Solidário com a alidade move-se o espelho grande. Fixo ao sector encontra-se o espelho pequeno, que de fato é apenas meio-espelho, sendo a outra metade de vidro transparente. No extremo oposto do sector encontra-se a luneta enroscada no colar. Em ambos, os espelhos se encontram justapostos a vidros coloridos que servem de filtros aos raios solares.

Com um nível curvo, esse instrumento foi essencial para a navegação até a criação do Sistema Global de Posicionamento (GPS), e ainda nos dias de hoje é usado, como aponta UFRGS ([2008?], p. 39):

Até o aparecimento do GPS, o sextante era o instrumento primordial da navegação. Na marinha, há quem pense, erradamente, que já não é necessário. Convém, no entanto, não perder o treino no seu uso, já que, apesar de toda a paranóia tecnológica, este método é, por enquanto, o único infalível na obtenção de uma posição. Desde que haja Sol.

Figura 26 – Sextante

Para medir o ângulo entre dois objetos utilizando o sextante, em primeiro lugar, utilizando a luneta, avista-se o horizonte. Logo após, move-se a alidade até que a imagem refletida do objeto (geralmente um astro) coincida com a imagem do horizonte. Assim, no limbo do sextante, a alidade mostrará o ângulo mensurado. Caso o astro seja grande, utiliza-se o limbo (borda) do astro, inferior ou superior, como imagem refletida (UFRGS, [2008?]).

Uma parte importante que compõe o sextante é o tambor micrométrico. Por meio dele, é possível determinar as subdivisões do grau. A escala do tambor faz a leitura dos minutos. Ao lado direito dela está a escala Vernier, graduada em décimos de minuto.

Assim, ao se apropriar dos princípios geométricos de reflexão utilizando os conceitos de ângulo e suas subdivisões, e por ser um instrumento de manuseio fácil devido ao seu tamanho, o sextante tornou-se o instrumento mais preciso e utilizado até a criação do GPS, sendo considerado um “símbolo para a navegação”, como afirma Miguens (1996a, p. 658).

Figura 27 – Sextante

2.2.12 Sistema Global de Posicionamento - GPS

A tarefa de determinar a localização ganhou um grande aliado, em 1957, com o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, o soviético Sputnik (BERNARDI; LANDIM, 2002). Nesse contexto de guerra fria, iniciou-se a disputa entre a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) e os Estados Unidos (EUA) pelo pioneirismo na exploração do espaço e no desenvolvimento tecnológico, denominada corrida espacial. Machado (2008, p. 13) ainda ressalta o interesse militar presente nessa corrida:

A partir daí EUA e União Soviética intensificaram a corrida armamentista espacial desenvolvendo sistemas de localização cada vez mais acurados. A meta, invariavelmente, girava em torno da localização exata de alvos inimigos, para lançamento de mísseis teleguiados e localização de tropas aliadas para protegê-los à distância.

Como “resposta” aos soviéticos, em 1958, foi lançado o satélite Vanguard pelos americanos. Dessa forma, nasceu o projeto Navigation Satellite with Time and Ranging (NAVSTAR).

Dentro desse projeto, iniciou-se em 1973 o desenvolvimento do NAVSTAR-GPS (BERNARDI; LANDIM, 2002), mais conhecido como GPS, que consiste em um sistema de posicionamento global por radionavegação criado pelo Departamento de Defesa (DoD) dos EUA. Ele é resultante da união dos programas da marinha, Timation, e da força aérea, System 621B, ambos financiados pelo governo norte-americano (MONICO, 2000).

Zilkha (2014) descreve que, nos referidos projetos, a marinha preocupou-se com as determinações de latitude e longitude, desenvolvendo um posicionamento em duas dimensões; ao passo que a força aérea agregou a altitude em seus estudos, conseguindo assim um posicionamento em três dimensões.

Monico (2000, p. 23) descreve o posicionamento dos satélites que compõem o sistema GPS:

O segmento espacial consiste de 24 satélites distribuídos em seis planos orbitais igualmente espaçados, com quatro satélites em cada plano, numa altitude aproximada de 20.200 km. Os planos orbitais são inclinados 55° em relação ao Equador e o período orbital é de aproximadamente 12 horas siderais. Dessa forma, a posição dos satélites se repete, a cada dia, 4 minutos antes que a do dia anterior. Essa configuração garante que, no mínimo, quatro satélites GPS sejam visíveis em qualquer local da superfície terrestre, a qualquer hora.

O princípio de funcionamento do GPS é denominado *trilateração espacial* e consiste na determinação do posicionamento a partir de três satélites, como apresenta Raffo (2011, p. 261-262):

Deve-se pensar, então, que três satélites, dos 24 do conjunto, e o receptor do usuário formam uma pirâmide. Esta pirâmide tem sua base no “céu”, a qual está formada pelos três satélites e seu vértice situado no receptor, na Terra. [...] Neste caso, a posição do ponto fica estabelecida cortando três esferas centradas em três satélites. Os raios dessas esferas são as distâncias entre os satélites e o receptor. Neste caso, as distâncias são determinadas por uma técnica denominada “pseudodistância” [...].

Essa técnica é utilizada na determinação da posição, mas ela não fica restrita a três satélites; os canais presentes no receptor informam até quantos sinais de satélite são passíveis de captação. Se um receptor possui dez canais, por exemplo, ele pode captar o sinal de dez satélites simultaneamente e, assim, gerar dez equações com quatro variáveis cada uma. Dentre as quatro variáveis, três correspondem à posição do objeto, sendo que três (x , y , z) expressam as coordenadas do espaço e uma é para a correção da medida de tempo, que não coincide em todos os satélites e no receptor GPS.

[...] o relógio do receptor mede seu próprio tempo, e para poder passar do tempo de receptor ao tempo do sistema GPS, uma correção deverá ser introduzida. Essa correção é uma incógnita a mais, ficando então quatro incógnitas: as três coordenadas do espaço e a correção do tempo (RAFFO, 2011, p. 265).

Há um maior número de equações do que de incógnitas, logo o *software* usa a técnica matemática denominada *ajustamento* para encontrar a solução. Referente às variáveis de posição, elas são dadas em coordenadas cartesianas (x , y , z), em que o centro de massa da

Terra seria a origem dos eixos. Entretanto, por conveniência, são fornecidas ao usuário as coordenadas geográficas.

Figura 28 – Trilateração GPS

O GPS traz uma outra qualidade em relação à determinação da localização, visto que seu funcionamento independe das condições climáticas. Essa determinação é realizada medindo simultaneamente a distância entre o instrumento receptor e, no mínimo, quatro satélites. Dessa forma, são fornecidas duas categorias de serviço: o Standard Positioning Service (SPS) – serviço de posicionamento padrão – e o Precise Positioning Service (PPS) – serviço de posicionamento preciso. Enquanto o SPS é gratuito e destinado ao uso civil, o PPS é mais preciso, em relação ao primeiro, e restringe-se à utilização militar e a usuários civis autorizados (MONICO, 2000).

Para a utilização do serviço de PPS por civis, era necessária a criação de um receptor que pudesse realizar a comunicação com o satélite e, assim, determinar a localização. Em 1982 foi lançado o Macrometer V1000 (MACHADO, 2008), o primeiro de muitos receptores que o sucederiam.

Atualmente chamados de GPS, os aparelhos receptores são instrumentos destinados à localização, à navegação (terrestre ou marítima) e à geodésia, utilizado não só por topógrafos, militares ou navegadores, mas por qualquer pessoa que possua um receptor ou um celular do tipo *smartphone* – visto que este possui aplicativos que desempenham a função do instrumento. Dessa maneira, o GPS configura-se como algo comum nas regiões metropolitanas mundiais, utilizado principalmente por motoristas dos grandes centros urbanos.

O conceito de ângulo se faz imprescindível para o desenvolvimento do conhecimento tecnológico, exemplo disso é sua aplicação desde o lançamento do satélite até a geometria e a trigonometria empregadas na determinação da posição tridimensional do objeto realizada pelo GPS.

Figura 29 – GPS geodésico

Figura 30 – GPS automotivo

2.2.13 O desenvolvimento do conceito de ângulo a partir das mudanças dos instrumentos

Conforme tratado anteriormente, os babilônios tinham a necessidade de localizar os corpos celestes na elíptica terrestre e, devido ao movimento aparente do Sol, elaboraram o conceito de ângulo ao dividir a circunferência em 360 partes. Esse conceito seria utilizado mais tarde para a construção das pirâmides. Posteriormente, os gregos subdividiram o grau em minutos e segundos, o que possibilitou uma maior precisão. No século XIX, surgiu uma nova unidade para o ângulo: o radiano, que possibilitou aos números reais expressar arcos de circunferência.

Esse processo de desenvolvimento do conceito de ângulo se materializou nos instrumentos que o utilizaram, de diferentes maneiras, ao longo da história. A groma egípcia tornou-se um marco entre os instrumentos de medir ângulos pelo fato de ser considerada o primeiro a ter tal função, porém seu formato e a ausência de escala angular possibilitava apenas a medida de ângulos retos, tornando-a limitada. A dioptra trouxe elementos importantes em sua configuração: circunferência (em que o conceito de ângulo se manifesta), escala angular e orifícios destinados à observação. A bússola, apesar de atualmente ser conhecida como instrumento de localização (inclusive existem aplicativos de celular que a

simulam), em seu início, indicava direções de maneira arcaica, utilizando um peixe de ferro suspenso na água; posteriormente, ela incorporou os conceitos de ângulo e da rosa dos ventos.

O torquetum utilizava a medição de ângulos para determinar coordenadas eclípticas dos corpos celestes, entretanto ele continha a circunferência inteira e, para o seu funcionamento, era preciso conhecer a latitude do local para o qual o instrumento tinha sido construído.

O kamal e a balestilha possuíam funcionamentos similares. Apesar de medirem ângulos, não possuíam a circunferência ou partes dela em suas construções. Ambos possuíam graduação na parte horizontal (o primeiro no cordão, a segunda em seu virote) e baseavam-se no ângulo de visão do observador, em que os extremos eram o horizonte e o astro de interesse.

O astrolábio náutico possuía formato circular, em que se manifestava as medições dos ângulos que, aliados às suas propriedades geométricas, representou uma maior precisão na determinação de alturas de corpos celestes. Uma alternativa ao astrolábio, o anel náutico tentou substituí-lo, mas, devido à falta de precisão, tal fato não ocorreu. Mesmo assim, os princípios geométricos que nortearam sua construção contribuíram tanto para a melhora de precisão do astrolábio quanto da astronomia.

De formato inicial semelhante ao astrolábio náutico, o teodolito foi um dos instrumentos que mais apresentaram mudanças ao longo do tempo, seja em seu formato, função ou acurácia. Ele se tornou eletrônico e passou a medir com o auxílio de feixes de luz. Além disso, o teodolito deu origem à estação total, que, atualmente, determina distâncias e ângulos, estes com precisão superior a 1".

De formato quadrangular e com a presença de um quadrante de circunferência, o setor trigonal foi um instrumento multifuncional. Uma de suas atribuições era medir ângulos. Em decorrência de suas propriedades, foi um instrumento bastante utilizado por agrimensores, arquitetos e navegadores.

Outro instrumento que media a altura dos astros era o quadrante náutico. Por ser um quadrante de circunferência, era de fácil manipulação e utilização: bastava direcionar o olhar que o fio de prumo indicava a angulação. Outras partes da circunferência também foram utilizadas, como o octante e o sextante, respectivamente, oitava e sexta parte da circunferência. Os princípios geométricos de reflexão utilizados na construção do octante representaram um avanço e foram incorporados por seu sucessor, o sextante. Este teve espelhos adicionados em sua construção, situação influenciada pelo desenvolvimento dos vidros na época. O sextante foi fundamental à navegação, até ser substituído pelo GPS.

Ao falarmos do GPS, chegamos ao que temos de mais evoluído na determinação da localização. Ele utiliza de modo abundante o conceito de ângulo em seu processo de trilateração espacial.

Dessa forma, o movimento lógico-histórico evidencia o processo de apropriação, por parte dos instrumentos, do conceito de ângulo e suas relações. Esse desenvolvimento não ocorreu de maneira linear, já que um instrumento criado nem sempre é melhor que seu antecessor, como é o caso do anel náutico, apresentado anteriormente. Ainda assim, mesmo não sendo mais preciso que o astrolábio, o anel náutico apresentava conceitos que foram utilizados no aperfeiçoamento de outros instrumentos.

Assim, podemos concluir que o lógico é a síntese de um processo histórico que é a atividade humana. Como implicações educacionais, se o professor organizar a sua atividade de ensinar baseando-se somente no aspecto lógico, em forma de definições e sínteses, perderá todo um rico processo histórico de construção do conceito. Da mesma maneira, se o professor basear sua atividade somente nos aspectos históricos, perderá o aspecto lógico de mudanças do conceito, podendo caracterizar o aspecto histórico como curiosidade (como ocorre em diversos livros didáticos).

Considerar o movimento lógico-histórico como um dos elementos para organização do ensino requer ação intencional, a fim de que as situações propostas orientem os estudantes a estar em atividade – corroborando os princípios da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010) – para que, dessa forma, eles se apropriem dos conceitos, como afirma Leontiev (1978, p. 268):

Para se apropriar dos objetos ou dos fenômenos que são produto do desenvolvimento histórico, é necessário desenvolver em relação a eles uma atividade que reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade encarnada, acumulada no objeto.

No caso do ângulo, a localização encontra-se em sua gênese da mesma maneira que o movimento, exemplo disso são as mudanças das técnicas de localização e instrumentos apresentados. O ângulo surge da localização e contribui para o seu aprimoramento. As primeiras medições dos ângulos entre corpos celestes e o horizonte ou o zênite trouxeram a emancipação da necessidade de pontos de referência próximos, o que permitiu a localização em alto-mar, por exemplo. Mais tarde, ao se aliar ao conceito de tempo, o ângulo deu origem aos conceitos de latitude e longitude, expressos em graus, que possibilitam a determinação da posição em qualquer lugar da superfície terrestre. Dessa forma, consideramos o movimento e

a localização como essenciais na organização do ensino do conceito de ângulo e em seu processo de apropriação.

3 A ORGANIZAÇÃO DO CONCEITO DE ÂNGULO E DO ENSINO DE LOCALIZAÇÃO NOS ANOS INICIAIS DA ESCOLA BÁSICA

O processo humano de domínio do espaço foi essencial para a sobrevivência no local que se ocupava. Entretanto, com o passar dos séculos, surgiram novas necessidades (de deslocamento, comerciais, científicas, entre outras) que acarretaram o desenvolvimento de técnicas e instrumentos de localização cada vez mais eficientes e precisos. Nesse processo histórico, surgiu o conceito de ângulo, que transcendeu sua aplicação na localização ao se tornar fundamental em diversas áreas do conhecimento humano. Dada tal relevância dentro da história humana, e por entender que os conceitos de localização e de ângulos são essenciais à socialização e ao desenvolvimento cognitivo do sujeito, esses se configuraram como componentes curriculares da escola básica (BRASIL, 1997).

Com o objetivo de identificar como se organiza o ensino de localização e de ângulo na educação básica, investigamos as definições sugeridas ao conceito de ângulo e como o assunto é tratado por documentos e materiais didáticos oficiais.

O movimento lógico-histórico do conceito e as mudanças dos instrumentos, apresentados no capítulo anterior, contribuem na identificação dos nexos conceituais presentes. Nesse sentido, o estudo de Gadotti (2008) traz subsídios para uma discussão sobre as definições atribuídas ao conceito de ângulo. Já os documentos curriculares oficiais indicam quais são as orientações para o ensino de ângulo e localização, os materiais didáticos oficiais materializam essas concepções e os descritores das avaliações de larga escala revelam a verificação da apropriação desses conhecimentos. A seguir, apresentamos os documentos oficiais consultados.

Documentos curriculares:

- ✓ Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o ensino fundamental I (BRASIL, 1997);
- ✓ Orientações Curriculares do município de São Paulo – ensino fundamental I (SÃO PAULO, 2007);
- ✓ Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem – Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (Pnaic) (BRASIL, 2012).

Materiais didáticos oficiais:

- ✓ Cadernos de Apoio e Aprendizagem da Prefeitura de São Paulo (Matemática) (SÃO PAULO, 2010a, 2010b, 2010c, 2010d, 2010e).

Descritores das avaliações de larga escala oficiais:

- ✓ Matrizes de Referência de Matemática da Prova Brasil (4ª série/5º ano) (INEP, 2011);
- ✓ Matrizes de Referência de Matemática da Prova São Paulo (4ª série/5º ano) (SÃO PAULO, 2011).

3.1 Ângulo: entre definições e nexos conceituais

Como abordado anteriormente, o desenvolvimento do conceito de ângulo contribuiu diretamente para o aprimoramento de diversas atividades humanas, em especial a localização. Contudo, a definição desse conceito ainda gera discussão entre matemáticos, o que se reflete nos livros didáticos.

Gadotti (2008), ao analisar livros didáticos, agrupa-os em três faixas – antes de 1961, entre 1961 e 1976 e após 1976 –, que correspondem a antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna, respectivamente. A autora discute a existência de três categorias de definições (ângulo como região no espaço, como par de linhas e como giro) e apresenta um quadro (Quadro 1) que resume sua análise.

Categorias	Após	Durante	Antes	Total
<i>Par de linhas</i>	17	4	2	23
<i>Região no espaço</i>	16	6	1	23
<i>Giro</i>	4	-	-	4
<i>Não define / Outros</i>	3	1	-	4
Total geral	40	11	2	54

Quadro 1 – Resumo das definições de ângulo por período (referente à Matemática Moderna) no Brasil

Pelos dados apresentados por Gadotti (2008, p. 85), percebe-se que há uma concentração das definições de ângulo como um par de linhas e como região no espaço. Essa quantificação apresenta um panorama das concepções dos autores. Porém, para definir o conceito de ângulo, inicialmente, é necessário se apropriar do seu processo de formação a partir de seu movimento lógico-histórico.

O ângulo é uma qualidade de um objeto que, na história humana, necessitou de quantificação. Portanto, baseando-nos no significado proposto por Caraça (1951), classificamos o ângulo como uma grandeza. Assim, chegamos a um entrave: se o ângulo é uma grandeza, pode ser quantificado, logo, o que sua quantificação representa?

Durante seu processo de formação, anteriormente discutido, a necessidade de quantificação do ângulo manifestou-se na identificação da posição do sol em seu movimento aparente na eclíptica terrestre. Dessa forma, pode-se pensar que a definição mais apropriada seria a de ângulo como um giro ou uma rotação. Contudo, na construção das pirâmides egípcias, o ângulo esteve presente de maneira estática tanto na inclinação de suas paredes em relação ao solo quanto no formato triangular de suas faces. Seria, então, a definição de ângulo como região a melhor alternativa?

Nos exemplos – tanto na rotação aparente do sol quanto na inclinação entre as paredes da pirâmide e o solo ou entre os lados da face da pirâmide –, o que é quantificado não se refere à região delimitada pelos lados do ângulo em questão, já que esta seria uma medida de área.

A partir da elaboração do processo lógico-histórico do conceito de ângulo, apresentado no capítulo 2, e das diferentes definições propostas por diversos autores, propomos uma definição que se fundamenta nesse rico e longo processo de formação: *ângulo é a quantidade de inclinação, manifestada de maneira estática (inclinação) ou dinâmica (rotação), e sua representação é dada por um par de semirretas com mesma origem.*

Admitiremos que a grandeza ângulo é composta por duas ações mentais: a inclinação e a rotação. A inclinação corresponde ao estático e faz-se presente em figuras geométricas, em rampas, na construção de estradas e em diversas áreas do conhecimento humano. A rotação manifesta-se no dinâmico, ao alterar a direção de um barco, no movimento dos planetas no sistema solar ou em programações de robótica, ou seja, é o conceito em movimento (CARAÇA, 1951).

Ao adotar essa posição, consideramos a rotação como a quantidade de inclinação entre a direção inicial e a direção final (direções formadas pelo centro de rotação – vértice – e as posições, inicial e final, de um ponto do objeto rotacionado), como na figura 31.

Figura 31 – Rotação como inclinação

Na figura 31, a direção inicial e final são representadas, respectivamente, por OP_i e OP_f , logo, o ângulo α corresponde a $P_i\hat{O}P_f$. Dessa maneira, entendemos a rotação não como uma definição, mas como uma ação mental do conceito de ângulo em que a inclinação é manifesta de maneira dinâmica, pelo movimento.

Casas e Luengo (2005) apontam que não é possível definir ângulo côncavo e convexo a partir da concepção do ângulo como um par de linhas. Todavia, as definições do ângulo como região no espaço consideram-no como regiões côncavas e convexas do plano (ARCONCHER, 1998), o que impossibilita a definição a partir da concepção aqui considerada. Portanto, ângulos côncavos e convexos corresponderiam, respectivamente, a ângulos obtusos e agudos, se considerada a proposta de Barbosa (1995).

São apontados outros problemas ao definir ângulo como um par de retas: diferenciar os dois ângulos formados, definir ângulos negativos (CASAS; LUENGO, 2005) e definir ângulos superiores a 360° .

Para diferenciar os dois ângulos formados pelo par de retas e vértice, podemos adotar o sentido horário (assim $A\hat{O}B$ é diferente de $B\hat{O}A$) ou classificá-lo (ângulo obtuso $A\hat{O}B$ ou ângulo agudo $A\hat{O}B$).

A definição de ângulo negativo ocorre devido à determinação de um sentido como positivo (geralmente horário), e, assim como em outras grandezas (por exemplo, temperatura e comprimento), tais valores só se estabelecem devido a essa referência. Por exemplo, se tomarmos a escala Celsius de temperatura, teremos valores negativos para temperaturas abaixo do ponto de solidificação da água (nas CNTP), ao passo que na escala Kelvin não existe valor negativo. Ao falarmos de altitude, os valores abaixo do nível do mar são negativos, mas isso não quer dizer que a distância entre o submarino submerso e o nível do mar é negativa. Logo, não consideramos o ângulo negativo como um problema de nossa

definição, visto que ele ocorre ao se estabelecer um sentido e um ponto de origem, como fez a trigonometria.

A trigonometria, em sua organização do ensino, explicita a correspondência entre ângulos acima de 360° e os que pertencem ao intervalo entre 0° e 360° . Dessa maneira, o ângulo 400° corresponde a 40° , tendo os mesmos valores de seno, cosseno, tangente e demais relações, exceto no comprimento da circunferência que representam. O significado para ângulos maiores que 360° está associado ao movimento de rotação, se não o fosse, a trigonometria não poderia representar qualquer número real na circunferência trigonométrica. Essa associação não se contrapõe à definição proposta, visto que 40° e 400° representam o mesmo ponto na circunferência. O que os difere é a indicação, por parte do autor do material, de que ali houve um movimento de rotação. Analogamente, podemos pensar em um carro de corrida ao cruzar a posição em que largou no *grid*, ao completar a primeira volta: a distância percorrida por ele não é zero (apesar de o ponto de partida ser o mesmo que o de chegada), pois o que determina a distância, nesse caso, é o comprimento da pista. Isso não contradiz o conceito de distância, mas lhe dá outra qualidade quando associado ao movimento e ao formato da pista.

As outras concepções de ângulo possuem também dificuldades. Casas e Luengo (2005, p. 202, tradução nossa) discutem a definição de ângulo como uma região no espaço:

Esta definição, embora pareça tão fácil, tem algumas dificuldades. Em primeiro lugar, por si só não define um único objeto, senão ao menos quatro objetos diferentes, quatro ângulos, em que a única forma de saber a que conjunto de pontos nos referimos é indicando-o de modo especial no desenho, pois a definição, por si só, não é clara. Outra dificuldade é que esta definição não serve para os ângulos de 0° , 180° e 360° ou maiores. Tampouco serve para os ângulos negativos.

Dentre as críticas dos autores, a que mais nos interessa é a de ângulo negativo. Ao considerar o ângulo como uma região no espaço, ele é atrelado ao conceito de área. Contudo, esta não admite valores negativos, independente de referência ou convenção.

Relativo ao ângulo como giro ou rotação, não é possível adotá-lo em uma rampa ou em uma figura geométrica em que, por exemplo, o ângulo se manifesta de maneira estática. Logo, como discutido anteriormente, consideramos a rotação como uma ação mental.

Após apresentarmos diversas concepções relativas à definição de ângulo e nos posicionarmos em relação a elas, destacaremos “os nexos que possibilitem a revelação do caráter geral de uma relação e por consequência o seu aspecto de generalidade” (DAVÍDOV, 1982, p. 353, tradução nossa), ou seja, os nexos conceituais internos e externos que

contribuíram para a elaboração do conceito ao gerar sua necessidade ou que se desenvolveram a partir dele.

Alicerçado no processo lógico-histórico do conceito de ângulo, identificamos como nexos conceituais internos:

- ✓ Ângulo como grandeza: quantificação da qualidade inclinação; trilhando as três fases propostas por Caraça (1951): escolha da unidade, comparação a partir desta e geração da expressão numérica desse processo;
- ✓ Ângulo em sua ação mental dinâmica: rotação, que admite sentidos (horário e anti-horário);
- ✓ Ângulo em sua ação mental estática: inclinação;
- ✓ Unidades de medida existentes, entre as mais usadas, ângulo e radianos.

O movimento lógico-histórico do conceito evidencia os nexos conceituais externos que se relacionam ao conceito de ângulo, eles podem auxiliar no desenvolvimento de situações desencadeadoras e na organização do ensino. Destacaremos alguns deles: tempo, localização, direção, astronomia, latitude e longitude, pontos cardeais e colaterais, base 60, fração, gráfico de setores, porcentagem, números reais, conceitos geométricos (triângulos, semelhança de triângulos, polígonos, relações trigonométricas, entre outros).

3.2 Os conceitos de localização e ângulo nas orientações curriculares

A fim de identificar quais são as orientações que norteiam o ensino de localização e de ângulo, analisamos três documentos: os PCN de Matemática do ensino fundamental I, as Orientações Curriculares do município de São Paulo e os Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (documento que orienta as ações do Pnaic). A escolha de tais documentos foi baseada nos seguintes fatores: o primeiro é o principal documento de orientações curriculares brasileiras; o segundo está adequado ao ensino fundamental com nove anos e atinge um grande número de estudantes; o terceiro é a ação mais recente, em âmbito federal, que prioriza os anos iniciais do ensino fundamental, objetivando a alfabetização matemática até o 3º ano deste. Dessa maneira, os três documentos possuem grande relevância na organização do ensino brasileiro, influenciando propostas

curriculares (estaduais e municipais), materiais didáticos (como livros, jogos, *software* de ensino etc.) e avaliações de larga escala (como a Prova Brasil e a Prova São Paulo).

