UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

MARIA LUCIA PANOSSIAN

O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra

São Paulo
2014

MARIA LUCIA PANOSSIAN

O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura

São Paulo
2014

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

373.33
P195m

Panossian, Maria Lucia
O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra / Maria Lucia Panossian; orientação Manuel Oriosvaldo de Moura. São Paulo: s.n., 2013.
317 p. tabs.; anexos; apêndices

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Álgebra (Estudo e Ensino) 2. Álgebra (Filosofia) 3. Filosofia da Matemática 4. Pensamento (Teoria) I. Moura, Manoel Oriosvaldo de, orient.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em: ___/___/______

BANCA EXAMINADORA

Professor: ___________________________ Instituição: ______________________
Julgamento: _________________________ Assinatura:________________________

Professor: ___________________________ Instituição: ______________________
Julgamento: _________________________ Assinatura:________________________

Professor: ___________________________ Instituição: ______________________
Julgamento: _________________________ Assinatura:________________________

Professor: ___________________________ Instituição: ______________________
Julgamento: _________________________ Assinatura:________________________

Professor: ___________________________ Instituição: ______________________
Julgamento: _________________________ Assinatura:________________________

Aos profissionais das escolas e universidades públicas, pelo compromisso da organização do ensino visando à formação dos estudantes e pela superação das condições nem sempre adequadas no exercício da profissão.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Marly e Walter, pelo apoio material e emocional de forma incondicional.

Aos meus irmãos Walter e Guto, a minha cunhada Patrícia, aos meus sobrinhos queridos Vinicius e João Paulo e aos demais familiares por compreenderem os momentos de ausência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, pelos ensinamentos, exemplos, orientações e presença constante.

Ao Prof. Dr. Joaquim Gimenez, pela orientação durante o estágio na Universidade de Barcelona.

Aos amigos Jackie e Zé, por estarem sempre por perto e simplesmente serem quem são: meu casal referência.

À minha amiga Carol, companheira de estudos e viagens, por confiar no meu trabalho, mais do que eu mesma.

Aos amigos de tempos, Denise, Lia, Aloe, Leny, Tatsuo, Karina, Leandro, pela compreensão e incentivo.

Aos professores que participaram e me ajudaram a desenvolver o curso de atualização: ‘Atividades de Ensino de Álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico cultural’, em especial a Amanda, pela valiosa contribuição em relação aos dados desta pesquisa.

Aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe) pelas discussões que fundamentam e me orientam teoricamente.

Aos participantes do projeto “Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Princípios e Práticas para a Organização do Ensino” vinculado ao edital Observatório da Educação da CAPES, pelas possibilidades de aprendizado constante.

Aos coordenadores do Grupo de História e Epistemologia da Educação Matemática (HEEMA), Fumikazu Saito e Marisa Dias, por possibilitarem a minha participação nas discussões.

À direção, coordenação e professores da E. E. Maestro Fabiano Lozano, por compreenderem a importância de um projeto de pesquisa deste porte para minha formação como professora.

A todos que conheci durante estes quatro anos de desenvolvimento do projeto de pesquisa em suas diferentes fases e que de uma maneira ou outra compartilharam angústias, experiências, aprendizagens e, consequentemente, modificaram-me como sujeito.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo **(**FAPESP), que financiou esta pesquisa.

A análise lógica não tem, portanto, que se libertar dos acidentes puramente históricos e da forma histórica de apresentação das condições realmente universais e absolutamente necessárias, por meio das quais um sistema de interação surge e, tendo surgido, continua a existir e se desenvolver. O próprio processo histórico faz o trabalho de purificação, ao invés de e antes do teórico. (ILYENKOV, 1977, p.210).

RESUMO

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Esta tese apresenta os resultados da pesquisa desenvolvida com o objetivo de investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. A partir de categorias do materialismo dialético e dos fundamentos da teoria histórico-cultural, foram analisadas formas de pensamento, linguagem e formação de conceitos em registros de história da álgebra. Essa primeira análise permitiu destacar e explicar os nexos conceituais e caracterizar o que se considerou como a essência da álgebra: estabelecer a relação entre grandezas variáveis de forma geral. A essência da álgebra foi considerada como categoria para outro movimento de análise, sobre a constituição do objeto de ensino da álgebra. Este objeto foi reconhecido em propostas curriculares, no discurso de professores e em situações de ensino. Assim, os dados para análise foram apreendidos tanto do desenvolvimento histórico e lógico dos conceitos algébricos (que se apresentaram como objeto de estudo em um primeiro momento e posteriormente assumiram o papel de instrumento e categoria de análise), quanto do processo de preparação e desenvolvimento de um curso de atualização para professores que objetivava concretizar e colocar em movimento as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra. Os tópicos “sequências”, “equações” e “funções”, que perpassam o ensino de álgebra na educação básica, foram as manifestações que possibilitaram evidenciar a análise do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para a organização do ensino. Esses processos de análise permitiram reconhecer a importância do processo de generalização para o conhecimento algébrico, o que gerou a elaboração de um “modelo de análise da generalização em situações de ensino”. A partir do que se reconheceu como a essência do conhecimento algébrico também se analisou as ações de planejamento para o ensino de equações, estabelecidas entre a pesquisadora e uma professora. Nessa pesquisa, se reconheceu que, a essência e os nexos conceituais do conhecimento algébrico revelados no seu movimento histórico e lógico constituem-se em elementos centrais a serem considerados para constituição do objeto de ensino da álgebra. Essa é a principal relação entre o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra. O reconhecimento dessa relação gera implicações diretas no processo de elaboração de programas curriculares, na medida em que apresenta os fundamentos para rever as concepções sobre o objeto de ensino da álgebra. Dessa forma, gera também consequências para o processo de formação de professores, de modo que estes considerem, além das orientações didáticas e metodológicas, a especificidade da forma de conhecimento a ser ensinada para formação do pensamento teórico dos estudantes.

Palavras-chave: Movimento histórico e lógico. Objeto de ensino. Álgebra. Atividade. Pensamento teórico.

ABSTRACT

PANOSSIAN, M. L**. The historical and logical movement of algebraic concepts as a principle for the constitution of the teaching's object of algebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

This thesis presents the results of the research carried out to investigate the relationship between the historical and logical movement of algebraic concepts and the teaching's object of algebra. Based on categories of dialectical materialism and on the theoretical framework of cultural-historical theory, modes of thinking, language and concept formation were analyzed through algebra history records. This first analysis allowed to highlight and to explain the conceptual connections and to characterize what was considered as the essence of algebra: to establish the relationship between variable magnitudes in a general way. The essence of algebra was considered as a category for another movement of analysis on the constitution of the teaching's object of algebra. This object was recognized in curriculum proposals, in teachers' speech and in teaching situations. Thus, data for analysis were seized from both: the logical and historical development of algebraic concepts (which present themselves as an object of study in a first moment and subsequently they assumed the role of an instrument and an analytical category), and the process of constructing and developing a course for teachers, which aim was to put in movement the relationships between the historical and logical movement of concepts and the teaching's object of algebra. The topics "sequences", "equations" and "functions" that pervade algebra teaching in elementary education were the manifestations that allowed to evidence the analysis of the historical and logical movement of algebraic concepts as a principle for teaching organization. These processes of analysis allowed to recognize the importance of the generalization process for the algebraic knowledge, which led to the development of a "model of analysis of generalization in teaching situations". From what was recognized as the essence of algebraic knowledge, planning actions for teaching equations established between the researcher and a teacher were also analyzed. In this research, it was recognized that the essence and the conceptual connections of algebraic knowledge revealed in its historical and logical movement are the central elements to be considered for the constitution of the teaching object of algebra. This is the main relation between the study of the historical and logical movement of concepts and the teaching object of algebra. The recognition of this relationship generates implications in the development of curricula, once it presents the fundamentals to review the concepts on the subject of teaching algebra process. Thus, it also generates consequences for the process of teacher training, so that they may consider, in addition to didactic and methodological guidelines, the specificity of the form of knowledge to be taught for students' theoretical thinking development.

Keywords: Historical and logical movement. Object of teaching. Algebra. Activity. Theoretical thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AOE	-	Atividade orientadora de ensino
CAPES	-	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENDIPE	-	Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino
ENEM	-	Encontro Nacional de Educação Matemática
EOS	-	Enfoque ontossemiótico da cognição matemática
GEPAPe	-	Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica
GRADEM	-	Grupo de Pesquisas sobre Análise Didática sobre Educação Matemática
ICMI	-	International Commission on Mathematical Instruction
IMC	-	Índice de massa corporal
NCTM	-	National Council of Teacher of Mathematics
PISA	-	Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes
RE	-	Registro Escrito
USP	-	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO: A ATIVIDADE DE PESQUISA

> *Com toda sua peculiaridade, a atividade do indivíduo humano constitui um sistema compreendido no sistema de relações da sociedade. Fora destas relações, a atividade humana em geral, não existe.* (LEONTIEV, 1983, p.67).

Para Leontiev (1983, 1994), a atividade é a unidade de análise do desenvolvimento do psiquismo. Por meio de seus elementos (necessidade, motivos, objetivos, ações, operações) se reconhece o movimento de constituição do sujeito. O sujeito constitui-se em sua atividade a partir de uma necessidade que se configure como individual para ele, mas é ao mesmo tempo uma necessidade constituída nas relações sociais que o sujeito estabelece com o mundo ao longo de sua existência. Para satisfazer essa necessidade, o sujeito precisa “encontrar” um objeto adequado a ela, que irá, assim, orientar suas ações nessa atividade e se configurará como o “motivo” para agir. Esse processo envolve, então, a definição de ações e operações necessárias para atingir os objetivos conforme as condições dadas. A atividade do sujeito possibilita a ele, ao mesmo tempo, que atue sobre si mesmo, transformando ou reorganizando os seus processos psíquicos.

A estrutura da atividade e seus elementos são referência para estabelecer um paralelo com o movimento dessa atividade de pesquisa. Para que a pesquisa se desenvolva como uma expressão singular dos motivos sociais historicamente estabelecidos, deve partir de uma necessidade do sujeito que seja, ao mesmo tempo, orientada e condicionada por necessidades sociais.

Desta forma, para que seja possível explicitar objetivos, ações e operações que dão movimento a esta pesquisa, é necessário um panorama sintético das condições que encaminharam a pesquisadora a desenvolver tal investigação. A atuação profissional, como professora de Matemática, iniciou-se em 1992, com a posse do diploma de bacharel e licenciada em Matemática, tendo cursado disciplinas sobre o conhecimento matemático específico; algumas sobre os fundamentos da Educação (Didática, Psicologia, Filosofia, Metodologia) e algumas horas de estágios de observação. Não é objetivo desta pesquisa, discutir a qualidade ou a organização desses cursos que formam professores, ainda que, indiretamente, esta pesquisa contribua com elementos para essa discussão, como se verá.

Assim, no início da década de 1990, os instrumentos que municiam a prática como professora são os livros didáticos, as propostas curriculares estaduais (SÃO PAULO, 1988) e os conhecimentos acadêmicos aos quais se teve acesso.

Com os estudantes em sala de aula, uma pergunta inicial como professora (e, portanto, uma "necessidade" a ser satisfeita) foi/é "**O que** eu vou ensinar?" Para esse tipo de questão, facilmente se encontram respostas, pela lista de conteúdos, definidas nos programas curriculares ou nos livros didáticos. Este poderia ser um "objeto" capaz de satisfazer aquela primeira necessidade como professora. Uma segunda "necessidade" estava relacionada à pergunta "Como eu vou ensinar", que levou a pesquisadora a buscar a formação, também em nível de graduação, em Pedagogia. Este foi o "objeto" que, naquele momento, parecia satisfazer essa segunda necessidade, de forma sintética, cujo pensamento era: "Eu já sei matemática, agora preciso ver como ensinar". Mas, algumas nuances podem ser destacadas nesse pensamento. Afinal, que matemática é essa "que se sabe"? Será que podemos pensar em estratégias gerais de ensino, que servem para ensinar matemática, português, geografia, dissociando o conhecimento específico de suas práticas pedagógicas? E a lista de conteúdos que está no livro didático e nas propostas curriculares, por que mesmo elas estão lá? Por que nessa ordem, e quais são os seus critérios de definição? No início da prática profissional, tais questionamentos, retomados nesta pesquisa, não eram formulados com clareza, sendo suficiente a aceitação de que o conteúdo dos programas curriculares e livros didáticos constituíam a "matemática" a ser ensinada. Dessa forma a atenção da prática profissional era voltada a encontrar as estratégias para ensinar o que estava "previamente" definido.

Naquele momento de formação, as apropriações derivadas do curso de Pedagogia atendiam a necessidade da professora em busca de princípios pedagógicos e orientações metodológicas. As relações entre o conhecimento matemático específico e o modo de organização do ensino eram estabelecidas pela própria professora, conforme as condições e os conhecimentos apropriados. Entende-se que isso está de acordo com os pressupostos da atividade como unidade de análise do psiquismo, pois o sujeito parte de uma necessidade, estabelece seus objetivos, ações e operações em busca do objeto que concretiza sua necessidade. Nesse momento inicial de atuação como professora, pode-se dizer que o objeto eram os conhecimentos pedagógicos que permitiam a compreensão e superação da própria atuação profissional.

Durante os anos na graduação em Pedagogia, a criação do Clube de Matemática, em 1999[1], foi a primeira experiência que tinha por objetivo, de forma sistemática, dentro da comunidade acadêmica, colocar em relação o desenvolvimento do conhecimento específico e as ações de ensino. A participação nesse ambiente educativo consolidou e orientou a

[1]O Clube de Matemática atualmente é reconhecido como projeto de estágio da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, coordenado pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura.

continuação de estudos teóricos e práticos, constituindo, desta forma, um espaço que oferecia as condições para atingir os objetivos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Após um período dedicado exclusivamente às ações profissionais na escola e em diferentes funções (pedagógicas e administrativas), novas necessidades surgiram e se tornaram cada vez mais específicas. A angústia em relação ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra, fonte de muitas dificuldades dos estudantes, foi o tema de pesquisa de mestrado (PANOSSIAN, 2008).

O desenvolvimento da pesquisa de mestrado teve como referencial a teoria histórico-cultural e a teoria da atividade, e encontrou no Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe)[2] a ambiência adequada para sua realização, por discutir questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem que superam a prática individual por meio da atividade pedagógica e a conscientização sobre as finalidades do ensino.

As condições de estudo e pesquisa, então garantidas pelo curso de mestrado e pela participação no grupo GEPAPe, possibilitaram o desenvolvimento da pesquisa sobre as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes (PANOSSIAN, 2008), por meio da qual foi possível elaborar sínteses entre as quais se destacam:

a) a necessidade de ações do professor que gerem nos estudantes o pensamento teórico, pois as generalizações realizadas pelos estudantes a partir de casos particulares não se consolidaram como conhecimento para a resolução de outras situações;
b) o reconhecimento de que é necessário estabelecer inter-relações entre o conhecimento algébrico e aritmético;
c) a apropriação dos conceitos algébricos como necessidade para o estudante para que esse conhecimento seja mobilizado mesmo em situações que existem estratégias aritméticas de resolução;
d) a necessidade de que, ao longo do processo escolar, os estudantes se apropriem do significado do simbolismo algébrico com os conceitos a ele subjacentes, considerando que os estudantes atribuem sentidos pessoais ou ainda significados

[2] O grupo GEPAPe, coordenado pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura, é atualmente constituído por professores de diversas instituições universitárias públicas, e pós-graduandos em nível de mestrado e doutorado. Realiza estudos e pesquisas sobre Atividade Pedagógica, por meio das diferentes investigações dos seus membros em universidades, em instituições escolares com grupos de professores e estudantes, em cursos de extensão oferecidos para profissionais de ensino ou no próprio Clube de Matemática. Os resultados das pesquisas individuais e coletivas, realizadas pelo grupo, são apresentados em congressos, seminários, na forma de artigos, teses e dissertações e livros, sendo o mais recente publicado em 2010, organizado pelo grupo (MOURA et al., 2010).

compartilhados, no grupo, aos signos e símbolos, significados esses que nem sempre se aproximam dos significados atribuídos historicamente;

e) e o reconhecimento de que os estudantes têm possibilidades restritas de compreender a essência de um conceito, no seu movimento lógico-histórico, se esta não estiver contemplada em várias e diferentes situações de estudo propostas a eles.

Tais sínteses, como constatações das manifestações do pensamento e da linguagem algébrica, evidenciam algumas das dificuldades encontradas pelos professores no processo de ensino de conceitos relacionado a esse campo da matemática. Pode-se observar que tais dificuldades não estão relacionadas somente ao processo de organização do ensino, mas à própria especificidade do conhecimento algébrico. Desta forma, tornou-se uma necessidade para esta pesquisadora aprofundar os conhecimentos, buscando o que determina ou influencia esta relação entre o conhecimento algébrico específico e a organização das ações de ensino.

Assim, em outras condições objetivas proporcionadas pelo ingresso no doutorado e pela contínua participação no grupo GEPAPe, as necessidades se expandem e os estudos e as pesquisas não são mais ações individuais de uma professora em busca de compreender e aprimorar sua própria prática. Justificada por necessidades sociais, a pesquisa deve contribuir com elementos para a discussão do grupo, tanto sobre atividade pedagógica como relacionadas ao conhecimento matemático, em particular o conhecimento algébrico, temática específica da pesquisa. Assim desenvolve-se um processo de conscientização de que pesquisas desse porte não são realizadas individualmente e em curto espaço de tempo, mas se consolidam e adquirem novas qualidades na medida em que estabelecem as relações, no caso, fortemente marcadas pela participação em um grupo de pesquisa, que sustenta as discussões empíricas e teóricas.

Dando continuidade ao processo iniciado no mestrado, em relação às investigações sobre o ensino e aprendizagem da álgebra, e a partir das sínteses anteriormente produzidas, definiu-se a necessidade de pesquisar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e suas implicações para a organização do ensino de álgebra.

A **hipótese desta pesquisa** é a de que "o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes".

Desse modo, **o objeto da pesquisa** é o processo de constituição do "objeto de ensino da álgebra".

Explicitados os motivos para a realização desta pesquisa, é necessário justificar e posicioná-la em suas potenciais contribuições acadêmicas e sociais. Vale alertar que não se trata de estudo sobre a história ou historiografia da matemática, como fizeram os pesquisadores Contador (2007) e Nobre (2004), ainda que contenha elementos deste ramo científico. Não é pretensão nesta pesquisa retomar os documentos históricos para realizar interpretações diferentes das existentes sobre o que se constitui o objeto algébrico de conhecimento. Por isso, não se privilegiam as fontes primárias que constituem os documentos históricos, ainda que algumas sejam usadas, por exemplo, o texto traduzido de Viète (2006). Não se trata também, em outro extremo de investigação, sobre as potencialidades do estudo da história da matemática como instrumento metodológico ou recurso facilitador e exemplificador no ensino.

Compreende-se que o olhar sobre o objeto da álgebra para os pesquisadores matemáticos é diferente do olhar sobre o objeto da álgebra para os pesquisadores do ensino de matemática. O matemático reconhece nos conceitos matemáticos seu objeto de estudo e pesquisa e, desta forma, os desenvolve, a mudança nos objetos da álgebra (assim como o de outras áreas do conhecimento matemático), de forma particular, que são o fim de sua atividade. Por outro lado, para o pesquisador do ensino de matemática, o objeto da álgebra não constitui um fim em si mesmo, mas a sua apropriação é elemento fundamental, objeto de ensino para desenvolver as funções psíquicas dos estudantes. Desta forma, se considera que a álgebra escolar é derivada da álgebra que, historicamente, se constituiu na experiência da humanidade, mas o objetivo na escola é a apropriação do conhecimento algébrico como um instrumento que possibilita a formação dos estudantes. Portanto, pressupõe-se que o objeto de ensino da álgebra contempla os nexos conceituais e a essência do conhecimento algébrico, e ainda mais que o modo de organização do ensino possibilita a apropriação desta forma de conhecimento e a formação e o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

Assim, esta pesquisa se insere na interface entre o que constitui o objeto matemático analisado lógica e historicamente e o objeto de ensino da matemática a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade.

Desta forma o **objetivo desta pesquisa** é “investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra revelado em propostas curriculares e nas ações dos professores, a partir dos princípios da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade”.

A existência de tais relações não é questionada e, por vezes, são formalmente explícitas, pois não se concebe um objeto de ensino que não tenha relação com o objeto científico de que trata, no caso o conhecimento algébrico. Entretanto, a abordagem sobre a especificidade do conhecimento algébrico a partir de seu desenvolvimento histórico não pode ser considerada somente para que se elabore uma lista de tópicos de estudo, ou para que se argumente que as equações devem ser ensinadas antes de funções, porque, historicamente, este foi o desenvolvimento cronológico. A explicitação dessas relações entre o movimento histórico e lógico e a organização do ensino da álgebra é o propósito desta tese.

Para a exposição da tese, optou-se pela seguinte distribuição em capítulos. No capítulo 1, apresentam-se o método e a metodologia da pesquisa. No capítulo 2, o tema é o objeto de ensino da álgebra, e a intenção é apresentar um panorama das principais concepções de álgebra e de seu ensino, revelada em pesquisas científicas, propostas curriculares e discurso de professores. Inicia-se o capítulo 3 explicitando o que se concebe como "movimento histórico e lógico dos conceitos", a partir das categorias do materialismo dialético e, de forma particular, se analisa o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos com a intenção de revelar os nexos conceituais e a essência dessa forma de conhecimento. O capítulo 4 apresenta os movimentos da análise sobre "isolados" do ensino de álgebra (sequências, equações e funções) realizada a partir do que foi considerado como relação essencial do conhecimento algébrico, e são explicitadas algumas relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e a constituição do objeto de ensino da álgebra.

Os capítulos 5 e 6 mesclam processos de análise e síntese, ainda em busca de relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e constituição do objeto de ensino da álgebra. Esses dois capítulos também contribuem com a explicitação de processos que podem vir a ser conduzidos na formação de professores.

O capítulo 5 destina-se a explicitação de um modelo de análise do processo de generalização matemática em situações de ensino. Esse modelo foi gerado durante um estágio na Universidade de Barcelona, sob a supervisão do professor Joaquim Gimenez, pesquisador do ensino de Matemática, e o seu grupo de pesquisa, no período de setembro a dezembro de 2012, e contempla os estudos sobre o processo de generalização matemática.

O capítulo 6 apresenta os dados obtidos em reuniões de planejamento entre uma professora de matemática da rede municipal de ensino e a pesquisadora. A situação de ensino planejada e as ações da professora e pesquisadora foram analisadas considerando a essência do conhecimento algébrico revelada pelo estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as sínteses finais da pesquisa, que destacam as principais relações estabelecidas entre o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, bem como suas implicações para a organização do ensino e os processos de formação de professores.

1 MÉTODO E METODOLOGIA DA PESQUISA

No capítulo anterior, foram expostos os motivos para a condução desta pesquisa, que respondem a necessidades pessoais da pesquisadora e sociais, sob a perspectiva histórico-cultural do ensino, e orientam a compreensão da pesquisa como atividade, no sentido atribuído por Leontiev (1983, p.83), para quem “A atividade não pode existir sem um motivo”. Assim, esta atividade de pesquisa tem um objeto que concretiza o motivo desta, e para o qual estão dirigidas todas suas ações e operações. Esse objeto de pesquisa é a constituição do objeto de ensino da álgebra. De forma pontual, pretende-se destacar “quais” conhecimentos algébricos ensinamos e “para que” os ensinamos.

Um olhar científico sobre o objeto de ensino da álgebra nos leva a questionamentos sobre sua constituição. Uma pergunta inicial é: “Qual, ou o que é o objeto de ensino da álgebra?” Essa pergunta pode nos conduzir a uma definição formal do tipo “O objeto de ensino da álgebra é […]”. , da qual se segue uma lista de tópicos, os quais podem estar associados a conceitos, técnicas, processos de pensamento, ações e outros. Mas essa resposta não é completa, a menos que estejam explícitos os motivos e as condições que levaram a essa definição do objeto de ensino da álgebra.

Outra pergunta a ser feita é: “Onde se manifesta o objeto de ensino da álgebra?” Como resposta, pode-se considerar: nos programas curriculares, nas ações dos professores e nos livros didáticos. Entretanto, estudar a manifestação do objeto de ensino da álgebra, sem compreender as razões e os motivos pelos quais atualmente se definem determinados elementos como objeto de ensino da álgebra, também não revela a sua constituição. Por exemplo, não basta verificar que “equações” são um tópico do ensino de álgebra, por se manifestarem em diferentes propostas curriculares, em diferentes tempos e espaços, se não é possível identificar e justificar explicitando as razões de por que ensinar “equações” é relevante para o ensino da álgebra e por que compõe seu objeto.

Mas tais perguntas conduzem a um questionamento que nesta tese se considera fundamental, e que, ainda que não seja respondida completamente, é condutora do desenvolvimento da pesquisa: **que princípios devem orientar a constituição de um objeto de ensino, em particular, da álgebra**? Entende-se que a formulação desses princípios se vincula a concepções de homem, de ensino, de conhecimento, entre outras, e, portanto, tem dimensões sociais, psicológicas, epistemológicas, políticas e outras. Mais ainda, também implica uma concepção de conhecimento e, consequentemente, de educação. Nesta tese, tais concepções serão assumidas a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade, que, por sua vez, se pautam no materialismo histórico e dialético (MARX, 1888; ENGELS, 1876).

Para os fins desta pesquisa, pretende-se destacar dois elementos que se consideram essenciais para o estabelecimento desses princípios: o modo como o conhecimento é constituído na experiência histórica humana e o modo de organização do ensino visando à formação do sujeito ao se apropriar desse conhecimento.

Tornou-se premissa desta tese que, para compreender o movimento de formação do conhecimento em seu desenvolvimento histórico, é necessário compreender as circunstâncias que geraram os fatos históricos, e que, portanto, permitiram seu movimento lógico. Nesse sentido, os fatos da história deveriam ser tratados de modo lógico seguindo o curso do pensamento, como indica Engels ao escrever sobre a elaboração do método que está na base da crítica marxista à economia política.

> A história procede frequentemente por saltos e em ziguezague e, se houvesse que segui-la ao mesmo tempo por toda a parte, teria não apenas de recolher muito material de pouca importância, como também o curso do pensamento teria frequentemente que ser interrompido; além disso, não se poderia escrever a história da economia sem a da sociedade burguesa e, deste modo, o trabalho tornar-se-ia infindável, uma vez que faltam os trabalhos preparatórios. Portanto, o modo lógico de tratamento era o único que estava no seu lugar. Este [modo], porém, não é de facto senão o histórico, despido apenas da forma histórica e das casualidades perturbadoras. Por onde esta história começa, por aí tem de começar igualmente o curso do pensamento, e o seu avanço ulterior não será mais do que o reflexo, numa forma abstracta e teoricamente consequente, do decurso histórico; um reflexo corrigido, mas corrigido segundo leis que o próprio decurso histórico real fornece, na medida em que cada momento pode ser considerado no ponto de desenvolvimento da sua plena maturidade, da sua forma clássica. (ENGELS, 1859, p.2).

Assim, o modo lógico de acompanhar os processos de construção do conhecimento na experiência humana é, na verdade, histórico. Por sua vez, os acontecimentos históricos são determinantes do desenvolvimento dos processos lógicos de pensamento. No caso do conhecimento algébrico, não é diferente, sendo necessário, portanto, compreender o seu movimento histórico e lógico[3].

Além disso, considera-se a existência de correlações entre a história social dos homens e a história do desenvolvimento de um sujeito. Não porque a história do sujeito repete a

[3]Optamos pela expressão "movimento histórico e lógico", e não lógico-histórico, por considerarmos que os acontecimentos históricos são determinantes do que se têm condições de analisar como desenvolvimento do processo de pensamento. Só é possível captar e reconhecer o desenvolvimento do pensamento por meio das marcas históricas que vão sendo deixadas. Entende-se que os processos lógicos de pensamento só se consolidam, e completam seu processo de constituição, no movimento do abstrato ao concreto, quando encontram a possibilidade de se concretizar, sendo cristalizados em ações ou registros que se tornam históricos. Assim, ainda que se considere que a relação lógico/histórico é uma relação dialética, só conseguimos determinar na experiência humana o movimento lógico dado o movimento histórico. Por isso, usamos durante toda a tese o registro histórico e lógico e não o contrário.

história humana, mas sim porque o desenvolvimento dos sujeitos (singular) influencia o desenvolvimento social do gênero humano (universal) e vice-versa. Por meio da atividade e do trabalho dos homens é que as leis da sociedade se revelam. A história se desenvolve na medida em que os homens buscam satisfazer suas necessidades e caminham em direção aos seus objetivos. Ao mesmo tempo, as condições humanas dadas historicamente constituem o sujeito e suas necessidades.

Desta forma se reconhecem paralelos entre os conceitos de atividade e trabalho. O conceito de atividade é explicitado por Leontiev (1994, p. 68) como "[…] processos psicologicamente caracterizados por uma meta a que o processo se dirige (seu objeto) coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é o motivo". Por sua vez, em Marx, se identificam os componentes essenciais do trabalho: "[...]: 1) a atividade adequada a um fim, isto é, o próprio trabalho; 2) a matéria a que se aplica o trabalho, o objeto do trabalho; 3) os meios de trabalho, o instrumental de trabalho" (MARX, 2006, p.212).

Conforme Moura (2013), o trabalho e a atividade se orientam por ações dirigidas a um fim, entretanto, no trabalho, se destaca a natureza externa deste fim, ou seja, o produto do trabalho, e no conceito de atividade, destaca-se a natureza interna deste fim, que provoca as mudanças psíquicas do sujeito.

O trabalho e a atividade humana são conceitos centrais para compreender tanto o processo de construção do conhecimento ao longo da história (objetivação), quanto o processo de formação psíquica do sujeito (apropriação) em um determinado momento histórico. Em busca de atender suas necessidades inicialmente biológicas (fome, abrigo, segurança, procriação e outros) (MALINOVSKY, 1978) e posteriormente sociais e culturais (melhorar o armazenamento, modos de alimentação, convivência, controle) é que a humanidade constitui diferentes formas de conhecimento, e cada ser humano, de forma singular, se apropria dele.

A formação e o desenvolvimento do ser humano estão assim relacionados aos processos biológicos e também a processos sociais e culturais. Por isso, é necessário compreender o movimento de objetivação do conhecimento na experiência humana ao longo da prática social (inserido em um movimento filogenético) e também o de apropriação desse conhecimento por um determinado sujeito (inserido no movimento ontogenético), que é mediado pelas condições particulares de existência presentes em dada sociedade.

O processo educativo, por sua vez, age sobre a formação da personalidade e sobre as formas de pensamento de cada sujeito, por meio de um processo de apropriação e internalização de conceitos (VIGOTSKI, 2001). Conceitos estes que são revelados no movimento histórico e lógico e em função da satisfação das necessidades humanas.

Retomando a questão principal da tese, “Quais princípios devem orientar a constituição de um objeto de ensino, em particular, da álgebra?” temos a partir do exposto, a hipótese de que “o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes”.

Sendo essa a hipótese, foi estabelecido o objetivo principal da tese: “investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra revelado em propostas curriculares e nas ações dos professores”.

1.1A ATIVIDADE DE PESQUISA: DUAS AÇÕES PRINCIPAIS

Para atingir o objetivo e verificar a hipótese formulada, foram definidas algumas ações e operações da pesquisa. Tornou-se necessário estudar e analisar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, gerando um quadro interpretativo do objeto de ensino da álgebra e de seus princípios constituintes. Isso porque, conforme Caraça (1952, p.64, grifos do autor), “Não basta conhecer os fenômenos; importa *compreender* os fenômenos, determinar as *razões* da sua produção, descortinar as *ligações* de uns com os outros”. Para obtenção e análise dos dados, a pesquisa foi conduzida por meio de duas ações que estão inter-relacionadas. A primeira delas diz respeito ao próprio movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a segunda, contempla o objeto de ensino da álgebra. Estas não serão ações isoladas, mas relacionam-se na medida em que para compreender o objeto de ensino da álgebra se recorrerá também ao movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

Desse modo, o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos é, inicialmente, objeto de estudo nesta pesquisa e, posteriormente, instrumento que permitirá a análise do objeto de ensino da álgebra.

É ainda pressuposto desta pesquisa que recorrer às categorias do materialismo dialético para fundamentação do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos possibilita realizar a análise do objeto de ensino da álgebra a partir de formas de pensamento teórico.

Para que seja possível compreender esses fenômenos (o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a constituição do objeto de ensino da álgebra), essas ações serão conduzidas na dinâmica que expressa a relação entre o singular, o particular e o universal. Entende-se que tal dinâmica é característica da lógica dialética.

Estamos nos referindo à concepção marxista de dialética, relacionada à teoria do conhecimento, que compreende a totalidade concreta da realidade objetiva, em suas contradições e, portanto, corresponde à forma de pensamento mais apropriada para captar os fenômenos em movimento, pois:

> Para captar-se o movimento da realidade, na concepção metodológica marxiana, torna-se necessário utilizar-se a lógica inerente ao movimento da própria realidade que é dinâmica, não só no sentido de avançar numa determinada direção, mas através da intensa reciprocidade dos elementos que a constituem. É a lógica dialética. As leis da lógica dialética são exatamente as leis que dirigem o movimento objetivo da realidade transformadas em leis do pensamento, e que se nos apresentam através de conceitos de máxima generalidade. (OLIVEIRA, 2005, p.42).

Assim, torna-se necessário explicitar o objeto de pesquisa no seu movimento dialético e na relação singular-particular-universal. Tomam-se como ponto de partida, as formas singulares de manifestação (do objeto da álgebra e do objeto de ensino da álgebra) para que seja possível analisá-las em suas particularidades em busca do universal. Entretanto, a própria singularidade inicialmente definida é em si um recorte da realidade objetiva produzida pela experiência humana e, dessa forma, já contém em si elementos de uma "universalidade" até o estágio que foi possível atingir em seu movimento histórico e lógico.

Assim, foi estabelecido um recorte da totalidade, então caracterizado como singularidade para o estudo. As particularidades têm o papel de mediadoras entre o singular e o universal e se revelam na forma de conceitos ou fenômenos.

> Ora, a importância da particularidade (na relação singular-particular-universal) na análise de um determinado fenômeno está no fato de que ela se constitui em mediações que explicam os mecanismos que interferem decisivamente no modo de ser da singularidade, na medida em que é através delas que a universalidade se concretiza na singularidade. (OLIVEIRA, 2005, p.46).

A singularidade é tão mais compreendida, quanto mais desenvolvida forem as particularidades (conceitos e fenômenos) em direção ao que se constitui como universal. "Em outras palavras: o singular é tão mais compreendido, quanto mais se tenha captado suas mediações particulares com a universalidade" (OLIVEIRA, 2005, p.49-50).

Outros estudiosos do materialismo dialético compreendem o processo de conhecimento por meio da relação singular/particular/geral. É o caso de Cheptulin (1982), que considera como particular as "formações materiais" (coisas, corpos, fenômenos) que

> [...] existem objetivamente, fora e independentemente da consciência humana, possuem características espaciais e temporais, estão em movimento, tem seus próprios aspectos e ligações necessárias e contingentes, singulares e gerais, possíveis e reais, incluem a causalidade, a contradição e possuem todas um conteúdo e uma forma, uma essência e um fenômeno, etc. (CHEPTULIN, 1982, p.74).

A partir dessas formações materiais, reconhece o que as diferencia (o singular) e o que as identifica (o geral), pois "[...] o singular e o geral não existem de maneira independente, mas somente por meio de formações materiais particulares (coisas, objetos, processos), que são momentos, aspectos deste último" (CHEPTULIN, 1982, p.194).

Entretanto, destaca que esse geral que denomina "comum" não caracteriza a essência se estiver caracterizando formações materiais em diferentes estágios evolutivos, justamente por não considerar o próprio processo de desenvolvimento dessa formação material. E prossegue indicando que, "Para compreender o significado verdadeiro desse geral e suas relações com a essência das formações materiais confrontadas, é preciso preencher as lacunas existentes entre estas formações, restabelecendo os estágios do desenvolvimento que as separam" (CHEPTULIN, 1982, p.200).

Nesse sentido, mantém-se nesta pesquisa a referência à relação singular/particular/universal, considerando que o universal é quem possibilita que esse geral comum seja superado ao buscar a essência dos objetos aqui analisados a partir de suas diferenças, identidade e processos constitutivos e de desenvolvimento.

Conscientes da impossibilidade de apreender todos os fatos do movimento do conhecimento algébrico e seu ensino, se reconheceu que a essência buscada nesta pesquisa, em relação ao movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e ao objeto de ensino da álgebra, e caracterizada como universal, deve se revelar também nossos objetos e fenômenos particulares no atual estágio de desenvolvimento, ou seja, no nível atual de objetivação e apropriação do conhecimento algébrico.

Durante o movimento de pesquisa em busca de relações teóricas, o movimento do pensamento que se procurou desenvolver foi o de ascensão do abstrato ao concreto. Ao analisar as singularidades que foram isoladas e recortadas da realidade objetiva, foram geradas as abstrações, nem todas essenciais. Nesse sentido, o "abstrato" se refere às relações que se formam a partir de um processo de análise. A possibilidade de gerar as abstrações permite o movimento do pensamento. Nesse movimento, o concreto surge como síntese de inúmeras abstrações que refletem partes da realidade sensível. Para Ilyenkov (1977, p.33), o concreto "Expressa a forma universal de desenvolvimento da natureza, sociedade e pensamento".

Ainda que limitado pelo processo individual de apropriação teórica da pesquisadora, é desta forma que o objeto desta pesquisa (a constituição do objeto de ensino da álgebra) será conduzido.

No primeiro movimento ou ação da pesquisa, será realizado o estudo aprofundado do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, considerando categorias do materialismo dialético, buscando compreender quais as necessidades humanas que geraram esse conhecimento; quais processos de pensamento ocorreram ao longo da prática social humana e transformaram o que hoje compreendemos como conhecimento algébrico. Entende-se que ao estudar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, pela via do pensamento dialético é possível revelar a essência do conhecimento algébrico, identificando os nexos conceituais dessa forma de conhecimento.

Este estudo, que constitui uma das ações da pesquisadora, parte de fatos da realidade objetiva caracterizados por episódios singulares da história da álgebra tal como chegaram aos nossos tempos e são relatados por historiadores matemáticos. Ainda que possa haver discussão sobre a veracidade desses fatos ou se sofreram alterações pelas leis do pensamento, hoje eles constituem realidade objetiva para estudiosos e pesquisadores. Estes constituirão o singular, o ponto de partida de uma das ações de análise. Pelo estudo de suas particularidades (formas de pensamento e suas manifestações na linguagem, o processo de formação de conceitos, analisados por meio das categorias do materialismo dialético), caracteriza-se a essência do conhecimento algébrico, como universal revelada pelo movimento histórico e lógico dos conceitos e em sua relação com a atividade humana. O movimento dessa ação pressupõe a compreensão do significado atribuído à expressão “movimento histórico e lógico dos conceitos” que se pretende explicitar de forma mais detalhada no capítulo 4.

O segundo movimento que constitui outra ação de análise da pesquisa parte do singular composto de isolados[4] do ensino de álgebra que serão analisados em suas particularidades, nos fenômenos em que se manifesta (programas curriculares, registros de fala dos professores; situações enunciadas de ensino) e principalmente por meio dos nexos conceituais e da essência revelada pelo estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

[4]O conceito de “isolado” está sendo compreendido nesta tese a partir de Caraça (1952). Esse autor afirma que “Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e factos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados” (p.112). Assim, um isolado é um recorte da realidade, e que se não for convenientemente determinado pode conduzir ao aparecimento de inesperados (situações ou fenômenos que, por sua vez, levam a melhor determinação do isolado).

Após uma análise inicial a partir das experiências pessoais como professora de matemática da educação básica, dos resultados de pesquisas sobre o ensino de álgebra e do que se revela em propostas curriculares, identificou-se a recorrência dos tópicos “sequências”; “equações” e “funções” para introduzir e conduzir o ensino de álgebra. Assim, nesta pesquisa, estes foram considerados como os “isolados”, extraídos e definidos como singularidades do objeto de ensino da álgebra a serem analisados.

Destaca-se que o universal, explicitado no primeiro movimento de análise da pesquisa (a essência do conhecimento algébrico) será particularidade mediadora da relação entre os singulares (isolados do ensino da álgebra) e o universal que se pretende constituir relacionado ao objeto de ensino da álgebra. Nesse universal estarão expressos princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos.

Na impossibilidade de avançar linearmente com esses dois movimentos, considerando a necessidade de “idas” e “vindas” nesse processo, pretende-se prosseguir com os estudos em uma dinâmica que expresse suas interligações (Figura1).

Movimento Histórico e Lógico dos Conceitos Algébricos

O estudo do SINGULAR	Registros da história da álgebra.
por meio da análise das PARTICULARIDADES	Formas de pensamento e suas manifestações na linguagem. Processos de formação de conceitos. Análise realizada por meio das categorias do materialismo dialético.
Em busca do UNIVERSAL	Essência do conhecimento algébrico revelada em seu movimento histórico e lógico e em sua relação com a atividade humana.

SINGULAR	PARTICULARIDADES	UNIVERSAL
Isolados do ensino de álgebra Sequências Equações Funções	Manifestações nos programas curriculares Manifestações no curso com professores Manifestações em situações de ensino Análise realizada por meio do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos	Princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes.

Movimento do Objeto de Ensino da Álgebra

Figura 1 - Orientação da análise realizada durante a pesquisa.

São instrumentos para apreensão de dados para essas duas ações principais: textos publicados de história da álgebra; programas curriculares de álgebra, pesquisas realizadas sobre o ensino de álgebra (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; STACEY; CHICK; KENDAL, 2004; CAI; KNUTH, 2011); e um curso intencionalmente elaborado para professores da rede pública de ensino do Estado de São Paulo.

Assim, metodologicamente, a pesquisa foi composta de algumas etapas que não possuem um encadeamento linear, mas compuseram as duas ações principais se relacionando à medida que avançaram as investigações:

a) etapa A: Estudos teóricos sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos;
b) etapa B: Levantamento bibliográfico de episódios singulares da história da Matemática para análise, interpretação e compreensão do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos em busca de sua essência;
c) etapa C: Análise de pesquisas sobre o objeto de ensino de álgebra;
d) etapa D: Análise de programas curriculares com foco para o que é considerado oficialmente como objeto de ensino da álgebra;
e) etapa E: Elaboração de um curso de atualização para professores da rede pública do Estado de São Paulo, que contemple princípios da teoria histórico-cultural; elementos do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos; situações de ensino de álgebra apresentadas em propostas curriculares;
f) etapa F: Análise de dados obtidos no curso de atualização desenvolvido na própria Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP) e intitulado “Atividades de ensino de álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural”.

Todas estas foram etapas inicialmente definidas. É importante reconhecer que, durante o desenvolvimento da pesquisa, tais etapas se intercalam constituindo as duas ações principais e, por isso, no movimento de exposição em seções, será possível mesclar os resultados das análises de mais de uma etapa.

Para as etapas de A a D, os dados são obtidos por meio de leituras de textos científicos e de documentos oficiais, no caso os programas curriculares de matemática. Mais explicações são necessárias em relação aos procedimentos de obtenção dos dados a partir do curso com os professores e que constituem as etapas E e F, o que será realizado no próximo item 2.2.

Como se espera de um movimento de pesquisa, em seu movimento de análise e síntese, são identificadas algumas ações que podem ser descartadas ou novas ações que devem compor a pesquisa para atingir o objetivo proposto. No decorrer desta pesquisa, foram incluídas duas ações que estão relacionadas às principais, já descritas, mas que foram derivadas durante o movimento de análise.

Ainda no movimento de estudos sobre as pesquisas já realizadas sobre o ensino da álgebra e as primeiras análises das falas dos professores, identificou-se a relevância do processo de generalização[5] matemática.

Assim, esse processo de pensamento foi destacado e tornou-se necessário investigar de forma mais aprofundada elementos históricos e lógicos, bem como suas implicações para a organização do ensino de álgebra. Para tanto, foram analisados: os aspectos históricos e lógicos; como o processo de generalização é apresentado em propostas curriculares; e concepções dos professores em relação ao processo de generalização a partir da análise dos dados do curso realizado. Os resultados desse estudo serão descritos e analisados ao longo desta tese em diferentes seções.

Os estudos teóricos e as análises realizadas sobre a generalização foram concretizados na elaboração de **um modelo** de análise do processo de generalização. Esse modelo pode ser considerado potencialmente como apoio para análise do processo de generalização em situações enunciadas de ensino (em propostas curriculares ou livros didáticos) e na ação dos professores.

Entende-se que o processo de elaboração desse modelo de análise do processo de generalização em situações de ensino constitui um modo de concretizar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. O modelo, que é organizado em níveis de generalização, contempla o movimento histórico do processo de generalização, cujo estudo, por sua vez, serve para a sua constituição. A partir do modelo é possível analisar os níveis que podem ser atribuídos ao processo de generalização em situações de ensino, gerando a possibilidade para os professores de organizar o ensino considerando também essa análise, e em busca de atingir o pensamento teórico dos estudantes.

O processo de constituição desse modelo, bem como algumas análises de situações de ensino realizadas por meio dele serão apresentadas no capítulo 6 desta tese.

Durante a realização do curso com os professores da rede pública estadual, constatou-se a possibilidade de analisar de forma singular o movimento de uma professora durante suas

[5]O estudo sobre o processo de generalização matemática foi intensificado durante o estágio de pesquisa no exterior sob a orientação do professor Joaquim Gimenez[5] da Universidade de Barcelona e com o contato com o Grupo de Pesquisas sobre Análise Didática sobre Educação Matemática (GRADEM). Esse grupo aprofunda os estudos e pesquisas tendo como um de seus fundamentos o Enfoque Ontossemiótico (EOS) da cognição matemática (GODINO; RECIO, 1997; GODINO, 2002; FONT; CONTRERAS, 2008; FONT; PLANAS; GODINO, 2010; FONT; GODINO; GALLARDO, 2012).

ações de planejamento. O objetivo específico dessa ação de pesquisa foi o de reconhecer o modo como os elementos do movimento histórico e lógico dos conceitos se revelariam nas ações de ensino, potencializando a apropriação do que se considera como essência do conhecimento algébrico e possibilitando a formação do pensamento teórico dos estudantes.

Considera-se que essa ação de pesquisa centraliza os movimentos das duas ações anteriores, à medida que concretiza os estudos sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos de equações e também envolve os princípios para a organização do ensino. Mais detalhes sobre a organização metodológica desse movimento de planejamento entre pesquisadora e professora serão descritos no item 2.3 e as análise e sínteses serão apresentadas no capítulo 7.

1.2 CURSO DE ATUALIZAÇÃO COM PROFESSORES: INSTRUMENTO DA PESQUISA PARA APREENSÃO DE DADOS

O primeiro semestre de 2011 foi dedicado essencialmente à preparação e execução de um curso com professores de matemática da rede pública de ensino. Oferecido como curso de atualização para professores pela própria USP, ele foi desenvolvido entre os meses de abril e junho, durante nove sábados, em encontros de quatro horas de duração. Intitulado “Atividades de Ensino de Álgebra a partir dos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural”, o curso teve como objetivo geral discutir com os professores princípios de organização do ensino de álgebra ao longo dos anos de escolaridade.

O processo específico de preparação e organização desse curso ocorreu desde janeiro de 2011. A leitura de textos voltados à história da álgebra e sobre o ensino desta, bem como de conceitos da teoria histórico-cultural, possibilitou a elaboração de sínteses iniciais que constituíram o material do curso para os professores. Assim, o movimento constante de leituras, análises e sínteses que marcou a organização do curso para professores constituiu o instrumento da própria pesquisa.

É necessário considerar que nesse momento (primeiro semestre de 2011), a pesquisa estava em sua fase inicial e, portanto, havia um estágio de desenvolvimento e apropriação teórica, alcançado pela pesquisadora, por meio dos estudos sobre o objeto de ensino da álgebra e o movimento histórico e lógico dos conceitos. A continuação da pesquisa com outras ações de estudos e análises possibilitam um novo olhar e outras análises a serem realizadas sobre a organização e condução desse curso. Por esse motivo e pelas mudanças provocadas no decorrer do processo de investigação é que a pesquisadora é também sujeito da pesquisa.

O pressuposto inicial para a organização do curso é de que a discussão sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, como compreendido nesta pesquisa, não se apresenta no espaço escolar e não é considerada para a constituição do objeto de ensino da álgebra. Este já está cristalizado nos programas curriculares e em outros materiais didáticos em forma de tópicos de conteúdos algébricos, que se repetem ao longo de anos com alterações pontuais. Radford (2011) destaca que a formulação contemporânea do conteúdo matemático domina a concepção dos professores, e ressalta:

> No entanto, a formulação contemporânea é o resultado de um longo processo de mudanças e transformações conceituais e não necessariamente é o melhor ponto de partida para os alunos. Entretanto, na falta de outras alternativas, a formulação contemporânea torna-se uma camisa de força na escolha de conteúdos a ser ensinado, em sua organização, e em sua articulação com outros conhecimentos. (RADFORD, 2011, p.16).

Não se discutem nas orientações curriculares os critérios de definição do conteúdo algébrico ou as razões para sua presença, mas sim as questões metodológicas de abordagem e apresentação desses conteúdos pré-definidos. Tais conteúdos são padronizados e podem ser observados em coleções de livros didáticos, ou, de forma mais recente, nas apostilas distribuídas bimestral e anualmente para alunos e professores da rede pública de ensino.

Por essa razão, e em função do curso ser dirigido a professores da rede estadual de São Paulo, que conta com orientações específicas apresentadas também na forma de cadernos bimestrais dirigidos a alunos e professores, é que o curso foi elaborado tomando por base as situações de ensino propostas nesse material. Portanto, o mote da discussão do curso foram situações de ensino da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008f).

Era objetivo do curso que os professores analisassem as situações de ensino propostas de conteúdo algébrico a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural e do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos. Assim, durante o curso, foram promovidos momentos de discussões sobre: o processo de formação de conceitos; formas de pensamento e de linguagem; episódios de história da álgebra em diferentes momentos (retórica, sincopada, geométrica, simbólica) e outros.

Desta forma, constituem dados para esta pesquisa as falas que expressam as concepções iniciais dos professores sobre álgebra e seu ensino, bem como as análises realizadas pelos professores sobre as situações de ensino de álgebra com base nas apropriações conceituais possibilitadas no decorrer do curso.

Para a pesquisadora, o curso constitui uma das ações metodológicas da pesquisa com duas funções principais:

a) instrumento para a captação de dados na fala dos professores em exercício e a compreensão do objeto de ensino da álgebra em sua "concreticidade". Esses dados se revelam pela discussão dos professores (videogravadas), e por outros materiais produzidos (como as sínteses de texto e os mapas conceituais) de concepções sobre álgebra, conceitos algébricos, procedimentos de ensino, apropriação do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, análises de situações de ensino a partir dos fundamentos teóricos explicitados e outros;

b) elemento particular que permite à pesquisadora realizar a mediação entre o singular (isolado do ensino da álgebra) e o universal (princípios teóricos para a constituição do ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos).

Para os professores, o curso se configurava um espaço para discussões a respeito do ensino da álgebra; das situações específicas apresentadas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo; das dificuldades que se apresentam e possibilidades de encaminhamento, além de aproximação aos princípios da teoria histórico-cultural.

1.2.1 Os sujeitos da pesquisa: a pesquisadora e os participantes do curso

O processo de elaboração do curso de atualização para professores, contemplando o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, constituiu em si uma ação de pesquisa e também de formação para a pesquisadora. Para essa elaboração vários estudos sobre conceitos da teoria histórico-cultural e também estudos aprofundados sobre o conhecimento algébrico de forma específica a partir desse fundamento teórico foram necessários. Em função disso, a pesquisadora pode ser considerada sujeito da pesquisa.

Os demais sujeitos eram professores da rede estadual de São Paulo, que conheceram o curso por meio da divulgação realizada pela própria pesquisadora nas diretorias de ensino e/ou nas escolas que lecionavam.

As ações iniciais do curso tinham por objetivo reconhecer quem eram os professores participantes, seus locais de origem, sua formação, sua atuação profissional, suas expectativas em relação ao curso e ao aprendizado. Após a explicitação dos objetivos do curso e dos motivos da pesquisa desenvolvida, os professores assinaram um termo de ciência, autorizando a gravação em vídeo dos encontros (Apêndice A).

O curso iniciou com dezesseis participantes. Destes, onze tinham a formação em Matemática com o curso de Licenciatura. Outros três, com formação em Ciências com habilitação em Matemática, um em Física (com habilitação em Matemática) e uma em Engenharia. Ao longo do curso, alguns participantes desistiram. Três deles vinham de outra cidade e tornou-se custoso em termos financeiros, além do tempo gasto para o deslocamento. Outros três participantes alegaram problemas de horário em função de atividades extras nas escolas, e dois participantes compareceram somente a um encontro, sem dar justificativa para a interrupção do curso.

Dos oito participantes que concluíram o curso, sete possuíam a formação em Matemática e um em Engenharia, que também realizou mestrado em uma universidade particular, estudando lógica. A formação inicial da maioria deles se deu em universidades particulares, e apenas dois dos participantes concluíram sua graduação em uma universidade pública.

Esses professores exercem a docência em escolas da rede estadual de São Paulo de ensino fundamental e médio, com exceção de uma professora que lecionava em escola da rede municipal (mas possuía experiência com escola estadual) e outra que atua na Educação Infantil. Cinco desses professores atuam em uma mesma escola estadual, e uma delas era professora de Física, não de Matemática.

Conforme os professores, a expectativa em relação ao curso era: "expandir conhecimentos", "aprimorar a prática docente" e "encontrar técnicas para incentivar os alunos no aprendizado da álgebra". Duas professoras citaram a "aquisição de conhecimento para concurso" e "certificado para evolução funcional".

Algumas singularidades se apresentam entre as professoras[6]. A preferência da professora Cristina, que possui formação em Magistério e licenciatura em Matemática, é a Educação Infantil. Justifica a decisão em participar de um curso voltado para o ensino da álgebra com entendimento de que, mesmo que o assunto discutido tratasse de conceitos algébricos mais avançados, lhe traria novas aprendizagens, além de elementos que permitissem a adaptação ao ensino de seus alunos da educação infantil. Na fala da professora:

> Tive uma formação muito fraca em matemática, procuro sempre cursos na área para conseguir estudar sozinha. Nunca lecionei no Fundamental II e Médio, minha atuação sempre foi Educação Infantil. Procuro sempre adaptar o que é possível para Educação Infantil. (Cristina, RE1).[7]

A professora Suzana demonstrou em suas falas possuir uma concepção de álgebra como forma de pensamento e com menos ênfase à questão da linguagem algébrica. Além

[6]Os nomes dos professores participantes são fictícios.
[7]Este dado foi extraído do Registro Escrito (RE) 1 que se trata de um questionário de formação estudantil e profissional dos professores participantes e expectativas em relação ao curso.

disso, sua concepção de variável oscilava entre uma concepção matemática e uma concepção do senso comum, como a que se apresenta na frase que escreve como parte do comentário sobre o texto *Necessidade da Álgebra no Ensino* (Apêndice B): “Apesar do ser humano não perceber que equaciona seu pensamento a todo instante, ele o faz com grande maestria, pois é necessário que ele saiba quais são as variáveis que estão em sua rotina diária” (Suzana, RE4). Desta forma, suas intervenções se diferenciavam das demais colegas e incidiam em uma organização de ensino de álgebra também distinta. Essa ocorrência se manteve na maioria de suas falas e posicionamentos durante o curso, como serão expostos durante as análises.

A professora Helena demonstrou em vários momentos insatisfação em relação à obrigatoriedade imposta pela direção da escola em que trabalhava em acompanhar linearmente o conteúdo proposto pelo material enviado pelo governo estadual. Sentia-se amarrada e sem possibilidades de organizar suas ações de ensino recorrendo a conhecimentos que haviam sido apropriados em sua formação inicial e também em outros cursos de formação que havia frequentado.

A professora Carla tinha expectativas em relação ao curso de encontrar técnicas de ensino que fossem mais atrativas para os estudantes e em geral se manifestava mais quando o assunto eram as dinâmicas de sala de aula.

A professora Mônica se mostrava interessada nas diferentes propostas e ações do curso, ainda que não encontrasse uma aplicação direta com seus estudantes. Isso pode ser verificado em mais de uma situação quando a pesquisadora anunciava um tópico a ser estudado e no encontro seguinte a professora comentava sobre o que havia encontrado em buscas pela internet em relação àquele tópico.

Os procedimentos lógicos, em geral associados à lógica formal, eram uma preocupação recorrente da professora Ester que discorria muito a respeito de procedimentos de generalização, classificação e outros processos mentais dos estudantes.

A professora Emília, por sua vez, não lecionava Matemática, mas sim Física. Detinha-se em particularidades do conhecimento matemático em si, e retomava conceitos apropriados em outras formações em busca de articulações com o que estava sendo discutido durante o curso. Por exemplo, foi possível observar comentários e registros feitos pela professora que estavam relacionados à logica booleana e a tentativa de relacionar com o assunto em pauta.

A professora Angélica pouco se comunicou verbalmente durante o curso. No entanto, mostrou interesse em continuar com os estudos dos conceitos da teoria histórico-cultural. Ela permitiu que durante o segundo semestre outros dados para a pesquisa fossem coletados a partir de encontros semanais para realizar planejamentos coletivos com a pesquisadora.

1.2.2 A organização do curso e seu papel para a pesquisa

O curso foi organizado no final de 2010, mas pincipalmente nos primeiros meses de 2011. Nesse momento, os estudos e conhecimentos da pesquisadora sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos eram abstrações que ainda não haviam se concretizado em uma síntese elaborada, e, portanto, refletiram na organização do curso.

Assim, a organização do curso tinha como fundamentos, os estudos realizados sobre a teoria histórico-cultural e a teoria da atividade; a pesquisa realizada durante o mestrado (PANOSSIAN, 2008); e os fundamentos de outras pesquisas, sobre o ensino de álgebra, com destaque para a de Sousa (2004), que revela, por meio de dados de alunos do curso de Pedagogia, a importância da formação dos conceitos algébricos por parte dos professores, fundamentada na perspectiva lógico-histórica.

A proposta inicial dos temas a serem abordados no curso está no Quadro 1.

No decorrer do curso algumas alterações foram necessárias, em função do movimento de condução da pesquisa e de novas necessidades derivadas na relação da pesquisadora com os professores. Por exemplo, uma destas alterações diz respeito ao processo de elaboração de atividades orientadoras de ensino pelos professores.

Quadro 1 – Proposta inicial de temas do curso “Atividades de Ensino de Álgebra a partir dos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural”

1 A necessidade da álgebra no ensino - Pressupostos históricos - Pressupostos sociais e culturais - Pressupostos psicológicos 2 Concepções de álgebra e de educação algébrica 3 Fundamentos da teoria histórico-cultural e o ensino de álgebra - O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos - As relações entre pensamento e linguagem algébrica - Instrumentos mediadores 4 A constituição do currículo de álgebra - O conhecimento algébrico nos Parâmetros Curriculares Nacionais - O conhecimento algébrico na atual Proposta Pedagógica do Estado de São Paulo - As relações entre os professores e o currículo prescrito e elaborado 5 Atividades orientadoras de ensino com conteúdo algébrico - Fundamentos da Atividade Orientadora de Ensino - Exemplos de atividades orientadoras de ensino com conteúdo algébrico - Elaboração coletiva de atividades orientadoras de ensino. 6 Síntese: Princípios de organização do ensino de álgebra

O conceito de Atividade Orientadora de Ensino, inicialmente proposto por Moura (1996, 2001) é constituído a partir dos elementos da “atividade” (necessidades, motivos, ações e operações), como a concebe Leontiev (1983). Esse conceito, aprofundado pelo GEPAPe, tem possibilitado investigações sobre a atividade pedagógica (MOURA et al., 2010) e tem se mostrado como instrumento mediador da atividade de ensino e aprendizagem. A atividade orientadora de ensino (AOE), por ser atividade, é intencional. Seu propósito é possibilitar ao estudante a necessidade de aprendizagem de determinado conceito, por meio de situações desencadeadoras dessa aprendizagem, na forma de histórias virtuais, jogos ou situações emergentes do cotidiano. Tais situações devem contemplar o movimento histórico e lógico dos conceitos e são o ponto de partida de um processo de ensino e aprendizagem desenvolvido coletivamente.

Por causa da necessidade de os professores aprofundarem os conceitos algébricos e os conceitos da teoria histórico-cultural e também em função do nível de apropriação da pesquisadora sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, que ainda não haviam sido sintetizados, não foi possível elaborar as atividades orientadoras de ensino durante o curso de atualização. Consequentemente, não houve, como previsto, a coleta de dados em relação à elaboração de atividades. Entretanto, as discussões dos professores sobre as situações de ensino da proposta curricular do Estado de São Paulo, reveladoras do objeto de ensino da álgebra, tal qual se apresenta na realidade objetiva, se traduziram em elemento para estabelecer a relação entre esse objeto e o movimento histórico e lógico dos conceitos.

No Quadro 2 são apresentados os principais temas abordados em cada encontro, as ações desenvolvidas com os professores participantes e os objetivos da pesquisa relacionados a essas ações.

Os dados obtidos no curso realizado no primeiro semestre de 2011 ofereceram elementos que permitiram a análise da relação que as professoras estabelecem com as situações propostas no programa curricular que as orienta e a identificação de suas concepções de ensino de álgebra. Também subsidiam o reconhecimento do modo como o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos se manifesta ou não nas situações da proposta curricular e como as professoras encaminham tais situações com os alunos.

O processo de elaboração do curso e a análise dos dados obtidos com base nos movimentos explicitados anteriormente (histórico e lógico dos conceitos e do objeto de ensino da álgebra) não constituirão um capítulo único de análise, mas serão incorporados e apresentados nos próximos capítulos, para materializar as argumentações que justificam esta tese.

Desta forma, o curso cumpre mais de um papel na pesquisa: um momento inicial de sistematização dos conhecimentos sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, tanto para a pesquisadora, em seu processo de elaboração do curso, quanto para os professores, durante as discussões e a apropriação de novos conhecimentos; e também permite buscar o objeto de ensino da álgebra em sua materialidade, identificando como ele se manifesta na realidade objetiva, de forma específica na atual proposta curricular do Estado de São Paulo e nas ações dos professores.

Por cumprir esses papéis, reconhece-se que o curso, mesmo com suas limitações como instrumento de pesquisa, é elemento particular (articulando o singular e o universal no movimento do objeto de ensino da álgebra) mediador que possibilita o movimento as relações entre o objeto de ensino da álgebra e o movimento histórico e lógico dos conceitos.

Para fins de organização do material coletado e registro dos dados, os vídeos gravados foram intitulados pela ordem alfabética (que indica a ordem dos encontros) e numérica (para indicar a ordem do vídeo em um determinado encontro). Assim, o vídeo AV1 indica o primeiro encontro (A) e o primeiro vídeo gravado durante esse momento (V1), e o vídeo EV3 indica o quinto encontro (E) e o terceiro vídeo gravado nesse dia (V3).