A partir dos PCN, verificou-se que o desenvolvimento das noções de localização é considerado como imprescindível à formação do estudante (BRASIL, 1997, p. 82): “A localização é apontada como um fator fundamental de apreensão do espaço e está ligada inicialmente à necessidade de levar em conta a orientação”. Assim, aborda-se a localização como um dos conceitos necessários para o desenvolvimento do pensamento espacial, o qual se pretende que o estudante tenha desenvolvido ao final do ensino fundamental I, ou seja, que apresente condições cognitivas de compreender, descrever e representar o espaço em que habita:

Para compreender, descrever e representar o mundo em que se vive, o aluno precisa, por exemplo, saber localizar-se no espaço, movimentar-se nele, dimensionar sua ocupação, perceber a forma e o tamanho de objetos e a relação com seu uso (BRASIL, 1997, p. 49).

O documento propõe maneiras para que os estudantes desenvolvam os conceitos de localização a partir de trabalhos em que identifiquem e utilizem pontos de referência, desenvolvam as noções de direção (esquerda, direita, em frente, atrás, rotações) e de distância, representem e interpretem itinerários, deslocamentos, posições e movimentações de pessoas ou objetos com o auxílio de pontos de referências. Sugere-se que instrumentos como malhas quadriculadas, maquetes e mapas sejam utilizados para auxiliar no processo de aprendizagem.

Em relação ao conceito de ângulo, observa-se sua explicitação no fragmento destinado aos conteúdos conceituais e procedimentais, que o coloca como um dos critérios na identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos. Anteriormente, esse conceito se apresenta de maneira implícita, na orientação para representar figuras geométricas ou para explorar o paralelismo e o perpendicularismo de lados.

Embora o conceito de ângulo não seja enfatizado ou tratado de maneira mais explícita, as orientações didáticas propõem que a noção de ângulo pode se originar no processo de desenvolvimento de localização. Tal concepção vai ao encontro do que pretende esta pesquisa: organizar o ensino do conceito de ângulo a partir da necessidade de localizar-se.

Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico (BRASIL, 1997, p. 81).

Assim como os PCN, as Orientações Curriculares de São Paulo para o ensino fundamental I constituem um documento curricular norteador. De 2007, portanto mais recentes que os PCN, propõem uma estrutura curricular adequada ao ensino fundamental de nove anos (em que o ensino fundamental I, que anteriormente possuía quatro anos, passou a ter cinco anos). Segundo o documento, um de seus objetivos é fomentar a reflexão, discussão, seleção e organização dos conteúdos. Todavia, caracteriza-se de maneira mais diretiva, em relação aos PCN, ao apresentar as chamadas *expectativas de aprendizagens*, distribuídas ao longo dos anos escolares.

As *expectativas de aprendizagem*, como o próprio nome sugere, são capacidades a serem desenvolvidas pelos estudantes durante cada ano. No caso de Matemática, elas são agrupadas em cinco blocos (Números, Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação) e codificadas com a letra “M” seguida por dois algarismos, por exemplo, no 4º ano: M17 - Identificar a posição de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada.

A definição das *expectativas de aprendizagem* ocorre levando em consideração os seguintes aspectos: relevância social, cultural e formação do intelectual do aluno; potencialidade para a construção de habilidades comuns e para conexões interdisciplinares e contextualizações; acessibilidade e adequação a cada faixa etária.

Há uma introdução sobre os blocos que compõem os conhecimentos matemáticos. Porém, devido a essa introdução não abordar os conteúdos trabalhados em cada um deles, concentramo-nos nas *expectativas de aprendizagem*, que tratam os conteúdos mais diretamente. A seguir, apresenta-se um quadro, resultado da seleção feita a partir da identificação das *expectativas de aprendizagem* que abordam direta ou indiretamente localização e ângulo.

	Código	Descrição
1º ano	M16	Identificar pontos de referência para indicar sua localização na sala de aula.
	M17	Indicar oralmente a posição onde se encontra no espaço escolar e representá-la por meio de desenhos.
	M18	Indicar oralmente o caminho para se movimentar no espaço escolar e chegar a um determinado local da escola e representar a trajetória, por meio de desenhos.
	M19	Fazer a leitura de croquis simples que indiquem a posição de um objeto ou pessoa.
	M20	Fazer a leitura de croquis simples que indiquem a movimentação de um objeto ou pessoa.

2º ano	M18	Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
	M19	Identificar a movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
	M22	Identificar semelhanças e diferenças entre figuras geométricas bidimensionais e reconhecer algumas de suas características.
3º ano	M21	Interpretar a localização de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis.
	M22	Interpretar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis.
	M24	Perceber semelhanças e diferenças entre figuras tridimensionais e bidimensionais, comparando cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos.
	M25	Perceber semelhanças e diferenças entre figuras tridimensionais e bidimensionais, comparando pirâmides e triângulos, esferas e círculos.
4º ano	M17	Identificar a posição de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada.
	M18	Identificar a movimentação de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada.
5º ano	M17	Descrever, interpretar e representar por meio de desenhos, a localização ou a movimentação de uma pessoa ou um objeto.
	M21	Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, considerando seu número de lados e de ângulos.
	M35	Ler informações apresentadas de maneira organizada por meio de gráficos de setor.

Quadro 2.1 – Expectativas de aprendizagem que abordam conceitos de localização e de ângulo

Além dos PCN e das Orientações Curriculares de São Paulo, considerou-se um terceiro documento curricular, chamado de Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem, datado de 2012. Ele norteia o desenvolvimento do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC, que, através de suas especificações curriculares, busca orientar as ações de ensino, a fim de propiciar a alfabetização (em diversas áreas do conhecimento: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Humanas, Ciências Naturais, Artes e Educação Física) aos estudantes até o 3º ano do ensino fundamental.

O referido documento entende da seguinte maneira a alfabetização matemática:

A alfabetização matemática é o processo de organização dos saberes que a criança traz de suas vivências anteriores ao ingresso no Ciclo de Alfabetização, de forma a levá-la a construir um corpo de conhecimentos matemáticos articulados, que potencializem sua atuação na vida cidadã. Esse é um longo processo que deverá, posteriormente, permitir ao sujeito utilizar as ideias matemáticas para compreender o mundo no qual vive e instrumentalizá-lo para resolver as situações desafiadoras que encontrará em sua vida na sociedade (BRASIL, 2012, p. 60).

Observa-se um esforço em “atualizar” as orientações curriculares em âmbito nacional, para as séries iniciais do ensino fundamental, devido às diversas mudanças ocorridas nos últimos anos, por exemplo, o processo de elaboração e implementação do Plano Nacional de Educação (PNE).

Partindo-se do pressuposto de que currículo é movimento e uma construção sócio-histórica, entende-se que hoje, decorrida mais de uma década de sua implementação, faz-se necessário elaborar novas e mais precisas orientações curriculares nacionais para o ensino fundamental [...] (BRASIL, 2012, p. 11).

O documento propõe os *direitos de aprendizagem*, que em muito recordam as *expectativas de aprendizagem* utilizadas nas Orientações Curriculares da prefeitura de São Paulo. Em relação à Matemática, os *direitos de aprendizagem* são divididos em cinco eixos estruturantes: Números e Operações, Pensamento Algébrico, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação.

Semelhante ao realizado anteriormente, buscou-se identificar os *direitos de aprendizagem* que exploram localização e ângulo, direta ou indiretamente. Para o desenvolvimento dos direitos em cada ano são atribuídas as letras I, A ou C, que significam introduzir, ampliar e consolidar, respectivamente. A seguir, encontram-se a legenda e a seleção baseadas nos critérios mencionados, ambas no formato de quadro (BRASIL, 2012).

Sigla	Significado	Descrição
I	Introduzir	Mobilizar as crianças para que iniciem, formalmente, a relação com os conhecimentos referentes aos objetivos a ele associados.
A	Ampliar	Mobilizar as crianças para expandir esta relação.
C	Consolidar	Mobilizar as crianças para sistematizar conhecimentos no processo da aprendizagem.

Quadro 2.2 – Descrição das ações atribuídas aos direitos de aprendizagem

EIXO ESTRUTURANTE ESPAÇO E FORMA / GEOMETRIA		1º ano	2º ano	3º ano
	Explicitar e/ou representar informalmente a posição de pessoas e objetos e dimensionar espaços, utilizando vocabulário pertinente nos jogos, nas brincadeiras e nas diversas situações nas quais as crianças considerarem necessária essa ação, por meio de desenhos, croquis, plantas baixas, mapas e maquetes, desenvolvendo noções de tamanho, de lateralidade, de localização, de direcionamento, de sentido e de vistas.	I	A	C

Construir noções de localização e movimentação no espaço físico para a orientação espacial em diferentes situações do cotidiano	Reconhecer seu próprio corpo como referencial de localização no espaço (em cima e embaixo, acima e abaixo, frente e atrás, direita e esquerda).	I/A	A/C	C
	Identificar diferentes pontos de referências para a localização de pessoas e objetos no espaço, estabelecendo relações entre eles e expressando-as através de diferentes linguagens: oralidade, gestos, desenho, maquete, mapa, croqui, escrita.	I/A	A/C	C
	Observar, experimentar e representar posições de objetos em diferentes perspectivas, considerando diferentes pontos de vista e por meio de diferentes linguagens.	I	A	C
	Reconhecer seu próprio corpo como referencial de deslocamento no espaço (para cima e para baixo, para frente e para atrás, para dentro e para fora, para direita e para esquerda).	I	A	C
	Identificar e descrever a movimentação de objetos no espaço a partir de um referente, identificando mudanças de direção e de sentido.	I	A	C
Reconhecer formas geométricas tridimensionais e bidimensionais presentes no ambiente	Construir e representar formas geométricas planas, reconhecendo e descrevendo informalmente características como número de lados e de vértices.		I	A
	Conhecer as transformações básicas em situações vivenciadas: rotação, reflexão e translação para criar composições (por exemplo: faixas decorativas, logomarcas, animações virtuais).	I	A	C
	Desenhar objetos, figuras, cenas, seres mobilizando conceitos e representações geométricas tais como: pontos, curvas, figuras geométricas, proporções, perspectiva, ampliação e redução.	I	I/A	A/C
	Utilizar a régua para traçar e representar figuras geométricas e desenhos.	I	I/A	A/C

Quadro 2.3 – Direitos de aprendizagem que abordam localização e ângulo

De uma maneira geral, em todos os documentos percebe-se a preocupação com o ensino de localização, devido à grande abordagem dada ao tema desde o 1º ano do ensino fundamental.

No que se refere ao conceito de ângulo, não há um direito de aprendizagem que o aborde diretamente. Ele aparece atrelado ou implícito a outros conceitos, de maneira secundária, o que resulta na sua descaracterização como grandeza. Essa ausência talvez se justifique pela faixa escolar que se deseja atingir: 1º ao 3º ano do ensino fundamental. Entretanto, o movimento de rotação é listado como uma vivência indicada às crianças e pode tornar-se um momento de desenvolvimento do conceito a partir de uma atividade de ensino.

3.3 Ângulo e localização nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem da prefeitura de São Paulo

A fim de compreendermos como se materializam as orientações contidas nos documentos curriculares oficiais, identificamos as tarefas que abordam os conceitos de localização e de ângulo nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem. Esse material didático é fornecido pela prefeitura de São Paulo e busca auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem. A escolha desse material ocorreu pelo fato de ser baseado nas Orientações Curriculares da prefeitura de São Paulo, logo, ele contém os conceitos que o sistema público municipal considera relevantes aos estudantes e propõe uma maneira de desenvolvê-los.

Os Cadernos de Apoio e Aprendizagem direcionados ao professor (no caso de Matemática) indicam quais *expectativas de aprendizagem* serão abordadas em cada unidade e as relaciona com tarefas específicas.

A seguir, encontra-se um quadro que relaciona as tarefas presentes nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem e suas respectivas *expectativas de aprendizagem* com seus nexos conceituais, por nós categorizados.

ANO	UNIDADE	TAREFA	EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM	NEXOS CONCEITUAIS
1º	2	A caça ao tesouro na sala de aula	M16 - Identificar pontos de referência para indicar sua localização na sala de aula.	Localização (em frente, atrás, pontos de referência)
		Agora é com vocês (itens 4 e 5)		
	3	A sala de aula	M17 - Indicar oralmente a posição onde se encontra no espaço escolar e representá-la por meio de desenhos.	Localização (em frente, atrás)
		Colegas que sentam à direita e à esquerda		Localização (lateralidade)
	4	Ponto de encontro		Localização (em frente, atrás, pontos de referência, lateralidade)
	5	Hora de ir embora!	M18 - Indicar oralmente o caminho para se movimentar no espaço escolar e chegar a um determinado local da escola e representar a trajetória, por meio de desenhos.	Localização (em frente, atrás, pontos de referência, lateralidade, trajetos)
	7	Localização no Jardim	M19 - Fazer a leitura de croquis simples que indiquem a posição de um objeto ou pessoa.	Localização (em frente, atrás, pontos de referência, lateralidade)

	8	Trajeto no parque	M20 - Fazer a leitura de croquis simples que indiquem a movimentação de um objeto ou pessoa.	Localização (em frente, atrás, pontos de referência, lateralidade, trajeto, malha quadriculada)
2º	2	O metrô de São Paulo	M18 - Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.	Localização (em croquis, trajeto, pontos de referência, mapas)
	3	Um passeio de bicicleta	M19 - Identificar a movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.	Localização (mapas, trajeto, pontos de referência)
	7	Conheça um pouco do jardim botânico	M18 e M19	
3º	1	A reunião de pais	M21 - Interpretar a localização de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis.	Localização (em croquis, trajeto, pontos de referência)
		A escola de Fernando		Localização (em croquis, pontos de referência)
		Agora é com você (item 7)		Localização (em croquis, pontos de referência, em frente, atrás)
	2	A escola de Paulo e a sua escola	M22 - Interpretar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis.	Localização (em croquis, percurso)
		O viveiro de pássaros		Localização (em croquis, percurso, lateralidade)
		Agora é com você (item 9)		
4º	1	Um mapa do zoológico	M17 - Identificar a posição de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada.	Localização (mapa, malha quadriculada)
		Agora, é com você (itens 4 e 5)		Localização (malha quadriculada)
	2	Caminho das compras na feira	M18 - Identificar a movimentação de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada.	Localização (malha quadriculada, trajeto, lateralidade, pontos de referência)
		Movimentação e percursos		Localização (malha quadriculada, trajeto, lateralidade)
		Agora, você faz o caminho		
		Agora, é com você (item 6)		
	5	Viagem divertida	M17	Localização (malha quadriculada)
	7	Para localizar o parque	M17 e M18	Localização (em croquis, malha quadriculada, trajeto, lateralidade, pontos de referência)
		Agora, é com você (item 1)	M17	Localização (em croquis, malha quadriculada)

5º	1	Conhecendo alguns subdistritos de São Paulo	M17 - Descrever, interpretar e representar por meio de desenhos, a localização ou a movimentação de uma pessoa ou um objeto.	Localização (mapa)
	6	Os polígonos (item 2)	M21 - Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, considerando seu número de lados e de ângulos.	Ângulo (inclinação entre lados de polígonos)
		Desenhos de polígonos		
		Agora, é com você (item 4)		
	7	Áreas urbanas e rurais na cidade de São Paulo (itens 5 e 8)	M35 - Ler informações apresentadas de maneira organizada por meio de gráficos de setor.	Ângulo (inclinação entre raios de uma circunferência)
		Frações, porcentagens e gráficos		
		Agora, é com você (item 7)		

Quadro 3 – Tarefas e expectativas de aprendizagem trabalhadas

A partir das tarefas propostas nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem, e considerando apenas a questão da localização, verifica-se que as *expectativas de aprendizagem* se concentram em dois grandes grupos. Ao trabalhar com posição/ localização/ trajetos de objetos/ pessoas/ pontos de referência, um grupo busca a internalização dos conceitos ao propor ações de identificação/ localização/ interpretação/ leitura, enquanto outro grupo busca a comunicação por meio das ações de representação/ descrição/ indicação.

Buscamos identificar a função dos Cadernos de Apoio e Aprendizagem do professor na organização do ensino (SÃO PAULO, 2010a, 2010b, 2010c, 2010d, 2010e). Com a análise, concluímos que o papel dos cadernos é orientar o ensino a partir das *expectativas de aprendizagem*, que constituem o eixo estruturante de todo o processo de ensino e de aprendizagem proposto (SÃO PAULO, 2007, p. 12): “A aprendizagem dos estudantes precisa ser acompanhada continuamente, sendo sempre orientada pelas expectativas de aprendizagem que se deseja construir”.

As orientações metodológicas dos cadernos sugerem que eles não sejam o único material a ser utilizado, mas que sejam usadas outras ferramentas: “Destaca-se a importância do uso de outros recursos disponíveis – livros didáticos, paradidáticos, vídeos, *softwares*, jogos – que o professor julgue interessantes para ampliar a aprendizagem de seus alunos” (SÃO PAULO, 2007, p. 9).

Apesar das orientações quanto à complementação do material com outros recursos, pode-se apontar uma abordagem ínfima do conceito de ângulo. Dentre as 33 tarefas identificadas, ao longo dos cinco cadernos, 27 referem-se ao ensino de localização (82%), 3 tratam sobre a leitura e interpretação em gráficos de setores (9%) e as 3 restantes abordam o ensino de ângulo (9%). Essa configuração indica a ênfase na localização em relação ao ângulo. Contudo, é preciso ir além dos dados quantitativos e observar as tarefas em seu caráter qualitativo. As três tarefas abordam o conceito de ângulo de maneira implícita, visto que seus núcleos são os polígonos apresentados; assim o ângulo reduz-se a uma qualidade destes: a inclinação entre os lados. No que se refere aos gráficos de setores, identificamos a presença do conceito de ângulo (apesar de não ser citado durante a tarefa), pois ele é essencial para a elaboração desse tipo de representação gráfica.

A questão que surge, a partir do levantamento das tarefas ao longo dos cadernos, refere-se à apropriação do conceito de ângulo pelos estudantes: é possível a formação do pensamento teórico de localização e ângulo com tais tarefas?

3.4 Ângulo e localização nos descritores das avaliações de larga escala

A partir dos documentos curriculares consultados, verifica-se que o ensino da localização é considerado relevante para o desenvolvimento do sujeito. Porém, o que se avalia sobre o conceito de localização? Ao final do 5º ano, espera-se que o aluno tenha se apropriado de quais conteúdos? Com o intuito de esclarecer tais questionamentos, que permeiam a atividade docente, examinamos os componentes da Prova Brasil e da Prova São Paulo.

3.4.1 Prova Brasil

A Prova Brasil, também conhecida como Avaliação Nacional de Rendimento Escolar (Anresc), consiste em uma avaliação externa de larga escala aplicada aos 5º e 9º anos do ensino fundamental I e ao 3º ano do ensino médio (censitária ao sistema educacional público e amostral ao sistema educacional particular). Criada em 2005, pela Portaria Ministerial nº 931

de 21 de março, a Prova Brasil é uma das três provas integrantes do Sistema de Avaliação da Escola Básica (Saeb). Composta por questões de múltipla escolha com quatro alternativas, seu objetivo é avaliar a qualidade do sistema básico educacional público brasileiro (municipal, estadual e federal) e, assim, nortear as ações das políticas públicas. A metodologia constituída por prova e análise de seus resultados baseia-se na Teoria de Resposta ao Item (TRI).

Os componentes da avaliação analisados foram as Matrizes de Referência, os exemplos de questões do 5º ano, o simulado da Prova Brasil do 5º ano e as escalas de desempenho do Saeb, todos relativos à Matemática.

As Matrizes de Referência explicitam quais conceitos serão explorados pelas questões da prova. Assim propõem os chamados descritores, que, segundo o documento, correspondem à avaliação das competências e habilidades do estudante. Ao todo, são 28 descritores separados em quatro temas: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação.

Dentre os descritores, foram selecionados aqueles que se referem (direta ou indiretamente) ao ensino de localização e ao conceito de ângulo:

Código	Tema	Descrição	O que se pretende avaliar?
D1	Espaço e Forma	Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.	As habilidades que podem ser avaliadas por este descritor referem-se ao reconhecimento, pelo aluno, da localização e movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço, sob diferentes pontos de vista.
D3	Espaço e Forma	Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.	A habilidade de o aluno reconhecer polígonos, classificando-os pelo número de lados. Além disso, o aluno deve identificar polígonos regulares pelas suas propriedades e classificar triângulos quanto aos lados e aos ângulos.
D4	Espaço e Forma	Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).	Por meio deste descritor, pode-se avaliar a habilidade de o aluno perceber conceitualmente as diferenças entre os quadriláteros. Por meio de figuras, ele deve ser capaz de reconhecer as características próprias dos quadriláteros principais: trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados.
D6	Grandezas e Medidas	Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não.	A habilidade de o aluno lidar com unidades de medida não convencionais, como por exemplo, usar um lápis como unidade de comprimento, ou um azulejo como unidade de área e de lidar com medidas adotadas como convencionais como metro, quilo, litro etc.

Quadro 4.1 – Descrição das ações atribuídas aos descritores

O primeiro (D1) refere-se de maneira direta à localização, visto que ela é o conteúdo principal a ser abordado. Os demais direcionam-se ao conceito de ângulo de maneira indireta, abordando nexos conceituais externos do conceito: D3 e D4 utilizam-se de tal conceito para identificação de figuras geométricas, já o descritor 6 se refere às estimativas de grandezas (sendo o conceito de ângulo uma delas).

A fim de observar de que maneira se materializa o conteúdo avaliado pela Prova Brasil, examinamos os simulados e exemplos de questões disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) em seus documentos referentes a essa avaliação: Caderno Prova Brasil, Simulado Prova Brasil (5º ano), Exemplo das Questões. Assim, de acordo com o interesse da pesquisa, buscaram-se os exemplos que se baseiam nos descritores selecionados.

Primeiramente, analisamos o denominado Caderno Prova Brasil, que possui as orientações sobre a metodologia da prova, os conteúdos avaliados e os exemplos de questões, já aplicadas em avaliações anteriores, que representam cada um dos 28 descritores.

3.4.2 Prova São Paulo

A Prova São Paulo é uma avaliação de larga escala que compõe o chamado Sistema de Avaliação de Aproveitamento Escolar dos Alunos da Rede Municipal de Ensino de São Paulo. Nas séries iniciais, foi aplicada às 2ª e 4ª séries, do ensino fundamental de oito anos, e aos 3º e 5º anos, do ensino fundamental de nove anos.

A primeira edição ocorreu no ano de 2007 e sua última em 2012. Durante os seis anos de aplicação teve caráter censitário para as unidades escolares municipais e adotou como metodologia a Teoria Clássica de Testes (TCT) e a TRI. Na maioria de suas edições, ao expressar seus resultados, baseou-se na escala adotada pelo Saeb/ Ministério da Educação (MEC).

Os conteúdos selecionados pelo documento baseiam-se nas *expectativas de aprendizagem*, presente nas Orientações Curriculares municipais:

Os *conteúdos* que serviram de base para o desenvolvimento das competências e habilidades em Matemática foram buscados no documento de orientação curricular da rede municipal, ou seja, no documento “Orientações Curriculares e Proposições de Expectativas de Aprendizagem” (SÃO PAULO, 2011, p. 1, grifo do autor).

Análogo ao realizado com a Prova Brasil, buscamos nas matrizes de avaliação disponibilizadas observar os descritores referentes aos conceitos de localização e ângulos.

Ciclo	Código	Tema	Descrição
I	H17	Espaço e Forma	Identificar a localização de objetos ou pessoas representadas em cenas simples, usando terminologia adequada, como: à esquerda, à direita, em cima, embaixo, na frente, atrás. Referência posição do aluno.
	H18	Espaço e Forma	Identificar a movimentação de objetos ou pessoas representadas em cenas simples, usando terminologia adequada, como: à esquerda, à direita, em cima, embaixo, na frente, atrás. Referência posição do aluno
	H22	Grandezas e Medidas	Reconhecer escritas que representem o resultado de uma medição, identificando as unidades de medida adequadas.
II	H58	Espaço e Forma	Identificar a localização de objetos ou pessoas representadas em malhas quadriculadas, mapas, croquis e outras representações gráficas, usando terminologia adequada, como: direita/ esquerda, acima/ abaixo, entre, em frente/ atrás.
	H59	Espaço e Forma	Identificar a movimentação de objetos ou pessoas representadas em malhas quadriculadas, mapas, croquis e outras representações gráficas, usando terminologia adequada, como: direita/ esquerda, acima/ abaixo, entre, em frente/ atrás.
	H61	Espaço e Forma	Identificar elementos de formas geométricas tridimensionais, como esfera, cone, cilindro, cubo, pirâmide, paralelepípedo ou de formas geométricas bidimensionais, como: quadrado, triângulo, retângulo e círculo.
	H63	Espaço e Forma	Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, considerando seu número de lados e/ou de ângulos.

Quadro 4.2 – Descritores da Prova São Paulo

A partir dos poucos exemplos de questões disponibilizados pela Prefeitura de São Paulo por meio do relatório de resultados de 2007, identificamos uma questão referente ao nosso tema. A seguir, é feita uma reprodução da questão baseada em São Paulo (2008, p. 54).

Descritor abordado: “H58 - Identificar a localização de objetos ou pessoas representadas em malhas quadriculadas, mapas, croquis e outras representações gráficas, usando terminologia adequada, como: direita/esquerda, acima/abaixo, entre, em frente/atrás” (SÃO PAULO, 2011, p. 10).

Questão proposta: *Podemos localizar as figuras que estão desenhadas no quadro abaixo, usando o quadriculado como orientação.*

Agora é sua vez:

 a) está em __, __.

 b) está em __, __.

 c) está em __, __.

Figura 32 – Questão malha quadriculada

Essa questão foi proposta a alunos do 2º ano do ensino fundamental. Classificada pelo descritor H58, apresentado anteriormente, seu objetivo é que o estudante localize os personagens a partir das coordenadas presentes na malha quadriculada. Para dar subsídios à solução, é fornecido um exemplo.

A questão em si não configura uma situação-problema para o estudante, visto que, se substituíssem os personagens por formas geométricas ou letras (x, y, z), a estrutura da questão se manteria. Tal fato ocorre devido à essência da questão estar na identificação, e não em uma

necessidade, a partir de uma problematização. A malha quadriculada não é posta de maneira contextualizada, como em um jogo de batalha naval ou nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem da prefeitura (em que há um mapa de um zoológico que a utiliza).

O formato da questão propõe ao estudante que siga um modelo, o que pode fazer com que ele não atribua significado à sua resposta. Dessa maneira, a ausência da situação-problema não gera uma necessidade para o estudante e, por consequência, não gera a sua atividade. Além disso, há um empobrecimento do potencial da malha quadriculada, que em séries posteriores poderá ser relacionada aos conceitos de latitude e longitude, por exemplo.

3.5 Panorama da organização do ensino

A partir da análise dos documentos e materiais didáticos oficiais citados, apresentados anteriormente, observamos uma grande ênfase no ensino de localização, com destaque para o conceito de lateralidade, a utilização de linhas e colunas e de malhas quadriculadas.

No que se refere ao conceito de ângulo, as orientações não o tratam como uma grandeza (como acontece com comprimento, área, volume, massa etc.), ou seja, como uma qualidade quantificável e que, portanto, admite a escolha de uma unidade de medida, que, ao ser comparada com o objeto a ser medido, gera uma quantidade (CARAÇA, 1951). Em relação às definições, as orientações também não explicitam a grandeza que é observada e apresentam o conceito sob diferentes concepções. Dizemos isso por considerar a definição uma síntese de um longo processo de formação do conceito, que deve estar atrelado ao seu movimento lógico-histórico para que tenha significado.

Um exemplo da organização do ensino do conceito de ângulo é encontrado no Caderno de Apoio e Aprendizagem do 5º ano (SÃO PAULO, 2010e, p. 137), na tarefa denominada “Os polígonos”, em que são apresentados quatro polígonos (quadrado, triângulo, pentágono e hexágono):

Figura 33 – Formas geométricas na tarefa “Os polígonos”

Posteriormente, é feita uma pergunta para subsidiar a discussão ou reflexão sobre o significado de polígono: “Elas representam alguns exemplos de polígonos, mas você sabe o que é polígono?”. E segue uma breve explicação: “Polígono é uma linha fechada, composta por segmentos de reta”.

São propostas duas tarefas. A primeira pede ao estudante para completar uma tabela indicando o nome e o número de lados de cada polígono. Já na segunda é necessário identificar em quais figuras existem ângulos menores, iguais ou superiores a 90° .

Esse é o primeiro momento em que o ângulo é abordado nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem. Podemos indicar alguns equívocos em sua abordagem: o conceito de ângulo é apresentado com unidade de medida (o grau), já quantificado e sem uma proposta prévia de discussão ou de sistematização; sua primeira aparição está vinculada a uma qualidade dos polígonos (um nexó conceitual externo); e, dada toda essa configuração, é proposto aos estudantes que identifiquem se os ângulos dentro do polígono são menores, iguais ou superiores a 90° , sem que haja uma referência de comparação a este.

Embora o movimento lógico-histórico mostre que foi a partir da rotação que a humanidade elaborou o conceito de ângulo, o ensino deste está baseado em sua ação mental estática, a inclinação. Dessa forma, a escola prioriza o pensamento euclidiano e a lógica formal ao restringir o ângulo a um atributo dos polígonos, o que nos faz entender ser necessário um aprofundamento sobre o ensino do referido conceito com base em dados sobre o modo de apropriação do seu significado, considerando os aspectos lógicos e históricos do seu desenvolvimento.

4 A PESQUISA REALIZADA NO CLUBE DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS

4.1 Fundamentos metodológicos

A escola exerce um papel singular no processo de socialização dos conhecimentos. Moura (1996) identifica dois processos presentes na dinâmica escolar: de ensino e de aprendizagem, que convergem na atividade de ensino. A atividade de ensino, ainda segundo o autor, possui um caráter duplo de formação: do professor e do estudante. Nesse movimento de formação, o processo de aprendizagem do estudante contribui para o seu desenvolvimento (VIGOTSKI, 1991; DAVÍDOV, 1988).

A atividade de ensino, assumida como núcleo da ação educativa, nos parece ter duas dimensões: a formação do professor e a do aluno. Ambas têm elementos comuns: a situação-problema, uma dinâmica de solução e uma possibilidade de avaliação. A situação-problema do aluno é a aprendizagem, e a do professor, o ensino (MOURA, 1996, p. 32).

Nesta pesquisa, a Educação é considerada como *Atividade* (LEONTIEV, 1983), pois, tal como compreende Moura et al. (2010, p. 24), concebemos “o conhecimento em suas múltiplas dimensões, como produto da atividade humana”. Nesse sentido, em cada conceito está encarnado o processo lógico-histórico de sua produção. Logo, ao desenvolver as atividades de ensino, desempenhando o papel de organizadores destas, buscamos propiciar condições para a apropriação do conceito de ângulo e de alguns relativos à localização, buscando a transformação dos sujeitos envolvidos.

O objeto da atividade pedagógica é a transformação de indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade – teórica e prática –, é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais como forma de constituição humana (MOURA et al., 2010, p. 24).

Toda a pesquisa baseou-se nos princípios da *Atividade Orientadora de Ensino*, definida por Moura (1996, 2012) ao discutir o conceito de *Atividade* proposto por Leontiev (1983).

[...] aquela que se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. [...] A atividade orientadora de ensino tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; e elege instrumentos auxiliares de ensino; os recursos

metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco etc.). E, por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende (MOURA, 2012, p. 155).

A partir dos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, o professor organiza intencionalmente o ensino de modo que crie para o estudante a necessidade de aprendizagem. A necessidade apresenta-se por meio das situações desencadeadoras de aprendizagem, que possuem em sua constituição a gênese do conceito e podem ser materializadas por um *jogo*, uma *história virtual* ou uma *situação emergente* (MOURA et al., 2010).

O *jogo* é algo muito mencionado na discussão dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, já a *situação emergente* é aquela que surge a partir do cotidiano, ao passo que a *história virtual* é definida como:

[...] uma narrativa que proporciona ao estudante envolver-se na solução de um problema como se fosse parte de um coletivo que busca solucioná-lo tendo como fim a satisfação de uma determinada necessidade, à semelhança do que pode ter acontecido em certo momento histórico da humanidade (MOURA et al., 2010, p. 105).

Salienta-se que a Atividade Orientadora de Ensino é um processo, e não um objeto (MOURA et al., 2010), pois é comum constatar a sua confusão com as situações desencadeadoras de aprendizagem.

Como já mencionado, a Atividade Orientadora de Ensino é um processo que envolve dois tipos de sujeito: o professor e o estudante. Sendo assim, ela se constitui como unidade entre o ensino, *Atividade* do professor, e a aprendizagem, *Atividade* do aluno (MOURA et al., 2010). Uma síntese desse processo é o esquema apresentado por Moraes (2008, p. 116):

Esquema 2 – AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem

4.2 O contexto em que se realizou a pesquisa empírica: O Clube de Matemática e Ciências

Apresentamos a seguir o contexto da realização da pesquisa: o Clube de Matemática. Este foi escolhido por considerarmos que apresenta as condições ideais dada a sua concepção como espaço de aprendizagem (CEDRO, 2004) fundamentado nos aportes teóricos da Teoria Histórico Cultural e da Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983), ou seja, possui os mesmos pressupostos teóricos que norteiam o projeto ao qual está inserido essa pesquisa: Observatório da Educação – “Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: Princípios e práticas da organização do ensino”.

O Clube de Matemática e Ciências é um projeto de estágio compartilhado, iniciado em 1999, com o nome de Clube de Matemática. Desde então, ele é desenvolvido semestralmente nas dependências da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), em especial no Laboratório de Matemática, e em parceria com a Escola de Aplicação da USP (MOURA; CEDRO, 2010). Em 2011, seu nome foi alterado para Clube de Matemática e Ciências, devido a sua nova configuração: no segundo semestre de cada ano letivo, as atividades de ensino desenvolvidas teriam seu foco no desenvolvimento de conceitos matemáticos, enquanto no primeiro semestre o foco seria em conceitos de ciências (principalmente biológicos e geográficos).

Cedro (2004) caracteriza o Clube de Matemática e Ciências como um *espaço de aprendizagem*, sendo este definido como “[...] o lugar da realização da aprendizagem dos sujeitos orientado pela ação intencional de quem ensina” (CEDRO, 2004, p. 47). O principal objetivo do projeto é “criar no Laboratório de Matemática da FEUSP um ambiente de discussão sobre questões de sala de aula e de pesquisa teórico/ prática relacionadas à educação matemática [atualmente, também relativo ao ensino de ciências]” (MOURA; CEDRO, 2010, p. 10).

O Clube de Matemática e Ciências baseia-se na Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983) e é norteado pelos pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996). O projeto é desenvolvido coletivamente por alunos de graduação em Pedagogia e em licenciatura em Matemática, pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação, *educadores* da FEUSP e pelos coordenadores, professor Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura (idealizador do projeto e responsável pelo segundo semestre) e professora Dra. Sonia Maria

Vanzella Castellar (com a inserção das Ciências passou a ser a responsável pelo primeiro semestre de cada ano). Os participantes criam coletivamente atividades de ensino para serem desenvolvidas com os estudantes da Escola de Aplicação, pertencentes aos anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano).

A Escola de Aplicação, no início de cada semestre, realiza a seleção dos estudantes. Estes efetuam a inscrição pleiteando uma das 16 vagas disponibilizadas para cada ano do ensino fundamental I (1º ao 5º ano). Caso o número de estudantes exceda a quantidade de vagas, é realizado um sorteio entre os inscritos; caso o número esteja muito abaixo da quantidade de vagas, os alunos de anos diferentes são agrupados em uma única turma (como acontece, nos últimos anos, com os 4º e 5º anos).

Os graduandos são convidados a realizar o estágio (geralmente de 60 horas) no Clube de Matemática e Ciências de duas maneiras: pela divulgação dos ministrantes das disciplinas de Metodologia do Ensino de Matemática (EDM0321, EDM0427 e EDM0428) e pelos cartazes fixados pela FEUSP informando local, data e horário das primeiras reuniões. A grande maioria dos graduandos advém do curso de Pedagogia. Supõe-se que isto se deve ao horário de realização do Clube de Matemática e Ciências, uma vez que, por ocorrer na parte da manhã, beneficia os estudantes de Pedagogia, que não possuem aula neste horário. Já os estudantes de licenciatura em Matemática encontram mais dificuldades em participar, pois aqueles que estudam no período matutino precisam reservar um espaço em sua grade horária (muitas vezes deixando de cursar alguma disciplina), e os do período noturno geralmente trabalham durante o dia.

Desde 2001, o ambiente de desenvolvimento do projeto transformou-se em local de pesquisa (MOURA; CEDRO, 2010), fomentando discussões teórico-metodológicas dentro do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe) e produções em formato de artigos, dissertações e teses – exemplos disso são os trabalhos de Bernardes (2000), Cedro (2004), Vaccas (2012), Justo (2014), entre outros. Dessa forma, a presença de estudantes de pós-graduandos em Educação, pertencentes à área de Ensino de Ciências e Matemática, é algo recorrente. Na maioria dos casos, os pós-graduandos participam como estagiários, visto que suas pesquisas buscam investigar elementos que estão presentes na dinâmica desenvolvida no Clube de Matemática e Ciências.

A partir de 2011, os chamados *educadores* passaram a compor a dinâmica do projeto. Eles são funcionários ou estudantes de pós-graduação que possuem um contrato com a FEUSP e têm por objetivo auxiliar os graduandos na realização dos estágios exigidos pelo

respectivo curso. Dessa maneira, o educador responsável pelo Clube de Matemática e Ciências fica incumbido de dar suporte à realização das atividades de ensino desenvolvidas, solicitando a compra de materiais necessários, reservando as salas de realização do estágio e intermediando a comunicação com a Escola de Aplicação. Anteriormente, essas funções eram desempenhadas por estudantes de iniciação científica ou pós-graduandos sob orientação do professor Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura.

Os professores coordenadores atuam no sentido de orientar as ações de estagiários e pós-graduandos em suas práticas e, como formadores de professores, procuram identificar como o estágio compartilhado contribui na formação do futuro docente ou pesquisador.

As reuniões são caracterizadas como de planejamento e de aplicação das atividades de ensino. As reuniões de planejamento têm a função de (re)organizar o espaço de aprendizagem, corroborando a ideia apresentada por Cedro (2004), enquanto as reuniões de aplicação centram-se no desenvolvimento das atividades de ensino com as crianças. Também acontecem atividades de confraternização a cada final do semestre, que visam à exposição do trabalho efetuado ao longo do semestre para os pais das crianças.

Inicialmente, são realizadas três reuniões de planejamento destinadas a: apresentação do projeto e de sua dinâmica; definição dos locais em que este ocorrerá; indicação do texto “A atividade de ensino como unidade formadora”, de Moura (1996), como suporte teórico das ações durante o semestre; formação dos grupos; processo coletivo de discussão, elaboração e avaliação das atividades de ensino. As demais reuniões são feitas ao final de cada módulo com o objetivo de, coletivamente, discuti-lo e avaliá-lo, para, assim, replanejar os próximos (caso seja após o terceiro módulo, discute-se sobre o semestre inteiro).

Os estagiários (graduandos e pós-graduandos) são organizados em grupos formados livremente, variando de três a cinco componentes. Devido a maioria deles cursar Pedagogia, sugere-se aos licenciandos em Matemática que ocupem grupos distintos, a não ser quando o número de licenciandos exceda o número de grupos, o que, a princípio, garante um estudante de Matemática em cada grupo.

Moura e Cedro (2010) relatam que, para compor os módulos, os estagiários baseiam-se em atividades de ensino elaboradas anteriormente (presentes nos relatórios de estágio de semestres anteriores), na proposta curricular da Escola de Aplicação e nos materiais de ensino presentes nos laboratórios de Matemática (jogos, ábaco, material dourado, livros etc.).

Há três módulos que compõem o projeto, cada um com três reuniões de aplicação de atividades de ensino. Cada reunião possui três momentos: no primeiro, das 8 às 9 horas, os

estagiários separam os materiais, organizam o local e ajustam os últimos detalhes necessários para o desenvolvimento da atividade de ensino; das 9 às 11 horas, são desenvolvidas as atividades de ensino com os estudantes; e das 11 às 12 horas é realizada, no Laboratório de Matemática, uma avaliação coletiva do processo de aplicação vivenciado pelos estagiários, explicitando os aprendizados que contribuíram para sua formação docente, além de refletir e reorganizar o módulo em andamento.

Durante a reunião de confraternização, as fotos das atividades de ensino desenvolvidas, ao longo do semestre, são apresentadas aos responsáveis. Algumas dessas atividades são disponibilizadas para que os adultos possam vivenciar e interagir juntamente com as crianças. Posteriormente, há um momento de lanche com a presença de todos.

Entende-se que a dinâmica proposta pelo Clube de Matemática e Ciências torna o graduando protagonista no processo de organização do ensino e, ao mesmo tempo, sujeito pertencente a um coletivo que o auxilia no desempenho de sua *atividade*. Esse ambiente proporciona a ele uma alternativa de vivenciar aspectos presentes na profissão docente ainda no decorrer de sua formação inicial, como afirma Moura e Cedro (2010, p. 15):

O exercício das várias ações que constituem a qualidade de professor, na formação inicial, é uma condição muito relevante para que o educador matemático possa compreender o seu papel como futuro profissional da educação matemática. Entendemos que as ações coordenadas pelo projeto Clube de Matemática permitem o exercício de parte delas ao possibilitar que os futuros professores elaborem atividades de ensino de forma coletiva.

Assim, o Clube de Matemática e Ciências é um espaço de aprendizagem de todos os sujeitos envolvidos, como afirma Cedro (2004). As crianças têm a oportunidade de se apropriar de conceitos matemáticos e de ciências através de atividades de ensino lúdicas; os graduandos vivenciam algumas dimensões da prática docente e possuem um espaço em que podem coletivamente compartilhar dúvidas, expressar expectativas, dividir tensões, avaliar sucessos e fracassos, ao mesmo tempo que planejam e replanejam suas ações; os pós-graduandos constituem-se como pesquisadores, atuando no desenvolvimento das atividades de ensino e/ou analisando os processos de aprendizagem discente e docente decorrentes da dinâmica deste espaço; os educadores e professores coordenadores, através da organização do projeto, podem orientar os graduandos e pós-graduandos, analisar os diversos processos de formação que ali ocorrem e, a partir disso, (re)avaliar e (re)planejar as ações formativas presentes em sua prática ou até mesmo nos cursos de graduação e pós-graduação.

4.3 Os sujeitos e a realização da pesquisa

A pesquisa foi realizada com estudantes participantes do Clube de Matemática e Ciências, durante o segundo semestre de 2014. Optou-se por desenvolver as atividades de ensino com crianças pertencentes ao 4º e 5º anos do ensino fundamental (agrupadas em uma única turma para que juntas tivessem mais de dez integrantes), pois o conceito de ângulo, geralmente, é abordado nesses anos escolares. Outra razão é por entender que os conceitos de lateralidade, necessários para o desenrolar da atividade de ensino proposta, foram apropriados pelos estudantes, visto que estão previstos como componentes curriculares de anos escolares anteriores.

O grupo de estagiários responsáveis pelo 4º e 5º anos era composto por quatro integrantes: eu e mais três graduandos de Pedagogia. Esses graduandos realizavam o estágio obrigatório referente à disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática (EDM0321).

No segundo semestre de 2014, algumas condições objetivas atípicas influenciaram no desenvolvimento do Clube de Matemática e Ciências e, conseqüentemente, na realização da pesquisa. O fato de os docentes, funcionários e alunos da USP estarem em greve desde o final de maio até meados de setembro postergou o início do segundo semestre letivo e, dessa maneira, também o início do projeto, alterando sua organização. Assim, o projeto teve seu início no dia 30 de setembro de 2014 com a primeira reunião de planejamento, e só foi possível realizar dois módulos de atividades com os estudantes.

A seguir, apresenta-se um quadro com o cronograma do Clube de Matemática e Ciências do segundo semestre de 2014:

Data	Tipo de Reunião	Ações desenvolvidas
30/09/2014	Planejamento	Apresentação do projeto, formação dos grupos e início da elaboração das atividades
07/10/2014	Planejamento	Elaboração das atividades de ensino
14/10/2014	Módulo I – 1º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
21/10/2014	Módulo I – 2º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
28/10/2014	Planejamento	Elaboração das atividades de ensino
04/11/2014	Módulo I – 3º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
11/11/2014	Módulo II – 1º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
18/11/2014	Módulo II – 2º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
25/11/2014	Módulo II – 3º Encontro	Desenvolvimento das atividades de ensino
02/12/2014	Confraternização	Apresentação das atividades aos pais e confraternização

Quadro 5 – Organização do Clube de Matemática e Ciências

É necessário ressaltar que no dia 28 de outubro de 2014, data de comemoração do dia do funcionalismo público, a USP não funcionou. Dessa forma, a reunião de planejamento prevista para esta data foi deixada a cargo dos estagiários. Nosso grupo se reuniu em um Centro Cultural localizado na avenida Paulista, em São Paulo.

4.4 Atividades de Ensino

As atividades de ensino são produto de um processo coletivo de estudo, discussão e elaboração. Os sujeitos que colaboraram, direta ou indiretamente, nesse processo foram: os integrantes do grupo de pós-graduandos e professores doutores que integram as chamadas *reuniões de orientandos* coordenadas pelo professor Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura (realizadas às segundas-feiras), o grupo Observatório da Educação – “Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: Princípios e práticas da organização do ensino”, formado por orientandos, acrescido de professores e coordenadores da rede municipal de ensino da cidade de São Paulo, e os estagiários do Clube de Matemática.

A análise da presença e da abordagem dos conteúdos referentes à localização e ao ângulo nos PCN e nas avaliações de larga escala, os estudos do movimento lógico-histórico do conceito ângulo, da Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983) e da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010) fundamentaram todo processo de constituição e organização das atividades de ensino, como: a definição dos temas abordados, a elaboração e organização das atividades de ensino e até mesmo a intervenção ao longo da aplicação. Os módulos, resultantes de todo esse processo, foram intencionalmente constituídos de modo que o ensino do conceito de ângulo emergisse a partir da necessidade de localização.

Dessa maneira, as atividades de ensino foram organizadas em dois módulos: o primeiro aborda diferentes maneiras de localização (lateralidade, descrição de itinerários, localização em mapas e croquis), o segundo busca propiciar aos alunos a apropriação do conceito de ângulo (movimento de rotação, inclinação, utilização de instrumentos).

4.4.1 Módulo I: Localização

O módulo I possuiu como tema central a localização, com o objetivo de desenvolver diferentes suas formas: lateralidade, descrição de trajetos em mapas e croquis, determinação de posição em mapas e croquis.

No Clube de Matemática, o primeiro encontro possui uma dinâmica diferenciada: ele é destinado à apresentação dos participantes, à discussão coletiva de combinados e à elaboração de crachás. Nessa estrutura, buscou-se sondar a apropriação da lateralidade dos estudantes através de uma dinâmica adaptada, chamada “Passa a bola”, e de um jogo geralmente conhecido na faixa etária com que trabalhamos, “Uno”, porém adaptado aos conceitos que desejávamos verificar: direita e esquerda.

Os combinados, uma prática comum no encontro inicial, são uma forma de decidir coletivamente as regras que serão aplicadas durante as reuniões.

Encontro I		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Dinâmica “Passa a bola”	Jogo de apresentação adaptado	Apresentação dos alunos e estagiários; Sondagem das apropriações sobre lateralidade.
Elaboração dos combinados	Confecção de um cartaz com as regras de convivência	Criar regras coletivas de convivência
“Uno” adaptado	Realização do jogo de cartas “Uno”, com regras que incluem os conceitos de lateralidades	Sondagem da apropriação de lateralidade
Confecção de crachás	Cada integrante customiza o seu crachá	Identificar os estudantes e os estagiários

Quadro 6.1 – Descrição primeiro encontro do módulo I

“Passa a bola”

- *Objetivo:* Sondar a apropriação dos conceitos de lateralidade dos estudantes.
- *Ações:* Passar a bola para direita/ esquerda a partir do comando do estagiário.
- *Nexo conceitual:* lateralidade.
- *Descrição:*

“Passa a bola” é uma dinâmica adaptada para a intenção do encontro: verificar a apropriação dos conceitos de lateralidade pelos estudantes.

Com uma bola e cartões coloridos (vermelho, azul, amarelo), o mediador forma uma roda de conversa e inicia a brincadeira passando a bola a um dos estudantes sentados ao seu

lado no círculo. Esse estudante se apresenta, dizendo seu nome, idade, o que gosta de fazer e de comer.

Ao final da apresentação, a bola deverá ser arremessada ao próximo estudante, de acordo com os cartões mostrados pelo mediador. Os cartões têm códigos, previamente combinados:

- ✓ Azul: o estudante de posse da bola a arremessa para o colega da direita;
- ✓ Vermelho: o estudante de posse da bola deverá arremessá-la para o colega da esquerda;
- ✓ Amarelo: o estudante de posse da bola deverá arremessá-la para um colega posicionado a sua frente.

Caso o aluno já tenha se apresentado, arremessará a bola para o colega da esquerda.

“Uno”

- *Objetivo:* Sondar a apropriação do conceito de lateralidade dos estudantes.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* jogo “Uno” com regras adaptadas, a fim de apresentar o conceito de lateralidade.
- *Ações:* Trocar as cartas com outro jogador (da direita ou da esquerda) a partir do descarte efetuado pelo jogador precedente.
- *Nexo conceitual:* lateralidade.
- *Descrição:*

O “Uno” é um jogo conhecido por muitos estudantes. Suas regras foram adaptadas a fim de explorar os conceitos de lateralidade. Logo, ele se configurou como a atividade de ensino principal do primeiro encontro.

Os jogadores sentam-se em roda, são distribuídas sete cartas a cada jogador, as cartas que sobram ficam ao centro da roda. O jogo se inicia retirando uma carta aleatória do monte de cartas. O jogador deve descartar uma carta de mesma cor ou com o mesmo número que a última carta posta, e assim por diante. Vence o jogo aquele que conseguir, primeiro, descartar todas, de forma que, quando estiver com apenas uma, fale: “Uno”.

A seguir, encontram-se as regras adicionadas e de cartas especiais.

CARTA	REGRA	CARTA	REGRA
Troque suas cartas com o jogador da esquerda.		Próximo jogador perde a vez.

Troque suas cartas com o jogador da direita.		Sentido do jogo é invertido.
Todos os jogadores passam suas cartas para o jogador da esquerda.		Escolha a cor da próxima carta a ser jogada.
Próximo jogador compra duas cartas e perde a vez.		Próximo jogador compra quatro cartas e perde a vez.

Quadro 6.2 – Regras das cartas especiais do “Uno” adaptado

Para finalizar o primeiro encontro, realizou-se a confecção dos crachás, em que os estudantes colocaram seus nomes e personalizaram com desenhos de sua preferência.

No segundo encontro, continuando com o tema do módulo (localização), buscou-se abordar, por meio de situações-problema e jogos, itinerários em diferentes contextos.

No desenvolvimento de todas as atividades de ensino, o conceito de lateralidade foi necessário. Ao propor labirintos, descritos a seguir, e pedir para registrar os trajetos, surgiu a necessidade de expressar os movimentos de direita e esquerda. Isso também ocorreu ao descrever o itinerário realizado entre a sala do 4º e 5º ano do Clube de Matemática e Ciências e a sala de aula dos estudantes localizada na Escola de Aplicação e ao resolver as situações-problema envolvendo trajetos baseados em mapas (*campus* da USP São Paulo e arredores do metrô Butantã).