Quadro 2 – Temas abordados nos encontros, ações desenvolvidas e objetivos da pesquisa em 2011

<table>
<tr><td rowspan="2">Objetivo Geral</td><td>Organização do Curso</td><td>Organização da Pesquisa</td></tr>
<tr><td>Discutir com professores, princípios para a organização do ensino da álgebra na Educação Básica, a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural.</td><td>Investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra revelado em propostas curriculares e nas ações dos professores.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Temas abordados</td><td>Ações desenvolvidas durante o encontro e produto (dados coletados)</td><td>Objetivos das ações dos encontros em relação à pesquisa e análise dos dados coletados</td></tr>
<tr><td>1º. ENCONTRO (2 de abril)</td><td>• Apresentação da pesquisadora (ministrante do curso).
• Apresentação da pesquisa
• Apresentação dos professores participantes
• Concepções de “álgebra” e de “ensino de álgebra” dos professores
• Planos de aula</td><td>• Exposição da pesquisadora sobre sua formação e os motivos da pesquisa.
• Exposição sobre a organização do curso.
• Preenchimento pelos professores de ficha com dados sobre formação e atuação profissional.
• Registro escrito individual de uma experiência relevante com o ensino de álgebra (Apêndice C).
• Registro individual, discussão em pequenos grupos e discussão coletiva sobre a necessidade da álgebra no ensino. (Recurso utilizado para desencadear a discussão: Quadrinho Calvin – Apêndice D).
• Elaboração de um plano de aula com conteúdo algébrico.</td><td>• Situar os professores em relação aos objetivos do curso como instrumento de pesquisa e obter o consentimento para o uso de imagens e falas.
• Conhecer os sujeitos da pesquisa, suas expectativas e experiências.
• Explorar as concepções de ensino de álgebra dos participantes da pesquisa.
• Identificar o objeto de ensino da álgebra na concepção dos professores.
• Explorar as concepções dos professores sobre a álgebra.
• Investigar o modo como os professores compreendem a necessidade da álgebra no ensino.
• Identificar os critérios utilizados pelos professores (sejam eles psicológicos, sociais, históricos, culturais e outros) para reconhecer (ou não) a importância da álgebra no ensino.
• Analisar a elaboração de planos de aula de conteúdo algébrico, identificando objetivos, ações desenvolvidas, concepções de aprendizagem, processos de apropriação de conceitos e outros.</td></tr>
</table>

Continua

Quadro 2 – continuação

2º. ENCONTRO (9 de abril)	• Carta Caitité • Pensamento empírico/pensamento teórico • Propostas curriculares de Matemática • Situações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo • Sequências numéricas e generalização	• Resolução e Análise da Carta Caitité (Anexo A). • Leitura coletiva do texto "Necessidade da álgebra no ensino" (Apêndice B). • Registro escrito individual sobre a necessidade da álgebra no ensino. • Apresentação na forma de síntese do movimento curricular de Matemática, desde a Reforma Capanema, passando pelo movimento da Matemática Moderna, a definição dos atuais Parâmetros Curriculares Nacionais, e de forma específica no Estado de São Paulo, os guias curriculares e a atual proposta difundida nas escolas. • Discussão de uma das situações de conteúdo algébrico da Proposta Curricular do Estado (Anexo B) em três momentos: discussão em pequenos grupos analisando como os estudantes a resolveriam; retomada da situação a partir das orientações da proposta; discussão coletiva encaminhada pela pesquisadora em busca dos conceitos algébricos envolvidos, formas de pensamento; manifestação do movimento histórico e lógico.	• Explorar a noção de "situação desencadeadora de aprendizagem". • Discutir os processos de pensamento empírico e teórico com os professores. • Investigar o modo como os professores compreendem a necessidade da álgebra no ensino. • Identificar qual é o grau de conhecimento das situações da proposta curricular que os professores possuem. • Investigar como os professores se apropriam e utilizam essas situações em sala de aula. • Identificar os critérios que os professores definem quando se trata de analisar uma situação (da proposta específica) a ser utilizada em sala de aula. • Explorar noções sobre "formação de conceitos"; "formas de pensamento"; "movimento histórico e lógico" a partir da análise da situação específica de generalização de uma sequência numérica.

Continua

Quadro 2 – continuação

3°. ENCONTRO (16 de abril)	• Situações desencadeadoras de aprendizagem	• Levantamento de situações de ensino de álgebra recorrente em livros didáticos e propostas curriculares. • Apresentação de situações de ensino: o jogo Fantan (Apêndice E); Altura da Pirâmide (Anexo C); *software* Geogebra (Apêndice F). • Discussão sobre o potencial que as situações anteriores possuem como situações desencadeadoras de aprendizagem de conteúdo algébrico, com a identificação de motivos, ações e operações dos professores e estudantes.	• Evidenciar critérios dos professores para a escolha de situações a serem propostas para os estudantes. • Discutir conceitos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade: atividade, ações, operações, objetivos, condições, necessidades, motivos. • Discutir os fundamentos da atividade orientadora de ensino.
4° ENCONTRO (30 de abril)	• Movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos	• Leitura e discussão do texto de Caraça (1952, p. 64-82). • Resposta e discussão relacionada à questão “Qual é a relação entre álgebra e movimento?”. • Discussão de situações da proposta curricular referente ao tópico sequências a partir do movimento histórico. • Tarefa em pequenos grupos: Usando o tema sequências, reorganize o processo de ensino aprendizagem de conceitos e técnicas algébricas ao longo dos anos de escolaridade.	• Identificar se os professores associam o conhecimento algébrico ao movimento e variação dos fenômenos e à fluência da realidade objetiva. • Investigar os conhecimentos históricos que os professores possuem sobre o tópico sequências. • Investigar como os professores analisam situações de ensino propostas a partir de conhecimentos históricos apropriados. • Investigar os critérios que os professores utilizam para reorganizar o ensino de conceitos algébricos a partir de um tema selecionado (Sequências).

Continua

Quadro 2 – continuação

5º ENCONTRO (7 de maio)	• Equações • Linguagem algébrica	• Apresentação de eslaides contendo sínteses sobre a álgebra retórica, sincopada, geométrica e simbólica. • Leitura de um texto síntese e discussão sobre as manifestações do tema "Equações e Fórmulas" na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (Apêndice G). • Discussão e detalhamento dos conceitos algébricos envolvidos na situação de ensino "Altura da Pirâmide" (Apêndice H). • Leitura e discussão do texto: "O movimento lógico-histórico: modificações na linguagem algébrica" (Apêndice I).	• Investigar a apropriação pelas professoras do movimento histórico do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica (as "diferentes" álgebras). • Analisar com as professoras a presença ou ausência deste movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos sobre as diferentes situações de ensino apresentadas na proposta curricular. • Desencadear a discussão com as professoras sobre a necessidade de apresentar aos estudantes situações-problema em que eles possam identificar a variação, o campo de variação, estabelecer a relação entre grandezas e registrar a variação (seja por meio da linguagem retórica, sincopada ou simbólica).
6º ENCONTRO (14 de maio)	• Linguagem algébrica • Funções	• Discussão coletiva sobre o problema "Altura da Pirâmide". • Retomada do texto "O movimento lógico-histórico: modificações na linguagem algébrica" e comentários. • Síntese das potencialidades e limitações históricas das diferentes álgebras e sua organização no ensino. • Elaboração de um mapa conceitual sobre o tópico "Funções".	• Investigar a apropriação do movimento histórico e lógico relacionado à linguagem algébrica pelas professoras. • Investigar as concepções iniciais das professoras sobre o tópico "Funções", identificando quais os termos que as professoras associam ao estudo de "funções" e como relacionam esses termos.

Continua

Quadro 2 – continuação

7º ENCONTRO (21 de maio)	• Funções	• Leitura e discussão texto Caraça (1952), pág. 107-139. Estudo matemático das leis naturais. • Apresentação de um exemplo usando o fenômeno terremoto. • Apresentação Síntese Histórica sobre Funções. • Apresentação Síntese das manifestações do tópico ‘ Funções’ nas situações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. • Análise de uma situação sobre funções da Proposta. (Apêndice J)	• Possibilitar aos professores a apropriação e estudo de elementos do movimento histórico e lógico do tópico ‘ funções’. • Desencadear a discussão sobre conceitos como ‘ fluência’; ‘interdependência’, ‘qualidade’, ‘quantidade’, ‘ isolado’. • Investigar os critérios utilizados pelos professores para discutir e analisar uma situação de ensino de funções.
8º ENCONTRO (28 de maio)	• Funções • Pensamento teórico e empírico • Processos de análise e síntese • Planos de Ensino	• Retomada do mapa conceitual elaborado no sexto encontro. • Resolução e discussão da situação “Campeonato de Futebol” (Apêndice K). • Leitura e discussão sobre comentários a respeito do processo de análise e síntese (Apêndice L). • Orientações para reelaboração dos planos de ensino que foram entregues no início do curso.	• Investigar a mudança das professoras em relação aos conceitos do mapa de funções, em um momento posterior à discussão do movimento histórico e lógico de funções. • Desencadear a discussão sobre os processos de pensamento empírico e teórico e sobre os processos de análise e síntese do conhecimento (citados no decorrer do curso e para atender a uma necessidade/demanda das próprias professoras).

Continua

Quadro 2 – continuação

9º ENCONTRO (4 de junho)	•Apresentações dos subgrupos •Avaliação do curso •Autoavaliação.	• Análise das situações de ensino da proposta curricular a partir dos elementos apresentados no curso. • Síntese da organização do ensino de conceitos algébricos.	• Reconhecer no processo de apresentação das análises realizadas pelas professoras sobre as situações de ensino da proposta curricular, elementos do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e outros elementos conceituais da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade.

Cada um dos vídeos foi dividido em cenas, conforme o conteúdo abordado. A passagem de uma para outra decorreu da mudança de tema da discussão. As cenas são registradas pela letra que representa o encontro e por um número que indica o seu recorte. Por exemplo, a cena B29, aconteceu em um determinado momento do segundo encontro. A identificação das falas das professoras está padronizada da seguinte forma (nome da professora, cena, vídeo, instante em que a fala é iniciada). Por exemplo: (Suzana, B7, BV1, 00:03:40) refere-se à fala da professora Suzana iniciada no instante 00:03:40, no segundo encontro (B), na cena 7. Posteriormente, as cenas foram agrupadas conforme a necessidade e o tópico a ser analisado, dado que uma delas pode fazer parte da análise de diferentes tópicos. Por exemplo, a cena da professora Suzana (A32, AV1) serve como referência para análise da concepção de álgebra da professora e, de forma mais específica, da concepção de variável.

Os registros escritos também foram organizados (Apêndice C), e servem como material de análise, sendo identificados de forma padronizada com (nome do professor, RE_ número do registro).

Partiu-se do pressuposto que as mudanças significativas ocorrerão no encaminhamento das situações de aprendizagem em conformidade com o grau de apropriação do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos que as professoras possuem. Ainda que seja possível reconhecer as singularidades nas formas de pensamento e apropriação do conhecimento algébrico em cada uma das professoras, sujeitos da pesquisa, essas singularidades estão condicionadas a um modo geral de se conceber e concretizar o ensino de álgebra, por meio dos objetos e fenômenos particulares (os programas curriculares, a formação promovida por um curso; situações de ensino tradicionalmente utilizadas e outros).

1.3 UM CASO SINGULAR: AS AÇÕES DE PLANEJAMENTO COM UMA PROFESSORA

Neste item descreve-se o papel metodológico de um caso singular que envolve ações de planejamento realizadas durante o segundo semestre de 2011 entre a pesquisadora e uma professora, para uma turma de estudantes da 6ª série de uma escola municipal de São Paulo, sobre o ensino de equações.

As reuniões e discussões semanais entre pesquisadora e professora aconteceram usando tecnologia virtual de áudio e vídeo. Foram iniciadas em 14 de junho de 2011 e finalizadas em 14 de dezembro do mesmo ano. Ao todo foram realizadas vinte discussões virtuais com duração de uma hora e meia a duas horas, gravadas em áudio e registradas nesta pesquisa da seguinte maneira: E (número do encontro); (instante de início da fala). Assim, por exemplo, uma fala da professora ou pesquisadora marcada como (E8; 00:23:35) se refere ao oitavo encontro, sendo a fala iniciada após 23 minutos de conversa.

O objetivo específico dessa ação de pesquisa foi reconhecer o modo como elementos do movimento histórico e lógico dos conceitos se fariam presentes nas ações de ensino, de forma a potencializar a apropriação do que se considera como essência do conhecimento algébrico e possibilitar a formação do pensamento teórico dos estudantes. Assim, o planejamento teria como base teórica os pressupostos da teoria histórico-cultural e as discussões sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, que aconteceram durante o curso de atualização[8].

Tanto a professora como a pesquisadora são sujeitos cujas ações serão analisadas. As ações e interações entre pesquisadora e professora são reveladoras do processo de apropriação da essência do conhecimento algébrico por meio do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos durante o processo de pesquisa e de modos de organização do ensino a partir dessa apropriação.

A professora que havia participado do curso de atualização durante o primeiro semestre de 2011 não se manifestava oralmente de forma frequente durante as discussões do curso; entretanto, seu interesse pelos estudos teóricos foi evidenciado pela leitura do livro produzido pelo GEPAPe (MOURA et al., 2010), e também a dissertação de mestrado desta pesquisadora (PANOSSIAN, 2008), tendo por objetivo a apropriação de conhecimentos.

Por sua vez, o objetivo da pesquisadora era o de concretizar as discussões do curso e gerar outros elementos de análise que atendessem ao objetivo geral desta pesquisa: “Investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra”. Assim é importante ressaltar que, no segundo semestre de 2011, já havia por parte da pesquisadora um estudo realizado sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos a partir de leituras de textos matemáticos e pesquisas. Entretanto, o movimento de condução desta pesquisa, a continuação dos estudos e leituras, o movimento de análise dos dados acrescentaram elementos para que fosse possível compreender de forma ainda mais aprofundada o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, destacando sua essência. Assim, a análise realizada sobre essa situação de planejamento com a professora

[8]Curso de Atualização “Atividades de ensino de álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural”, realizado no primeiro semestre de 2011 na Faculdade de Educação da USP e que constituem dados coletados para esta pesquisa.

revela também esse movimento da pesquisadora, sujeito da pesquisa e seu aprofundamento teórico realizado no período entre o 2º semestre de 2011 e o 1ºsemestre de 2013.

O teor das discussões entre professora e pesquisadora foram as ações de planejamento para uma turma da 6ª série, que ainda não havia desenvolvido nenhum conceito algébrico. Um dos tópicos previstos pela professora para o estudo durante o segundo semestre com os estudantes era a introdução das equações.

Durante as reuniões de planejamento, foram realizadas discussões sobre: aprofundamento de conceitos da teoria histórico-cultural (como mediação, apropriação, internalização, abstrato e concreto, pensamento empírico e teórico e outros); o movimento histórico e lógico dos conceitos; diferentes concepções e modos de ensino de conceitos matemáticos (perímetro, área, equações, grandezas e outros); adequação de materiais de ensino e dinâmicas de aula que propiciassem a apropriação dos conceitos pelos estudantes, bem como estratégias metodológicas e de avaliação que possibilitassem a apropriação do conteúdo pelos estudantes.

O planejamento foi realizado com base nas necessidades observadas pela professora e a cada reunião semanal as ações e interações entre a professora e os estudantes eram avaliadas a partir do que foi inicialmente planejado.

A necessidade apresentada pela professora de retomar os conceitos de perímetro e área, que já haviam sido formalmente apresentados aos estudantes conforme as orientações curriculares, e a de introduzir o conceito de equação geraram uma situação desencadeadora de aprendizagem, para a qual todas as ações do semestre foram dirigidas. Como forma de exposição, optou-se por descrever de forma sintética o movimento realizado durante o planejamento, e algumas discussões relacionadas à elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem, destacando necessidades, ações e operações planejadas pela professora e pesquisadora e desenvolvida com os estudantes, o que será feito no capítulo 7 desta tese. Também nesse capítulo serão apresentados os episódios destacados e analisados por oferecerem dados que revelam relações entre o que foi estabelecido como essência do conhecimento algébrico, a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos, e o objeto de ensino da álgebra, nesse caso, por meio das equações. Os episódios são constituídos por momentos que contêm ações reveladoras do objeto em análise (MOURA, 2004). Em seu texto, Moura (2004), se refere a episódios de formação, e nesta tese serão feitas referências aos episódios que permitam realizar a análise em busca da compreensão do objeto desta pesquisa: a constituição do objeto de ensino da álgebra. Considera-se que os episódios destacados são constituídos por “[...] frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares" (MOURA, 2004, p. 276). Desse modo, nessa análise por episódios se pretende reconhecer como a essência do conhecimento algébrico, destacada pelo movimento histórico e lógico dos conceitos, está ou não contemplada nas ações e operações dessa situação específica de planejamento.

Esta tese não tem por objetivo específico analisar o processo de formação dos professores, mas não é possível desconsiderar as implicações de tal estudo e pesquisa para esse processo. É pressuposto desta pesquisa que há correlação entre concepções de conhecimento e o modo de organização de ensino. Desta forma, o aprofundamento relacionado à compreensão do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, tanto por parte da pesquisadora, quanto por parte da professora que participou das ações de planejamento, implicam aprendizagens que modificam o modo de organização do ensino.

Assim, também no capítulo 7, serão explicitados os indícios do processo de formação da professora, durante o planejamento e condução da situação com os estudantes, e da pesquisadora, em seu movimento de aprofundamento teórico no decorrer da pesquisa.

2 O OBJETO DE ENSINO DA ÁLGEBRA

> *De fato, na maior parte do tempo, as concepções dos professores acerca do conteúdo matemático que eles ensinam decorrem da formulação matemática contemporânea do conteúdo sob consideração. No entanto, a formulação contemporânea é o resultado de um longo processo de mudanças e transformações conceituais e não necessariamente é o melhor ponto de partida para os alunos.* (RADFORD, 2011, p.16).

Essa afirmação do pesquisador Luís Radford coincide nesta tese com a preocupação em relação à constituição do que pode ser considerado como objeto de ensino da álgebra.

Considera-se que no processo de ensino, as concepções dos professores sobre conhecimento em geral e sobre o conhecimento algébrico de forma específica geram implicações diretas em relação ao que se considera como objeto de ensino da álgebra e consequentemente no modo de organização desse ensino. Por isso, pretende-se defender a necessidade de que nesse objeto esteja contemplada a essência do conhecimento algébrico revelada pelo movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

Este capítulo tem como função expor os resultados de pesquisas sobre ensino de álgebra, buscando reconhecer o que tem sido considerado como conteúdo algébrico, ou como se denomina nesta tese, objeto de ensino da álgebra. Tal objeto também será pesquisado e identificado nas atuais propostas curriculares e na fala das professoras.

Ao longo da exposição serão destacados, a partir de diferentes pesquisas voltadas ao ensino de álgebra, três elementos considerados nesta tese como essenciais para a elaboração dos nexos conceituais do objeto de ensino da álgebra: o conceito de variável; o estabelecimento de relações entre grandezas e o processo de generalização.

2.1 UM PANORAMA DE PESQUISAS QUE TRATAM DO ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Durante a pesquisa de mestrado (PANOSSIAN, 2008) teve início uma análise a respeito de algumas concepções de álgebra e de educação algébrica, aqui sintetizada e complementada por novos estudos realizados.

Pesquisas como as de Cury et al. (2002) revelam que conhecer as concepções de álgebra e de educação algébrica é elemento importante para novas reformulações curriculares na medida em que possibilita que se discutam as finalidades dessa disciplina.

As concepções de álgebra, demarcadas por Usiskin (1995), bem como as de educação algébrica evidenciadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), são constantemente reveladas em diferentes pesquisas.

Usiskin (1995) destaca quatro concepções de álgebra que estão relacionadas à importância atribuída às **variáveis**. A álgebra pode ser compreendida como: aritmética generalizada (variáveis como número geral); estudo para resolver certo tipo de problemas (variáveis como incógnitas); estudo da relação entre grandezas (variáveis em relação de dependência associada à noção de função) e estudo de estruturas (variáveis como objetos arbitrários).

Por sua vez, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam diferentes concepções de álgebra relacionando ao seu papel como **linguagem.** Assim denominam uma delas de processológica, entendida como um conjunto de procedimentos para resolver problemas, independente da linguagem que a expressa. Além disso, caracterizam outras três concepções associadas à linguagem: a concepção linguístico-estilística, na qual álgebra é uma linguagem específica para expressar procedimentos de resolução de problemas; a concepção linguístico-sintático-semântica, que também compreende a álgebra como uma linguagem, entretanto foca atenção ao significado dos símbolos; e a concepção chamada linguístico postulacional, em que a álgebra é compreendida como uma linguagem simbólica cujos signos alcançam alto grau de abstração e generalidade.

A partir de tais concepções da álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) também apresentam algumas tendências que influenciam o ensino de álgebra no Brasil. A tendência linguístico-pragmática, preponderante no século XIX, enfatiza o domínio da linguagem literal e o treino para resolução de equações, privilegia técnicas, regras e propriedades com ênfase no trabalho com expressões algébricas. Vinculada ao movimento da Matemática Moderna (décadas de 1970 e 1980) predomina a tendência fundamentalista-estrutural com foco para as propriedades estruturais, bem como para a fundamentação lógica da matemática para reorganizar os conteúdos e justificar os transformismos algébricos. Como uma síntese das anteriores, os autores destacam a tendência fundamentalista analógica, que procura recuperar o valor instrumental da álgebra e, para tanto, faz uso de recursos denominados de físicos e geométricos.

Em tais concepções, há predominância do sistema simbólico e ênfase à sintática da álgebra mais do que ao pensamento algébrico ou significado (semântica) dos símbolos. A situação oposta, em que prevalece o aspecto semântico e conceitual, também pode ser considerada como uma concepção da álgebra, entretanto não se trata de uma tendência predominante no ensino. Para Gomez-Granell (1996), o problema dessa tendência está na possibilidade de subentendê-la com a compreensão de que o significado do conceito pelo estudante garante o domínio da linguagem formal da álgebra, do sistema simbólico algébrico, o que efetivamente não se concretiza.

Lins e Gimenez (1997) também apresentam algumas concepções de educação algébrica: a concepção letrista (álgebra como o “cálculo com letras”); a concepção letrista facilitadora que recorre ao uso de materiais manipulativos para o ensino; a concepção que parte de uma situação real, entendida como “o concreto”, e a concepção de álgebra como conhecimento para esclarecer e organizar um problema ou situação. Nas concepções reconhecidas por esses autores, verifica-se ainda a predominância do recurso simbólico (concepções letristas e letrista facilitadora), mas também destacam outra concepção que, ao compreender a álgebra como um conhecimento para organizar um problema, a reconhece como uma possibilidade de compreender fenômenos da realidade.

Entretanto, é possível observar que, na maioria das concepções apresentadas, existe um destaque para a linguagem simbólica da álgebra em detrimento do trabalho com conceitos algébricos, o que reforça a afirmação de Radford (2011, p.16): “[…] as concepções dos professores acerca do conteúdo matemático que eles ensinam decorrem da formulação matemática contemporânea”, considerando o alto grau de recurso simbólico no conhecimento algébrico atual.

Entre 2000 e 2004, pesquisadores associados ao International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) realizaram estudos específicos sobre o futuro do processo de ensino e aprendizagem da álgebra. Em uma publicação decorrente desses estudos e pesquisas do grupo (STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M, 2004), foram identificadas duas tendências que exercem grande influência no ensino em geral e em particular da álgebra, a tendência de massificação e o crescente uso da tecnologia. A massificação gera preocupações em relação à igualdade e relevância das questões da álgebra. A tecnologia, que pode gerar avanços no ensino de álgebra e torna possível que procedimentos técnicos sejam rapidamente efetuados, também afeta as decisões sobre o currículo de álgebra neste século, que se torna bastante diferente do currículo de alguns anos atrás.

> Se a álgebra é interpretada só como uma manipulação simbólica, então ela tem pouca relevância para a vida do dia a dia, em países desenvolvidos e pouco desenvolvidos. De fato, isso pode ser uma fonte de alienação dos estudantes para aprendizagem de matemática. O desafio, portanto, tem sido reconceitualizar a álgebra como um assunto que tem relevância para os estudantes e fazer isso de um

> modo que os estudantes percebam por eles mesmos esta relevância (STACEY; CHICK, 2004, p. 2, tradução nossa).[9]

Em um desses estudos, Kieran (2004) aponta como núcleo do que denomina atividade algébrica: as atividades de geração, de transformação, ou de nível meta/global. Nas atividades de geração, os padrões e propriedades são interpretados ou representados algebricamente. Nas atividades de transformação, o foco é a manipulação simbólica. As atividades de nível meta/global não estão diretamente relacionadas a conteúdo algébrico, mas usam esses conteúdos para resolver problemas, organizar estruturas e outros. Conforme a autora, até meados da década de 1960, o ensino de álgebra priorizava atividades de manipulação simbólica.

A manipulação simbólica é uma característica da álgebra que permite a resolução dos problemas sem a constante retomada do significado das expressões. No movimento histórico e lógico dos conceitos, é possível reconhecer que a partir de Viète e sua logística *speciosa,* o desenvolvimento da álgebra é alavancado, justamente por serem usados símbolos não atrelados a objeto específico. Por outro lado, no processo de ensino de álgebra, torna-se sem sentido o excesso de manipulação, sem que antes esteja consolidado o significado atribuído aos símbolos.

Kieran (2004) também indica que na década de 1990 houve predominância das atividades de geração com o uso de sequências e padrões. A expectativa era de que se os estudantes realmente "entendessem" a álgebra, a manipulação técnica se resolveria, porém chama a atenção de que isso não acontece. A autora considera a necessidade de atribuir significados não só aos objetos da álgebra, mas aos seus processos manipulativos, admitidos como um objeto conceitual.

Raramente os conceitos que envolvem os campos científicos da álgebra abstrata, álgebra linear e teoria dos números chegam a ser objeto de ensino da álgebra até o término do ensino médio. Para Carlson (2004), nessas áreas não são usados os mesmos axiomas que validam as propriedades e operações do campo dos números reais, consideradas objeto de ensino na escola. Portanto, os conceitos do que seria a álgebra terciária não chegam a ser desenvolvidos pelos estudantes.

De maneira mais específica, a **noção de variável** é elemento de análise de pesquisadores do ensino da álgebra. Entretanto, essa noção adquire um caráter multifacético. A variável está associada ao uso de uma letra, que, por vezes, não contém em si a variação,

---

[9]As citações traduzidas nesta tese do inglês ou espanhol foram feitas pela pesquisadora.

usada apenas como “identificador” de um elemento desconhecido. Ursini et al. (2005) destacam as dificuldades dos estudantes com o uso da letra em álgebra e propõe o modelo 3 usos da variável (UV), isto é, como: incógnita, número geral e relação funcional.

Implicitamente, a variável como incógnita está associada ao estudo das equações; a variável como número geral, ao estudo de sequências, padrões e regularidades e a variável como relação funcional está claramente associada ao estudo de funções, e assume-se que é necessário que o estudante compreenda esses diferentes “papéis” da variável.

Os conceitos de variável e variação são também estudados por Sousa (2004), que, a partir de princípios da educação conceitual, se contrapõe à ideia de ensinar o formalismo dos conceitos algébricos, com a justificativa da necessidade de compreensão da álgebra como descrição de movimento. Para tanto, nas aulas, a atenção volta-se para o estudo dos conceitos de movimento, fluência, número, álgebra não simbólica, variável, campo de variação, que considera que compõe os nexos conceituais do conhecimento algébrico. Nesse sentido, há diferença em relação ao ensino tradicional de álgebra por considerar a necessidade de estabelecer as conexões internas ou os nexos conceituais que permitiram que se chegasse ao estágio atual da álgebra simbólica, no processo de elaboração do pensamento algébrico dos estudantes. Tal pesquisadora se fundamenta em uma perspectiva lógico-histórica, e nesse sentido destaca-se como fundamento para a condução desta pesquisa.

Destaca ainda que “Os objetos, quando vistos do ponto de vista da álgebra, são as abstrações que se apresentam na álgebra simbólica, a partir da variável-letra” (MOURA; SOUSA, 2004), e nesse sentido o que podemos entender como objeto de ensino da álgebra atual que reforça as manipulações simbólicas, desconsidera o movimento regular e irregular, a fluência, o campo de variação e outros. As autoras consideram que, na psicologia pedagógica tradicional, o ensino de conceitos é realizado desvinculado de seu processo generalizador e formativo. Entretanto, o conceito já é em si um construto social elaborado logicamente no decorrer da experiência humana, e, portanto, o papel da história é nesse sentido o de nexo conceitual entre a “causalidade dos fatos e a formalização dos conceitos científicos” (MOURA; SOUSA, 2004, p.11). Entre seus questionamentos está “como elaborar atividades de ensino que possam formar professores e alunos de forma que os envolvidos possam pensar sobre o lógico-histórico do conhecimento científico?” (MOURA; SOUSA, 2004, p.12).

As autoras buscam então, na História da Matemática, os nexos que compõem o conceito de álgebra para incorporá-los em atividades de ensino, e destacam situações em que se trabalha com as diferentes linguagens (retórica, sincopada, simbólica, geométrica) que compõem o desenvolvimento do conhecimento algébrico. Entende-se que esta tese contribui com elementos para continuar a discutir essa questão na medida em que busca estabelecer as relações entre esse movimento, que é lógico e histórico, dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.

Para as autoras, que também se baseiam em Caraça (1952), o conceito de variável é um dos nexos internos que compõe o pensamento algébrico, e que a gênese desse conceito contém em seus fundamentos a palavra, a sincopação, a figura e a letra. Nesta tese é entendido como pressuposto que a fluência e a variável, bem como suas representações por palavras, abreviaturas, símbolos geométricos e outros, são elementos fundamentais para a constituição do conhecimento algébrico. Concordamos com Moura e Sousa (2008, p.68) que sugerem uma proposta de ensino de álgebra em que " […] o ponto de partida do ensino deste campo da matemática seja um estudo de movimentos qualitativos e quantitativos da realidade para, num segundo momento, tornar-se um estudo dos aspectos particulares e singulares de movimentos quantitativos determinados".

A **relação quantitativa entre grandezas** é também fundamental para Davídov (1988), pesquisador russo da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade, que apresenta proposições indicativas de que mesmo antes de os estudantes reconhecerem os números, os símbolos literais e fórmulas são acessíveis às séries iniciais. Mas, para tal, o estudioso estabelece um sistema de ensino com definição de tarefas gerais de estudo, e suas respectivas ações e tarefas particulares, que constituem um programa curricular, de modo que os estudantes se envolvam em atividade de estudo com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico. Nesse sentido, busca a gênese do conceito de número por considerá-la a mesma para todos os números reais. Entende que os números naturais, racionais, inteiros, irracionais são casos singulares da representação das relações gerais entre as grandezas (DAVYDOV, 1982). Por isso, é possível recorrer a símbolos literais com os estudantes, como um modo universal de relação entre as grandezas, que explicita em sua forma singular os diferentes tipos de números. A relação entre o universal e o singular é mediado pelo elemento particular, a medida.

O estudo de Rosa (2012) sobre as proposições davydovianas para o ensino de matemática do primeiro ano escolar mostra que a partir das grandezas se deduzem os casos particulares e singulares do conceito de número. Assim a partir da identificação das grandezas como elemento central, como a essência, Davydov estabelece as tarefas de estudo para os estudantes que permitem as inter-relações entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

> Importa reafirmar que não existe número sem a relação entre grandezas, sejam elas discretas ou contínuas. Em outras palavras, sem ela não se pode compreender teoricamente o conceito de número, por outro lado, é possível compreender a relação entre grandezas sem conhecer o número. Enfim, as relações entre grandezas são a abstração inicial, que reflete a essência, a causa do conceito de número. A partir dela, o referido conceito surge e se desenvolve, com todos os seus elementos e características, tais como: maior, menor, igual, sequência, classe, série, correspondência, unidade, medida (a contagem é uma forma de medir), subdivisão da unidade, adição, subtração, entre muitos. (ROSA, 2012, p.116).

Assim, o conceito de número é derivado nas pesquisas de Davydov (1982) de uma relação geral entre as grandezas, mas como caso particular. Entende-se nesta tese que, para o conhecimento algébrico, o estabelecimento dessas relações de modo geral é fundamental. E várias pesquisas destacam o processo de generalização no ensino de matemática, a partir de diferentes linhas teóricas (RADFORD, 2011; BLANTON; KAPUT, 2011; FONT, 2007).

Como foi visto, em meados da década de 1990, Usiskin (1995) indicava a aritmética generalizada como uma das concepções de álgebra, que permitiria ao estudante uma forma mais ampla de generalização, tomando a variável como instrumento útil para descrever matematicamente a relação entre números, e “Dentro desta concepção de álgebra, as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar*. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética” (USISKIN, 1995, p. 13, grifo do autor).

Tal concepção de ensino de álgebra como aritmética generalizada é muito presente em propostas curriculares e nas ações dos professores. Essa generalização é realizada sobre as propriedades numéricas. É verdade que, com o uso dos símbolos, é possível generalizar a aritmética, mas há uma diferença entre identificar a álgebra como aritmética generalizada e entender que a álgebra pode generalizar a aritmética. Lins e Gimenez (1997), em seu estudo sobre as diversas concepções da atividade algébrica, realizaram também uma análise da proposta de Davydov, e a partir de tal análise indicam que:

> É essencial estabelecer, de forma clara, a distinção entre ‘genérico’ e ‘generalizado’. A situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares… ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares. Isso não quer dizer, é claro, que a situação genérica se constitua independentemente de qualquer caso particular (embora isso não seja nada improvável ou impossível!) e sim, que, no interior da atividade, a atenção é diretamente dirigida ao que é geral, e não ao processo de ‘generalização’. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 114, grifos dos autores).

Pesquisas recentes também atribuem papel importante ao processo de generalização. É o caso de Blanton e Kaput (2011) para quem o coração da álgebra e do pensamento algébrico se encontra em construir, expressar e justificar as generalizações. Também consideram que o raciocínio algébrico, como uma atividade de generalização de ideias matemáticas com representações simbólicas e representando as relações funcionais, pode ser apresentado aos estudantes já nos primeiros anos de escolaridade.

> Assim, nossa perspectiva sobre a 'prontidão para a álgebra' é que as experiências em construir, expressar e justificar generalizações matemáticas que para nós são o coração da álgebra e do pensamento algébrico devem ser um processo contínuo desde o início da escolaridade formal, e não conteúdo para as séries posteriores em que as crianças do ensino fundamental são 'preparadas' através de um foco singular e míope na aritmética. (BLANTON; KAPUT, 2011, p.7).

Pesquisas como as de Radford (1996a,1996b) também contribuem para o aprofundamento dos estudos sobre o processo de generalização, particularmente a algébrica, na medida em que desvinculam esse estudo dos processos aritméticos, estudando-os a partir de outras dimensões de conteúdo matemático, além das filosóficas e psicológicas. Compreender o significado da generalização em matemática e de forma mais específica da generalização que envolve a álgebra depende de concepções sobre o desenvolvimento dos processos de conhecimento em geral e de matemática em particular. Por isso, é necessário esse conhecimento para que se aperfeiçoem os estudos sobre o processo de ensino de álgebra.

Concordamos com Radford (1996a, p.108) no seguinte sentido: "Eu penso que hipótese da generalização ser vista como uma norma epistêmica precisa ser estudada em maior detalhe e que as consequências que provoca para o ensino de matemática precisam ser especificadas".

Os estudantes já se deparam ao chegar à escola com conhecimentos matemáticos e especificamente algébricos com um alto nível de generalização e formalização, nível este que foi alcançado pela humanidade. Entretanto, precisam se apropriar dos conceitos nesse nível de generalização. Radford (2001) apresenta sua compreensão sobre o processo de generalização a partir da semioses e exemplifica com situações de pesquisas com os estudantes. O autor se refere à "generalização factual", "generalização contextual" e "generalização simbólica".

Por "factual" entende o processo de generalização de ações numéricas na forma de operação. Trata-se de um processo que permanece ainda no nível numérico mesmo que permita ao estudante alcançar qualquer caso particular. A estrutura matemática do padrão é revelada na fala dos estudantes por palavras que permitem descrever procedimentos e ações reiterativos (por exemplo: o próximo, sempre), ou podem ser expressas no ritmo e no movimento descrito dentro de determinada sequência. Nas generalizações factuais não se recorre a termos linguísticos ou símbolos especializados e isso limita o alcance de um *status* mais geral, mantendo as ações de generalização ligadas a um contexto específico. O autor usa como exemplo uma situação em que os estudantes necessitam representar um elemento qualquer de uma sequência dada. Considera que nesse momento emerge o objeto abstrato, mas que está relacionado às ações requeridas do sujeito. Nesse sentido, os objetos abstratos são objetivados na linguagem e relacionados às particularidades do objeto matemático concreto.

Por “generalização contextual”, Radford (2001) entende o tipo de generalização que se desenvolve sobre os objetos ainda situados no tempo e no espaço e que também dependem das pessoas envolvidas na ação. Diferencia esse tipo de generalização da generalização algébrica, porque, nessa última, os objetos não estão situados temporal ou espacialmente e não estão atrelados à participação de um indivíduo particular. Ainda usando o exemplo de representar o elemento qualquer de uma dada sequência, preocupa-se com o fato de os estudantes não simbolizarem a estratégia de generalização baseados na figura anterior da sequência. Radford reconhece a necessidade de os estudantes “descorporificarem” e deslocarem do tempo e do espaço os processos de generalização e objetos matemáticos, e a esse processo atribui o nome de “dessubjetificação”, que considera necessário para chegar à generalização simbólica.

Usando um exemplo apresentado em Panossian (2008), uma situação em que os estudantes precisavam encontrar a fórmula geral equivalente à quantidade de jogos de um campeonato, para “n” times, gerou dificuldades. Por meio de um processo indutivo, a partir de casos particulares, os estudantes conseguiram resolver a situação ainda que a quantidade de times fosse alta (generalização factual) e também expressar simbolicamente uma forma geral associada à situação (generalização contextual). Entretanto, essa forma não tinha significado para os estudantes, e não constituía uma forma realmente geral que também explicaria outros casos particulares. A generalização se deu dentro de um contexto e por meio de casos particulares.

Ainda nessa situação, mas considerando os tipos de generalização propostos por Davydov, entende-se que a generalização empírica foi alcançada, mas não a generalização teórica que permite a relação do geral com os particulares.

De forma sintética, para este pesquisador, o conhecimento empírico baseia-se no objeto e suas representações, estabelece o processo de generalização formal das propriedades dos objetos, baseado na observação, na percepção. Busca uma propriedade formal comum a um grupo ou classe de objetos que revele as propriedades específicas individuais. Permite a sistematização e classificação de objetos. Seu produto, o “conceito” empírico do objeto, é apresentado por meio de um termo, de uma palavra que descreve o objeto. O conhecimento teórico, por sua vez, busca a relação entre as coisas, os objetos no interior de um sistema. Também se baseia na percepção dos objetos, mas busca neles, mais do que é externo, visível, busca as relações entre suas propriedades. Seu produto, o "conceito"' teórico do objeto, concretiza-se por meio da transformação do saber e é expresso por diferentes meios da atividade intelectual.

Nesse panorama que apresenta diferentes pesquisas voltadas ao ensino de álgebra, destacam-se três elementos: variável, relações entre grandezas e processo de generalização. Existem diferentes concepções sobre o que seja cada um deles e como devem ser abordados no ensino, mas, nesta tese, tais elementos serão destacados como essenciais para o ensino da álgebra e desta forma serão explicitados e estudados a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural.

A seguir será examinado o modo como o objeto de ensino da álgebra se revela em programas curriculares.

2.2 O OBJETO DE ENSINO DA ÁLGEBRA REVELADO NAS PROPOSTAS CURRICULARES

No processo de elaboração de propostas ou programas curriculares, entende-se que é necessário definir critérios para a escolha do que será considerado como objeto de ensino, e tais critérios estão necessariamente associados aos objetivos escolares para a formação dos estudantes, ou melhor, à função social da escola. De forma particular, entende-se que o estabelecimento do objeto de ensino da álgebra também está diretamente relacionado ao objetivo da escola para a formação dos estudantes. Diferenças no que é proposto para o ensino da álgebra nos diferentes programas curriculares geram diferenças nos resultados obtidos em relação à formação dos estudantes.

Por meio dos estudos de Valente (2007), que realiza uma retomada da história da matemática escolar no Brasil, podem ser encontrados exemplos da definição de conteúdos de ensino associados às finalidades da educação: a organização dos primeiros programas de ensino no início do século XIX voltados para a Academia Real dos Guardas-Marinha e para a Academia Real Militar.

> Os conteúdos da matemática secundária ficam definidos, quer seja pela Academia Real Militar, por meio da matemática elementar necessária ao aprendizado da matemática superior, quer seja pela Academia Real dos Guardas-Marinha pela necessidade de formação de profissionais do mar. (VALENTE, 2007, p.107).

Tratava-se de garantir o conhecimento para a formação de técnicos, engenheiros, guarda-marinha. Nessa época, uma obra de referência era *Eléments d'Algebre de Bourdon* (apud VALENTE, 2007), que se baseia no programa da École Polytechnique e foi compilado por Cristiano Beneditto Otonni, constituindo o programa que era ensinado no primeiro ano da Academia da Marinha. Segundo Valente (2007), essa compilação, realizada de forma limitada, constituiu a álgebra das escolas secundárias brasileiras, colégios e liceus.

Percebe-se desta forma o quanto as finalidades do ensino para a formação dos estudantes influenciam e definem o conteúdo a ser ensinado.

Pires (2008) resume o processo de organização e desenvolvimento curricular da Matemática no Brasil a partir da década de 1960 e da influência do Movimento da Matemática Moderna. Tal movimento surge atendendo às pressões para a modernização do ensino, visando à formação de indivíduos adaptados aos crescentes avanços tecnológicos, de acordo com o progresso e desenvolvimento. Destaca-se a preocupação mundial que era a disputa pela supremacia tecnológica entre Estados Unidos e União Soviética, e as mudanças curriculares aumentando a ênfase nas áreas exatas. Essa preocupação influencia também o ensino no Brasil que convivia com atraso tecnológico e de mão de obra qualificada. O modo encontrado para atender a essa pressão de formação dos estudantes foi aprofundar a linguagem dos conjuntos e privilegiar o papel das estruturas, inclusive da álgebra abstrata (grupo, anel, corpo e outros).

Conforme Pires (2008), no movimento da Matemática moderna era intenção que o ensino escolar se aproximasse da ciência, entretanto os objetos matemáticos foram tratados de maneira excessivamente formalizada.

> No período que sucedeu o declínio da Matemática Moderna, em todo o mundo buscou-se construir currículos de Matemática mais ricos, contextualizados culturalmente e socialmente, com possibilidades de estabelecimento de relações intra e extra-matemática, com o rigor e a conceituação matemáticos apropriados, acessível aos estudantes, evidenciando o poder explicativo da Matemática, com estruturas mais criativas que a tradicional organização linear (seja por meio de mapas conceituais, de concepção mais hierarquizada, seja por meio de redes de significados, de concepção menos hierarquizada). (PIRES, 2008, p.15).

Também influenciam a determinação dos programas curriculares as diferentes concepções sobre a natureza da álgebra e de seu ensino. As diferenças entre o que se entende por ensino e aprendizagem da álgebra nos currículos de vários países foram analisadas pelo grupo participante do ICMI em 2004 e estão reunidas nos textos de Kendal e Stacey (2004). Esses estudos e análises indicam diferenças entre a organização dos programas curriculares de álgebra dependendo da organização do sistema escolar e da faixa etária dos estudantes. Por meio do estudo de currículos de diferentes países encontra-se a álgebra vista como:

a) um meio para expressar generalidade e padrões;
b) estudo da manipulação simbólica e resolução de equações;
c) estudo de funções e suas transformações;
d) um meio para resolver problemas que estão além do alcance de métodos aritméticos;
e) um meio para interpretar o mundo por meio de situações reais modeladas, precisa ou aproximadamente;
f) um sistema formal que possibilita lidar com teoria dos conjuntos, operações lógicas e outras operações ou objetos além dos números reais.

Em função do excesso de diferenças sobre o modo de conceber a álgebra e seu ensino em diferentes países, os autores dessa pesquisa encontram dificuldades em generalizar e definir uma concepção de álgebra que seja consensual.

Kendal e Stacey (2004) também apresentam o panorama de Rômulo Lins sobre o que tem sido considerado como álgebra no Brasil. O pesquisador considera que a educação algébrica no País segue um modelo de manipulação simbólica tradicional, em que os estudantes de 4º ano resolvem equações simples com o uso do método de completar os espaços vazios e há algum trabalho com padrões. Até o 6º ano, essa situação não se modifica muito e os estudantes conseguem apenas resolver equações simples. A partir do 7º ano, a manipulação simbólica é enfatizada, com o estudo de binômios e o uso de recursos geométricos com o pressuposto de que auxiliará na compreensão. No 8º ano, a manipulação simbólica permanece e os estudantes passam a resolver equações de 2º grau, além da introdução da noção de função. No ensino médio, os conteúdos ensinados são funções, trigonometria, polinômios. Nesse panorama, Rômulo Lins destaca também as dificuldades dos estudantes em resolver problemas não padronizados, além de baixos índices atingidos em provas, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA).

Esse panorama e a ênfase no modelo de manipulação simbólica podem ser reconhecidos na síntese a seguir apresentada sobre algumas propostas curriculares, em especial do Estado de São Paulo, para reconhecer como a álgebra e seu ensino são concebidos.

Nas Propostas Curriculares elaboradas ao final da década de 1980 (SÃO PAULO, 1988), é possível perceber uma tendência de formalização, sistematização e capacidade de abstração das estruturas matemáticas. Esperava-se que o aluno compreendesse uma ideia e conseguisse aplicá-la, como se os processos de abstração, generalização e formalização pudessem ser captados em determinadas situações-problema e em seguida aplicados a outras situações semelhantes.

Ao invés do nome álgebra, nas propostas curriculares, recorre-se a “cálculo literal”.

> O título dessa unidade vem substituir o de ‘álgebra’. Para além de uma simples mudança de nomes, através da aglutinação de tópicos afins, espera-se dar nova abordagem a esse tema de modo a reduzir significativamente a sua extensão, a sua monotonia e o tempo que, geralmente, se gasta no seu desenvolvimento. (SÃO PAULO, 1988, p. 95, grifo do autor).

A troca do nome de “álgebra” para “cálculo literal” indica uma tendência a entender aquela como o cálculo com letras. Depreciado, considerado monótono, pretendia-se a substituição desse desenvolvimento algébrico por uma nova abordagem. Nesta, se destaca a importância atribuída à manipulação dos símbolos para que o estudante compreendesse as propriedades e operações da própria álgebra, que, por sua vez, legitimariam a sua inclusão curricular. Isso se explicita em uma das observações referentes ao tratamento metodológico do tema: “Esse conteúdo [cálculo literal] deve estar vinculado diretamente aos temas: ‘estudo das propriedades das operações’ e ‘regras de simplificação no cálculo com potências’ que deverão dar legitimidade aos mecanismos presentes no cálculo literal” (SÃO PAULO, 1988, p.95, grifo do autor).

A concepção de educação algébrica presente nas propostas curriculares se aproxima da concepção letrista facilitadora, ao recorrer a alguns artifícios metodológicos para facilitar o cálculo com as letras. Por exemplo: “Utilizar, também, o cálculo de áreas para visualizar a soma de alguns monômios” (SÃO PAULO, 1988, p.96).

A resolução de problemas é indicada como procedimento metodológico, somente para desencadear o surgimento, por exemplo, de equações ou de sistemas, que deveriam ser estudados de forma autônoma. Tal orientação é indicada para a resolução de equações de 1º grau na 7ª série: “Embora se deva partir ainda de situações-problema, das quais as equações sejam meras traduções, trata-se, agora, de se proceder a um estudo relativamente autônomo das equações do 1º grau com uma incógnita” (SÃO PAULO, 1988, p.98). Percebe-se, então, a importância maior sendo atribuída ao método de resolução de equações em seus procedimentos técnicos do que à resolução do problema.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), percebe-se uma abrangência no que seria campo de uma educação algébrica: se expande desde a compreensão de sua sintaxe até o reconhecimento de suas diversas funções relacionado à generalização de padrões, resolução de problemas aritmeticamente difíceis, estabelecimento de relações entre grandezas e outros.

Para o terceiro ciclo[10], a recomendação é de que o estudante compreenda a noção de variável e expresse algebricamente a relação entre duas grandezas.

> É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo. (BRASIL, 1998, p.68).

A resolução de equações, de inequações e de sistemas de equações está prevista para o quarto ciclo, na medida em que os alunos tenham a necessidade de tais formulações matemáticas para resolver os problemas.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação.
> Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p.50-51).

O estudo e ensino com a álgebra, então, ocorrem como forma de garantir o significado às ideias matemáticas, a elaboração de estratégias diferenciadas. Para tanto, são sugeridas as ações com gráficos, planilhas e outras.

No decorrer de seu texto, os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam concepções de álgebra, muito próximas às concepções propostas por Usiskin (1995), mas não fazem referência a essa pesquisadora.

Consideram ainda que tais concepções devem estar contempladas nas situações propostas para os alunos. “Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos” (BRASIL, 1998, p.117) (Figura 2).

[10]Este ciclo corresponde às antigas 5ª e 6ª séries, ou na legislação atual, 6º e 7º ano, respectivamente.

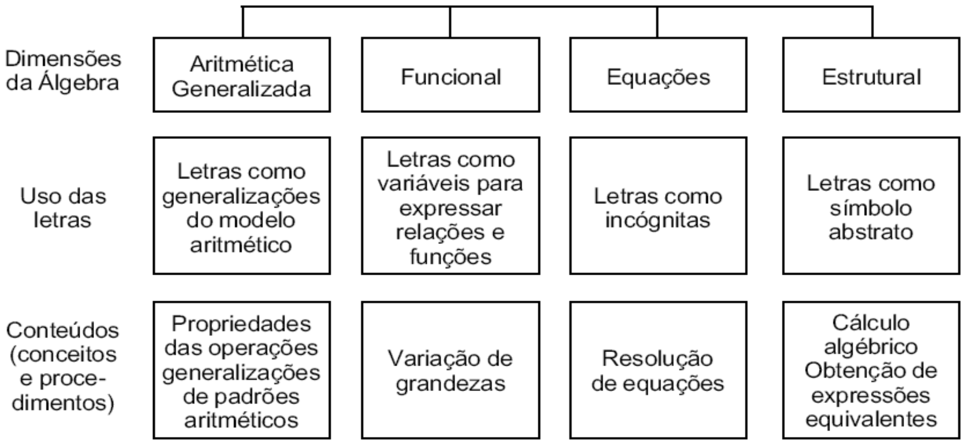


Figura 2 - Álgebra no ensino fundamental.
Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. p. 116.

Na atual Proposta Curricular para o Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008f), a Matemática é entendida com um sistema simbólico que deve se articular com a língua materna para representar a realidade. Em relação aos conteúdos, mantém a mesma divisão já estabelecida nos Parâmetros Curriculares, com quatro blocos temáticos: Números, Geometria, Medidas, Tratamento da Informação contemplados nos diferentes anos de ensino. De certa forma, perde-se o papel específico do conhecimento algébrico. Este surge ao longo da articulação com outras áreas do conhecimento, como um instrumento de resolução de problemas de diferentes áreas da ciência.

Indica ainda que “Na organização proposta, a lista de conteúdos selecionados para cada série não se afasta muito da que é usualmente apresentada nos diversos sistemas de ensino” (SÃO PAULO, 2008f, p.47). Vale observar que entre as situações de aprendizagem dessa proposta curricular de Matemática, o termo álgebra, linguagem algébrica, ou pensamento algébrico simplesmente não aparece. No entanto, é amplamente contemplado ao final da proposta na lista de conteúdos definidos por série e por bimestre ao longo dos anos de escolaridade do Ensino Fundamental e Médio. Porém mantém a estrutura que, por exemplo, vários livros didáticos (GIOVANI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009; IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009; IMENES; LELIS, 2009) adotam para a organização dos conteúdos, e que estão na lista de livros analisados no Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2011), que sugerem orientações para o ensino de álgebra, entre as quais se destacam:

> A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir simbolicamente problemas encontrados no dia a dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem

> ser gradativamente desenvolvidas para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. O uso da linguagem algébrica, para expressar generalizações que se constituam em propriedades de outros campos da Matemática, é outra função da álgebra que deve ser, pouco a pouco, introduzida. (BRASIL, 2011, p. 16).

Durante as análises realizadas nesta pesquisa, destacou-se a necessidade de estudar os processos de generalização no ensino de álgebra. Por isso, também se destaca neste item uma síntese que pretende revelar o processo de generalização nos atuais programas curriculares oficiais de São Paulo.

A partir da busca pelos termos “generalizar” e “generalização” em propostas curriculares oficiais, foi possível constatar que, no caderno de orientação didática de Matemática da Prefeitura de São Paulo (SÃO PAULO, 2006), eles não são citados. Já, nas orientações curriculares para o ciclo II (alunos de 10 a 15 anos) do ensino fundamental em Matemática (SÃO PAULO, 2007), os referidos termos são citados e espera-se em álgebra que os alunos do segundo ano desse ciclo sejam capazes de “Identificar diferentes usos para as letras, em situações que envolvem generalização de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões” (SÃO PAULO, 2007, p. 45). Nesse caso, considera-se que a generalização é um **processo** a ser desenvolvido sobre objetos matemáticos, ou seja, generalizam-se propriedades, fórmulas, relações e outras. Além disso, sugere-se o trabalho com cálculo mental, aproximado por estimativas, ou com calculadora e outros, justificando que “permite o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização” (SÃO PAULO, 2007, p. 45). Nesse caso, a generalização está sendo tratada como uma capacidade cognitiva a ser desenvolvida no indivíduo, e, portanto, um **produto** do processo de ensino.

Essa relação entre a generalização como uma capacidade cognitiva do aluno a ser desenvolvida e/ou como um processo realizado sobre objetos matemáticos é necessariamente dialética. A capacidade cognitiva do estudante em generalizar se desenvolve enquanto ele realiza processos de generalização. Ao mesmo tempo, os processos de generalização se desenvolvem na medida em que o estudante possui condições cognitivas para realizar tal processo. A compreensão da generalização como processo/produto requer estudos epistemológicos (que revelam o desenvolvimento desse processo de generalização no movimento histórico) e psicológicos (que revelam o movimento da generalização enquanto processo lógico de pensamento).

No caso do conhecimento algébrico, por vezes se encontra o processo de generalização diretamente relacionado à generalização de propriedades aritméticas, muitas vezes, sendo a álgebra concebida como a aritmética generalizada e reforçando-a como uma linguagem para expressar regularidades, como destacado no trecho a seguir:

> É importante, também, propor situações que permitam identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas e estabelecer algumas fórmulas. Nessa dimensão, a letra simplesmente substitui um valor numérico.
> Analisando as atividades propostas, o aluno pode construir a ideia de álgebra como uma linguagem que serve para expressar regularidades observadas em diferentes relações aritméticas e geométricas. (SÃO PAULO, 2007, p.93).

Tal compreensão sobre o termo generalização, que aparece nos documentos curriculares oficiais da prefeitura de São Paulo, também pode ser destacada na proposta curricular do Estado de São Paulo. No caderno específico onde está descrita e se apresentam os princípios gerais da proposta curricular de São Paulo (2008f), os termos generalizar e generalização não aparecem, mas podem ser encontrados nos cadernos do professor e do aluno. Um exemplo no trecho a seguir:

> Um dos objetivos centrais do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra é generalizar regularidades. O uso de letras para representar, por exemplo, o padrão de uma determinada sequência numérica é um dos recursos que a álgebra nos permite. Nesse caso, a generalização de uma sequencia numérica com o uso de expressões algébricas pode ser útil para determinar números específicos da sequência sem recorrer a processos aritméticos. (SÃO PAULO, 2009a, p.11).

Realizar generalizações é indicado como competência e habilidade dos estudantes a ser desenvolvida nas situações de aprendizagem que investigam sequências aritméticas. Por exemplo, encontramos no Caderno do Aluno da 7ª série, na situação de aprendizagem 1 indicado como “Competências e habilidades: compreender o uso de letras representativas de números; generalizar padrões em sequências por meio de expressões algébricas; reconhecer equivalências entre expressões algébricas; realizar operações simples com polinômios” (SÃO PAULO, 2009b, p.11).

Também podem ser encontradas na Proposta Curricular, as concepções de álgebra citadas por Usiskin (1995), e que também se encontram nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

> Normalmente, atribuímos ao estudo da álgebra as funções de generalizar a aritmética, de possibilitar um processo para a resolução de problemas, de permitir a representação da variação de grandezas e, ainda, de formalizar estruturas matemáticas. Entendemos que estas quatro funções devem ser exploradas de forma relacionada, e não como blocos isolados dentro do planejamento. (SÃO PAULO, 2009b, p.9).

Entretanto, a álgebra como generalização de procedimentos da aritmética é reforçada, como exemplifica este trecho (SÃO PAULO, 2009b, p.42) em que os autores da proposta, referindo-se à situação de aprendizagem 3, escrevem:

> Uma das metas traçadas no trabalho com essa situação de aprendizagem é que o aluno saiba efetuar transformações em uma expressão algébrica por meio de fatorações, simplificações e cancelamento, permitindo, de certa forma, uma generalização de procedimentos aplicados nos cálculos aritméticos.

Como visto, as diferentes concepções de álgebra e educação algébrica, refletidas nas propostas curriculares e que enfatizam a manipulação simbólica ou a álgebra como aritmética generalizada, não se encontram só nos programas brasileiros, ou do Estado de São Paulo. Knuth et al. (2005) consideram que há um crescente consenso de que uma reforma no ensino de álgebra requer uma reconceitualização da natureza da álgebra e do pensamento algébrico, e um novo exame sobre quando os estudantes são capazes de pensar algebricamente para que se possa inserir a álgebra no currículo.

Entende-se nesta tese que tal reconceitualização é derivada do estudo aprofundado do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a partir do que se considera como função da escola. Nesta tese destaca-se como uma função da escola, desenvolver no estudante o pensamento teórico, e, portanto, considera-se necessário o estudo dos diferentes objetos de conhecimento por meio de seus nexos conceituais, de suas relações teóricas cuja apropriação com significado deve ser garantida a todos os estudantes. Por isso, serão destacados os estudos e pesquisas de Davydov, no sistema escolar russo, e os trabalhos de pesquisa de Schmittau (2004), na implementação desse currículo em uma escola americana.

Conforme Schmittau (2005), no final dos anos de 1950 e começo dos anos de 1960, ocorriam concomitantemente reformas curriculares nos Estados Unidos e a reforma de Davydov, no sistema curricular russo. Mas há uma diferença essencial: enquanto os EUA se apoiam sobre a teoria de conjuntos para a construção do edifício matemático, Davydov (apoiado em Bourbaki) entende que, na verdade, são as estruturas que constituem o conteúdo fundamental da Matemática.

> Bourbaki […] notou que a história do desenvolvimento da estrutura algébrica ocorre em paralelo com o desenvolvimento dos números reais, acompanhando cada história da ampliação do conceito de número, até a estrutura algébrica exceder o limite dos números, e o sistema de números reais se tornar meramente um caso especial da estrutura algébrica. O que foi requerido então a fim de tornar a estrutura algébrica acessível para as crianças foi a fusão do mais alto nível de generalidade com a necessidade cultural e histórica e passos intermediários para construir o sistema de números reais. (SCHMITTAU, 2005, p. 17).

Assim, Schmittau compreende que o currículo elementar de Davydov possibilita às crianças o estudo das quantidades escalares de comprimento, área e volume, por exemplo, de forma sensível e palpável, pois, ao tatear e olhar um objeto, os estudantes criam condições de discernir as grandezas de um objeto comparando-as a outro. Ao mesmo tempo, possibilita identificar suas propriedades e acessar o que seria a estrutura matemática dos números reais, por meio do estabelecimento dessa relação entre as grandezas de diferentes objetos. A autora também realizou uma pesquisa (SCHMITTAU, 2004 apud SCHMITTAU; MORRIS, 2004), com o desenvolvimento dos três anos elementares do currículo de Davydov em uma escola nos Estados Unidos. O estudo revelou que os estudantes conduzidos por esse currículo resolveram problemas algébricos que não eram encontrados até o segundo nível de escolaridade nos Estados Unidos. A pesquisadora também apresentou uma comparação entre o desenvolvimento da álgebra no currículo de matemática elementar proposto por Davydov e pelo currículo orientado pelo National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). Destaca uma diferença relevante entre eles: a álgebra desenvolvida no currículo de Davydov a partir da relação entre as grandezas, sendo os números uma aplicação concreta das generalizações algébricas, portanto, em oposição ao que é proposto pelo NCTM, em que a álgebra é derivada das generalizações numéricas.

De forma sintética, é necessário explicitar que no programa curricular de Davydov, que visa à formação do pensamento teórico dos estudantes, o estudo da álgebra precede o da aritmética. A álgebra é desenvolvida pela exploração da relação entre as quantidades, que também expressa a noção de número. O programa curricular é constituído por tarefas particulares executadas pelos estudantes, que não são divididas em passos, nem contêm “dicas”, e não há preocupação com sua apresentação didática, porém organizadas de tal modo que orientam os estudantes a superar seu método anterior de resolução das situações.

Inicia-se com a exploração e comparação de propriedades quantitativas de diferentes objetos, sem recorrer a números, mas sim a segmentos de reta que permitam identificar igualdades ou desigualdades nas grandezas dos objetos. Posteriormente, as letras (maiúsculas) são introduzidas para representar essa comparação junto aos sinais de igualdade e desigualdade (igual, diferente, maior e menor). Nesse caso, o uso da letra está relacionado à representação concreta da relação, e se considera que os estudantes estão aptos para o estudo das propriedades.

Posteriormente, os problemas encaminham para o estudo das propriedades das relações de igualdade e desigualdade: transitiva, reflexiva, simétrica. Nesse momento, os estudantes não recorrem ao concreto, mas lidam abstratamente com as relações e a partir de deduções lógicas estabelecem novas relações.

> Em um problema, por exemplo […] é apresentado aos estudantes a figura de dois balões. O volume de um balão é nomeado L; este balão é completamente desenhado. O outro balão de volume P é somente parcialmente desenhado. O problema diz: Se L = T e T>P, então L___P. (SCHMITTAU, 2004 apud SCHMITTAU; MORRIS, 2004, p.63).

A representação por letras das medidas do volume dos balões permite que a relação entre as grandezas seja estabelecida e também possibilita que sejam realizadas deduções lógicas. Entretanto, é necessário verificar se os estudantes estão compreendendo que o L compreende o volume de um determinado balão e, portanto, associado a uma quantidade específica, ou se pode vir a ser o volume de vários balões, o que implicaria aceitar a variação da quantidade em L. Assumindo essa variação, o estudante entenderá, por exemplo, a relação T>P como geral, ou como sendo o fato de que existem vários balões cujo volume (T) é maior do que o volume (P) de outros tantos balões; então, em um movimento do geral para o particular pode ser relacionada a outros casos particulares com medidas específicas.

No programa de Davydov, os estudantes resolvem problemas com a relação parte-todo, recorrendo a esquemas e letras para representar as partes e o todo. Quando aprendem a escrever fórmulas literais, podem então resolver os problemas para encontrar a parte ou o todo. Posteriormente, essas fórmulas são convertidas em equações e identificam quando devem somar ou subtrair para encontrar a parte ou o todo. As equações são interpretadas como ações sobre as quantidades e relações entre as quantidades.