Encontro II		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Labirinto	Os estudantes descrevem o itinerário de solução do labirinto	Gerar a necessidade de traçar itinerários utilizando o conceito de lateralidade (direita/ esquerda)
Caminho da Escola de Aplicação (Parte I)	Descrever o itinerário entre a sala do Clube de Matemática e Ciências e a sala de aula dos estudantes; e depois entre esta e a quadra	Descrever itinerários relativos ao cotidiano das crianças
Itinerário na USP	Descrever o itinerário entre a FEUSP e o IME. A partir de um mapa do <i>campus</i> da USP	Utilizar conceitos de lateralidade na determinação de trajetos baseados em mapas
O aniversário	Situação-problema em que se deseja chegar a uma festa próxima ao metrô Butantã; mapa do <i>campus</i> da USP	
Caminho da Escola de Aplicação (Parte II)	Realizar o trajeto entre a sala que estão até a sala de aula	Vivenciar coletivamente a descrição de itinerários relativos ao cotidiano das crianças

Quadro 6.3 – Descrição do segundo encontro do módulo I

“Labirinto”

- *Objetivo:* Gerar a necessidade de traçar itinerários utilizando o conceito de lateralidade (direita/ esquerda).
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Jogo de labirinto.
- *Ações:* Descrever as soluções dos labirintos propostos utilizando a lateralidade (direita/ esquerda).
- *Nexos conceituais:* lateralidade; descrição de trajetos.
- *Descrição:*

Os estudantes são separados em grupos com três ou quatro integrantes. Cada grupo é separado em duplas (caso sejam três estudantes, um ficará sozinho). Entrega para cada dupla um tipo de labirinto, como mostram as figuras a seguir.

Figura 34 – Labirinto I

Figura 35 – Labirinto II

Ao receber o labirinto, a dupla deve resolvê-lo e, simultaneamente, escrever em uma folha o itinerário que utilizou para chegar à saída. Nessa descrição da movimentação, espera-se gerar a necessidade de utilização dos conceitos de direita e esquerda.

Após resolver seu labirinto, as duplas trocam entre si os labirintos e os itinerários descritos. Nesse instante, as duplas deverão resolver o novo labirinto e validar ou não o itinerário sugerido. Caso haja incompatibilidade entre o novo itinerário executado e o anteriormente proposto, a dupla deve reescrevê-lo indicando os equívocos.

“Caminho da Escola de Aplicação”

- *Objetivo:* Traçar itinerários utilizando o conceito de lateralidade (direita/ esquerda).
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Descrição de como chegar à sala onde estuda na Escola de Aplicação da FEUSP.

➤ *Ações:* Descrever previamente o trajeto a ser percorrido até a sala de aula, guiar o coletivo até a sala e, posteriormente, até a quadra utilizando os conceitos de lateralidade.

➤ *Nexos conceituais:* lateralidade, descrição de trajetos.

➤ *Descrição:*

Ao propor essa atividade de ensino, recorreremos a uma situação-problema real vivida pelo aluno. Na primeira parte, pede-se aos estudantes que descrevam em uma folha o trajeto entre a sala onde estão, na FEUSP, e a sala de aula onde estudam, localizada na Escola de Aplicação. Posteriormente, na segunda parte, o coletivo percorre o referido trajeto e também o itinerário entre a sala de aula e a quadra.

“Itinerário na USP”

➤ *Objetivo:* Utilizar o mapa como instrumento de localização na determinação de trajetos.

➤ *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Partir da FEUSP e chegar ao Instituto de Matemática e Estatística da USP.

➤ *Ações:* Localizar no mapa do campus capital da USP os locais de partida e chegada; descrever, baseado no mapa, o trajeto entre o Faculdade de Educação e o Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP.

➤ *Nexos conceituais:* lateralidade; descrição de trajetos; mapas, croquis e esquemas.

➤ *Descrição:*

Prosseguindo com a descrição de itinerários a partir dos conceitos de lateralidade, disponibiliza-se mapas (Figura 36) do *campus* da USP São Paulo e pede-se que os estudantes descrevam, em uma folha, o trajeto necessário para sair da FE e chegar ao IME.

Dessa forma, a situação-problema é algo pertencente à vivência do estudante, visto que ele estuda no *campus* da USP São Paulo, e acrescentamos a esse fator uma nova referência: o mapa.

- *Objetivo:* Utilizar o mapa como instrumento de localização na determinação de trajetos.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Descrever a um amigo como sair da estação metroviária Butantã e chegar ao endereço de sua festa de aniversário.
- *Ações:* Localizar no mapa virtual os locais de partida e chegada; descrever, baseado no mapa, o trajeto entre a estação metroviária do Butantã e o endereço de destino.
- *Nexos conceituais:* lateralidade; descrição de trajetos; mapas, croquis e esquemas.
- *Descrição:*

A partir da situação-problema apresentada a seguir e de um mapa disponibilizado (Figura 37), o estudante precisa descrever um trajeto para que seu convidado chegue do metrô Butantã ao salão onde ocorrerá a festa. Situação-problema: “Este final de semana você estará de aniversário, e você comemorará com seus amigos realizando uma festa em um *buffet*. Porém, muitos de seus amigos não conhecem o local. Para facilitar, você dará orientações

mapa apresentado, elaboramos uma situação-problema em que um grupo de amigos se divide em dois e se desencontra. Logo, é preciso utilizar as informações presentes no mapa para se encontrarem. O jogo integra a malha quadriculada e a leitura de mapa, visto que este está dividido em coordenadas alfanuméricas, como a “Batalha naval”.

Encontro III		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Batalha naval	Jogo em malha quadriculada em que se objetiva afundar as embarcações do oponente	Utilizar as coordenadas alfanuméricas presentes em malha quadriculada para se localizar
Entre linhas	Jogo confeccionado manualmente. Seu tabuleiro é a malha metroviária de São Paulo. O estudante deve cumprir as missões e, dessa forma, se deslocar utilizando o metrô	Localizar-se e deslocar-se em uma malha metroviária
Perdidos no zoológico	Situação-problema, proposta ao coletivo, em que grupos de amigos estão perdidos e precisam se encontrar para ir embora	Vivenciar coletivamente a localização e descrição de trajetos em um mapa que possui malha quadriculada

Quadro 6.4 – Descrição do terceiro encontro do módulo I

“Batalha naval”

- *Objetivo:* Utilizar as coordenadas alfanuméricas presentes em malha quadriculada para se localizar.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Jogo “Batalha naval”.
- *Ações:* Localizar as embarcações do adversário utilizando as coordenadas alfanuméricas presentes na malha quadriculada.
- *Nexos conceituais:* malha quadriculada; mapas, croquis e esquemas.
- *Descrição:*

Os estudantes são divididos em grupos com três ou quatro integrantes. O grupo é dividido em duas duplas (caso seja um grupo com três, um estudante ficará sozinho). Cada dupla recebe uma folha com duas malhas quadriculadas em branco, uma para posicionar suas embarcações e outra para acompanhar a localização das embarcações do adversário, a partir dos tiros efetuados. Há uma barreira no meio da mesa para que uma dupla não olhe a folha da outra.

Os estudantes jogam *par ou ímpar* para decidir quem começa. O ganhador inicia, atirando em seu oponente por meio da coordenada, por exemplo: B6. Posteriormente, a outra dupla efetua seu tiro, e assim por diante. Após cada tiro, a dupla atacada deve dizer à

adversária se o tiro foi na água ou em alguma embarcação, e caso seja na embarcação, em qual tipo. Ganha a dupla que primeiro conseguir afundar todas as embarcações adversárias.

“Entre linhas”

- *Objetivo:* Localizar-se e deslocar-se em uma malha metroviária.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Jogo “Entre linhas”.
- *Ações:* Deslocar-se pela malha metroviária; descrever o trajeto realizado indicando estação de origem, linhas utilizadas, baldeações, sentidos e destino final.
- *Nexos conceituais:* mapas, croquis e esquemas; descrição de trajetos.
- *Descrição:*

O jogo propõe aos estudantes que realizem missões em determinados lugares da cidade de São Paulo. Para isso, eles precisam se locomover utilizando a malha metroviária. O jogo foi projetado para quatro a seis jogadores, e os lugares foram intencionalmente escolhidos a fim de que os estudantes conheçam a localização dos principais pontos turísticos, culturais e de lazer distribuídos pelas diversas regiões da cidade. Como o objetivo do jogo é que os estudantes se apropriem da maneira de utilização do sistema metroviário, os lugares ficaram restritos às regiões próximas às estações.

O jogo é composto por:

- 1 tabuleiro representando a malha metroviária²¹;
- 50 folhas de itinerários;
- 20 cartas de residência;
- 64 cartas de objetivos;
- 150 bilhetes de metrô.

²¹ Alguma estação do sistema metroviário pode não estar presente no tabuleiro devido à sua inauguração posterior à elaboração do jogo.

Figura 38 – Tabuleiro do jogo Entre Linhas

Figura 39 – Carta de objetivo

Figura 40 – Carta de residência

Figura 41 – Bilhete de metrô

Folha de Itinerários			
Nome:		Residência:	
Origem	Sentido	Desembarque	Destino

Figura 42 – Folha de itinerários

Primeiramente, cada jogador retira uma carta de residência. Esta indica onde ele morará, portanto, seu ponto de partida.

Após embaralhar as cartas de objetivos, cada jogador recebe:

- 5 cartas de objetivos, que indicam as cinco estações que os jogadores deverão visitar a fim de realizar a tarefa descrita;
- 5 bilhetes de metrô, que serão usados em cada viagem;
- 1 tabela de itinerários, em que se escreverá o itinerário realizado.

Antes do início da partida, todos os jogadores lançam o dado. Aquele que alcança a maior pontuação começa, o segundo com maior pontuação joga logo após, e assim sucessivamente. Caso haja empate, os jogadores empatados devem lançar novamente o dado até que o desempate aconteça.

Após a definição de ordem das jogadas, deve-se observar se há algum participante portando a carta “Perdeu a vez!”. Se isso ocorrer, esta deverá ser sua primeira jogada. No decorrer do jogo, se for constatado que algum jogador possuía essa carta, mas não a jogou, ele será desclassificado.

O jogador, antes de iniciar cada jogada, retira uma carta de objetivos do monte e escolhe dentre os objetivos que possui qual realizará. Posteriormente, o jogador lê para todos a carta escolhida (a fim de indicar o que fará) e escreve o trajeto a ser realizado na tabela de itinerários. Descarta o objetivo e um bilhete de metrô e, finalmente, movimenta seu pião.

Caso o jogador retire a carta “Perdeu a vez!”, ela deve ser jogada imediatamente, ou será desclassificado.

A carta de objetivos retirada possui uma indicação de quantos bilhetes de viagem o jogador ganha ao realizar determinado objetivo, por exemplo: trabalho – 2 bilhetes; atividade cultural ou de lazer – 3 bilhetes.

Vence o jogo quem completar oito objetivos e indicá-los corretamente na tabela de itinerários. Caso haja empate, o número de bilhetes de metrô determinará o vencedor. Caso persista o empate, os jogadores disputarão no lançamento do dado.

“Perdidos no zoológico”

- *Objetivo:* Utilizar, simultaneamente, o mapa e as coordenadas da malha quadriculada para localizar-se e determinar trajetos.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Em um zoológico, ajudar dois grupos de amigos a se reencontrar, sabendo que há um mapa com cada grupo.
- *Ações:* Descrever que ações os personagens precisam realizar para que os dois grupos de amigos se encontrem.
- *Nexos conceituais:* malha quadriculada; descrição de trajetos; mapas, croquis e esquemas.
- *Descrição:*

Apresentar ao coletivo a seguinte situação-problema:

“Um grupo de amigos foi ao zoológico. Logo ao entrarem, os estudantes receberam o mapa do zoológico.

Uma parte do grupo preferia ver primeiro os felinos, já a outra parte preferia ver os répteis. Assim, o grupo dividiu-se em dois (um liderado por Pedrinho e outro liderado por Letícia).

Ao final do dia, os amigos precisam encontrar-se para ir embora. Logo, Letícia ligou para Pedrinho:

- Pedrinho, onde você está? Precisamos ir embora.
- Estou em frente à jaula do tigre siberiano.
- Mas onde está o tigre siberiano? – Questionou Letícia.

Tanto Pedrinho quanto Letícia possuem o mapa. De que forma Pedrinho pode dizer a Letícia onde seu grupo está?

(Momento de discussão)

O grupo de Letícia está em B9, qual o trajeto que deve ser percorrido para encontrar Pedrinho?”

diversos anos da escola básica: conceber o ângulo como uma grandeza de comprimento. Observamos tal dificuldade ao longo da prática docente. Diniz e Smole (2008, p. 3) também fazem essa consideração:

Uma vantagem de perceber o ângulo como giro é a possibilidade de reformular a concepção errônea e comum de que a medida do ângulo é determinada pelo comprimento da marca de lápis usada para representar os lados do ângulo ou, como muitas vezes observamos nos nossos alunos, pela distância entre os dois lados do ângulo, o que não determinaria um número para ser a medida do ângulo.

A atividade de ensino “Pênalti às cegas” utiliza os conceitos de lateralidade associados aos movimentos corporais dos estudantes (rotações), com o objetivo de gerar a necessidade de utilização do conceito de ângulo e, dessa forma, de suas unidades de medida como as subdivisões de uma volta (meia, um quarto e um oitavo de volta) e, se possível, o grau.

A história virtual (MOURA et al., 2010) “Em alto-mar” propõe um problema desencadeador de aprendizagem que unifica os conceitos de localização e de ângulo (corroborando o movimento lógico-histórico), pois, para que o navio siga a direção proposta, é preciso girá-lo corretamente. A intenção é gerar, mais uma vez, a necessidade da utilização do conceito de ângulo e também da quantificação utilizando o grau como unidade de medida. Como o movimento lógico-histórico apresenta, os instrumentos foram essenciais na aplicação do conceito de ângulo na história humana, assim, para utilizar o grau como unidade de medida, construímos um instrumento baseado no transferidor que pudesse auxiliar os estudantes no processo de quantificação.

A “Sistematização do conceito de ângulo” é um momento de síntese baseado nas atividades de ensino anteriores, em que se apresenta uma definição formal do conceito de ângulo (como um par de semirretas de mesma origem) – baseada em Dolce e Pompeu (1993) – e diversos exemplos cotidianos de aplicação do ângulo.

A última atividade de ensino do encontro, “Medindo ângulos”, utiliza a imagem de um transferidor como instrumento de medida de ângulos. Dessa maneira, é apresentado o instrumento utilizado pela escola básica para a realização de tal tarefa.

Encontro I		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Pênalti às cegas	Um dos estudantes é vendado e, com o auxílio do grupo, deve girar seu corpo para ficar de frente para o gol, para depois chutar.	Utilizar o movimento de rotação de forma que crie a necessidade de utilização do ângulo como partes do giro: meio giro e um quarto de giro.
Em alto-mar	História virtual que propõe uma situação-problema em que um capitão deve chegar a uma determinada ilha.	A partir de um contexto de localização, gerar a necessidade de utilizar o ângulo e, mais especificamente, uma unidade angular.

Sistematização do conceito de ângulo	Apresentação da definição matemática do conceito de ângulo e a apresentação de um vídeo que reflete sua importância.	Sistematizar o que foi desenvolvido e mostrar a importância do conceito.
Medindo ângulos	Medir ângulos entre objetos localizados na sala e uma referência pré-estabelecida localizada na sala.	Avaliar o desenvolvimento dos conceitos desenvolvidos no dia; Medir ângulos utilizando o transferidor.

Quadro 6.5 – Descrição do primeiro encontro do módulo II

“Pênalti às cegas”

- *Objetivo:* Utilizar o movimento de rotação de forma que crie a necessidade de utilização do ângulo como partes do giro: meio giro e um quarto de giro.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Jogo “Pênalti às cegas”.
- *Ações:* Orientar a pessoa vendada, com apenas um comando, para que esta se vire em direção às supostas traves.
- *Nexos conceituais:* lateralidade; rotação.
- *Descrição:*

São necessários os seguintes materiais para a realização dessa ação:

- Pano, que servirá de venda, ou venda;
- Fita crepe para delimitar a marca do pênalti;
- Bola pequena;
- Cadeiras, para representar as traves, ou traves pequenas.

Inicialmente, um estagiário desempenha a função de chutador. Logo, ele é vendado e posicionado na marca do pênalti. O mediador posiciona as supostas traves (cadeiras) nas laterais (90° à direita ou à esquerda) ou atrás (180°) do chutador e explica ao coletivo que eles devem dar comandos para o chutador, a fim de que ele fique de frente para as traves e possa realizar o chute.

A escolha de posições, como atrás e nas laterais, são intencionalmente postas para que os estudantes cheguem aos comandos que representam partes de uma volta: meia volta e um quarto de volta.

O ministrante da atividade de ensino deve também salientar que os estudantes não podem dar comandos como “vire para trás”, “vire para a direita” ou “vire para a esquerda”, pois é preciso especificar. E a mediação deve ser realizada até que os estudantes cheguem aos comandos que expressam subdivisões de uma volta, por exemplo: “dê meia volta para a esquerda”, e assim por diante. Para demonstrar, sugere-se que o estagiário na posição de

chutador, ao receber comandos como “vire à direita”, problematize girando o corpo apenas alguns graus.

Nesse primeiro momento coletivo, são propostos dois problemas ao coletivo: uma trave localizada a 180° do chutador (atrás) e outra localizada ao lado (90° à direita ou à esquerda). Quando os estudantes chegam nas subdivisões de uma volta ou em graus, eles são separados em grupos menores.

Os estudantes são divididos em grupos de 4 a 6 integrantes. Um destes deve assumir a função de chutador, enquanto os demais estudantes devem dar comandos. É realizado um rodízio entre os estudantes para que todos fiquem na posição de chutador. Nesse momento de subgrupos, propõe-se um novo problema: uma trave localizada a 45° do chutador (à direita ou à esquerda).

Durante o desenvolvimento da atividade de ensino, faz-se necessário que o ministrante organize os comandos, pois muitas vezes os estudantes efetuam comandos simultâneos, dificultando a compreensão do chutador.

“Em alto-mar”

- *Objetivo:* A partir da localização, gerar a necessidade de utilização do ângulo e de uma unidade deste, mais especificamente, o grau; gerar a necessidade de utilização de um instrumento para medir a grandeza ângulo.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* História virtual “Em alto-mar”.
- *Ações:* Orientar o barco, com apenas um comando, a seguir pela direção correta, rumo à Ilha dos Macacos; determinar a direção utilizando o instrumento *lonagu*.
- *Nexos conceituais:* descrição de trajetos; lateralidade; mapas, croquis e esquemas; rotação; utilização de instrumentos de medida.
- *Descrição:*

É apresentada a seguinte situação desencadeadora de aprendizagem ao coletivo:

“É noite, e o capitão Lobo precisa resgatar seus marujos que naufragaram próximo à Ilha dos Macacos. Porém, ao se afastar da costa, o capitão percebeu que seu mapa não estava a bordo. Capitão Lobo não pode errar o caminho, porque poderá se perder e ir em direção ao mar aberto. Ou pior, poderá cair em uma das ilhas dominadas pelo pirata Barba Negra. E isso não será nada bom.

Sabendo que estava em apuros, o capitão Lobo entrou em contato via rádio com Simbá, seu braço direito, que estava em terra firme e com o mapa.

O barco do capitão Lobo desembarcará em poucos instantes e perderá o sinal quando começar a se movimentar. Com isso, Simbá terá tempo de dar apenas um comando para direcionar o barco do capitão Lobo para chegar à Ilha dos Macacos. Como poderá fazer isso?”

Com a história, é apresentada uma representação da situação (Figura 44). A Ilha dos Macacos está 45° à direita do barco. Essa angulação foi intencionalmente proposta por se tratar de um ângulo notável, além de ser um resultado da divisão sucessiva da circunferência, por dois.

Figura 44 – Representação da história virtual “Em alto-mar”

Após um momento de discussão coletiva e levantamento de hipóteses, espera-se que os estudantes identifiquem o ângulo como grandeza e que sintam a necessidade de sua quantificação.

No movimento de elaboração da história virtual, consideramos improvável que as crianças dividissem a circunferência em 360 partes e, assim, tomassem 1° como unidade de medida de ângulo. Dessa maneira, após o coletivo concluir que há a necessidade de quantificação do ângulo, o orientador continua a história, que fornecerá um instrumento que possua o grau como unidade de medida, auxiliando em sua quantificação:

“Depois de muito pensar em como ajudaria o capitão Lobo, Simbá lembrou que em seu bolso havia um instrumento chamado *lonagu* e que no barco também havia um.

Como Simbá poderá direcionar o capitão Lobo agora?”

Figura 45 – Imagem do *lonagu*

Com o auxílio do instrumento, espera-se que os estudantes concluam que a ilha fica a 45° para a direita. O mediador pode explorar a história trocando os adesivos das ilhas de posição e, dessa forma, trocando a Ilha dos Macacos de lugar.

“Sistematização do conceito de ângulo”

- *Objetivo:* Sistematizar coletivamente o conceito de ângulo.
- *Ações:* Realizar um momento de síntese com o coletivo; discutir sobre a aplicação do conceito de ângulo; apresentar sua definição formal.
- *Nexos conceituais:* inclinação; rotação.
- *Descrição:*

Esse momento é de síntese, destinado à sistematização das atividades de ensino. São apresentados *slides* aos estudantes abordando: o grau como a unidade de medida da grandeza ângulo e como ele surge a partir da divisão da circunferência em 360 partes, uma definição formal de ângulo (par de semirretas de mesma origem) e as divisões da circunferência em graus – metade (180°) e um quarto (90°).

Logo após, deve-se apresentar o vídeo “Matemática: olhando por um outro ângulo”²², que exemplifica o uso do conceito de ângulo em diversas situações do cotidiano.

“Medindo ângulos”

- *Objetivo:* Abordar o ângulo como inclinação; utilizar o transferidor como instrumento de medida.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* A partir de uma referência pré-determinada, medir a angulação de alguns objetos em relação a ela.
- *Ações:* Utilizar o transferidor na medição de inclinações.
- *Nexos conceituais:* inclinação, utilização de instrumentos de medida.

²² Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=BMEk1MBf3Ko>>. Acesso em: abr. 2016.

➤ *Descrição:*

Para encerrar, propõe-se aos estudantes que meçam os ângulos entre uma direção fixada na sala, que servirá de referência, e alguns objetos posicionados no local. Essa ação busca ensiná-los a utilizar o transferidor (representado por uma imagem ampliada).

O desenvolvimento da tecnologia influenciou os jogos virtuais e, atualmente, eles possuem diferentes temas e complexidades. Assim, no segundo encontro, com o objetivo de dar prosseguimento ao processo de significação do conceito de ângulo, foram selecionados jogos virtuais que utilizam o conceito a partir do movimento de rotação.

Ao final, foi proposta uma situação-problema, chamada “Rampa”, em que os estudantes precisam calcular a inclinação desta, com o objetivo de abordar a outra ação mental do conceito de ângulo, a inclinação.

Encontro II		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Jogos virtuais	Seleção de jogos virtuais que abordam o conceito de ângulo	Continuar o processo de significação do conceito de ângulo
Rampa	Construção de uma rampa hipotética com os alunos	Abordar a outra ação mental do conceito de ângulo, a inclinação

Quadro 6.6 – Descrição do segundo encontro do módulo II

“Jogos virtuais”

➤ *Objetivo:* Continuar o processo de significação do conceito de ângulo em diferentes contextos.

➤ *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Jogos virtuais.

➤ *Ações:* Resolver as diversas situações dos jogos propostos, em que, em sua maioria, o ângulo aparece a partir de um movimento de rotação.

➤ *Nexos conceituais:* lateralidade; rotação; inclinação; descrição de trajetos; mapas, croquis e esquemas;

➤ *Descrição:*

A ordem proposta foi organizada com o objetivo de: iniciar com os conceitos de lateralidade e, posteriormente, atribuir a eles outra qualidade, quantificando-os; centrar a maioria dos jogos na utilização dos ângulos, a partir dos movimentos de rotação; associar os conceitos de ângulo e de localização. Dessa maneira, propõe-se a seguinte ordem:

- ✓ “Joaninha e o Labirinto” (Mariquita y el Laberinto) – Utiliza alguns ângulos notáveis (45° e 90°) em labirintos, porém sem os quantificar (http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_141_g_1_t_3.html);
- ✓ “Tartaruga e a Geometria” (Tortuga y la Geometría) – Utiliza alguns ângulos múltiplos de 15° (15° , 30° , 45° , 60° , 75° e 90°) para deslocar a tartaruga em diferentes trajetos, nesse caso, deslocamentos entre rochas (http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_178_g_1_t_3.html).
- ✓ “Jogo do *playground*” – A fim de direcionar o esguicho de água para molhar diversos objetos, utiliza ângulos múltiplos de 45° (0° , 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° , 360°) (http://www.bbc.co.uk/schools/teachers/ks2_activities/maths/activities/angles.swf).
- ✓ “Ângulos do *kung fu*” (Kung Fu Angles) – Para ganhar de seus oponentes, utiliza ângulos múltiplos de 10° (<http://www.bbc.co.uk/keyskills/flash/kfa/kfa.shtml>).
- ✓ “Projeto TRIG” (Project T.R.I.G.) – Para lançar o projétil e superar os obstáculos propostos, utiliza-se o ângulo ao direcionar o tiro (<http://www.mathplayground.com/ProjectTRIG/ProjectTRIGPreloader.html>).
- ✓ “De lá pra cá, daqui pra lá” – Integra o conceito de localização e ângulo ao percorrer trajetos em uma cidade (http://revistaescola.abril.com.br/swf/jogos/exibi-jogo.shtml?212_mapa.swf).

“Rampa”

- *Objetivo:* Abordar o ângulo como inclinação.
- *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Suposta construção de uma rampa.
- *Ações:* Utilizar o transferidor para medir a inclinação de uma rampa.
- *Nexos conceituais:* inclinação; utilização de instrumentos de medida.
- *Descrição:*

Apresentar ao coletivo uma rampa hipotética (construída com papelão, por exemplo) e pedir aos estudantes que meçam o ângulo de inclinação. Esse processo contará com o auxílio do transferidor.

Ao mediar o processo, permitir que os estudantes tentem sozinhos realizar a medição. A intervenção deve ser no intuito de ajustar ou questionar o método utilizado.

É importante, também, discutir com o coletivo a influência que a angulação exerce na construção da rampa e qual é a melhor angulação, por exemplo, para um idoso ou um cadeirante.

O último encontro do módulo, e também de desenvolvimento de atividades de ensino com os estudantes, propôs uma “Caça ao tesouro angular”, que, a partir de sua organização e da utilização da bússola, tem por objetivo explicitar a ligação existente entre os conceitos de localização e ângulo. Como a bússola foi utilizada, o encontro iniciou com uma introdução ao seu uso e ao conceito de pontos cardeais, para isso, foi apresentado um vídeo e realizada uma discussão coletiva.

A caça ao tesouro é uma tradição dentro do Clube da Matemática, geralmente realizada no último encontro do semestre. A escolha se deu por esta razão e pelo fato de que sua adaptação a tornaria uma atividade de ensino interessante para os conceitos propostos.