No nível seguinte, introduzem-se os problemas de razões proporcionais, e os estudantes devem ter claras as noções de "quantidade", de "unidades de medida e a relação entre estas unidades de medida", por exemplo, km/h. Além disso, eles precisam compreender que algumas quantidades se modificam no processo de movimento, por exemplo, distância e tempo, e há uma relação proporcional entre elas. A ideia de relação proporcional requer o domínio da comparação de duas quantidades em termos de um múltiplo. As relações entre as quantidades são representadas na forma literal e na forma de esquemas, o que requer dos estudantes a capacidade de usar a letra para designar números conhecidos e desconhecidos, e desta forma compreender o conceito de variável.

No currículo de Davydov, se prevê o trabalho tanto com processos uniformes (nos quais as variáveis estão em proporção direta), como com processos não uniformes. Para Schmittau (2004 apud SCHMITTAU; MORRIS, 2004), o currículo de Davydov permite aos estudantes pensar os procedimentos algébricos de diversas maneiras e desenvolve o pensamento teórico, na medida em que possibilita aos estudantes procurar relações entre as quantidades em situações contextualizadas e aprender a resolver uma equação. Além disso, desenvolve a capacidade de análise e generalização ao permitir que os estudantes compreendam a letra como “qualquer número”. Nesse sentido, os estudantes podem gerar modelos de relações quantitativas, e assim aprender as estruturas e os princípios que regem a manipulação de símbolos algébricos.

Schmittau (2005) indica três características que estão incorporadas nesse programa de Davydov, e que se encontram nos estudos de Vigotski (2001), que recorre a exemplos sobre o desenvolvimento de conceitos algébricos para explicitar o processo de formação de conceitos. Em primeiro lugar, o desenvolvimento a partir de bases conceituais generalizadas. Em segundo, o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto, na medida em que concretiza o conceito de número partindo das noções de medida. E em terceiro, a apropriação de ferramentas psicológicas para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, no caso o uso de esquemas.

Schmittau (2004 apud SCHMITTAU; MORRIS, 2004) destaca os quatro princípios enunciados dos *standards* do NCTM (2000): entender relações, padrões e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e entender relações quantitativas; analisar mudanças em vários contextos. Considera que o currículo de Davydov atende a esses princípios, mas os modos de ação são diferentes. No currículo davydoviano são enfatizados o uso de esquemas e representações pelas análises algébricas, que são dificilmente alcançadas em currículos que têm por base as operações numéricas. Por exemplo, o trabalho sistematizado e a ênfase em padrões de objetos, formas e números estão presentes nas recomendações do NCTM Álgebra Standard como base para o entendimento de relações entre variáveis e a ideia de função. Entretanto, no currículo de Davydov, tal trabalho não é enfatizado, pois não se considera que a indução a partir de padrões entre números ou objetos geométricos é garantia de que os estudantes irão compreender a natureza ou as propriedades da relação (SCHMITTAU, 2004 apud SCHMITTAU; MORRIS, 2004).

Trata-se essencialmente da organização do ensino, na forma de programa curricular para o desenvolvimento do pensamento teórico e, portanto, a partir de processos de pensamento, abstração, generalização e formação de conceitos teóricos, o que se entende nesta tese como função do ensino.

2.3 NO CURSO COM OS PROFESSORES

Algumas ações iniciais do curso com os professores da rede estadual de ensino tinham por objetivo específico que os participantes revelassem suas concepções sobre álgebra e seu ensino, e também o que identificavam como objeto da álgebra. Dentre as ações realizadas pelos professores para desencadear tais manifestações, destacam-se: descrição de uma situação que eles considerassem relevante com o ensino da álgebra; análise de um quadrinho (Apêndice D) em relação ao significado da álgebra para os estudantes. Os dados obtidos pela fala dos professores, e pelos registros escritos nessas situações específicas, entre outros revelados em situações proporcionadas ao longo do curso, foram analisados. A intenção foi constatar as concepções evidenciadas no panorama das pesquisas atuais e o que pode ser questionado dessas concepções em relação ao objeto desta pesquisa, a constituição do objeto de ensino da álgebra e o movimento histórico e lógico dos conceitos.

Considerando que as equações, sequências e funções são os tópicos mais citados em documentos curriculares e em livros didáticos (GIOVANI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009; IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009; IMENES; LELIS, 2009) para o ensino de álgebra, tinha-se a hipótese de que esses tópicos seriam citados como objeto da álgebra pelos professores participantes. Entretanto, as primeiras análises revelaram outros elementos destacados pelos professores a partir da compreensão do que é a álgebra e seu ensino.

Durante o compartilhamento de respostas ao item (d) do Apêndice D (O que pode ser considerado como objeto da álgebra e que deve ser ensinado aos estudantes?), a simbologia destacou-se entre os registros escritos dos professores. Dos 16 professores que iniciaram o curso e responderam a esse questionamento, 5 deles destacaram a simbologia como objeto de ensino da álgebra, por meio de afirmações como “A simbologia usada no estudo de cada situação” (Vânia, RE3); ou “A simbologia que sintetiza o pensamento de forma geral” (Suzana, RE3), e uma professora destacou: “O objeto da álgebra é a linguagem da matemática” (Érica, RE3).

Ainda evidenciando uma concepção de álgebra associada a seus símbolos, o professor Pedro destaca como sendo objeto da álgebra, a “sistematização de problemas concretos por meio da simbologia” (A35, AV2, 00:09:00).

Por outro lado, a professora Helena (A38, AV2, 00:19:50) entende que a álgebra permite que se resolva uma série de problemas em função de seu poder de generalização e admite como objeto da álgebra as generalizações e as relações entre as grandezas. Essa professora oscila entre uma tendência a compreender a álgebra como aritmética generalizada e em seu aspecto funcional.

A professora Suzana apresentou uma concepção de álgebra associada a formas de pensamento mais do que a sua representação na forma de linguagem. Portanto, aproxima-se de uma concepção de nível global/meta como indica Kieran (2004). Isso ocorre por considerar que a essência da álgebra está em sua possibilidade de resolver situações, por suas estratégias de pensamento, com pouco enfoque em relação a que isso aconteça somente pela sua possibilidade de manifestação em símbolos. Essa interpretação da professora se manifesta em suas respostas ao que poderia ser considerado como objeto de ensino da álgebra.

> […] a álgebra é importante sim por que é ela que faz com que a gente equacione um pensamento, uma solução, um raciocínio que vai enfim lá na frente de encontro com a nossa situação problema e venha a resolver […] o objeto [de ensino da álgebra] é a construção da ideia de maneira que você a equacione para resolver as situações problemas, problemas gerais a partir de situações problemas do cotidiano […]. (Suzana, A34, AV2, 00: 01: 16).

> […] matemática é raciocínio puro […] número é um quantificador, quem fala que matemática é número está sendo mentiroso. Matemática é um pensamento. Você tem que equacionar o pensamento e trabalhar ele, ah, eu quero quantificar, aí eu vou usar um quantificador, o um, o dois, mas primeiro ele é literal, ele é imagem… (Suzana, A34, AV2,00:06:36).

Questionada sobre a importância da álgebra como conteúdo de ensino, a professora escreve: “sim, por que leva a equacionar um pensamento generalizando assim uma ideia” (Suzana, RE3). Essa professora se destaca no grupo com concepções diferentes em relação ao conhecimento algébrico e seus processos de pensamento, que nem sempre ficam muito explícitas.

Logo no primeiro encontro, a professora Suzana se posiciona em relação ao que considera relevante para o ensino da álgebra e durante a interação com o grupo relata como concebe o ensino de álgebra. Destaca-se a sua concepção de variável, que está relacionada aos variados fenômenos que influenciam um acontecimento, e não necessariamente variações quantitativas.

> Uma coisa que acho que tem que ficar mais clara, que eles tem noção sobre variável que eles calculam isso mentalmente sem perceber e eu chamo muita atenção deles. Eles tem nítida noção, eles sabem o que eles precisam fazer, eu tenho que fazer isso, eu tenho que fazer isso, então eles fazem o cálculo deles na ideia, o que eles não sabem é passar pro papel, só isso, eles sabem o que é uma variável, eles sabem o que eles podem fazer ou não podem, eles sabem quanto tem. Eu dou vários exemplos do cotidiano em que eles fazem isso automaticamente. Aí qual é meu trabalho? Então vamos escrever isso de outra forma, então eu deixo eles resolverem na prática deles e transcrevo a prática deles para a álgebra, por que a gente vai transcrever: você pensou assim, se eu fizesse pra ela desta forma ia resolver? Agora vai! Então a gente

> unifica o pensamento numa forma literal. Então é isso que você ensina e nossa dificuldade é essa é pegar tudo de informação que eles tem e sair da oralidade para a escrita, por que oralmente eles são muito bons. Ninguém pode dizer que os alunos não pensam, eles pensam. Me conta o que você fez hoje, tá ele vai te contar, eu vim pra escola, o ônibus quebrou, o que significa o ônibus quebrar? Era uma coisa prevista? Não, foi um acidente Como posso equacionar isso para que este acidente seja superado e eu não chegue atrasado? Então ele sabe fazer isso oralmente, a nossa investigação além de brincar com a álgebra, tal…é que eu ainda não tive tempo de brincar com isso. É o por quê eles perdem isso quando eles estão na quarta série eles fazem eles põe no papel, desenha eu estou na casinha, aí o ônibus quebrou, eles fazem a equação deles no desenho. Só que ele perde este momento e onde estamos falhando, qual é o ponto, ai que chega no ensino médio e nos pegamos, por que a gente tem que equacionar tudo. (Suzana, AV1, A32, 01:28:52).

Nesse sentido, a professora insiste com os estudantes na representação dos fenômenos influentes em um acontecimento, o que chama de “equacionar”, por exemplo, “aí o ônibus quebrou, eles fazem a equação deles no desenho [...]”. Desta forma, a álgebra para essa professora está sendo concebida como a possibilidade de expressar todo e qualquer movimento da realidade objetiva, sem se prender aos movimentos que podem ou não ser quantificados. Por isso, a sua compreensão de “variável” no movimento do fenômeno é diferente, por exemplo, da concepção de variável em Caraça (1952), ou do que se assume como variável para o ensino de álgebra em geral. Tal tópico e essa compreensão da professora se mostram de maneira ainda mais evidente no momento da elaboração de um mapa conceitual para “Funções”, tarefa proposta pela pesquisadora ao grupo de professores e será abordada no capítulo 5, item 5.3 desta tese.

Entretanto, há uma característica também marcante na concepção de álgebra dessa professora, que é a de relacionar a matemática em geral e, consequentemente, a álgebra a uma dimensão filosófica. Destaca a necessidade de filosofar para não “enrijecer o conhecimento e a cultura humana” (Suzana, D4, DV1, 00:29:00).

> Qual é o interesse social em que o ser humano seja questionador como na época dos filósofos. Qual é o interesse? Qual é o interesse do movimento do pensamento mexer no social que hoje é confortável para uma determinada classe? (Suzana, D4, DV1, 00:30:00).

Essa professora declara ainda que resgata episódios históricos para apresentar aos estudantes. Também concebe como sendo importante “contar as passagens” ou trechos históricos para que o aluno entenda o que está sendo ensinado, como se vê no trecho a seguir transcrito.

> A gente não pode enrijecer o conhecimento […] eu pelo menos busco as coisas diferentes, estou sempre buscando informações diferentes […]. A história da evolução que a gente conta vai do que você domina do que conhecimento já está acostumada. Eu tento não ser tão técnica em relação a demonstrações que na vida

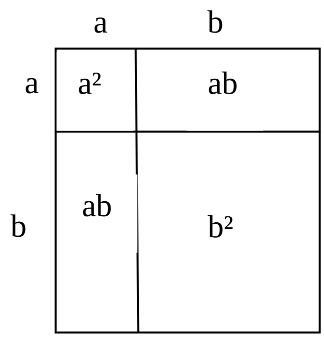
> cotidiana do aluno não faz diferença alguma e trabalho mais o pensamento. Então eu vou contar pra eles a história dos conjuntos, se eu dou conjuntos dos números reais eu conto como chegou até lá. Eu faço uma história, é uma aula de história, se eu dou números complexos eu ponho […] os números e conto […] a história em quinze minutos você consegue contar as passagens com alguns trechos. Se eu vou dar aula de trigonometria eu vou lá para o berço da civilização, eu vou para o Egito. Você consegue mesclar, mas a dificuldade de você ver o aluno gostar de tudo isso vem lá de baixo, então quando chega, a gente tem que trabalhar com o pensamento do aluno, você vai resvalar em n coisas que eles não tiveram, um não teve história, o outro (frase incompleta). A questão é conhecimento geral. A maior burrada humana foi dividir o pensamento, por que o meu professor falou isso, o outro não falou, o outro não sei, mesclou tudo, virou uma bagunça só e ninguém sabe nada no final das contas. E na matemática […] pra você entender conceitos matemáticos você precisa conhecer história, conhecer geografia, precisa conhecer português, precisa conhecer tudo se não você não vai entender matemática, não adianta, você quer se tornar técnico, eu te ensino a técnica, a técnica é essa ó… isso você vai usar nisso nisso e nisso nessa área, nessa área, nessa área[…] o computador faz todos os cálculos se ele quebrar você já sabe fazer[…]seu aluno sabe resolver perfeitamente equação do segundo grau. Mentira ele sabe pra que serve, pra resolver equação, ele sabe que ele vai calcular delta b ao quadrado, mas ele não sabe ler, ele não sabe, ele não foi treinado para análise da álgebra. (Suzana, D7, DV1, 01:02:03).

Pode ser observada por meio desta fala uma concepção de ensino que reconhece nos episódios da História possibilidades para a organização do ensino de álgebra. Mas se observa que o destaque dado pela professora é no sentido de narrar ou contar os fatos e, nesse sentido, a história da álgebra ou da matemática pode ser concebida como um recurso metodológico para o ensino da álgebra. Torna-se necessário destacar que esta não é a concepção adotada por esta tese em relação aos registros de história da álgebra, como se verá no próximo capítulo.

Outras concepções sobre o ensino de álgebra também se revelam no relato dos professores. A professora Mônica compreende que o ensino de álgebra é facilitado com o uso de recursos geométricos, o que se afilia a uma tendência fundamentalista-analógica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Também comenta o gosto dos alunos por esse tipo de situação:

> […] então, eu começo, começava com a álgebra na 5ª. Série, sempre voltada pra geometria, por que você mexendo com a geometria, aqueles conceitos de área, eles adoram, eles não falam assim a matemática. Eles falam: professora hoje é aula de matemática ou de Geometria? Eles querem: Ah professora, dá geometria a semana inteira, eu sempre dei a geometria uma aula por semana[…] Eu procurava dar, principalmente quando você da área, você já começa você faz as construções geométricas…Então vamos generalizar isso aqui , o que vocês estão observando então eu acho que é assim muito legal sempre começar a álgebra ligada a geometria…quando chega na 7ª. Série que é só álgebra aí o negócio para mim complicava, mas eu penso que a gente sempre ligando o ensino da matemática com a geometria, os alunos gostavam, fica mais fácil. (Mônica, A27, AV1, 01:09:54).

Pelo fato de a professora manifestar dificuldade em trabalhar a álgebra associada à geometria a partir do 7º ano, deduz-se que ela não está se referindo ao uso de áreas para explicar os casos de produtos notáveis ou fatoração, o que é frequentemente sugerido em propostas curriculares. Como é o caso, por exemplo, de representar o produto $(a+ b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ geometricamente por um quadrado de lados a+b:



Essa associação que a professora elabora da geometria como um recurso facilitador para o ensino da álgebra está mais próxima de uma necessidade de tornar palpável ou observável determinado elemento.

Ainda em relação ao registro simbólico, a professora Ester também revela dificuldades dos estudantes e questiona sobre a necessidade de uma alfabetização[11] em matemática, similar à alfabetização em linguagem materna, para que os símbolos usados adquiram o que ela está chamando de lógica, mas que poderiam ser associados ao que seria a apropriação do significado de determinado registro escrito.

> […] e uma coisa que eu sinto muito nos alunos em geral é que eles não escrevem matemática corretamente. Quando eles colocam o sinal de igual eles igualam aquilo continuam a equação e aquilo deixa de ser uma igualdade. Então o que eu estou sentindo falta, da mesma forma que a gente é alfabetizado em português, não existe uma alfabetização em matemática. Eles não sabem o que eles estão escrevendo, eles estão escrevendo de qualquer jeito e eles não leem aquilo, então eles aprendem assim equação é isso, mas eles não sabem o que significa equação, de onde vem esta palavra. Então a coisa fica muito que jogada na teoria e eu acho que é difícil, eles não são computadores, pra ficar decorando coisas, eu também tenho muita dificuldade, só decoro as coisas quando tem lógica, então pra eles tem que ter lógica se não fica um monte de números e letras. (Ester, A32, AV1; 01:32:07).

Apesar de se destacar no início da fala da professora uma preocupação com o registro escrito correto por parte dos estudantes, no decorrer do discurso é possível perceber que a professora associa esse registro correto ao que compreende como significado do registro. Por exemplo, quando destaca "[…] eles aprendem assim equação é isso, mas eles não sabem o que significa equação" ou quando destaca no final, "[…] se não fica um monte de números e letras".

---

[11]A diferença entre alfabetização e letramento não foi discutida durante o curso. Apesar de alguns estudos (SOARES, 2003) identificarem a alfabetização como a apropriação do simbolismo da escrita, sendo o letramento considerado como um processo mais amplo em relação à cultura escrita, entende-se que, nesse caso, a referência ao processo de alfabetização em matemática não está sendo tratada somente como a apropriação simbólica, mas não existem elementos suficientes para afirmar que seria o equivalente ao letramento.

Ainda nesse sentido, a professora Helena (A38) retoma a necessidade de ensinar situações contextualizadas para os estudantes para que eles possam estabelecer relações ao que está sendo representado por x e y.

> […] com relação a se os estudantes realmente compreendem ou não, eu verifico que atualmente muitas situações algébricas são ensinadas descontextualizadas. O estudante não vê nem um sentido no que é aquele x o que é aquele y. Ele não consegue relacionar com nada e assim perde o sentido de aprender. Claro que a gente não pode apenas apresentar situações contextualizadas… por que a matemática serve também pra desenvolver o raciocínio do aluno, […] seu poder de lógica. Então ele precisa de outras situações também, só que a gente acredita que a contextualização seja um fato que talvez incentive nossos alunos a estarem pensando. Podemos começar uma aula propondo um problema para que ele resolva, instigando-o a resolver para que ele comece a mobilizar as ferramentas que ele precisa para resolver aquilo, então talvez contextualizar as situações problema seja uma forma de mostrar a importância e encaminhar o processo. (Helena, A38, AV1, 00:20:31).

A discussão sobre o que pode ser entendido como "contextualização" da álgebra não foi aprofundada durante o curso. Entretanto, algumas considerações e alguns cuidados são necessários no uso desse termo que, por vezes, pode significar a necessidade de recorrer a situações cotidianas, ou então de criar uma situação hipotética com a qual aquele conhecimento esteja relacionado.

Lacasa (1994) adverte que o significado atribuído à palavra contexto está diretamente relacionado à fundamentação teórica adotada e se refere ao que seriam teorias contextuais e teoria contextualizadora. Nas teorias contextuais, o contexto está presente na elaboração teórica para explicar a interdependência entre os indivíduos e as circunstâncias. Já nas teorias contextualizadoras, o contexto representa os fatos e fatores que influenciam um resultado e assim o contexto é uma variável independente que interfere na construção do conhecimento. A autora também defende a tese de reconhecer a escola como um contexto social, por ser construída pelos indivíduos e seus objetivos, enquanto interagem e estabelecem relações sociais na busca compartilhada do conhecimento.

A partir desses registros de Lacasa (1994), entende-se nesta tese que o conhecimento ainda que "contextualizado", seja relacionado a teorias contextuais ou contextualizadoras, só irá adquirir sentido e será conscientizado pelo aluno se for objeto ou motivo de sua própria atividade, como indica Leontiev (1983). Desta forma, o conceito de atividade contempla e supera as noções teóricas sobre o que é "contextualizado". No caso da afirmação da professora Helena, anteriormente indicada, pode-se perguntar o que seria uma "situação contextualizada". Pode-se "contextualizar" uma situação por meio de situações cotidianas, ou específicas do próprio conhecimento matemático, ou naquelas para as quais determinada cultura atribui significado e outra não, e outros. O fato é que contextualizar uma situação, no sentido de explicar interdependência entre indivíduos e circunstâncias (teorias contextuais), ou reconhecer no contexto fatos e fatores que a influenciam (teorias contextualizadoras), ainda não é suficiente para que o sujeito se envolva em atividade e reconheça nela, transformada em situação de ensino, a necessidade do conhecimento e consequente atribuição de significado para suas ações.

Tão importante quanto contextualizar uma situação, principalmente no que se refere ao ensino, é organizar ações que mobilizem o sujeito, ações para as quais o sujeito reconheça a satisfação de uma necessidade. A situação pode ser do cotidiano, ou de aprofundamento científico, e até ser bastante complexa, mas definindo objetivos para suas ações, e em atividade, o sujeito então terá condições de se apropriar do conhecimento envolvido na situação; caso contrário, a situação contextualizada se mantém com a característica de uma tarefa para a qual o sujeito não atribui significado.

A professora Helena também reforça a preocupação com a apresentação e o uso dos símbolos matemáticos convencionados:

> […] a questão da simbologia matemática, o aluno não consegue entender. Você coloca x(xis) pertence a R(erre) ele lê xer, que é isso? Não faz sentido, trabalhar a questão de simbologia, […] eu costumo dedicar uma aula só pra passar símbolos matemáticos, por que eu acho que eles tem que entender o que significa o símbolo, por que se não barra. (Helena, A38, AV1, 00:23:00).

Além desse foco no registro simbólico, o processo de generalização foi citado por sete professores entre os 16 que responderam ao questionamento sobre o que é o objeto de ensino da álgebra.

Uma das professoras, ao responder sobre a importância da álgebra no ensino e sobre o que poderia ser considerado seu objeto, comenta:

> Com relação a importância se a álgebra é realmente importante de ser ensinada, com certeza. É unanime que a álgebra é realmente importante por que através da álgebra a gente consegue generalizar uma série de situações e assim resolver uma série de problemas de uma forma geral, genericamente digamos assim, do cotidiano. (Helena, A38, AV2, 19:50).

Outra professora reforça uma concepção de generalização como uma ação mental que se desenvolve de forma independente e divorciada das ações com a realidade objetiva, como se houvesse uma possibilidade de ensinar o processo de generalização por ele mesmo. A professora diz: “[…] o que a gente estava questionando é será que não seria o caso de ensinar ele primeiro a generalizar? Ter uma aula só para aprender a generalizar [...] a gente chegou a esta conclusão será que não precisa de uma aula disso [...]" (Ester, A38, AV2; 00:22:23).

Essa mesma professora é categórica em assumir: "[…] eu enxergo a matemática só como isso […] o raciocínio lógico e a capacidade de abstrair e generalizar […]" (Ester, B17, BV1, 01:35:34). Durante todo o curso, a professora enfatizava a necessidade de associações da matemática e da álgebra com a lógica: "[…] este abrir o pensamento não sei se junto com a álgebra, vem a necessidade a lógica […] talvez a dificuldade seja a lógica que as pessoas não tem" (Ester, D4, DV1, 00:29:30). A análise das falas da professora possibilita o entendimento de que ela se refere a um processo que é exclusivo do sujeito que deve estabelecer "logicamente" no movimento do seu próprio pensamento os encadeamentos a partir de deduções lógicas formais, mas em nenhum momento se refere, por exemplo, a princípios piagetianos, ou de outra linha de estudos teóricos.

Nesse sentido, o processo de generalização é concebido por essa professora como uma forma de pensamento que surge aparentemente independente dos objetos a serem generalizados. É possível ensinar a generalizar? "[…] o que a gente estava questionando é será que não seria o caso de ensinar ele primeiro a generalizar? Ter uma aula só para aprender a generalizar [...] a gente chegou a esta conclusão será que não precisa de uma aula disso […]" (Ester, A38, AV2; 00:22:23).

Nesse sentido, o processo de generalização seria um produto do processo de ensino, mas entende-se que, enquanto processo de pensamento, só pode ser desenvolvido sobre uma base material, ou sobre abstrações já realizadas sobre essa base material. Desta forma, só é possível desenvolver o processo de generalizar realizando generalizações sobre objetos materiais ou sobre objetos matemáticos, que já constituem abstrações dos objetos materiais. Por exemplo, é necessário realizar generalizações sobre a relação entre números, sobre as propriedades numéricas, sobre conceitos matemáticos e outros. Mais detalhes sobre como o processo de generalização foi analisado nesta tese serão descritos no capítulo 6, em que se apresenta um modelo para análise do processo de generalização em situações de ensino.

Os dados obtidos no curso com os professores apresentam indícios de não consenso a respeito do que pode ser considerado como objeto de ensino da álgebra e que este deriva das diferentes concepções de álgebra e seu ensino que os professores possuem, provenientes da formação pessoal, das orientações curriculares, das relações estabelecidas nas escolas com outros professores e com alunos e outros. São elementos de discussão epistemológica, da natureza do conhecimento; psicológica, no que se refere ao processo de apropriação do conhecimento pelos sujeitos; metodológica, em relação a estratégias de organização do ensino. Não há intenção por parte desta pesquisa de unificar tais concepções, ou reconhecer o objeto de ensino da álgebra por parte de alguma delas de forma específica.

Entretanto, observou-se que o registro simbólico da álgebra é foco de atenção de várias ações de ensino desses professores. Seja isto na tentativa de “alfabetizar” em matemática, ou de gerar aulas em que se explicam os símbolos, ou procurando formas de contextualizar por meio de situações-problema, ou ainda em busca de estratégias que possibilitem aos estudantes “equacionar” os movimentos cotidianos. Também é destaque o processo de generalização, mas nota-se que também não há consenso em relação ao que se esteja entendendo por ‘”generalizar”.

Entende-se ainda nesta tese como sintomático o fato de nenhum dos professores presentes no curso ter citado a variável, ou a variação como objeto de ensino da álgebra, haja vista a quantidade de pesquisas sobre o tema e sua importância no processo de constituição do conhecimento algébrico.

Dessas análises realizadas sobre pesquisas científicas, programas curriculares e fala dos professores sobre o que se revela como objeto de ensino da álgebra, observa-se a diversidade de concepções que podem ser adotadas sobre álgebra e seu ensino.

Considera-se a necessidade de revisão do que constitui objeto de ensino da álgebra, que hoje é pautado fundamentalmente por manipulações simbólicas, traduções de situações-problema ou pela concepção de que processos de pensamento, como os de generalização, são desenvolvidos de forma intrapsíquica. Vigotski (2004) defende a tese de que por mais alto que seja o grau de abstração alcançado por um conceito, inclusive os matemáticos, ele encerra em si uma parcela da realidade concreta, entretanto nos esquecemos dessa relação e “por isso suas abstrações se tornam em algo enigmático” (VIGOTSKI, 2004, p. 233).

Essa revisão necessária sobre o objeto de ensino da álgebra não se dá somente pela compreensão de processos psicológicos ou didáticos de aprendizagem dos estudantes, mas sim pela compreensão do próprio processo de desenvolvimento do objeto da álgebra.

Assim, em busca de fundamentos para esclarecer qual o foco no ensino em relação ao conhecimento algébrico que possibilitam o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes e de princípios que orientem a constituição de um objeto de ensino, em particular, da álgebra, retoma-se a hipótese desta pesquisa: o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra.

No próximo capítulo será apresentado como o movimento histórico e lógico dos conceitos está sendo compreendido nesta tese e como os nexos conceituais e a essência do conhecimento algébrico podem ser revelados por meio desse movimento.

3 O MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS

> *O conhecimento das propriedades e das conexões universais da realidade, que se exprimem nas categorias filosóficas, é absolutamente indispensável ao homem para sua orientação, para determinar as vias que lhe permitirão resolver as tarefas práticas que surgem no processo de desenvolvimento da sociedade.* (CHEPTULIN, 1982, p.1).

É hipótese desta pesquisa que o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para a constituição do objeto de ensino da álgebra e para a análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes.

Isso implica adotar uma fundamentação teórica que "[…] justifique o elo entre o desenvolvimento conceitual moderno e o histórico" (RADFORD, 2011, p.74). Nesse sentido, o estudo do desenvolvimento do conceito na experiência humana (referente à filogênese) e da formação do conceito no sujeito (referente à ontogênese) em relação aos conceitos algébricos é necessário. Não se trata de estabelecer um paralelismo, considerando que o movimento de elaboração do conceito pelo sujeito deva repetir o desenvolvimento do conceito na experiência histórica humana, mas sim que se identifique pelo movimento da filogênese o que está objetivado em relação ao conhecimento e se caracteriza como relação teórica essencial a ser apropriada pelas futuras gerações, referente ao conhecimento algébrico.

Entretanto, admite-se que a análise sobre o desenvolvimento do conhecimento algébrico na prática social humana está sendo realizada a partir de concepções atuais e dos fundamentos teóricos adotados, e, por isso, neste capítulo, pretende-se explicitar como o movimento histórico e lógico dos conceitos será abordado.

Entende-se aqui que o método materialista histórico e dialético, como método de conhecimento, é que permite a interpretação do movimento entre os acontecimentos produzidos historicamente (a realidade objetiva) e o desenvolvimento do pensamento. Conforme Cheptulin (1982, p.2), "as categorias e leis da dialética refletem as leis do desenvolvimento do conhecimento, além de constituírem os pontos centrais, os graus e as formas de funcionamento e do desenvolvimento do processo de cognição".

O conhecimento algébrico será estudado a partir da contribuição de autores da teoria do conhecimento e da dialética materialista (CHEPTULIN, 1982; KOPNIN, 1978; KOSIK, 1976, PRADO JR, 1963) e considerando que as categorias e leis do materialismo dialético exprimem "os aspectos e os laços universais da realidade objetiva" (CHEPTULIN, 1982, p.19).

Parte-se da tese materialista e histórica de que o homem como sujeito social faz parte da realidade, agindo e interferindo nessa realidade de maneira objetiva e prática. E considera-se que o sujeito não tem acesso à compressão desses mesmos objetos e fenômenos em sua essência se a sua relação com os objetos e fenômenos da realidade objetiva ocorrer de forma apenas utilitária (KOSIK, 1976).

Reconhece-se ainda que o materialismo dialético, como método de conhecimento, indica que o "lógico", como movimento do pensamento, está relacionado ao movimento dos fenômenos do mundo objetivo, o "histórico". Nesse processo, "a lógica torna-se concreta e a história torna-se inteligível, conectado o seu movimento ao das contradições do pensamento" (LEFEBVRE; GUTERMAN, 2011, p.17).

Por sua vez, Kopnin (1978, p. 184) indica que "para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto".

> O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. […]. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento. (KOPNIN, 1978, p.186).

A relação dialética entre o histórico e o lógico é que possibilita que se compreenda um determinado objeto ou fenômeno, explicitando a relação entre os seus elementos, bem como a relação entre ele e outros objetos e fenômenos dentro de um sistema integrado.

Nesse sentido, entende-se que os princípios e categorias do materialismo dialético é que permitem, além de identificar, caracterizar e classificar objetos e fenômenos, dar conta de seus movimentos, da relação entre eles.

> Para captar-se o movimento da realidade, na concepção metodológica marxiana, torna-se necessário utilizar-se a lógica inerente ao movimento da própria realidade que é dinâmica, não só no sentido de avançar numa determinada direção, mas através da intensa reciprocidade dos elementos que a constituem. É a lógica dialética. As leis da lógica dialética são exatamente as leis que dirigem o movimento objetivo da realidade transformadas em leis do pensamento e que se nos apresentam através de conceitos de máxima generalidade. (OLIVEIRA, 2005, p.42).

A dialética como ciência nos apresenta em quais condições os contrários se tornam idênticos, enquanto coisas vivas, que em diferentes condições se movem, se transformam uns nos outros (LENIN, 2011). Conforme Cheptulin (1982), Hegel já identifica que é a contradição que põe o mundo em movimento. E o aparecimento de um conhecimento novo é a consequência da resolução de uma contradição.

> O pensamento de Hegel, segundo o qual tudo o que existe encerra em si uma contradição e de que a contradição é a origem do movimento, o impulso da vida, é na realidade um pensamento genial, que entrou na história da ciência para tornar-se o centro da dialética. (CHEPTULIN, 1982, p.28).

O conhecimento se desenvolve, assim, com “[…] a necessidade de descobrir as contradições, os aspectos e as tendências contrárias próprias de todas as coisas e fenômenos da realidade objetiva” (CHEPTULIN, 1982, p.286). Entretanto, esses aspectos contrários não são divergentes, mas coexistem e formam a “unidade dos contrários”, considerada no materialismo dialético como uma das leis fundamentais da realidade objetiva e do conhecimento.

Portanto, os fenômenos do mundo objetivo se manifestam de diferentes formas, que carregam latente a essência, sempre histórica e concreta, e carregam em si o universal com a riqueza do particular e do singular.

> O conhecimento vai do imediato e do particular ao mediato e ao universal. Mas como o particular é primeiro uma sensação, uma impressão, uma interpretação, um fato ou uma lei tomada à parte, ele é justamente o que há de menos concreto. O conhecimento, portanto, vai do particular abstrato ao universal concreto. Em cada domínio e no conjunto, ele avança e penetra no mundo por espirais cada vez mais amplas. Determinações imediatas, aparentemente concretas, se desdobram e se transformam em um verdadeiro concreto que tem a aparência (mas somente a aparência!) da abstração. (Exemplos: o concreto matemático, a categoria econômica do valor etc.). (LENIN, 2011, p.77).

A partir dessa afirmação, destaca-se também o movimento do abstrato ao concreto no processo do conhecimento. Portanto, nesse movimento de estudo em relação ao conhecimento algébrico, serão feitas referências às relações que se apresentam de forma abstrata no singular e no particular e que se desenvolvem em direção ao aspecto essencial do conhecimento (sua natureza interna), o concreto.

As categorias do materialismo dialético (entre as quais se destaca para os estudos desta tese abstrato/concreto; qualidade/quantidade; fenômeno/essência; forma/conteúdo, geral/particular e outros) revelam graus de desenvolvimento do conhecimento na consciência e prática social e permitem “[...] reproduzir o desenvolvimento do conhecimento, de seus estágios inferiores a seus graus superiores, isto é, apresentar sua história e sua teoria [...]” (CHEPTULIN, 1982, p.60); desta forma, exprimem a unidade do histórico e do lógico.

A “matéria”, a “consciência” e a “prática” são categorias fundamentais no materialismo dialético e, da relação entre elas, outras categorias são derivadas. Tais categorias “[…] são os produtos da consciência, que se formaram no processo de desenvolvimento do conhecimento, que seu conteúdo é emprestado da realidade objetiva […]” (CHEPTULIN, 1982, p.56). As categorias fixam as ligações e formas universais do ser e se formam com base na prática.

Assim, ao assumir o estudo das categorias do materialismo dialético como forma de exprimir o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, assume-se também que “[…] a matéria é uma realidade objetiva, existente fora e independentemente da consciência [...]” (CHEPTULIN, 1982, p.68), sendo dada ao homem por suas sensações. Por sua vez, a consciência assumida como forma de reflexo da realidade e componente da atividade psíquica do homem é “[…] produto do trabalho humano, o resultado do desenvolvimento social”. (CHEPTULIN, 1982, p.88). Os pensamentos conscientes do homem, repletos de valores culturais criados, são explicitados e se tornam acessíveis a outros homens por meio da linguagem.

Não se concebe a matéria sem movimento. O movimento “[…] inclui todas as mudanças e todos os processos que se produzem no universo, da simples mudança de lugar, até o pensamento” (ENGELS[12] apud CHEPTULIN, 1982, p.162). Para Caraça (1952), a realidade possui duas características essenciais: a interdependência e a fluência. Por interdependência, entende que todas as coisas, objetos e fenômenos da realidade objetiva estão ligados uns aos outros, e por fluência, entende que o mundo está em permanente evolução e, portanto, todas as coisas, objetos e fenômenos da realidade estão em movimento e em processo permanente de mudança.

Segundo Davydov (1982, p.306), quando se capta, nesse movimento constante de transformações e mudanças dos objetos, os nexos, ou melhor, a relação de interdependência entre os objetos e fenômenos dentro de um sistema integrado, se está diante de um pensamento teórico. O conteúdo do pensamento teórico é “o domínio dos fenômenos objetivamente inter-relacionados e que constituem um sistema integral”. Assim, a conexão interna dentro de um sistema integrado aparece como matéria do pensamento teórico, sendo sua principal função “[…] esclarecer a essência do objeto como lei geral de seu desenvolvimento” (p.310).

Essência e fenômeno constituem um par dialético. Para Hegel, a “essência” se apresenta como o que permanece nas coisas, na passagem de uma qualidade para outra ou da

[12]ENGELS, F. **La dialectique de la nature**, p.75.

qualidade para quantidade. Por meio do fenômeno (a existência da coisa) é que a essência se revela, mas ele não pode ser confundido com a essência. No marxismo, a imagem ideal que representa o conteúdo das categorias é a unidade do subjetivo e do objetivo, que "[…] deve coincidir e coincide até determinado ponto, não com o fenômeno, mas com sua essência" (CHEPTULIN, 1982, p.18). Portanto, para conhecer a essência dos objetos, é necessário reproduzir na consciência as imagens ideais das relações do objeto dentro de um sistema. Entretanto,

> O conhecimento do objeto não termina com a reprodução da essência na consciência. Ele vai ainda mais longe: por um lado, da essência ao fenômeno'(as propriedades e as ligações contingentes exteriores explicam-se a partir dos aspectos e das ligações interiores), por outro lado, da essência da ordem primeira á essência da ordem segunda e assim sucessivamente até o infinito (na medida em que descobrimos novas propriedades e ligações necessárias do objeto, são produzidas as elucidações teóricas de sua essência e a elaboração de um sistema de conceitos por seu reflexo, que é sempre mais preciso e completo). (CHEPTULIN, 1982, p. 128).

Por sua vez, as relações do objeto com outros dentro de um sistema se manifestam por meio dos fenômenos. "O fenômeno é o conjunto dos aspectos exteriores, das propriedades, e é uma forma de manifestação da essência" (CHEPTULIN, 1982, p.278). Conforme Kosik (1976), os fenômenos se reproduzem no pensamento comum, não por serem secundários ou superficiais, mas porque o aspecto fenomênico é produto da práxis utilitária cotidiana, é o mundo da aparência.

A essência não se manifesta direta e imediatamente na realidade objetiva, mas representa o estável dentro do conteúdo dos fenômenos, o que se conserva independente das mudanças. Por outro lado, ela também não pode ser confundida com o conteúdo do objeto ou fenômeno, pois este abrange não só as relações internas (a essência), mas as externas, da sua interação com outros objetos e fenômenos, que estão em constante transformação.Ainda que a essência represente o estável, ela também se transforma, mas em um processo mais lento.

Assim, o conceito de essência está associado aos conceitos de lei e generalidade, na lógica dialética (DAVYDOV, 1982). Conhecer a essência significa encontrar um ente geral como base de distintos fenômenos e mostrar como ele determina o aparecimento e a interdependência desses fenômenos. Assim, é também para Cheptulin (1982, p.127):

> O movimento em direção da essência começa com a definição do fundamento - do aspecto determinante, da relação - que desempenha o papel da célula original na tomada de consciência teórica do todo estudado. […]. A representação da célula original (do fundamento) do todo estudado em movimento e em desenvolvimento presume a descoberta de tendências contraditórias que lhe são próprias, da luta dos contrários que condiciona sua passagem de um estado qualitativo a outro.

Desta forma, o objetivo no item a seguir é de explicitar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos. Ele foi reconhecido a partir de singularidades, analisadas em suas formas de pensamentos, manifestações da linguagem e formação de conceitos, por meio de categorias do materialismo dialético, enquanto particularidades que permitem reconhecer qual seria a relação teórica essencial (ou de forma simples, a essência) do conhecimento algébrico, que se assumirá como universal, para fins desta pesquisa.

Como forma de exposição, serão destacados no próximo item, os elementos cuja organização expressa um processo de síntese no sentido de revelar a partir deste estudo o que se destaca como nexos conceituais internos do conhecimento algébrico, no movimento do singular ao universal, e de ascensão do abstrato ao concreto. Permeia essa síntese o destaque para as categorias do materialismo dialético que tornaram possível exprimir o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

Ao final apresenta-se como último elemento o que foi considerado como essência ou célula (DAVYDOV, 1982), ou ente geral (CHEPTULIN, 1982) em relação aos conceitos algébricos, e que conduzirá a análise das relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, no capítulo 5.

3.1 O MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS

Para compreender o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, tomaram-se como ponto de partida de análise alguns episódios singulares da história do conhecimento algébrico na experiência humana. Considerando que o movimento histórico e lógico não se confunde com a história do objeto orientada cronologicamente, não se trata aqui de reproduzir o movimento da história da álgebra, em todos os passos dados pela humanidade. Trata-se de compreender o movimento de formação de conceitos algébricos, movimento este que se revela historicamente, em busca de seus nexos internos e de sua relação teórica essencial que, como ente geral, se desenvolve e sustenta o desenvolvimento do conhecimento algébrico.

A essência de um objeto de conhecimento científico, no caso aqui da álgebra, não se apresenta em sua forma mais desenvolvida em todas as fases históricas, podendo ser reconhecida em alguns momentos da experiência humana apenas em uma fase embrionária. Isso porque essa relação teórica essencial também se modifica e se aprofunda na medida em que o conhecimento se desenvolve. Além disso, a análise possível de ser realizada e que define essa essência nesta pesquisa parte do conhecimento algébrico contemporâneo, em um estágio avançado de desenvolvimento e assim é necessário retomar constantemente o movimento que é dialético entre o histórico e o lógico.

Portanto, retoma-se o primeiro movimento metodológico nesta tese: o estudo sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos (Quadro 3). Assumem-se como singular, os registros da história da álgebra; e, como particular, as formas de pensamento e suas manifestações na linguagem, os processos de formação de conceitos analisados por meio de algumas categorias do materialismo dialético, em busca de revelar a essência do conhecimento algébrico, que será posteriormente considerada como fundamental para a constituição do objeto de ensino da álgebra. Tal essência representa o estável dentro do conteúdo dos fenômenos, ou o que se mantém apesar das mudanças.

Quadro 3 - Estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos

Singular	Particularidades	Universal
Registros da história da álgebra	Formas de pensamento e suas manifestações na linguagem. Processos de formação de conceitos. Análise por meio das categorias do materialismo dialético.	Essência do conhecimento algébrico revelada em seu movimento histórico e lógico e em sua relação com a atividade humana

Se o objetivo desta tese estivesse relacionado aos estudos sobre história da álgebra, haveria necessidade de recorrer ao que em geral são chamadas fontes primárias, documentos originais de matemáticos e algebristas ao longo da experiência humana. Mas o objetivo é o de estabelecer relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.

Portanto, o ponto de partida são as singularidades, registros de história da álgebra investigados de fontes secundárias, autores que escrevem sobre a história da matemática, acompanhando seus fatos e iniciando análise sobre eles, por exemplo: Aleksandrov (1988), Baumgart (1992) Boyer (1996), Caraça (1952), Contador (2007), Eves (1995), Hogben (1970), Karlson (1961), Klein (1992), Radford (2011), entre outros.

As particularidades manifestas na linguagem, nas formas de pensamento e no processo de formação de conceitos desses episódios singulares da história da álgebra serão então analisadas por meio das categorias do materialismo dialético, revelando o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a essência do conhecimento algébrico.

A análise dessas situações singulares da álgebra possibilitará o estabelecimento de nexos conceituais internos e o reconhecimento do movimento de ascensão do abstrato ao concreto para compreender a essência dos objetos algébricos.

Parte-se da compreensão de que o conhecimento algébrico, assim como outras formas de conhecimento, é produto da atividade humana (LEONTIEV, 1983). Assim, busca-se a compreensão das necessidades humanas que desencadearam o aparecimento e o desenvolvimento da álgebra, bem como as ações, operações e condições que marcaram cada período de seu desenvolvimento.

Nesse sentido, é necessário compreender como a álgebra, como campo de conhecimento científico, vai se constituindo. O que também implica compreendê-la no campo do conhecimento e da ciência em geral, e não apenas como um campo de conhecimento desmembrado e desconectado de outras formas de conhecimento.

Klein (1992) destaca como o interesse pela compreensão do cosmos e da astronomia perpassa diferentes momentos do desenvolvimento da ciência pela humanidade:

> É importante ter claro o fato de que a matemática moderna é orientada desde o início por interesses cosmológicos-astronômicos. Isso não é verdade somente para Viète, mas também para Kepler, Descartes, Barrow, Newton, etc. A este respeito, a ‘ nova’ ciência repete o curso da ciência antiga. Mas de maneira que os fundadores da ciência moderna começam a atingir a compreensão da estrutura do mundo através, desde o início, de uma concepção diferente do mundo, de um diferente entendimento do que é o mundo, do que a que pertencia aos antigos. (KLEIN, 1992, p.152).

Isso porque os conhecimentos anteriormente elaborados são agregados como elementos para uma nova análise, em processo constante de superação do próprio conhecimento. Em relação ao conhecimento algébrico, como outras formas de conhecimento não existe “um” momento exato de objetivação e elaboração de determinado conceito, mas um movimento que se inicia com a atividade humana e avança em níveis cada vez mais complexos de generalização. Assim, para Dantzig (1970), a álgebra trata das operações sob formas simbólicas, mas para além disso:

> E ela não apenas penetra em toda a matemática, mas invade o domínio da Lógica Formal e até mesmo da Metafísica. Além disso, interpretada dessa maneira, a Álgebra é tão antiga quanto a faculdade humana de tratar com proposições gerais: tão velha quanto a sua capacidade de discriminar entre algum e qualquer. (DANTZIG, 1970, p.77).

Assim, segue o desenvolvimento do conhecimento algébrico a partir de necessidades humanas, que se complexificam e se misturam com necessidades de desenvolvimento do próprio ramo de conhecimento científico.

Em sua pesquisa, Sousa (2004) estudou a álgebra em uma perspectiva lógico-histórica, com a intenção de analisar as relações entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos vivenciados em atividades de ensino. Em sua pesquisa, trabalhou com nexos conceituais reconhecidos nas álgebras simbólicas e não simbólicas, e reconheceu que "Há desconhecimento dos nexos conceituais que compõem o objeto álgebra simbólica: os conceitos de fluência, de variável, de campo de variação e da álgebra não simbólica" (SOUSA, 2004, p.28).

A pesquisadora também entende "[…] que a conexão entre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável formam o conceito de álgebra" (SOUSA, 2004, p.108).

Com a intenção de aprofundar tais nexos conceituais e reconhecê-los no movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, serão expostos os elementos participantes desses nexos conceituais da álgebra, e que só serão aqui separados por motivos de exposição, mas que se considera que estão interligados: a fluência e o movimento reconhecido nos objetos e fenômenos da realidade objetiva; o controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos; o movimento da linguagem e dos modos de resolução de problemas: forma e conteúdo do conhecimento algébrico; entre o elemento desconhecido e o elemento que varia: o reconhecimento de grandezas variáveis; a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos.

3.1.1 A fluência e o movimento reconhecidos nos fenômenos da realidade objetiva

Os homens se diferenciam dos outros animais, entre outras coisas, por ter condições de compreender os fenômenos que os rodeiam e desta forma dominar a natureza, podendo agir para sua segurança e desenvolvimento. A busca pela inteligibilidade do Universo é uma busca constante desde os tempos remotos. Esta é a busca pela relação entre "causa" e "efeito".

Conforme os fundamentos do materialismo dialético, a categoria "causa" está associada à interação de objetos e fenômenos que lhe provocam mudanças. O conceito de "efeito", por sua vez, está associado às mudanças provocadas nos objetos e fenômenos em função de sua interação. "O que engendra o outro e condiciona seu aparecimento reflete-se no conceito de causa; o que é engendrado e condicionado reflete-se no conceito de efeito" (CHEPTULIN, 1982, p.126).

Considera-se ainda que as causas das mudanças dos objetos e fenômenos devem ser buscadas não só nas ações externas, mas também em sua natureza interna.

Dependendo das condições da civilização, tal compreensão pelas relações entre causa e efeito na compreensão do Universo se desenvolve e é composto de momentos de avanço e também de retrocessos.

Uma questão inicial que se apresenta aos homens é a da existência de um princípio único regente da diversidade e pluralidade dos objetos e fenômenos universais. Os primeiros pensadores procuravam compreender então se existiria esse princípio único da natureza (CARAÇA, 1952). As primeiras respostas jônicas conduziram a uma explicação baseada em uma substância principal. Para Thales, era a água, para Anaximenes, era o ar. “Enquanto para os filósofos jônicos, a explicação se baseia na existência duma substância primordial, permanente, para Heráclito o aspecto essencial da realidade é a transformação que as coisas estão permanentemente sofrendo pela ação do fogo” (CARAÇA, 1952, p.67).

A explicação de Heráclito não se apoiava sobre a estabilidade de um elemento, mas no princípio de tensão de contrários que provoca o movimento, rompimento de um equilíbrio e construção de outro.

A resposta pitagórica muito se diferenciava dessas anteriores. Entendia que toda a compreensão do Universo se baseava na relação entre números. Tudo é número. E assim se apresentavam vários exemplos dessas relações. Em especial, destaca-se aqui a identificação de sequências de números que, arranjados em pontos, formavam figuras geométricas, dando origem aos números triangulares, pentagonais. Sem falar no Teorema de Pitágoras, mas é justamente por meio deste que a ordenação matemática do Universo dos pitagóricos é golpeada, quando se depara com o problema da incomensurabilidade, e ainda mais com os argumentos de Zenão. As dificuldades levantadas pelo problema da incomensurabilidade poderiam então ser resolvidas estudando os problemas do infinito e do movimento, e que a reta não pode ser pensada por justaposição de mônadas, mas em sua continuidade. Um estudo mais aprofundado desse movimento será apresentado no item 5.1.1, deste texto, com a análise das sequências como instrumento matemático.

Era assim impossível para os pitagóricos a partir dos conhecimentos que possuíam controlar o movimento de quantidades de algumas grandezas, por exemplo, da diagonal do quadrado em sua relação com o lado. Nesse movimento constante dos fenômenos da realidade objetiva, e com os objetivos e ação humana de controle, identifica-se uma necessidade de reconhecer o que hoje são chamados de grandezas e seus elementos de controle.

Entende-se por grandeza, a qualidade de um objeto. E compreende-se também que a evolução do conhecimento matemático é que vai possibilitando que a essa qualidade seja atribuída uma quantidade.

A partir do materialismo dialético, destacam-se as categorias de qualidade e quantidade em diferentes graus de desenvolvimento do conhecimento. Inicialmente considera-se um estágio em que as características quantitativas e qualitativas das coisas são consideradas independentes. Posteriormente, em outro estágio de desenvolvimento do conhecimento, é que o homem "[…] consegue tomar consciência de que a transformação de um aspecto, de uma propriedade, de um fenômeno é condicionada por uma certa modificação de um outro aspecto, outra propriedade, outro fenômeno" (CHEPTULIN, 1982, p.126). Portanto, há profunda relação entre as características quantitativas e qualitativas de um objeto ou fenômeno.

> Os partidários do materialismo dialético acreditam que as características qualitativas existem de forma objetiva, fora e independentemente da consciência humana e que elas são as relações e as propriedades universais das formações materiais, formas universais do ser. (CHEPTULIN, 1982, p.211).

Considera também que a correlação entre as mudanças quantitativas e qualitativas é uma lei fundamental do movimento e desenvolvimento da matéria. Para Cheptulin (1982), as mudanças de um estado qualitativo a outro, chamadas "saltos", podem ser de dois tipos: os saltos que produzem ruptura e que modificam a qualidade fundamental do objeto ou fenômeno, modificando sua essência; e os saltos que se desenvolvem acumulando gradualmente elementos de nova qualidade, ou modificando qualidades que não são as fundamentais do objeto ou fenômeno. "O primeiro tipo de salto representa a forma revolucionária das mudanças qualitativas e o segundo representa a forma evolucionista" (CHEPTULIN, 1982, p.218).

Em Caraça (1952) também se encontra o par dialético quantidade/qualidade. Esse autor considera que o estudo de leis e fenômenos da realidade objetiva, cujas principais características são a fluência e a interdependência, só é possível se forem definidos "isolados", ou seja, recortes da totalidade. Esses isolados possuem componentes que se relacionam de forma interdependente e permitem o estudo do objeto ou fenômeno do qual se recortou o isolado. Caraça (1952) considera que qualidade são essas relações de interdependência entre os componentes do isolado. Assim, não existem qualidades intrínsecas a um objeto ou fenômeno, mas estas são consideradas em relação a outro objeto ou fenômeno. Se a estas qualidades podem ser atribuídos diferentes graus de intensidade (mais que, menos que, maior que e outros), então admitem a variação conforme a quantidade. Nesta tese, entende-se por grandeza, a qualidade de um objeto que pode ser quantificada, no sentido atribuído por Caraça (1952).

Assim, por exemplo, o conceito de número alcançado na época dos filósofos pitagóricos não permitiu que se controlasse uma grandeza (no caso, a dimensão da diagonal de um quadrado), não sendo possível estabelecer as relações entre essa diagonal e o lado do quadrado.

Nos séculos XIV e XV, o movimento era um dos assuntos-chave da filosofia natural (ROQUE, 2013). Contudo, o movimento era determinado por uma qualidade e essa era entendida como uma propriedade essencial de um corpo, assim, por exemplo, a velocidade para os pensadores medievais não se dissociava do movimento e não podia ser tratada como grandeza, mas como atributo de um corpo. Nicolas Oresme, pensador francês do século XIV, se opunha a essa noção e destacava a intensidade de uma qualidade, por exemplo, a noção de que um corpo não é frio em si, mas pode ser mais ou menos frio, e dessa forma destaca a quantidade atribuída à qualidade. No caso da velocidade, considera-a como uma qualidade relativa ao espaço ou ao tempo, e desta forma entende-se, nesta tese, mais próximo ao conceito de qualidade conforme apresentado por Caraça (1952).

No Renascimento, cuja expansão das atividades comerciais é marcante e no qual se desenvolvem rapidamente as ciências, "[…] a matemática era instrumental para criar novas formas de entender o mundo" (RADFORD, 2011, p.234), mundo que era totalmente dominado pelos números, proporções, e pelos processos de medição sobre tudo. É a época de Galileu (1564-1642), de Leonardo da Vinci (1452-1519), que estão inseridos no desenvolvimento de uma sociedade capitalista. O controle sobre a natureza é uma necessidade e se complexifica cada vez mais.

Pode-se destacar a afirmação de Newton (1642-1727), onde fica clara a mudança na conceituação das grandezas matemáticas.

> Não considero as grandezas matemáticas como formadas por partes, por pequenas que estas sejam, se não como descritas por um movimento contínuo. As linhas não são descritas e engendradas pela justaposição de suas partes, se não pelo movimento contínuo de pontos; as superfícies pelo movimento das linhas; os sólidos pelo movimento das superfícies; os ângulos pela rotação de lados; o tempo por um fluxo contínuo. Considerando, pois, que as grandezas que crescem em tempos iguais são maiores ou menores segundo o que façam com maior ou menor velocidade, busquei um método para determinar as grandezas partindo das velocidades dos movimentos ou aumento que as engendram. Chamando fluxões às grandezas engendradas, desde os anos 1665, 1666, com o método de fluxões é que farei uso nas quadraturas das curvas. (NEWTON[13] apud LACASTA; PASCUAL, 1998, p.28-29).

Reconhecer a fluência dos objetos e fenômenos da realidade objetiva possibilita compreender as infinitas relações e constantes transformações dessa mesma realidade. Uma

[13]NEWTON. **Sir Isaacc Newton's Two treatises of the quadracture of curves**, p.1.

das consequências dessa constatação é também compreender que os atributos de um objeto ou fenômeno estão sempre relacionados a outros objetos e fenômenos, e o que então pode ser chamado como grandeza de um objeto inclui necessariamente a relação deste com outros objetos. Por isso, grandeza é aqui entendida como a qualidade de um objeto (que pode ser quantificada) na sua relação com outros.

Assim, a partir disso, destaca-se para a constituição da essência do conhecimento algébrico, a necessidade de reconhecer as grandezas dos objetos e fenômenos da realidade objetiva, e a necessidade de relacioná-las e controlá-las.

3.1.2 O controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos

Por meio dos registros da história da matemática, podem ser reconhecidas as mudanças qualitativas do conhecimento identificando os saltos de ruptura, que alteram a qualidade fundamental dos objetos ou fenômenos, e os saltos que de forma evolutiva e gradual provocam mudanças das qualidades não essenciais dos objetos ou fenômenos (CHEPTULIN, 1982).

O movimento e a fluência dos fenômenos objetivos, que os filósofos em diferentes momentos procuravam compreender e explicar, também se revelam na resolução de problemas do cotidiano associados ao controle das quantidades, por diferentes povos e em diferentes momentos históricos, por exemplo, pelos babilônios, egípcios, hindus, chineses, árabes e outros.

Considera-se que o controle das quantidades é um elemento fundamental da Matemática. Os numerais indo-arábicos, usados atualmente, constituem exemplo singular dentre tantos símbolos produzidos pela humanidade em diversos espaços e tempos, que expressam a ideia de número para realizar esse controle de quantidades. Podemos dizer que os diferentes sistemas simbólicos usados por diferentes povos e a evolução desses símbolos representam mudanças qualitativas, mas não saltos de ruptura.

O uso de símbolos numéricos e a possibilidade de operar com eles resolvia grande parte dos problemas cotidianos de diferentes povos. Novos campos numéricos foram criados para dar conta desse movimento de controle das quantidades. Nesse contexto, consideramos que a qualidade desses campos numéricos se alterava em um movimento de evolução, no sentido em que sua essência não se modificava, mas se modificavam outras qualidades. É o que acontece, por exemplo, com a necessidade da criação de números que podem ser representados na forma de razão, os quais avançam de forma gradativa modificando a qualidade do número. Ou ainda com a organização de um campo de números inteiros, em que a quantidade negativa adquire significado.

Ainda em relação aos campos numéricos, um salto qualitativo de ruptura pode ser considerado, que supera o impasse dos pitagóricos sobre os aspectos quantitativos das coisas e o reconhecimento do número como essência universal.

> Os pitagóricos colocaram em evidência um dos aspectos (propriedades) universais dos objetos e dos fenômenos da realidade: as relações quantitativas. Mas, abstraindo todas as outras relações e propriedades (singulares e gerais) das coisas, eles erigiram a categoria de quantidade, transformando-a em essência ideal autônoma. (CHEPTULIN, 1982, p.6).

Os pitagóricos consideravam, então, que a quantidade numérica (que só conheciam no campo dos naturais e racionais) definia todos os objetos e fenômenos. Pode-se questionar inclusive se a noção de número nessa época era concreta (sensível) ou abstrata, pois, conforme Roque (2013, p.37), “Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não eram matemáticos e que remetiam a elementos discretos: pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração”. Entretanto, cumpre destacar que os pitagóricos, por reduzirem as coisas a propriedades contáveis, conseguiam compará-las por meio da razão entre esses números. Essa razão refletia assim algo essencial sobre alguma coisa e “exprimia uma relação entre números que se encontrava escondida em alguma coisa e por meio dessa relação tal coisa podia ser descrita” (ROQUE, 2013, p.47).

Um salto qualitativo de ruptura acontece no reconhecimento de que nem todos os objetos poderiam ser expressos em números por meio de quantidades discretas e que, portanto, é necessário compreender o movimento de outra forma. A reta, como elemento geométrico, é, por muito tempo, considerada como modelo de continuidade. Conforme Roque (2013), uma consequência importante da descoberta dos incomensuráveis e a separação do universo das grandezas do universo dos números. “Se não sabemos calcular, resta-nos mostrar” (ROQUE, 2013, p.64).

Esse impasse pitagórico gera a necessidade de uma nova compreensão sobre os números, mas o salto de ruptura e a criação de outro campo numérico, que representa a oposição ao conceito de número racional, só é aceito pela comunidade científica muito tempo depois, já no século XIX, com as publicações de Dedekind (1831-1916), que busca uma definição formal de continuidade numérica que não esteja atrelada à geometria.

> Foi então que ao comparar o conjunto dos números racionais com a reta, modelo ideal de continuidade, Dedekind criou o conceito de corte e, por meio deste, definiu o número racional e o número irracional na unidade de um sistema, um conjunto contínuo pela sua equivalência com a reta, formado não por pontos, mas por números. Depois da construção da continuidade aritmética, a reta real, a geometria seria negada, considerando o pensamento dialético. E assim, Dedekind poderia lecionar com a coerência formal do campo numérico, o cálculo diferencial. (DIAS, 2007, p.194).

Ainda que se considere o desenvolvimento de novos campos numéricos, permanece no campo aritmético, no sentido em que o número se relaciona com as grandezas do concreto sensível. Os números são conceitos que estão relacionados diretamente às grandezas dos objetos e fenômenos. Com a sua forma física, o numeral, podem ser expressas a quantidade de objetos, o comprimento, seu volume, a quantidade de tempo e outros.

Trata-se de uma forma particular de expressar a quantidade atribuída a diferentes grandezas, mas limitada em relação a representar as relações entre grandezas de uma forma geral. Por exemplo, pode-se conhecer um quadrado cujo lado mede 5 (cinco) e determinar sua diagonal representada por $5\sqrt{2}$; entretanto, por meio dessa representação, não se expressa a relação entre as grandezas (diagonal e lado do quadrado) de forma geral, mas apenas particular para uma situação.

Avanços podem ser considerados com os trabalhos de Gauss, em relação aos números complexos. Ele considerava os números negativos e imaginários como relações abstratas, argumentando que a matemática não deveria se basear na realidade das substâncias, mas no caráter relacional dos objetos matemáticos. Conforme Roque (2013), a visão conceitual e abstrata de Gauss, que defendia as relações como conceito fundamental da matemática, gera mudanças na imagem da matemática no século XIX. Desta forma, concorda-se com Sousa (2004, p.66), em que "O pensar algébrico, ao considerar o conceito mais geral do número não pode estar apenas relacionado à presença física e formal do número: o numeral", sendo necessário no conhecimento algébrico pensar o número, sem o numeral.

3.1.3 O movimento da linguagem e os modos de resolução de problemas: a forma e o conteúdo do conhecimento algébrico

Recorrer aos números para controlar quantidades por muito tempo foi suficiente, entretanto, os problemas do cotidiano tornam-se cada vez mais complexos. O símbolo numérico associado a uma linguagem retórica torna-se insuficiente para controlar o movimento das quantidades, e não oferece potencialmente possibilidades de elaboração de novos métodos de resolução dos problemas do cotidiano e da área de conhecimento matemático, de forma específica.

Desta forma e diretamente relacionado ao conhecimento algébrico, podem-se reconhecer saltos que, de modo evolucionista e gradual, modificam a linguagem matemática, sendo esta uma qualidade do conhecimento matemático, mas não a essencial. Assim é possível reconhecer os saltos da álgebra retórica, para a sincopada ou geométrica.

Por exemplo, a linguagem retórica dos babilônios permitia-lhes resolver seus problemas com métodos particulares de resolução que eram desenvolvidos com os símbolos numéricos e com as palavras da linguagem natural (BAUMGART, 1992). O método mais utilizado era o que hoje se pode chamar de paramétrico por estabelecer dois termos desconhecidos a partir da relação com um terceiro termo (o parâmetro).

Mas as restrições em relação à linguagem e aos campos numéricos conhecidos exigem que se criem diferentes modos de ação para a resolução dos problemas, por exemplo, o uso de recursos geométricos para resolver problemas que envolvem números irracionais, que ainda não eram conhecidos na época. Baumgart (1992) afirma que a álgebra grega, que era essencialmente geométrica, seguia o mesmo método de solução, traduzindo os problemas em termos de segmentos de retas e áreas ilustradas por figuras geométricas.

> Assim, foi seu estrito rigor matemático que os forçou a usar um conjunto de segmentos de reta como domínio conveniente de elementos. Pois ainda que $\sqrt{2}$ não possa ser expresso em termos de inteiros ou suas razões, pode ser representado como um segmento de reta que é precisamente a diagonal do quadrado unitário. (BAUMGART, 1992, p.8).

Esses momentos revelam modos de ação da humanidade para resolver os problemas que se apresentavam, pois são modos de ações particulares que dão conta de solucionar situações específicas dentro de um determinado modelo. Provocam mudanças qualitativas do conhecimento que podem ser as evolutivas ou as de ruptura.

Nesse movimento do conhecimento algébrico, as grandezas envolvidas nos problemas do cotidiano, ou específicas da natureza interna da matemática, são identificadas e relacionadas. Entretanto, tais relações estabelecidas são particulares, por meio de símbolos numéricos ou geométricos, e não alcançam uma expressão geral ou modos de ação geral para resolver todos os problemas, mas sim para resolver um grupo de problemas com características comuns.

Então, se se considerar a álgebra como é conhecida nos tempos atuais, em que se trata de objetos de naturezas diferentes e que permite enunciar situações gerais, pode-se considerar que a geometria de Euclides não contemplava a generalidade em seus enunciados e utilizava propriedades geométricas particulares. Desta forma, não se consideravam evidências de um “pensamento algébrico” (ROQUE, 2013).

Sendo “forma” e “conteúdo” categorias do materialismo dialético, é necessário considerar que o “conteúdo” abrange a interação entre os elementos de um objeto ou fenômeno, aqui em particular do conhecimento algébrico. Por sua vez, a “forma” reflete essas interações e também contribui para o desenvolvimento do conteúdo.

Para Hegel, a categoria “conteúdo” é representada pela matéria transformada em forma. “O conteúdo, segundo Hegel, possui primeiramente uma certa forma e uma certa matéria e é de fato sua unidade. O conteúdo é o que é idêntico ao mesmo tempo à forma e à matéria” (CHEPTULIN, 1982, p.30). Entretanto, para o materialismo dialético, o conteúdo de um objeto ou fenômeno deve ser considerado como um processo de interação entre os elementos que o constituem e também deve considerar as ações que esse objeto ou fenômeno provoca em outros. O conteúdo não pode ser confundido com o interior, assim como a forma não deve ser confundida com o exterior. A categoria “forma” reflete a estrutura do conteúdo e penetra também no domínio interior e exterior.

> Na realidade, toda forma está organicamente ligada ao conteúdo, é uma forma de ligação dos processos que o constituem. A forma e o conteúdo estando em correlação orgânica dependem um do outro, e essa dependência não é equivalente. O papel determinante nas relações conteúdo-forma é desempenhado pelo conteúdo. Ele determina a forma e suas mudanças acarretam mudanças correspondentes da forma. Por sua vez, a forma reage sobre o conteúdo, contribui para seu desenvolvimento ou o refreia. (CHEPTULIN, 1982, p.268).

É o que acontece com o movimento da linguagem algébrica, como forma do conteúdo do pensamento algébrico. As diferentes formas de linguagem alcançadas na experiência humana (retórica, sincopada, geométrica, simbólica) possibilitaram de formas diferentes limitações ou avanços em relação ao conteúdo algébrico. Nesse contexto, a linguagem, como fenômeno, constitui uma particularidade determinante para a constituição da álgebra.

Conforme Cheptulin (1982), essa relação dialética (forma e conteúdo) possibilita também os saltos qualitativos, na medida em que a forma deixa de corresponder ao conteúdo e passa a reprimi-lo.

> A não correspondência da forma com o novo conteúdo, à medida em que esse se desenvolve, torna-se sempre mais aguda e finalmente um conflito explode entre o conteúdo e a forma: o novo conteúdo rejeita a antiga forma, destrói o sistema relativamente estável de movimento e, baseado em um novo sistema relativamente estável de movimento (a forma), transforma-se, passando a um outro nível qualitativo. (CHEPTULIN, 1982, p.268).

Neste sentido, se reconhece a interação existente entre conteúdo e forma no momento da álgebra retórica, por exemplo. O pensamento algébrico e a forma de refleti-lo nesse momento histórico potencialmente permitem desenvolver o conhecimento algébrico até certo estágio. A interação dos elementos do conhecimento algébrico altera seu conteúdo e novas formas de refleti-lo no momento da álgebra sincopada ou geométrica, por exemplo.

No momento da álgebra retórica, números e palavras eram representações suficientes para expressar alguns modos de ação para resolver problemas específicos, como problemas de área e perímetro (BAUMGART, 1992). A complexificação dos problemas do cotidiano e da ciência matemática gerou a necessidade de resolver situações de controle de quantidades de forma cada vez mais generalizada.

Diofanto promove mudanças na forma da álgebra mais do que em seu conteúdo, considerando que recorria aos mesmos modos de ação da álgebra retórica para resolver os problemas. Mas gera avanços por usar como simbolismo a abreviatura das palavras, que são usadas como representações ou indicações de objetos.

O fato de introduzir as abreviaturas de palavras e de tratar de maneira sistemática de equações simples e quadráticas produzindo o maior número possível de soluções, torna Diofanto reconhecido como “Pai[14] da Álgebra”. Ao introduzir a notação sincopada, Diofanto possibilitou a expressão de alguns métodos de resolução. Um dos mais importantes trabalhos de Diofanto foi a *Arithmetica*, mas, pela análise de Eves (1995), ainda que possa ser atribuído a Diofanto o mérito de dar os primeiros passos rumo à notação algébrica, seus procedimentos careciam de métodos gerais.

> A *Arithmetica* é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor á condição de gênio em seu campo. […] O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema. (EVES, 1995, p.207, grifo do autor).

---

[14]Reconhecer um determinado matemático como “Pai da Álgebra” implica reconhecer uma determinada concepção de álgebra. Diofanto pode ser reconhecido por esse cognome se forem considerados os avanços em relação aos métodos de resolução e a sistematização das equações, por meio dos registros sincopados. Entretanto, a generalidade desses métodos ainda não havia sido alcançada. Viète, também é reconhecido como “Pai da Álgebra”, pela introdução dos registros simbólicos e possibilidades de generalização dadas em sua arte analítica. Entretanto, mais importante do que atribuir a um ou outro matemático essa titulação, é reconhecer os avanços e constantes modificações que vão sendo possibilitados em determinada forma de conhecimento, no caso a algébrica, que fazem com as concepções de álgebra se modificar conforme o desenvolvimento da atividade humana.

A necessidade de estabelecer métodos cada vez mais gerais de resolução de problemas, fossem do cotidiano ou internos à ciência matemática, vai se caracterizando como um objeto do conhecimento algébrico. Na resolução de problemas, não é mais o bastante reconhecer as grandezas envolvidas e estabelecer a relação numérica particular, mas sim é necessário gerar um método geral que resolva a maior parte dos problemas.

Nessa época, também eram considerados avanços no conhecimento algébrico o fato de encontrar modos de ação que resolvessem problemas, apresentando uma ou mais soluções ao que anteriormente não era resolvido.

E Diofanto usava como sinais a abreviatura das palavras, por exemplo, a *arithmos*, que queria dizer um determinado número de determinadas coisas (KLEIN, 1992, p.131). Por outro lado, como afirma Roque (2013), o *arithmos* equivaleria a uma quantidade indeterminada, diferente dos números que são formados por uma quantidade determinada de unidades, mas, às quantidades desconhecidas (*arithmos*), eram aplicadas as mesmas propriedades dos números. Assim, pode-se compreender que se continuavam tratando essencialmente de grandezas numéricas, e não outras formas de grandezas.

Em seu livro *Arithmetica*, Diofanto produz soluções para 130 problemas, mas não recorre a métodos gerais para solução deles, e sim a artifícios engenhosos que atendem a necessidade de problemas específicos (EVES, 1995). A fraqueza técnica diofantina é justamente a de não produzir métodos gerais de solução nem se preocupar em reconhecer nos problemas que resolvia mais de uma solução. O que Diofanto alcança com a sua sincopação é avançar com a representação de grandezas numéricas por meio de abreviaturas, mas não avança no sentido de encontrar métodos gerais de resolução dos problemas.

> O problema da aplicabilidade ‘geral’ do método é por conseguinte para os antigos o problema da ‘generalidade’ dos objetos matemáticos por eles mesmos, e este problema eles podem resolver somente como base de uma ontologia de objetos matemáticos. Em contraste com isso, os matemáticos modernos, e assim também a interpretação moderna dos matemáticos antigos, torna a primeira e última atenção para o método como tal. Isto determina os objetos pela reflexão do modo pelo qual estes objetos se tornam acessíveis através de um método geral. (KLEIN, 1992, p.123, grifo do autor).

Klein (1992) ainda reforça que, na ciência antiga, a existência de “um objeto geral” não é simples consequência da existência de uma “teoria geral”. É possível considerar que nesse momento histórico há uma mudança na forma, mas não no conteúdo do conhecimento que vinha se desenvolvendo. Ressalta-se que na época de Diofanto era possível estabelecer relações entre o que seriam hoje os números inteiros e racionais. Os números negativos e irracionais não eram ainda considerados, assim sua *arithmo* significava no máximo número de mônadas, ou de frações. Assim a logística[15] de Diofanto não pode conter em si a possibilidade de uma técnica de cálculo simbólica

> Do ponto de vista da álgebra moderna era necessário apenas um único passo adicional para tornar a logística de Diofanto perfeita: a substituição por expressões numéricas 'gerais' para o ' número determinado', do simbólico para valores numéricos – um passo que foi, posteriormente um grande progresso no tratamento das equações em geral, finalmente tomado por Viète. (KLEIN, 1992, p.139).

É importante observar que o objeto da álgebra nessa época está relacionado à resolução de problemas e à produção de soluções para eles, e não necessariamente à definição de um método geral de resolução, associados ao reconhecimento de grandezas de naturezas diferentes nos objetos. Conforme Radford (2011, p.131, grifos do autor), "[…] os métodos de resolução de problemas de Diofanto não visam encontrar nem *descrever* todas as soluções para um problema dado (exceto, claro, nos casos onde o problema possui uma única solução), mas *produzir* tantas soluções quantas queiramos".

Por volta dos séculos XII e XIII, época do renascimento italiano, criam-se instituições chamadas *Scuole d'Abaco*, voltadas para a formação de pessoas que então trabalhariam no comércio. Mas a álgebra nessas escolas era ensinada apenas para a elite (RADFORD, 2011) e com a intenção de usar as técnicas algébricas para resolver problemas, não necessariamente associados ao cotidiano. De qualquer forma, pode-se considerar que, nesse momento, o objetivo principal do conhecimento algébrico estava em desenvolver técnicas para resolver uma grande quantidade de problemas.

Conforme Puig e Rojano (2004), a divisão da álgebra em estágios de evolução denominados retórica, sincopada e simbólica, aos quais neste texto se faz referência, foi feita em meados do século XIX por Nesselman[16], a partir de sua linguagem. A álgebra dos sumérios, babilônios e a grega são exemplos do momento da álgebra retórica, em que se recorrem às palavras para expressar os detalhes do cálculo. O estágio da álgebra sincopada mantém a mesma natureza do momento da álgebra retórica, mas são usadas abreviaturas de palavras para representar os cálculos realizados. O terceiro estágio, chamado simbólico, contempla a possibilidade de que um sistema de sinais represente todas as formas e operações,

---

[15]Na época dos pitagóricos, as ações que exigiam contagens simples ou enumeração ficavam em segundo plano, para o que se chamava de "logística". "Essa [logística] tratava da enumeração das coisas, em vez da essência e propriedades do número em si, questões que pertenciam à aritmética. Isto é, os gregos antigos fizeram uma distinção clara entre simples cálculo de um lado e o que hoje se chama teoria dos números de outro" (BOYER 1996, p.42). Em Klein (1992), não se encontra um detalhamento sobre o termo logística, mas, nesta tese, ele está sendo considerado da mesma forma, como tratando de enumeração ou contagem.

[16]NESSELMAN, G. H. F. **Versuch einer kritischen geschichte der algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen** [Essay on a critical history of algebra. 1st Part. The algebra of Greeks], Berlin: G. Reimer, 1842.

e o fundamental, mais do que o uso dos símbolos, é a possibilidade de operar com eles sem fazer referências aos objetos concretos ou explicações na forma de palavras.

Com os estudos históricos realizados sobre o conhecimento algébrico, essa divisão pode ser questionada, não só por não considerar a álgebra geométrica, mas por não destacar os processos de pensamento do conhecimento algébrico, enfatizando suas formas de representação, como sintetiza Roque (2013, p.112): "Para caracterizar o pensamento algébrico, não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda ao uso de abreviações".

Puig e Rojano (2004) também revelam que não é suficiente fazer o acompanhamento do desenvolvimento da história da álgebra somente por sua linguagem e simbolismo, é necessário conhecer seus métodos e formas de pensamento. Para tanto. apresentam dois processos de resolução de problemas com linguagens diferentes (retórica e sincopada), que, apesar de serem escritos com representações de linguagens diferentes, possuem o mesmo obstáculo a ser superado: a não operação com a incógnita.

Puig e Rojano (2004) analisam dois textos históricos da fase pré-Viète: o *Abaccus Book Trattato di Fioretti*[17], de 1350, e *De Numeris Datis,* de Jordanus de Nemore (1225-1260), considerado um livro avançado de álgebra. O *Abaccus* é escrito em linguagem retórica e dedica-se à resolução de problemas usando métodos da matemática oriental. O *De Numeris Datis* incorpora algumas letras para representar incógnitas e constantes, e dedica-se à resolução de sistemas de equações que recaem em formas canônicas de equações quadráticas.

Puig e Rojano (2004) identificam que uma diferença fundamental entre os dois livros é que, no *Abbacus,* o processo de resolução de cada problema está determinado pela característica numérica de seus dados, e as propriedades não se generalizam, sendo retomadas a cada mudança de números. "Esta é uma característica deste tipo de texto: regras gerais existem somente na prática; elas são evocadas e expressas todo tempo e para todo caso particular sobre os quais são aplicadas" (PUIG; ROJANO, 2004, p.210). Ao contrário, o *De Numeris Datis* recorre a letras para simbolizar números, usando elementos do que seria uma álgebra sincopada, que permite a aplicação de formas canônicas para a solução de novos problemas. Conforme os autores, um exemplo claro da generalidade do método desenvolvido é o fato de, ao final de cada problema resolvido com números gerais, ser apresentado um exemplo com um número específico. Por exemplo:

[17]O livro a que Puig e Rojano (2004) fazem referência: MAZZINGHI, M. A. di. **Trattato di Fioretti** [Fioretti's treatise]. Ed. G. Arrighi. Pisa, Italy: Domus Galileana, 1967.

> Se um dado número é separado em tantas partes como desejado cujas diferenças sucessivas são conhecidas, então, cada uma das partes pode ser encontrado. Dado o número ***a*** tal que é dividido em w, x, y e z como mínimo das partes.
> […]
> Por exemplo, separa-se 40 em quatro partes, cujas diferenças sucessivas são 4,3 e 2. Por conseguinte, a diferença da primeira e última é 9, da segundo e última é 5, e da terceira e última é 2. Sua soma é 16. Esta subtraída de 40 resta 24, cujo quarto é 6, a menor das quatro partes. Ao adicionar esta a 9, 5 e 2, as outras três partes são encontradas nomeadamente 8, 11 e 15. (PUIG; ROJANO, 2004, p.215).[18]

Entretanto, os autores apontam que ainda que correspondam a diferentes níveis de linguagem, têm algo em comum, que é o fato de não realizarem operações sobre a incógnita. Encontram-se aqui indícios da dificuldade da realização de operações com os símbolos, ainda que estas fossem realizadas numericamente, que não foram superadas por mudanças na forma de representação, na linguagem.

Conforme Radford (2011), o livro *Liber Abaci*, de Pisano, mostra que os problemas eram resolvidos usando a regra de restauração (em que se acrescentam elementos que estão faltando); a regra de combinação dos termos incógnitos (realizada no mesmo lado da igualdade) e a regra da transposição (transpor um termo incógnito aditivo de um lado para outro da equação). O uso dessas regras permitia então operar com a incógnita e transformar diferentes equações em um dos casos canônicos, para os quais já existiam técnicas de resolução. A dificuldade maior ainda residia em resolver esses problemas usando a linguagem retórica. Mas é importante destacar que essa álgebra que se desenvolve na época medieval italiana permite a resolução de diferentes problemas usando a mesma técnica.

> Em outras palavras, a família de problemas associados a uma determinada técnica algébrica é maior do que a família associada a uma técnica análoga baseada em ferramentas numéricas ou geométricas. “A álgebra surge então, como um novo dispositivo para lidar com mais problemas de uma forma mais unificada e sistemática”. (RADFORD, 2011, p.26, grifo do autor).

Puig e Rojano (2004) destacam a passagem do sincopado para o simbólico em Viète, por meio das relações e cálculos estabelecidos entre o que é chamado de “espécies” ou “forma das coisas”.

> A transição da álgebra sincopada para a simbólica começa com Viète, para quem a logística *speciosa*, a arte analítica para a qual ele desejou dar este nome mais do que o de álgebra era o cálculo com as espécies ou *formae rerum* formas das coisas. Mas para representar este cálculo com espécies, Viète desenvolveu expressões simbólicas nas quais, o que é representado por letras não é a espécie, mas as quantidades conhecidas e desconhecidas. (PUIG; ROJANO, 2004, p.207, grifo dos autores).

[18]Trecho traduzido a partir da Proposição 2 do livro um *De Numeris Datis* (Reimpresso com permissão de Jordanus de Nemore. *De numeris datis*: a critical edition and translation. Barnabas Hughes (Ed. Trans), University of California Press, 1981).

3.1.4 Entre o elemento desconhecido e o elemento que varia: o reconhecimento das grandezas variáveis

Considerando o campo numérico e o campo geométrico que se destacam nas antigas civilizações (babilônios, mesopotâmicos, egípcios), Radford (2011), em suas investigações históricas, demonstra que em ambos os campos o raciocínio proporcional era usado como meio de resolução de problemas. Essa forma de raciocínio era muito desenvolvida no pensamento matemático e de forma mais sofisticada eram usados os métodos de falsa posição.

No método da falsa posição, toma-se um número como solução falsa para resolver o problema. As diferenças encontradas entre o resultado atingido pela solução falsa e o resultado que deveria ser atingido são tratados de forma proporcional para que se alcance a solução exata. Segundo Radford (2011, p.123),

> Esta escolha numérica peculiar por uma incógnita parece ter permitido aos escribas sistematizar um método numérico de resolução de problemas e, por esta razão, alcançar um importante degrau quanto ao desenvolvimento conceitual do raciocínio proporcional antigo.

Entretanto, somente quando essas incógnitas (valores desconhecidos) são tratadas e representadas com um nome ou símbolo, que serve para o contexto do problema (por exemplo, comprimento, largura e outros) e identifica a grandeza propriamente dita, ou seja, a incógnita exatamente buscada (e não um número falso), é que se pode encontrar um modo de resolução algébrica para os problemas, que é geral.

Muitos dos problemas apresentados na *Arithmetica* de Diofanto estão relacionados aos métodos de falsa posição para resolução de problemas. Entretanto, os antigos problemas numéricos, e que tratavam de quantidades concretas e palpáveis, são transformados em problemas sobre grandezas abstratas. Diofanto usa o termo *arithmos* para se referir às quantidades indeterminadas e desta forma possibilita que sejam efetuados cálculos teóricos. Esse termo contempla em si o conceito de incógnita, e substitui termos particulares como “comprimento” e “largura” usados pelos antigos escribas; portanto, trata-se de um conceito mais geral. “Em função desta generalidade, este conceito pode ser aplicado a uma grande variedade de situações. O *arithmos* tornou-se assim um genuíno símbolo algébrico” (RADFORD, 2011, p.146, grifo do autor), mas possui uma generalidade que está mais relacionada aos objetos matemáticos do que aos métodos de resolução.

Com a intenção de encontrar a origem das variáveis na história da álgebra, Radford (1996b) refere-se ao livro de Diofanto *On Polygonal Numbers*, por considerar que há indícios de que o conceito de variável surge nesse texto associado à fórmula e não à função.

> Diofanto está preocupado com as variáveis, e não através do conceito de função, mas através do conceito de fórmula. Seu conceito de fórmula não é baseado no fluxo contínuo de quantidades mas em: (a) uma relação explícita entre os números que são vistos como mônadas (ie, unidades), ou partes fracionárias de mônadas e (b) uma seqüência explícita de cálculos permitindo que se possa determinar um número dado a identidade de outro número. (RADFORD, 1996b, p.50).

Radford (1996b) também indica que uma das principais diferenças entre as incógnitas e variáveis pode estar em relação ao contexto, ao objetivo e à intencionalidade proposta. Assim, a situação pode estar relacionada à resolução de um problema, e, nesse caso, é necessário encontrar um valor desconhecido e, portanto, se tem uma incógnita. Ou então em outra situação, de estabelecer a relação entre grandezas de forma geral e, portanto, é necessário considerar que elas variam e esta situação remete à variável.

Ainda por meio do estudo dos textos de Diofanto (*On Polygonal Numbers* e *Arithmetica*), Radford (1996b) indica outra diferença entre incógnitas e variáveis relacionada a sua representação. Em *On Polygonal Numbers*, considera que o conceito é abstrato e pode ser representado geometricamente ou por letras, e, no *Arithmetica*, o conceito é desconhecido (*arithmos*) e não pode ser representado geometricamente.

Considera-se que o salto de qualidade, em relação à manifestação da linguagem e forma de pensamento, é dado com Viète (1540-1603) que, com sua logística *speciosa*, permite a passagem da álgebra sincopada para a simbólica. Já no século XVI, a álgebra era considerada uma ferramenta poderosa, mas ainda não tinha o mesmo *status* da Geometria; e Viète oportunizou que a álgebra alcançasse esse *status*, apresentando-a também de maneira axiomática. O fato de atribuir letras para os valores desconhecidos e também para os valores conhecidos da equação, o que hoje pode ser entendido por parâmetros, ajudou muito no desenvolvimento da álgebra.

A intenção de Viète (2006), com sua *The Analytic Art*, era resolver todos os problemas, o que faz por meio de modos de análise (zetética, porística e exegética).

> É devidamente pela zetetica que se estabelece uma equação ou proporção entre um termo que se encontra e os termos dados; poristica pela qual a verdade de um teorema declarado é testada por meio de uma equação ou proporção, e exegetica pelo qual o valor do termo desconhecido em uma determinada equação ou proporção é determinado. Então, toda a arte analítica, assumindo esta três funções por si só, pode ser chamado de ciência da descoberta correta em matemática. (VIÈTE, 2006, p.12).

Para Viète, a álgebra era um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas de forma abstrata, e ele manipulava as grandezas independentemente da sua natureza. Em *The Analytic Art*, não se encontra uma definição para o que está sendo chamado por magnitude, ou grandeza como está sendo traduzido nesta tese, entretanto, destacam-se algumas características, por exemplo: “A primeira grandeza escalar é o lado ou a raiz” (p.16), depois seguem o quadrado, o cubo, o quadrado-quadrado, o quadrado-cubo. Além disso, se refere a tipos de grandezas de comparação, sendo: comprimento ou largura; plano; sólido; plano-plano; plano-sólido. Observa-se que a referência para estabelecer as grandezas são os elementos geométricos.

Por essa razão, foi preciso criar procedimentos simbólicos de cálculo que pudessem ser aplicados tanto a grandezas geométricas quanto a quantidades numéricas. Um único símbolo poderia representar todos os tipos de grandezas. A lógica de Viète denomina-se *speciosa*, a lógica das grandezas “em espécie”, em que usava as letras para representar simbolicamente grandezas abstratas.

Os símbolos atribuídos por Viète não substituem só os números (enquanto entes particulares) ou os recursos geométricos; eles tratam das “espécies” em geral. Por tais símbolos serem compreendidos desta forma, torna-se conteúdo não mais resolver um problema por meio de um modo de ação particular, mas sim estabelecer relações e resolver todos os problemas, que era o objetivo de Viète. As letras em Viète são as representantes da variação das quantidades, tanto as desconhecidas e variáveis quanto as conhecidas e fixas (os atuais parâmetros).

Considerando os significados atribuídos aos símbolos usados por Viète, pode-se entender o papel que estes desenvolvem no desenvolvimento da álgebra por permitirem que a relação entre as quantidades sejam expressas de uma forma sintática, sem necessariamente recorrer à interpretação de um problema particular.

> A história de simbolismo em álgebra pode ser considerada como a história do desenvolvimento de um sistema de sinais que torna possível realizar cálculos a um nível sintático para encontrar a solução de um problema de palavra sem ter de se referir ao nível semântico de declaração do problema. Neste sentido, a evolução do simbolismo algébrico está fortemente relacionada com a história de métodos algébricos para a resolução de problemas. (PUIG; ROJANO, 2004, p.190).

Entretanto, não é só o uso de simbolismo que garante que tais relações entre as grandezas sejam estabelecidas. É necessário compreender os significados atribuídos aos símbolos, não os significados particulares associados a problemas específicos, mas os significados universais que estes símbolos assumem.

O artifício que Viète usou foi o de atribuir vogais às grandezas conhecidas às vogais e consoantes, às desconhecidas. Mas essa notação vogal-consoante sobreviveu por pouco tempo e foi substituída pela notação proposta por Descartes, que usava as primeiras letras do alfabeto para as quantidades dadas e as últimas, para as desconhecidas, que é predominante até hoje (DANTZIG, 1970).

Dantzig (1970) também faz uma analogia interessante entre álgebra e aritmética e afirma que a descoberta do zero está para aritmética assim como a introdução de uma notação literal está para álgebra. Ainda que o zero não constitua a essência da aritmética, nem a notação literal constitua a essência da álgebra, possuí-los provoca avanços incalculáveis.

Os símbolos da maneira como são usados atualmente têm uma existência independente do objeto concreto que representam. “O símbolo tem um significado que transcende o objeto simbolizado” (DANTZIG, 1970, p.86).

O papel dos símbolos em álgebra é permitir avanços na forma de elaboração de novos objetos de pensamento, que se compõe como estruturas algébricas. Assim, o símbolo em álgebra possibilita a representação de grandezas escalares (distância, tempo, comprimento, massa, temperatura e outros) associadas a uma intensidade numérica, e também à representação de grandezas vetoriais (força, aceleração, deslocamento e outros), que exigem, além da intensidade numérica, a representação da direção e sentido. E ainda mais à composição de novas estruturas matemáticas, matrizes, anéis, corpos e outros, sobre as quais se estabelecem axiomas e propriedades.

Os símbolos possibilitam trabalhar com a relação entre as grandezas, sem que esta esteja associada a entes numéricos, geométricos, ou de qualquer outra espécie, o que se destaca como essencial ao conhecimento algébrico, assim como a generalização dessas relações entre as grandezas.

Klein considera que Viète colocou a álgebra em um lugar fundamental no sistema de conhecimento em geral.

> A partir de agora a ciência ontológica dos antigos é substituída por uma disciplina simbólica cujos pressupostos ontológicos são deixados sem esclarecimento. Esta ciência que visa primeiro a compreensão da totalidade do mundo, lentamente alarga para o sistema da física matemática moderna. Dentro desta disciplina, as coisas deste mundo não são mais compreendidas como seres contáveis, nem o mundo determinado pela ordem dos números, mas sim a estrutura do mundo é agarrada por meio do cálculo simbólico e entendida ordem legal do curso dos eventos. A própria natureza do entendimento humano de mundo é doravante governada pelo conceito simbólico de ‘número’, conceito que determina ideia moderna da ciência em geral. (KLEIN, 1992, p.185).

Compreende-se a forma de pensamento de Viète como uma forma de pensamento teórica que realiza as abstrações (que já vinham sendo realizadas no processo de desenvolvimento humano) e faz a síntese. Ou seja, identifica uma relação fundamental, que é tomada como universal, e a aplica ao particular, no caso aos registros numéricos e geométricos, mostrando que aquele método geral permite a resolução dos casos particulares.

A atribuição de um símbolo e o reconhecimento da variável como um elemento que permite estabelecer a relação entre duas grandezas podem ser considerados como uma mudança qualitativa e um salto de ruptura, que modifica a essência do conhecimento algébrico, possibilitando outra forma de movimento e desenvolvimento.

3.1.5 A necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos

Observa-se que o processo de generalização algébrica não se desenvolve de forma desvinculada das práticas humanas. Como outros processos humanos de pensamento, ele está vinculado às condições da época em que se concretiza. Assim, por exemplo, a generalização possibilitada na época de Euclides não se desenvolve da mesma forma que na época de Viète, que já podia contar com a experiência acumulada historicamente pela época de Euclides. Dessa forma, cada um em sua época desenvolveu o conhecimento a partir do que potencialmente encontravam em sua própria realidade objetiva.

Ao estudar registros sobre o desenvolvimento histórico da álgebra, encontra-se a subdivisão dos momentos da álgebra retórica, sincopada e simbólica. A subdivisão entre esses diferentes momentos está associada de forma mais específica aos critérios do uso da linguagem. Exemplificando, o momento da álgebra retórica se caracteriza pela predominância do uso da linguagem natural, no caso da sincopada, predominam o uso de abreviaturas, e no último estágio, o predomínio de símbolos. É necessário também incluir nessa classificação o momento da álgebra geométrica em que os elementos geométricos é que predominam. Entretanto, ainda que a subdivisão desses momentos esteja atrelada aos usos da linguagem, podem ser identificadas diferenças dos processos de pensamento e de forma específica dos processos de generalização.

Desta forma, encontram-se no momento da álgebra retórica, processos de generalização de modos de ação específicos para resolver problemas concretos da vida cotidiana. No momento identificado como álgebra sincopada, o uso de abreviatura permite avanços nos processos de generalização desses procedimentos, entretanto ainda atrelados a números ou a elementos geométricos. A introdução das abreviaturas e o uso do termo *artihmos* por Diofanto permitem a generalização de objetos matemáticos, mas não de seus métodos. No desenvolvimento da álgebra geométrica, que tem Euclides como seu principal representante, os segmentos são usados para expressar as relações entre as quantidades.

Radford (1999) destaca que nos cânones do pensamento grego bastava recorrer a um elemento particular para provar a generalização. Por exemplo, em relação à Proposição 21[19], do livro IX de *Os Elementos*, de Euclides (2009), Radford (1999, p. 90, grifo do autor) se refere:

> Euclides expressa aqui ‘generalidade’ em linguagem natural como uma ação volitiva potencial pela fórmula comparativa ‘como muitos números para o que quisermos’. E, dentro da semiótica euclidiana, as letras permitem combinações (por exemplo, AB) que denotam segmentos que identificam números não particulares. Curiosamente, a prova não foi reconhecida (quer através de Euclides ou seus posteriores comentadores) como desprovido de generalidade apesar do fato de que um segmento desenhado inevitavelmente tem um comprimento particular, bem como o fato de ter sido realmente baseado em apenas quatro números. Tanto quanto sabemos, a prova foi considerada completamente geral pelos cânones do pensamento grego.

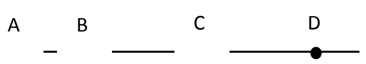
Por sua vez, o recurso simbólico iniciado por Viète cria condições teóricas de generalização ao associar símbolos às quantidades conhecidas e desconhecidas, independentes de sua espécie, e permite que a relação entre as quantidades fosse estabelecida de forma abstrata. Somente a partir desta compreensão é que se pode abrir o campo para o entendimento da variável.

Considerando esse desenvolvimento histórico e cultural do processo de generalização e em como ele é objetivado nos diferentes signos e em diferentes épocas, se está diante do fato de que, para se compreender o desenvolvimento desse processo, é necessário compreender que ele depende de cada época e do contexto social. Cada sujeito, em diferentes épocas da experiência humana, possui diante de si, objetos, conceitos e processos de pensamento plenos de significado atribuídos historicamente, como indica Radford (2010, p.114):

> Ao nascer todos nós entramos em um mundo que não é apenas povoado por objetos concretos, mas também por sistemas de pensamento e modos de ser. Embora os sistemas de pensamento e modos de ser não sejam visíveis da mesma forma como cadeiras palpáveis, carros e outros objetos materiais, eles existem e se misturam com o mundo material. Sistemas de pensamento incluindo formas matemáticas, científicos, estéticos, éticos tipos, jurídico, e outros raciocínios - ou seja, formas de refletir e atuar sobre o mundo. Modos íntimos de ser através dos quais passamos a perceber a nós mesmos e aos outros.

---

[19]A proposição 21, do livro XI (EUCLIDES, 2009, p.343) é enunciada da seguinte forma:
Caso números pares, quantos quer que sejam, sejam compostos, o todo é par.



Fiquem, pois, compostos os números pares AB,BC, CD, DE, quantos quer que sejam; digo que o todo AE é par. Pois, como cada um dos AB, BC, CD, DE é par, tem uma meia parte; desse modo, também o todo AE tem uma meia parte. Mas um número par é o dividido em dois; portanto o AE é par; o que era preciso provar.

A noção de generalização adquire desta forma uma nova qualidade, sendo possível transitar entre a generalização de objetos e métodos. Por exemplo, a generalização, que pode ser atingida pelos abacistas na época do Renascimento, que tratam de objetos concretos derivados do comércio como prática social, é a que permite estabelecer uma regra geral para uma série de casos particulares.

> É uma generalidade que é organizada ‘ horizontalmente’, expandindo-se à medida que as crescentes dificuldades técnicas do eixo que corresponde á metodologia, são superadas. O geral e o particular estão ligados por laços surgidos ali onde há uma intersecção do eixo da formulação de problemas e os métodos usados para resolvê-los. (RADFORD, 2011, p.170).

As generalizações da álgebra realizada sobre objetos matemáticos e a partir de diferentes métodos de resolução de problemas geraram avanços no conceito de número (natural para racional, para os negativos, complexos e irracionais). Para além do conceito de número, como objeto matemático, os conceitos algébricos permitem generalizações sobre outros objetos como matrizes e vetores, e sobre estruturas algébricas criadas como os anéis e corpos, estabelecendo relações entre esses objetos, propriedades gerais, teoremas e outros.

Destaca-se ainda, a importância do processo de generalização como um elemento que estabelece os nexos conceituais internos do conhecimento algébrico. Concorda-se com Radford (1999, p.7) em que “Generalização não é um mero ato de abstração a partir do concreto, na verdade, a generalização mantém uma ligação genética com o concreto de acordo com o sistema mediado das atividades dos indivíduos e a estrutura simbólica e epistêmica destes”.

3.2 A ESSÊNCIA DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO REVELADA PELO MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS

A álgebra como conhecimento matemático se constitui e adquire significado no que oferece de possibilidades para interpretação da fluência e do movimento da realidade objetiva. Assim como outros campos da ciência, como afirma Caraça (1952), ela tem por papel criar quadros interpretativos da realidade. Como conhecimento científico, objetiva criar um quadro interpretativo da realidade movente, fluente, e, nesse sentido, se caracteriza essencialmente pela busca da **relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**, sendo esta sua relação teórica essencial ou célula. As formas com que essa essência ou célula se desenvolve também se alteram conforme a experiência historicamente acumulada.

Para compreender tal relação teórica (essência), foi realizado o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos a partir de categorias do materialismo dialético, considerando que a consciência humana está ligada a “[…] algumas formações estruturais do cérebro e a algumas formas de interação dos homens, entre eles e com a natureza, e a algumas formas de sua atividade” (CHEPTULIN, 1982, p.92).

Em função disso e por ser a atividade prática considerada como a base do conhecimento, este reflete de forma específica o estágio de desenvolvimento humano, as formas de relacionamento dos homens entre si e dos homens com a natureza em determinado período do desenvolvimento histórico da sociedade. No momento atual, a formação humana é regida por leis sócio-históricas, e “Isso significa que o homem definitivamente formado possui já todas as propriedades biológicas necessárias ao seu desenvolvimento sócio-histórico ilimitado” (LEONTIEV, 1978, p.281).

Assim, entende-se que tanto o processo de objetivação, ou seja, de atribuição de significados a objetos e fenômenos, quanto o processo de apropriação de cada indivíduo enquanto aprende a ser homem estão condicionados pelos processos históricos da formação humana.

Os conceitos como produtos históricos do desenvolvimento são objetivados no processo de interação dos indivíduos e apropriados pelas demais gerações. O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos se associa ao processo de “objetivação” na forma de instrumentos (materiais ou psíquicos) da experiência histórica da humanidade, e, portanto, trata-se do processo de desenvolvimento de conceitos associado ao movimento filogenético da evolução humana. Por outro lado, a formação dos conceitos no sujeito está associada ao movimento ontogenético de evolução humana e será relacionada nesta tese ao processo de “apropriação” de conceitos, como também é explicitado por Davídov:

> Os conceitos, historicamente formados na sociedade existem objetivamente nas formas da atividade do homem e seus resultados, ou seja, nos objetos criados de maneira racional. As pessoas isoladas (e principalmente as crianças) os captam e os assimilam antes de aprender a atuar com suas manifestações empíricas particulares. O indivíduo deve atuar e produzir as coisas segundo os conceitos que, como normas, já existem na sociedade anteriormente; ele não os cria, mas, os capta, os apropria. Apenas então se comporta com as coisas humanamente. (DAVIDOV, 1988, p. 128).

Sendo o conhecimento científico historicamente determinado, é necessário considerar o grau de conhecimento adquirido em determinado momento histórico (VIGOTSKI, 2004). Reconhecer esse movimento, que é histórico e lógico dos fenômenos e do desenvolvimento da ciência como um todo, permite a superação das aparências. Isto porque o conhecimento não avança somente por meio das sensações e percepções imediatas dos sentidos sobre a realidade objetiva e o estabelecimento de leis empíricas (PRADO JR, 1963), e os conceitos não se formam como representações individualizadas e separadas umas das outras, mas sim,

> Os conceitos vão se formando no curso de todas as atividades de todos os indivíduos que constituem uma coletividade em intracomunicação; e as experiências particulares e específicas verificadas no curso de cada qual delas agem e reagem respectivamente umas sobre as outras; e é assim em função do conjunto de tais experiências que os conceitos vão se formando com um todo interligado desde sua origem. (PRADO JR, 1963, p.78).

E se somente os sentidos não dão conta de reconhecer as interdependências que existem no trânsito dos fenômenos da realidade objetiva, e que se revela nas mediações do sistema, este todo interligado de conceitos necessita dos processos de pensamento e formação de conceitos teóricos. É o pensamento teórico que permite que se revele a conexão objetiva do universal e do singular, com a mediação do particular. “Este conceito, à diferença do empírico, não acha nada igual em cada objeto separado da classe, e estuda a interconexão dos objetos soltos dentro do todo, dentro do sistema e de sua constituição” (DAVYDOV, 1982, p.308).

Os conceitos formados nos processos de generalização e abstração teóricas contemplam em si os dados da percepção, do sensorial, mas não se reduzem a ele, refletem o singular e o particular, ao mesmo tempo em que o geral reflete a essência do objeto. Essência essa que pode ser nesta tese revelada no estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos, por categorias da lógica dialética.

Tomando a atividade prática como base do pensamento humano, Davídov (1988) considera as possibilidades de o homem agir sobre a natureza. Orientado por objetivos conscientes, torna-se possível ao homem analisar os objetos e fenômenos não só por suas características externas, mas por suas relações internas, o que só é possível em movimento e com a possibilidade de compreender os nexos causais, quando um determinado objeto ou fenômeno se converte em outro. Ao revelar as conexões internas de um sistema de objetos, fenômenos e consequentemente conceitos revelam-se também os nexos entre o singular e o geral, mediados pelo particular. “A relação geral encontrada mediante a análise aparece como tal não só por que tem traços iguais aos de suas manifestações particulares, mas sim por que se revela nestas formas particulares” (DAVIDOV, 1988, p.355).

O estabelecimento de nexos conceituais, como possibilidade de concretização do pensamento teórico, permite a compreensão deste estudo lógico (do movimento do pensamento) e histórico (do movimento dos fenômenos do mundo objetivo) dos conceitos, por meio de formas de pensamento teórico (processos de abstração, generalização e formação de conceitos), de análise e síntese, e no movimento de ascensão do abstrato ao concreto, movimento da lógica dialética.

> Por seu conteúdo, o conceito teórico aparece com reflexo dos processos de desenvolvimento, da relação entre o universal e o singular, da essência e os fenômenos; por sua forma aparece como procedimento da dedução do singular a partir do universal, como procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. (DAVIDOV, 1988, p. 152).

Além disso, os conceitos não só refletem o movimento do processo de conhecimento, mas também se formam nesse processo e desta forma são mutáveis, seu conteúdo se modifica à medida que se desenvolve o processo de conhecimento com base na prática.

Reconhecendo esse movimento de constituição de um conceito, é que se procurou estudar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos em busca de elementos que então constituíram os nexos conceituais desta forma de conhecimento. No decorrer deste estudo, destacaram-se os seguintes elementos: a fluência e o movimento reconhecido nos objetos e fenômenos da realidade objetiva; o controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos; o movimento da linguagem e dos modos de resolução de problemas como forma e conteúdo do conhecimento algébrico; entre o elemento desconhecido e o elemento que varia: o reconhecimento de grandezas variáveis; a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos.

Esses elementos foram se revelando por meio de episódios históricos da álgebra, e foram destacados somente para a exposição nesta tese, mas considera-se que estão inter-relacionados formando o que seriam os nexos conceituais do conhecimento algébrico. Da compreensão desses nexos conceituais, considerou-se como relação estável (essência, ente geral ou célula) do conhecimento algébrico, o estabelecimento de **relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**.

O reconhecimento dessa relação essencial não se trata de uma originalidade nesta tese, e mesmo Vigotski, em seus estudos sobre o processo de formação de conceitos, apresenta exemplos relacionados aos conhecimentos algébricos e aritméticos também se encontra que:

> A psicologia geral mantém com as disciplinas particulares a mesma relação que a álgebra com a aritmética. Esta opera com quantidades determinadas, concretas; aquela estuda todas as formas gerais possíveis de relações entre as quantidades; por conseguinte, cada operação aritmética pode ser considerada com um caso particular de fórmula algébrica. (VIGOTSKI, 2004, p.248).

Entretanto, o fato de essa relação teórica essencial ser apresentada a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos permite que os nexos conceituais teóricos sejam explicitados. Além disso, a conscientização da essência do objeto do conhecimento algébrico possibilita que outras relações sejam estabelecidas com o que se pode definir como objeto de ensino da álgebra.

Desta forma, retomando a hipótese desta tese de que o "movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes", entende-se que essa relação teórica essencial constitui um fundamento para a constituição do objeto de ensino da álgebra, e como categoria que permitirá analisar elementos singulares do objeto de ensino da álgebra (sequências, equações e funções) em busca do objetivo desta tese: investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra.

Assim, no próximo item, apresenta-se o segundo movimento de análise realizado nesta pesquisa: o movimento do objeto de ensino da álgebra (Quadro 4).

Quadro 4 - O movimento do objeto de ensino da álgebra

Singular	**Particularidades**	**Universal**
Isolados do ensino de álgebra Sequências Equações Funções	Manifestações nos programas curriculares Manifestações no curso com professores Manifestações em situações de ensino Análise realizada por meio do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos	Princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes.

Para tanto se apresentará para cada um desses singulares definidos, as análises que retomam o movimento histórico e lógico relacionado, a manifestação nos programas curriculares e na fala dos professores, considerando a relação teórica essencial do conhecimento algébrico, alcançada por meio do movimento histórico e lógico dos conceitos. Entende-se que essa análise possibilitará que sejam estabelecidos princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra, que promova o pensamento teórico dos estudantes. Não no sentido de "simplificar" o conceito, mas manter sua essência e encontrar soluções didáticas para sua apresentação em diferentes etapas de desenvolvimento do sujeito, considerando que a apropriação do conceito se dará como resultado de um processo das interações do sujeito que são organizadas no ensino.

3.3 INDÍCIOS DA COMPREENSÃO DO MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS PELOS PROFESSORES

Como foi destacado, durante a realização do curso com os professores, a pesquisadora pautou-se em estudos realizado sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos e sobre elementos da teoria histórico-cultural, mas não havia sínteses elaboradas ou mesmo definida, a relação teórica essencial do conhecimento algébrico. Assim, a própria organização do curso precisa ser avaliada no sentido de identificar o quanto possibilitou aos professores a compreensão sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos começa a ser discutido com os professores de forma mais intensa no quarto encontro. Nos três primeiros, o foco era reconhecer e discutir o objeto de ensino da álgebra e apresentar aos professores sínteses relacionadas a conceitos da teoria histórico-cultural (conceito de atividade e seus elementos; formação de conceitos, formas de pensamento e outros), considerados necessários para a compreensão do movimento histórico e lógico dos conceitos.

Assim, do quarto encontro em diante, os professores tiveram acesso à leitura de textos de Caraça (1952), sendo um dos objetivos da pesquisa sobre esta ação do curso, a de "identificar se os professores associavam o conhecimento algébrico ao movimento e variação dos fenômenos e à fluência da realidade objetiva" (4º Encontro). Os professores foram questionados sobre a relação que estabeleciam sobre "álgebra e movimento".

Nesse encontro e no seguinte, um resgate de episódios históricos associados com o desenvolvimento das sequências e equações foi apresentado aos professores, assim como sínteses relacionadas ao desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica, no momento da álgebra retórica, sincopada, geométrica, simbólica. Mas considera-se necessário reforçar que o relato de episódios históricos, ou seja, da história da álgebra, não coincide com o que nesta tese está sendo considerado como movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, como explicitado no início deste capítulo.

Era ainda objetivo da pesquisa em relação ao curso neste momento, "Analisar com as professoras a presença ou ausência deste movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos sobre as diferentes situações de ensino apresentadas na proposta curricular" (5º. Encontro).

Entretanto, as sínteses até então elaboradas contemplavam e ressaltavam os movimentos do pensamento e linguagem algébrica, mas não destacavam outros elementos. Com o estudo aprofundado, estes se revelaram fundamentais para o estabelecimento de nexos conceituais do conhecimento algébrico, por exemplo, a necessidade da generalização de objetos e métodos matemáticos, e a importância do estudo de grandezas variáveis. Tais elementos estavam somente implícitos no que foi discutido durante o curso com os professores.

Desta forma, a análise dos professores sobre as situações de ensino a partir do que então era considerado "movimento histórico e lógico dos conceitos" se realizou de forma apenas superficial, considerando que não estavam estabelecidas as condições de conteúdo e tempo do curso para que os professores a realizassem.

Alguns avanços puderam ser alcançados na medida em que foi discutida a situação da "Altura da Pirâmide" (Anexo C) com o objetivo de: "desencadear a discussão com as professoras sobre a necessidade de apresentar aos estudantes situações-problema em que eles possam identificar a variação, o campo de variação; estabelecer a relação entre grandezas e registrar a variação (seja por meio da linguagem retórica, sincopada ou simbólica)".

As ações do curso, organizadas pela pesquisadora e mais próximas de realmente destacar a relação teórica essencial do conhecimento algébrico, ocorreram durante o sexto e o sétimo encontros, em que foram estudadas as funções. Pela leitura de Caraça (1952), puderam ser estudados os conceitos de "fluência", "interdependência", "quantidade", "qualidade", "variável" e outros, que foram manifestados pelos professores na elaboração de um mapa conceitual relacionado às funções e também na análise de uma situação da proposta curricular do Estado de São Paulo (Apêndice I).

Ainda assim, com todas as limitações dadas pelo alcance teórico da pesquisadora no momento de realização do curso sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, e que influenciou a própria organização do curso, considera-se que os dados obtidos são reveladores de concepções dos professores sobre os conceitos algébricos e observam-se mudanças em sua apropriação teórica. Por exemplo, quando ao final do curso, questionada sobre "Que novas aprendizagens foram geradas a partir do que foi desenvolvido neste curso para sua atividade de ensino", a professora Helena escreve:

> Um ponto que quero destacar é que o curso me fez compreender que todo o conhecimento não pode ser visto como algo isolado, ele faz parte da evolução da humanidade. Analisar o conhecimento de uma perspectiva histórico-cultural me ajudou a entender melhor as relações existentes na construção do próprio conhecimento. Nada aconteceu ou foi criado por acaso, tudo é fruto de uma necessidade histórica. (Helena, RE15).

É necessário destacar que as professoras não necessariamente compartilham da mesma perspectiva teórica e metodológica adotada nesta pesquisa. Assim, é necessário considerar que suas falas estão carregadas de elementos de sua formação anterior em matemática, e também da experiência profissional adquirida. Ainda assim é possível extrair elementos que indicam a necessidade de estabelecer uma relação mais sólida entre o que se constituiu como álgebra na experiência historicamente acumulada e o que se apresenta como álgebra como objeto de ensino visando ao desenvolvimento dos indivíduos.

Em relação aos momentos no curso de atualização para as professoras, em que foram discutidas as potencialidades e limitações dos diferentes momentos da álgebra, retórica, sincopada, geométrica, simbólica, um dado relevante é que nenhuma delas conhecia essa subdivisão. A professora Carla comentou que foi procurar por meio da internet o que seria essa nomenclatura, quando ela foi anunciada no curso, pois a desconhecia completamente, sequer tendo ouvido falar dela em qualquer momento de sua formação.

A nomenclatura propriamente dita retórica, sincopada ou simbólica, ou a divisão nestes estágios conhecidos dos historiadores matemáticos, é relevante, pois permite que sejam realizadas análises sobre cada um deles. O desconhecimento de tais estágios da álgebra por parte dos professores pode gerar compreensões de que haja somente uma forma de pensamento que caracteriza a álgebra ou uma forma única (a simbólica) de expressão de seus conhecimentos. Pelo estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, isto está bem distante do que pode ser compreendido do processo de constituição do conhecimento algébrico. É como se o movimento histórico e lógico da álgebra fosse composto de um só momento, o simbólico.

Apesar do desconhecimento dessa classificação da álgebra em diferentes estágios, ações do curso, como questionamento da relação entre álgebra e movimento, leituras do texto de Caraça (1952) e sínteses apresentadas pela pesquisadora referentes aos momentos da álgebra retórica, sincopada, simbólica e geométrica, possibilitaram a apropriação por parte das professoras. Com essas ações, algumas professoras revelaram como se apropriaram e compreenderam esses processos da álgebra em seus diferentes estágios. Desta forma, a professora Helena destaca ao se referir à potencialidade e às limitações da álgebra retórica:

> […] por que quando a gente chega em valores muito altos [inaudível] a generalização ela serve para que? Pra resolver qualquer problema. O problema da álgebra retórica é que ela é limitada, a partir do momento em que eu chegar em um valor muito alto, meu procedimento fica mais difícil. (Helena, E31, EV3, 00:02:55).

Durante o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, observou-se a limitação no momento da álgebra retórica em relação à generalização dos métodos. Ainda que não de forma explícita, a professora Helena ressalta a dificuldade de explicitar procedimentos de cálculo de forma geral, quando se recorre a valores altos. Pode ser ainda destacada nessa afirmação, a forma como a professora indica a necessidade de "resolver qualquer problema". Viète (2006), em sua obra, objetiva resolver todos os problemas, o que faz por meio de modos de análise (zetética, porística e exegética), introduzindo a notação simbólica para representar quantidades conhecidas e desconhecidas. Ele potencializa, desta forma, os processos de generalização e possibilita a definição de métodos gerais de resolução associados a grandezas de diferentes espécies (numéricas ou geométricas).

A professora Suzana manifesta compreensão sobre as limitações do processo da álgebra retórica, associando ao fato de que nesse movimento é necessário que existam dados específicos, no caso aqui, os aritméticos, e aponta razões para que a álgebra retórica não seja apresentada no ensino.

> A álgebra retórica parte realmente do cotidiano da pessoa, ela não vai generalizar, ela não é generalizadora por si só. Ele mediu o comprimento, aí ele multiplicou. Então já vem a partir de conhecimentos observados prévios, é uma coisa prévia que ele fez, pra ele poder chegar no cálculo. A álgebra que nós ensinamos generaliza para n coisas. Ela não é só pra a e b, eu não vou medir antes pra pegar um valor, eu não sou obrigada a observar alguma coisa antes […] ela virou instrumentadora só. Esta álgebra limita neste sentido, eu tenho que medir antes, eu tenho que ter um número prévio […] Por isso que a gente não ensina você vai contar quanto você tem, quanto ela tem [...] pra depois resolver os problemas, não tem como fazer isso, então além do problema dos números que vão surgir nas resoluções, além destes problemas […] Ela é limitadora por que eu preciso ter a quantificação de unidades prévia, quanto mede, quanto eu tenho, ela parte de uma experiência, por isso ela é limitadora e você não pode generalizar. (Suzana, E31, EV3; 00:03:30).

Pode-se questionar o quanto as possibilidades de generalização advindas do uso da álgebra simbólica são apropriadas pelos estudantes, ou se tornam apenas uma manipulação simbólica sem sentido.

Uma interpretação diferente associada ao momento da álgebra retórica e simbólica vem da professora Ester quando, durante a discussão em um momento de síntese das potencialidades e limitações históricas das diferentes álgebras e sua organização no ensino, questiona:

> quando a gente dá um problema pro aluno resolver o problema está escrito em retórica certo? Ele vai ter que passar de retórico para o simbólico pra depois resolver o simbólico, por que toda técnica está no simbólico. Acho que não existe nenhuma fase que seja trabalhado só isso a transferência do retórico para o simbólico. (ESTER, F18, FV5, 00: 02:41).

Recorrendo aos termos que estavam sendo discutidos, álgebra "retórica" e "simbólica", a professora não observa que se trata de diferentes movimentos do pensamento, que incluíam processos de generalização diferentes, que tratavam das grandezas também de formas diferentes e que, portanto, não se trata de tradução ou transferência "do retórico para o simbólico”. Essa fala revela a necessidade de esclarecimentos relacionados aos diferentes desenvolvimentos do conhecimento algébrico.

Ainda que a subdivisão dos estágios de desenvolvimento histórico da álgebra realizada por Nesselman (1842) esteja pautada sobre o desenvolvimento da linguagem e de suas formas de representação, cada um desses momentos contém em si diferentes possibilidades de aquisição de métodos gerais e processos de generalização do pensamento. O estágio simbólico do desenvolvimento algébrico não se caracteriza por ser a ”tradução” do estágio retórico. É característica do estágio retórico que as palavras e números sejam usados na formulação dos problemas, na forma de apresentação dos dados e da resposta, sendo o método de solução explicado com números. Os problemas atuais também são escritos em linguagem corrente natural, entretanto esta não é uma razão para associá-los ao momento da álgebra retórica. Assim, como não se trata no desenvolvimento algébrico de uma situação-problema durante o ensino de traduzir a escrita “retórica para a simbólica”, mas sim de reconhecer os elementos e nexos conceituais envolvidos, por exemplo: identificar as grandezas, as formas como variam, a necessidade de generalização e outros.

A professora Mônica, por sua vez, revela interesse pela dimensão filosófica de compreensão do movimento do universo, e ao relatar como estabelece a relação entre “álgebra” e “movimento”, relata:

> […] depois eu conversei com a Suzana e comecei a pensar que o movimento a que você se referia poderia ser a observação da natureza, o que ocorre, usando o termo do texto no Universo […] eu acho que era isso, só que eu não tinha pensado nesta palavra antes da leitura do texto [Caraça]. Então o que ocorre, então é através da observação, a gente fazer um estudo da natureza e representar este estudo de uma forma genérica, então utilizando a álgebra. (Mônica, D2, DV1; 00:02:30).
>
> Pra mim, foi igual uma questão que ele coloca no começo, como e porquê das coisas…parece a investigação constante, a gente tá sempre perguntando como que as coisas acontecem, eu penso assim que aí que a álgebra entra você quer pelo menos nós matemáticos, por que estas coisas acontecem e qual é o padrão com que acontecem […] então a gente tenta entender isso, e quando a gente dá aula, a gente tá sempre tentando explicar. (Mônica, D3, DV1; 00:10:40).

A professora Angélica, após a leitura do texto de Caraça (1952), remete às dificuldades de ensino:

> Eu observei assim na leitura […] vem um problema, vem uma questão e aí eles vão tentando achar uma resposta e aí a cada tempo que passava aquela resposta encontrada não servia mais, e aí eu fiquei pensando nisso assim nos alunos, eu vou dar um exemplo de um problema que eu tive na classe: frações, para as 5as. Séries esse ano eu tive frações aí eles tem neles os números naturais […] eles somam subtraem as frações como números naturais, eles usam o conhecimento que eles já tinham para resolver o problema só que não percebem que este conhecimento não serve mais [...] por que a maneira que eu dei não propôs um problema, eles não

> perceberam que precisava modificar, eu li o texto e pensei mais sobre isso. (Angélica, D3, DV1, 00:12:50).

Pela análise realizada sobre a fala da professora, percebe-se que ela tenta estabelecer uma relação entre a dificuldade histórica humana de trabalhar com números na forma de fração e a que os alunos possuem com essa apropriação relacionada às frações. A professora não relata explicitamente, mas pode-se entender, a partir da fala "[…] eles somam subtraem frações como números naturais […]", que ela está se referindo à ação dos estudantes que, para somar e subtrair frações, somam (ou subtraem) numeradores e também somam (ou subtraem) os denominadores, sem compreender o número como um todo, que realmente está representado na fração.

Entretanto, a dificuldade que aqui se considera epistemológica da humanidade em estabelecer números fracionários está relacionada à necessidade, cada vez maior, de precisar as medidas. Não é a mesma dificuldade dos estudantes ao somar e subtrair frações usando como técnica somar e subtrair numeradores e denominadores. Por não compreender o significado da fração como número, os estudantes "[…] usam o conhecimento que já tinham para resolver o problema […]", ou seja, somam e subtraem os números naturais que estão presentes. É importante destacar que o que a professora está se referindo como problema não é necessariamente uma situação-problema, mas uma questão ou um exercício apresentado aos estudantes.

Destaca-se ainda na fala da professora uma apropriação teórica na crítica que ela faz a si mesma: "[…] por que a maneira que eu dei não propôs um problema, eles não perceberam que precisava modificar […]". Nesse momento do curso já haviam sido discutidos alguns princípios da atividade e da atividade orientadora de ensino, portanto, essa afirmação traz indícios de que a professora repensou sua ação, considerando que poderia apresentar a questão aos estudantes de forma a desencadear a necessidade de usar números fracionários.

Esta forma de interpretar os impasses epistemológicos na experiência humana e relacionar com as dificuldades cognitivas dos estudantes de apropriação se revela mais uma vez na sequência desta fala da professora:

> Eu tinha pensado assim: todas as dificuldades que eles tiveram é o que realmente acontece com os alunos, por exemplo, quando surgiu o zero foi um dos últimos números e quando aparece a conta com zero, é onde eles tem mais dificuldade, dificuldade dos números inteiros, a história da humanidade vai se apresentando nos alunos. (Angélica, D3, DV1, 00:15:16).

Com restrições, é possível olhar e aproximar tais falas do que é chamado por Radford (2011) de modelo de “recapitulação”, segundo o qual a aprendizagem na ontogênese (entendida nesta tese como a formação do conceito pelo sujeito) repetiria o desenvolvimento conceitual na filogênese (o processo de formação de conceitos na espécie humana). Entretanto, Radford indica limitações desse modelo, que também podem ser destacadas nesta tese. A dificuldade humana de formação de novos conceitos está relacionada à necessidade, e no processo de ensino, destacam-se as dificuldades do processo de apropriação que, muitas vezes, pela via psicológica, não se relacionam as especificidades ou necessidades de determinada forma de conhecimento, por exemplo, da álgebra.

Em busca do objetivo desta pesquisa de investigar as relações estabelecidas entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, pretende-se destacar, como consequência, a especificidade do conhecimento algébrico. Estudada de forma aprofundada, ela é relevante para superar dificuldades do processo de apropriação dos conceitos pelos sujeitos, por destacar as necessidades, nexos conceituais teóricos e a essência desta forma de conhecimento.

4 ESTABELECENDO RELAÇÕES ENTRE O MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS E O OBJETO DE ENSINO DA ÁLGEBRA

No capítulo anterior, foi exposto o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos por meio das categorias do materialismo dialético, o que permitiu revelar elementos e nexos conceituais em busca da essência do conhecimento algébrico: estabelecer a relação entre as grandezas variáveis de forma geral.

Essa essência não se confunde com o objeto de ensino da álgebra, mas se espera que o constitua. Neste capítulo, serão expostas análises que aprofundam o reconhecimento da essência do conhecimento algébrico por meio do movimento histórico e lógico dos conceitos e buscam compreender como ela se revela nos seguintes tópicos: sequências, equações e funções.

Esses tópicos foram considerados como “isolados” do objeto de ensino da álgebra. Considerando a impossibilidade de que a análise seja realizada na fluência e interdependência entre todos os fenômenos, Caraça (1952) compreende como isolado um recorte de um fenômeno, aparentemente arbitrário, mas que compreende nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar. Assim, na impossibilidade de abranger completamente o objeto de ensino da álgebra, definiram-se como isolado nesta pesquisa os tópicos “sequências”, “equações” e “funções” (Quadro 4), por serem estes recorrentes no ensino da álgebra entre o 6º ano do ensino fundamental até o final do ensino médio, e por serem formas singulares de manifestação do que vem sendo considerado como objeto de ensino da álgebra.

Destaca-se ainda que, metodologicamente, este é o segundo movimento de análise desta pesquisa. A essência do conhecimento algébrico revelada em seu movimento histórico e lógico, e em sua relação com a atividade humana, será elemento que conduzirá a análise de singulares escolhidos do ensino da álgebra (sequências, equações e funções) por meio de suas manifestações em propostas curriculares, no discurso de professores e em situações de ensino, em busca de reconhecer princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra (universal).

4.1 SEQUÊNCIAS

4.1.1 Sequências: o movimento histórico e lógico

A busca do homem por regularidades nos fenômenos da natureza não é atual. Já os egípcios se preocupavam com a enchente do Rio Nilo e a necessidade de reconhecer o padrão do acontecimento, o movimento regular, identificando períodos de seca e de enchente, as estações do ano, para garantir um plantio adequado. Assim criaram o calendário solar composto de 12 meses com trinta dias cada e mais cinco dias de festa (BOYER, 1996). As marcas da civilização egípcia também podem ser encontradas nos problemas resolvidos do papiro Rhind. A maioria deles apresenta aspectos do cotidiano, e poderiam ser resolvidos com as equações lineares simples (EVES, 1995), e alguns desses problemas podem hoje se associar com a progressão aritmética e geométrica.

Também os pitagóricos (por volta de 550 a.C.) conheciam progressões aritméticas, geométricas, harmônicas e proporções. São eles os responsáveis pela origem da sequência dos números figurados. “Estes números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética” (EVES, 1995, p.100), por exemplo, os números triangulares, os quadrados e os pentagonais. Desses arranjos derivam a generalização de outros teoremas matemáticos, por exemplo, que todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos. Para os pitagóricos “[...] a compreensão do Universo consiste no estabelecimento de relações entre números, isto é de *leis matemáticas”* (CARAÇA,1952, p.75 , grifo do autor).