Posteriormente, foram realizadas duas atividades de ensino: “Onde moro?” e “Itinerário Angular”. A primeira propõe aos estudantes que localizem o local onde residem no guia de ruas e, assim, façam uso da malha quadriculada. Já a segunda apresenta o itinerário de um barco e solicita aos estudantes que meçam as rotações realizadas por ele ao se locomover utilizando o transferidor.

Encontro III		
<i>Ações</i>	<i>Descrição</i>	<i>Objetivos</i>
Introdução	Introdução aos pontos cardeais e à bússola como um instrumento que utiliza o conceito de ângulo na localização	Explicitar a utilização do conceito de ângulo em instrumentos de localização
Caça ao tesouro angular	Realização da caça ao tesouro com bússola	Utilização do conceito de ângulo atrelado ao de localização
Onde moro?	Localizar o endereço onde mora no guia de ruas	Utilização do conceito de malha quadriculada atrelado ao de localização
Itinerário angular	A partir de um itinerário realizado por uma embarcação, pedir aos estudantes que meçam os ângulos que foram efetuados por ela	Utilizar um instrumento na medição de ângulos, o transferidor

Quadro 6.7 – Descrição do terceiro encontro do módulo II

“Introdução”

- *Objetivo:* Explicitar a utilização do conceito de ângulo em instrumentos de localização, mais especificamente, a bússola; apresentar os pontos cardeais/ colaterais.
- *Ações:* A partir de um vídeo que explica a utilização da bússola, discutir com o coletivo a sua utilização e os conceitos de ângulo e pontos cardeais/ colaterais nela presente.

➤ *Nexos conceituais:* rotação; utilização de instrumentos de medida; pontos cardeais e colaterais.

➤ *Descrição:*

Em uma discussão inicial, apresenta-se os pontos cardeais, o funcionamento da bússola e sua relação com os ângulos. Após a discussão, apresenta-se o vídeo “Uso da bússola”²³.

“Caça ao tesouro angular”

➤ *Objetivo:* Utilizar o conceito de ângulo atrelado ao de localização; abordar os pontos cardeais/ colaterais; utilizar a bússola.

➤ *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Caça ao tesouro angular.

➤ *Ações:* Utilizar a bússola para chegar à próxima pista ou ao tesouro.

➤ *Nexos conceituais:* rotação; utilização de instrumentos de medida; pontos cardeais e colaterais.

➤ *Descrição:*

A atividade de ensino inicia-se levando os estudantes ao jardim presente na área entre o bloco B da FEUSP e a Escola de Aplicação. O coordenador da atividade diz que há uma pista naquela região e aguarda até que os estudantes a encontrem. Ao todo, são quatro pistas:

- ✓ 180° sul;
- ✓ 135° sudeste;
- ✓ 90° leste;
- ✓ 340° noroeste.

A utilização, pelo mediador, da bússola na definição da localização das pistas é importante para que durante o desenvolvimento as coordenadas fornecidas estejam corretas.

Dada a primeira pista, as demais, junto com a bússola, auxiliarão os estudantes a encontrar o tesouro.

“Onde moro?”

➤ *Objetivo:* Utilizar um mapa e as coordenadas de uma malha quadriculada para se localizar.

➤ *Situação desencadeadora de aprendizagem:* Localização da residência/ local em um guia de ruas.

➤ *Ações:* Localizar sua residência/ local no guia de ruas.

²³ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=3sxj4exNEbw>>. Acesso em: abr. 2016.

➤ *Nexos conceituais*: mapas, croquis e esquemas; malha quadriculada.

➤ *Descrição*:

Distribuir folhas aos estudantes e pedir para que escrevam o endereço de suas residências. Após escreverem, eles devem localizá-lo no guia de ruas da cidade de São Paulo. Alguns estudantes podem não saber seu endereço, logo se faz necessário a seleção prévia de alguns endereços (de regiões diferentes da cidade), para que esses possam participar da atividade de ensino. Ao final, deve constar na folha: nome do estudante, seu endereço e localização no guia (página e coordenada).

A identificação da residência no guia retoma o conceito de malha quadriculada, abordado em momentos anteriores.

“Itinerário angular”

➤ *Objetivo*: Utilizar um instrumento na medição de ângulos, o transferidor.

➤ *Problema desencadeador*: Descrever o trajeto realizado por uma embarcação.

➤ *Ações*: Medir a rotação realizada pela embarcação e também seu deslocamento.

➤ *Nexos conceituais*: lateralidade; descrição de trajetos; mapas, croquis e esquemas; inclinação; utilização de instrumentos de medida.

➤ *Descrição*:

A partir da apresentação de uma suposta rota de uma embarcação, pede-se aos estudantes que meçam os ângulos presentes na mudança de direção efetuada no decorrer do caminho (consequência do movimento de rotação do barco). Logo, os estudantes descrevem o trajeto percorrido pela embarcação, como mostra a situação-problema: “Uma lancha realiza passeios com turistas pelas águas do mar de Angra dos Reis. A lancha para em determinados pontos para os turistas mergulharem. A seguir, encontra-se um trajeto realizado por essa lancha, descreva-o”.

Figura 46 – Trajeto da lancha

Os ângulos presentes são de 30° , 45° , 60° , 90° , 180° e 360° , visto que são os mais utilizados nesse período da vida escolar. Cada um centímetro percorrido pelo barco equivale a um quilômetro. Essa atividade de ensino busca integrar a utilização do transferidor e os conceitos de localização como itinerários e representações em croquis ou esquemas.

4.4.3 A organização das atividades de ensino

A intencionalidade das nossas ações ao organizar o ensino de ângulo baseia-se no movimento lógico-histórico do conceito e objetiva a formação do pensamento teórico desse conceito, a partir de atividades de ensino que geram a necessidade de localização. Dessa maneira optamos por iniciar com um módulo dedicado à localização e, posteriormente, um módulo que contemplasse o ângulo.

A descrição das atividades de ensino, suas situações desencadeadoras de aprendizagem, as ações desenvolvidas nestas e a organização delas foram discutidas anteriormente. Adiante mostraremos a relação de cada atividade de ensino com os nexos conceituais internos ao conceito de ângulo e de localização, eles são apresentados por módulo a fim de que haja melhor compreensão.

Esquema 3 – Nexos conceituais das atividades de ensino do Módulo I

Esquema 4 - Nexos conceituais das atividades de ensino do Módulo II

5 ANÁLISE E SÍNTESE DOS DADOS

A análise sobre os indícios de apropriação dos conceitos será feita a partir da apresentação do desenvolvimento das atividades relatadas anteriormente. Vigotski (1991) propõe a análise do processo, em que esta apresente as relações dinâmicas ou causais de maneira explicativa. Assim, as descrições do movimento das ações de ensino potencialmente poderão evidenciar se estas resultarão ou não em apropriação dos conceitos.

Durante a análise dos processos, a verbalização dos estudantes durante a resolução das situações propostas é nuclear ao buscar os indícios de apropriação, pois segundo Vigotski (1991, p. 21): “A fala da criança é tão importante quanto a ação para atingir um objetivo. As crianças não ficam simplesmente falando o que elas estão fazendo; sua fala e ação fazem parte de uma mesma função psicológica complexa, dirigida para a solução do problema em questão”.

Adotaremos como metodologia de análise aquela que vem sendo realizada por pesquisadores que buscam apanhar o desenvolvimento dos conceitos no seu movimento: na atividade. Entre estas pesquisas podemos citar CEDRO (2004), NASCIMENTO (2010), PANOSSIAN (2014). Estes autores têm apresentado o movimento de desenvolvimento das atividades em cenas e episódios tal como o define Moura (1992, 2000).

5.1 Os episódios de aprendizagem

Os episódios, segundo o autor, são “aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem do novo conceito” (MOURA, 1992, p.77), em nossa pesquisa as situações de conflito são consequências do processo coletivo de resolução da situação desencadeadora proposta, que foi intencionalmente desenvolvida a partir do movimento lógico-histórico do conceito. Assim, os episódios explicitam o fenômeno em movimento, visto que eles “são reveladores sobre a natureza e qualidade das ações” (MOURA, 2000, p.60)

Podemos dizer que, como em um seriado, o episódio possui um tema geral que norteia toda sua estrutura. Esse tema é um aspecto relevante à investigação e possui relação direta

com os demais episódios que formam a unidade de análise. Cada episódio é composto por cenas, estas são momentos em que se manifestam “frases escritas ou faladas, gestos e ações (...) que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora”, segundo Moura (2004, p. 276). O autor ainda ressalta que ações que formam episódio não precisam estar dispostas linearmente. Assim, entendemos que as cenas não precisam estar organizadas obedecendo o local de ocorrência, a ordem cronológica dos acontecimentos ou a ordem de complexidade crescente dos indícios de apropriação de um referido conceito. Portanto, fica a critério do pesquisador melhor organizá-las a fim de evidenciar os fenômenos desejados.

Ao recorrer aos conceitos cinematográficos, observamos que a cena é definida por “uma sequência de vários planos, filmados em tempo real e sem elipses temporais” (VANOYE; FREY; GOLIOT-LÉTÉ, 2011, p. 134). Dessa maneira, entendemos que “um conjunto de planos que acontece no mesmo lugar e no mesmo momento” (PRIMEIRO FILME, [2012?]). Assim, momentos ou lugares diferentes ocasionam cenas diferentes, adaptando isso para a metodologia de pesquisa, situações desencadeadoras diferentes ou ações desempenhadas em momentos ou por coletivos distintos acarretarão em cenas distintas. Entretanto, ressaltamos que uma mesma atividade de ensino, situação desencadeadora ou ação pode gerar cenas pertencentes a episódios distintos.

Para a análise dos dados, em nosso caso são registros em vídeo das atividades realizadas no clube de matemática, ao compor uma cena não se considera a totalidade do desenvolvimento de uma ação, ou seja, são feitos recortes destas, levando em consideração apenas o isolado em que se manifestam os elementos para a análise. Com isso, e baseando-nos nos conceitos cinematográficos denominaremos, estes cortes, de planos. Segundo Primeiro Filme ([2012?]), plano é “tudo que é mostrado para o espectador de forma contínua, isto é, como uma sucessão de imagens em movimento sem interrupção de qualquer tipo”.

Ao trazer tal conceito à metodologia de análise, definiremos plano como parte de uma cena em que há apresentação integral ao leitor de um gesto, uma ação, uma representação escrita (desenho, esquema, frases, etc.) ou uma fala de maneira contínua. Entretanto, considerando o objeto de análise, no caso de transcrições de diálogos, as falas fora de contexto são exceções e passíveis de exclusão (organizacionais, diálogo com um sujeito externo que interrompeu a ação, entre outras).

Em síntese, temos:

- Plano: sucessão de falas, ações, narrações sem interrupções, excluindo falas desconexas.
- Cena: formada por um conjunto de planos, ocorridos no mesmo lugar e no mesmo momento, apresentados de maneira cronológica.
- Episódio: formado por um conjunto cenas, organizadas a critério do pesquisador a fim de evidenciar uma ação formadora.

Os sujeitos envolvidos na pesquisa, são os quatro estagiários e os estudantes. Para preservar as identidades substituímos seus nomes por códigos referentes a função desempenhado no Clube de Matemática. Assim, baseado na codificação realizada por Gladcheff (2015), denominaremos os estagiários pela junção do prefixo *Estag* (em que o *Estag1* é o pesquisador) e os estudantes pelo prefixo *A*, ambos serão seguidos de uma numeração (1, 2, 3...) a fim de diferenciá-los. Essa codificação é fixa durante toda a pesquisa, logo o *A1* na primeira cena é o mesmo da *A1* que se apresenta na última, por exemplo.

As falas analisadas estão numeradas a fim de facilitar a análise e a leitura, ao nos referirmos a determinados momentos e intervenções. A numeração é codificada da seguinte maneira: o primeiro número indica o episódio, o segundo a cena e o terceiro a ordem da fala dentro da cena. Logo a fala 1.2.24 é referente ao episódio 1, cena 2, sendo que é 24ª fala que compõe a cena (GLADCHEFF, 2015).

5.1.1 Unidade de análise: significação do conceito de ângulo

5.1.1.1 Episódio 1 – Identificação do ângulo como uma grandeza a partir da rotação, em atividades de localização

Conforme definido no capítulo 3, o conceito de ângulo é uma grandeza que pode ser quantificada (CARAÇA, 1951) e, neste caso, o definimos como quantificação da inclinação. Identificamos duas ações mentais principais presentes nesse conceito: a inclinação propriamente dita, apresentada de maneira estática em rampas e figuras geométricas, por exemplo; e a rotação, de cunho dinâmico, observada ao mover um retrovisor e um volante. Entendemos que a ação mental de rotação se configura como a variação de quantidade de

inclinação, ou seja, o movimento da inclinação, observada entre a direção inicial e a final, em que o ponto de rotação é o vértice do ângulo. Assim, os ângulos superiores a 360° apenas possuem significado na rotação, embora ainda possuam correspondência com ângulos pertencentes ao intervalo de 0° a 360° . Dessa maneira, durante o processo lógico-histórico do conceito de ângulo, o movimento de rotação materializou a existência de arcos superiores a 360° .

A articulação entre a compreensão do que é grandeza baseada nas ideias de Caraça (1951), nos estudos e ações desempenhados dentro do projeto Observatório da Educação (“Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: princípios e práticas da organização do ensino”) e nos estudos que fundamentam esta pesquisa permitiu a conclusão de que, na organização do ensino de grandezas e medidas, o problema desencadeador deve ocupar-se de que o processo de desenvolvimento da atividade propicie ao estudante, como uma das primeiras ações, identificar qual grandeza que será medida (PIOVEZAN; GLADCHEFF; FRAGA, 2014; GLADCHEFF, 2015), ou seja, identificar a qualidade em questão. Por exemplo, o estudante, para que se aproprie do conceito de área (quantificação da superfície), precisa, inicialmente, apropriar-se do significado de superfície.

No caso do ângulo, sua apropriação como uma grandeza (quantidade de inclinação), seja em seu aspecto estático ou dinâmico, evita uma confusão com o comprimento.

O movimento lógico-histórico estudado, mostra que o homem elabora o conceito de ângulo a partir da necessidade de determinar a localização do sol, a partir de seu movimento aparente (de rotação) na eclíptica terrestre (HOGBEN, 1956). Dessa maneira, baseado nos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, as ações introdutórias ao conceito de ângulo vão ao encontro desse movimento lógico-histórico, pois se baseiam no movimento rotação e em um contexto de localização.

Cena 1.1 – Identificação do ângulo como uma grandeza no *Penalti às Cegas*

No desenvolvimento do *Pênalti às Cegas*, inicialmente, o coletivo é organizado de modo que os estudantes formem um semicírculo em que a bola está ao centro. Eles logo se interessam por ver a bola, alguns perguntam se iremos jogar futebol. O *Estagi* esclarece como se desenvolverá a atividade de ensino.

Nesse primeiro momento, o coletivo dá comandos à *Estag2*, que está vendada e com o pé em cima da bola (na marca do pênalti), para que ela gire seu corpo e fique na direção das supostas traves (representadas por cadeira, e assim tentar chutar e fazer o gol.

Plano I – A subjetividade do comando

N.	Autor	Fala
1.1.1	Estag1	Prestem atenção no objetivo. Qual o objetivo Estag2?
1.1.2	Estag2	Fazer gol.
1.1.3	Estag1	Tá, onde está o gol?
1.1.4	A1	Do outro lado
1.1.5	Estag2	Cadê? Quem já localizou o gol?
1.1.6	A1/A2	Eu
1.1.7	A1	Agora vira! Para o outro lado
1.1.8	Estag1	Vira para o outro lado...
1.1.9	Estag2	Vira para o outro lado. Mas para qual lado?
1.1.10	A1	Ué para frente. Vira para atrás, vira para atrás! (A1 tenta virar a Estag3 com as mãos)
1.1.11	Estag1	Calma, não encosta nela. Vamos ver.
1.1.12	A3	Vire para atrás.
1.1.13	A1	Vira para atrás!
1.1.14	Estag2	Vira para atrás?
1.1.15	A1	Só não vai soltar a bola.
1.1.16	Estag1	Ela virou para atrás.
1.1.17	Estag2	Está para atrás já!
1.1.18	A1	Agora chuta
1.1.19	A4	Não...
1.1.20	A3	Não! Vira para frente!
1.1.21	Estag1	Vai dar certo ou não vai?
1.1.22	A2	Vira um pouquinho mais.
1.1.23	Estag2	Vai acertar o gol daí?
1.1.24	A3	Vira mais.
1.1.25	A3	Vire 45° graus.
1.1.26	A1	Chuta bem forte.
1.1.27	A1	Fica reto.
1.1.28	Estag2	Tá, falta mais alguma coisa aí.
1.1.29	A1	Vira um pouquinho mais

1.1.30	A1	Para direita, não. Para esquerda.
1.1.31	Estag1	Pera aí. Tem que ser um comando só. Senão confunde a menina.
1.1.32	A1/A2	Vira para esquerda!
1.1.33	A1	Vira um pouquinho só. Mais um pouquinho para esquerda. Bem pouquinho.
1.1.34	A2	Isso.
1.1.35	A1	Agora chuta.
1.1.36	Estag1	Chuta.

Os estudantes dão comandos para que a *Estag3* vire para trás. Ela o faz, porém intencionalmente não 180°, direção em que o gol estava colocado. Dessa forma eles dão mais comandos gerais como “Vire para trás”, “Vira para esquerda!” (falas 1.1.12, 1.1.13, 1.1.32), ou comandos subjetivos que não quantificam a qualidade em questão: “vira um pouquinho mais”, “Vira mais” (falas 1.1.22, 1.1.24, 1.1.29). O conceito de lateralidade aparece na intervenção dos estudantes, fato esperado em vista das atividades de ensino desenvolvidas no primeiro módulo.

A história mostra que o homem utilizou, inicialmente, unidades de medidas baseadas em seu corpo, as chamadas medidas antropométricas (BOYER, 2010; EVES, 2004; IFRAH, 2005). Assim como na história humana era subjetivo os pés, a palma, o cúbito, entre outros, se configurarem como unidades de medidas, a utilização dos comandos citados acima também o são, visto que o “Vira um pouquinho mais” dito pelo A2 na fala 1.1.22 pode ser diferente do entendido pela *Estag3* ao executar o comando e, também, ser diferente do “Vira um pouquinho mais” dito pelo A1 na fala 1.1.29. Ao final dos comandos a posição do corpo da estagiária estava correta em relação às traves, em frente a estas, porém seu chute foi errado.

Esse caráter subjetivo do comando abordaremos no próximo plano, pois este momento foi estruturado para que o coletivo se familiarizasse com o desenvolvimento e objetivo da atividade de ensino *Pênalti às Cegas*; e utilizassem os conceitos de lateralidade, conforme ocorreu.

Ao dar prosseguimento, é lançado o mesmo problema, porém com novas condições objetivas.

Plano II – O ângulo com quantificador da rotação

N.	Autor	Fala
1.1.37	Estag1	Agora o desafio é: com um comando só, um comando. Porque a gente deu vários comandos, certo? Até ela ir. Foi virando, virando, virando, mas... Vamos

- ver agora. Eu quero um comando só, ela vai virar para o Lucas e eu quero que ela acerte o gol. E agora?
- 1.1.38 A5 Chute para trás. Chuta para trás. É só chutar para trás, acabou. Pá!
- 1.1.39 Estag1 Seguinte, e aí? Com um comando só? Com um comando só...
- 1.1.40 A5 Chute para trás.
- 1.1.41 Estag1 Ela tem que estar de frente, não pode.
- 1.1.42 A5 Vira e chuta.
- 1.1.43 A1 Vira para trás.
- 1.1.44 Estag1 Virar quanto?
- 1.1.45 Estag1 Virar? Virar pode ser direita, esquerda. Oh...
- 1.1.46 Estag1 Oh... Virar, ela pode virar ser para direita ou para esquerda. Mas ela pode virar... E aí?
- 1.1.47 A3 Vire 180°.
- 1.1.48 Estag2 Opa! Ali foi bom!
- 1.1.49 Estag1 Quanto ela falou?
- 1.1.50 Estag2 180°.
- 1.1.51 Estag1 180°? Então vire 180° aí Estag3. (A estagiária vira)
- 1.1.52 Estag1 O que é 180°?
- 1.1.53 A3 Meio círculo?
- 1.1.54 Estag1 Oi?
- 1.1.55 A3 Meio círculo.
- 1.1.56 Estag1 Meio círculo? Então, chuta agora *Estag3*
- 1.1.57 Estag1 O erro foi o que? Do chute. Mas ela estava virada certa. Certo? Tranquilo?

Nesse plano, são levantadas diversas hipóteses. O A5 ao sugerir que a *Estag3* chute para atrás (falas 1.1.38 e 1.1.40), indica que basta chutar em direção às costas da estagiária (ou dar de calcanhar, por exemplo) para solucionar o problema, mas isso só é compreensível se atrelado à fala 1.1.41 do *Estag1*, em que indica a necessidade de estar de frente para as traves.

O objetivo de restringir a apenas um comando, visa quantificar o ângulo a partir das partes da circunferência (uma volta, meia volta, um quarto de volta), em que temos uma volta como unidade de medida e suas subdivisões como quantificação. Entretanto, antes da volta como unidade de medida, na fala 1.1.47, a A3 apresenta o grau como unidade de medida para o movimento de rotação. A mesma estudante, quando questionada pelo *Estag1* sobre o que seria 180° (falas 1.1.52 e 1.1.54), o relaciona com meia volta (falas 1.1.53 e 1.1.55).

A articulação dos planos I e II mostra que a A3 se depara com nova condição de dar apenas um comando, que seja exato e de compreensão comum entre os sujeitos do coletivo. Dessa maneira, a exatidão é resolvida pela quantificação e a compreensão mútua pelo grau como unidade de medida, atribuindo ao comando uma nova qualidade. Neste movimento há a identificação da grandeza a ser medida: o ângulo como consequência de um movimento de rotação; e a sua quantificação com duas unidades de medida a volta e o grau, relacionando-as.

Vigotski (1991, p. 46) afirma que “o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola”, esta vai ao encontro da discussão realizada no capítulo 2, quando afirmamos que o conceito de ângulo é algo presente na prática social humana. Ressalta-se que durante as atividades de ensino desenvolvidas até o momento, a palavra “grau” como unidade de ângulo não tinha sido abordada.

Plano III – A equivalência entre 180° e meia volta

n.	Autor	Fala
1.1.58	Estag1	Aí eu ouvi alguém falar assim: “Vire 180°”. O que que é 180°?
1.1.59	A1	É meio círculo...
1.1.60	Estag1	Você tinha falado aí para mim. O que é 180°?
1.1.61	A3	Meio círculo?
1.1.62	Estag1	Meio círculo. O que... Que correspondeu ao o que dela? Qual foi o movimento que a Estag3 fez?
1.1.63	A1	Virou 180°.
1.1.64	Estag1	Isso ela virou 180°
1.1.65	Estag2	Então, mas aí oh... Vocês falaram que ela fez 180° graus, que ela virou 180°. O que ela fez? Qual foi o movimento do corpo que ela fez?
1.1.66	A3	Virou, virou. (nesse momento o A3 gira sentado em torno de seu eixo)
1.1.67	Estag1	Isso, virou, virou. Isso é.. virou e aí... Tem um movimento que a gente fala também. Tem um outro nome para esse movimento de girar.
1.1.68	Estag1	Isso que você fez, você fez o que? (se referindo ao giro do A1)
1.1.69	A1	Girei.
1.1.70	Estag1	Girou...! Exatamente. Então ela girou o que?
1.1.71	A2/A3	180°
1.1.72	Estag1	180°, que é meio círculo... que é uma volta inteira?
1.1.73	A2/A3	Não... é meia volta.

O plano III apresenta a discussão coletiva, intencionalmente realizada, para evidenciar, ao coletivo, o grau como quantificador da rotação e a equivalência entre meia volta e 180° , sistematizando o que foi discutido no plano II.

Então, são colocadas mais três cadeiras, representando traves, uma 45° à direita, outra 90° à direita e 90° à esquerda. Proposta a nova configuração, ao coletivo, para que também seja resolvida com apenas um comando. É pedido que se acerte a trave localizada, exatamente à esquerda da estagiária, ou seja, a estagiária precisa virar 90° à esquerda. E assim, pretende-se explorar os conceitos de um quarto de volta (90°).

Dessa maneira, volta-se a configuração inicial do problema, em que fosse explicitado melhor, pois, durante a aplicação pareceu que houve uma confusão de qual trave deveria acertar.

Os estudantes deram diversas sugestões como, alguns sugeriram, aleatoriamente, valores em graus, entretanto, buscou-se nesse momento trabalhar como as partes do círculo. Questionou-se aos alunos quanto vale uma e meia volta, em graus, eles concluíram que são, respectivamente, 360° e 180° . No próximo plano, a tentativa foi de dar um comando a Estag3 de tal forma que ela vire um quarto de volta (90°) para direita, para tentar acertar o gol. Os alunos tentam uma volta, meia volta, verificamos os comandos, não houve validação, questiona-se ao coletivo qual será o comando.

Plano IV – Sistematização de um quarto de volta

n.	Autor	Fala
1.1.74	Estag2	Não é uma volta, não é meia volta, o que que pode ser?
1.1.75	A3	Ai esqueci.
1.1.76	A1	Vira para direita.
1.1.77	Estag2	Se você dividir a metade da volta, quanto que dá?
1.1.78	A3	Um círculo em quatro.
1.1.79	Estag1	Um círculo em quanto?
1.1.80	A3	Em quatro.
1.1.81	Estag1	Ah... Então seria o que? Quando eu divido um círculo por quatro fica o que?
1.1.82	A3	Um quarto.
1.1.83	Estag1	Um quarto, então ela vai dar... um quarto de que? Um quarto de um quarto? um quarto de dormir?
1.1.84	A6	Um quarto de...
1.1.85	Estag1	Do que?
1.1.86	A6	De fração

- 1.1.87 Estag1 Fração do que? O que a gente dividiu?
 1.1.88 A2 Um quarto de volta.
 1.1.89 Estag1 Um quarto de volta. Boa A2! Mas aí A2 um quarto de volta para onde?
 1.1.90 A1 Para direita.
 1.1.91 Estag1 Para direita? Então dá um quarto de volta para direita Estag3, por gentileza.
 1.1.92 A1 Chuta, chuta! Chuta bem forte. (Estag3 chuta e erra).