Trata-se aqui essencialmente das grandezas numéricas e dessa ideia deriva outra, a de que todas as coisas são números, o que provoca a crise desta escola quando se depara com a incomensurabilidade, com a impossibilidade de representar a medida de um segmento pela razão entre dois números, com a impossibilidade de que a reta ou outra figura geométrica fosse constituída por mônadas ou subdivisões dela. Com Zenão de Élea, o problema da incomensurabilidade requer mais atenção, e questões filosóficas e matemáticas caminham juntas.

As sequências continuam se apresentando na história da matemática com Euclides (300 a.C.). Sua obra *Os Elementos*, composta de treze livros com 465 proposições, trata de geometria, mas também de álgebra e teoria dos números. A proposição 35 do livro IX contém uma fórmula para a soma de números em progressão geométrica.

> Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como o excesso do segundo estará para o primeiro, assim como o excesso do último para todos os antes dele mesmo (EUCLIDES, 2009, p.348).
>
> Esse enunciado, é claro, é equivalente à fórmula

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que por sua vez eqüivale a:

$$Sn = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

(BOYER, 1996, p.79)

Em outras civilizações, como entre os mesopotâmios, os hindus e os chineses, também há registros de problemas referentes a progressões aritméticas e geométricas. O livro *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* é um importante texto de matemática dos chineses antigos e consta de 246 problemas sobre resolução de equações, agrimensura, engenharia e outros (EVES, 1995). Um exemplo deles, que nos remete às progressões, é o seguinte: “Uma tecedeira, melhorando a técnica de dia para dia, dobra todos os dias a quantidade produzida no dia anterior. Em cinco dias produz 5 chi (o equivalente a 23 cm) de tecido. Quanto é que produz num ano?” (COSTA, 2010).

Para Boyer (1996), um dos problemas que inspirou futuros matemáticos trata-se do famoso “Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”. Publicado no *Liber Abaci* (1202) de Fibonacci, esse problema dá origem à “sequência de Fibonacci” (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…), em que cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores. Atualmente, há inúmeras aplicações dessa sequência em diferentes ramos da ciência.

Como acontece com outros tópicos da matemática, pode se observar que o estudo das sequências surge inicialmente de questões práticas, ainda sem denominações específicas, sem sistematizações além das necessárias e suficientes para resolver os problemas que se apresentam. Tratando essencialmente das grandezas numéricas, vai se desenvolvendo de tal forma e com tal grau de aprofundamento, abstração e generalização que dá origem a outros conceitos. Por exemplo, o alto grau de conhecimento de Napier (1550-1617), a respeito de progressões aritméticas e geométricas, o levou aos logaritmos e para a construção das tabelas de logaritmos.

Todas as sequências apresentadas até aqui, Caraça identifica como “sucessões numeráveis” ou “função de variável inteira n”. Sua característica é a de possuir domínio (variável independente) como sucessão de números naturais aos quais se correspondem os valores da variável dependente. O termo geral da sucessão é a_n e para muitas dessas sucessões encontra-se a expressão analítica que define esse termo geral.

Caraça (1952, p. 215) entende que a principal contribuição de Zenão é “[...] mostrar-nos que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares”. Portanto, é necessário avançar para além das grandezas discretas. A fluência não se explica por métodos estáticos. É necessária uma nova atitude perante a ciência, que novos conceitos sejam gerados para explicar o movimento, para explicar a interdependência.

O número racional torna-se insuficiente. Com os avanços de generalização e a compreensão da variação dos movimentos, toma-se a variável como instrumento matemático para representar um ponto e para estudar a interdependência deste com pontos “arbitrariamente próximos”, necessitando como domínio, números arbitrariamente pequenos. Encaminha-se para o conceito de infinitésimo. E destaca-se que existem sucessões numeráveis, ou funções de variável inteira $a_n = f(n)$ que é “[...] infinitésima com 1/n, esta maneira de dizer que a função $a_n = f(n)$ é vizinha de zero quando n é vizinho do infinito” (CARAÇA, 1952, p.225-226). Daí decorrem as definições de limite, e este é para a sucessão, “o resultado da interdependência de seus termos” (CARAÇA, 1952, p.233). Assim, podem-se ter sucessões numeráveis com limite (finito ou infinito) ou sem limite (indeterminadas).

Esta não é uma discussão puramente matemática, é filosófica. Os conceitos de movimento e infinito estão presentes em todo esse desenvolvimento, e vem desde Heráclito (540 a.C.) que já entendia que tudo o que existe está em processo de permanente transformação. O método matemático dos limites, o conceito de séries como soma de uma infinidade de parcelas, permite superar a imobilidade que fez com que fossem destruídos os ideais pitagóricos de explicação do Universo.

Os estudos matemáticos avançam no sentido de sistematizar o estudo das séries, sobre os quais não vamos aqui prosseguir. Esses episódios singulares da história da matemática remetem a situações em que o homem recorreu às sequências para registrar e compreender regularidades de movimentos, as dificuldades e os impasses com que se deparou ao lidar com o movimento e o infinito.

Encontram-se nesses episódios, alguns dos nexos conceituais da álgebra revelados nas formas de pensamento, manifestações da linguagem e nos conceitos expressos, como particularidades de um determinado momento no movimento histórico da humanidade; e que permitem que a essência no movimento lógico da álgebra se manifeste em relação aos processos de pensamento teóricos e a atividade humana.

Identificam-se momentos em que as sequências se apresentam como instrumentos da matemática para apreensão da realidade fluente, e outros momentos cujas sequências são tratadas e estudadas como conceitos próprios dela; portanto, seu próprio objeto de estudo, é o caso do estudo detalhado de progressões geométricas, aritméticas, entre outras sequências e séries finitas e infinitas.

De forma sintética, as sequências e séries como conceitos e instrumentos da matemática procuram captar o que há de regular nos fenômenos. O que não exclui a fluência e o movimento deles. Em sua ânsia de expressar o mundo em números, os pitagóricos consideravam a estabilidade e a regularidade dos objetos e fenômenos, e assim entendiam que tudo poderia ser expresso em números. Compreendendo que tudo na natureza são números, tratam de atribuir formas geométricas a eles, constituindo as sequências de números figurados, triangulares, quadrados, pentagonais e outros. Mas o problema da incomensurabilidade estanca o desenvolvimento pitagórico, que não entendia como era possível que a razão entre dois segmentos não fosse sempre expressa por uma fração de dois números inteiros.

Com a experiência humana, ampliam-se as possibilidades de gerar abstrações, que se generalizam para explicar o movimento da realidade fluente. Assim, o que antes só poderia ser explicado recorrendo aos números, na forma de grandezas discretas, como era para os pitagóricos, é superado e produz uma nova forma de conhecimento que só é possível a partir da negação desse conhecimento anterior. Nem tudo são números, ou os números na forma que se conhecia não são suficientes para explicar uma determinada situação. Nesse sentido, é possível fazer referência não só à necessidade de relacionar grandezas, mas aos níveis de generalização que podem ser alcançados, a partir de seu conteúdo. Por exemplo, no caso das sequências, as generalizações que podem ser realizadas quando se trabalha somente com grandezas numéricas e limitadas a números naturais são certamente diferentes das generalizações possíveis quando se recorre à variação e ao conceito de infinitésimo, e que geram as séries.

Observa-se também que o estudo de sequências dessa forma permite a discussão entre o discreto e o contínuo. O que há em essência quando se fala sobre a sequência dos números inteiros e a sequência dos números reais? O que cada uma dessas sequências permite estudar em relação, por exemplo, à medida de grandezas? Como explicar a medida da diagonal do quadrado somente com números inteiros, que era o problema dos pitagóricos?

A relatividade dos conceitos de finito e infinito também pode ser revelada no estudo de sequências. Ainda considerando somente as sequências numéricas, pode–se perguntar: Quantos números há entre 2 e 5? E a resposta será variada, finita ou infinita, dependendo do campo de variação dos números com os quais se está trabalhando. Contemplando somente os números inteiros, encontram-se os números 3 e 4, mas se estão contemplados os racionais ou reais, tem-se um conjunto infinito de números em resposta a essa pergunta.

Especificamente em relação ao domínio algébrico, este ramo do conhecimento permite avançar e aprimorar o estudo das sequências e séries, e assim elas são tratadas como objetos de estudo dos matemáticos. A álgebra permite que se capte e expresse o movimento de formação da sequência e posteriormente das séries em detalhes. Nesse movimento, revela-se sua essência: estabelecimento de relação entre grandezas de forma geral.

No caso das progressões, é possível perceber se seus termos são formados pela adição ou multiplicação de números, encontrar termos da sequência sem que seja necessário escrevê-la completamente; efetuar somas ou produtos de termos das sequências e outros. O que abre esse caminho é a possibilidade de, por meio de recursos algébricos, reconhecer e expressar a lei de formação de determinadas sequências. Essas leis se formam a partir da generalização da relação entre as grandezas, entretanto a representação simbólica já sintetiza e permite trabalhar também com essas grandezas de forma geral, e elas acabam nem sempre sendo identificadas, dando a falsa impressão de não estarem relacionada à realidade objetiva. Por exemplo, a sequência que tem como representação de seu elemento geral $a_{n=}$ n^2. Essa simbologia permite relacionar a grandeza “lado de um quadrado” e “área de um quadrado” e recorrendo aos números reais como campo de variação associado ao símbolo n, encontra-se a área de infinitos quadrados. Mas esta é apenas uma das possibilidades para o que pode estar representado nesta sequência. De qualquer forma, essa expressão generalizada permite que sejam identificados quaisquer casos particulares da sequência. Nesse caso, também se observa que a relação entre as grandezas pode ser analisada em sua forma funcional, pois, para cada quadrado com determinado lado, está associada uma medida de sua área.

Entretanto, encontram-se também leis de formação elaboradas pela recorrência dos elementos, em que para encontrar determinado elemento da sequência é necessário recorrer ao anterior, o que permite certo grau de generalização. Também se encontram leis de formação das sequências elaboradas a partir da posição dos elementos na sequência, o que é um avanço no processo de generalização realizado.

Por exemplo, na sequência (4, 8, 12, 16,…), entende-se que pela lei de recorrência, a sequência é formada pela soma de quatro unidades ao elemento imediatamente anterior. Essa informação permite que se conheçam os próximos elementos da sequência, mas torna-se um procedimento exaustivo se quiser atingir o centésimo elemento, por exemplo. Nesse caso, analisando os casos numéricos particulares e generalizando os procedimentos aritméticos, é possível alcançar uma relação e expressá-la, mas esta é limitada, apesar de compreender os recursos da aritmética generalizada.

Por outro lado, associar o elemento à posição que ocupa produz outra generalização em que cada elemento é a multiplicação de quatro vezes a sua posição, assim o décimo elemento da sequência é 40, o centésimo, 400, e assim por diante, e para tanto não é preciso conhecer os elementos anteriores. Nesse caso, a sequência tem uma dimensão funcional no sentido de que relaciona as grandezas, posição do elemento na sequência, com o valor numérico do elemento.

A Figura 3 foi elaborada com a intenção de apresentar alguns nexos lógicos e históricos associados ao tópico sequências.

Em síntese, o que se pretende dizer é que o estudo de sequências, se considerado em seu movimento histórico e lógico, oferece possibilidades de discussão de vários conceitos matemáticos, procedimentos de generalização empíricos e teóricos, reconhecimento da matemática como advinda da experiência e prática humana e outros.

O essencial para o desenvolvimento do conhecimento algébrico, ao ensinar sequências, é identificar as grandezas envolvidas e investigar a regularidade que pode existir entre elas. Por ser uma sequência, uma das grandezas envolvidas em geral é a posição que determinado elemento quantitativo ocupa em relação aos demais elementos. Por exemplo, sequência de dias; sequência de números pares; sequência de números triangulares e outros. A partir disso, se torna possível generalizar e encontrar uma forma geral de relação entre as grandezas.

Por revelar uma forma de estabelecer as grandezas de forma geral, por permitir os processos de generalização em diferentes níveis, por contemplar diferentes formas de expressão, as sequências contemplam a essência do conhecimento algébrico e, nesse sentido, é válido considerar que esse tópico seja incluído no programa escolar. Entretanto, a forma como ele é apresentado na escola está destituída de significado e privilegia procedimentos técnicos da lei de formação, por exemplo.

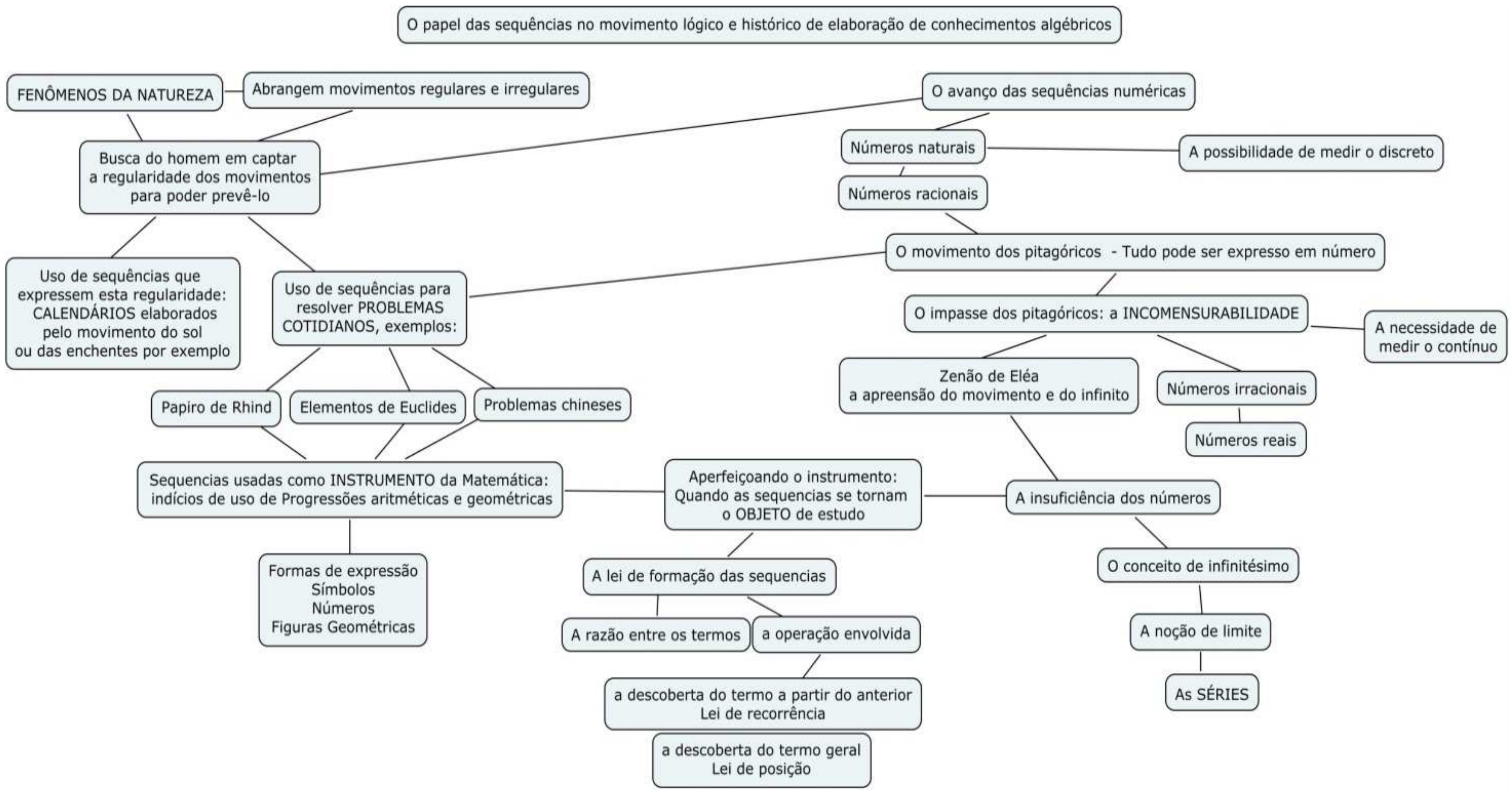


Figura 2 - Síntese: o movimento histórico e lógico das sequências.

4.1.2 Sequências no programa curricular

O uso de sequências para iniciar o processo de ensino de álgebra é destacado na Proposta do Estado de São Paulo, no sentido de encontrar uma expressão geral que represente a lei da sequência, porém por meio de casos particulares (aritmética generalizada).

Kendal e Stacey (2004), em seus estudos dos programas curriculares de diferentes países, identificaram que as sequências eram usadas em currículos que compreendiam a álgebra como um meio de expressar a generalidade e padrões, mas ainda que elas fossem usadas havia diferenças na maneira de compreendê-las. Em alguns currículos, elas eram usadas para introduzir a álgebra, mas em outros, e citam o exemplo do currículo japonês, são uma parte do estudo das relações matemáticas em que os alunos aprendem a usar um "pensamento funcional", em três passos: identificar as variáveis dependentes e independentes; encontrar a relação recorrente entre estas variáveis e expressá-las por meio de tabelas ou gráficos; e usar os padrões ou relações para resolver os problemas. Assim, a intenção nesse currículo é oferecer aos estudantes ainda nos anos iniciais uma noção de função, não introduzindo ainda os símbolos, mas permitindo que se evidenciem as relações entre as variáveis. Os japoneses também aplicam essa ideia para resolver outros problemas, não só os que envolvem sequências.

Conforme Ponte, Branco e Matos (2009), o tópico sequências e regularidades percorre todo o ensino básico: no primeiro ciclo, pela identificação e exploração das regularidades numéricas; em seguida, para sua expressão em linguagem simbólica e mais tarde, para expressar de forma generalizada recorrendo a "termo" e "ordem" (a ideia de PA e PG). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) também indicam o desenvolvimento do trabalho com álgebra por meio de sucessões numéricas e por representações geométricas.

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (BRASIL, 1998, p.117).

Considerando o estudo realizado do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e destacando a essência da álgebra como a de expressar a relação entre as grandezas de forma geral, entende-se que tais relações nem sempre são regulares. Nesse sentido, a busca por regularidades é necessária para que se possa realizar a generalização, mas, para encontrar tais regularidades, é necessário anteriormente reconhecer as grandezas com as quais se está trabalhando e como se dá a sua variação.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008f), o tema sequência é contemplado em mais de uma situação de aprendizagem proposta ao longo da escolaridade nos cadernos de alunos e professor, do segundo ciclo do ensino fundamental ao ensino médio.

Relacionado à álgebra, o tópico sequências é desenvolvido no volume 4 da 6ª série (SÃO PAULO, 2009a); no volume 2 da 7ª série (SÃO PAULO, 2009b), e de forma bastante concentrada no volume 1 do 1º ano do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2008a), quando os estudantes irão aprender Progressões Aritméticas e Geométricas.

Desde a 6ª série, são recomendados como objetivos identificar padrões e representá-los (por meio de palavras, figuras ou símbolos), recorrer a recursos aritméticos para encontrar os termos seguintes de uma sequência e realizar generalizações que permitam simbolizar um termo mais distante da sequência. Discutem-se também padrões recursivos (leis de recorrência da sequência, quando um termo é escrito a partir do termo anterior) e padrões não recursivos (leis de posição). Espera-se que o estudante consiga alcançar as generalizações próprias sem recorrer aos padrões recursivos. Na 7ª série, as situações de aprendizagem, propõem que pelas sequências seja explorada a equivalência entre expressões algébricas. Entende-se que, nesse caso, se destaca o aspecto técnico e simbólico do uso de sequências, diminuindo-se a importância atribuída ao essencial em álgebra, reconhecer as grandezas, estabelecer relações entre elas e identificando as regularidades.

No 1º ano do Ensino Médio, a intenção é apresentar os conceitos de Progressões Aritméticas e Geométricas. Então, o que foi anteriormente trabalhado é retomado e aprofundado. Destacam-se as situações que recorrem a técnicas para encontrar o termo geral da sequência, ou a soma de uma PA e PG, entre situações de uso atual de sequências (como cálculo de juros) e também situações que recorrem à experiência histórica da humanidade com as sequências. Por exemplo, no caderno do aluno do 1º ano (SÃO PAULO, 2009c), encontram-se situações com números figurados (SÃO PAULO, 2009c, p.36); um texto sobre o problema da incomensurabilidade (SÃO PAULO, 2009c, p.49) e uma adaptação do Paradoxo de Zenão (SÃO PAULO, 2009, c p.53).

As situações de aprendizagem que predominam nos textos da Proposta Curricular do Estado de São Paulo destacam, a partir do estudo de sequências no decorrer dos anos de escolaridade, a associação em arranjos geométricos de diferentes maneiras (linhas, colunas, completando, reagrupando), para a investigação de padrões e regularidades. Nesse sentido, esse tópico tem sido usado para introduzir a álgebra, para permitir a diversidade de representações com letras e para generalizar propriedades (distributiva, associativa, comutativa)s usando a equivalência de expressões algébricas que são geradas a partir das sequências. As inserções que tratam das questões da incomensurabilidade e outros impasses históricos superados pela humanidade para o desenvolvimento das sequências e séries não são destacados.

4.1.3 O tópico sequência sob o olhar dos professores

Dados obtidos no curso de atualização desenvolvido com professores de matemática da rede pública do Estado de São Paulo, intitulado “Atividade de Ensino de Álgebra a partir dos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural”, desenvolvido no primeiro semestre de 2011, revelam a posição dos professores diante de uma das situações de sequência apresentada.

Durante um dos encontros realizados do curso de atualização, os professores foram convidados a resolver e discutir a respeito dos encaminhamentos da situação da Figura 4 com os estudantes. A dinâmica foi a seguinte: primeiramente, os professores se reuniram em pequenos grupos e discutiram a situação; em seguida, receberam os indicativos da própria proposta para resolução da situação (Anexo B) em que se apresentam quatro possibilidades de solução que se espera que os alunos alcancem.

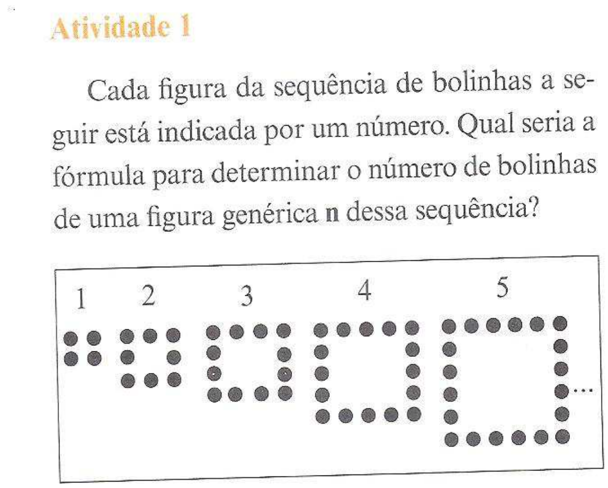


Figura 3 - Situação de aprendizagem.
Fonte: SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 7ª série. São Paulo: SEE, 2009. p. 13. v. 2.

Sobre esses indicativos, realizaram uma nova discussão considerando os aprendizados possibilitados por essa situação. Para orientar e encaminhar a discussão, os professores receberam os seguintes questionamentos:

1. Que aprendizagem a situação promove?
2. Que conceitos algébricos estão envolvidos?
3. O que representa a letra “n” para os estudantes?
4. Que forma de pensamento está contemplada?
5. Contempla o movimento histórico da álgebra?
6. Qual é o papel da linguagem algébrica nesta situação, como ela pode se manifestar e ser desenvolvida?
7. Como modificar e aperfeiçoar esta situação para que ela possa ser usada em sala de aula?

As respostas sobre as aprendizagens que a situação promove incluíram: “observação de padrões”; “sequências”; “elaboração de regra geral usando letras”; “aprendem a relacionar grandezas”, “análise”, “abstração”, “equacionamento de uma situação-problema”. E sobre os conceitos envolvidos: “generalização”; “expressões algébricas equivalentes”, “observação”, “análise”, “associação de ideias”, “sequência numérica”, “uso de variáveis relacionadas a elementos fixos”. Pode-se observar que nessas duas respostas processos de pensamento, ações e conceitos se misturam. Assim, por exemplo, “generalização”, “análise”, “observação” são indicadas como conceitos envolvidos na situação. Reitera-se a necessidade de analisar continuamente e discutir identificando conceitos envolvidos e objetivados, bem como processos de pensamento nas situações que são apresentadas aos estudantes, pois isso não se trata de uma obviedade e, portanto, reconhecê-los esclarece o objetivo a ser atingido com uma situação.

Respondendo ao item 3 sobre o que representa a letra “n”, um grupo destacou que “representa algo desconhecido”; enquanto outro destacou o fato de que é muito comum usar determinadas letras para representar incógnitas e variáveis e a troca da letra causa dificuldade aos estudantes: “para eles representa uma linguagem extremamente difícil por que em sua realidade a incógnita é x ou y”. Nesse caso, percebe-se que falta o significado atribuído a essas letras como símbolos de algo variável e os estudantes se atém ao registro comumente utilizado (x ou y). Outros dois grupos também destacaram a necessidade de que os alunos compreendam a letra “n” como algo que varia: “alguns alunos não conseguem abstrair o suficiente para compreender a generalização do n, vindo até mesmo a apresentar dificuldades na interpretação do enunciado. O ideal seria que eles compreendessem que n representa algo que varia (variável)”. “A letra “n” na visão dos estudantes é apenas uma letra representando um termo desconhecido. Com a inferência do professor, ele compreenderá que se trata de parte variável". Entretanto, não destacaram que, nesse caso, o "n" representava a posição da figura na sequência.

A pergunta sobre a forma de pensamento contemplada na situação foi realizada com a intenção de discutir com o grupo de professores sobre formas de pensamento empírico e teórico. As respostas escritas deles indicaram "pensamento abstrato", "abstração, generalização", "transformação da adição em multiplicação", "compreensão de que as letras também podem representar números". Observa-se pelas respostas escritas que não há também consenso em relação aos processos de pensamento envolvidos, e que eles também se confundem com procedimentos matemáticos, no caso da "transformação da adição em multiplicação".

Considera-se que a essência do conhecimento algébrico de "estabelecer relações entre as grandezas variáveis de forma geral" está contemplada nessa situação. Entretanto, para que ela seja destacada com os estudantes, é necessário que os professores a reconheçam, caso contrário, uma situação como esta pode ser trabalhada de infinitas formas que circundam o essencial da álgebra, mas não o atingem. Por exemplo, destaca-se um procedimento de transformação de adição em multiplicação, ou o fato de se trocar a letra "n" por "x" e "y" para facilitar a compreensão dos estudantes e, apesar de os professores identificarem diversas "aprendizagens" e "conceitos envolvidos" na situação, não se destacam as grandezas[20] "posição da figura na sequência" e "quantidade de bolinhas" para que elas sejam relacionadas. Entende-se que implicitamente os professores possuem essa compreensão, considerando que chegam a uma formulação da lei geral, mas tal procedimento lógico não é destacado com os estudantes.

Essa situação foi apresentada aos professores no 2º. Encontro do curso, portanto, o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos ainda não havia sido exaustivamente discutido. Assim, a resposta à questão 5 sobre se a situação "contempla o movimento histórico da álgebra" recebeu respostas diretas, como: "sim", sem mais esclarecimentos, ou "sim, contempla o estudo das generalizações e justifica a álgebra pela álgebra" ou "sim, por que essa atividade resolve uma situação prática".

---

[20]Como destacado no capítulo anterior, identificamos " grandezas" como a "qualidade de um objeto que pode ser quantificada" e entende-se "qualidade", conforme Caraça (1952), como o conjunto de relações que um determinado objeto/fenômeno estabelece com outros. A partir disso conceituamos como "grandeza", a qualidade atribuída a um objeto/fenômeno e desta forma estamos fazendo referência, à sua altura, largura, área, massa, bem como à relação desse objeto com outros objetos e seu movimento no tempo e espaço, por exemplo, distância, velocidade, posição e outros.

Também foi interessante observar que, em relação ao papel da linguagem na situação, um dos grupos respondeu que “seu papel é a generalização do pensamento” e outro, “que foi fundamental, pois com a lei de formação encontrada algebricamente, é possível descobrir a quantidade de bolinhas em qualquer situação”. Nesse caso, o grupo atribui ao registro simbólico à importância do processo, o que, muitas vezes, acontece com o ensino de álgebra, em que o registro se sobrepõe ao processo de pensamento.

Os professores que já haviam desenvolvido a situação de ensino em sala de aula ressaltaram em seu discurso as dificuldades dos alunos: que conseguiam expressar a relação da sequência por meio da fala, mas tinham dificuldades em efetuar o registro simbólico; não compreendiam o que era o “n” (letra usada na situação) e como ela variava. A fala de uma professora permite identificar algumas dificuldades enfrentadas no trabalho com sequências em sala de aula:

> Eu apliquei esta atividade pedi para eles resolverem, tive que explicar a palavra ‘genérica’, eu lembro e eu tive que explicar o que era o n primeiro, o que esse n representa. Como eles já eram de 7ª série uns dois alunos já entenderam e falaram assim que é uma figura qualquer, que esse n vai representar uma figura qualquer. Eu tive que fazer primeiro esta explicação e agora ‘Vejam qual que seria a fórmula’, chegaram a 4n, não é geral, tem aluno que não está interessado em saber isso […] todo mundo contou as bolinhas, colocaram o valor e eles perceberam que crescia de 4 em 4 e alguns grupos colocaram 4n aí pra alcançar a sala eu precisei fazer mais o que, fazer mais o 6, como seria o 6, aí eles falaram direto, falaram a resposta o 7, o 8, 32, ‘O que vocês estão fazendo?’ ‘Ah multiplicando por 4’. Aí alcançou a sala toda. (Angélica, B28, BV2, 00:11:57).

Os professores sugerem, como modo de encaminhamento da atividade, a construção de tabelas que relacionem a posição da figura da sequência e a quantidade de bolinhas que a figura correspondente contém e reforçam a necessidade de compartilhar soluções apresentadas pelos próprios alunos.

É possível identificar nesse tipo de situação, traços de uma tendência que concebe a álgebra no ensino (USISKIN, 1995) como aritmética generalizada, em que as variáveis são compreendidas como generalizadoras de padrões e modelos. A generalização é realizada da observação de casos particulares e ainda presa à natureza dos elementos, no caso os números. Para Davydov (1982), esse processo de generalização é considerado empírico. É um processo pelo qual, por meio da comparação, o indivíduo abstrai de um grupo de objetos algumas propriedades que se repetem. O conceito se forma por meio da verbalização de tal característica comum aos objetos.

Desta forma, os estudantes conseguem expressar, como relata a professora, uma relação numérica por meio da fala. Reconhecem que há uma relação entre diversos casos particulares (a multiplicação por 4), mas não identificam claramente as grandezas e nem sua variação, e não conseguem expressar o que está sendo multiplicado por quatro (apesar de reconhecer a relação numericamente).

Entretanto, observa-se que, se os estudantes forem orientados por meio de processos de generalização teórica, buscar nos objetos mais do que é externo, visível, poderão destacar as grandezas e sua variação; ou seja, a relação da quantidade de pontos (q) e a posição da figura(n), tendo a possibilidade de representar essa relação de forma geral q= 4n, o que supera os procedimentos da aritmética generalizada presa aos casos numéricos particulares.

Tal encaminhamento só é possível a partir da compreensão do movimento histórico e lógico dos conceitos, do reconhecimento de sua essência, e oferece elementos de formação do professor e dos estudantes.

A generalização que permite que a álgebra avance impulsionando todo o conhecimento matemático é a que se desprende da natureza dos elementos. É a generalização que, por exemplo, Viète (2006) alcança quando compreende que pode atribuir letras para quantidades desconhecidas, como já fazia Diofanto, mas também pode atribuir letras para quantidades conhecidas, possibilitando, desta forma, que se trate das relações de forma abstrata, independente da natureza dos objetos, que podem ser números, elementos geométricos, figuras e outros.

Essa situação também tem potencial para destacar e estabelecer relações com conceitos de infinito, movimento, incomensurabilidade que representaram impasses para o desenvolvimento matemático em diferentes épocas históricas. Por meio dela, destacam-se a apreensão do movimento regular, a noção de sequência infinita, as limitações da constituição dos lados do quadrado, o uso de elementos do discreto; formas diferentes de expressar a lei de formação dessa sequência por meio da oralidade, das palavras escritas, de abreviaturas, com símbolos geométricos e/ou algébricos; identificar diferentes leis de formação da sequência, o que implica diferentes graus de generalização (leis de recorrência – dependem do elemento anterior; e leis de posição – permitem que se encontrem elementos “avançados” da sequência).

Uma professora reflete em sua fala indícios de compartilhar com os estudantes a associação de sequências aos movimentos e fluência da realidade objetiva que uma situação como esta pode apresentar.

> No meu pensamento, eu comecei a falar assim: Bom como é que eu […] eu estava pensando nas sequências por que eu dou aula para o primeiro ano, o que eu peço para o meu aluno? Como foi a programação […] para que ele observasse as semelhanças daquele fato que estava acontecendo naqueles números e que arranjasse

> uma forma matemática de representar aquilo que ele estava vendo, ou com números ou com figuras […] e ai eu pensava na natureza, como é que estes matemáticos ou cientistas elaboraram ou faziam a previsão, através da observação daquilo que é semelhante na natureza e aí aplicar o algébrico em cima disso para poder fazer as previsões, elaborar sistemas enfim. (Mônica, D2, DV1, 00:06:40).

Para tanto, é necessário recorrer a elementos do movimento lógico-histórico de conceitos matemáticos raramente contemplados na formação do professor de matemática. O uso de sequências no ensino de álgebra e situações como as apresentadas refletem um fim em si mesmo. Mas qual é a importância para o desenvolvimento do pensamento teórico do estudante que ele resolva situações que envolvem o trabalho com sequências? A partir do estudo realizado, consideramos que, nessas situações, os alunos podem identificar as grandezas envolvidas em objetos ou fenômenos; verificar se existem ou não regularidade de movimento; estabelecer relações entre as grandezas envolvidas e principalmente no caso do conhecimento algébrico; e gerar uma forma de representação geral para aquela relação que pode ser em linguagem natural, ou simbólica.

A organização do ensino, de sequências ou de outros tópicos de matemática, para além de pensar na situação como um fim em si mesma, ou com um objetivo apenas técnico de resolução, deve considerar as consequências para o desenvolvimento do pensamento. Um exemplo está na dificuldade relatada pela professora:

> Ontem dei um exemplo de intervalos […] eles não entendiam de jeito nenhum […] aí eu tirei o x e fui colocando 1, 2, fui substituindo o x com todo aquele conjunto que foi dado, aí o aluno entendeu, ah, este x é isso […] o x são todos os elementos que estão dentro deste conjunto, eu tenho que atender esta necessidade, tirei o x e fui substituindo por cada número do conjunto, aí eles entenderam. (Carla, D5, DV1, 00:46:00).

Mesmo com esse recurso utilizado pela professora de substituir valores de x para que os alunos compreendessem a variação dos intervalos numéricos, observa-se que ela destacou os valores naturais. E se não são desenvolvidas outras ações de ensino que contemplem o movimento, a continuidade da sequência de números, os estudantes ficam restritos a pensar no domínio do campo dos números naturais, como também faziam os pitagóricos.

Compreende-se que retomar a história da matemática em seu movimento lógico em busca da essência dos conceitos e possibilidades de apresentação no ensino para o desenvolvimento do pensamento teórico e superação de dificuldades epistemológicas dos estudantes ainda é tarefa a ser desenvolvida.

4.2 EQUAÇÕES

4.2.1 O movimento histórico e lógico das equações

Neste item pretende-se analisar o movimento histórico e lógico das equações com a intenção de reconhecer como a essência da álgebra (estabelecer as relações entre as grandezas de forma geral) se revela ou se manifesta no desenvolvimento das equações historicamente.

Entende-se que as equações nascem inicialmente como instrumento da álgebra, como métodos de resolução de problemas do cotidiano. Ao serem cada vez mais desenvolvidas, estudadas e caracterizadas, são aperfeiçoadas como instrumento da matemática que auxilia na resolução de problemas da realidade cotidiana e ganham destaque dentro do campo da ciência matemática propriamente dita. Isto é, na medida em que aperfeiçoa seu instrumento, a ciência matemática se desenvolve.

Os registros antigos mostram que a necessidade de resolver problemas do cotidiano envolvendo quantidades se resolve com a criação de alguns métodos de resolução. O objetivo nesses problemas era encontrar os valores desconhecidos. A identificação de padrões de problemas e a criação de métodos de resolução para resolvê-los são encontradas desde os registros babilônicos.

Para Baumgart (1992), os registros babilônicos apresentam a resolução de problemas com alto grau de sofisticação e sem recorrer a símbolos. Formulados e resolvidos com linguagem natural, destacam–se algumas etapas: (1) a formulação do problema; (2) a apresentação dos dados; (3) a solução; (4) a explicação numérica do método de solução; (5) e o teste da resposta.

Um exemplo típico apresentado por Baumgart (1992) a partir dessas etapas é o seguinte:

(1) Multipliquei comprimento por largura obtendo assim área 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se comprimento e largura

(2) 32 soma; 252 área

(3) (resposta) 18 comprimento e 14 largura

(4) Segue-se este método: Tome metade de 32 que é 16.

16x16=256

256-252=4

A raiz quadrada de 4 é 2

16+2 = 18 comprimento

16-2 = 14 largura

(5) (prova) Multipliquei 18 que é o comprimento por 14 largura

18 x 14 =252

Em escrita cuneiforme, e recorrendo apenas a algarismos e palavras, os babilônios utilizavam o método paramétrico para resolver problemas propostos (BAUMGART, 1992). Observa-se que para a formulação do problema, os babilônios necessitavam reconhecer as grandezas, no caso comprimento e largura, e estabelecer uma relação entre elas, a de multiplicação, determinando assim a área numericamente. Também estabeleciam no decorrer da resolução do problema, outras relações, por exemplo, de dividir a soma do comprimento e da largura por 2. Ao estabelecer essas relações, elas eram repetidas para todos os problemas e situações similares, e por isso constituíam um método de resolução; entretanto, a generalidade dessas relações limita-se a problemas com determinada estrutura.

Roque (2013) afirma que J. Hoyrup, historiador matemático, mostrou que os procedimentos geométricos babilônicos de "recortar e colar" não poderiam ser considerados como algébricos, sendo mais adequado se referir a esses procedimentos como "cálculos com grandezas".

A álgebra grega (entre 500 a.C. e 300 a.C.) também possuía métodos similares de resolução de equações, entretanto usava recursos como segmentos e áreas de figuras geométricas. A álgebra geométrica superava algumas dificuldades conceituais que existiam na época com as frações e os números irracionais.

Pode-se analisar que esses problemas tratam necessariamente da identificação de algumas grandezas e da relação entre elas estabelecida numericamente. O método de resolução permite o desenvolvimento de seu conteúdo até certo limite, que se prende a casos particulares. Em outras situações similares, com valores diferenciados, é possível aplicar o mesmo método de resolução e encontrar os valores desconhecidos.

As abstrações realizadas possibilitam a organização em etapas de resolução e a concretização na determinação do resultado que resolve aquele problema particular. Reconhece-se que a essência da álgebra se manifesta nesse momento por meio da manifestação particular e numérica da relação entre grandezas (no caso comprimento e largura) e no estabelecimento de métodos particulares, que têm alcance geral somente no sentido em que resolvem problemas similares.

A "regra da falsa posição" era outro método utilizado pelos egípcios, também para resolver as situações e encontrar os valores desconhecidos em equações. Atribuía-se um valor "falso" como solução do problema para verificar o resultado alcançado e balizar com o que realmente deveria ser atingido, tendo possibilidades de alterar a solução falsa. A resolução dos problemas e a relação entre as grandezas continuam sendo destacada em casos numéricos particulares.

Com Diofanto, a resolução de equações conquista nova simbologia, sendo usadas abreviações de palavras. Ainda que haja avanços na **forma** de representar as equações usadas como soluções dos problemas, o **conteúdo** não se altera. Diofanto segue a linha babilônica e expressa todas as incógnitas em função de um parâmetro (BAUMGART, 1992). A álgebra sincopada de Diofanto ainda não é suficiente para encontrar métodos gerais para a resolução das equações, e consequentemente para resolução dos problemas.

Também na época de Diofanto, as equações eram instrumentos da matemática para resolver alguns problemas. A simbologia da época, desde a álgebra retórica passando pela álgebra geométrica e a sincopada, possibilitava o processo de generalização até certo nível. Além disso, a necessidade e os objetivos estavam voltados à resolução de problemas particulares, a encontrar resultados específicos que resolvessem as situações. Portanto, as abstrações realizadas dependiam da natureza dos objetos que representavam as quantidades, fossem eles números ou entes geométricos. Por muito tempo ainda, a preocupação na resolução de problemas seria a de encontrar o valor desconhecido e não a de encontrar métodos gerais de resolução, o que só foi possibilitado posteriormente por Viète, com a introdução de simbolismos para as quantidades conhecidas, no caso os coeficientes de uma equação.

O livro *Al-jabr Wa'l Muqabalah*, do matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi (do ano de 830, aproximadamente), não recorre à sincopação de Diofanto. Escrito com palavras e números característicos da álgebra retórica, contém uma exposição direta da resolução de equações, principalmente as de segundo grau (BOYER, 1996), e com uma exposição sistemática apresenta seis casos de equações lineares e quadráticas com raízes positivas. Ainda que se reconheça o seu valor para o desenvolvimento da álgebra, "[...] a obra de Al-Khowarizmi tinha uma deficiência séria que precisava ser removida antes de poder servir eficazmente aos seus fins nos tempos modernos: uma notação simbólica tinha que ser desenvolvida para substituir a forma retórica" (BOYER, 1996, p.160).

Observa-se que a necessidade aos poucos passa a ser a de encontrar métodos gerais de resolução e, portanto, a necessidade de uma simbologia que permita esse registro de uma forma geral.

A *Álgebra*, de Omar Khayyam (1050-1122), incluía também a resolução de equações de terceiro grau. Apesar de considerar que essas equações só poderiam ser resolvidas por métodos geométricos e não aritméticos, Khayyam (1050-1122, p. 164) "[…] deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau", e estimulou os matemáticos da renascença italiana posteriormente a procurarem soluções para esse problema.

Descobrir esses métodos gerais de resolução das equações passou a ser o objetivo dos matemáticos daquela época e, por vezes, gerava intrigas e duelos entre eles. O método de resolução das equações de quarto grau vem a público com o livro *Ars Magna*, de Gerônimo Cardano (1501-1576), que também usava pouca sincopação.

Por terem descoberto que a solução geral das equações cúbicas podia ser expressa na forma de radicais de graus menores do que três e a solução geral das equações quárticas podiam ser expressas por meio de radicais com expoentes menores que quatro, os matemáticos inferiram que "a equação de grau n deveria, pelo precedente, ser capaz de uma solução formal através de radicais, provavelmente radicais de expoente não maior que n" (DANTZIG, 1970, p.104).

Assim, já se encontram formas canônicas e métodos de resolução para equações de segundo e terceiro grau, e algumas de quarto grau. A questão que se coloca então é a de se caso exista algum algoritmo para resolver as equações de graus maiores, quais são as condições de existência deste algoritmo? Abel e Galois, no início do século XIX, resolveram esse problema e contribuíram com um novo conceito, o de grupo que permite então avanços no desenvolvimento da álgebra, para além da teoria das equações.

Retomando, observa-se que a álgebra de Diofanto tratava ainda de casos particulares e gerava uma metodologia para resolver cada tipo de equação encontrada, o que pode ser considerado uma forma de generalização que a partir de casos particulares tem como preocupação principal encontrar o elemento desconhecido (a incógnita). Com o desenvolvimento do conhecimento algébrico e as necessidades de estabelecimento de métodos cada vez mais gerais para a resolução de equações, que iam se tornando mais complexas, a introdução de Viète de consoantes para representar quantidades conhecidas (parâmetros) e vogais para identificar quantidades desconhecidas avança no sentido de possibilitar o tratamento das grandezas envolvidas nas equações de forma geral.

A representação das quantidades relacionadas às grandezas (fossem numéricas, geométricas ou de outra forma) foi generalizada. A quantidade desconhecida ou conhecida associada a uma determinada grandeza é representada de forma geral, e admite a variação. Desta forma, a álgebra de Viète, que ainda é fundamentalmente sincopada, gera uma mudança de conteúdo mais do que de forma. Para resolver a necessidade de estabelecer métodos gerais de resolução, modifica a representação das grandezas, e usa símbolos que permitem tratar de todas as grandezas de forma geral e abstrata. Assim, o foco deixa de ser a determinação de resultados particulares e natureza dos objetos matemáticos, que são agora tratados de forma geral, e passa a ser o estabelecimento de métodos gerais a partir do que se pode considerar como pensamento teórico, que não se prende mais aos casos numéricos particulares.

Esses registros revelam parte do movimento que envolve o surgimento e o estudo das equações. Geradas a partir de necessidades práticas da resolução de problemas do cotidiano, inicialmente são métodos escritos com palavras e números que permitem alcançar a solução de um problema específico. Assim, por exemplo, os babilônios registravam seus passos e modos de ação para atingir a solução que desejavam. A necessidade se encerrava com a resolução do problema. Gregos antigos recorriam ao que hoje é chamado de álgebra geométrica e usavam os entes geométricos para a resolução do problema. Assim também com a álgebra sincopada de Diofanto. Em todos esses casos, o objetivo principal era a solução de problemas específicos, particulares, encontrar o valor desconhecido. Entretanto, a forma variava, ou por palavra, ou por entes geométricos, ou por sincopações. Os avanços da humanidade e do conhecimento científico levaram a encontrar métodos gerais de solução para equações de até quarto grau, mas ainda com dificuldades na representação. A necessidade de sistematizar a força do conhecimento algébrico e recorrer a símbolos para representar grandezas de forma abstrata se concretiza com Viète.

> A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como Diofante possuíra; no entanto a álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares. Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a ‘ coisa’ numa equação com coeficientes numéricos específicos. (BOYER, 1996, p.208).

Para Viète (2006), há uma profunda relação entre equações e proporções e apresenta o que chama de regras fundamentais das equações e proporções, entre elas:

> 1. O todo é igual á soma das partes
> 2. Coisas iguais a mesma coisa são iguais entre si
> 3. Se iguais forem adicionados a iguais, as somas são iguais
> […]
> Uma regra soberana, outrossim, em equações e proporções, de grande importância através da análise, é essa:
> 15. Se há três ou quatro termos tal que o produto dos extremos é igual ao quadrado do meio ou o produto dos meios, eles são proporcionais. Inversamente.
> 16. Se há três ou quatro termos e o primeiro está para o segundo como o segundo ou terceiro está para o último, o produto dos extremos será igual ao produto dos meios.
> Assim, sobre a proporção pode ser dito que é composta a partir de uma equação e uma equação que se resolve em si mesma dentro de uma proporção. (VIÈTE, 2006, p.14).

Observam-se como tais regras podem ser aplicadas a diferentes grandezas, que sejam quantificadas.

Um conceito que é derivado do processo de resolução de equações é o de “polinômios”. Para que nascesse a ideia de polinômios (que se apresenta em Descartes), conforme Puig e Rojano (2004), foi necessário considerar que o processo de resolução de problemas não contemplava somente obter o resultado de um problema específico, mas conduzir sim a identificar formas canônicas que já se sabe resolver e desenvolver o cálculo com expressões para que recaiam em formas canônicas, mas isso requer um sistema simbólico em que as expressões sejam representadas de forma ainda mais precisa.

> A ideia da procura por formas canónicas então aparece devido à necessidade de reduzir o número de expressões (equações) que são produzidos como resultado da tradução de problemas em equações que já se sabe como resolver. (PUIG; ROJANO, 2004, p.196).

Para Milies (2004), os primeiros passos nesse sentido foram dados por Simon Stevin (1548-1620), que introduz uma notação facilitada às potências de uma variável, sendo que, por exemplo, $2x^3 + 5x^2$ seria escrito desta forma $2 \; 3 \quad 5 \; 2$.

Essa notação e as abstrações realizadas nesse momento histórico possibilitam a compreensão de que os métodos de resolução das equações estão relacionados ao grau da equação e não a seus coeficientes, e geram um novo objeto matemático, que na época Stevin chamou de multinômios, estudando a operação entre eles.

Dantzig (1970) chama de princípio de Harriot ao processo de transpor todos os termos de uma equação para um lado do sinal de igualdade e escrevê-la como P(x) =0, sendo P(x) um polinômio. Considera que esse princípio, depois apropriado por Descartes, que não deu a ele os devidos créditos, permitiu aperfeiçoamentos na técnica das equações, tendo também possibilitado que se estabelecessem relações entre coeficientes e raízes. Esse princípio também cria uma impressão de que as equações algébricas e as funções polinomiais são semelhantes, mas isso não acontece, pois as relações polinomiais também podem expressar identidades, ou mesmo incongruências (por exemplo: $0x^2 + 0x + c = 0$).

Assim, percebe-se o movimento contido no processo de constituição das equações que vai desde a necessidade de resolver problemas específicos do cotidiano e encontrar soluções até ser tratada como um objeto matemático para o qual se desenvolvem métodos gerais. Observa-se então que as equações são instrumentos da matemática, constantemente aperfeiçoados e desenvolvidos na experiência histórica humana.

Retomando, identifica-se que no reconhecimento da lei de formação de sequências, como instrumento da matemática para interpretar a realidade objetiva, observa-se a necessidade de reconhecer as grandezas e os movimentos regulares em busca de estabelecer uma relação que se mostra geral. A expressão dessa relação, de uma “lei de formação geral” permite que a regularidade seja compreendida e desenvolvida.

Da mesma forma, para reconhecer a essência do conhecimento algébrico nas ações de ensino sobre equações, também é necessário reconhecer grandezas e estabelecer relações entre elas. Entretanto, observa-se que no movimento histórico, inicialmente o objetivo era resolver uma situação, encontrar uma solução. Posteriormente, com o desenvolvimento das próprias equações como instrumentos e objetos da matemática, é que se dedicou à busca de reconhecer e expressar métodos gerais de resolução, o que levou à compreensão de que as grandezas poderiam ser tratadas abstratamente. Dessa forma, no ensino de equações é necessário que se reconheça a relação entre as grandezas em busca de encontrar um valor desconhecido ou gerar métodos de resolução, e que, nesse movimento, podem ser generalizados os objetos matemáticos e os métodos de resolução que dão conta de resolver situações particulares.

4.2.2 As equações no programa curricular

Neste item busca-se reconhecer como a essência do conhecimento algébrico é contemplada nas orientações curriculares sobre o ensino de equações. Conceitos como grandeza, variável, incógnita, igualdade e outros estão relacionados às equações. Entretanto, a ênfase dada ao ensino está mais próxima do que representavam as equações para os babilônios, um modo de achar um valor desconhecido em uma situação particular, sem relações com as proporções, como encaminhado por Viète, ou com os polinômios, apresentados de forma específica somente ao final do ensino médio. As dificuldades em compreender as equações como um instrumento da álgebra para resolver as situações faz com que os estudantes prefiram outras estratégias, por exemplo, recorrendo aos seus conhecimentos aritméticos.

Por outro lado, reforçam-se as diferentes técnicas para resolução de equações, para encontrar a solução de um problema específico, investindo em recursos e metodologias diferenciadas, como é o caso da balança, e não se proporcionam aos estudantes o que seria então sua essência, a possibilidade de, a partir de um problema particular, compreender no processo escolar, métodos que tratem das grandezas abstratamente e permitam efetivamente a generalização. Algumas das dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem da álgebra e pelos professores em seu ensino não seriam derivadas da organização do ensino de álgebra que procura apresentar esse conhecimento como produto e a partir de sua forma simbólica no estágio mais formalizado?

Para uma análise mais detalhada, será usada a proposta curricular do Estado de São Paulo, que atualmente é conduzida em todas as escolas da rede pública estadual. Nesse programa, o trabalho com equações e fórmulas é apresentado a partir da 6ª série, no volume 4 (SÃO PAULO, 2009a). Considera-se que "[…] a exploração de fórmulas é estratégia eficaz para introduzir o uso de letras em Matemática" (p.21).

Para os autores da proposta, "A distinção entre fórmula e equação é sutil. Ambas são sentenças matemáticas que envolvem uma igualdade e o uso de letras. O que caracteriza uma equação é o fato de ela sempre representar uma pergunta" (SÃO PAULO, 2009a, p.21). Entende-se na proposta que é mais fácil para o aluno manipular as letras na fórmula do que na equação. Espera-se que ele use os símbolos e represente a relação entre as grandezas de mais de uma forma. Por exemplo, $P = 4a$ então $a = P/4$, dominando a manipulação simbólica.

A partir desse entendimento apresentam-se na 6ª série fórmulas relacionadas à geometria: perímetro de um retângulo, área de um triângulo retângulo, entre outras, como média aritmética; fórmulas relacionadas à economia (cálculo de imposto), à saúde (índice de massa corporal - IMC), à física (distância) e outros.

Entende-se aqui que toda fórmula é necessariamente uma equação ao estabelecer uma igualdade na relação entre grandezas quando a ela estão atribuídos valores particulares, ou uma função no sentido em que se relacionam duas ou mais grandezas variáveis (havendo, entretanto, a necessidade de delimitar o campo de variação). A diferenciação de fórmula e equação estabelecida na proposta curricular (SÃO PAULO, 2009 a) é dada considerando que a equação "representa uma pergunta" cuja resolução gera uma resposta numérica ao valor desconhecido. A partir dos estudos do movimento histórico e lógico do conhecimento algébrico, considera-se nesta tese que a distinção entre fórmula e equação poderia acontecer pelo nível de generalidade alcançado. Assim, por exemplo, uma equação pode ser gerada para resolver uma determinada situação-problema proposta, ao identificar e relacionar as grandezas envolvidas expressando-as de forma geral e simbólica; entretanto, algumas equações têm um nível maior de generalidade no sentido em que atingem mais situações, objetos e fenômenos. É o caso da relação que se estabelece entre a área de um triângulo e sua base e altura. Tal relação é válida para todos os triângulos. Portanto, para qualquer situação que envolva áreas de triângulos, pode ser usada essa equação/fórmula, ao passo que é possível gerar uma equação que resolva o problema “Qual é o número cujo dobro somado com 3 resulta em 13?”, mas essa equação resolve esse problema particular, embora para outros problemas ainda que semelhantes, seja necessário gerar outras equações, e, portanto, tal equação não é reconhecida como uma fórmula.

Reitera-se que mesmo que se considere uma distinção entre fórmula e equação, estas contemplam a essência do conhecimento algébrico, novamente, identificar grandezas, estabelecer relações entre elas de forma geral. Acrescenta-se que nas equações, tais relações são expressas por meio de uma igualdade. O processo de manipulação técnica dos símbolos se torna mais “fácil” como indicado na proposta curricular, não porque se trata de uma fórmula ou equação menos geral, mas na medida em que se compreende o significado atribuído a cada um deles.

Ainda na 6ª série indica-se a introdução de alguns procedimentos e técnicas que permitem resolver equações de 1º grau. Por exemplo, a imagem da balança de pratos é usada como uma analogia a uma equação, baseados na “aproximação entre o **equilíbrio na balança** e a **igualdade na equação**” (SÃO PAULO, 2009a , p.30, grifo do autor) considerando que “[...] é um recurso que facilita a compreensão das transformações que podem ser feitas em uma equação, sem alterar a relação de igualdade entre os dois lados” (SÃO PAULO, 2009a, p.30) e uma “[...] excelente estratégia para introduzir as técnicas algébricas com significado” (SÃO PAULO, 2009a, p.30).

Por outro lado, considerando que a equação é vista como uma pergunta, “A forma de se perguntar em matemática é por meio de uma equação” (SÃO PAULO, 2009a, p.30), e entende-se que o estudante tem condições de resolvê-la, por meio do pensamento lógico e de seu conhecimento aritmético, realizando as operações inversas, sem que se apresente a técnica específica.

No volume 2 da 7ª série (SÃO PAULO, 2009b), são apresentados os produtos notáveis com significados geométricos. Destaca-se ainda que o produto da soma de dois números (x+a).(x+b) é uma situação que permite “[...] a construção de noções fundamentais aplicadas tanto á fatoração de trinômios quanto à resolução de equações de segundo grau pelo método conhecido como ‘soma e produto de raízes’” (SÃO PAULO, 2009b, p.22). Ressalta-se que é importante “[…] atribuir significado aos importantes conceitos de **valor numérico de um polinômio** e de **raiz de um polinômio** [...]” (SÃO PAULO, 2009b, p.34). Historicamente, o conceito de polinômio permitiu que as equações fossem padronizadas e destacassem a relação de identidade com o zero, por exemplo: ($ax^3 + bx^2 + cx = d = 0$). A partir disso, estabeleceu-se que as raízes das equações estão associadas ao grau da equação (e não aos seus coeficientes) e existem as relações entre os coeficientes e as raízes. Assim, a fatoração de um polinômio permite que a relação entre os coeficientes e suas raízes seja revelada, por exemplo: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$, onde um dos coeficientes indica a soma das raízes e outro coeficiente indica o produto das raízes.

No decorrer das orientações da proposta curricular, o processo de escrita de expressões algébricas é retomado e associado à área e ao perímetro de um retângulo, mas não se destaca mais o conceito de polinômio, mas sim o fato de que "[...] as equações quando fatoradas mantêm os valores de suas raízes" (SÃO PAULO, 2009b, p.37).

Continuando e com a intenção de aprofundar o trabalho com equações, o volume 3 da 7ª série (SÃO PAULO, 2009c) traz a análise de situações de transposição da linguagem materna para a linguagem algébrica, que normalmente induzem ao erro. É o caso do exemplo "Há seis vezes mais alunos do que professores", que, em geral, é escrita de forma errônea como 6A = P; sugere-se a verificação com recursos aritméticos como uma estratégia interessante para constatar o erro. Este é uma forma da representação da relação entre grandezas, mas onde está o problema para o estudante? Na representação ou na compreensão da relação estabelecida? Novamente destaca-se a necessidade de reforçar a identificação das grandezas e a relação entre elas. Nessa situação, as grandezas são "quantidade de alunos" e "quantidade de professores", que podem ser consideradas grandezas de mesma natureza, entretanto estão associadas a grupos de pessoas com funções diferentes (no caso, alunos e professores).

Espera-se ainda que na 7ª série o aluno tenha condições de resolver tecnicamente equações mais complexas, além de que "O aluno deve reconhecer nesse estudo que as equações constituem uma ferramenta importante para a representação e resolução de problemas cujo encaminhamento através de recursos aritméticos seria muito complicado" (SÃO PAULO, 2008b, p.15), e concorda-se com essa afirmação reconhecendo com a compreensão de que equações, assim como sequências e funções, são instrumentos da matemática para compreender e explicar os fenômenos e processos da realidade objetiva, e no processo de educação básica, assim devem ser tratados.

Ainda na 7ª série são estudados os sistemas de equações lineares, nos quais pretende discutir o significado das equações com duas incógnitas e os métodos de resolução de sistemas por meio da análise de situações-problema, posteriormente inclui-se a representação gráfica das equações com duas variáveis no plano cartesiano.

Ao final da 7ª série são discutidas as equações chamadas diofantinas com mais de uma incógnita, que possuem soluções inteiras positivas, na expectativa de que se encaminhe a discussão para: “1- estabelecer um critério de existência de solução que envolva diretamente a noção de máximo divisor comum; 2- estabelecer um algoritmo para encontrar as soluções quando elas existirem” (SÃO PAULO, 2008b, p.53)

Entende-se que tais discussões realizadas em sala de aula são importantes no sentido de identificar as necessidades históricas de determinar métodos gerais de soluções.

Durante o segundo semestre da 8ª série (9º ano), desenvolve-se o tópico de equações do segundo grau e espera-se que os estudantes “resolvam situações, inclusive geométricas, que possam ser traduzidas por meio de equações de 2º. Grau, obtendo as raízes por diferentes métodos e discutam o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta” (SÃO PAULO, 2009d, p.9).

Os procedimentos de resolução das equações são enfatizados e exigem conhecimentos de fatoração, exponenciação, radiciação. A resolução de problemas é sugerida, mas destaca-se sobre ela outro objetivo. “Além da proposição de problemas, essa unidade deve ter como objetivo a apresentação de uma síntese dos diversos procedimentos utilizados para a obtenção das raízes de uma equação quadrática” (SÃO PAULO, 2009d, p.9).

É compreensível que se assumindo a álgebra como a ciência das equações, o desenvolvimento dos procedimentos variados para resolução de equações seja enfatizado. Pode-se concordar que a manipulação desses procedimentos técnicos requer conhecimentos de fatoração, exponenciação e radiciação, que também são técnicos. A questão é qual a relação desse aperfeiçoamento técnico com a aprendizagem conceitual da relação entre as grandezas que a álgebra possibilita. Quanto mais diversificadas as técnicas mais o aluno tem condições de se apropriar do conceito? Compreendendo as equações como um instrumento da álgebra, pode-se associar que o aperfeiçoamento das técnicas aperfeiçoa o instrumento. Mas os estudantes tomam as equações como instrumentos matemáticos para interpretação de fenômenos da realidade objetiva?

O desenvolvimento histórico da busca de soluções para as equações algébricas é contemplado nas orientações para o professor no caderno do 3º ano do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2008c, p.9).

> A história da busca de soluções para tais equações, chamadas equações algébricas, é muito instrutiva. A partir dela, compreendemos mais facilmente as sucessivas ampliações nos conjuntos numéricos, dos números naturais até os números complexos, que viabilizam a atribuição de significado à raiz quadrada de um número negativo. Aprendemos também com a história que, a partir das equações de grau 3, a busca por uma fórmula envolvendo radicais que nos forneça as raízes, do mesmo tipo daquela que nos dá as soluções de uma equação do segundo grau […], não costuma ser o melhor caminho para resolver as equações de graus 3 e 4, e é um caminho inviável impossível de ser trilhado, para equações de grau maior ou igual a

> 5. O caminho mais conveniente, nesses casos, é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre as raízes.

Entretanto a última frase ainda ressalta a compreensão da equação como a tradução de uma pergunta e, portanto, associa que a mudança se dá pela análise qualitativa da pergunta, o que manteria a equação em seu *status* de resolução particular de um problema. O desafio em relação ao movimento histórico é justamente o de desvencilhar as equações dos problemas ou perguntas que lhe deram origem e encontrar métodos gerais de soluções para as equações de 3º grau ou maiores. Entretanto, a busca por esses métodos gerais foram historicamente limitadas por conhecimentos que já haviam sido apropriados sobre os campos numéricos, bem como pelas potencialidades e limitações oferecidas pela linguagem sincopada e simbólica.

O estabelecimento de formas canônicas das equações, que já se sabiam como resolver (DANTZIG, 1970), é que origina os polinômios e sobre eles se estabelecem de forma geral as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação. O reconhecimento histórico do desenvolvimento das equações algébricas e dos polinômios é apresentado em situações propostas para os estudantes que voltam a privilegiar as técnicas. A Figura 5 apresenta um exemplo.

Atividade 1 – Vamos resolver a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ seguindo os passos sugeridos no texto anterior para resolver a equação do 3° grau.

a) Divida os dois membros da igualdade por a, obtendo $x^2 + Bx + C = 0$, com $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$.

b) Substitua x por $y - \frac{B}{2}$ e verifique que a equação se transforma em $y^2 + C - \frac{B^2}{4} = 0$.

c) Mostre que, em conseqüência,

$$y = \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

Como $y^2 = \frac{B^2}{4} - C$, *segue o que se afirma.*

d) Substitua agora os valores de y, de B e de C em $x = y - \frac{B}{2}$, obtendo os valores de x. Você identifica, nos cálculos, a fórmula de Bhaskara?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e) Resolva a equação $3x^2 + 15x + 18 = 0$ seguindo os passos descritos nos itens anteriores.

a) Dividindo os coeficientes por 3, obtemos $x^2 + 5x + 6 = 0$; *b) substituindo x por* $y - \frac{5}{2}$, *obtemos* $(y - \frac{5}{2})^2 + 5(y - \frac{5}{2}) + 6 = 0$; *c) efetuando os cálculos, obtemos* $y^2 = \frac{1}{4}$, *ou seja,* $y = \pm \frac{1}{2}$; *como* $x = y - \frac{5}{2}$, *segue que* $x = -2$ *ou* $x = -3$.