Quando os estudantes tentam dar o comando em graus, sem relacioná-lo com partes da circunferência, são levantadas hipóteses aleatórias que não satisfazem o problema. A partir do momento em que há a intervenção dos estagiários e de outros parceiros, retomando a relação entre graus e partes de uma circunferência (através da volta), os estudantes solucionam o problema. Essa relação é importante pois retorna à ação mental que o ângulo representa naquele instante: a rotação.

Dessa forma, percebe-se a importância de atividades compartilhadas no processo de aprendizagem de modo a impactar a *zona de desenvolvimento proximal* dos sujeitos da atividade (VIGOTSKI, 1991).

Para encerrar esta primeira parte do encontro há uma sistematização, com o coletivo, sobre uma volta e meia volta, relacionando tais movimento com 360° e 180° , respectivamente. E a partir disso, mediar o coletivo a fim de que concluíssem que um quarto de volta é 90° .

Assim, retoma-se as equivalências 360° uma volta, e 180° meia volta.

Plano V – Equivalência entre um quarto de volta e 90°

n.	Autor	Fala
1.1.93	Estag1	Se eu der uma volta, quantos [ângulos] que a gente estava vendo? (o Estag1 gira 360° em torno da bola que está na marca do pênalti, repetindo os movimentos da atividade).
1.1.94	Coletivo	360
1.1.95	A1	360. Certo. Na hora que a gente falou assim: Estag3, Estag3 dá meia volta. A gente fez como? (Estag1 dá meia volta)
1.1.96	Coletivo	180.
1.1.97	Estag1	180. Só que no último movimento dela, ela não deu 180. Ela fez isso aqui óh... um quarto. (o Estag1 vira um quarto de volta)
1.1.98	Estag1	Que equivale a quanto? Esse movimento, eu saindo daqui e vindo para cá?
1.1.99	Estag1	A volta inteira.... Eu só estou pegando um quarto.
1.1.100	A1	340...
1.1.101	Estag1	340? Vamos ver....

- 1.1.102 Estag2 E a metade de 180?
- 1.1.103 A1 240!!!
- 1.1.104 A3 Ai! Me dá um papel....!!!
- 1.1.105 A2 Me dá um papel a gente vai fazendo a conta
- 1.1.106 Estag2 E a metade de 180?
- 1.1.107 A1 24. 24
- 1.1.108 Estag2 E a metade de 180..?
- 1.1.109 A1 Calma aí! Não, calma aí...
- 1.1.110 Estag1 Deixa, deixa depois eles vão chegar
- 1.1.111 A1 Calma aí! Não, calma aí me empresta, me empresta aí um papel (levantou e foi em direção aos estagiários para solicitando um papel).
- 1.1.112 A2 90!
- 1.1.113 Estag1 Ela chegou... ela chegou.
- 1.1.114 Estag2 Ela chegou?
- 1.1.115 Estag1 Quanto que é?
- 1.1.116 A2 90.
- 1.1.114 Estag2 Oh! Na hora que a gente pegou, a gente pegou um quarto de...?! Volta!
- 1.1.115 Estag1 A volta vale quanto? Quanto que é a volta?
- 1.1.116 Est? 360.
- 1.1.117 Estag1 Então um quarto de volta vai ser quanto? 360 dividido por 4 que dá 90.

Observamos uma dificuldade, por parte dos estudantes, em concluir que um quarto de volta equivale a 90° . Exemplo disso é a solicitação de papel e lápis para poder realizar a operação, que poderia ou não ser a divisão por 2. Entretanto, no desenrolar da discussão o coletivo chega ao valor, a partir das intervenções dos *Estag1* e *Estag2*

Se faz necessário considerar que durante a discussão coletiva o *Estag2* questiona: *Qual a metade de 90° ?* (falas 1.1.106 e 1.1.108), isso pode ter influenciado na resposta de A2, ao concluir que um quarto de volta seria 90° . Dessa forma, sua conclusão pode ter sido elaborada a partir da pergunta e, talvez, não da relação entre graus e as subdivisões de uma volta.

O desenrolar da cena reflete a concepção da organização do ensino na teoria histórico-cultural, que entende objeto de aprendizagem deve se configurar como uma necessidade aos estudantes.

[...] é fundamental que, no processo de ensino, o objeto a ser ensinado seja compreendido pelos estudantes como objeto de aprendizagem. Para teoria histórico-cultural, isso só é possível se esse mesmo objeto se construir como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo

tempo objeto e necessidade na atividade de aprendizagem (MOURA et. al., 2010, p. 92).

Cena 1.2 – Necessidade de quantificação do ângulo: a história virtual *Em alto-mar*

A história virtual *Em alto-mar* tem por objetivo gerar a necessidade da quantificação da grandeza ângulo, a partir de um contexto de localização. Assim, os materiais confeccionados para aplicação (barco, mar e ilhas) são apresentados ao coletivo e, em seguida, o *Estag2* lê a história virtual para os estudantes.

Nesse primeiro plano, é solicitado, ao coletivo, que dê apenas um comando para que o Capitão Lobo possa direcionar seu barco e chegar à Ilha dos Macacos.

Plano I – A resolução do problema

n.	Autor	Fala
1.2.1	Estag2	Aqui está o barco do Capitão Lobo
1.2.2	A5	É só ir assim oh... (com a mão ele mostra a direção entre o barco e a ilha)
1.2.3	Estag2	Em alto-mar oh... Pessoal o Simbá tem que dar uma orientação só.
1.2.4	A4	Meio quarto. Porque ele dá meio quarto e vai reto
1.2.5	Estag2	Meio quarto?
1.2.6	A4	É 45°.

Quanto a *A4* utiliza a expressão *meio quarto* (fala 1.2.4) ela quer dizer: metade de um quarto, o que é confirmado por sua própria explicação (Plano II), ao ser indagada pelo *Estag2* (falas 1.2.5 e 1.2.6). A rapidez da conclusão surpreendeu os estagiários, visto que a história virtual tinha acabado de ser apresentada, denominamos tal fato do que Caraça (1951) chama de “inesperado”.

A Ilha dos Macacos havia sido posicionada, intencionalmente, à 45° da posição do barco. Essa posição foi escolhida para que os alunos pudessem chegar mais fácil ao seu valor através das subdivisões da circunferência, mesmo que seja intuitivamente por 2.

Mesmo com a resposta correta, os estagiários solicitaram à estudante que explicasse seu raciocínio ao coletivo.

Plano II – A discussão da resolução

n.	Autor	Fala
1.2.7	Estag1	Mas por que você achou que é 45 que ele tem que virar?
1.2.8	A4	Porque ele tem que virar um pouquinho, para depois ele seguir reto e chegar naquele negócio ali dos macacos.
1.2.9	Estag1	Se ele virar 90 o que acontece?
1.2.10	A3	Se ele virar noventa ele vai virar para lá (indicando o mar aberto)
1.2.11	Estag1	Para lá... E lá é o que?
1.2.12	A3	O mar aberto.
1.2.13	Estag1	Mar aberto, ele vai se perder.
1.2.14	A4	Então!
1.2.15	Estag1	Você pensou no que? Como que você chegou no 45? Me explica
1.2.16	A4	Eu e a Yasmin a gente era meio quarto. Aí a gente fez 45.
1.2.17	Estag1	Tá! Meio quarto. E você viu que se fosse um quarto ele ia para o mar aberto.
1.2.18	A4	Sim.
1.2.19	Estag1	Aí você decidiu. Por que meio quarto? Explica para mim.
1.2.20	A4	Para ele não virar muito e ir para o mar aberto.
1.2.21	Estag2	Mas como que você chegou nessa conta do meio quarto?
1.2.22	A4	Mas <i>tá</i> certo?
1.2.23	Estag2	<i>Tá</i> .
1.2.24	A4	Oxi! Eu pensei que se ele virasse ali ele ia <i>coisar</i> ... aí eu pensei meio quarto.
1.2.25	Estag2	Porque 90° é muito.
1.2.26	A4	É.
1.2.27	A1	Ela chutou.
1.2.28	Estag2	Aí como você fez para pensar? Para pensar nisso?
1.2.29	A4	Eu não chutei.
1.2.30	A4	Eu pensei em meio quarto igual foi eu e a A3 (apontando para posição onde ela tinha realizado o pênalti às cegas com a colega).

O Plano II apresenta o raciocínio desenvolvido pelas A4 e A3, nas falas ambas identificam que uma rotação de 90° graus (um quarto de volta) direcionaria o barco rumo ao mar aberto (falas 1.2.10, 1.2.12, 1.2.14, 1.2.20), logo deveriam realizar uma rotação menor, no caso, 45°.

Porém, a A4 ao tentar explicar como chegou à 45° fez referência à uma ação realizada anteriormente com a colega A3, em que utilizaram 45°. Ao associar as falas 1.2.16 e 1.2.30, conclui-se que a estudante A4 se refere à segunda parte da atividade de ensino *Pênalti às*

cegas, realizadas em subgrupos. Assim, para melhor compreender o processo, a próxima cena se destinará ao momento indicado pela estudante, ocorrido antes da história virtual.

Cena 1.3 – Pênalti às cegas: subgrupos.

O coletivo foi dividido em dois grupos, cada um possuía dois estagiários como coordenadores. A divisão dos grupos foi realizada de maneira que dois estudantes que aparentavam estar alheios ao desenvolvimento da atividade de ensino ficassem em um mesmo grupo, e assim, o *A1(pesquisador)* optou por ficar no grupo o qual eles não pertenciam.

A estudante *A7* é vendada, as *A3* e *A4* deverão dar o comando à colega. Inicialmente, *A3* e *A4* certificam-se em qual trave a colega vendada deverá chutar.

Plano I – A retomada da equivalência entre meia-volta e 180°

- 1.3.1 Estag1 Ela tem que chutar ali (apontando para cadeira que está atrás de Carol).
- 1.3.2 A3 Vire 180°
- 1.3.3 A4 Vire meia-volta.

Neste plano, consideremos um indício de apropriação da equivalência entre meia volta e 180°, visto que as estudantes solucionaram o problema. Este fato mostra também a importância das ligações, intencionais, entre ações que pertencem a mesma atividade de ensino, ou a diferentes.

De acordo com a ação proposta, é realizado um rodízio entre os batedores de pênalti. Logo, a *A3* assume esse posto, enquanto os demais estudantes do grupo passarão a orientá-la. A trave em que se deve acertar o chute está 45° à esquerda da *A3*

Plano II – Novo problema, nova angulação: 45°

- 1.3.4 Estag1 E agora?
- 1.3.5 A4 É um quarto?!
- 1.3.6 Estag4 Pra?
- 1.3.7 A4 Direita...
- 1.3.8 A4 Pra...‘Péra’ [espera]. Aqui. Pode ser. (simultaneamente, *A4* se levanta e estende o braço esquerdo e diz)
- 1.3.9 Estag1 Tá. Então vê se é um quarto. (A *Estag4* gira a *A3* 90° em torno da bola, para ficar em frente as supostas traves)
- 1.3.10 Estag4 Ela virou um quarto.

- 1.3.11 Estag4 Ela estava para lá. Ela virou um quarto para esquerda. E agora? (apontando para direção inicial de A3)
- 1.3.12 A7 Metade de um quarto... Certo?
- 1.3.13 Estag1 Como?
- 1.3.14 A7 Metade de um quarto.
- 1.3.15 Estag1 Mas quanto é a metade de um quarto?
- 1.3.16 A4 Quanto é um quarto?
- 1.3.17 Estag4 Um quarto é 90°
- 1.3.18 A4 90°
- 1.3.19 A3 90 dividido por 2.
- 1.3.20 A4 Noventa dividido por quanto?
- 1.3.21 Estag1 Vocês que tem que saber
- 1.3.22 A4 Um quarto, dividido por 2
- 1.3.23 Estag1 Quanto dá?
- 1.3.24 A3 É fácil!!!
- 1.3.25 Estag1 Quanto dá?
- 1.3.26 A3 Posso falar?
- 1.3.27 Estag1 Pode.
- 1.3.28 A3 45
- 1.3.29 Estag1 Então vira você
- 1.3.30 A4 Mas agora tem que desvirar né? (ou seja, é preciso voltar à configuração inicial)
- 1.3.31 Estag1 Ta, mas para onde?
- 1.3.32 Estag4 45° para onde?

O movimento de levantamento de hipóteses e validação das mesmas é observado durante o plano II. Na fala 1.3.5 a A4 sugere que a colega gire 90° (um quarto de volta), após feita a verificação é constatada a sua invalidade. Ao verificar que um quarto de volta não solucionava o problema, a A7 sugere metade de um quarto (falas 1.3.12 e 1.3.14), ou seja, um oitavo de volta, o que corresponderia a 45° . Assim, o erro é parte importante do processo de apropriação do conceito, pois a partir dele é possível reavaliar as ações para chegar à solução.

Ao analisar o plano acima, há indícios que a A7 conseguiu relacionar um oitavo de volta (em sua fala “*meio quarto*”) como uma medida angular, porém não o relacionou com 45° , visto que durante a discussão e intervenção dos estagiários a A3 (que estava vendada), pede permissão para explicitar tal equivalência (falas 1.3.26 e 1.3.28).

Cena 1.4 – Jogo Virtual Kung Fu Angles

No segundo encontro do módulo foi apresentado aos estudantes diversos jogos, que envolviam o conceito de ângulo em contextos distintos. Todo o desenvolvimento aconteceu em uma das salas de informática da Faculdade de Educação. Antes dos estudantes iniciarem cada jogo era exposto ao coletivo as regras, objetivos e características. Em caso de dúvida os estagiários se dirigiam ao computador de cada estudante para prestar os devidos esclarecimentos.

Dentre os jogos estava o *Kung Fu Angles*, em que um lutador de kung fu, posicionado ao centro de uma circunferência graduada de 10° em 10° , deveria acertar seu adversário. Para tal, era necessário indicar a rotação necessária para que o lutador ficasse em frente ao seu adversário.

No Plano I, a seguir, o *AI* deve acertar seu adversário posicionado à 250° no sentido horário, ou a -110° (sentido anti-horário) – figura 47.

Figura 47 – Jogo Kung Fu Angles

Plano I – Nova qualidade a partir da ação desenvolvida.

- 1.4.1 Estag1 E agora?
- 1.4.2 A1 Aqui, àquela hora deu 120 né?
- 1.4.3 Estag1 Não sei
- 1.4.4 A1 Àquela hora.
- 1.4.5 Estag1 Não lembro.
- 1.4.6 A1 Àquela hora alí!
- 1.4.7 Estag1 Deu 220.
- 1.4.8 A1 220, 240, 250.
- 1.4.9 A1 E!!! Passei.

Na situação anterior, apresentada pelo jogo, o *AI* golpeou um adversário que estava à 220° em relação ao seu lutador. Como observado, no decorrer do Plano I, ao me questionar sobre a rotação do problema anterior, o *AI* quer utilizá-la como auxílio em sua ação de resolver a atual situação. Isso é confirmado, quando o *AI* completa a rotação partindo da rotação desempenhada no problema anterior, esta informada pelo *Estag1*.

Essa situação dá indícios de um desenvolvimento qualitativo na ação do *AI*. Ao tomar como referência fixa o 0° e a partir de outras situações vivenciadas ele concluiu que não é preciso contar desde o início (0°), basta completar os graus a partir de uma posição em que já se tem conhecimento (fala 1.4.8).

O próximo plano mostra o raciocínio de resolução do *AI* na resolução desse problema desencadeador contido no jogo.

Plano II – O movimento de resolução do problema a partir da graduação da circunferência

- 1.4.10 Estag1 Como que você fez aquele? Quanto que deu?
- 1.4.11 A1 290
- 1.4.12 Estag1 Deu quanto?
- 1.4.13 A1 290.
- 1.4.14 Estag1 Como que você fez?
- 1.4.15 A1 Eu contei (ao falar isso movimentou o lápis sobre a circunferência no sentido horário – figura 49)

Figura 48 – Adversário localizado a 290°

Figura 49 – Cálculo do ângulo

A figura 48 mostra o problema abordado pelo Plano II: golpear o adversário à 290° graus ou -70° , em sentidos horário e anti-horário, respectivamente.

Embora os registros de vídeo não contivessem o desenvolvimento da resolução, quando retornou ao local, o *Estag1* solicitou ao *AI* que apresentasse como chegou à conclusão de 290° (fala 1.4.15).

Plano III – Mudança de referência

- 1.4.16 Estag1 Agora vê quanto tem que ser.
- 1.4.17 Estag1 Quanto você vai colocar? (A1 digita 230)
- 1.4.18 Estag1 Oh, oh... Presta atenção. Você vai colocar o que? 230 por que? Me explica porque você vai colocar 230.
- 1.4.19 A1 Porque aqui é 200 (aponta para o local de 200°), 200 mais esses três (cada um vale 10°).
- 1.4.20 Estag1 Só que era 230, quando nós começávamos virados para lá (indico a antiga referência). Onde é nosso 0 agora? (A1 aponta o novo 0, que agora é a nova referência – figura 50).
- 1.4.21 Estag1 Então para eu chegar nele eu preciso de quanto? (A1 digita 30 e resolve o problema)
- 1.4.23 Estag1 Ah.... E agora para chegar nele. Eu preciso de quanto? (Estag1 se refere a um novo problema em tela)

Até o prezado momento, as atividades de ensino desenvolvidas possuíam referência fixa para o 0°, sejam elas baseadas na rotação ou na inclinação. O nível 2 do jogo dá dinamicidade ao 0°, visto que ele passa a ser a angulação inserida anteriormente pelo jogador.

O Plano III mostra essa troca de referência, importante principalmente para ação mental de rotação. O primeiro adversário estava à 200° da 0° inicial, quando A1 o acerta o lutador fica virado de frente para o local onde houve o golpe: 200°, e esta angulação passa a ser a nova referência (0°). Porém, o A1 propôs uma rotação de 230° (fala 1.4.20) para acertar o novo adversário – baseou-se na referência inicial – até que o *Estag1* entrevistou (falas 1.4.21 e 1.4.22) e atentou para a troca de referência ocorrida, assim o estudante resolveu o problema.

Figura 50 – Cálculo a partir da nova referência

O A1 dá indícios de apropriação da nova referência, pois, logo após ele resolve o problema seguinte (fala 1.4.23), em que é preciso fazer uma rotação de 160° no sentido horário.

Uma intervenção similar, à realizada com A1, ocorreu com A7. Assim, esta conseguiu resolver os dois problemas seguintes, em que era preciso acertar o adversário localizados a 110° e a 170°, a partir da referência apresentada no jogo.

5.1.1.2 Episódio 2 – O instrumento no processo de medição do ângulo.

Nesse episódio discutiremos a participação dos instrumentos no processo de significação do conceito de ângulo. Como tratado no capítulo 2, o desenvolvimento do próprio conceito e das técnicas de localização ocorreu graças a elaboração de diversos instrumentos, desde os mais simples, como a groma egípcia, até os mais precisos, como o teodolito e o sextante.

Cena 2.1 – *Um instrumento de medida de ângulos: o lonagu*

Logo após apresentar, ao coletivo, o problema desencadeador da história virtual *Em alto-mar*, a A4 o solucionou. Ao continuar a discussão, era preciso propor um problema desencadeador da necessidade de utilização de instrumentos para medição de ângulos. Isso ocorreu ao trocar o adesivo que indicava uma ilha dominada pelo Pirata Barba Negra e colocá-lo na antiga Ilha dos Macacos, dessa maneira, a ilha que ficou sem o adesivo passa a ser a nova *Ilha dos Macacos*. A nova ilha foi posicionada sem que levasse em consideração sua angulação em relação ao barco, logo nem o pesquisador tinha conhecimento dessa angulação. Dentro dessa organização, o *lonagu* (criado por nós, a partir do transferidor) foi o primeiro instrumento que os estudantes tiveram contato.

A seguir discutimos como se deu o processo de identificação da necessidade e da utilização de um instrumento.

Plano I – Estimativas em base decimal

- 2.1.1 Estag1 E agora como que eu faço para chegar? A ilha dos macacos mudou. E agora?
- 2.1.2 A1 Eu, eu, eu...
- 2.1.3 Estag1 Fala Lucas.
- 2.1.4 A1 35 graus
- 2.1.5 Estag1 Quanto?
- 2.1.6 A1 35
- 2.1.7 Estag1 Mas como você sabe que é 35?
- 2.1.8 A1 Por causa se ali é 45, aí diminui 10, fica 35.
- 2.1.9 Estag1 Mas quem garante para você? Dá para eu dizer que diminui 10 ali?
- 2.1.10 A1 Não sei.

- 2.1.11 Estag1 Onde você está vendo que diminui 10°
 2.1.12 A1 Em nenhum lugar. É por causa que está perto ali, aí eu diminuí dez.

Ao propor uma nova configuração em que nenhum dos sujeitos, inclusive o que construiu o cenário, soubesse a angulação necessária para chegar à nova *Ilha dos macacos*, o A1 sugere 35° (falas 2.1.4 e 2.1.6), pois identificou que a rotação necessária era inferior aos 45° para chegar à primeira ilha. Entretanto, o A1 realiza uma estimativa que, ao nosso ver, representa uma manifestação da influência do sistema decimal de numeração, pois ele diminuiu exatamente 10° em relação à ilha anterior. Ressaltamos isso, não porque o ângulo possui base 60, mas sim devido o estudante ter sugerido um valor exatamente 10° inferior ao primeiro. Por que não 7°? Ou 20°?

Plano II – Estimativas a partir de divisões sucessivas por 2

- 2.1.13 Estag1 Quando a Paula falou que era 45, eu realmente fiz... e tem 45. Eu fiz com 45.
 2.1.14 Estag1 A primeira ilha que a gente trocou, não tem 35. Na verdade...
 2.1.15 A3 Você tem que dividir: 45 dividido por 2
 2.1.16 Estag1 Mas e aí como eu faço? Como a gente faz para a gente saber? Será que só olhando a gente sabe?
 2.1.17 Estag1 Imagina o Simbá lá...
 2.1.18 Estag1 Troca, volta para a outra ilha, a anterior.
 2.1.19 Estag1 O pessoal chutou 55° né? Porque ele tomou como base esse 45°. Um pouco a mais, um pouco a menos. Só que minha pergunta é a seguinte. Pensa...
 2.1.20 Estag1 Deixa a que eu troquei, a segunda *Ilha dos Macacos*.
 2.1.21 Estag1 Minha pergunta é: Como eu faço para chegar nessa ilha? Porque o Simbá tá lá no rádio e ele só pode dar um comando para o capitão Lobo. Porque, o Capitão Lobo, a hora que o barco começar a andar ele perde o sinal. Como ele vai fazer para chegar aí agora? Temos um problema.
 2.1.22 A1 Se vira.
 2.1.23 Estag1 Se vira não. A gente tem que ajudar o Capitão Lobo.
 2.1.24 A4 22,5
 2.1.25 Estag1 Metade de 45
 2.1.26 A3 Isso.
 2.1.27 Estag1 Mas será que é?
 2.1.28 A3 Eu não tenho certeza.
 2.1.29 Estag1 Dá para a gente saber? Agora imagina o Simbá fala: Oh!!! 22,5. Aí o Capitão vai e chega na outra ilha ali. Eita...!!! Do pirata Barba Negra.

Um indício interessante presente neste Plano II, refere-se a hipótese levantada pelas A3 e A4, que sugerem a metade de 45° , ou seja, $22,5^\circ$. Essa conclusão segue uma lógica presente na organização das atividades de ensino.

No *Pênalti às Cegas*, as angulações que se apresentam como resoluções dos problemas desencadeadores são 180° , 90° e 45° , respectivamente. Esse fato, no entendimento das estudantes, reflete que para a obtenção de uma angulação menor, basta dividir por 2. Portanto, se a angulação apresentada na história virtual foi inferior à 45° , divide-se por 2, como nos casos anteriores.

As duas estimativas apresentadas (Plano I e Plano II) não podem ser desconsideradas, mesmo que não representem o valor correto. Elas possuem uma qualidade baseada em vivências anteriores e, apesar de distintas, ambas identificam que o ângulo procurado é menor que 45° .

Plano III – O inesperado

2.1.30	Estag1	Como que a gente faz para saber? Dá para a gente saber só com que a gente tem, só de olhar? Porque o Simbá está lá com o mapinha, dá para Simba saber só olhando para o mapa?
2.1.31	A4	Não...
2.1.32	Estag1	A gente precisa do que?
2.1.33	A1	De uma “reguinha” dessa. (O A1 pega o <i>lonagu</i> que estava próximo ao cenário e entrega o A1)

O Plano III mostra um equívoco na organização, visto que o A3 identifica a presença do instrumento *lonagu* próximo ao cenário, assim o sugere como instrumento de medida. Esse fato inesperado ocorreu devido algum estagiário ter posicionado o instrumento próximo ao local de desenvolvimento da atividade de ensino e limitou a discussão posta ao coletivo.

Devido à grande participação de outros estudantes, os estagiários solicitaram a intervenção de outros estudantes que estavam mais quietos. Assim, pedimos ao A8 que utilizasse o *lonagu* para expressar quanto era a rotação a ser realizada pela embarcação para chegar em determinada ilha.

Plano IV – Medição de ângulos utilizando o instrumento

2.1.34	Estag1	A8, mostra para a gente então.
2.1.35	A8	20° .
2.1.36	Estag1	20° .

- 2.1.37 Estag2 Para onde?
 2.1.38 A8 Para esquerda.

Figura 51 – Medição de ângulos com o *lonagu*

Inicialmente, o A8 indica que a angulação é de 20° , porém utiliza o instrumento alinhando visualmente o ponteiro, o que pode causar erro na medição. Assim, há intervenção da *Estag4* dando um novo instrumento que auxiliará no processo de verificação: ela traz um cabo de vassoura para representar a nova direção da embarcação, isto dá uma outra qualidade à verificação.

Plano V – Validação da medição

- 2.1.34 Estag1 Vê aí se é 20° . Tem que ser continuação da reta (estava me referindo ao ponteiro). E aí pessoal deu?
 2.1.35 Coletivo Não... (Em seguida a *Estag4* traz um cabo de vassoura para auxiliar na verificação.
 2.1.36 Estag1 Quantos graus deu?
 2.1.37 A7 15.

Com o instrumento de medição *lonagu* e o auxílio do cabo de vassoura para verificar se a direção observada é a mesma da ilha os estudantes concluem que a rotação a ser realiza é 15° (fala 2.1.37).