Figura 5 – Situação apresentada no 3º ano do ensino médio.

Fonte: SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 3ª série: 2º bimestre. São Paulo: SEE, 2008. p. 14-15.

Não é tarefa fácil promover situações para os estudantes que considerem o movimento histórico e lógico dos conceitos. Entretanto, recolher os produtos desse desenvolvimento e apresentá-los, independente de estratégia metodológica, tampouco fará com que os estudantes atribuam sentido e significado a tais situações ou desenvolvam seu pensamento teórico e a compreensão da constituição do conhecimento humano em seus avanços e retrocessos, em seu movimento.

4.2.3 As equações sob o olhar dos professores

Durante o curso de atualização com os professores, ao serem apresentados a registros históricos referentes à álgebra retórica, sincopada, simbólica e geométrica, principalmente durante o quinto encontro, evidenciou-se a carência que existe no processo de formação de professores de discussões históricas e filosóficas sobre o processo de elaboração do conhecimento, e consequentemente, neste caso em particular, do processo de formação de conceitos algébricos. Diferentes momentos da história da álgebra, entre outros registros históricos, foram tratados como conhecimentos "novos" para eles ou sobre os quais nunca haviam refletido. Sem a apropriação ou a discussão do processo de desenvolvimento do conhecimento algébrico, os professores lidam em sala de aula com a álgebra simbólica, como produto desse desenvolvimento, no seu estágio mais sistematizado e formalizado.

Durante as discussões do curso, os professores identificaram dificuldades epistemológicas no processo de aprendizagem dos estudantes sobre equações. Outras possibilidades de organização do ensino podem ser reveladas se houver a compreensão pelo professor do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

O professor Antônio, em depoimento, expõe suas dificuldades ao usar como estratégia para o ensino de equações a analogia "da balança".

> Na verdade, eu pensei que a atividade ia alavancar o conhecimento da álgebra, mas você percebe que os alunos ficam meio dependentes de você então assim você passa a situação para eles parece que mentalmente eles conseguem elaborar ali, chegar na resposta porém na hora que você precisa passar aquilo pra álgebra, parece que eles vem e te pedem uma ajuda ali então, eu não sei, é uma atividade que particularmente, eu, não funciona muito bem pra mim, isso é o que eu sinto, me parece que eles não tem ainda o conceito de variável, de incógnita e na hora que vai partir para uma atividade dessa, ele chega na resposta, mas na hora de passar isso pra álgebra eu não tenho bons resultados. (Antônio, A26, AV1, 01:08:50).

A analogia da "balança" com a equação pauta-se sobre o pressuposto do equilíbrio dos lados da balança e o equilíbrio dos dois lados da igualdade. Na equação, cada um dos membros da igualdade deve ser mantido para que a igualdade não se desfaça, não se "desequilibre". Nesse caso, a ênfase é esclarecer que para cada movimento realizado em um dos lados da balança (um dos membros da igualdade), seja este de adição ou subtração de objetos, deve ser também realizado no outro lado da balança (no outro membro da igualdade) para que o equilíbrio se mantenha. Como qualquer procedimento metodológico, esse tem suas potencialidades e limitações e é necessária a conscientização a esse respeito. Tal procedimento torna palpável o movimento e a relação a ser estabelecida entre as quantidades na balança; é um caso singular, sobre o qual ainda são necessários processos de abstração e generalização para que a sua representação escrita adquira sentido e significado. A percepção permitida pelo esquema da balança é apenas um dos estágios de formação do conceito.

Roque (2013), em sua análise da história da matemática, escreve a respeito de um texto de Jean-Robert Argand, francês, do início do século XIX, que tratava do risco de ter que questionar vários importantes resultados algébricos se as quantidades negativas fossem ignoradas. Nesse texto, Argand propõe a balança como uma construção capaz de assegurar "realidade" aos termos negativos. Para tanto, supõe uma balança com certa quantidade de pesos "a" em um dos pratos. Considera então a possibilidade de tirar uma quantidade "a" de cada vez, e afirma que, ao chegar a zero, para continuar "tirando", basta acrescentar a quantidade "a" no outro prato da balança e dessa forma introduz uma noção relativa de que retirar de um prato significa acrescentar ao outro. Mas essa noção de uso da construção da balança para o trabalho com números negativos não está apropriada pelo professor cujo relato foi analisado.

Por outro lado, as equações são usadas como instrumento para resolução de algumas situações-problema. Entretanto, é necessário, nesse caso, reconhecer as grandezas envolvidas na situação e estabelecer uma relação entre elas, que será então representada usando uma linguagem de símbolos matemáticos. Em função dessa necessidade de representação, as equações podem vir a ser confundidas como uma tradução em linguagem matemática de uma situação escrita em linguagem comum; em que se trocam palavras por símbolos, sem que se destaque a necessidade de reconhecer as grandezas que dela fazem parte e como se relacionam, perdendo, portanto, o significado da situação.

Nesse sentido, especificamente em relação às equações, os professores participantes destacaram, por exemplo, uma análise crítica sobre uma afirmação contida no Caderno do Professor da 6ª série (7º ano).

> Uma equação nada mais é do que uma pergunta feita em linguagem matemática, usando números, letras e o sinal de igualdade. A existência de uma letra cujo valor

> se quer descobrir (incógnita) é o que faz da equação o equivalente a uma pergunta na língua materna. Mesmo dentro de um contexto exclusivamente matemático, uma equação como 2x +3 = 13 pode ser entendida como uma pergunta do tipo: qual é o número cujo dobro somado com 3 resulta em 13? (SÃO PAULO, 2010a, p.29).

Em sua análise. a professora escreve a respeito que:

> Seria mais adequado dizer que ela pode ser interpretada como uma pergunta, conforme aparece no final do parágrafo, entretanto o ideal é propor situações de aprendizagem que proporcionem a construção do conceitual de equação. Apresentar imediatamente a definição e representação da mesma é pular uma fase do processo de desenvolvimento que a história da matemática ensina que compreender os conceitos de variável e incógnita foi difícil para a humanidade e que a utilização das letras para representa-las surgiu muito após sua compreensão. (Angélica, RE12).

Ainda que a análise da professora também não esteja carregada de argumentos que justifiquem uma crítica a essa afirmação, há indícios de que ela compreende que tratar a equação como uma pergunta simplifica o próprio conceito. Se o que se pretende é que o aluno resolva a equação, determine o valor da incógnita como era a necessidade dos babilônios, dos egípcios e dos gregos antigos, o recurso metodológico de compreender a equação como uma pergunta é viável; entretanto, associar que uma equação é uma tradução em linguagem matemática de um problema desconsidera toda a generalidade que o registro simbólico tão dificilmente conquistado pela humanidade permite atualmente, no sentido em que se corre o risco de trocar palavras da linguagem comum por símbolos.

Nesse movimento, a essência da álgebra não estaria contemplada como objeto de ensino, pois o foco se tornou “traduzir” o problema em linguagem matemática, e não reconhecer e identificar as grandezas envolvidas, e suas relações.

Outra professora, analisando situações de ensino de equações do segundo grau apresentadas no Caderno do Aluno da 8ª série/9º ano (SÃO PAULO, 2010b), descreve suas experiências com os estudantes quando apresenta as situações-problema indicadas no caderno da proposta. Ressalta que aritmeticamente há a compreensão pelos estudantes, mas as dificuldades surgem no momento do registro simbólico. Relata ainda que, após a apresentação de algumas situações-problema, os exercícios do caderno passam a ser de resolução técnica de equações::

> Ele traz a ideia de trabalhar a técnica, e estávamos na discussão de quanto a técnica faria que o aluno entendesse realmente a situação, […]esta seria uma ideia para introduzir o conceito de equação com o aluno acho que até ai tudo bem, mas daqui pra frente… mas aí na pagina 6 e 7 ele já vai trazendo uma série de equações […] e assim é um exemplo de cada para o aluno aplicar técnica uma vez e se apropriar daquela forma de resolução. Então eu acho que fica um pouco jogado[…]e eu não queria ficar presa só nisso, eu acho que uma equação deste tipo não é de jeito nenhum suficiente para que o aluno se aproprie daquele conceito, mesmo da técnica,

> e eu estava tendo que ficar presa nisso, eu não vou ficar, mas era imposição, aqui a partir de agora, começa a usar técnica, técnica, técnica, e as situações problemas mesmo ficam um pouco de lado[…]acho que são poucas a gente não aprende fazendo 5 exercícios, a gente tem que aprimorar bastante então acho que falha neste sentido[…]quebra e passa pra outra como se quebrasse ali o conhecimento do aluno para o aluno começar nova técnica, esquece essa […] tem situações muito interessantes, bem contextualizadas, mas insuficientes para o aprendizado do aluno[…]e aí a compreensão do conteúdo, da equação em si, fica um pouco perdida. (Helena, I5, IV2, 00:06:10).

O que essa professora analisa é o papel da técnica e do conceito de equação no ensino. O privilégio da técnica lhe causa um desconforto, inclusive por perceber as dificuldades de aprendizagem de seus estudantes que não atribuem sentido ao que estão realizando. O desenvolvimento de técnicas de resoluções de equações e de sistemas de equações constitui boa parte do programa curricular. Corre-se o risco de serem desenvolvidas como manipulações de símbolos, e nesse caso, não se tornam instrumento da matemática para os estudantes resolverem as situações-problema.

O equilíbrio a ser atingido no ensino entre a técnica e os conceitos, sejam eles de equações, ou outro, depende da compreensão do desenvolvimento histórico desse objeto do conhecimento. O movimento do processo de conhecimento abrange tanto momentos em que as equações foram usadas como instrumentos para resolver situações-problemas específicas, bem como momentos em que foram estudadas como objeto da ciência para representar e resolver qualquer tipo de problema.

4.3 FUNÇÕES

4.3.1 O movimento histórico e lógico de funções

No movimento humano de resolver as situações-problema, que se tornam cada vez mais complexas, é possível observar a necessidade de reconhecer as grandezas envolvidas na situação que se pretende resolver e também a necessidade de relacionar tais grandezas, contemplando a sua variação, o que nem sempre é possível quando é feito o registro somente por meio de equações.

Youschkevitch[21] (1976 apud MORETTI; MOURA, 2003) indica três estágios de resolução de problemas envolvendo variações de quantidades. No período da Antiguidade (em especial gregos e babilônicos), usam-se casos particulares que indicam a dependência entre duas variáveis e não existe a noção de quantidade variável, ou funções. No período da

---

[21]YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of exact sciences**, v. 16, n.1, p. 37-85, 1976.

Idade Média, tais noções são expressas de forma geométrica e mecânica e a dependência entre variáveis é representada por linguagem comum ou por um gráfico. A partir do século XVI, considerado como o período Moderno, é que o conceito de função adquire destaque e usam-se expressões analíticas para representá-lo. Conforme Moretti e Moura (2003, p. 69), “Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de função”.

Pode-se considerar que no período da Antiguidade, a necessidade principal era a de encontrar os valores indeterminados em uma situação-problema ou elaborar tabelas de registros numéricos (raízes quadradas, cúbicas e outros). Além disso, os sofistas (século IV a.C.), em especial Sócrates e Platão, seguem sua natureza idealista e tendem a abandonar a realidade sensível, desvalorizando as explicações científicas de base materialista:

> O pensamento grego dominante aparece invadido pelo horror da transformação, e daí resulta o horror do movimento, do material, do sensível, do manual. O homem de elite rejeita o manual, o mecânico, e exalta o bem e a virtude, de cuja procura, faz o fim máximo do homem. (CARAÇA, 1952, p.189).

A partir do século XI, e por toda a Idade Média, as condições históricas, sociais e econômicas e o desenvolvimento das cidades geram transformações e outras necessidades. As necessidades (pelas guerras e pelas navegações) tornam os homens construtores de seus próprios instrumentos, e cada vez se torna mais necessário um estudo quantitativo (medir e prever). E a Idade Média se caracteriza “por dar uma explicação quantitativa racional aos fenômenos naturais, através de processos de abstração, os quais se verão fortemente negados, devido a dissociação entre número e grandeza” (FARFAN; GARCIA, 2005).

Dessa época, Ponte (1992) destaca o matemático francês Nicole Oresme (1323-1382), que desenvolveu uma teoria geométrica de latitudes e trabalhava com ideias gerais sobre variáveis dependentes e independentes. Em seu trabalho escrevia leis naturais que descreviam uma quantidade como dependente de outra e gerou um pano de fundo para o desenvolvimento do conceito de função.

Nesse movimento e durante todo o período renascentista, a verdade está ligada à observação e experimentação. Conforme Caraça (1952), uma formulação precisa deste modo filosófico se encontra em Leonardo da Vinci (1452-1519). Este não se limita ao empirismo e afirma que só a experimentação não chega, sendo necessária a demonstração matemática. Os movimentos físicos são destacados e se torna necessário um instrumento que permita que esses movimentos sejam descritos. A lei quantitativa é fundamental, e o conceito de função surge como instrumento necessário para o estudo da nova realidade científica.

Necessidades de gerar um quadro explicativo dos fenômenos da realidade levaram Galileu (1564-1642), por meio de mecanismos experimentais, a avançar com o conceito de função na tentativa de relacionar causa e efeito dos fenômenos físicos. Para ele, a melhor maneira de entender os fenômenos é mostrando como eles funcionam de modo mecânico. Muitos de seus desenvolvimentos teóricos baseavam-se em conhecimentos de artesãos, arquitetos e engenheiros do século XVI, que atendiam as necessidades impostas pela guerra, e, por exemplo, o aumento do alcance do telescópio deu-se mais como uma ferramenta para a marinha militar do que como um instrumento para a Astronomia (ROQUE, 2013). Os estudos matemáticos que relacionavam álgebra e geometria e a notação criada por Viète (1540–1603) potencializavam as possibilidades de expressar a noção de função. “De acordo com Galileu, para estudar um fenômeno, é necessário medir quantidades, identificar regularidades e obter relações representadas por descrições matemáticas tão simples quanto possíveis” (PONTE, 1992, p.4).

O estudo da natureza pedia uma linguagem matemática apropriada. O estudo do movimento da queda dos corpos, do movimento dos planetas e dos movimentos curvilíneos impulsionou o desenvolvimento do conhecimento matemático relativo às funções. Observa-se, por exemplo, que no estudo do movimento de queda livre importava mais analisar como o corpo caía e não por que caía, sendo necessário relacionar umas grandezas às outras, que em geral eram representadas geometricamente. Nesse caso da queda livre, o espaço percorrido pelo corpo foi relacionado ao tempo por intermédio da velocidade, o que só foi possível porque, para Galileu, a velocidade era uma grandeza, e não atributo de um corpo, como entendiam os medievais (ROQUE, 2013).

No século XVII, por meio do nascimento da geometria analítica, a relação entre duas grandezas variáveis é representada graficamente por Rene Descartes (1596–1650). Conforme Roque (2013), ao traduzir os problemas geométricos em linguagem algébrica, Descartes visava a compreender melhor a relação entre as grandezas do problema. Ao usar os eixos do hoje conhecido plano cartesiano, possibilitou que as equações com incógnitas x e y transformassem-se em um meio para representar a dependência entre duas quantidades, geometricamente representadas por curvas. As funções são então representadas por sequências de pares ordenados como pontos no plano cartesiano (FARFAN; GARCIA, 2005).

A intensidade dos estudos e cálculos sobre curvas geométricas e suas propriedades, bem como das tangentes e áreas respectivas, permitem a Newton e Leibniz contribuírem com o desenvolvimento do “cálculo” como parte da matemática e das funções. Observam-se como as mudanças de quantidade revelam as mudanças qualitativas com o apoio dos elementos da geometria analítica. É possível, por exemplo, verificar como as mudanças quantitativas, das coordenadas cartesianas de uma circunferência, a modificam e definem uma elipse.

A formalização do conceito de função e o rigor com a linguagem matemática fez com que Leibniz introduzisse vários termos (constante, "variável" e "parâmetro") e símbolos e usasse o termo função pela primeira vez em 1673, associado à dependência de quantidades geométricas em uma curva.

A necessidade de um termo para representar quantidades, que eram dependentes de uma variável, aumentava e, entre 1694 e 1698, Leibniz e Bernoulli usaram o termo função associado à quantidade que é composta de variáveis e constantes (PONTE, 1992).

As funções são instrumentos para estudar problemas que envolvem variação. Em sua origem, o conceito de função está associado à noção de lei natural (PONTE, 1992). Durante os séculos XVII e XVIII, o conceito de função carrega três elementos essenciais, conforme Ponte (1992): a notação algébrica; a representação geométrica; e a conexão com problemas do mundo físico. Posteriormente, o conceito de função ganhou vida própria e não estava associado diretamente a sua representação algébrica ou geométrica nem a problemas físicos.

A definição formal de função não mais associada à geometria, mas sim à álgebra, é atribuída a Leonard Euler (1707–1783), matemático suíço que utilizou pela primeira vez a notação f(x) associada a toda a quantidade que depende de x variável. A partir daí, o conceito de função passa a ser associado fortemente à sua expressão analítica.

Ainda no século XVIII, a função em sua expressão analítica, também associada às ideias infinitesimais de Leibniz, torna-se o instrumento matemático para analisar os fenômenos físicos. Euler ainda avança no sentido de generalizar o conceito de função e em seus estudos de análise infinitesimal, define que:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, como se quer que seja, de dita quantidade e de números ou quantidades constantes, e as quantidades sobre as quais se opera: Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou, se quiser uma quantidade universal que compreende todos os valores determinados […]. Um valor determinado qualquer pode expressar-se por um número, e daqui se segue que uma quantidade variável compreende todos os números, qualquer que seja sua natureza. Sucede com a quantidade variável como com o gênero e a espécie em relação aos indivíduos; pode conceber-se como abarcando todas as quantidades determinadas. (EULER, 1748[22] apud FARFAN; GARCIA, 2005, p.2).

No século XIX é que apareceu o significado mais amplo de função, definido por Peter Dirichlet, em 1829, que considera a função com y sendo variável dependente com os seus

[22]EULER, L. **Introduction in Analysin Infinitorum**. 1748.

valores fixos ou determinados por uma regra dependendo dos valores atribuídos à variável independente x, tratando inclusive de funções que carregam descontinuidades, considerando-as em seus intervalos. Além disso, a função, como conceito e objeto matemático, continua a ser usada de forma cada vez mais generalizada por outros matemáticos, como Cauchy (1827); Lobachevsky (1834), Riemann (1858) e outros.

Freudenthal (1983) escreve que ainda que se atribua o aparecimento da palavra função a Leibniz e Bernoulli e que os primeiros símbolos de funções se destaquem com Euler e D'Alembert; entretanto considera que "A história de um conceito matemático começa bem antes de que lhe seja dado um nome" (FREUDENTAL, 1983, p.516). Também destaca que "Ainda que esta definição esteja construída de uma maneira logicamente formalizada, sem dúvida, se há obscurecido seu significado essencial como ação de relação de variáveis, se perdeu seu caráter dinâmico para transformar–se em algo puramente estático" (FREUDENTHAL, 1983, p.497).

Assim, o conceito atual de função e sua notação simbólica é fruto de muitas generalizações que foram sendo realizadas ao longo da experiência histórica da humanidade. Além disso, muitos outros conceitos matemáticos se desenvolveram e se generalizaram a partir do conceito de função.

Considerando que os conceitos, inclusive os matemáticos, surgem das necessidades humanas, é possível compreender por que um conceito como o de função não surge, por exemplo, na época dos gregos. A fuga do movimento e do infinito torna impossível à elaboração do conceito de variável como é conhecida hoje e, consequentemente, do conceito de função como instrumento para captar o movimento quantitativo da realidade objetiva.

Entretanto, a periodicidade relacionada à posição dos corpos celestes já era estudada há muito tempo, por exemplo, com as tabelas babilônicas de astronomia. Segundo Freudenthal (1983, p.517), "A interpretação do movimento celeste em funções – é um convite histórico natural para constituir mentalmente funções e continuidade".

A formação das cidades e a nova qualidade da sociedade com a aceitação do movimento dos fenômenos permite que tais conceitos se desenvolvam. Newton, em seu *Tratado da Quadratura das Curvas* (apud CARAÇA, 1952, p.203), apresenta sua concepção de fluência e revela o movimento:

> Considero aqui as quantidades matemáticas, não formadas pela adjunção das partes mínimas, mas descritas por um movimento contínuo. As linhas descritas, e portanto geradas, não por aposição de partes, mas pelo movimento contínuo de pontos; as superfícies pelo movimento de linhas; os sólidos pelo movimento das superfícies; os ângulos pela rotação dos lados; o tempo por um fluxo contínuo, e assim para as

> outras. Estas gerações tem verdadeiramente lugar na natureza das coisas e revelam-se todos os dias no movimento dos corpos.

Da mesma forma como acontece com outros conceitos, sejam eles matemáticos ou não, eles não nascem com a generalidade que nas épocas atuais lhe atribuem, mas vão se constituindo na experiência histórica da humanidade. Acompanhando o movimento histórico e lógico se reconhece e valoriza o desenvolvimento de um conceito e não somente o estágio em que se encontra em determinada época.

Essa compreensão contribui com elementos a serem considerados no ensino de um determinado conceito. Reitera-se que isso não acontece no sentido de que a ontogênese (o processo de apropriação do conceito pelo sujeito) deva repetir as etapas da filogênese (o processo de desenvolvimento histórico do conceito), mas no sentido de se tornar possível captar o que é realmente essencial do conceito para destacá-lo como objeto de ensino.

No caso da função, é importante compreender como esse conceito, que hoje é um instrumento, se constitui pelo estudo das leis quantitativas da natureza, mas visto como produto é confundido somente com sua expressão analítica e a representação das variáveis de forma geral.

Para Caraça (1952, p.129), o conceito de função é entendido "como o instrumento próprio para o estudo das leis". Esse autor se refere à lei como sendo "toda regularidade de evolução de um isolado" (p.120). O isolado por sua vez é um recorte da totalidade, que não pode ser compreendida de uma única vez. Esse isolado, apesar de recortado de forma arbitrária, contém componentes que possuem relações de interdependência e permitem o estudo do fenômeno do qual ele foi recortado. A ocorrência de inesperados indica a necessidade de recorte de novos isolados, que, por vezes, provocam a necessidade de formação de cadeia de isolados, dos quais um é superior ao outro.

Entre os componentes do isolado sempre existem relações de interdependência, e a cada uma dessas relações correspondem o que Caraça (1952) chama de qualidade. Assim não existem qualidades intrínsecas a um objeto ou fenômeno, mas estas são consideradas em relação a outro objeto ou fenômeno. Se a essas qualidades podem ser atribuídos diferentes graus de intensidade ("mais que", "menos que", "maior que" e outros), então admitem a variação conforme a quantidade. Nesse sentido, a quantidade, como atributo da qualidade, não necessariamente significa a possibilidade de contar ou medir. Por exemplo, a qualidade coragem admite uma variação conforme a quantidade (mais ou menos corajoso). Para Caraça (1952, p. 117), a possibilidade de medir a quantidade tem significado histórico:

> A questão de saber se a variação da quantidade é ou não susceptível de medida não tem significado absoluto, mas apenas significado histórico; - num dado momento, em determinado estado de avanço das ciências da Natureza, pode aprender-se a medir o que até aí era impossível.

Nesta tese se define que grandeza é esta qualidade atribuída a um objeto ou fenômeno. Assim, um objeto possui grandezas, como altura, comprimento, velocidade, massa e outros, ou a um fenômeno, como o terremoto, também podem ser atribuídas grandezas, como intensidade, grau de destruição e outros.

Compreendendo então que o papel da ciência é construir quadros explicativos dos fenômenos naturais, que estão em permanente movimento e evolução, Caraça entende a necessidade de tomar um isolado, ao qual correspondem algumas qualidades e que "explicar um fenômeno é dar o porquê da alteração das qualidades" (CARAÇA, 1952, p.119), em busca de regularidades que permitam a repetição e a previsão, tão necessárias para o domínio da natureza pelo homem. Por isso, considera a lei natural como sendo a regularidade de evolução do isolado. Tais leis podem então ser qualitativas ou quantitativas ou ainda qualitativo-quantitativas. Considera ainda que há uma tendência para o primado da lei quantitativa, em todos os ramos do conhecimento.

A lei quantitativa se revela na correspondência entre dois conjuntos, para a qual a função é então o instrumento a que se recorre. A manipulação da função como instrumento matemático só é possível com o conceito de variável que, para Caraça, é o símbolo representativo de qualquer elemento de um conjunto numérico, e permite alcançar a generalidade sem se restringir a casos particulares expressos em tabelas de números. A variável é para Caraça (1952, p. 127), "o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela".

A variável está associada a um isolado (o conjunto) superior ao do número. Caraça também destaca que só é possível introduzir o conceito de variável na ciência quando se superam as ideias que concebem a "permanência" na realidade. Assim, a correspondência unívoca entre duas variáveis que representam conjuntos numéricos é a essência desse instrumento. Para $y=f(x)$, x é a variável independente e y, a dependente. Ressalta ainda que o conceito de função não pode ser confundido com sua expressão analítica, que é apenas um modo de estabelecer a correspondência entre as variáveis, o que também pode ser feito de forma geométrica. Assim, o próprio conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre suas expressões analíticas e as formas geométricas.

O conceito de função é fundamental para muitos outros campos matemáticos, por exemplo: a análise matemática estuda as propriedades e lida com funções de “n” variáveis. No cálculo diferencial e integral, os elementos desconhecidos são funções; a análise numérica estuda o controle de erros de avaliação de diferentes tipos de funções. No caso do desenvolvimento da álgebra, continua a lidar com as operações e relações entre funções. (PONTE, 1992).

Em síntese, por meio desse estudo do movimento histórico e lógico das funções, é possível reconhecer a essência da álgebra, isto é, a relação entre as grandezas de forma geral. Assim, é essencial para o processo de ensino de funções, incorporar a identificação entre as grandezas, a busca por regularidades que possam ser generalizadas, o estabelecimento de relação entre as grandezas contemplando a variação delas.

No movimento histórico e lógico, observa-se a modificação do conceito de função e de variável. Inicialmente e ainda não nomeados se reconhece o estabelecimento de relações entre grandezas físicas que variavam e eram interdependentes, com a elaboração de tabelas numéricas para o registro da variação. Posteriormente, a associação de conhecimentos algébricos e geométricos permite que a variável seja reconhecida como as qualidades de uma curva e, portanto, enfatiza-se o significado geométrico. No estágio atual, a expressão analítica, a linguagem simbólica, abriga o conceito de função e permite que se estabeleçam relações entre grandezas variáveis de naturezas distintas (numéricas, matriciais, vetoriais e outras).

É necessário destacar ainda a importância do processo de generalização da relação entre essas grandezas para a compreensão do conhecimento algébrico. Assim, o estágio atual simbólico não se caracteriza somente por um estágio de mudança da linguagem, mas sim como um estágio que carrega em si, e de forma sintetizada, o processo de estabelecimento de relações entre grandezas de forma geral, desenvolvido ao longo da história humana.

4.3.2 As funções nos programas curriculares

A ênfase no estudo de funções como tópico do ensino de matemática é indicada pelo NCTM (1989). A noção de função pode ser trabalhada em situações em que se analisa a dependência das grandezas, se trabalha com tabelas, sistemas de coordenadas. Felix Klein (1849-1925) considera que o pensamento funcional é a ideia central do ensino de matemática (EISENMANN, 2009).

Na proposta curricular do Estado de São Paulo (2008), as funções são apresentadas aos estudantes a partir do volume 2 do 1º ano do Ensino Médio. Nesse momento, elas são apresentadas como relações de interdependência entre grandezas.

> Duas grandezas x e y podem variar de modo interdependente, de tal forma que seus valores assumam valores inter-relacionados. Quando, deixando variarem livremente os valores de uma grandeza x, notamos que os valores de outra grandeza y também variam de tal forma que a cada valor de x corresponde um e somente um valor de y, então dizemos que y é função de x; dizemos ainda que x é a variável independente e y é a variável dependente. (SÃO PAULO, 2009e, p.3).

Identificam-se então o que seriam as grandezas diretamente proporcionais e a manutenção do valor constante da razão entre elas, para que surja a função de 1º grau. Seguem-se exemplos de funções que relacionam grandezas diretamente proporcionais e o estudo do gráfico desse tipo de funções. Introduz-se a expressão analítica f(x) = ax + b e recorre-se a mais exemplos para compreensão dos elementos da função de 1º grau também a partir do estudo de problemas e gráficos.

A função de segundo grau é introduzida de forma semelhante com exemplos de relações de interdependência entre duas grandezas x e y em que y é diretamente proporcional ao quadrado de x e estudam-se os deslocamentos horizontais e verticais no gráfico da função. Discute-se também o vértice, as raízes da função e apresentam-se situações-problema de máximos e mínimos.

Ainda no 1º ano do Ensino Médio no volume 3 (2009f), apresentam-se as funções exponenciais e logarítmicas e busca-se a articulação entre elas, considerando que se distinguem por uma troca de posição entre as variáveis. Em $y = a^x$, x é a variável independente; em $x = \log_a y$, y é a variável independente e tem-se a função logarítmica. Apresentam-se situações concretas envolvendo exponenciais e logaritmos Entende-se ainda que a função exponencial auxilia a descrição de fenômenos de natureza não linear. Espera-se que os alunos assimilem as características básicas dos gráficos das funções em relação aos momentos em que são crescente ou decrescente. Sugere-se a construção do gráfico da função exponencial e da logarítmica em um mesmo eixo para que se perceba a simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares

No volume 1 do 2º ano do Ensino Médio, o foco são as funções trigonométricas e há uma preocupação em que os alunos percebam a necessidade desse estudo. Entende-se que as funções trigonométricas podem ser apresentadas a partir de experimentos e permite analisar a periodicidade de diversos fenômenos. Sugere-se inverter a forma de tratamento que apresenta o estudo dos gráficos y = senx e y = cosx após o estudo de equações e inequações. Entende-se que “A inversão, nesse caso, com o estudo das funções sendo realizado concomitantemente ao dos demais conceitos, permitirá associações explícitas entre a periodicidade observada e o modelo matemático escolhido, de maneira que o estudo poderá desenvolver-se sobre contextos significativos para os alunos” (SÃO PAULO, 2008e, p.9).

Assim, inicia-se o processo de aprendizagem apresentando movimentos periódicos, em particular do movimento do Sol, acompanhando a sua periodicidade medindo-se o comprimento da sombra.

No volume 3 do 3º ano do Ensino Médio, retomam-se o estudo de funções de forma ainda mais sistematizada principalmente em relação à construção dos gráficos e a compreensão de formas de crescimento e decrescimento. Entende-se que “Com isso, a possibilidade de utilização de funções para a compreensão de fenômenos da realidade concreta será ampliada, e os alunos poderão apreciar com mais nitidez a riqueza da linguagem das funções” (SÃO PAULO, 2008d, p.10).

Sugere-se, para tanto, um olhar “funcional” para a construção de gráficos das funções, isto é, que eles não sejam construídos ponto a ponto no plano cartesiano, mas a partir de translações, ampliações, reduções e outras transformações dos gráficos básicos das funções já conhecidas. Além disso, espera-se que o estudo dos gráficos permita a visualização das variações entre as grandezas e a identificação de intervalos de crescimento e decrescimento, e pontos de máximo e mínimo.

4.3.3 Em busca de nexos conceituais do tópico “funções”: no curso com professores

Durante o curso de atualização com os professores, uma das ações propostas foi a de organizar um mapa conceitual sobre o tópico[23] funções. Destacando o movimento da pesquisadora como sujeito da pesquisa, pode-se analisar que, apesar de usar a expressão “mapa conceitual”, na verdade, se pretendia é que durante a discussão com os professores fossem revelados os nexos conceituais compreendidos sobre as funções. Entretanto, por considerar que “nexos conceituais” ainda não faziam parte do vocabulário dos professores, foi usada a expressão “mapa conceitual”.

Outro destaque a ser feito da posição da pesquisadora de “sujeito da pesquisa” é de que no momento de organização, planejamento e realização do curso com os professores, pressupunha-se a importância do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos para a

[23]Optou-se por fazer referência ao termo funções como “ tópico” e não como “conceito” na análise das propostas curriculares e da fala dos professores, por se considerar que é no processo em movimento que será possível reconhecer como realmente as funções têm sido tratadas no processo de ensino.

organização do ensino. Entretanto, não havia clareza em relação ao papel da essência do conhecimento algébrico, conforme apresentado no capítulo 4 desta tese. Portanto, as questões feitas aos professores e as interferências nas discussões também revelam o movimento da própria pesquisadora na apropriação e compreensão do movimento histórico e lógico do conhecimento algébrico e sua essência.

A orientação inicial dada aos professores foi a de que divididos em subgrupos criassem uma lista de palavras-chave relacionadas ao estudo de funções. Inicialmente separados em duplas e em trios, os professores escreveram palavras que em sua concepção estivessem associadas à noção de função. Foi explicado que as palavras deveriam ser escritas uma em cada folha para que depois conjuntamente fosse elaborado o mapa, estabelecendo as relações entre tais palavras. Nesse momento, as professoras já haviam iniciado a leitura do texto de Caraça (1952), proposto no curso, e, portanto, foi possível perceber influências desse texto sobre as palavras que elas escreveram.

O subgrupo 1 registrou as seguintes palavras Conjuntos numéricos, Grandezas, grandezas dependentes(relações, regularidades), expressão que representa essa dependência ou regularidades, consequências (previsões). Esse subgrupo, a partir de uma de suas integrantes, também acrescentou outras palavras, e em sua fala destacaram:

> A Emília que colocou, ela começou a falar assim, mais ou menos seguindo o raciocínio do texto que elas leram (Caraça), então a qualidade e a quantidade, a qualidade seria a interdependência das grandezas, a quantidade seria o registro numérico da coisa, a intensidade – aí ela pensou no conjunto numérico e a relação, a tal da interdependência. (Mônica, F26, FV7, 00:01:00).

Então, esse mesmo grupo acrescentou as palavras “qualidade”, “quantidade”, “conjuntos”, “relações”.

O subgrupo 2 registrou: “identificação de variáveis”, “dependência”, “análise dos resultados de gráficos e tabelas”, “proporcionalidade”.

O subgrupo 3 registrou as seguintes palavras: “dependência”, “relação($=, \neq$)”, “proporcionalidade”, “representação de grandezas”, “variação”, “constante”.

A partir desses registros foi solicitado aos professores que organizassem um único mapa com as relações possíveis entre as palavras. Surgiram vários questionamentos originados para a concretização das relações na forma de um mapa. A intenção era a de revelar as abstrações iniciais dos professores sobre o conceito de função, e é possível perceber o quanto é oscilante a compreensão sobre a constituição dele. Nesse momento de trabalho com eles, foi possível observar o quanto é necessário investigar no movimento histórico e lógico dos conceitos e promover discussões entre os professores. A concepção dos professores sobre funções gira em torno de algumas noções que podem ser consideradas cristalizadas (grandezas, variáveis, conjuntos e outros). Entretanto, quando se aprofundam as discussões, é possível perceber que tais concepções possuem muitos pontos que convergem, mas que também divergem e isso influencia diretamente na organização do ensino.

Assim, considera-se que os questionamentos derivados durante a discussão são mais relevantes para esta análise do que o mapa final que foi produzido em dois momentos pelas professoras.

O primeiro questionamento dos professores para iniciar a construção do mapa estava relacionado ao uso da palavra “conjuntos” ou “conjuntos numéricos”. Quando se optou por iniciar com a palavra conjuntos, a professora Mônica (F26, FV7, 00:03:19) justificou: “Eu penso assim, quando a gente fala em conjunto e você vai para conjunto numérico, você está numa situação mais ampla e aí você começa a afunilar”.

Nesse sentido, a professora se aproxima do “geral” ao “particular”, reconhecendo que os conjuntos numéricos são apenas uma das possibilidades, ou particularidade de se falar em conjuntos, mas com resquícios de uma forte tendência ao ensino da Teoria dos Conjuntos.

Em seguida, a professora Ester (FV7, F26, 00:03:31) considera a “qualidade” e a “quantidade” como determinantes do conjunto e comenta: “Ela colocou ali ‘qualidade’ e ‘quantidade’, eu acho que isso determina um conjunto, a gente pode determinar um conjunto através da quantidade e da qualidade”.

As apropriações da leitura do texto do Caraça (1952) se revelaram nesse momento, e podem ser identificadas na fala da professora. Ainda que o isolado a partir de um fenômeno natural se obtenha de forma arbitrária, como indica Caraça, é necessário considerar as relações (qualidades) que ele possui por meio de seus componentes. Nem sempre essas relações se manifestam facilmente, mas se é possível reconhecer as qualidades, então o recorte do isolado é cada vez mais preciso, por isso a dificuldade em identificar o que vem antes, se o recorte do isolado ou a identificação das qualidades. Isso se manifesta na fala das professoras:

> Mônica: dependendo do objeto de estudo, do fenômeno estudado, então talvez esta quantidade e qualidade viesse antes de conjunto, é quando você começa o que, também pensando no texto, a agrupar, formar aquele, eles usam um termo…
> [e a professora se apoia na leitura do texto]
> [...] qualidade, quantidade aí conjuntos, você começa a limitar o seu objeto de estudo,
> [...] o isolado, o que o autor chama de isolado, então você vai começar a isolar
>
> [...] depois ele muda a palavra isolado, ele chama do que…de fenômeno natural

> Emília: o isolado é o recorte que você faz da situação, por que não dá pra estudar o universo todo.

Essa discussão poderia ser enriquecida, pela pesquisadora, se no momento já estivesse com uma apropriação mais desenvolvida e destacando a essência do conhecimento algébrico. Esse momento pode ser considerado como discussão, pelos professores, sobre a identificação da grandeza a ser estudada. Nesse sentido é como diz a professora Mônica: “talvez esta quantidade e qualidade viesse antes de conjunto”. Isso porque é necessário realmente fazer um recorte da totalidade, identificar o isolado e suas qualidades na relação com outros isolados do fenômeno, e em relação aos objetos ou fenômenos pode ser considerado como o destaque para a grandeza a ser estudada. Considerando mais uma vez que a grandeza é a qualidade atribuída a um objeto ou fenômeno que pode então ser quantificada.

No momento da discussão, entretanto, o que a pesquisadora sugere é que como a palavra (isolado) ainda não estava escrita, seria necessário escrevê-la em uma folha sulfite para acrescentar ao mapa de conceitos.

A discussão que se segue é levantada pela professora Carla, que identifica que, conforme o texto, o ‘”solado” surge antes da “qualidade” e “quantidade”. Com a concordância dos demais professores, o termo “isolado” é colocado no mapa antes de “qualidade” e “quantidade”. Também são questionados os registros no mapa dos termos “grandeza” e “dependência”.

> Por que a grandeza é algo que vai medir, seja chamada como for, é algo que você vai medir, então você precisa ter o conjunto numérico, pra depois você medir... Por que o que é grandeza, grandeza eu penso assim - é tudo que você pode medir, então você precisa ter o número antes. (Mônica, F26, FV7, 00:06:40).

Nesse momento, pela falta de clareza entre considerar que a grandeza não se resume a algo que possa ser medido, mas na verdade é a qualidade do objeto ou do fenômeno, a pesquisadora não potencializou uma discussão a respeito dessa afirmação da professora, que destaca a necessidade de que exista o número antes da grandeza, pois considera que a principal característica desta é “algo que vai medir”. Entretanto, o estudo aprofundado do movimento histórico e lógico dos conceitos gera a compreensão de que a grandeza está associada, primeiro, à definição do isolado, à sua qualidade e só posteriormente existe uma necessidade de reconhecer se essa qualidade é passível de medição, no caso, numérica, o que implicaria a existência dos conjuntos numéricos, como destaca a professora.

Dando sequência à discussão, vários termos foram apresentados pelas professoras e poderiam ser inseridos: “grandezas”, “grandezas dependentes”, “representações de grandezas”. Surge a discussão sobre qual era o significado de cada termo quando foram apresentados nos subgrupos. Por exemplo, o subgrupo que apresentou a expressão “representações de grandezas” explicou que estava se referindo aos símbolos para efetivar essa representação. Então já tem consciência de seu movimento simbólico, enquanto o outro subgrupo entendia que a representação de grandezas era para eles “a expressão que representa esta dependência”, mas não explicitou como isso poderia ser expresso.

Um questionamento que surge e que necessita de aprofundamento vem da professora Mônica (F26, FV7, 00:08:39): “acho que aí viria a identificação das variáveis, […] antes da representação você precisa da identificação de variáveis, ou será que é a mesma coisa que dizer grandezas, que vocês acham?”

As demais professoras consideraram que a identificação de variáveis é a mesma que as grandezas. Nesse movimento de elaboração do mapa conceitual pode ser observado que o subgrupo 2, que registrou “identificação de variáveis” foi o único dos três grupos que não destacou a palavra “grandeza” como associada ao conceito de função. Nesse sentido, durante a discussão e considerando as demais falas, também concordaram que a “identificação de variáveis” poderia ser compreendida com o que os demais grupos entendiam por “grandeza”. Entretanto, o estudo teórico realizado e uma nova análise da pesquisadora destacam problemas sobre tal afirmação. Ao entender grandeza como a qualidade de um determinado objeto ou fenômeno, podem ser consideradas grandezas que não admitem variações quantitativas. Entretanto, no caso do estudo de funções e do conhecimento algébrico, é fundamental que seja realizado, considerando as grandezas variáveis, as quais podem ser atribuídas quantidades.

Entretanto, no momento da discussão, esta relação entre grandezas e “identificação de variáveis” não foi mais questionada e o grupo passou a discutir a continuação do mapa associando previsões à análise de resultados e às possibilidades oferecidas pelo fato de se terem realizadas representações gráficas e algébricas.

> Quando nós pensamos em consequências uma vez você estando com a representação gráfica, com a representação através…ah, algébrica, vamos dizer assim, uma vez que você faça a representação algébrica, você pode fazer outras deduções, então se for a previsão de custo de alguma coisa, então você foi observando o que varia em função do que, tal …bolou lá uma expressão algébrica, e se eu tiver 100 disso aqui, 200 disso aqui. (Mônica, F26, FV7, 00:10:14).

Este foi aceito como último passo do movimento. A “dependência” foi discutida como uma das possíveis relações entre as grandezas, e questionou-se se o fato de analisar uma relação é analisar uma dependência?

> Analisar a relação eu acho que é primeiro identificar que existe uma dependência, e depois ali a gente quis dizer qual dependência é essa[…]existe a dependência sim, mas o que acontece? Aumenta, é igual, é diferente. (Ester, F26, FV7, 00:11;42).

> Eu coloquei a relação igualdade, desigualdade proporcionalidade, por que uma das apostilas se não me engano a da 8ª série traz que um depende do outro e que outro não, então existe uma relação. (Helena, F26, FV7, 00:11:57).

Helena levanta a questão da necessidade de encontrar uma representação das grandezas.

> Eu acho que esta representação de grandezas talvez seja junto… grandeza o que é grandeza, é algo que pode ser medido, então você explica isso pro aluno… Como você pode representar isso, ah, o x e o y, nós tínhamos pensado deste jeito explicar o que é o conceito de grandeza, como pode ser representado, através de letras, de palavras, símbolos. (Helena, F26, FV7, 00:13:22).

A discussão continuou em torno da questão da relação de dependência ser uma relação de proporcionalidade, e então as professoras identificaram que nem sempre as relações de dependência são de proporcionalidade e citaram, por exemplo, as relações logarítmicas. A palavra "variação" ainda não havia sido incluída no mapa até esse momento. Questionadas a esse respeito, destaca-se a fala da professora Ester (F26, FV7, 00:19:27): "Eu pensei na ideia de constante, o aluno precisa ter este conceito de constante e de variação, […] neste sentido esta dependência pode ter uma proporção, pode ter uma variação, ou pode ser uma constante mesmo".

A compreensão sobre o termo variação, variável, é algo que não ficou claro na elaboração desse mapa pelos professores, nem posteriormente em sua reelaboração, como será possível observar. O estudo mais aprofundado do movimento histórico e lógico dos conceitos permitiria outras discussões, e o reconhecimento de que o termo "variação" ou "variável" está necessariamente atribuído à "quantidade" de uma determinada qualidade do objeto ou fenômeno, no caso a quantidade da grandeza. Trata-se de um termo que gera muitas interpretações e ambiguidades. Para Caraça, o termo variável é bem-definido, mas não o termo variação que apareceu no mapa elaborado com os professores. Se considerarmos este como um conceito central para o conhecimento algébrico, surge a necessidade de que ele esteja claro para os professores em seus cursos de formação e nos programas curriculares, e essa compreensão pode ser atingida pelo estudo aprofundado de seu movimento histórico e lógico.

Só é possível compreender uma grandeza variável ou que admite variação, se ficar clara a necessidade de identificar tal grandeza e relacioná-la a outras. Entretanto, durante a discussão com os professores, um subgrupo explicou que entendeu que a variação se relaciona ao comportamento da função e deu o exemplo de limite, da variação do x, posteriormente identificam isso como uma consequência. Nesse primeiro momento, é a professora Helena que explicita o posicionamento da palavra “variação” e “constante” no mapa.

> Depois das ‘grandezas’ antes da ‘relação’. Porque a gente vê as grandezas e vê se elas estão variando, depois que a gente vê se elas estão variando a gente vai analisar a relação que existe, e a gente analisa se esta é uma relação de dependência ou não. (Helena, F26, FV7, 00:23:50).

No desenvolvimento da pesquisa, e dos estudos aprofundados sobre o movimento histórico e lógico, considera-se que essa fala da professora se aproxima e destaca a essência do conhecimento algébrico associado ao estudo do tópico funções. A professora reconhece a necessidade de identificar as grandezas, verificar como estas variam. O que não fica claro para a professora é que esse mesmo reconhecimento da grandeza variável ou da variação de uma grandeza depende da relação que se estabelece com outra grandeza. Posteriormente destaca que deve surgir a relação de dependência ou não.

Conforme os estudos realizados, é essencial para o conhecimento algébrico, estabelecer a relação entre grandezas de forma geral. A partir dessa compreensão e de posse dos dados do curso com os professores, pode-se destacar que não é suficiente somente reconhecer as grandezas (a qualidade atribuída a um objeto ou fenômeno), mas esta é condição necessária para o desenvolvimento do conhecimento algébrico. Também não é suficiente que se estabeleça uma relação particular entre uma grandeza e outra (o que caracterizaria uma medição) e a determinação de sua variação, entretanto mais uma vez esta é uma condição necessária. Para que realmente o conhecimento seja caracterizado como algébrico e não como aritmético, ou geométrico, ou físico e outros, é necessário que a relação entre essas grandezas variáveis seja estabelecida de forma geral, e, nesse sentido, atenda a infinitos casos particulares.

A Figura 6 apresenta o mapa elaborado pelas professoras sobre o conceito de funções.

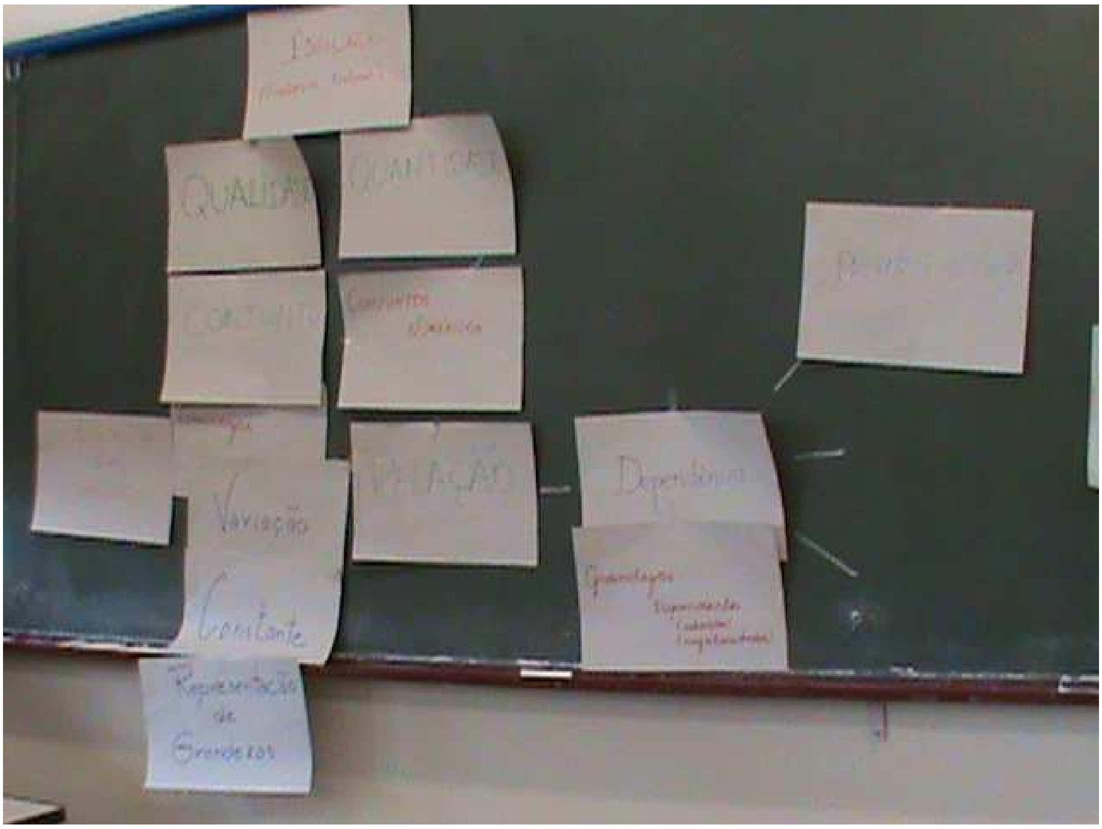


Figura 6 - Foto do mapa organizado pelas professoras sobre o conceito de função.

O mapa (Figura 6) foi retomado no oitavo encontro com os professores. O objetivo era que os professores pudessem repensar os conceitos que foram utilizados nesse mapa inicial e impor-lhe um movimento estabelecendo novas relações e nexos a serem contemplados para apropriação dos estudantes do conceito de função. Entre a construção do primeiro mapa (Figura 6) e sua retomada (Figura 7) foram apresentados no curso alguns elementos históricos envolvendo funções na forma de eslaides, uma discussão sobre a apresentação de função nos programas curriculares do Estado de São Paulo, bem como novas discussões a respeito do texto de Caraça (1952). Um elemento “‘inesperado” e que provocou muitas alterações no mapa inicialmente elaborado foi a presença da professora Suzana, no segundo dia de elaboração do mapa. Ela não estava presente no momento de elaboração inicial e possui uma concepção de álgebra que se diferencia de várias maneiras das concepções que predominam entre os professores e nos programas curriculares. Assim, nesse momento, suas inserções na forma de comentários e alterações no mapa foram predominantes.

A primeira questão levantada, para dar movimento ao mapa, partiu da professora Ester, que questionou o fato de a relação de dependência não ser somente de proporcionalidade, e assim foram acrescentadas ao mapa as dependências relacionadas ao período, e outras não lineares.

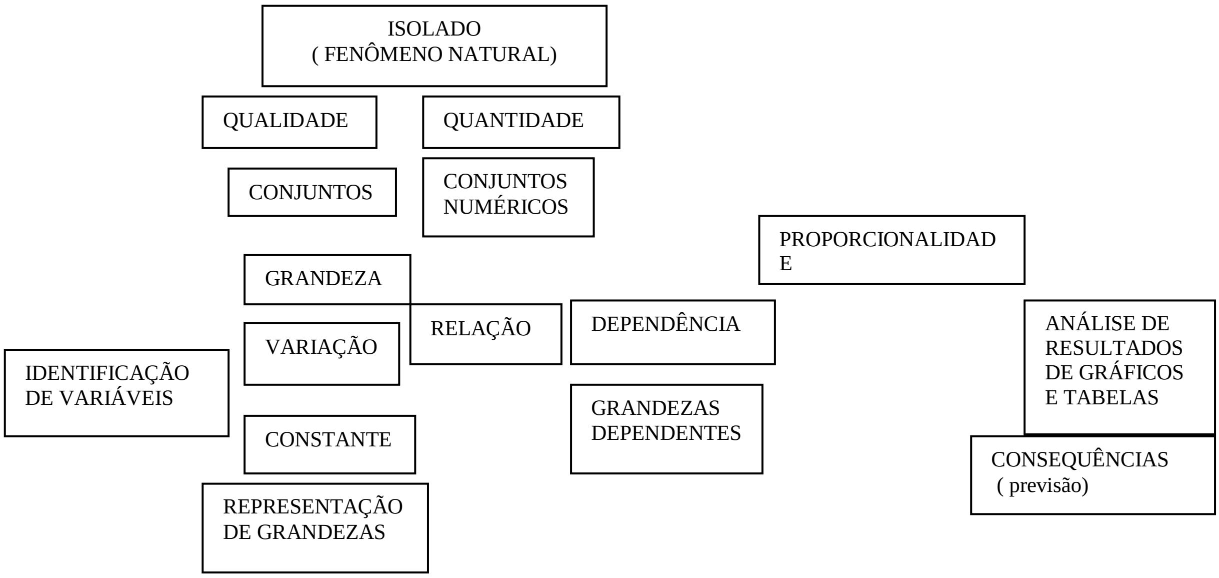


Figura 7 – Mapa de relação entre conceitos elaborado pelas professoras.

Questões sobre o isolado, sua determinação e sua aplicação nas questões de ensino foram também consideradas. É necessário esclarecer que o isolado, conforme interpretação de Caraça (1952), é determinado como recorte de um fenômeno natural para fins de estudo da ciência, no qual se reconhecem seus elementos e as qualidades entre eles, bem como a possibilidade de quantificar na tentativa de construir um quadro interpretativo da realidade. Nas situações de ensino, é possível também escolher um determinado isolado, e apresentar esse movimento de estudo da ciência, que constitui o movimento histórico e lógico dos conceitos; entretanto, em geral, no ensino se apresentam fenômenos de aplicação de conceitos. É o que acontece, por exemplo, com muitas das situações do "cotidiano" usadas na escola. Essa confusão se apresentou na discussão com as professoras.

A professora Emília revela uma compreensão da leitura de Caraça e a necessidade de explicitar a fluência dos fenômenos aos estudantes, e diz: "[...] a gente pula esta etapa de falar pro aluno que a gente está recortando uma situação da vida real, por exemplo, a vida está acontecendo como um organismo vivo, e a gente vai recortar uma situação que é o papel do isolado [...]" (Emília, HV1, H2, 00:12:10). Por outro lado, a professora Carla associou e deu o exemplo de um problema relacionado ao trabalho, considerando que a melhor apropriação dos estudantes se deu em função de a situação recortada estar relacionada ao dia a dia deles.

> [...] eu tenho um exercício de trabalho, o funcionário tem o fixo e vai ganhar o percentual em cima do total de vendas que vai fazer, o pessoal entende melhor[…]com isso eles conseguiram relacionar melhor a variável com fixo, uma situação do dia a dia deles[…]eu acho que eles entenderam melhor por que é o dia deles[…].e aí eles começaram a relacionar com a situação dos pais, […] eles captaram melhor a relação função do que só o x. (Carla, H3,HV1, 00:14:09).

O fato de ser uma situação do cotidiano, não é o que garante a melhor apropriação dos estudantes, mas sim o fato de, por conhecerem a situação, poderem destacar o movimento das grandezas, e realmente compreender a relação que está sendo estabelecida. A mesma situação do "cotidiano" apresentada para um sujeito que não tem acesso a ela provocaria os mesmos empecilhos, da falta de atribuição de significados e compreensão de grandezas envolvidas, caso este não fosse o foco de atenção do ensino.

A professora Cristina se preocupa em que o isolado proposto em situações de ensino contemple a essência do conceito e questiona se retirar o isolado é retirar o essencial do conceito. Para exemplificar, explicita o conceito de número, considerando que há tantos aspectos que podem ser discutidos, e se questiona: como "pegar" quando o que se quer é o controle da variação de quantidades. Há aqui uma confusão teórica e metodológica. O isolado não se caracteriza por ser o aspecto essencial do conceito, mas sim por ser um recorte da totalidade, que se bem-recortado pode conter, sim, nexos conceituais teóricos que possibilitem reconhecer o essencial do conceito. Como orientação para as ações de ensino de álgebra, destaca-se que, dada à impossibilidade de ensinar o conhecimento algébrico de uma só vez, se recortem isolados (no caso desta pesquisa, estão sendo destacadas as sequências, equações e funções) e, por meio deles, sejam destacados os nexos conceituais teóricos do conhecimento algébrico e, na medida do possível, sua essência.

Outra interpretação é dada pela professora Ester, que compreende o isolado como o próprio fenômeno natural, mas dá exemplos em que parece recortar o que seriam "partes" de estudo, como se o estudo das partes em separado permitisse a constituição de um objeto ou fenômeno.

> O isolado é o fenômeno natural, foi escolhido o fenômeno natural, se ele é o fenômeno ele é consequência de alguma coisa que já causa outra coisa…então ele não é isolado[…] o isolado você pega como se você tivesse uma caixa cheia de números de uma sequência e você pega o que te interessa[…].então a gente vai analisar só os números para depois entender a sequência, então você precisa entender partes por partes para depois conseguir entender o todo, eu acho, um exemplo mais prático quando você começa a dirigir, você aprende o que acontece na direção, no cambio..[…]. (Ester, H5, HV1, 00:25:10).

Com as diferentes interpretações dadas ao termo isolado, tornou-se necessário averiguar quais eram as interpretações atribuídas aos conceitos de "qualidade" e "quantidade" e seu posicionamento no mapa conceitual de funções. A professora Suzana apresentou uma compreensão próxima ao que Caraça expõe, mas se refere à qualidade do recorte do fenômeno[24], e não à qualidade dos elementos que compõe esse recorte (isolado), e estabelece a relação da qualidade com a quantidade. Também associa a qualidade do recorte do fenômeno à constituição de conjuntos.

> Quando eu vou pegar um recorte do fenômeno eu preciso ver primeiro a qualidade deste recorte e a veracidade... e a não é veracidade dele não, a qualidade dele e o quanto ele vai me auxiliar naquilo que eu quero aprimorar […] eu colocaria qualidade ainda em primeiro tópico, porque se eu não reconheço a qualidade do meu recorte, eu não sei classificar nem quanto conjunto e não sei quantificar , eu tenho que saber primeiro qual é a qualidade ou mudar esse nome de qualidade para objetividade ou objetivo específico, ou alguma coisa deste tipo….eu não posso fazer um recorte sem ter uma qualidade, por que se não eu perco a noção e sentido do que estou pensando em fazer, eu não posso pegar um fenômeno qualquer, um isolado qualquer, e dizer que ele compõe o conjunto, eu preciso saber qual é a qualidade dele, o quanto ele vai me auxiliar e identificar e trabalhar com este conceito de conjunto[…] tem que qualificar primeiro, para depois associar, você só quantifica depois que você qualifica…então, primeiro eu vejo a qualidade, que características que eu quero, qual é a qualificação dele, a veracidade dele […] o que vou fazer aí para que aí sim a partir das características e qualidades dele eu classifico enquanto conjunto e depois que eu classifico enquanto conjunto e conceituo ele em suas características e variáveis partir para uma quantificação e trabalhar numericamente com isso, mesmo essa identificação de variável acho que não está num lugar muito ideal, […]. (Suzana, H6, HV2, 00:02:20).

Outro ponto que merece destaque na fala da professora Suzana é a compreensão sobre o que é “variável” ou “identificação de variáveis”, que não estava claro para o grupo desde o primeiro momento de elaboração do mapa. A concepção de variável da professora difere muito da concepção de Caraça, de variável como o elemento simbólico representante da vida de um conjunto. Por isso, argumenta sobre uma mudança no posicionamento do termo de variáveis no mapa, pois o que para essa professora é “variável” está associado ao que provoca mudanças ou modificações no fenômeno em estudo. Seu posicionamento vai ficando mais claro em relação a isso quando explicita que “variável para mim é assim, o que interfere nesta qualidade”, e afirma que não se trata da variável da função e nem é numérica. O seu uso do termo “variação” ou “constante” é que se aproxima mais do que é entendido por Caraça como variável.

A discussão sobre “grandezas é retomada quando a professora Suzana afirma que “grandeza na realidade não é uma variável” e questiona o grupo sobre qual era a interpretação dada à palavra grandeza no primeiro dia em que o mapa foi elaborado. Durante a elaboração do primeiro mapa, o grupo, em resposta a uma pergunta da professora Mônica, havia concordado que a identificação de variáveis estava associada às grandezas, mas o questionamento feito pela professora Suzana não gerou contra-argumentos ou explicações, e

[24]Para melhor conseguir o recorte do fenômeno, ou o isolado, Caraça (1952) se refere ao aparecimento de “inesperados”, que conduzem a uma melhor definição do isolado.

assim não foi possível obter o esclarecimento sobre o que se entende pelos termos “grandeza” e “variável”, principalmente. Entretanto, essa mesma professora revela não ter tão claro o seu posicionamento, como é possível identificar no diálogo que posteriormente acontece entre ela e a professora Ester (H7, HV3, 00:03:35).

> Suzana: para mim, a palavra grandeza eu já entendo como variável, por que na identificação de variáveis eu já estabeleço previamente que tipo de grandeza estou trabalhando, o aluno, observa e já representa, essa variável é constante ou não, então eu já estou dando a grandeza estou representando a grandeza diretamente […].eu não consigo separar grandeza e intensidade por exemplo, eu estou pensando na variável, se mantém constante ou não, se ela é constante a intensidade dela pode ser maior ou menor dependendo da situação problema automaticamente, qualidade, quantidade, representação de grandezas […] são subconjuntos da identificação de variáveis.
>
> Ester: Suzana ficaria assim, qualidade, em baixo, quantidade, depois ali onde tem identificação de variáveis, você faz uma análise de grandezas para identificar variável...
>
> Suzana: eu não, eu identifico quais são as variáveis […] impossível de separar […] quando você fala para o aluno, a altura varia… sim… constantemente ou não… a altura já é uma grandeza e uma variável.
>
> Ester: [...] por isso eu identifico as grandezas e defino um conjunto que tem qualidades e intensidades daí eu vou identificar as grandezas que tem neste conjunto […].
>
> Suzana: altura é variável ela não é grandeza
>
> Ester: mas ela é uma grandeza
>
> Suzana: você vai representar depois […] por meio da unidade de medida
> […]
>
> Suzana: identificação de variáveis pra mim é a mesma coisa que representação de grandeza, por que grandeza é uma variável.
> […]
>
> Suzana: é função, ponto, função é variável, independente se é grandeza ou não, é variável, então identificação de variável você pode colocar se ela é uma grandeza ou não […].eu identifico variável e pode ser medível ou não em relação a intensidade ou quantidade, é variável e ponto final. Se eu estou trabalhando com o fenômeno eu preciso saber quais são as variáveis que ele possui, aí eu vou saber se eu quero trabalhar quantificando numericamente ou por nível de intensidade, eu não sou obrigada a identificar diretamente a grandeza, mas sim a variável, dentro desta variável eu quero trabalhar com ela quantificando numericamente ou só quantificando intensamente […]. Pra mim variável é isso qualquer coisa passível de medida ou não, e é o que eu ensino para o aluno, o que é uma variável, varia, português, então qualquer coisa que varia é uma variável.