Cena 2.2 – *O transferidor*

Quando utilizado, o transferidor é o instrumento destinado à medição de ângulo no contexto escolar. Assim o desenvolvimento da atividade de ensino *Medindo ângulos* apresenta e propõe a utilização do instrumento a partir de uma ampliação de sua imagem.

Os estudantes foram divididos em três subgrupos. Nessa cena utilizamos planos compostos por descrições e imagens, visto que nesta atividade de ensino as ações dos estudantes representadas nas fotos são mais importantes para análise feita.

Plano I – O corpo como auxiliar na medição (comprimento dos pés)

É solicitado aos alunos que meçam a angulação entre a referência indicada na sala e o rádio. São distribuídas folhas aos alunos para que anotem seus resultados.

Inicialmente, a aluna usa a orientação visual para utilizar o cabo de vassoura (figura 52). Em vista disso, os estagiários intervêm, auxiliando e indicando como usar o transferidor, fazendo uso das referências contidas no chão da sala (figura 53).

Figura 52 – Alinhamento visual

Figura 53 – Medindo com instrumentos

Definida a angulação, no transferidor, a A2 valida sua medição utilizando o cabo de vassoura e seus pés enfileirados até chegar na direção do objeto a ter a posição medida, no caso o rádio (figura 54).

Figura 54 – O comprimento do pé: instrumento de verificação

O procedimento observado pode gerar erros na medição, entretanto vale ressaltar a utilização do corpo com instrumento, um processo humano e, muito corriqueiro no desenvolvimento da matemática (BOYER, 2010; EVES, 2004; IFRAH, 2005).

Plano II – O corpo como auxiliar na medição (a altura)

Logo após, foi solicitado a outro grupo que fosse efetuada a medida de ângulo tendo a bolsa de umas das estagiárias como referência, e novamente o corpo foi a extensão do cabo de vassoura e, dessa forma, indicando a direção. Nesse caso, houve uma tentativa de utilização da altura (figura 55).

Figura 55 – O corpo como instrumento I

Figura 56 – O corpo como instrumento II

Cena 2.3 – A angulação da rampa

No segundo encontro do módulo, em sua parte final, discutimos com o coletivo a importância de uma angulação coerente presente em uma rampa, em que o ângulo aparece em sua ação mental estática, a inclinação. Ao apresentar uma suposta rampa pedimos aos alunos que medissem quantos graus ela possuía.

Plano I – O equívoco ao medir

2.2.1	Estag1	O que eu tenho que considerar nessa rampa para construir ela?
2.2.2	Estag1	Para ela ser mais fácil ou mais difícil, não estou falando de material, para ela ser mais fácil ou mais difícil para algum deficiente, algum idoso subir.
2.2.3	A1	Ser mais inclinada, ser mais reta...
2.2.4	Estag1	O Lucas falou o que? O que eu levo em consideração?

- 2.2.5 A1 45°
- 2.2.6 Estag1 Tá... Mas você tinha falado outra coisa, o que você falou antes?
- 2.2.7 A9 A inclinação.
- 2.2.8 Estag1 A inclinação. É importante para alguém subir?
- 2.2.9 A1 É
- 2.2.11 Estag1 Se eu construir uma rampa assim... (Estag1 inclina mais a suposta rampa)
- 2.2.12 Estag2 Será que alguém sobe?
- 2.2.13 A1 Não.
- 2.2.14 A9 Ela vai fazer alpismo [alpinismo] na rampa.
- 2.2.15 Estag1 E aí... Será que alguém sobe?
- 2.2.16 Coletivo Não.
- 2.2.17 Estag1 Por que?
- 2.2.18 A1 Porque...
- 2.2.19 Estag1 Porque está muito inclinada.
- 2.2.20 A1 Não, está muito em pé.
- 2.2.21 Estag1 E se eu perguntar assim para vocês: qual a inclinação dessa rampa?
- 2.2.22 A3 45
- 2.2.23 A1 Que 45!
- 2.2.24 A3 Ah não.
- 2.2.25 Estag1 A gente consegue bater o olho e ver? [saber quanto é]
- 2.2.26 A2/A4 Não
- 2.2.27 Estag1 E se eu der...
- 2.2.28 A9 Estimativa, estimativa...
- 2.2.29 Estag1 E se eu der um instrumento para vocês. [é dado o instrumento ao A1]
- 2.2.30 A1 50 [após efetuar a medição]
- 2.2.31 Estag1 Como você mediu?
- 2.2.32 Estag1 Aí bateu no 50?
- 2.2.33 A1 Não... 60.
- 2.2.34 Estag1 Mas será que é assim que mede?
- 2.2.35 A1 Não sei.

Figura 57 – A1 mede a rampa

O Plano I apresenta uma discussão realizada com os estudantes, de forma introdutória, nesse momento podemos perceber que quando o A1 diz “mais reta” ou “muito em pé” (falas 2.2.3 e 2.2.20) e ele se refere à uma angulação maior, o que seria mais inclinada. Observamos isso, pois quando o *Estag1* diz que a rampa está inclinada (fala 2.2.19), o A1 automaticamente o corrige.

Após a discussão, foi realizada a medição do ângulo de inclinação pelo A1, como mostra as falas a partir da 2.2.29), ele utiliza o transferidor de maneira semelhante ao uso da régua, ou seja, a suposta rampa acompanha a graduação do instrumento. Ao verificar tal equívoco discute-se com o coletivo o uso do transferidor recordando sua utilização em *Medindo ângulos*, no encontro anterior.

Durante a discussão o A8 se candidatou a ajudar o colega na medição da rampa

Plano II – Intervenções para utilização correta do transferidor

- 2.2.36 Estag1 Tenta colocar esse negocinho aqui [ponta da rampa] no centro. No centro do transferidor. Aí você vai achar
- 2.2.37 Estag1 Quantos graus? Cadê? Isso... No centro dessa bolinha [marcação do transferidor]
- 2.2.38 A8 76 [A8 mede com auxílio da A1]
- 2.2.39 Estag1 Quanto?
- 2.2.40 A8 76.

Figura 58 – A8 mede a inclinação da rampa

Figura 59 – O centro do transferidor como referência

Inicialmente, o A8 possui a ideia correta de como medir (figura 58), porém não foi rigoroso. Assim, o *Estag1* entrevistou de maneira a atentá-los a colocar a ponta da rampa no centro do transferidor. Os estudantes seguiram tal orientação e chegaram ao valor de 76° (falas 2.2.38 e 2.2.40).

Cena 2.4 – Ângulo e localização na utilização de um instrumento: a bússola

No início do encontro apresentamos aos estudantes, com auxílio de um vídeo e de maneira expositiva, o funcionamento da bússola e os pontos cardeais, além da relação destes com os ângulos. Logo após, fomos ao espaço localizado em frente Escola de Aplicação e atrás da Faculdade de Educação, para realizar a atividade de ensino *Caça ao Tesouro Angular*.

Plano I – A referência

2.2.1	Estag1	Essa é a dica? O que está escrito aí?
2.2.2	A3	180° para o sul.
2.2.3	Estag1	180° para onde? Para o Sul. Então, agora vocês vão ter que fazer o seguinte: com a bússola e com o cordão vocês vão ter que achar para onde é esse 180° sul.
2.2.4	Estag1	Como vocês vão fazer? Vão fazer igual a gente estava fazendo lá na sala
2.2.5	Estag1	O que a gente tem que fazer primeiro com a bússola? Quem lembra? O que o Estag2 explicou?
2.2.6	A1	Deixar ela certinha.
2.2.7	Estag1	Deixar ela certinha onde? Com a agulha virada para onde?
2.2.8	A5	Para o Sul.
2.2.9	A3	Para o Norte.
2.2.10	Estag1	Para o sul ou para o norte?
2.2.11	Coletivo	Para o norte!

O Plano I mostra as primeiras ações dos estudantes utilizando a bússola: recordar a referência geográfica (Norte) e calibrar agulha. Nas falas 2.2.5 a 2.2.11 mostra a discussão coletiva de qual referência utilizar (Norte ou Sul) ao calibrar a agulha. Ao final, os estudantes concluíram que seria o Norte (fala 2.2.11).

Durante o processo, os estagiários orientaram os estudantes que colocassem a bússola no chão, a fim de facilitar a medição. Porque quando estava na mão de algum deles todos queriam manuseá-la, interferindo na medição.

Plano II – Primeira pista

- 2.2.13 Estag1 Agora vocês têm que calibrar.
- 2.2.14 A4 Não, não... É para esse lado aqui. (A4 e A2 manipulam a bússola para medir-
figura 60)
- 2.2.15 A2 Parou, parou, parou!!!
- 2.2.16 Estag1 Parou no Norte?
- 2.2.17 A2 Parou.
- 2.2.18 Estag1 E agora vocês vão usar o cordão. Vocês têm que ir para onde?
- 2.2.19 A4 180° para o Sul.
- 2.2.20 Estag1 Então localiza aí 180° para o sul
- 2.2.21 A4 Aqui. (ela usa o cordão para medir)
- 2.2.22 Estag1 Então está na direção de onde?
- 2.2.23 A2/A4 Para lá! (apontando para direção observada)

As falas do Plano II apresentam o processo de medição composto pela ação de calibrar a bússola (deixar a agulha alinhada com o Norte) e ação de determinar a direção indicada. Os estudantes realizaram todo o processo, porém, verificamos que a bússola estava travada, assim, peço para que repitam. Após, os estudantes seguiram em busca da nova pista pela direção indicada.

Figura 60 – Alinhando a agulha em direção ao norte

Figura 61 – Encontrando a primeira direção

Plano III – A interferência magnética na segunda medição

A segunda pista estava localizada a 180° Sul em relação a primeira, o *Estag2* que estava caracterizado de pirata deu uma pista, disse ao coletivo que seu papagaio havia voado e, portanto, estava em lugares altos. Assim, a *A3* localiza a pista em cima da árvore.

Ao receber a segunda pista os estudantes leem 135° e, logo após, tentam calibrar a bússola. O instrumento é colocado em cima de um banco, próximo a um poste de iluminação, que causa interferência devido ao campo magnético produzido pela eletricidade. Dessa forma,

os estagiários intervêm, orientando os estudantes a colocar a bússola no chão, porém próximo ao local em que foi encontrada a pista. Durante a orientação explicamos a razão da interferência e relacionamos com o magnetismo presente nos polos da Terra, que havia sido discutido anteriormente.

As A2, A3, A4 tomam iniciativa no processo de medição da segunda dica, porém demoram mais em relação a primeira. Após calibrar os alunos dizem que é 135° sudoeste, assim, o Estag1 intervém diz que é 135° sudeste.

A A4 utiliza o cordão e verifica a direção, assim os estudantes correm na direção da próxima pista. Quando o coletivo se desloca acabam se desviando da direção indicada, assim foi necessário intervir chamando a atenção para manutenção desta.

Figura 62 – Estudantes alinhando a agulha

Figura 63 – Encontrando a segunda direção

Plano IV – Pontos cardeais em inglês

- 2.2.24 A2 O leste era o que? Era o “E” ou era o “W”?.
 2.2.25 A1 Era o “L”.
 2.2.26 A2 Não tem “L” aqui!
 2.2.27 A4 É quanto mesmo?
 2.2.28 A1 Se vira! Você não é quadrada.
 2.2.29 A3 É o “E”.
 2.2.30 Estag1 O leste está no lugar do “E”. É isso. (A4 mede com o barbante)
 2.2.31 A2 É pra lá, é pra lá. (Então A3 e A2 apontam para o “E” - leste)

Na determinação da direção indicada pela terceira pista surge um problema referente à leitura da pista que estava “ 90° E”. Os estudantes não conseguiram ler e não se atentaram que o “E” era indicado na bússola, assim deram ao Estag2, este leu e disse ao coletivo que se tratava de 90° leste.

As falas do Plano IV mostram a discussão que atribuí significado para o “E” relacionando-o com o leste. Os estudantes concluem que “E” equivale ao leste (fala 2.2.16), o que foi validado pelo *Estag1* (fala 2.2.18).

Plano V – Pontos colaterais em inglês

- 2.2.32 Estag1 Como que é a pista? Alguém lê.
 2.2.33 A1 340 NW.
 2.2.34 A3 Qual [direção] que significa 340 NW?
 2.2.35 Estag1 O “W” significa oeste. Então seria “NO” no caso do português. Como que é o “NO” que nós falamos lá em sala?
 2.2.36 A1 Noroeste.
 2.2.37 Estag1 Noroeste, muito bom

Situação similar a vivenciada no plano anterior, ocorreu no Plano V, em que os estudantes perguntam o significado de 340° NW (fala 2.2.33). Assim, o *Estag1* faz a tradução para a abreviação em língua portuguesa e questiona o coletivo a qual direção se refere “NO” (fala 2.2.35). O *A1* responde corretamente (fala 2.2.36). Na determinação da direção indicada pela terceira pista surge um problema referente à leitura da pista que estava “90° E”. Os estudantes não conseguiram ler e não se atentaram que o “E” era indicado na bússola, assim deram ao *Estag2*, este leu e disse ao coletivo que se tratava de 90° leste.

Logo após a determinação dessa direção, quando chegaram próximo ao local em que se encontra o tesouro, os estagiários deram dicas e os estudantes o encontraram, em nosso caso, se tratava de um pacote de balas.

Cena 2.5 – O transferidor no trajeto angular

Plano I – Intervenções para medir

Na atividade de ensino *Itinerário Angular* é proposto aos estudantes um trajeto realizado por uma escuna, na cidade de Angra dos Reis, como apresentado no capítulo 4.

Cada aluno deverá descrever o movimento, realizado pela embarcação, utilizando ângulos e comprimentos, o primeiro para indicar a mudança de direção (acrescentando “E” ou “D”, para esquerda e direita, respectivamente), já o segundo para representar a distância percorrida. Para isso, eles utilizaram régua e transferidor.

Durante todo o processo, os estagiários intervieram, de diversas maneiras, para orientar como utilizar o transferidor. Após as intervenções, os estudantes registraram suas conclusões em folhas.

A seguir, o quadro 7 apresenta o gabarito e as respostas dos estudantes, referente aos ângulos medidos.

Gabarito	50° D	30° E	50° E	60° E	90° E	60° E
A1	50°	30°	50°	60°	90°	60°
A2	50° D	30° D	50° D	60° E	90° E	60°
A3	50° D	30° D	50° E	60° E	90° E	60° D
A4	50° D	30° D	50° E	60°	90° D	60°
A5	50°	150°	50°	180°	60°	180°
A7	50° D	30° E	50° E	60° E	90° E	60° D
A8	50° D	30° E	50° E	60° E	90° E	120° E
A9	48° D	150° E	130° E	120° E	90°	120° E
A10	48° D	150° E	1130° E	120°	40°	120°
A11	50° D	30° E	50° E	60° E	90° E	60° D

Quadro 7 – Gabarito e respostas dos estudantes no *Itinerário Angular*

A partir das respostas fornecidas podemos tirar algumas conclusões. O comando “50° D” teve quase 100% de acerto, apenas dois comandos diferem, os de A9 e A10 (“48°D”) que são erros aceitáveis de 2°. Referente ao comando de “30° E”, houve dois tipos de equívocos um relacionado à lateralidade e outro à graduação correta observada, visto que os valores que diferem de 30° são 150°, ou seja, o aluno provavelmente observou a outra graduação presente no transferidor.

O comando “50° E” possuiu grande índice de acerto, porém chamou a atenção para o valor colocar pelo A10 1130°. Observamos que este valor estava discrepante, em relação ao dos outros alunos, e comparando com as respostas de A9, percebemos uma grande semelhança, principalmente pelo 48° D do primeiro comando. Então, suspeitamos que A10 copiou as respostas de A9, o que foi confirmado pelas gravações, que mostram os dois sentados um ao lado do outro e que por diversas vezes, houve consulta por parte de A10 às respostas de A9.

No quarto comando “60° E”, apenas o valor da A4 destoou dos demais, nestes foram observados a ausência da definição de direita e esquerda e o comando 120°, este acreditamos foi uma interpretação equivocada da graduação a ser adotada. Situações similares foram observadas nos dois últimos comandos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação inicial desta pesquisa nasceu da participação no projeto Observatório da Educação – “Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: Princípios e práticas da organização do ensino” (2011-2014). Participação, esta, que precedeu e impulsionou meu ingresso no curso de mestrado. Assim, todo o desenvolvimento da pesquisa foi permeado pelas ações desenvolvidas no referido projeto, discutidas por Gladcheff (2015). Dentre as ações do projeto, é possível destacar: os estudos referentes ao conceito de medida e seu modo geral de ação (CARAÇA, 1951); os estudos sobre a *Teoria da Atividade* (LEONTIEV, 1983) e a sua contribuição para a organização do ensino por meio da *Atividade Orientadora de Ensino* (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010); os estudos das Orientações Curriculares da Prefeitura de São Paulo e do Pnaic, como maneiras de compreensão da organização do ensino, e o movimento de desenvolvimento das atividades de ensino, em especial, de área (integrávamos o grupo responsável).

Minha prática como docente no ensino fundamental II e no ensino médio, aliada à participação no referido projeto, gerou o interesse sobre a apropriação do conceito de ângulo, pois identificamos a dificuldade apresentada pelos estudantes de ambos os ciclos em relação a esse conceito. Assim, nos questionamos: *Como organizar o ensino do conceito de ângulo, objetivando seu processo significação?* Logo, esse panorama baseou a determinação do objetivo deste trabalho: *investigar indícios do processo de significação do conceito de ângulo a partir da necessidade de localização.*

Definido o objeto e o objetivo da pesquisa, e baseados na perspectiva teórica adotada, elencamos as ações necessárias para concretizar este trabalho. Inicialmente, foi preciso pesquisar em fontes históricas para que pudéssemos constituir o movimento lógico-histórico do conceito de ângulo. Nesse movimento, concebemos a localização como *Atividade* humana, que, ao se realizar, também foi produzindo novas necessidades (LEONTIEV, 1983). Exemplo disto é o movimento lógico-histórico do conceito de ângulo, que evidencia seu surgimento a partir do controle da localização e de sua contribuição no aprimoramento de técnicas que levaram a uma maior precisão dessa atividade. Nesse processo, o conceito de ângulo possibilitou avanços significativos, como determinação da altura de um astro, desenvolvimento de técnicas e instrumentos cada vez mais precisos (bússola, quadrante,

sextante, latitude e longitude, GPS) e desenvolvimento da geometria, entre tantas outras contribuições ao conhecimento humano.

Dada a grande importância social dos conceitos desenvolvidos no aprimoramento dos instrumentos e das técnicas requeridas para a localização, foi preciso compreender a estrutura organizacional do ensino dos conceitos necessários para essa atividade humana. Para tal, analisamos o que denominamos documentos oficiais, categorizados em orientações de ensino, materiais didáticos e descritores de avaliação de larga escala. Ao realizar tal ação, constatamos que o conceito de ângulo não é tratado como uma grandeza (CARAÇA, 1951), mas apresentado a partir de definições que priorizam a lógica formal e que o caracterizam como uma qualidade relativa aos polígonos. Essa concepção desconsidera todo o rico movimento lógico-histórico do conceito e o desenvolvimento de seus diversos nexos conceituais existentes, internos e externos, que evidenciam o surgimento de novas necessidades que impulsionaram a busca por medidas de ângulos e técnicas de determinação de localização cada vez mais precisas. Dessa maneira, o surgimento do ângulo a partir da necessidade de localização e seunexo conceitual interno de rotação são esquecidos, o que causa sérias implicações para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

Além disso, as poucas tarefas presentes nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem não discutem o conceito de ângulo. Apresentam-no já quantificado, relacionando-o com os polígonos, e limitam-se à identificação de ângulos. Não são propostas aos alunos situações desencadeadoras de aprendizagem que gerem a necessidade do conceito; logo, sem necessidade, não há *Atividade* (LEONTIEV, 1978).

Assim, apontamos que as dificuldades apresentadas pelos estudantes para se apropriar do conceito de ângulo não se dão por este ser difícil de aprender e de ensinar – como argumentam Casas e Luengo (2005). Essas dificuldades são resultado da atual organização do ensino, pautada em definições e sínteses, que apresenta ao estudante o conceito em sua forma acabada. Assim, desconsidera todo o processo humano de elaboração, comprometendo o processo de aprendizagem, visto que, para que ocorra a apropriação, segundo Leontiev (1978), é preciso que o sujeito se depare com uma atividade que em sua estrutura se assemelha com o processo humano de construção daquele conceito. Em nossa concepção, isso se realiza por meio da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010).

Na organização do ensino escolar, identificamos as três definições atribuídas ao conceito de ângulo: par de semirretas de mesma origem, rotação e região do plano. A partir

das concepções de grandeza e de medida discutidas por Caraça (1951), consideramos o ângulo como quantificador da qualidade inclinação, em que a rotação é uma de suas ações mentais. Assim, propusemos uma definição baseada no movimento lógico-histórico do conceito, pois é a partir dele que há uma caracterização do ângulo como uma grandeza e a explicitação de suas manifestações, estática e dinâmica.

Não consideramos o ângulo como região do plano devido a esta concepção possuir alguns equívocos e limitações – por exemplo, a impossibilidade de ângulos negativos –, além de acreditarmos que está mais relacionada ao conceito de área, podendo, inclusive, causar confusão nos estudantes. Casas e Luengo (2005) apontam a impossibilidade de definição de ângulos côncavos e convexos na definição por nós considerada, contudo, para os autores, estes são conceituados a partir de região côncava e região convexa. Assim, não há comparação entre superfície e inclinação, visto que são grandezas de diferentes espécies (CARAÇA, 1951). O esforço que se pode realizar é de correspondência: as denominações de ângulos côncavo e convexo seriam, na concepção adotada por nós, ângulos obtuso e agudo, respectivamente. Portanto, concepções que se referem a objetos diferentes (uma, à inclinação, e outra, à região do plano) gerarão conceitos diferentes.

Em nossa pesquisa, fomos, então, mobilizados pelo entendimento de que o ensino do conceito de ângulo precisa priorizar os nexos conceituais internos que o constituem, em especial a rotação, a fim de que haja um processo de significação desse na direção do pensamento teórico. Essa organização encontra estrutura para seu desenvolvimento nos princípios da AOE (MOURA, 2006; MOURA et al., 2010).

Dessa maneira, o esforço em entender o processo de desenvolvimento do conceito e como a escola básica o organiza, aliado aos pressupostos teóricos em que se baseiam esta pesquisa e as ações do projeto Observatório da Educação, impulsionaram a elaboração e a organização das atividades de ensino, por exemplo: as tarefas presentes nos Cadernos de Apoio e Aprendizagem, que inspiraram a criação de algumas situações desencadeadoras elaboradas, e a influência da participação na elaboração do fascículo de área (Observatório da Educação), na estrutura do primeiro encontro do segundo módulo e, em especial, na constituição da história virtual “Em alto-mar”.

Assim a elaboração, a organização e a aplicação das atividades de ensino, pautadas na AOE, buscaram criar um ambiente potencial à significação do conceito de ângulo, em direção ao pensamento teórico. Dessa maneira, ao se apropriar do significado social do ângulo, o estudante não o confundirá com outras grandezas, por exemplo, o comprimento.

O desenvolvimento das atividades de ensino foi realizado com os estudantes de 4º e 5º anos no Clube de Matemática, classificado por Cedro (2004) como um espaço de aprendizagem, que compôs os episódios discutidos em nossa unidade de análise, presentes no capítulo 5. Nesta análise, buscamos indícios do processo de significação do conceito de ângulo a partir da necessidade de localização.

Ter a oportunidade de aplicar as atividades de ensino no Clube de Matemática foi importante, pois este espaço de aprendizagem possui uma dinâmica organizada a partir dos mesmos pressupostos do projeto ao qual esta pesquisa se vincula. Essa organização influenciou positivamente este tipo de pesquisa, em que o pesquisador realiza intervenções. A experiência como professor do ensino básico auxiliou o pesquisador em suas conduções e perguntas, de modo que propiciassem manifestações dos indícios de apropriação.

Em contrapartida, as condições objetivas do 2º semestre de 2014, quando houve uma greve de professores e funcionários da USP, acarretou uma reorganização do Clube de Matemática, que se desenvolveu em dois módulos em vez de três (como de costume).

O desenvolvimento das atividades de ensino com os estudantes contribuiu para fornecer indícios do processo de significação do conceito de ângulo e de conceitos da localização. A seguir, apresentamos alguns que, a nosso ver, são relevantes.

Identificação do ângulo como uma grandeza a partir da rotação em atividades de localização

Nas cenas deste episódio, evidenciam-se os indícios de apropriação do conceito, revelados pelos estudantes, a partir do desenvolvimento das atividades de ensino.

Partimos do entendimento de que o ensino de ângulo deve estar atrelado ao de localização, como indicam as fontes históricas consultadas (HOGBEN, 1956), concebendo-o como uma medida ao percorrer suas três fases: “*escolha* da unidade; *comparação* com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número” (CARAÇA, 1951, p. 30, grifos do autor). Ao trazermos tais considerações à organização do ensino, indicamos que precedente à primeira fase se encontra *a identificação da grandeza a ser medida*, ou seja, a apropriação da qualidade que será quantificada.

A atividade de ensino “Pênalti às cegas” desenvolveu-se de maneira que o estudante: identificasse a grandeza a ser medida (inclinação gerada pela rotação), em suas falas de virar/girar; escolhesse uma unidade de medida; comparasse esta com o movimento realizado; e,

finalmente, a quantificasse. Essas fases são identificadas nos momentos em que os estudantes escolhem como medida a volta, ao utilizar suas subdivisões (meia, um quarto, metade de um quarto), e o grau, quando a A3 se refere à meia volta como 180° . A utilização do grau como unidade de medida, por parte dos estudantes, era esperada mais adiante no desenvolvimento da atividade de ensino. A configuração em subgrupos trouxe, dentro da mesma estrutura, novas condições objetivas – coletivo reduzido (dividido em dois grupos) e o estudante como chutador vendado (posto que era do estagiário) – e um novo problema – quantificar o ângulo de 45° . A tarefa foi concluída por um dos coletivos.

Na história virtual “Em alto-mar”, o problema desencadeador foi solucionado rapidamente pela A2, que pertencia ao coletivo que havia quantificado o ângulo de 45° , evidenciando a importância da relação entre as atividades de ensino dentro do processo de apropriação do conceito. Dada tamanha rapidez, foi necessário propor uma nova configuração que gerasse a necessidade de utilização de um instrumento, visto que a divisão da circunferência por dois, sucessivamente, já não era mais suficiente. Inicialmente, foi proposta uma nova divisão por dois ($45^\circ / 2 = 22,5^\circ$), mas, a partir da intervenção dos estagiários, discutiu-se sobre a impossibilidade de certeza dessa medida e, assim, a necessidade de um instrumento.