Essas dificuldades em estabelecer as relações entre os termos não são puramente questões de linguagem, mas revelam as dificuldades conceituais que existem por trás, nesse caso, do conceito de função. Observa-se o quanto os termos “grandeza” e “variável” estão indefinidos para as professoras. No começo do diálogo, a professora Suzana já indica que ao falar sobre grandeza está concebendo a variável, ao mesmo tempo identifica altura como sendo "variável, mas ela não é grandeza" e ao final do diálogo ainda reforça que "variável, é isso, qualquer coisa passível de medida [...]". Há uma confusão teórica que certamente se reflete nas ações de ensino. É possível realmente ensinar função sem que se esclareçam os conceitos de grandeza e variável entre tantos outros? Como esclarecer esses conceitos? Não se trata de somente identificar como eles se formam psicologicamente, mas realmente ter consciência de todo o movimento histórico de sua constituição para que ele seja apropriado como conceito.

Este foi o resultado final produzido com as relações estabelecidas entre as palavras (Figura 8).

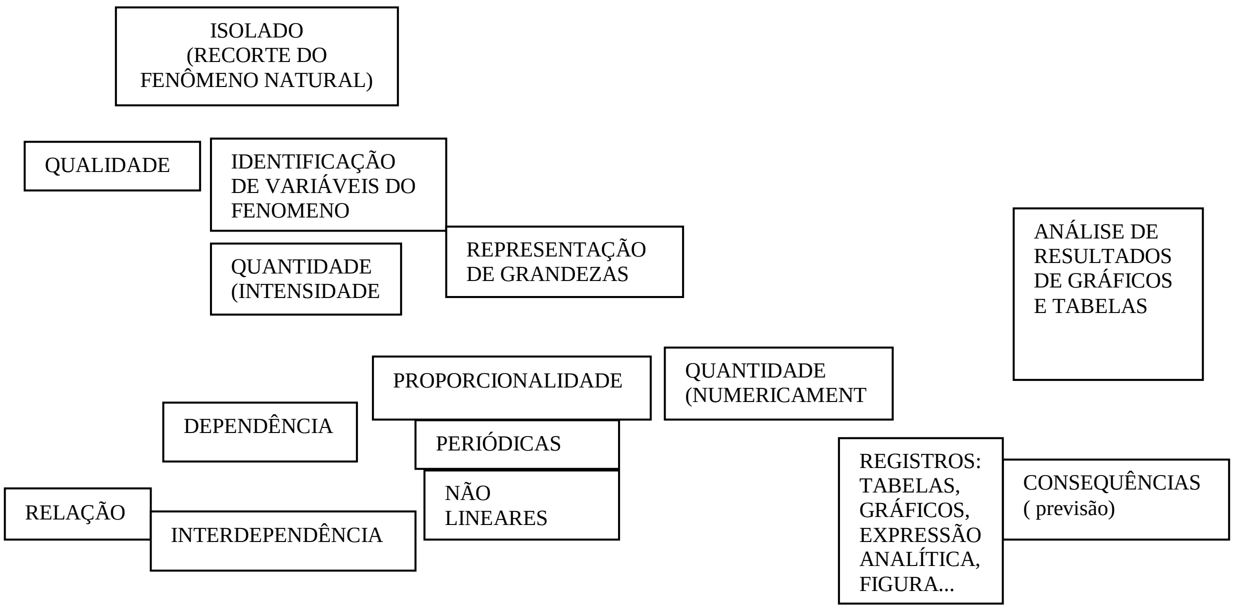


Figura 8 – Resultados relações estabelecidas entre as palavras.

4.4 OS "ISOLADOS" DO ENSINO DE ÁLGEBRA E A ESSÊNCIA DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO

Para alcançar o objeto desta pesquisa, a constituição do objeto de ensino da álgebra, estabeleceu-se como objetivo investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. Metodologicamente, foram desenvolvidos dois movimentos dialéticos de análise inseridos na dinâmica singular-particular-universal.

O primeiro deles, descrito no capítulo 4, destacou o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, o modo como o conhecimento é constituído na experiência histórica humana. O segundo movimento, referente ao objeto de ensino da álgebra, destacado nos capítulos 3 e 5, buscava explicitar princípios regentes (relacionados ao objeto de ensino) para um modo de organização do ensino visando à formação do pensamento teórico do sujeito ao se apropriar do conhecimento.

Nesta análise, o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos foi em primeiro lugar objeto estudado e pesquisado, e posteriormente caracterizou-se como instrumento para analisar o movimento de constituição do objeto de ensino da álgebra.

No primeiro movimento, tomaram-se como ponto de partida da análise, formas singulares de manifestação do conhecimento algébrico, a partir de registros históricos, por exemplo, os registros de controle de quantidades, diferentes momentos da álgebra (retórica, sincopada, simbólica), os avanços alcançados após a publicação de Viète e outros.

Ressalta-se que tais formas singulares, definidas dos registros históricos, foram aparentemente escolhidas de forma “arbitrária”. Mas, na verdade, essa primeira definição já contém em si uma análise da história mediada por hipóteses sobre as relações essenciais que moveram a história da álgebra e pelos fundamentos da teoria histórico-cultural que possibilitaram então definir o que seriam os “singulares” nesse processo.

Esses registros foram analisados por suas formas de linguagem e pensamento e processo de formação de conceitos, caracterizados como particularidades determinantes na constituição do objeto da álgebra. A organização dessa análise possibilitou o destaque dos seguintes elementos: a fluência e o movimento reconhecido nos objetos e fenômenos da realidade objetiva; o controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos; o movimento da linguagem e dos modos de resolução de problemas como forma e conteúdo do conhecimento algébrico; o reconhecimento de grandezas variáveis; a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos. Tais elementos caracterizados como nexos conceituais quando relacionados constituem a essência da álgebra: **relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral** (Figura 9).

A partir do que foi revelado como essência do conhecimento algébrico e seus nexos conceituais, foi possível avançar para o segundo movimento de análise, relativo à constituição do objeto de ensino da álgebra. Para tanto, foram definidos como formas singulares as sequências, equações e funções por serem elementos recorrentes no processo de ensino e principalmente por revelarem, em suas singularidades, a essência do conhecimento algébrico. Como fenômenos particulares em que se manifesta o objeto de ensino da álgebra, foram definidos os programas curriculares, o curso preparado para professores da rede pública e as situações enunciadas de ensino.

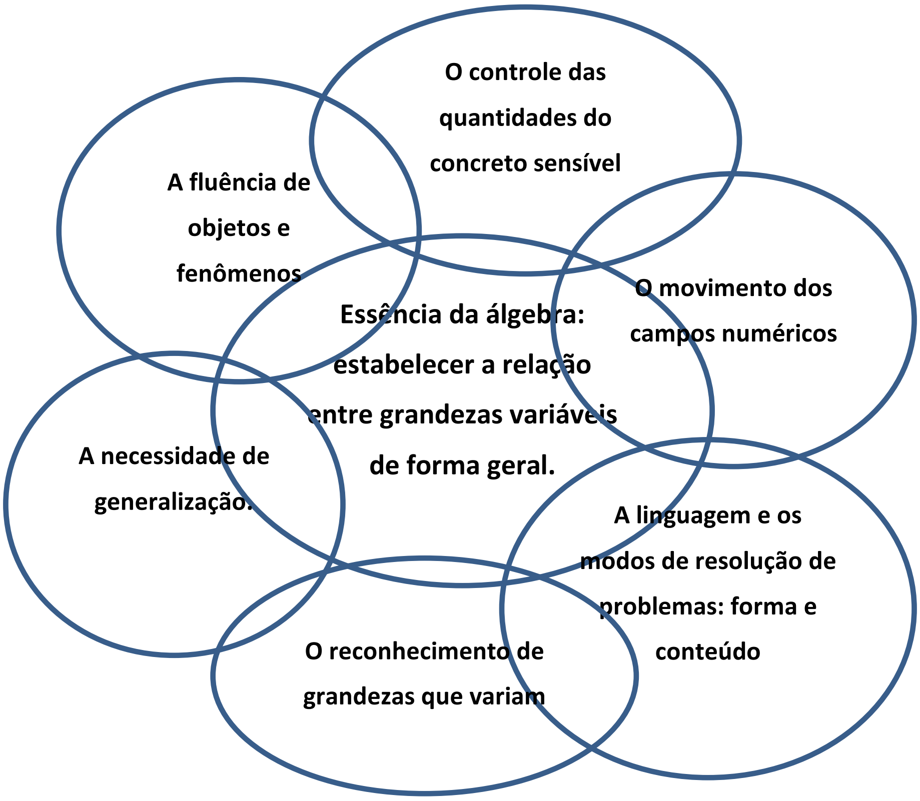


Figura 9 – Essência e nexos conceituais do conhecimento algébrico.

No decorrer das análises, foi possível reconhecer que as equações, sequências e funções podem ser consideradas como instrumentos do conhecimento algébrico que possibilitam que a relação quantitativa entre as grandezas variáveis se manifeste.

Pode-se considerar que, desde tempos remotos, a humanidade determina incógnitas para solucionar problemas do cotidiano e para tanto necessita reconhecer algumas grandezas e a relação entre elas, ainda que tal relação seja singular, ou seja, destacada apenas para uma determinada situação-problema. Assim, as equações constituíram o instrumento próprio para determinar os valores desconhecidos nas situações-problema relacionando-os aos valores conhecidos. O aperfeiçoamento dos métodos de resolução das equações, bem como de seu registro simbólico, permite que esse instrumento seja usado não só para resolver problemas cotidianos e bastante específicos, mas outros problemas de ordem geral.

Por sua vez, as sequências e funções possibilitam que a relação entre as grandezas seja compreendida no que a caracteriza como essência, mas também em suas particularidades, no seu movimento. Por meio das sequências e funções, expressam-se leis gerais da relação entre as grandezas, sendo contemplada a variação dessas grandezas. Roque (2013) ressalta uma diferença do conceito de função em relação ao de equação. Nessa última, há uma quantidade momentaneamente desconhecida e a resolução da equação tem o objetivo de encontrá-la, mas reconhece a diferença entre as equações determinadas. Isto significa que é possível “determinar” os valores desconhecidos e as “indeterminadas”, para as quais se encontram infinitos valores que variam, de certa forma, em relação às quantidades determinadas. Nesse sentido, uma equação em x e y também é uma forma de representar a dependência entre duas quantidades variáveis, por exemplo, a equação de uma circunferência a partir das variáveis x e y, mas que não se caracteriza como uma função.

No Quadro 5 destaca-se como se entende que cada um desses instrumentos (sequências, equações e funções) revela a essência do conhecimento algébrico e como se pode analisar que são conduzidos no processo de ensino.

Quadro 5 – A essência do conhecimento algébrico e a relação com a organização no ensino atual

Instrumentos	Como se revela a essência da álgebra	Como é tratada no ensino
SEQUÊNCIAS	Para estabelecer uma sequência a partir de elementos quantitativos, é necessário reconhecer que grandezas estão inter-relacionadas, e de que forma essa relação ocorre. Compreendendo essa relação, é possível gerar uma “lei geral” que a expresse.	Enfatiza-se a definição de uma “lei geral” pela relação entre os elementos particulares que aparecem na sequência, mas não se destaca a identificação das grandezas relacionadas.
EQUAÇÕES	Uma equação estabelece um momento singular da relação entre grandezas. Por isso, por meio dela, é possível encontrar valores singulares e definidos para cada um dos seus elementos. Assim, encontrar o “x” em uma equação, denominado como incógnita, significa encontrar o valor de uma grandeza variável, mas que naquele momento específico está definido ainda que desconhecido.	Destaca-se a necessidade de encontrar o valor desconhecido na equação, por meio de técnicas de resolução. Identifica-se a equação com uma pergunta (SÃO PAULO, 2009a), mas não se destacam as grandezas envolvidas, nem a relação entre elas. Desta forma, a equação não é entendida como uma forma singular da relação entre grandezas.
FUNÇÕES	O avanço do estudo de diferentes funções (de 1º e 2º graus, exponencial, logarítmica, modular, trigonométricas e outros) abarca a essência do conhecimento algébrico em sua forma mais desenvolvida. Por meio das funções, se identificam e relacionam grandezas de naturezas diferentes (numéricas, matriciais, vetoriais, trigonométricas e outras), por meio de diferentes operações matemáticas. O estudo avançado das funções permite que se observem propriedades e se criem expressões gerais que apanhem o movimento dos fenômenos na realidade objetiva, na medida em que se reconhecem neles certas regularidades.	No ensino, são enfatizadas as características de diferentes funções: as raízes das funções, seus gráficos, o estudo do sinal da função. As funções são em geral tratadas como objetos com fim em si mesmos, e aprofundadas matematicamente. Entretanto, o significado de uma função como instrumento para compreender a realidade não é destacado, e o reconhecimento das diferentes grandezas e suas relações se torna um conhecimento em segundo plano.

Além de se manifestar nos diferentes instrumentos do conhecimento algébrico, é necessário considerar que a essência da álgebra (estabelecer a relação entre as grandezas variáveis de forma geral) caracteriza o conhecimento algébrico, constituindo uma síntese de várias abstrações no processo de desenvolvimento desta forma de conhecimento e se apresenta em seus objetos mais elementares e mais desenvolvidos.

Assim, essa essência também ganha movimento e se desenvolve, no sentido de que na experiência histórica humana se modificam as grandezas, as relações entre as grandezas e os modos gerais de expressar essa relação.

Nesta tese, entende-se por grandeza a qualidade de um objeto, no sentido de Caraça (1952), ou seja, a relação que determinado objeto ou fenômeno mantém com outro objeto ou fenômeno. Assim, não existem qualidades intrínsecas a um objeto ou fenômeno. Se a essas qualidades podem ser atribuídos diferentes graus de intensidade (mais que, menos que, maior que e outros), então admitem a variação conforme a quantidade.

Dessa forma, pode se considerar que a altura, o comprimento, a cor, a espessura, a largura, a velocidade, a massa e o peso dos objetos são qualidades de objetos isolados da realidade objetiva. Entretanto, só se define a altura, a largura, a massa e outras grandezas quando se compara esse objeto a outros, então quando é relacionado a outro. Por exemplo, não faz sentido dizer que um objeto é alto, pois ele só pode ser assim considerado em relação a outro objeto. Pode-se pensar isso não só para objetos, mas para fenômenos, sejam naturais ou não, e então se pode, por exemplo, quantificar o nível de destruição de um furacão, ou a intensidade de força do choque entre dois objetos, ou simplesmente a quantidade de presentes em um evento. Estes são todos exemplos de grandezas.

As grandezas também se modificam e evoluem ao longo da experiência humana e em função do conhecimento adquirido pelo homem. Então, se nos tempos antigos, em que o homem possuía as primeiras abstrações sobre quantidades e conseguia registrá-las numericamente, era possível contar a quantidade de pedras e de animais, hoje, já se consegue quantificar a capacidade de armazenamento de dados de um *pen-drive*.

Assim, pode-se considerar um movimento que vai se reconhecer nas grandezas dos objetos físicos, e em um processo constante de abstração e estabelecimento de novas relações entre os objetos e fenômenos; isto é, no próprio processo de conhecimento, identificar grandezas abstratas, no sentido em que mantém sua base em objetos materiais, mas não estão conectadas diretamente a eles. O estabelecimento de relação entre grandezas geram então novas grandezas.

Dentro do campo do conhecimento matemático, podem ser consideradas grandezas numéricas, ou seja, aquelas que podem ser identificadas por uma quantidade numérica, mas também identificar fenômenos aos quais estão atribuídas outras formas de grandezas, matriciais, ou vetoriais, por exemplo.

O próprio movimento de estabelecer relação entre grandezas se intensifica com o desenvolvimento do conhecimento e se torna cada vez mais necessário estabelecer a relação entre elas de forma geral. Em tempos antigos, algumas técnicas e modos de resolução de problemas específicos eram suficientes. Poderiam ser usados casos e valores particulares das grandezas, não sendo necessário tratá-las de maneira geral. Entretanto, o advento da industrialização, o aumento da produção, o desenvolvimento de outros recursos tecnológicos requerem o tratamento das grandezas e da relação entre elas de forma geral. Nese movimento, o conhecimento algébrico é fundamental. Graças a ele é que importantes leis de relação entre grandezas podem ser sintetizadas e expressadas, por exemplo, as de Newton.

No conhecimento algébrico então, a identificação das grandezas, a compreensão de sua variação, o estabelecimento de relação entre elas, bem como o processo de generalização, são essenciais.

Essa essência da álgebra, que se faz presente nos diversos instrumentos que o conhecimento algébrico possui para revelar os objetos e fenômenos da realidade objetiva, (sequência, equações, funções e outros) deve constituir o objeto de ensino da álgebra.

Entretanto, apesar de estarem presentes nos currículos oficiais, os estudos sobre sequências, equações e variadas funções (1º grau, 2º grau, exponencial, logarítmica, modular, trigonométrica e outras) durante os anos de escolaridade, às vezes não se pode dizer que essa essência da álgebra foi contemplada. Isto porque se destaca o aspecto técnico e simbólico nesses estudos e nem sempre são enfatizadas as relações e a variação das grandezas, bem como sua representação de forma geral.

Além disso, é necessário diferenciar o que seriam as relações entre as grandezas estabelecidas algebricamente de outros tipos de relações, como de medida. Por exemplo, ao observar uma fórmula simples $p = 3m$, pode-se perguntar até que ponto ela revela conhecimentos algébricos e a essência da álgebra. Para relacionar com o objeto de ensino da álgebra, destacam-se suposições de situações de interação de professores e estudantes.

Situação 1: Pedro tem três moedas ($p = 3m$). Nesse caso, as letras estão associadas diretamente ao objeto. Observa-se que **p** simboliza Pedro e m simboliza moedas. Não se contempla variação, a relação de igualdade não se estabelece. Essa situação pode acontecer em tradução direta de problemas para a linguagem matemática, em que não se identificam grandezas.

Situação 2: A altura da porta é três vezes maior que a altura do móvel (p = 3m). Trata-se de uma situação de medida. A altura da porta não depende da altura do móvel, mas pode ser medida por meio dela. A não ser que se estabeleça claramente a interdependência, não se pode dizer que alterando a medida do móvel se altera a medida da porta. Nesse caso, não se contempla a variação da altura da porta. Se variar a altura do móvel, a relação inicialmente estabelecida com a medida da porta (três vezes maior) se desfaz. Então, não se pode dizer que a relação foi estabelecida de forma geral.

Situação 3: O perímetro de um triângulo equilátero é igual a 3 vezes a medida de seu lado (p= 3m). Nesse caso, identificam-se as grandezas (perímetro e medida do lado); é possível reconhecer a variação (alterando a medida do lado, necessariamente se altera o perímetro), a relação pode ser estabelecida de forma geral (p=3m), quer dizer; pode ser generalizada, considerando que em todo triângulo equilátero o perímetro é três vezes o valor da medida do lado.

Estas são algumas situações que mostram as contradições que podem acontecer ao se definir o conhecimento algébrico, atualmente caracterizado pelo uso de letras. Nem tudo que é simbolizado com letras é conhecimento algébrico, ou contempla a sua essência.

Além disso, foi possível detectar que a essência do conhecimento algébrico, que pode ser encontrada nos diferentes objetos e instrumentos da álgebra (equações, sequências e funções) para interpretar os fenômenos da realidade objetiva, nem sempre é contemplada no ensino. A análise que se estabelece nesta tese é que no ensino se privilegia como “objeto de ensino da álgebra” os instrumentos desenvolvidos na experiência humana, suas especificidades e técnicas de utilização, sendo esses instrumentos apresentados como produto de uma determinada forma de conhecimento, no caso, a matemática. Mesmo quando se destacam alguns processos de pensamento, como a generalização, este é destacado como produto do conhecimento matemático, por exemplo, a “matemática permite que se generalizem tais propriedades”. Desta forma, a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra acontece para que no ensino se destaquem os “produtos” do conhecimento humano.

Entretanto, o processo de apropriação destes “produtos” ocorre quando os sujeitos estão em atividade, e, portanto, é necessário inserir os estudantes em uma dinâmica de estudo para que se envolvam nesse movimento do conhecimento, que é histórico e lógico. Não se faz isso reapresentando toda a história, mas destacando sua essência, revelando no caso a essência do conhecimento algébrico em seus instrumentos (equações, sequências e funções).

Dessa forma, percebe-se que há relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra nas condições atuais de ensino. Entretanto, esta se dá no sentido de reconhecer os produtos do conhecimento algébrico e apresentá-los ou organizá-los como tópicos ou conteúdos de ensino. Não foram encontrados dados que realmente refletissem que os professores participam das discussões a respeito do que pode ser considerado objeto de ensino da álgebra ou recebem formações para discutir o desenvolvimento do processo de conhecimento algébrico. Em relação às expectativas que apresentaram para o curso de atualização promovido, apenas uma professora indica “rever teoria”, e os demais destacam os procedimentos metodológicos e didáticos para o ensino de álgebra. A definição do objeto de ensino da álgebra não é uma necessidade ou uma questão em discussão para esses professores. Entende-se nesta tese que a ausência dessas discussões entre os professores e na elaboração de programas curriculares compromete a organização do ensino, pois se discute sobre a “forma” como um tópico algébrico pode ser apresentado aos estudantes sem estabelecer relações, mesmo com o seu “conteúdo”, ou com os impactos que tal maneira de tratar o “conteúdo” e a “forma” de determinado tópico algébrico impacta a formação do pensamento dos estudantes. Em resposta a uma pergunta da pesquisadora, “Em relação à organização do ensino da álgebra, se tivesse como modificar a proposta atual o que incluiria ou retiraria, como reorganizaria?”, os professores destacaram mudanças na ordem de apresentação dos tópicos, por exemplo: “[...] passar o conteúdo da PA e da PG depois dos alunos terem estudado equações exponenciais [...]” (Helena, RE6); ou “Tiraria o tema Cônicas: noções e aplicações” (Sônia, RE6); “Avançaria para debates sobre assuntos corriqueiros do dia-a-dia [...]” (Emília, RE6); quatro professores indicaram que não fariam qualquer alteração na proposta, e apenas um professor destacou que, apesar de não ter conhecimento da proposta em todos os anos escolares, acredita“[...] que deveríamos começar o assunto [álgebra] abordando o conceito de variáveis” (Antônio, RE6). Também é sintomático o registro de uma professora, “As modificações devem ser reorganizadas pelos órgãos competentes e que pouco valerá a nossa colocação” (CARla, RE6), se desobrigando, de certa forma, a pensar a organização do conteúdo.

Compreende-se ainda que essa relação (entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra) pode ser estabelecida e explorada de outros modos no processo de ensino, desde que, a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, seja destacada a essência dessa forma de conhecimento. Tendo essa essência como princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra, podem ser elaborados modelos que servem para análise das situações de ensino organizadas e propostas aos estudantes. É o que se pretende apresentar no capítulo 5 desta tese, por meio de um modelo elaborado para analisar o processo de generalização. Além disso, espera-se que o reconhecimento de nexos conceituais, pelo movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, conduza e oriente ações de planejamento, e desta forma se revelam como elemento a ser destacado no processo de formação de professores. No capítulo 6, apresenta-se a análise de um planejamento com uma professora em busca de revelar essa essência do conhecimento algébrico, por meio da elaboração de uma situação de ensino envolvendo áreas, perímetros e equações.

5 UM MODELO PARA ANÁLISE DO PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA

Os estudos realizados a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos permitiram revelar nexos conceituais teóricos e o que se tem destacado como essência do conhecimento algébrico. Um destes nexos conceituais está relacionado aos processos de generalização. Estes são destacados em registros históricos, nas pesquisas sobre álgebra em seu ensino, em programas curriculares, e também na fala dos professores.

No decorrer da pesquisa foi elaborado um "modelo" para análise do processo de generalização em situações de ensino. Para Davydov (1982, p.315), "Os modelos são uma forma de abstração científica de índole especial, em que as relações essenciais do objeto são destacadas e consolidadas em nexos e relações gráfico-perceptíveis, representáveis por elementos materiais ou sinalizadores".

Considerando que existem níveis de generalização, que também foram revelados no estudo do movimento histórico e lógico do conhecimento algébrico, e que estes podem estar associados a objetos ou processos de pensamento, é intenção nesta tese de apresentar, com base nesse modelo, alguns níveis de generalização a serem destacados nas ações e situações de ensino. Desta forma, uma possível relação entre o movimento histórico e lógico do conhecimento algébrico e o objeto de ensino da álgebra se dá por meio da elaboração e uso desse modelo elaborado.

Durante o desenvolvimento desta tese, reconheceu-se que a busca por raízes históricas de desenvolvimento do pensamento algébrico para compreender seu movimento (que é lógico) não se destina a apenas acrescentar fatos marcantes ou exemplos da história para a organização do ensino. Assim, ao sintetizar este estudo e análise foi reconhecido como essencial ao conhecimento algébrico estabelecer a relação entre as grandezas variáveis de forma geral.

Essa forma geral de estabelecer a relação entre as grandezas está necessariamente associada ao desenvolvimento do processo de generalização e também aos processos de abstração e formação de conceitos, que, conforme Davydov (1982), se configuram como processos de pensamento.

O processo de generalização como forma de pensamento pode ser considerado no desenvolvimento do conhecimento algébrico historicamente, portanto associado ao movimento filogenético de evolução humana, e no desenvolvimento dos processos de pensamento do sujeito, logo, associado ao processo ontogenético de constituição do indivíduo. Não se considera que o processo de generalização acompanhado pelo desenvolvimento ontogenético repete os passos do processo de generalização reconhecido no movimento filogenético de constituição humana. Entretanto, o conhecimento desses movimentos permite a identificação de níveis ou estágios de generalização que podem ser considerados e desenvolvidos no processo de organização do ensino da álgebra. Assume-se que compreender o processo de generalização algébrica na experiência histórica humana até o momento atual e seu alto nível de abstração oferece elementos fundamentais para compreender o processo de generalização a ser apropriado pelos estudantes, em seu movimento lógico de pensamento.

Durante a realização do curso com os professores, não houve um momento específico para discutir o processo de generalização, mas este permeou várias ações e discussões, sendo destacado pelos professores, inclusive como objeto de ensino da álgebra.

Além disso, uma das ações do curso era apresentar e discutir com os professores os diferentes momentos históricos de desenvolvimento e avanços da álgebra retórica, sincopada e simbólica. Nesses diferentes momentos, observam-se mudanças na linguagem e na forma de pensamento. Os professores foram questionados sobre por que não se ensinavam na escola de atualmente os procedimentos da álgebra retórica, e uma professora retoma a questão da ausência de símbolos e linguagem específica que permita a generalização.

> Por que quando a gente chega em valores muito altos […] a generalização ela serve para que?....pra resolver qualquer problema, o problema da álgebra retórica é que ela é limitada, a partir do momento em que eu chegar em um valor muito alto, meu procedimento fica mais difícil. (Helena, E31,EV3, 00:02:55).

Outra professora também faz essa associação e limitações da álgebra retórica e seu potencial de generalização.

> A álgebra retórica parte realmente do cotidiano da pessoa, ele não vai se estender para casos generalizados, ela não é generalizadora por si só, […] A álgebra que nós ensinamos generaliza para n coisas. Ela não é só pra a e b, eu não vou medir antes pra pegar um valor, eu não sou obrigada a observar alguma coisa antes, ela virou instrumentadora só. Esta álgebra limita neste sentido eu tenho que medir antes, eu tenho que ter um número prévio, para aí sim ser usada na situação. (Suzana, E31, EV3, 00:03:30).

Retoma-se aqui que o momento da álgebra retórica recorria a generalizações realizadas a partir da linguagem natural e dos números. Alcançava-se o nível de generalização que permitia gerar métodos de resolução para alguns tipos de problemas. Por meio do movimento histórico, se reconhece que ocorria a generalização de métodos, mas não de objetos, que no caso continuavam sendo os números.

Ainda durante o curso, destaca-se inclusive o questionamento de uma professora que também indicou a “generalização” como objeto de ensino da álgebra. e se preocupa da seguinte forma:

> [...] o que a gente estava questionando é será que não seria o caso de ensinar ele primeiro a generalizar? Ter uma aula só para aprender a generalizar [...] a gente chegou a esta conclusão será que não precisa de uma aula disso [...]. (Ester, A38, AV2; 00:22:23).

Entende-se que o processo de generalização ocorre sobre uma base material e, portanto, como processo de pensamento, as generalizações se elaboram sobre a base das relações do sujeito que são estabelecidas com os objetos, fenômenos da realidade objetiva e sobre conceitos anteriormente elaborados. Desta forma, não surgem como um processo psíquico gerado internamente. Vigotski relaciona o processo de generalização a um processo de tomada de consciência e a formação de um conceito superior.

> Desse modo, a generalização de um conceito leva à localização de dado conceito em um determinado sistema de relações de generalidade, que são os vínculos fundamentais mais importantes e mais naturais entre os conceitos. Assim, generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e sistematização de conceitos. (VIGOTSKI, 2001, p.292).

Vigotski considera os conceitos aritméticos como “pré-conceitos”, sendo os algébricos, os conceitos verdadeiros. Isso fundamentado em que os números são abstraídos a partir de objetos e os conceitos algébricos são abstraídos da própria noção de número, sobre conceitos.

> O pré-conceito é uma abstração do número a partir do objeto e uma generalização nela fundada das propriedades numéricas do objeto. O conceito é uma abstração a partir do número e uma generalização nela fundada das outras relações entre os números. A abstração e a generalização da minha ideia diferem da abstração e da generalização dos objetos. Não se trata de um movimento subsequente na mesma direção, não é a sua conclusão, mas o início de um novo sentido, a transição para o plano novo e superior de pensamento. A generalização das minhas próprias operações e dos meus pensamentos é algo superior e novo em comparação com a generalização das propriedades numéricas dos objetos no conceito aritmético. (VIGOTSKI, 2001, p.372).

Desta forma, o processo de generalização se realiza nas funções psíquicas do sujeito a partir das possibilidades de se realizar sobre objetos ou conceitos, e não em algumas aulas, mas ao longo de sua escolaridade e de sua vida, e não somente por meio do processo de ensino da álgebra.

Para a elaboração do modelo de análise do processo de generalização em situações de ensino, destacam-se os estudos realizados sobre os processos de generalização empírica e teórica de Davydov (1982) e aqueles realizados a partir do Enfoque Ontossemiótico, que acrescentaram elementos para a constituição do modelo, sintetizados nos próximos itens.

5.1 OS PROCESSOS DE GENERALIZAÇÃO EMPÍRICA E TEÓRICA EM DAVYDOV

Davydov (1982) considera que os processos de generalização, abstração e formação de conceitos são as principais formas de pensamento e estabelece distinções entre os processos de generalização teórica e empírica.

A generalização empírica é associada em psicologia e didática, como processo ao movimento de descrever as propriedades de um objeto individualizado e associá-lo em uma classe de objetos similares, e como resultado à abstração das características que se repetem de um objeto.

> No caso da generalização, por um lado, tem lugar a busca e a designação com uma palavra de determinado atributo *invariante* entre a diversidade de objetos e seus atributos; e por outro lado, a identificação dos objetos da diversidade dada com ajuda da característica *invariante* escolhida. (DAVYDOV, 1982, p. 13, grifos do autor, tradução nossa).

Em exemplos matemáticos:

a) 1º exemplo: O reconhecimento de triângulos entre diferentes figuras pode acontecer por meio da identificação de quais figuras têm três lados. Entretanto, esta é uma identificação em relação ao que é visível. Se por outro lado pensarmos que na programação de computadores, essa identificação se dá pela representação de pontos e pela relação entre as distâncias entre dois pontos, identifica-se que a relação não se estabelece só pelo que é visível, mas por propriedades do triângulo;
b) 2º exemplo: Um aluno que faz o reconhecimento de uma equação do segundo grau apenas pela identificação de um expoente 2 pode também estar fazendo um procedimento empírico de generalização cuja identificação se dá somente pelas características visíveis da representação e pode encaminhar a erros conceituais; por exemplo, ele pode identificar como equações de segundo grau: $x^3 + x^2 = 0$; ou x +

$5 = 2^2$ ou $\frac{x^2+1}{x} = x^2$, ou não identificar como equação de segundo grau a seguinte equação $x^4 + x^2 - 5 = x^4$.

A generalização reconhecida por Davydov como empírica está associada a um processo de abstração e formação de conceitos que também é empírico. Assim, segundo Davydov (1982, p.15), "com base em um grande número de fatos adequadamente selecionados, nasce a ideia abstrata, generalizadora, de um dos atributos que estão associados ao conceito".

Nesse tipo de generalização, o "geral" é uma qualidade escolhida dentro dos objetos e isolada de suas outras qualidades. Esse geral é obtido pela comparação de atributos e, desta forma, deve estar presente em todos os casos "particulares". O geral é definido por uma palavra ou expressão. A abstração advém da identificação do geral, considerando o que é comum aos casos particulares. O processo de generalização, assim, está também relacionado ao processo de intuição e percepção a partir dos próprios objetos ou de suas representações. Mas o que garante qual é a abstração essencial que define o conceito? Os objetos possuem diferentes atributos e o que define quais os essenciais e quais os superficiais, não é o atributo em si, mas a relação que esse objeto possui com outros objetos e a ação humana realizada sobre ele. "É notório que a essência não coincide por seu conteúdo com os fenômenos e propriedades dos objetos, dados diretamente" (DAVYDOV, 1982, p. 93).

> [...] na generalização conceitual empírica, não se separam justamente as particularidades essenciais do objeto, a conexão interna de seus aspectos. Dita generalização não assegura, no conhecimento, a separação dos fenômenos e a essência. As propriedades externas dos objetos, sua aparência, se tomam aqui pela essência. (DAVYDOV, 1982, p.105).

Desta forma, o uso de palavras (que são identificadas como conceitos) acaba por dar à experiência sensorial a forma de generalidade abstrata.

Por sua vez, em relação ao pensamento teórico, o objeto do conhecimento é estudado em movimento; é matéria das transformações mentais e pertence a um sistema de relações. O pensamento teórico opera mediante conceitos científicos. Formar um conceito significa reproduzir mentalmente seu conteúdo e compreender sua essência. Assim, o conteúdo específico do pensamento teórico é "[…] o domínio dos fenômenos objetivamente inter-relacionados e que constituem um sistema integral" (DAVYDOV, 1982, p.306).

Por meio das ações perceptivas sensoriais é possível captar o objeto tal como ele é; como já existe. Entretanto, para revelar como ele chegou a vir a ser o que é, é necessário revelar os nexos internos e que não são observáveis. Esta é a função do pensamento teórico:

“[...] é abarcar toda a representação em seu movimento, ou seja, expressar todo o conjunto dos dados sensoriais em desenvolvimento, e para isso é necessário o pensamento dialético” (DAVYDOV, 1982, p.328).

Isso é possível pelo método de ascensão do abstrato ao concreto. Na lógica formal tradicional, o movimento é do concreto ao abstrato, e o concreto é entendido como o objeto sensorialmente perceptível ou sua imagem gráfica e o abstrato são as propriedades soltas desse conjunto de objetos e consideradas de forma independente.

A abstração, que é forma do pensamento teórico (substancial ou essencial), gera o abstrato por meio de um processo de análise quando reduz as diferenças existentes no objeto ou fenômeno, a essência destas. O abstrato gerado desta forma é, portanto, algo simples, desmembrado e ainda não desenvolvido, mas que expressa a essência que garante a unidade de todas as separações que se produzem. É o que Davydov (1982) denomina como “célula”. Esta não pode ser revelada somente sensorialmente, mas sim nas relações e mediações dentro de um sistema. “Resumindo, estas propriedades da abstração inicial podem expressar-se assim: unem uma relação historicamente básica, contraditória, simples e substancial do concreto reproduzível” (DAVYDOV, 1982, p.339). A essência só pode ser revelada no processo em movimento, está oculta à observação direta dos fenômenos. “Conhecer a essência significa achar o geral como base e como fonte única de uma certa diversidade dos fenômenos, e logo mostrar como esse ente geral determina o surgimento e a interconexão dos fenômenos, ou seja, a existência do valor concreto” (DAVYDOV, 1982, p.347).

A revelação das contradições nesta célula e a determinação de um método de solução de tais contradições em um processo de síntese orientam o pensamento do abstrato ao concreto. O que se entende por concreto, aqui, não é o concreto palpável, mas sim o concreto que existe na relação entre as coisas singulares e reflete a conexão destas com o geral. “O abstrato e o concreto são dois momentos na decomposição do objeto mesmo, da própria realidade refletida na consciência, e que graças a isso, pois são momentos derivados da atividade mental.” (DAVYDOV, 1982, p.341).

Os processos de abstração e generalização são formas de pensamento nesse movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Pela abstração, o homem desarticula e retém mentalmente a especificidade da relação real das coisas que determina o estabelecimento e a integridade dos diversos fenômenos. Pela generalização, estabelece nexos reais dessa particular relação desarticulada com os singulares fenômenos particulares que surgem, assim revela seu caráter geral, reduzindo os fenômenos à base única deles.

Desta forma, o geral não se separa do especial e singular, mas se expressa por meio do outro. O geral contempla a diversidade do singular e o singular subsiste no geral no processo de reprodução do desenvolvimento do objeto em forma de conceitos. O conceito teórico deve revelar a autenticidade da redução dos fenômenos a uma base geral e, assim, constituir a generalização essencial.

> Assim, pois, por seu conteúdo o conceito teórico aparece como reflexo do nexo do geral e do singular (da essência e do fenômeno) e pela forma, como procedimento dedutivo do singular a partir do geral. Este procedimento se baseia na especificidade da interconexão dos fenômenos dentro do sistema dado e no caráter homogêneo dessa interconexão em todos os níveis de ascensão ao concreto. (DAVYDOV, 1982, p.357).

Esse processo permite a explicação das conexões dos fenômenos observados e "[...] permite inferir teoricamente umas leis de outras assim como fundamentar teoricamente relações de dependência estabelecidas por procedimentos empíricos e demonstrá-las" (RUBINSTEIN, 1965, p. 165). Assim,

> O conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, esse experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente. (DAVIDOV, 1988, p. 125).

De forma sintética, o conhecimento empírico baseia-se no objeto e suas representações, estabelece o processo de generalização formal das propriedades dos objetos, baseado na observação, na percepção. Busca uma propriedade formal comum a um grupo ou classe de objetos que revele as propriedades específicas individuais. Permite a sistematização e classificação de objetos. Seu produto, o "conceito" empírico do objeto, é apresentado por meio de um termo, de uma palavra que descreve o objeto.

O conhecimento teórico, por sua vez, busca a relação entre as coisas, os objetos no interior de um sistema. Também se baseia na percepção dos objetos, mas busca neles, mais do que é externo, visível, busca as relações entre suas propriedades. Seu produto, o "conceito" teórico do objeto, concretiza-se por meio da transformação do saber e é expresso por diferentes meios da atividade intelectual.

> Se o homem examina o fenômeno ou o objeto sem relacioná-lo com um certo todo, como extrinsecamente separado e independente, este será pois conhecimento abstrato, por mais detalhado e graficamente colorido que seja, por mais 'concretos' que sejam os exemplos com que se ilustre. E vice-versa, quando o fenômeno ou o objeto se tomam formando unidade com o todo, se estudam em conexão com outras

> de suas manifestações, em relação com sua essência, com a fonte (lei) geral, se trata de conhecimento concreto, ainda que se expresse com ajuda de símbolos e signos, mas 'abstraídos' e 'convencionais' (DAVIDOV, 1988, p.352, grifo do autor).

O mesmo objeto pode ser assim captado em sua forma como conhecimento empírico (se forem analisadas suas características externas, realidade autônoma fora de um sistema) ou como conhecimento teórico, se o objeto for analisado em sua concretude, considerando que o concreto se manifesta como síntese de muitas definições e que:

> O concreto no pensamento é o conhecimento mais profundo e substancial dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. (KOPNIN, 1978, p. 162).

Essa diferenciação entre os processos de generalização, Vigotski também anuncia, mas diretamente relacionada às diferenças entre a lógica formal e a dialética.

> Aqui aparece a diferença entre a lógica formal e a lógica dialética na teoria do conceito. Para a lógica formal, o conceito não é outra coisa que uma representação geral, que se origina como resultado da distinção de uma série de características comuns [...] O caminho da generalização é, portanto, um caminho que leva da riqueza da realidade concreta ao mundo dos conceitos, ao reino das abstrações esquálidas, separadas da vida real e do conhecimento vivo. Pelo contrário, para a lógica dialética o conceito se revela mais rico de conteúdo que a representação, posto que a generalização não é a separação de características singulares, mas sim a revelação dos vínculos e relações de um objeto com os outros, e se o objeto não se revela verdadeiramente na vivência direta, mas sim em toda a diversidade de nexos e relações que determinam seu lugar no mundo e sua conexão com o restante da realidade, o conceito é mais profundo, mais adequado à realidade; é o reflexo mais autêntico e pleno da mesma que a representação. (VIGOTSKI, 1997, p. 230, grifos nossos).

Nos estudos sobre a generalização como Davydov a apresenta, podem ser identificados os pares dialéticos (abstrato/concreto; análise/síntese; material/ideal; particular/geral), que posteriormente se transformaram em bases sustentadoras do modelo de análise da generalização em situações de ensino.

Sinteticamente, na forma de conhecimento empírico, a relação entre os objetos não é o fundamental. O processo de **análise** permite catalogar objetos **particulares** soltos que são comparados por meio de uma propriedade formalmente **geral,** que é identificada por um processo de **síntese**. O **concreto** e o **material** se confundem, e o **abstrato** é considerado como o **ideal**, desvinculado das relações do homem com os objetos e fenômenos.

Por sua vez, na forma de conhecimento teórica, a relação entre objetos e fenômenos é fundamental e, pelo processo de generalização e abstração, esses nexos se estabelecem e se revelam. “A relação **geral** encontrada mediante a **análise** aparece como tal não só por que tem traços iguais aos de suas manifestações **particulares**, mas sim por que se revela nestas formas particulares” (DAVYDOV,1982, p.355, grifos do autor). Pelo processo de análise sobre os objetos e fenômenos estudados (base **material**[25]) se alcançam as abstrações teóricas, e a essência dessas relações que revelam também as suas contradições. Pelo processo de **síntese**, o movimento avança do **abstrato** ao **concreto**[26], que não é o material sensível, mas se aproxima do **ideal**, no sentido que explicita Ilyenkov (1977), como a forma das coisas geradas pelo trabalho humano, e não como característica das coisas determinada pela natureza.Assim, trata-se de um movimento que caminha da caótica (o concreto caótico) representação do todo para a rica totalidade e multiplicidade de determinações e de relações que permitem compreender e explicitar a realidade de forma concreta (o concreto pensado) e, conforme Kosik (1976, p.32): “A explicitação é um método que apresenta o desenvolvimento da coisa como transformação necessária do abstrato em concreto”.

Nesta tese, com a intenção de realizar a análise do processo de generalização no ensino pela via do pensamento teórico, recorre-se à construção de um modelo que se sustenta sobre o movimento destes pares dialéticos: análise/síntese; geral/particular; abstrato/concreto; material/ideal. Foi considerado que para operar, estruturar, consolidar e transformar os conceitos científicos, o pensamento científico teórico recorre a modelos, sistemas simbólicos e de sinais (que são historicamente formados) e que possibilitam o reflexo da estrutura do objeto (no caso o processo de generalização). Não sendo em si caracterizados com o próprio objeto, eles são formas de abstração científica que permitem a expressão das relações essenciais dos objetos que se consolidam em relações gráfico-perceptíveis.

---

[25]Conforme Cheptulin (1982), baseado nos princípios marxistas, as imagens ideais que não coincidem diretamente com as coisas e fenômenos, mas “[…] são o resultado da atividade criadora do sujeito” (CHEPTULIN, 1982, p.18). Desta forma, pensamento e consciência não existem materialmente na realidade objetiva, mas como imagem dessa realidade e, portanto, em sua forma ideal, como elementos de uma realidade subjetiva. Entretanto, é necessário reafirmar que há uma relação de dependência do ideal em relação ao material.

[26]Para uma compreensão mais adequada do movimento de ascensão do abstrato ao concreto. “No primeiro estágio do conhecimento, no estágio da intuição viva, aparecem e formam-se conceitos concretos que refletem o objeto ou o fenômeno na totalidade de suas propriedades e de seus aspectos. Mas esse concreto nesse estágio é apenas sensível. É uma representação desordenada, caótica do todo e, por essa razão, o conceito confunde-se aqui, com as representações, aparece como uma representação concreta, sensível. Depois, quando o sujeito conhecedor analisa os dados concretos sensíveis, começa a distinguir os diferentes aspectos e propriedades dos objetos estudados e passa do singular para o geral, e então aparecem e se formam conceitos abstratos que refletem apenas certos aspectos dos objetos e dos fenômenos. Mas à medida em que o conhecimento humano em desenvolvimento penetra na essência das formações materiais estudadas, reproduz na consciência, passando de um elo a outro, todo o sistema de ligações e de relações necessárias e internas, então aparecem novamente conceitos concretos. Mas esse concreto, ao contrário do concreto que apareceu no estágio inicial do conhecimento, não é uma representação visual, sensível e caótica do todo; ele reflete a natureza interna das formações materiais.” (CHEPTULIN, 1982, p.155).

Para Davydov (1982), os sistemas simbólicos e de sinais são meios que o pensamento científico teórico possui para estruturar e operar com os objetos, idealizá-los, concretizá-los e transformá-los. Desta forma, podem ser criados objetos idealizados que reproduzem aspectos da realidade para a atividade prática. Esses objetos idealizados são os “modelos”. Destaca, ainda, que os modelos podem ser concebidos mentalmente ou concretizados materialmente. A partir de seus estudos e pesquisas, considera que os modelos materiais podem refletir particularidades espaciais dos objetos (como é o caso das maquetes) ou ter semelhança física com o original, ou ainda reproduzir propriedades estruturais dos objetos (modelos matemáticos e cibernéticos). Considera ainda que os modelos mentais podem ser de formato icônico (desenhos, croquis, gráficos) ou de signos (fórmulas de equações algébricas).

Todos os modelos são visuais, e no caso do modelo material deve ainda refletir sua estrutura. Mas considera que “Resulta difícil o problema da evidência gráfica dos modelos de signos, já que seus elementos soltos não guardam similaridades com o original” (DAVYDOV, 1982, p.314).

O uso de modelos auxilia no estudo de um objeto. Não são meros substitutos deste, mas espera-se que como abstrações científicas, no modelo estejam destacadas as relações essenciais do objeto. Nesse sentido, os modelos podem ser considerados como meio de desenvolvimento da atividade cognitiva ou como produto dessa atividade.

Assim, a constituição de um modelo de análise da generalização em situações de ensino, a ser apresentado no item 6.2 representa nesta tese a possibilidade de concretizar o estudo teórico e as investigações sobre as relações entre diferentes componentes e níveis de generalização, bem como possibilitar a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra. Como um modelo mental, pode ser constantemente modificado e espera-se que esta seja sua função: possibilitar que professores e pesquisadores continuamente repensem as componentes e níveis de generalização, enquanto recorrem ao modelo para analisar situações de ensino que envolvem os processos de generalização.

5.2 O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO MATEMÁTICA A PARTIR DO ENFOQUE ONTOLÓGICO E SEMIÓTICO DA COGNIÇÃO MATEMÁTICA

A possiblidade de estruturar um modelo de análise do processo de generalização em situações de ensino foi concretizada dos estudos dos modelos de análise dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, propostos e desenvolvidos pelos pesquisadores Godino (2002) e Font (2007), por meio do desenvolvimento teórico do Enfoque Ontológico e

Semiótico da Cognição Matemática (EOS). Esses estudos e leituras possibilitaram que fossem geradas as abstrações necessárias para constituir um modelo próprio relacionado ao processo de generalização, considerando o seu movimento histórico e lógico e destacando possíveis componentes e níveis de generalização visando à organização do ensino.

Assim, os estudos realizados sobre o EOS contribuíram nesta pesquisa para elaborar a estrutura do modelo de generalização algébrica, e neste item se descreve uma síntese das análises realizadas sobre o modelo proposto pelo EOS e especificamente sobre o processo de generalização matemática. Ainda que existam divergências teóricas em relação aos fundamentos desta pesquisa, que se pauta sobre a teoria histórico-cultural, estas serão explicitadas, destacando-se os elementos que contribuíram para a constituição do modelo a ser aqui apresentado.

O EOS parte do que considera uma ontologia de objetos matemáticos e leva em consideração a matemática como atividade de resolução de problemas compartilhada socialmente, como linguagem simbólica e como um sistema conceitual logicamente organizado (FONT, 2007). Nesse sentido, define “prática” e “objeto” matemático e apresenta um modelo de análise dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, procurando identificar os significados (pessoais e institucionais) em jogo.

O modelo pretende articular as dimensões semióticas, epistemológicas, psicológicas e socioculturais em educação matemática. Desta forma, considera a diversidade de objetos (em seu conteúdo e expressão); a diversidade de atos e processos semióticos; a diversidade de contextos que determinam os processos de semioses (GODINO, 2002).

Font, Godino e Gallardo (2012) entendem que uma visão descritiva e realista da matemática está presente nas situações de ensino. Isso porque os objetos matemáticos adquirem vida própria e, independente do tempo e do espaço, como se não estivessem associados às pessoas que os elaboraram.

Nesse aspecto, procuram apresentar o enfoque ontossemiótico como uma alternativa para a filosofia da educação matemática de uma forma antirrealista. Assumem que a matemática é uma atividade humana e que as entidades envolvidas nessa atividade emergem das ações e dos discursos por meio das quais são expressas e comunicadas (postulado semiótico). Assim, ser um objeto matemático é equivalente a estar envolto em práticas matemáticas, em que há a combinação de práticas operativas (com produção e leitura de textos matemáticos) e práticas discursivas, que refletem a produção e leitura. Baseados em Wittgenstein (convencionalismo), entendem que os objetos matemáticos são processos produzidos pela mente e que as proposições matemáticas são regras estabelecidas sobre os sinais e, desta forma, recorrem aos “jogos de linguagem”. Diferenciando “signo” de “objeto”, entendem que as formas de expressão são também objetos matemáticos relacionados ao conteúdo de outro objeto.

Nesse sentido, constata-se uma diferença em relação à perspectiva da teoria histórico-cultural, que investiga o produto da atividade humana em geral, e não somente a partir do que seria identificado previamente como práticas matemáticas. O objeto matemático é gerado dentro da atividade humana e existem diferentes formas de representá-lo – mas estas não se desvinculam da existência de um objeto/conceito matemático como elaboração humana. Além disso, se entende que a forma de conhecimento matemática, assim como outras formas de conhecimento, são produções humana para interpretação da realidade objetiva. No enfoque ontossemiótico, por sua vez, a “prática matemática” é entendida como a atuação ou expressão (verbal, gráfica e outras) que alguém (que pode ser um indivíduo isolado ou uma instituição – um grupo de indivíduos envolvidos com a mesma problemática) realiza para resolver problemas matemáticos, comunicar a solução, validar e generalizar a outros contextos (FONT, 2007). Os objetos matemáticos (tudo aquilo a que se pode indicar ou fazer referência) são concebidos desses sistemas de práticas, que incluem componentes operativos (relacionados aos processos de solução dos problemas) e discursivos (relacionados aos processos de comunicação e generalização a outras situações). Pode-se questionar, entretanto, o que se define como “problemas matemáticos”, e, a partir dos conhecimentos da teoria histórico-cultural, entende-se que se pode fazer referência à resolução de situações-problema, que requerem conhecimento matemático. Tais situações-problema podem estar relacionadas a outros campos de conhecimento ou inseridas no próprio campo científico matemático, mas não limitadas a eles.

Baseado nas funções que os objetos desempenham nas práticas matemáticas, o modelo do enfoque ontossemiótico propõe categorias e assume como “objetos matemáticos primários”:

> • Linguagem (termos, expressões, notações, gráficos [...]) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual [...])
> • Situações- problemas (aplicações extramatemáticas, exercícios [...])
> • Conceitos – definição introduzidos mediante descrições ou definições) (reta, ponto, número, media, função [...])
> • Proposições (enunciados sobre conceitos)
> • Procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo [...])
> • Argumentos (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos dedutivos de outro tipo [...]). (FONT, 2007, p.103).

Assim, nesse modelo, o sistema de práticas determina o significado de um objeto matemático. O significado é considerado então como o conteúdo associado a uma determinada expressão, pode ser ou não uma entidade mental, e é aquilo a que se refere um sujeito em um momento e circunstâncias dadas (GODINO, 2002).

Os seis objetos considerados primários, apresentados anteriormente por Font (2012), se relacionam entre si formando o que no EOS chama “configurações”, que podem ser epistêmicas, se relacionadas à rede de objetos institucionais, ou cognitivas, se relacionadas à rede de objetos pessoais. A configuração epistêmica também está relacionada ao termo “contexto” em uma visão ecológica, no sentido em que caracteriza o entorno do objeto matemático. Desta forma, considera-se que essa perspectiva teórica é “contextualizadora”, no sentido atribuído por Lacasa (1994), pois o contexto representa os fatos e fatores que influenciam um resultado se caracterizando como uma variável independente que interfere na construção do conhecimento.

A elaboração do modelo teórico por meio do EOS, para analisar as práticas matemáticas, suas representações e as condições de seu desenvolvimento, também se apoia sobre cinco facetas ou dualidades sobre as quais os objetos matemáticos podem ser considerados: pessoal/institucional; extensivo/intensivo; ostensivo/não ostensivo; elementar/sistêmica; expressão/conteúdo.

Outros processos associados às outras dualidades e objetos primários também são estudados, bem como a relação entre eles. Ao todo são 16 processos, registrados na Figura 10.

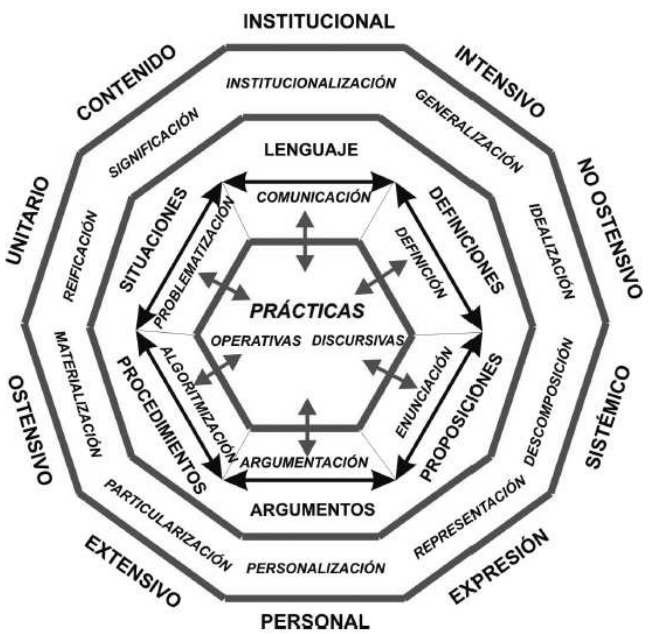


Figura 10 - Dualidades do modelo de análise das práticas matemáticas.
Fonte: FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v. 33, n. 1, p., 2010.

Nota-se que esses dezesseis processos estão associados ou ao objeto matemático (linguagem, situações-problema, procedimentos, argumentos, proposições, definições) ou à dualidade considerada. Por exemplo, ao objeto matemático "'proposições", está associado o processo de "enunciação"; ao objeto matemático "procedimentos", está o processo de "algoritmização", e assim por diante. No caso das dualidades, encontram-se, por exemplo, os processos de "representação" e "significação" associados à dualidade expressão/conteúdo; ou ainda, o processo de "materialização" e "idealização", à dualidade ostensivo/não ostensivo, e assim por diante.

Não se pretende nesta pesquisa explicitar os princípios teóricos do enfoque ontossemiótico, ou mesmo esmiuçar a organização de seu modelo. Entretanto, é necessário considerar que da estrutura desse modelo foi possível constituir um modelo próprio para análise do processo de generalização matemática, a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural, considerando pares dialéticos (abstrato/concreto; material/ideal; análise/síntese; particular/geral).

Por ser o processo de generalização matemática, o foco deste item da tese, pretende-se destacar apenas a relação do processo de generalização com as dualidades e os objetos matemáticos presentes no modelo constituído pelo enfoque ontossemiótico.

O processo de generalização matemática, a partir do enfoque ontossemiótico, está claramente associado à dualidade **extensivo/intensivo**, no sentido em que esta contempla as dualidades particular/geral e exemplar/tipo. Essas dualidades estão relacionadas à necessidade de generalizar problemas e soluções organizando-os em estruturas cada vez mais gerais. Na análise das práticas matemáticas, esse modelo considera que o mesmo objeto pode atuar como "particular" ou como representante de uma classe de objetos e, nesse sentido, "geral", dependendo da prática matemática em que está inserido.

> Os processos de particularização-generalização no EOS estão associados à dualidade extensivo-intensivo. Um objeto extensivo é usado como um caso particular (por exemplo, a função y = 2x + 1), enquanto que um intensivo é uma classe (por exemplo, uma família de funções y = mx + n). Os termos extensivo e intensivo estão sugeridos pelas duas maneiras de definir um conjunto, por extensão (um extensivo é um dos membros de um conjunto) e por intensión (se consideram todos os elementos de uma vez). Portanto, por extensivo entendemos um objeto particularizado (individualizado) e por intensivo uma classe ou conjunto de objetos. (RUBIO, 2012, p.127,128).

Na afirmação anterior, percebe-se claramente como essa dualidade está relacionada ao que considera como práticas matemáticas, considerando a representação "particular" ou "geral" de uma função. Entretanto, pode-se considerar que a representação "geral" considerada é organizada a partir dos casos particulares, e da qual reconhecem-se características do conhecimento empírico. A expressão geral y = mx+n, é a síntese do que é comum na forma de expressão à família de funções de 1º grau, mas não destaca suas grandezas ou a relação entre elas.

No enfoque ontossemiótico, os processos de generalização e abstração se confundem, e não há uma distinção clara entre os dois, diferente do que acontece a partir dos estudos de Davydov (1982), em que os processos de generalização, abstração e formação de conceitos são considerados como processos diferentes de pensamento ainda que relacionados. Font e Contreras (2008) consideram três tipos de processos de generalização que permitem alcançar o intensivo (a classe de objetos): a abstração reflexiva ou construtiva, a eliminativa e a aditiva.

No processo da abstração reflexiva que possui base piagetiana, parte-se da reflexão sobre ações, objetos e situações e sua simbolização, no sentido de encontrar relações invariantes. Essas relações descritas simbolicamente adquirem certa independência. Pela análise do EOS, uma característica da abstração reflexiva é de que se constroem intensivos a partir da reflexão sobre a ação. No processo considerado como da generalização eliminativa, outro mecanismo para obter intensivo, se associa à abstração empírica, e trabalha eliminando ou separando aspectos do concreto (que tem muitas características diferentes). O intensivo é considerado como uma das partes que compõe o extensivo. De forma contrária, na abstração aditiva, a relação parte/todo considera a existência de um extensivo, que, junto a outros extensivos, compõe o intensivo. No enfoque EOS, também se considera que essa forma de abstração aditiva está associada a "contexto de justificação" e é usada no enfoque formalista da matemática.

A partir dessa dualidade também se explica o uso do "elemento genérico" considerado no modelo uma característica básica da atividade matemática.

> Uma das características da atividade matemática é o uso de elementos genéricos. O raciocínio matemático, para ir do geral ao geral faz intervir uma fase intermediária que consiste na contemplação de um objeto individual. Este fato provoca um grave dilema: se o raciocínio se irá aplicar a um objeto concreto, é preciso que se tenha alguma garantia de que se raciocina sobre um objeto qualquer para que se caiba justificar a generalização em que se termina o raciocínio. Ademais, posto que o objeto concreto vai associado a sua representação, aparece o problema de se a representação é de um elemento concreto ou do conceito geral. (FONT, 2007, p.114).

Em Font e Contreras (2008), o papel desse "elemento genérico" é destacado como um objeto particular na demonstração de uma proposição matemática, e recorrem a Descartes para uma explicação "é necessário considerar um objeto específico para a intuição, sem o qual não se pode referir a ele mesmo, mas a objetos particulares, para ser capaz de agir” (FONT; CONTRERAS, 2008 p.43). Indicam ainda que ao solicitar, por exemplo, a definição de uma função derivada, é comum dizer “dada uma função y = f(x)”, sendo esta tomada como elemento genérico.

Ponderam ainda que a noção de “jogo de linguagem” (Wittgenstein) explica o fato de um processo de pensamento que, conduzido a partir dessa fase intermediária (com um elemento genérico), possibilite uma conclusão universal.

> Quando nas práticas matemáticas usamos um ostensivo como elemento genérico, estamos atuando sobre um objeto particular, mas nos situamos em um ‘jogo de linguagem’ no qual se entende que nos interessam suas características gerais e prescindimos dos aspectos particulares (FONT, 2007, p.117, grifo do autor).

Os estudos realizados a partir da teoria histórico-cultural indicam que o papel desse “elemento genérico” seria o de particular, estabelecendo a mediação entre o que seriam as formas singulares e universais de manifestação de um conceito. Assim, reconhecer uma função y = f(x) como elemento genérico permitiria os estudos sobre esse conceito, não só como objeto matemático ou para compreendê-lo de forma aprofundada em suas características específicas, mas para se apropriar dele como forma de conhecimento que permite a interpretação da realidade.

Ainda conforme o modelo do enfoque ontossemiótico, a generalização como processo matemático pode ser considerada como não ostensiva e que necessita de uma representação (sua faceta ostensiva e perceptível), dada pela linguagem (GODINO, 2002).

> A linguagem vem a ser o meio pelo qual não só se expressam os não-ostensivos, mas que também é instrumento para sua constituição e desenvolvimento. Por isso, no enfoque ontosemiótico a linguagem é considerada como a faceta ostensiva dos objetos matemáticos. (RUBIO, 2012, p.122).

No modelo do enfoque ontossemiótico se considera que os objetos matemáticos descritos por sua expressão não devem ser considerados isoladamente, mas sim colocados em relação uns com os outros. Para considerar esse caráter relacional da atividade matemática, recorrem à dualidade expressão/conteúdo. A partir dessa dualidade, pode-se entender a generalização como um processo mental que possui um conteúdo e que necessita de uma forma de expressão a ser estabelecida por um sujeito.

> No EOS se considera que a atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos se caracterizam por ser essencialmente relacionais. Os distintos objetos não se devem conceber como entidades isoladas, mas sim postas em relação uns com os outros. A distinção entre expressão e conteúdo nos permite

> ter em conta o caráter essencialmente relacional da atividade matemática. A relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão) e um consequente (conteúdo) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um certo critério ou código de correspondência. (RUBIO, 2012, p.120).

Da teoria histórico-cultural e de forma mais específica dos estudos realizados sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos, entende-se que o reconhecimento de nexos conceituais do conhecimento algébrico explicita tanto as relações entre os próprios objetos quanto suas diferentes formas de representação, inserindo-os e analisando-os no movimento da atividade humana.

Dessa forma, também é possível analisar a atividade de um sujeito e a forma como age com o conhecimento matemático ou a atividade coletiva analisada em determinado momento histórico ou no movimento filogenético de constituição da espécie humana.