Esse processo de significação teve continuidade durante o desenvolvimento da atividade de ensino “Jogos virtuais”, que apresentou a seleção de jogos com o objetivo de operacionalizar o conceito de ângulo, evidenciando a ação mental de rotação em diversos contextos, inclusive localização. Nesse encontro, foi possível verificar a emancipação por parte do estudante de uma referência fixa ao efetuar a rotação, como observado no jogo “Kung Fu Angles”.

O instrumento no processo de medição do ângulo

Este episódio discute os indícios de apropriação do conceito, revelados pelos estudantes a partir das ações, pertencentes às atividades de ensino, que utilizavam instrumentos de medidas de ângulos.

Inicialmente, a necessidade de um instrumento que auxiliasse na quantificação da grandeza ângulo foi posta aos alunos por intermédio dos estagiários. Assim, eles utilizaram o *lonagu* (instrumento criado para atividade de ensino e baseado no transferidor) para indicar a direção que a embarcação deveria seguir. No mesmo encontro, os estudantes, utilizando um

transferidor, mediram a angulação de alguns objetos da sala a partir de uma determinada referência. Nessas duas cenas, os estagiários intervieram no sentido de apresentar o manuseio e a utilização dos instrumentos, o que se deu de maneira pontual, visto que os estudantes logo se apropriaram do modo de realizar a medição.

A utilização de instrumentos se materializou, no segundo encontro, na atividade de ensino “Rampa”, em que foi realizada uma discussão sobre a influência das angulações no uso da rampa. O coletivo foi questionado sobre a possibilidade de medir a angulação de uma rampa. A8 utilizou o transferidor e realizou a medida a partir de pequenas intervenções realizadas pelo *Estag1*.

A finalização desse processo teve seu núcleo na realização da “Caça ao tesouro angular”, em que os estudantes precisavam associar o conceito de ângulo ao de pontos cardeais, materializados na bússola, utilizando-a para encontrar as pistas e, finalmente, o tesouro. Nesse processo, os estudantes associaram o conceito de ângulo, expresso na ação mental de rotação, a uma atividade de ensino de localização, em que o coletivo se deslocava, ou seja, o contexto de localização foi vivenciado por eles, e não representado, como em atividades anteriores do módulo. Ao final do encontro, o “Itinerário angular” propôs uma rota de uma embarcação aos estudantes, para que medissem utilizando o transferidor.

Todo esse movimento de utilização de instrumentos apresenta a sua importância no processo de constituição do conceito e traz indícios de sua ação mental de inclinação, que, mesmo sendo produto de algo dinâmico, é representada estaticamente, como é o caso do “Itinerário angular”.

Portanto, o domínio da localização se dá através do controle da variação das quantidades da grandeza ângulo. Este, como conceito que é, se desenvolve nas relações humanas, em nosso caso, nas atividades de ensino realizadas com as crianças – que, a partir da necessidade de localização, sistematizaram a lógica do conceito de ângulo.

A partir dos episódios, ressaltamos o papel do coletivo no processo de significação do conceito de ângulo, visto que o desenrolar das cenas evidenciam falas de diferentes estudantes, em momentos distintos, que faziam uso de conclusões e sínteses anteriores realizadas pelos colegas ou estagiários. Sforni (2003) aponta para a relevância do coletivo nesse processo. Segundo a autora, o estudante “passa a participar de uma atividade coletiva que lhe traz novas necessidades e exige dela novos modos de ação. É a sua inserção nessa

atividade que abre a possibilidade de ocorrer um ensino realmente significativo” (SFORNI, 2003, p. 95).

Apontamos, também, para outros aspectos a serem discutidos relativos à pesquisa desenvolvida e que, potencialmente, podem gerar novas perguntas de pesquisas: as ações dos estagiários (futuros professores) no desenvolvimento de atividades de ensino no Clube de Matemática; a elaboração de atividades de ensino de ângulo que abordem em sua estrutura outros nexos conceituais e outros instrumentos de medida; o modo como os instrumentos de medida podem contribuir na apropriação e organização do ensino de medidas.

Assim, o desenvolvimento da atividade como pesquisador contribuiu para a formação do professor no sentido de compreender a organização do ensino das medidas e seu modo geral de ação, em especial do conceito de ângulo, refletir sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes na apropriação deste conceito e reconhecer o movimento lógico-histórico como elemento imprescindível para a organização do ensino de Matemática.

A formação do pesquisador ocorreu por todas as ações desenvolvidas durante a pesquisa, em que pudemos vivenciar as premissas de que *o sujeito se faz ao fazer o objeto* e de que *se aprende no coletivo*. Nesse processo, a identificação da organização do ensino de ângulo apresentou-nos algumas razões para as dificuldades dos estudantes. O movimento lógico-histórico, o trabalho coletivo e os princípios da AOE fundamentaram a elaboração das atividades de ensino. E a *Teoria da Atividade* deu-nos suas contribuições para a investigação sobre os indícios de apropriação do conceito de ângulo no desenvolvimento das atividades de ensino. Ao final do processo, a articulação desses elementos foi fundamental para indicar novas ações na organização do conceito de ângulo.

Ainda que as contribuições estejam dispostas separadamente, o desenvolvimento do professor e do pesquisador é uma unidade dialética, formada pelas diversas ações que compõem a sua atividade de professor e a sua atividade de pesquisa. Nesse movimento, uma mesma ação pode contribuir para ambas, porém com relevâncias diferentes.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACZEL, A. D. **Bússola: a invenção que mudou o mundo**. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2002.

AIRES, L. Saiba mais sobre a trajetória dos polinésios no oceano pacífico. **Guia do Estudante**. 2012. Disponível em: <<http://guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/saiba-mais-trajetoria-polinesios-oceano-pacifico-699885.shtml>>. Acesso em: 03 jul. 2015.

ALVES, A. S; ROMEIRO, C. Astrolábios e Sextantes. **Helios**. Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2000.

ARCONCHER, C. O conceito de ângulo. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 37, p. 22-24, 2º quadrimestre de 1998.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. 4 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BERNARDES, M. E. M.; **As ações na atividade educativa**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

BISINELA, F. P. et al. Puericultura nos seis, primeiros meses de vida: assistência à saúde da criança. In: SANTANA, J. C. B. et al. (org.). **Saúde da criança e do adolescente: puericultura na prática pediátrica**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2011. p. 69-94.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série): Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem**. Brasília: MEC/SEB, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations** – two volumes bound as one, v. 2. Mineola: Dover Publications, 1993.

CASAS GARCÍA, L. M.; LUENGO GONZÁLEZ, R. Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ângulo. **Enseñanza de Las Ciencias** - revista de investigación y experiencias didácticas, v. 23, n. 2, p. 201-216, jun. 2005.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: o Clube de Matemática**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

_____. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática:** uma perspectiva histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

COSTA, M. J. **Como se observava antigamente?** PRO 2009 Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Cd_Costa_4a5f442e6f4c0.pdf>. Acesso em: 26 out. 2015.

CRATO, N. Astrolábios. **Instituto Camões**. 2003. Disponível em: <<http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e7.html>>. Acesso em: 27 out. 2015.

_____. O anel náutico. **Instituto Camões**. 2003b. Disponível em: <<http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e29.html>>. Acesso em: 09 out. 2015.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalizacion en la enseñanza**. Havana: Pueblo y Education, 1982.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Tradução de Marta Shuare. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVYDOV, V. V. **Conceitos Básicos da Psicologia Contemporânea**. Cap. I. Problemas do ensino desenvolvimental - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. In: *Revista Soviet Education*, August, v. XXX, n. 8, 1986.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1227-1253, 2014.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. C. **O conceito de ângulo e o ensino de geometria**. 1. ed. São Paulo, SP: CAEM/IME-USP, 2008.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 9: geometria plana**. 7. ed. São Paulo, Atual, 1993.

DUARTE, N. **Vigotski e o “aprender a aprender”**: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2001.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAGGION, P. L.; VEIGA, L. A. K.; SILVA, T. F.; ANDOLFATO, S. H. Estudo da Aplicação de estações totais para a determinação de deslocamento para relativos em laboratório. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 19, n. 1, jan.-mar., p. 34-44, 2013.

FERNÁNDEZ, M. G.; El sextante. Um viejo amigo. **Revista General de Marina**. Madri: Ministério da Defesa – Secretaria Geral Técnica, mar. 2007.

FERNANDES, T. C. D.; LONGHINI, M. D.; MARQUES, D. M. A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de Astronomia e Matemática. **História da Ciência e Ensino** - construindo interfaces, v. 4, p. 62-79, 2011.

GADOTTI, M. F. **Definições matemáticas do conceito de ângulo: influências da história, do movimento da matemática moderna e das produções didáticas nas concepções dos docentes**. 2008. 135 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 2008.

GALLO, I. M. Dioptra. **Nuevos Elementos de Ingeniería Romana** – III Congreso de las Obras Públicas, Astorga, p. 379-389, 2006.

GESTEIRA, H. M.; O astrolábio, o mar e o Império. **História, Ciências, Saúde – Manguinhos**, Rio de Janeiro, v. 21, n. 3, jul.-set. 2014, p. 1011-1027.

GESTEIRA, H. M.; VALENTE, M. E. A.; VERGARA, M. R. **Olhar o céu, medir a terra**. Museu de Astronomia e Ciências Afins. Rio de Janeiro, 2011.

GLADSCHEFF, A. P. **Ações de estudo em atividade de formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais**. 2015. 287 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. Rio de Janeiro: Globo, 1956.

IFRAH, G. **Os Números** – a história de uma grande invenção. Trad. Stella Maria de Freitas Senra 11 ed. São Paulo: Globo, 2005.

JOGO virtual Mariquita y el Laberinto. National Library of Virtual Manipulatives. Utah: Utah State University. Disponível em: <
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_141_g_1_t_3.html>. Acesso em: 18 fev 2015.

JOGO virtual Tortuga e y el Laberinto. National Library of Virtual Manipulatives Utah: Utah State University. Disponível em: <
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_141_g_1_t_3.html>. Acesso em: 18 fev 2015.

JOSÉ, J. C.; GÓMEZ, E. P.; **Cuatro siglos de historia de la cartografía en la Biblioteca de la Universidad de Sevilla**. Biblioteca da Universidade de Sevilha. Universidade de Sevilha, Sevilha, 2010.

JUSTO, G. R.; **As relações espaciais e aproximação entre geometria e a matemática com crianças do 1º ano do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Solivro gráfica e editora, 1978.

LANNER de MOURA, Anna Regina. Movimento conceptual em sala de aula. In: MIGUEIS, M. R. e AZEVEDO, M. G. **Educação Matemática na infância: abordagens e desafios**. Serzedo – Vila Nova de Gaia: Gailivro, 2007.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidad**. 2. ed. Havana: Pueblo y Educación, 1983.

_____. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

_____. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: ICONA, 1991.

MAOR, E. **Trigonometry delights**. Princeton: Princeton University Press, 2002.

MARX, K. **O Capital**: crítica da economia política. v. 1. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2002.

MATHEW, K. M. **History of the Portuguese navigation in India**, 1497 - 1600. Nova Deli: K. M. Mittal, 1988

MATOS, F. M.; **Topografia eletrônica**. 2010. Relatório de estágio (Engenharia Florestal) – Centro de Ciências Agroveterinárias, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2010.

MEDEIROS, A; MEDEIROS, C. F.; MONTEIRO JR, F. N. M. Pedro Nunes e o problema histórico da compreensão da medição das frações. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 3, p. 559-570, 2004.

MIGUENS, A. P. **Navegação**: ciência e arte. Vol. II. Instrumentos náuticos na navegação astronômica. O sextante e o cronômetro. Rio de Janeiro: Diretoria de Hidrografia e Navegação – DHN, 1996.

MIGUENS, A. P. **Navegação**: ciência e arte. Vol. II. Navegação astronômica e derrotas. Rio de Janeiro: Diretoria de Hidrografia e Navegação – DHN, 1996b.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS**: descrição, fundamentos e aplicações. São Paulo: Editora UNESP, p28, 2000.

MOURA, M. O. **A construção do signo numérico de ensino**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

_____. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, São Paulo, ano II, n. 12, pp 29-43. 1996.

_____. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R.L.L. (org.) **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004.

_____. (org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília, DF: Liber Livro, 2010.

_____. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (org.). **Ensinar a ensinar**: Didática para a Escola Fundamental e Média. São Paulo: Cengage, Learning, 2012.

MOURA, M. O. et al. A Atividade Orientadora de Ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, M. O. (org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília, DF: Liber Livro, 2010.

MOURA, M. O.; CEDRO, W. L. O Clube de Matemática: um espaço para a formação inicial de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 2, n. 4, pp. 9-22. Campo Grande, MS: UFMS, 2008.

MOURA, M. O.; SFORNI, M. S. F.; ARAÚJO, Elaine Sampaio. Objetivação e apropriação de conhecimentos da atividade orientadora de ensino. In: **Revista Teoria e Prática da Educação**, v.14, n.1, p.39-50, 2011.

MORAES, S. P. G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. 2008. 261 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MORRISON, J. E.; History of the astrolabe. **The astrolabe**. Rehoboth Beach, 2010. Disponível em: < <http://www.astrolabes.org/pages/history.htm>>. Acesso em: 19 ago. 2015

NASCIMENTO, C. P.; **A organização do ensino e a formação do pensamento estético-artístico na teoria histórico-cultural**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

NUNES, P. J. A. **Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes**. 2012. Dissertação (Mestrado de História Marítima) – Faculdade de Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

OLIVEIRA, C. D. **Curso de Cartografia Moderna**. Rio de Janeiro: Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, IBGE, 1993.

PANOSSIAN, M. L.; **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes**: indicadores para a organização do ensino. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PANOSSIAN, M. L.; **O Movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PASELK, R. A. The Torquetum – History. **Humboldt State University**. 2015. Disponível em: <http://www2.humboldt.edu/scimus/MedInst_rap/Torquetum/Torq_History.htm>. Acesso em: 08 fev. 2016.

PEREIRA, J. M. M. **The Stellar Compass and the Kamal**. Academia da Marinha, Lisboa, 2003. 34 p.

PEREIRA, J. M. M.; PING, J. G. **Navegações chinesas no século XV: realidade e ficção.** Academia da Marinha, Lisboa, 2006. 132 p.

PIOVEZAN, A. C. T; GLADCHEFF, A. P.; FRAGA, M. A. O processo coletivo na elaboração de uma situação desencadeadora de aprendizagem do conceito de medida de área. In: RODRIGUES, Z. G. M. et al. (org.) **Anais do XII EPEM** – educação matemática no contexto das propostas do ensino integral: projetos e políticas. v. 1, p. 753-767. Birigui, SP: SBEM-SP. 2014.

PONCE, A. **Educação e luta de classes.** 15. ed. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1996.

PRIMEIRO FILME. Página virtual do projeto “Primeiro Filme”. [2012?] Disponível em: <<http://www.primeirofilme.com.br/site/o-livro/noco-es-basicas-da-estrutura-de-um-filme/>>. Acesso em: 28 fev. 2016.

RAPOSO, P.; Medir estrelas e algo mais. **O Observatório**, Lisboa, v. 12, n. 1, p. 4-5, 2006.

REIS, A. Estácio dos. O quadrante náutico. **Revista da Universidade de Coimbra**, Coimbra, v. XXXIV, p.243-273, 1988.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. (org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília, DF: Liber Livro, 2010.

SANZ, P. J. J. El arte de navegar. **Sigma**, n. 30, p. 151-170, mai. 2007.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o Ensino Fundamental: ciclo I.** Secretaria Municipal de Educação – São Paulo: SME, DOT, 2007.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Técnica. Diretoria de Orientação Técnica. **Prova São Paulo 2007** – relatório de resultados versão preliminar. Secretaria Municipal de Educação – São Paulo: SME, DOT, 2008.

SÃO PAULO (SP). **Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática: primeiro ano.** Programa de Orientações Curriculares – São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010.

SÃO PAULO (SP). **Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática: segundo ano.** Programa de Orientações Curriculares – São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010a.

SÃO PAULO (SP). **Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática: terceiro ano.** Programa de Orientações Curriculares – São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010b.

SÃO PAULO (SP). **Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática: quarto ano.** Programa de Orientações Curriculares – São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010c.

SÃO PAULO (SP). **Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática: quinto ano.** Programa de Orientações Curriculares – São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 210d.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Assessoria Técnica e de Planejamento. **Matrizes de referência para a avaliação do rendimento escolar no ensino fundamental matemática: revista e reformulada.** Secretaria Municipal de Educação – São Paulo: SME, ATP, 2011.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino: contribuições da teoria da atividade.** 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, A. T. et al. **Levantamento Topográfico com GPS Geodésico e Estação Total da Propriedade EMBRAPA Caprinos em Sobral-CE.** In: Anais da IX Jornada de Ensino e Pesquisa da UFRPE, Recife, 19-28 out. 2009.

SILVA, L. P. Kamal, tábuas da Índia e tavoletas náuticas. **Lusitânia: revista de estudos portugueses**, Lisboa: Câmara Reis, n. 3, p. 363-371, 1924.

SOUSA, C. C. R. **Arqueologia subaquática: identificação das causas de naufrágios nos séculos XIX e XX na costa de Pernambuco.** 2010. 243 p. Tese (Doutorado em Arqueologia) – Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatadas de professores do ensino fundamental.** 2004. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.

SOUZA, M. A. M. **Experimentos de Trigonometria em Sala de aula.** 2014. 84 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências da Educação, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

SOUZA, T. O. M.; Ainda a suposta escola naval de Sagres e a náutica portuguesa dos descobrimentos. **Revista de História**, São Paulo, v. 6, n. 13, p. 181-192, 1953.

TEN, A. E.; MONRÓS, M. A. Historia y Enseñanza de la astronomía II – La posición de los cuerpos celestes. **Enseñanza de las ciencias** – revista de investigación y experiencias didácticas, v. 3, n. 1, p. 47-56, fev. 1985.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffé. **A navegação e o sextante.** Porto Alegre, [2008?].

VACCAS, A. A. M.; **A significação do planejamento de ensino em uma atividade de formação de professores.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

VANOYE, F.; FREY, F.; GOLIOT-LÉTÉ, A. **Le Cinéma.** Coleção Rapères Pratiques. Paris: Nathan, 2011.

VENDET, J.-P. **Uma história da Astronomia.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. Trad. Monica Stahel M. da Silva. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas**. Tomo V. Madri: Visos, 1997.

WALLIS, D. A. **History of angle measurement**. FIG Work Week. Cairo, 2005.

WOLHUTER, K. M. **Geometric design of roads handbook**. Boca Raton: CRC Press, 2015. 626 p.

ZILKA, E. **Utilização do Geogebra na construção de instrumentos – Teodolito**. 2014. 50 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

APÊNDICE A - Exemplos e questões das avaliações de larga escala

D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

Questão - Marcelo fez a seguinte planta da sua sala de aula:

Das crianças que se sentam perto da janela, a que senta mais longe da professora é

- (A) o Marcelo.
- (B) a Luiza.
- (C) o Rafael. (resposta correta)
- (D) a Tânia.

D3 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.

Questão - Ao escolher lajotas para o piso de sua varanda, Dona Lúcia falou ao vendedor que precisava de lajotas que tivessem os quatro lados com a mesma medida.

Que lajotas o vendedor deve mostrar a Dona Lúcia?

- (A) Losango ou quadrado. (resposta correta)
- (B) Quadrado ou retângulo.
- (C) Quadrado ou trapézio.
- (D) Losango ou trapézio.

D4 – Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).

Questão - Abaixo, estão representados quatro polígonos.

Qual dos polígonos mostrados possui exatamente 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos?

- (A) Retângulo
- (B) Triângulo
- (C) Trapézio (resposta correta)
- (D) Hexágono

D6 – Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não.

Questão - Observe as figuras.

Gabriela é mais alta que Júnior. Ela tem 142 centímetros. Quantos centímetros aproximadamente Júnior deve ter?

- (A) 50 cm
- (B) 81 cm
- (C) 136 cm (resposta correta)
- (D) 144 cm

As questões a seguir foram retiradas dos arquivos *Exemplos de questões e Simulado*, nos quais não se indicava o descritor referente a cada questão. Assim, a partir da característica de cada questão se atribuiu o descritor que se entendia como mais adequado.

D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

Questão - Considere no desenho abaixo, as posições dos livros numa estante:

Você está de frente para essa estante. O livro de Música é o terceiro a partir da sua:

- (A) esquerda na prateleira do meio.
- (B) direita na prateleira de cima.
- (C) esquerda na prateleira de cima.
- (D) direita na prateleira do meio. (resposta correta)

Questão - A figura abaixo mostra um teatro onde as cadeiras da plateia são numeradas de 1 a 25.

Mara recebeu um ingresso de presente que dizia o seguinte: Sua cadeira está localizada exatamente no centro da plateia.

- (A) 12
- (B) 13 (resposta correta)
- (C) 22
- (D) 23

D4 – Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).

Questão - A face superior das peças de um jogo de dominó tem formato de um quadrilátero. Observe um exemplo:

Qual o quadrilátero que melhor caracteriza a face superior da peça de um jogo de dominó?

- (A) Trapézio
- (B) Quadrado
- (C) Retângulo (resposta correta)
- (D) Losango

Questão - Chegando a uma cidade, Fabiano visitou a igreja local. De lá, ele se dirigiu à praça, visitando em seguida o museu e o teatro, retornando finalmente para a igreja. Ao fazer o mapa do seu percurso, Fabiano descobriu que formava um quadrilátero com dois lados paralelos e quatro ângulos diferentes.

O quadrilátero que representa o percurso de Fabiano é um

- (A) quadrado.
- (B) losango.
- (C) trapézio. (resposta correta)
- (D) retângulo.

Questão - Os alunos da 4ª série estão montando um cubo para fazer um dado para a aula de matemática. Eles utilizam o molde abaixo, onde os números 3 e 4 representam duas de suas faces paralelas.

Sabendo que no dado a soma dos números em duas faces paralelas quaisquer totaliza sempre 7, que algarismos deverão estar escritos nas faces vazias?

- (A)

1	2	5	6
---	---	---	---
- (B)

2	1	6	5
---	---	---	---
- (C)

2	5	1	6
---	---	---	---
- (D)

1	2	6	5
---	---	---	---

H58 - Identificar a localização de objetos ou pessoas representadas em malhas quadriculadas, mapas, croquis e outras representações gráficas, usando terminologia adequada, como: direita/esquerda, acima/abaixo, entre, em frente/atrás.

Questão - Podemos localizar a figuras que estão desenhadas no quadro abaixo, usando o quadriculado como orientação.

Por exemplo: está localizada em B,2.

3					
2
1
	A	B	C	D	E

Agora, é a sua vez:

a) está em ____,__

b) está em ____,__

c) está em ____,__

APÊNDICE B - Material do jogo Entre Linhas

Cartas de residência

<p>Localização da sua residência:</p> <p>TUCURUVI</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>PATRIARCA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>VILA PRUDENTE</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>CONCEIÇÃO</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>SANTA CECÍLIA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>VILA MADALENA</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>PARADA INGLESA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>PENHA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>SACOMÃ</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>SAÚDE</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>ITAQUERA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>SUMARÉ</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>SANTANA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>PALMEIRAS-BARRA FUNDA</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>ALTO DO IPIRANGA</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>BUTANTÃ</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>SÃO JUDAS</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>TATUAPÉ</p>
<p>Localização da sua residência:</p> <p>PINHEIROS</p>	<p>Localização da sua residência:</p> <p>TAMANDUATÉ</p>	

Exemplos de cartas

<p>TAREFA: Fazer o vestibular da FATEC Tatuapé para cursar Transporte Terrestre. ESTAÇÃO: Carrão</p> <p> Estudo + 5 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Visitar o Museu Histórico da Imigração Japonesa. ESTAÇÃO: São Joaquim</p> <p> Cultura + 4 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Refrescar-se nas piscinas do SESC Belenzinho. ESTAÇÃO: Belém</p> <p> Lazer + 3 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>
<p>TAREFA: Visitar a exposição sobre cultura nordestina na Caixa Cultural. ESTAÇÃO: Sé</p> <p> Cultura + 4 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Apreciar a cidade de São Paulo do alto do Edifício Altino Arantes (Banespa). ESTAÇÃO: São Bento</p> <p> Lazer + 3 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Assistir um concerto da OSUSP na Sala São Paulo. ESTAÇÃO: Luz</p> <p> Lazer + 3 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>
<p>TAREFA: Jogar basquete com os primos no SESC Vila Mariana. ESTAÇÃO: Ana Rosa</p> <p> Lazer + 3 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Visitar a exposição sobre Carlos Drummond de Andrade na Casa das Rosas. ESTAÇÃO: Brigadeiro</p> <p> Cultura + 4 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>	<p>TAREFA: Ir a um show de rock no Jockey Club de São Paulo. ESTAÇÃO: Butantã</p> <p> Lazer + 3 Bilhetes</p> <p>ENTRE LINHAS</p>

TAREFA: Visitar a exposição do artista Romero Britto no Centro Cultural Banco do Brasil.

ESTAÇÃO: Sé

Cultura

+ 4 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Assistir a peça teatral *Vidas Secas* no Centro Cultural Jabaquara.

ESTAÇÃO: Jabaquara

Cultura

+ 4 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Assistir a final da Copa São Paulo de futebol junior no estádio do Pacaembu.

ESTAÇÃO: Clínicas

Lazer

+ 3 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Visitar o aquário de São Paulo.

ESTAÇÃO: Santos-Imigrantes

Cultura

+ 4 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Passear de bicicleta com a família pelo parque da Água Branca.

ESTAÇÃO: Barra Funda

Lazer

+ 3 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Visitar o Museu da Imigração.

ESTAÇÃO: Brás

Cultura

+ 4 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Jogar handebol no SESC Santana.

ESTAÇÃO: Jardim São Paulo

Lazer

+ 3 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Assistir aos desfiles das escolas de samba no sambódromo do Anhembi.

ESTAÇÃO: Portuguesa-Tietê

Lazer

+ 3 Bilhetes

ENTRE
LINHAS

TAREFA: Visitar o Museu de Arte Sacra.

ESTAÇÃO: Tiradentes

Cultura

+ 4 Bilhetes

ENTRE
LINHAS