No enfoque ontossemiótico, essa análise da ação de um sujeito ou coletiva é dada pela dualidade pessoal/institucional. Assim, pode se entender o processo de generalização realizado por um indivíduo (pessoal), ou por um conjunto de indivíduos, presente em documentos curriculares, livros-texto, adquirindo caráter institucional, no sentido em que contêm certas normas e são usados como referência no processo de ensino e aprendizagem (GODINO, 2002).

> A “cognição pessoal” é o resultado do pensamento e a ação do sujeito individual frente uma certa classe de problemas, enquanto que a “cognição institucional” é o resultado do diálogo, o convenio e a regulação no seio de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas. (RUBIO, 2012, p.110, grifo da autora).

O enfoque ontossemiótico também considera a dualidade elementar/sistêmico como o modo de observar os objetos matemáticos, ou seja, os objetos podem ser analisados de forma elementar como uma unidade; ou como compostos com certa organização e estrutura, o que implicaria um sistema de conceitos. Dessa dualidade entende-se que o processo de generalização matemática pode ser estudado como um elementar e relacionado a outros processos ou objetos ou como sistêmico, e, nesse sentido, poderiam ser investigadas possíveis componentes desse processo, decompondo-o em diferentes níveis.

Também é possível associar o processo de generalização aos demais processos do modelo de análise do enfoque ontossemiótico. Serão aqui destacadas algumas dessas relações do processo de generalização/particularização com os demais processos, desenvolvidas de textos de outros autores da teoria.

- **O processo de generalização/particularização em relação ao processo de argumentação**

O processo de argumentação está associado ao objeto argumento. Godino e Recio (1997), analisando a noção de prova em diferentes contextos institucionais (ensino de matemática, matemática profissional, vida cotidiana e outros), concluíram que o ensino da prova em matemática deve estar associado às práticas argumentativas humanas. O processo de generalização matemática não prescinde do processo de argumentação e principalmente do processo de prova matemática, no sentido de justificar as generalizações realizadas.

- **O processo de generalização/particularização em relação ao processo de materialização/idealização**

No enfoque ontossemiótico, pretende-se distinguir os processos de particularização/ generalização dos processos de materialização/idealização. Esse último está associado à dualidade ostensivo/não ostensivo. A distinção entre objetos ostensivos e não ostensivos está relacionada a um "jogo de linguagem" (Wittgenstein). O processo de idealização é entendido no enfoque ontossemiótico como um processo que cria objetos, além dos ostensivos (que estão nas experiências materiais humanas), gerando de forma idealizada os não ostensivos, que, nesse sentido, possuem a relação de expressão/conteúdo, e não podem ser concebidos de forma independente, como se o objeto não ostensivo tivesse vida própria independente de sua forma de expressão. Então, como resultado do processo de idealização, é possível efetuar a passagem de um objeto matemático particular de um ostensivo para um não ostensivo. Só que para manipular os objetos não ostensivos são necessárias representações ostensivas, e este é o processo de materialização, nessa interpretação teórica.

- **O processo de generalização/particularização e os processos de representação, metáfora e contexto**

Cabe ainda citar que Font (2007) estabelece a relação do processo de particularização/generalização com os processos de representação, metáfora e contexto. Nessa linha teórica, considera-se que algumas dificuldades na aprendizagem de matemática estão relacionadas a aspectos da atividade matemática, que são: "1) O fato de que os objetos matemáticos se apresentam sempre por meio de suas representações e 2) que o raciocínio matemático, para ir do geral ao geral, é necessário passar pelo particular" (FONT, 2007, p.95). Desta forma, entende-se que existe um tipo de entidades sobre as quais se realizam ações para compreender um segundo tipo de entidade. Por exemplo, para compreender o "geral'", recorre-se ao "particular" e, para compreender o "objeto", recorre-se a sua "representação". Entende que essa característica também se apresenta nos processos de metáforas e contextualização matemática, e os associa como processos essenciais nos quais intervém a relação A é B. Assim, os processos particular/geral, representação, metáfora e contexto possuem em comum tal característica e atuam juntos sobre a tarefa matemática propostas aos estudantes.

A relação do processo de generalização com os demais processos envolvidos no modelo do enfoque ontossemiótico não está explicitada, mas pode-se considerar que são relações necessárias para a compreensão integral do processo de generalização matemática. O que se pretende aqui não é prosseguir com esse estudo, que implicaria aprofundamento teórico bastante específico, mas identificar a partir dela que elementos podem ser usados na constituição de um modelo próprio de análise da generalização matemática em situações de ensino, também baseado no movimento histórico e lógico dos conceitos.

Estudar os princípios deste modelo ontossemiótico agregou elementos teóricos para que o modelo de análise da generalização em situações de ensino pudesse ser concretizado.

A estrutura de análise das práticas matemáticas realizadas por meio das dualidades apresentadas e a possibilidade de gerar um modelo que torne possível detalhar o processo de generalização são as principais contribuições deste estudo para a constituição do modelo de generalização que será apresentado nesta tese. Entretanto, o embasamento teórico adotado para compor essas dualidades será o das categorias do materialismo dialético. Portanto, o modelo será definido e organizado a partir de alguns dos pares dialéticos apresentados no capítulo 4, ao realizar o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos.

São algumas razões que justificam essa opção teórica:

a) o fato de que a essência do conhecimento algébrico pode ser revelada por meio do estudo das categorias dialéticas sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos;
b) existem diferenças teóricas na interpretação de alguns desses pares dialéticos, ou dualidades. Por exemplo, a dualidade ostensivo/não ostensivo está associada no modelo do enfoque ontossemiótico aos processos de materialização e idealização, ou seja, a passagem de um objeto particular de um ostensivo para um não ostensivo é considerada como um processo de idealização, e o movimento contrário é considerado como o processo de materialização. Entretanto, considerando o materialismo dialético como método, tem-se por princípio a sua base material dos

objetos e fenômenos, e o fato de que as imagens ideias formadas pelos processos de pensamento e na consciência, apesar de não existirem materialmente na realidade objetiva, existem como imagem dessa realidade, em sua forma ideal, como resultado da atividade do sujeito e, portanto, diretamente relacionada à base material. Assim, o par/dialético material/ideal supera essa dualidade ostensivo/não ostensiva;

c) não estão contempladas no modelo de análise do enfoque ontossemiótico, alguns pares dialéticos, por exemplo, o par dialético abstrato/concreto. Consideramos que esse par revela um importante movimento do pensamento no sentido do abstrato ao concreto, movimento este que necessariamente inclui as abstrações constituídas a partir de um movimento de análise sobre o concreto caótico e as generalizações constituídas de um movimento de síntese, que conduz à ascensão do abstrato ao concreto. Observa-se que o par dialético análise/síntese também não está contemplado nas dualidades do modelo do enfoque ontossemiótico.

Por fim, nesse modelo do enfoque ontossemiótico, o processo de abstração se confunde com o processo de generalização. Os estudos de Davydov (1982), realizados sob os fundamentos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade, com ênfase na atividade de estudo, por sua vez, diferenciam os processos de abstração, generalização e formação de conceitos, que, em seu movimento integrado, constituem os processos de pensamento. Além disso, esses estudos destacam as características dos processos de generalização empírica e teórica, que também foi considerada no movimento de constituição do modelo de análise da generalização.

5.3 MODELO DE ANÁLISE DA GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA: A CONCRETIZAÇÃO A PARTIR DOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS EXPLICITADOS

Por meio da análise de programas curriculares de diferentes países, Kendal e Stacey (2004) destacam a dificuldade de estabelecer uma visão única e comum sobre a concepção de ensino de álgebra adotada e destacam a álgebra concebida como: um meio para expressar as generalizações em padrões; o estudo da manipulação de símbolos e resolução de equações; um modo para resolver problemas; um modo para interpretar o mundo por meio de situações reais modeladas; um sistema formal.

Em busca de parâmetros de diferenças entre essas diferentes concepções, destacam o modo como o processo de generalização é abordado e revelam que ele pode vir associado ao estabelecimento de leis em padrões, mas também associados à resolução de situações que usam o pensamento funcional, no sentido de identificar as variáveis dependentes e independentes, encontrar a relação entre elas, usar uma tabela ou gráficos e recorrer aos padrões ou relações para resolver o problema.

Por sua vez, Radford (1996 a) indica que o processo de generalização não é um conteúdo específico da matemática e que existem exemplos cuja conclusão da generalização é absurda, preocupando-se com o que pode constituir uma “boa” ou “má” generalização. Nesse sentido, pretende retomar o papel epistêmico da generalização no conhecimento matemático, e em particular, no conhecimento algébrico. Destaca ainda que há muitos tipos de generalizações e, do ponto de vista didático, a generalização depende dos objetos matemáticos que estão sendo generalizados, sendo sua base lógica a de justificar sua conclusão, e, nesse aspecto, um processo de prova, que se move entre conhecimentos empíricos e abstratos.

Assim, Radford (2010) se refere a níveis de generalização do pensamento matemático. Esses diferentes níveis estão caracterizados pelo desenvolvimento epistemológico dos conceitos matemáticos e seus sistemas semióticos de representação.

> Levamos em consideração o fato de que o pensamento matemático pode ocorrer em vários níveis de generalidade. A isso, adicione a premissa epistemológica que a dificuldade conceitual da tarefa matemática e dos sistemas semióticos que medeiam o pensamento matemático que é assim provocado caracteriza estes níveis de generalidade. (RADFORD, 2010, p.115).

Desta forma, o processo de generalização que se encontra na escola carrega em si o significado e a atividade cognitiva relacionada a esse processo encontrada na experiência humana historicamente acumulada. Por isso, influencia e condiciona o que pode ser compreendido como processo de generalização algébrica e a que níveis ela pode chegar ao desenvolver da escolaridade.

O fato é que ainda não se distinguem claramente os diferentes níveis do processo de generalização considerados para aprendizagem da álgebra em diferentes faixas etárias, ainda que o desenvolvimento histórico do conhecimento algébrico revele esses diferentes níveis de generalização.

Nesta pesquisa identificou-se como nexo teórico essencial para o conhecimento algébrico, estabelecer as relações entre as grandezas de forma geral. Compreendeu-se, por meio do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos, em diferentes momentos históricos, a compreensão e o reconhecimento das grandezas, bem como de sua variação, e o uso de sequências, equações e funções se modifica atingindo níveis de generalidade cada vez mais complexos.

Ao reconhecer que o processo de generalização pode ser considerado em níveis de generalidade e de algumas componentes, tornou-se necessário constituir um “modelo” para a análise desses níveis de generalização, particularmente as algébricas, nas situações de ensino de propostas curriculares e livros didáticos, bem como presentes no discurso e nas ações dos professores.

Assim, a seguir será apresentado o modelo proposto que permite estabelecer algumas componentes para o processo de generalização e analisar os níveis de generalização que as diferentes situações de ensino envolvem. Os fundamentos teóricos para a elaboração desse instrumento se apoiam essencialmente sobre a generalização como processo de pensamento em seu movimento histórico e lógico; os estudos e pesquisas de Davydov (1982,1988), que caracterizam os processos de generalização empírica e teórica, e o modelo de análise das práticas matemáticas do enfoque ontossemiótico, apresentados anteriormente.

Portanto, como no modelo do enfoque ontossemiótico, pretende-se que esse modelo contemple dimensões epistemológicas e psicológicas do processo de generalização. Além disso, entende-se que uma ontologia dos objetos matemáticos, como pretendida no EOS, e de forma específica uma ontologia do processo de generalização matemática, só é possível a partir do estudo do movimento histórico e lógico desse processo, para que seja possível compreender como ao longo da experiência histórica humana ele foi sendo transformado, adquirindo novas qualidades conforme as condições humanas e históricas até alcançar o nível de generalização atual. Para tanto, recorrem-se aos pares dialéticos, para sustentação das categorias criadas e usadas no modelo.

Este modelo, que deve ser considerado como constantemente em construção, pretende realizar a análise sobre o processo de generalização algébrica para a faixa etária de 9 a 14 anos. Pretende estabelecer níveis de generalização algébrica que poderiam ser esperados e alcançados ao longo do processo de ensino nessa faixa etária, mas não pretende indicá-los como únicos, nem se caracterizar como a epistemologia do processo de generalização matemática. Ainda assim, busca imprimir movimento a esses níveis no sentido em que eles não devem ser compreendidos como etapas a serem superadas, mas como diferentes momentos do processo de generalização.

O modelo elaborado a partir do enfoque ontossemiótico é constituído por um polígono que possui ao centro as práticas matemáticas (operativas ou discursivas), das quais emergem os objetos matemáticos, relacionados aos processos matemáticos e estes são olhados a partir de algumas dualidades.

Para a elaboração do modelo aqui proposto de análise da generalização algébrica em situações de ensino, foram estabelecidas algumas modificações e recorreu-se à ideia de um poliedro (neste caso, um tetraedro) que contém o modelo de análise (no caso uma esfera, que representa o processo de generalização) (Figura 11).

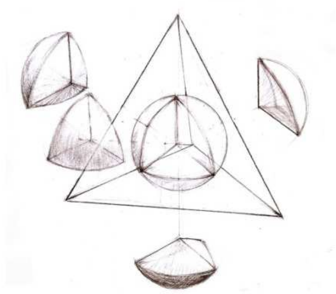


Figura 11 - Modelo de análise da generalização em situações de ensino.
Ilustração: José Eduardo Contreras.

As faces do tetraedro representam os pares dialéticos geral/particular, concreto/abstrato; material/ideal; análise e síntese, que são a sustentação para o estudo do movimento do processo de generalização. Considerou-se válida a representação do processo de generalização como uma esfera, haja vista que ela pode ser dividida em gomos (que representam as componentes do processo), que podem ser considerados diferentes níveis (ou camadas) do processo de generalização do mais externo ao mais interno. Esse nível mais interno corresponde ao núcleo da esfera, onde a essência do processo de generalização se encontra em sua forma mais desenvolvida, a “célula” como se refere Davydov (1982).

Os gomos da esfera representam as componentes do processo de generalização. A princípio, foram definidos quatro componentes para o processo de generalização: o conteúdo, o elemento mediador, as formas de expressão e significado e os critérios de validade. Entretanto, é importante notar que esta é uma versão inicial desse modelo e as análises realizadas, recorrendo ao uso do modelo, mostram o potencial para seu desenvolvimento. Assim, outras componentes podem ser incluídas, sendo o processo de generalização decomposto em mais “gomos”.

Então, foram estabelecidos como componentes do processo de generalização, representados por meio dos gomos da esfera:

a) conteúdo da generalização: objetos matemáticos, padrões, procedimentos, propriedades, relações e outros;

b) formas de expressão e significados: as palavras, signos, símbolos e outros;

c) elementos mediadores: por meio dos quais a generalização é concretizada, por exemplo, o elemento desconhecido, o número geral, o elemento genérico, a variável;

d) critérios de validade, que atribuem rigor ao processo de generalização: os processos de prova e demonstração.

A ideia de usar uma esfera para representar o processo de generalização concretizou-se para possibilitar o aprofundamento em relação aos níveis de generalidade. Entretanto, para facilitar a sua representação, posteriormente recorreu-se à forma plana de uma circunferência. Além das quatro componentes citadas, foram definidos quatro níveis que podem ser visualizados como circunferências concêntricas (Figura 12).

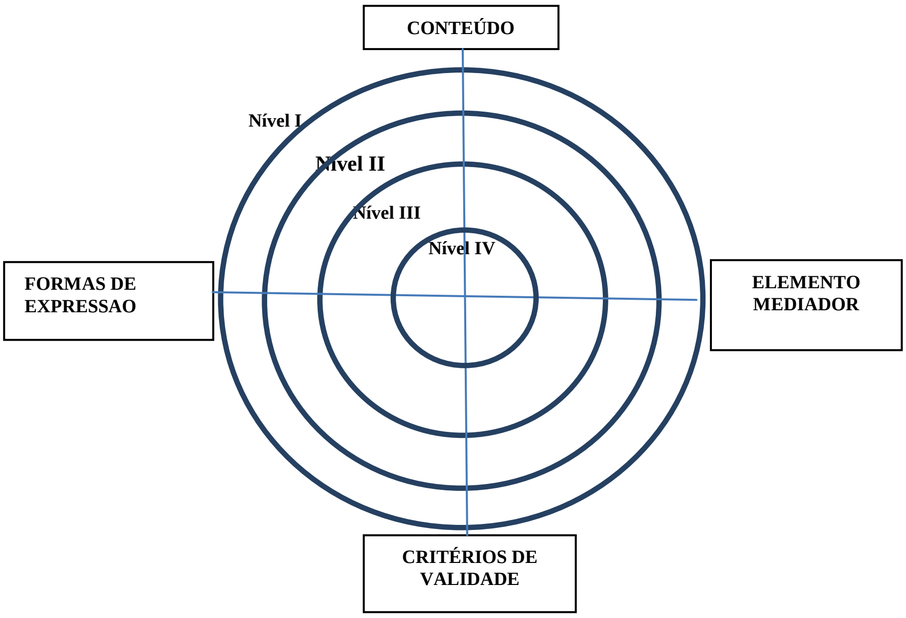


Figura 12 - Representação plana das componentes do modelo de análise da generalização**.**

O nível I, representado pela circunferência de maio raio e com contorno mais externo, a generalização se atém ao que é sensível, palpável, objetos físicos e fenômenos aparentes; no nível II, considera-se a generalização pelo estabelecimento de algumas relações entre os objetos e os fenômenos, que não são necessariamente as essenciais; no nível III, identificam-se as relações essenciais e a generalização se processa sobre regras estabelecidas sobre essas relações; e no nível IV, a generalização envolve as estruturas matemáticas complexas. Optou-se no instrumento por definir o nível I como sendo o mais externo, por ser também o mais disperso, e o nível IV, representado pela circunferência mais interna, por concentrar nas estruturas matemáticas a essência do processo de generalização. Entende-se que os níveis I e

II são caracterizados por concentrarem formas empíricas de pensamento, enquanto as formas teóricas se concentram nos níveis III e IV.

A seguir são detalhadas as componentes consideradas para o processo de generalização e os seus diferentes níveis.

5.3.1 Conteúdo da generalização

O QUE podemos generalizar? Quando se faz referência ao conteúdo da generalização, o foco de atenção pode ser dirigido para essa pergunta. A generalização pode ser realizada sobre objetos físicos, ações, processos. Estes caracterizam o conteúdo da generalização.

Assim, a generalização pode ser realizada por meio das características sensíveis e palpáveis dos objetos (por exemplo, identificar objetos vermelhos), ou pela relação que este objeto mantém com outros objetos ou fenômenos (por exemplo, identificar uma calculadora na categoria de objetos de um economista), ou ainda ser realizado sobre propriedades anteriormente estabelecidas ou sobre conceitos. A esses elementos sobre os quais se realiza o processo de generalização, atribui-se o termo “conteúdo”. No movimento histórico e lógico é possível identificar momentos em que os processos de generalização matemática e especificamente algébrica se realizaram sobre diferentes “conteúdos”.

O objetivo final, mesmo, para a generalização matemática, seja esta realizada sobre objetos, ou sobre ações, processos ou outras relações, é sempre o de encontrar uma representação “geral” que abranja os elementos particulares. Nesse sentido, o enfoque ontossemiótico se refere à dualidade extensivo/intensivo, e por extensivo entende um objeto particular e por intensivo, uma classe de objetos. Neste enfoque, o que é considerado como objetos matemáticos primários são linguagens, procedimentos, proposições, situações-problemas, definições de conceitos, argumentos. Assim, entende-se que a generalização pode ser realizada sobre qualquer um desses objetos, e estes entre outros caracterizam seu conteúdo.

Em busca de estabelecer alguns níveis de generalização referentes ao **conteúdo** do processo de generalização, definem-se:

a) **nível I**: a generalização a partir da percepção direta dos objetos físicos: Sobre os materiais sensíveis, palpáveis, visíveis podem-se efetuar generalizações, e abstrair a partir deles características particulares, identificando o que há em comum e descrevendo-os por meio de uma palavra, o que caracterizaria uma generalização empírica sobre esses materiais;

b) **nível II:** a generalização sobre relações simples e atribuição de alguns significados − Conforme os objetos físicos e fenômenos são compreendidos dentro da atividade humana e de um sistema de relações, novas abstrações, e consequentemente generalizações podem ser efetuadas sobre eles. O nível dessas generalizações também depende das relações que se estabelecem com os objetos. Por exemplo, ao olhar um grupo de pedrinhas, identificando o que há em comum, ainda no nível anterior de generalização, pode-se entender e definir empiricamente como “são todas pedras”; porém, com um novo olhar relacionado aos objetivos da atividade do sujeito, podem ser identificadas as quantidades de pedrinhas em cada grupo (o que permitiria alcançar posteriormente o conceito de número), ou a qualidade material das diferentes pedras, o que necessita colocar os objetos em relação e também em relação a outros objetos e fenômenos.

   Também nesse nível alguns procedimentos podem ser generalizados. Assim é que é possível compreender que se criam modos de ação para resolver alguns problemas particulares, por exemplo, o método da falsa posição para resolver equações está em um nível de generalização em que ainda é necessário usar um caso particular para estabelecer as relações e encontrar o valor desconhecido;

c) **nível III:** a generalização sobre a base da objetivação de alguns conceitos − Quando as relações entre objetos e fenômenos se concretizam, se consolidam e alguns conceitos são objetivados, torna-se possível realizar a generalização sobre esses conceitos, bem como suas propriedades, e este é outro nível. O aprofundamento de determinado conceito permite que se estabeleçam novas relações e alcance ainda outro nível de generalização, que desprende das ações palpáveis e materiais e se desenvolve como relação entre conceitos (síntese das múltiplas determinações). Por exemplo, desta forma, a compreensão do conceito de número permite que se estabeleçam outras relações, propriedades, que continuam em um processo constante de análise e síntese, mas agora sem a necessidade do apoio objetal;

   A análise desenvolvida sobre a quantidade de pedrinhas para abstrair, por exemplo, a noção de número, exige também um processo de síntese em que se tenta explicar os particulares por meio do universal alcançado. Historicamente se ascende a noção de número por meio de quantidades discretas, entretanto impasses históricos (o caso dos pitagóricos) revelam a necessidade de trabalhar com quantidades contínuas e é pelo processo de análise e síntese constantemente realizado que permitem a ascensão do abstrato ao concreto do conceito de número. Esse nível de generalização é outro. É o nível em que o estudo das contradições no geral explica os particulares;

d) **nível IV:** a generalização estabelecida sobre a relação entre os conceitos − Outro nível em que se comparam e associam propriedades com relações estabelecidas sobre os conceitos; identificam-se diferenças e semelhanças; envolve cadeias de dois significados. Por exemplo, quando se estabelecem generalizações sobre as relações entre duas funções, gerando funções compostas, inversas e outros.

Especificamente no que se refere ao que tem sido considerado como essencial no conhecimento algébrico, pode-se entender ainda que a componente "conteúdo da generalização" se refere ao reconhecimento das grandezas envolvidas. Assim, é possível avançar de um nível no qual o conteúdo são as grandezas físicas e sensíveis encaminhando para grandezas que se derivam do processo de conhecimento, do movimento de análise por meio das abstrações, por exemplo, grandezas matriciais, vetoriais.

5.3.2 Elemento mediador da generalização

Para que o processo de generalização aconteça, são necessários elementos mediadores, que se configuram como instrumentos, no sentido atribuído por Vigotski (2001), como ferramentas psicológicas.

De acordo com os níveis de generalização estabelecidos para esse modelo, em relação ao elemento mediador, definem-se:

a) ní**vel I:** o elemento particular desconhecido − Por exemplo, como elemento particular desconhecido, pode-se fazer referência à noção de incógnita. Esta representa um elemento desconhecido, como o perímetro, ou a altura, ou uma determinada quantidade de objetos e outros. Historicamente existem registros em que se usavam palavras como *aha*, ou mesmo a abreviaturas de palavras para representar essas quantidades desconhecidas (momento da álgebra sincopada). Pode-se considerar que ao fazer uso desse elemento desconhecido é possível estabelecer relações entre as grandezas para encontrar um valor particular. Não está associado diretamente ao estabelecimento de regras gerais, mas sim à resolução de problemas específicos, que não têm por objetivo encontrar uma fórmula ou um modo de ação geral de resolução, mas encontrar um resultado particular. Nesse sentido, a diferença entre o elemento desconhecido (incógnita) e o que se entende por variável (que será aqui considerado como outro elemento mediador para o processo de generalização) é conceitual (em geral não trabalhada em livros ou guias escolares);

b) **nível II:** o elemento particular que representa o geral − O elemento particular que representa o geral envolve uma representação que avança em relação à representação particular empírica. Trata-se da noção de número geral associado a padrões de regularidades e pressupõe-se que a partir de casos particulares numéricos se encontre uma expressão que representa o "número geral". Como entende Radford (2001) em sua generalização factual, trata de um nível no qual se podem acessar valores numéricos mais altos em uma determinada sequência a partir da compreensão de que existe uma regra geral que representa os particulares. O número geral, como entende Radford (1996), quando associado a representar a expressão geral que identifique os números concretos, pode ser compreendido como um pré-conceito de variável. Assim, de posse da compreensão da relação geral estabelecida entre duas grandezas, um estudante pode, por exemplo, recorrer a um número particular para exemplificar e estabelecer uma generalização;

c) **nível III:** o elemento genérico (que permite as relações particular/geral/particular) − A compreensão do "elemento genérico" pressupõe a regra geral e não limita a natureza dos elementos envolvidos. Além disso, atua como um particular (de forma dialética) que medeia a relação entre as diferentes situações singulares e a expressão geral e vice-versa.

O que se entende por elemento genérico pode advir da indução a partir de casos particulares para alcançar uma representação que é geral e que, por sua vez, permite voltar aos casos particulares. É o caso, por exemplo, de, por meio do estudo da quantidade de diagonais de um polígono, alcançar a expressão geral que posteriormente pode ser verificada em outros casos particulares.

> Uma das características da atividade matemática é o uso de elementos genéricos. O raciocínio matemático, para ir do geral ao geral faz intervir uma fase intermediária que consiste na contemplação de um objeto individual. Este fato coloca um grave dilema: se o raciocínio será aplicado a um objeto concreto, é preciso que se tenha alguma garantia de que se raciocina sobre um objeto qualquer para que se possa justificar a generalização na qual termina o raciocínio. Ademais, posto que o objeto concreto vai associado a sua representação, aparece o problemas de se a representação é de um elemento concreto ou de um conceito geral. (FONT, 2007, p.114).

Em Font e Contreras (2008), o papel deste "elemento genérico" é destacado como um objeto particular na demonstração de uma proposição matemática.

e) **nível IV:** o elemento variável - Nesse caso, associa-se a ideia de variável ao que realmente varia e ao que nesse sentido contempla o movimento de objetos ou fenômenos e pode ser expresso de forma independente de sua natureza ou espécie. Pressupõe um alto nível de abstração. Historicamente, sem uma definição formal pode ser encontrado nos estudos antigos do movimento ainda que não tenha sido sistematizado.

Em Caraça (1952), o conceito de variável está diretamente relacionado ao conceito de função, que é entendida como a lei quantitativa que permite o entendimento e explicação de movimentos da realidade objetiva (por exemplo, o movimento da queda dos corpos).

A variável é o conceito matemático que servirá como instrumento para o estudo de leis quantitativas. É o instrumento que contêm por essência a correspondência entre dois conjuntos. No dizer de Caraça (1952, p.127):

> O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.

Assim, o conceito de variável como um instrumento para estabelecer a correspondência entre dois conjuntos, é representado por meio de letras, mas estas não coincidem individualmente com nenhum dos elementos de um conjunto, ainda que possam representar a todos assim: “[…] é afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela” (CARAÇA, 1952, p.127).

5.3.3 Formas de expressão e significado da generalização

Nesta componente da generalização está incluído o papel da linguagem, dos signos e símbolos (palavras, elementos geométricos, abreviaturas e outros), bem como o significado atribuído a eles.

Reconhece-se que o uso de signos e símbolos potencializa e permite aos estudantes que alcancem diferentes níveis conceituais e de generalização. Entretanto, o signo e o símbolo contemplam em si um significado, caso contrário, é um registro vazio, da mesma forma que a palavra sem significado é um som vazio (VIGOTSKI, 2001). Ao investigar o processo de formação de conceitos (sincréticos, complexos, conceitos verdadeiros), o autor identifica diferenças no papel que palavra representa. Estabelecendo um paralelo de forma sintética, se entende que recorrendo a signos diversos e não somente palavras para expressar conceitos algébricos, é possível reconhecer momentos em que os estudantes usam os signos ainda sem estabelecer relações entre eles, portanto, de forma sincrética. Outro momento em que os estudantes usam os signos, começam a estabelecer algumas relações, mas ainda não totalmente adequadas, é o caso, por exemplo, do estudante de álgebra que manipula fórmulas de maneira essencialmente técnica sem compreender totalmente seu significado (pode-se associar a uma etapa de pseudoconceito) e finalmente uma etapa em que os signos são usados e completamente associados a um conceito, e, portanto, com seu significado atribuído historicamente.

Para Leontiev (1975), a linguagem pode ser entendida como instrumento do pensamento e do conhecimento, como um meio de assimilação da experiência social humana. Entende-se aqui a linguagem como um sistema semiológico que abrange um conjunto de sinais de diferentes naturezas e que ao usá-los, “Com a sua ajuda (da linguagem), e utilizando raciocínios lógicos, podemos obter novos conhecimentos a partir daqueles que já possuímos” (LEONTIEV, 1975, p.77).

Os signos matemáticos, como uma forma de linguagem, não traduzem as palavras a eles associadas, mas também devem ser entendidos como instrumentos do conhecimento, e, nesse sentido, usados para expressar alguns produtos do pensamento ainda que não possam, assim como outros signos de linguagem, representar todo o processo do pensamento. Por isso, também podem ser considerados instrumentos psicológicos, recursos auxiliares que ajudam a resolver um determinado problema mental.

O papel dos signos e dos símbolos é alterado e altera também os processos de pensamento, por exemplo, em relação aos números: “Antigamente as pessoas utilizavam as cifras não para contar, mas apenas para anotar os números” (LEONTIEV, 1975, p.138).

> Sucede que, de modo geral, a contagem evolui dos objetos para as palavras que os designam e depois para os signos- cifras – que designam as palavras. A língua permite contar comodamente os objetos, mas torna-se difícil utiliza-la para calcular, quer seja para somar, subtrair, ou, com maior razão, multiplicar e dividir. Para isto as cifras são incomparavelmente mais cômodas. (LEONTIEV, 1975, p.139).

O uso das cifras operacionaliza o pensamento. Os diferentes usos da linguagem matemática, de seus signos e símbolos permitem que se modifiquem os níveis de generalização alcançados pelo pensamento. “[...] e não é possível estudar matemáticas superiores sem depararmos com a definição verbal dos conceitos matemáticos fundamentais, sem a formulação verbal de axiomas, teoremas e postulados” (LEONTIEV, 1975, p.141).

Radford (1999), que percebe o processo de generalização a partir da perspectiva cultural e semiótica, considera que o seu significado é construído conjuntamente por meio de processos discursivos e de escrita e, desta forma, está diretamente relacionada à produção e entendimento de signos. “Generalizações matemáticas bem como outras atividades matemáticas são enquadradas por modos específicos de simbolização aceitos culturalmente” (RADFORD, 1999, p.89).

Para efeito desse modelo que está sendo criado, propomos os seguintes níveis de generalização associados às formas de expressão e significado:

a) **nível I:** identificação direta signo-objeto − O signo identifica o objeto material palpável ou a palavra (e, desta forma, é uma tradução). Por exemplo, o signo 3 associado a três pedrinhas, mas ainda não carregado de conceituações a respeito da quantidade que representa. Ou em outro exemplo em que se usa a letra “m” como identificando o objeto maçã, entretanto sem associar a este símbolo a quantidade ou qualquer outra grandeza;
b) **nível II:** identificação operacional do signo-abstrações − Historicamente, também pode ser considerado como o estágio em que a palavra *aha* identifica a quantidade desconhecida ou mesmo a *arithme* de Diofanto. Atribui-se um símbolo ou uma palavra que permite a operacionalização ao que está se concebendo como geral (no caso, a quantidade de coisas), entretanto esse geral ainda contém limitações e está atrelado a uma quantidade específica;
c) **nível III:** identificação signo-conceito − Aos signos, símbolos e palavras colocados em relação são associadas regras que os caracterizam e definem conceitualmente. Por exemplo, quando a letra x se identifica como variável, como uma das possíveis representações de uma grandeza que varia, como a medida de um perímetro;
d) **nível IV:** signo: identificação sistêmica entre os conceitos − Criam-se estruturas, regras sobre os próprios símbolos. Por exemplo, matrizes, anéis, grupos e outros.

5.3.4 Validade da generalização

> De fato, a base lógica da generalização é a de justificar a sua conclusão. É um processo de prova, que se move do conhecimento empírico (relacionando ao fato a_i) para o conhecimento abstrato que está além do campo empírico. Ainda a base lógica da resolução algébrica é encontrar em sua natureza analítica. (RADFORD, 1999, p.110).

A validade da generalização em geral não é questionada com os estudantes, mas trata-se um procedimento matemático fundamental, relacionado ao que se pode considerar uma "boa" ou "má" generalização. Matemáticos como Peirce se preocuparam também com esta questão: "Uma das questões que temos que considerar é a seguinte: como pode ser que ainda que o raciocínio se baseie no estudo de um esquema particular, resulte ao mesmo tempo necessário, quer dizer, aplicável a todos os casos possíveis? (PEIRCE apud FONT, 2007, p. 228).

Na definição dos níveis de generalização, estabelecemos o seguinte em relação aos critérios de validade:

a) **nível I:** casos particulares − A validade da generalização é justificada por sua comprovação em alguns casos particulares. Por exemplo, é gerada uma tabela com alguns casos numéricos particulares que comprovam a validade da expressão generalizada;
b) **nível II:** premissas e argumentação − A partir de algumas premissas, estabelecem-se argumentações que justifiquem a generalização processada;
c) **nível III:** provas conceituais − O processo de generalização é provado por formulação de propriedades matemáticas e pela relação entre elas. O que implica um domínio sobre o objeto matemático, sobre axiomas e propriedades anteriormente estabelecidas;
d) **nível IV:** leis da álgebra − O processo de generalização é justificado pelas próprias leis algébricas. Por exemplo: Boole, com a álgebra da lógica cujas expressões do cálculo proposicional são relacionadas a partir de técnicas algébricas. As justificativas são operacionalizadas sobre relações lógicas.

De forma sintética, a partir dos pares dialéticos (abstrato/concreto; particular/geral; análise/síntese; material/ideal) e dos estudos sobre generalização matemática, foram estabelecidos algumas componentes e níveis para o processo de análise da generalização. São elas: o CONTEÚDO, que indica "o que" está sendo generalizado, que podem variar desde características físicas de objetos a relações conceituais; o ELEMENTO MEDIADOR, que indica "como" a generalização está se processando e que pode variar entre o uso de um elemento particular desconhecido até um elemento que contempla a variação; a FORMA DE EXPRESSÃO e SIGNIFICADO, que indica como a generalização se "expressa" e se identifica com seu conteúdo, desde o uso da linguagem natural até expressões simbólicas que contêm como significado a relação entre conceitos; e o CRITÉRIO DE VALIDADE, que indica como o processo de generalização concretizado pode ser provado que se movimenta entre casos particulares e o controle de provas conceituais. No modelo, cada uma dessas componentes está representada pelo gomo de uma esfera.

O Quadro 6 apresenta a relação entre os componentes e os níveis de generalização.

Quadro 6 - Relação entre os componentes e os níveis de generalização

Níveis	Conteúdo	Elemento mediador	Expressão e significado	Critérios de validade
Nível I Experiência sensível	Percepção direta dos objetos concretos (empírico). Ex.: tamanho, cor, forma, quantidade e outros.	O elemento particular desconhecido.	Identificação direta signo-objeto. Ex.: associar a letra “m” como “uma maçã”.	Valida por meio de casos particulares. Recorre a um exemplo para justificar a generalização.
Nível II Primeiras relações entre objetos e fenômenos	Abstrações iniciais e relações simples entre os objetos, atribuição de alguns significados. Ex.: correspondência entre a quantidade de dois conjuntos.	O elemento particular que representa o geral. Ex.: identificar uma quantidade maior para expressar o movimento geral.	Identificação operacional signo-abstrações iniciais. Ex.: historicamente, o uso da palavra *aha* para expressar quantidades desconhecidas.	Valida por meio de premissas e argumentos. Ex.: o uso de tabelas com vários casos particulares.
Nível III Regras estabelecidas sobre as relações	Objetivação de significados em conceitos. Relações estabelecidas. Ex.: fórmulas de área ou perímetro.	O elemento genérico (permite as relações particular/geral/ particular).	Identificação conceitual signo-conceito. Ex.: a palavra ou o símbolo que representa o conceito de perímetro.	Valida por meio de provas conceituais. Ex.: demonstrações de teoremas, usando conceitos e propriedades.
Nível IV Estruturas matemáticas complexas	Relações estabelecidas sobre os conceitos. Em busca de um concreto que é síntese de múltiplas relações. Ex.: funções, área definida em função da dimensão do lado.	O elemento variável. Independe de que as grandezas sejam numéricas, geométricas, matriciais, vetoriais e outros.	Identificação sistêmica signo-sistema de conceitos. Ex.: símbolos associados à composição de funções.	Valida e controla as provas conceituais. Ex.: o próprio método algébrico, a possibilidade de axiomatizações.

Assumem-se ainda para esse modelo que no movimento histórico e lógico podem ser encontrados diferentes níveis de generalização. Desta forma, também nas situações de ensino, por exemplo, para estudantes da faixa etária de 10 anos e de 15 anos, podem ser considerados níveis diferentes do processo de generalização. Reconhecer e estabelecer estes diferentes níveis não é uma questão de precisão. A oscilação constante entre diferentes níveis de generalização deve ser considerada, mais do que o salto de um nível a outro. Ainda assim, de forma específica para a análise do processo de generalização em situações de ensino, julgou-se necessário definir e explicar justificando alguns possíveis níveis, que não pretendem ser os únicos, mas os que nesse momento podem ser facilmente identificados e delimitados. É necessário destacar que há de se considerar a oscilação constante nas situações de ensino entre esses níveis, pois a generalização, como processo, é concretizada à base de movimentos constantes e dialéticos de análise/síntese, material/ideal; concreto/abstrato; geral/particular.

5.4 USANDO O MODELO PARA A ANÁLISE DOS NÍVEIS DE GENERALIZAÇÃO EM UMA SITUAÇÃO DE ENSINO

Para facilitar o uso do modelo, a sua representação foi feita de forma plana, como circunferências concêntricas que representam os níveis de generalidade (Figura 13). Até esse momento de elaboração do modelo, foi possível estabelecer quatro componentes e quatro níveis de generalidade que podem ser revistos e ampliados.

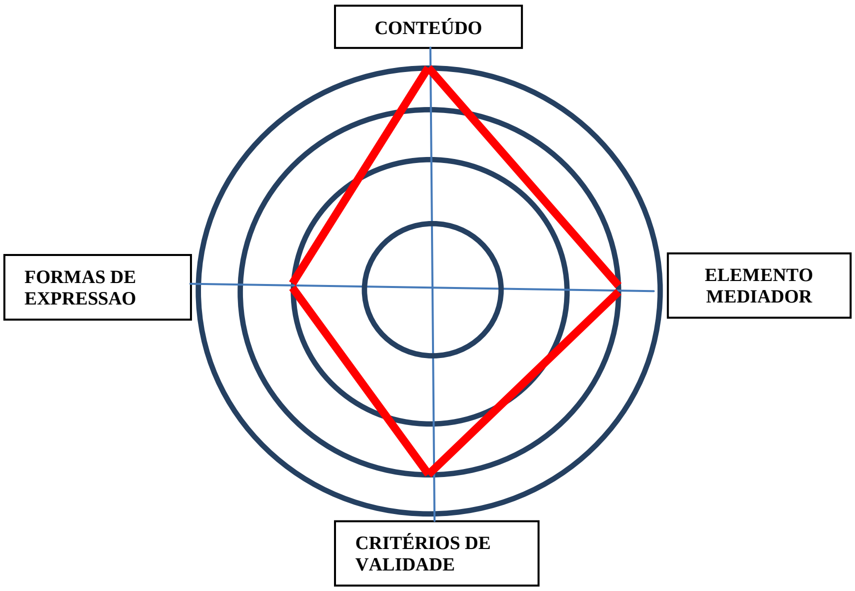


Figura 13 - Exemplo do uso do modelo por meio de circunferências concêntricas.

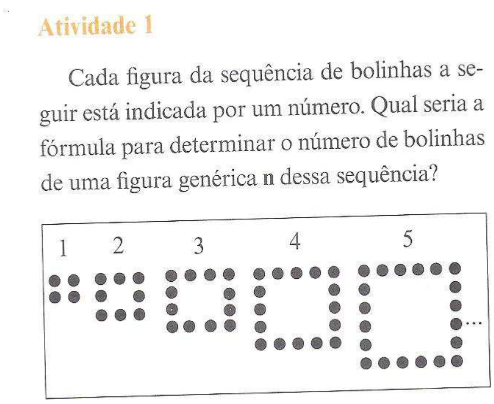
Esse modelo, idealizado apenas para análise de situações de ensino, será utilizado de forma a identificar quadriláteros por meio das ligações entre os pontos marcados pelas circunferências sobre os eixos. A ligação entre o nível IV das categorias representadas expressará um nível elevado do processo de generalização do ponto de vista epistêmico. A seguir um exemplo do polígono formado pelo nível I do “conteúdo”; nível II na componente “elemento mediador”; nível III na componente “formas de expressão”; e pelo nível II na componente “critérios de validade”.

Quanto mais próximo a um quadrado, independente do nível em que esteja, mais equilibrada será a relação entre as quatro componentes. Entretanto, entende-se que esse quadrilátero mantém-se em constante movimento entre os diferentes níveis das componentes da generalização, e por isso nem sempre ele terá o formato de um quadrado. Além disso, para efeitos de demonstração, está sendo usada a sua representação plana, mas pode-se considerar mais movimento entre os níveis e no mesmo nível se o modelo for organizado em sua forma tridimensional.

Esse modelo pretende analisar a generalização em situações enunciadas de ensino, e também por meio de diálogos ou depoimentos de professores e alunos sobre determinada situação de ensino. Nesse sentido, possibilita a objetivação de uma "zona mediadora de aprendizagem", e, no caso desse modelo, relacionada ao processo de generalização dos estudantes. Essa zona permite estabelecer o movimento entre o que é proposto pelo enunciado (caracteriza um nível potencial) de uma situação e o que é abordado pelos professores na interação com os estudantes (caracteriza o nível real atingido).

5.4.1 A análise da generalização em uma situação de ensino envolvendo sequências

A situação mostrada na Figura 14 foi apresentada no curso de atualização com professores, realizado no primeiro semestre de 2011. Trata-se de uma situação enunciada na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (Anexo B) para alunos da 7ª série/8º ano.


Atividade 1

Cada figura da sequência de bolinhas a seguir está indicada por um número. Qual seria a fórmula para determinar o número de bolinhas de uma figura genérica **n** dessa sequência?

Figura 14 – Situação de aprendizagem sobre sequências.

Durante o curso, questionados sobre a aprendizagem que a situação promove, uma das professoras responde: "Observar os padrões, achar uma forma geral usando letras, também tem a questão de expressões algébricas equivalentes" (Ana, B27, BV2, 00:08:20).

Questionados sobre o que representa a letra "n" para os estudantes, uma resposta foi:

> Então, essa pergunta foi muito provocativa […] pensei até em passar este exercício e ver o que acontece, mas depois quando eu fiquei olhando a pergunta como está aí […] qual seria a fórmula para determinar o número de bolinhas de uma figura genérica n dessa sequencia, talvez ele seja um salto grande para o aluno generalizar e entender o que é esse n aí […] talvez se mudasse um pouco na questão de imaginar uma figura, sei lá, um número 10, quantas bolinhas teria…no enunciado…talvez o que representaria para os estudantes por que pode ser que para alguns ali ele não identifique ali o que é a pergunta, o que é esse n, bom, não sei,…talvez nesse momento deixar eles fazendo e se surgir dúvidas direcionar. (André, B28, BV2, 00:10:05).

Pode-se considerar que o professor procura possibilidades para aproximar o aluno do processo de generalização em diferentes níveis, para tanto, sugere primeiro "[…] imaginar uma figura, sei lá, um número 10 […]" porque considera que os alunos teriam dificuldades de compreender e generalizar usando como recurso simbólico o "n".

Usando o modelo de análise da generalização (Figura 15) em situações de ensino para analisar o enunciado da situação, identifica-se a necessidade de que o estudante relacione o número de pontos em cada figura com a posição em que a figura está. Assim, em relação ao **conteúdo**, estaria no nível II por estabelecer uma relação entre os objetos. Em relação ao **elemento mediado**r, espera-se que a generalização seja realizada por meio de uma "figura genérica", que estabeleceria o movimento entre os casos particulares e um caso geral, e, portanto, identifica-se no nível III nessa componente. Quanto à **forma de expressão e significado**, pretende-se que o símbolo "n" represente a relação estabelecida, mas essa relação não representa um conceito, assim, também estaria no nível II, como expressão de uma abstração relacionada à quantidade de pontos de cada figura. Por fim, não se identificam no enunciado elementos para **validação da generalização** e, portanto, nessa componente o enunciado não alcança o nível I. Para concretização da análise, foi elaborada uma figura em que se estabelece um ponto de ligação entre cada componente e o nível que atinge, que ao serem ligados revelam um quadrilátero dentro da circunferência.

Na Figura 15 não é necessário identificar um ponto em particular na camada da circunferência ao marcarmos em cada componente o seu nível. Isso revela o potencial de análise e de desenvolvimento desse modelo (que pode ser usado por professores para análise das situações que elegem e de suas próprias práticas). Dentro da mesma camada, pode-se estabelecer o movimento desse ponto considerando que entre um nível e outro há um "espaço" que pode ser preenchido com outros níveis específicos, dando movimento à análise e ao modelo, que pode ser constantemente aperfeiçoado e reformulado.

Análise do enunciado da situação	
Componente do processo de generalização	Nível
Conteúdo	II
Elemento mediador	III
Expressão e significado	II
Validade	I

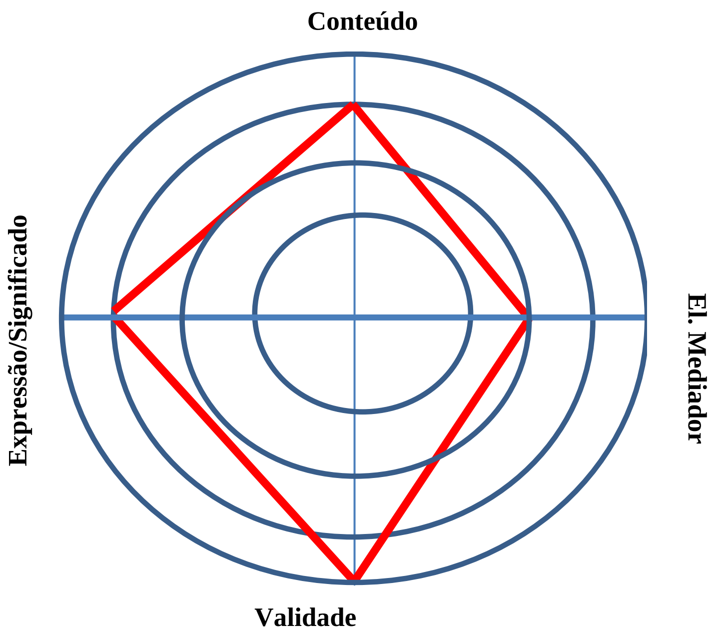


Figura 15 - Análise do enunciado de uma situação de ensino usando o modelo.

Outra possibilidade dada por esse modelo é a de comparação entre o que está enunciado e o que se concretiza na interação entre professores e estudantes. Destaca-se aqui a fala da professora Ana ao usar essa situação em sala de aula:

> Eu apliquei esta atividade pedi para eles resolverem, tive que explicar a palavra 'genérica', eu lembro e eu tive que explicar o que era o n primeiro, o que esse n representa, alguns como eles já eram de 7ª. Série uns dois alunos já entenderam e falaram assim que é uma figura qualquer, que esse 'n' vai representar uma figura qualquer, eu tive que fazer primeiro esta explicação e agora vejam qual que seria a fórmula [...] chegaram a 4n, não é geral, tem aluno que não está interessado em saber isso....todo mundo contou as bolinhas, colocaram o valor e eles perceberam que crescia de 4 em 4 e alguns grupos colocaram 4n aí pra alcançar a sala eu precisei fazer mais o que, fazer mais o 6, como seria o 6, o 7, o 8....32...o que vocês estão fazendo, ah multiplicando por 4, aí alcançou a sala toda. (Angélica).

Pode-se considerar que em relação ao conteúdo, a professora tem dificuldades em fazer com que os estudantes estabeleçam a relação entre a posição da figura e a quantidade de pontos (o que pode ser caracterizado como uma lei de posição). A relação acontece pela contagem dos pontos ("todo mundo contou as bolinhas, colocaram o valor e eles perceberam que crescia de 4 em 4") e a percepção que de uma figura para outra o aumento é de quatro pontos (o que pode ser caracterizado como uma lei de recorrência), que está presa a contagem dos objetos, portanto em relação à componente conteúdo, estabelece-se o nível I. Quanto à componente do elemento mediador, esta foi definida no nível II, pois a professora recorre a diferentes particulares ("eu precisei fazer mais o que, fazer mais o 6, como seria o 6, o 7, o 8….32…o que vocês estão fazendo, ah multiplicando por 4, aí alcançou a sala toda") para alcançar o geral. A forma de expressão foi definida no próprio enunciado como sendo pelo uso da letra "n", e assim esta é usada para estabelecer a relação e alcança o nível II. Por fim, quanto à validade da generalização, pode-se compreender que se atém aos casos particulares (Nível I), considerando que a professora orienta os estudantes a identificar a relação para outros números (Figura 16).

Análise da fala de uma professora	
Categoria (do processo de generalização)	Nível
Conteúdo	I
Elemento mediador	II
Expressão e significado	II
Validade	I

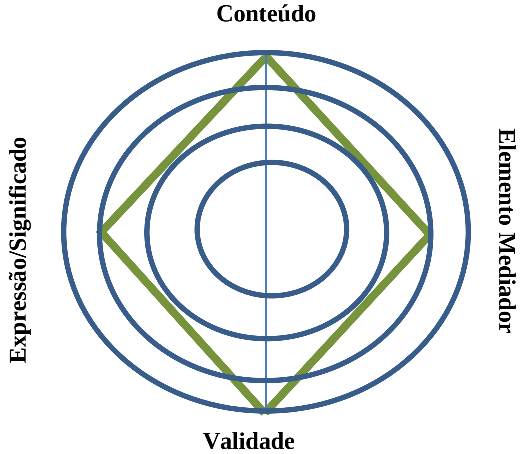


Figura 16 - Análise da generalização alcançada na interação da professora com os estudantes.

Uma comparação com as duas análises realizadas pelo modelo permite que se identifique uma "zona mediadora de aprendizagem" representada na Figura 17, entre o que se pretende pelo enunciado da situação e o que é possível alcançar na interação do professor com os estudantes.

Um professor consciente da distância entre o que é potencialmente proposto, em uma situação formulada em uma proposta curricular ou livro didático, ou em uma situação com formulação própria e o que é possível desenvolver na interação com os estudantes, concretiza suas ações conduzidas por objetivos que podem ser mais definidos.

Em outro momento, foi solicitado à professora Angélica, que participou do curso e cuja interação com os estudantes foi analisada pela pesquisadora, que analisasse, ela mesma, a situação por meio do modelo e também a sua própria prática. A pesquisadora explicou para ela o funcionamento do modelo, destacando as componentes e os níveis definidos, entretanto as bases teóricas e o movimento de constituição do modelo não foram explicitados, apenas a sua organização final, com a intenção de verificar se o modelo se constituiria em um instrumento que possibilitaria a análise com certa autonomia por parte da professora.

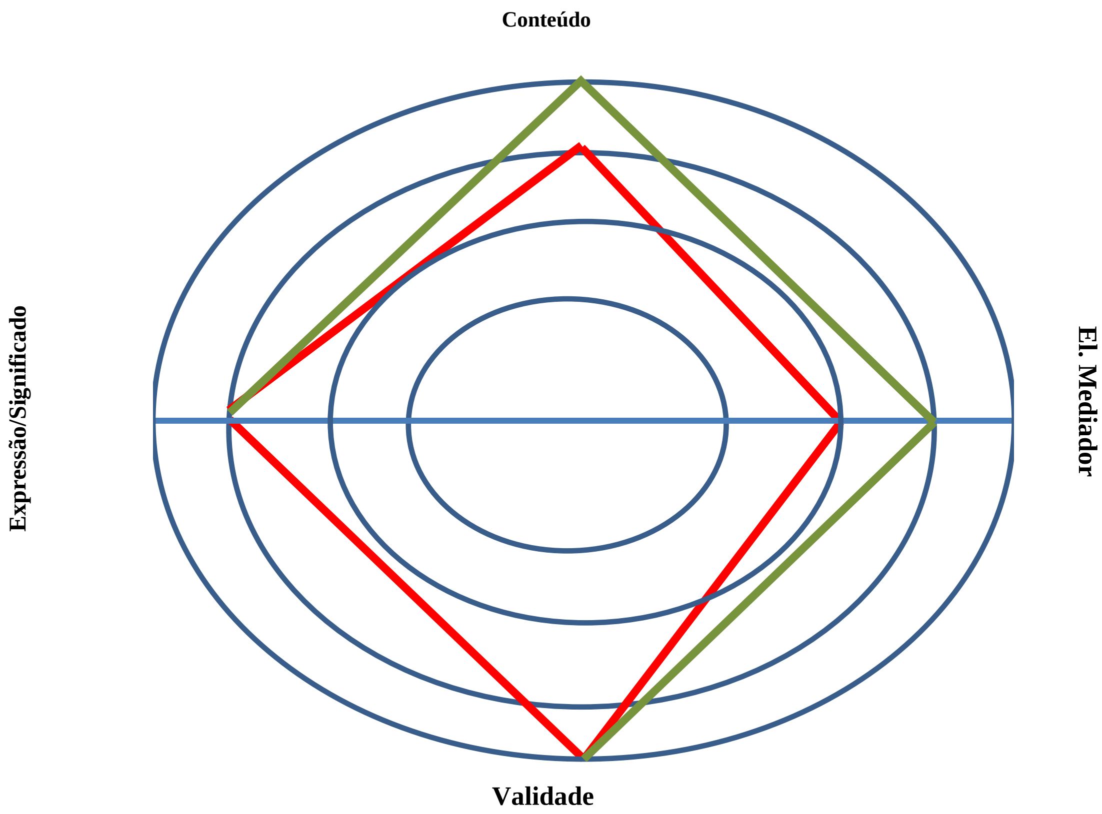


Figura 17 - Comparação e estabelecimento da zona mediadora de aprendizagem.

Depois de conhecer o modelo proposto, a professora analisou a situação por meio de seu enunciado estabelecendo: conteúdo (nível II); elemento mediador (nível III): expressão e significado (nível III); validade (nível I), que difere da análise realizada pela pesquisadora apenas na componente “expressão e significado”, porque a professora já associa a generalização realizada ao conceito de perímetro, mas ao qual o enunciado da situação não faz referência. A professora também analisou, por meio do modelo, a sua própria interação com os estudantes, chegando à seguinte classificação: conteúdo (nível I); elemento mediador (nível II); expressão e significado (nível II); validade (nível II). Essa análise também coincide com a da pesquisadora, mas difere em relação à componente “critérios de validade”, que a professora eleva ao nível II, justificando que “o que favoreceu foram os momentos de conversa com a classe e as questões que foram acrescentadas”.

Por meio dessas análises entende-se e pode-se reforçar que esse modelo não pretende ser único e fechado. A partir de estudos teóricos cada vez mais aprofundados, é possível acrescentar componentes a ele, alterar a mobilidade entre seus níveis, especificando mais o processo de generalização em desenvolvimento. Entende-se que este é um trabalho constante para professores e pesquisadores. Entretanto, considera-se que as componentes inicialmente propostas e a possibilidade de estabelecer uma comparação entre enunciados e ações de ensino representam um avanço na análise. Além disso, permitem também aos professores a conscientização de suas próprias ações, tendo claros os objetivos que visam a atingir a cada uma das situações de ensino que propõem aos estudantes, bem como as potencialidades e limitações envolvidas em cada uma delas.

5.4.2 Análise da generalização em situações de ensino em que envolvem funções

Considera-se que estabelecer a relação entre as grandezas de forma geral constitui a essência da álgebra. Para tanto, o instrumento (elemento mediador) mais adequado são a variável e sua representação simbólica. Entretanto, os estudos históricos indicaram que para se chegar a essa relação geral entre as grandezas e sua representação, algumas etapas foram historicamente superadas. Por exemplo, usar tabelas e representar diversos casos particulares para reconhecer a variação de grandezas e a relação de dependência entre elas; ou então usar diferentes formas de linguagem (comum, representação gráfica) para estabelecer a relação entre duas ou mais grandezas.

Nessas etapas e em outras do desenvolvimento do conhecimento algébrico, se reconhece a importância do processo de generalização. Defende-se aqui que as componentes “conteúdo, elemento mediador, formas de expressão e critérios de validade” possibilitam que esse processo de generalização seja analisado em desenvolvimento e, portanto, podem ser captados em diferentes situações de ensino e inclusive nas situações que envolvem funções. Considera-se ainda que as funções, por um lado, são instrumentos do conhecimento matemático e especificamente algébrico para gerar um quadro explicativo dos fenômenos da realidade, e por outro lado, são objetos do conhecimento algébrico estudados, desenvolvidos e aperfeiçoados como objetos em si.

Em geral no ensino, os elementos de uma função são destacados, assim é um dos objetivos que os estudantes reconheçam o tipo da função (linear, quadrática, exponencial e outros); as raízes de uma função; a sua representação gráfica e analítica, e também que resolvam situações-problema usando funções.

Durante o curso de atualização para professores, foi realizada a análise de uma situação proposta para os estudantes da 3ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2008d, p.33), conforme as Figuras 18 e 19.

Atividade 3

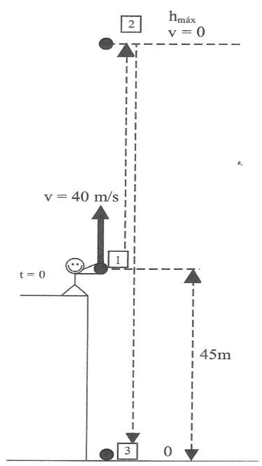
Quando uma pedra é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial 40 m/s, a partir de uma altura inicial de 45 m, ela sobe com velocidade cada vez menor, até atingir uma altura máxima em relação ao solo, quando momentaneamente pára. A partir daí, ela desce cada vez mais rapidamente até voltar ao solo. Sabemos que por causa da força da gravidade (peso), que a puxa para baixo, a velocidade da pedra diminui a uma taxa constante de 10 m/s a cada segundo, aproximadamente. Podemos descrever o movimento da pedra por meio de uma função do 1º grau, que representa sua velocidade, e de uma função do 2º grau, que representa sua altura em relação ao solo. Nesse caso, as funções que representam a velocidade e a altura são as seguintes:

$v = 40 - 10t$

(a partir do valor inicial 40 m/s, a velocidade diminui 10 m/s a cada segundo, ou seja, a taxa de variação da velocidade –10 m/s por s, que se escreve $-10\ m/s^2$)

$h = 45 + 40t - 5t^2$

(a partir do valor inicial 45 m, a altura aumenta até um valor máximo, diminuindo posteriormente até atingir o valor zero.)



Pede-se:

a) Construir o gráfico de v como função de t;

b) Construir o gráfico de h como função de t;

c) Determinar o valor máximo de h(t);

d) Determinar o valor de t quando a pedra voltar a passar pela posição inicial;

e) Determinar depois de quanto tempo a pedra atinge o solo;

f) Observando os gráficos de h(t) e v(t), assinalar V (Verdadeiro) ou F (Falso) nas frases seguintes:

1) "A velocidade decresce a taxa constante".

2) "A altura h cresce cada vez mais lentamente até atingir o valor máximo; depois, decresce cada vez mais rapidamente".

3) "A altura cresce a taxas decrescentes até o valor máximo; depois, decresce a taxas crescentes".

Figura 18 - Situação apresentada para os estudantes do 3º ano do Ensino Médio durante o 3º bimestre.

a, b, c , d, e

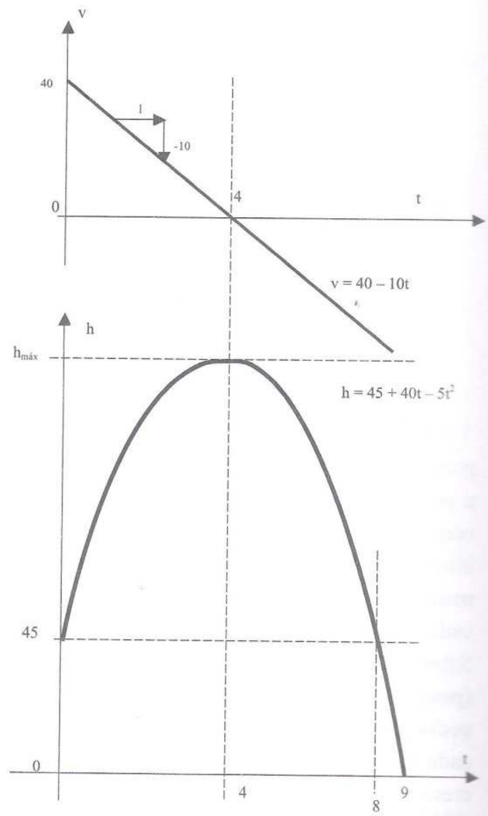
O gráfico da velocidade v como função do tempo t é uma semi-reta, com início no ponto (0;40) e com inclinação negativa e igual a –10. Como v diminui de 10 m/s a cada segundo, após 4s a velocidade será igual a zero, ou seja, a semi-reta corta o eixo x (ver figura mais à frente).

O gráfico da altura h em função do tempo t é um arco de parábola, iniciando no ponto (0;45), com a concavidade para baixo. Seu ponto de máximo coincide com o instante em que a velocidade é igual a zero, ou seja, ocorre para t = 4s. A altura máxima é o valor de h(t) para t = 4, ou seja, é h(4) = 125 m.

A pedra leva 4s subindo até a altura máxima e igual tempo descendo até a posição de partida; logo após 8s estará de volta à posição inicial.

O instante em que ela toca o solo é o valor de t para h = 0, ou seja, é a raiz da equação $0 = 45 + 40t - 5t^2$; resolvendo, encontramos t = 9s.

Todos esses resultados estão sintetizados nos seguintes gráficos:



f) Observando os gráficos e especialmente as concavidades, concluímos que as três afirmações são verdadeiras.

Figura 19 - Solução da situação apresentada na Figura 18.

Convém esclarecer que os cadernos do professor e do aluno, que compõem o material distribuído bimestralmente aos estudantes da rede pública do Estado de São Paulo, estão divididos em situações de aprendizagem. Para cada uma dessas situações, definem-se “Conteúdos e temas”; “Competências e habilidades” e “Estratégias”.

Essa “Atividade 3”, que será analisada, é uma das atividades que compõe o caderno do professor e do aluno do 3º ano do Ensino Médio, referente ao 3º bimestre, e está incluída na Situação de Aprendizagem 3, intitulada “As três formas básicas de crescimento ou decrescimento: a variação e a variação da variação”.

Para a realização da análise, considera-se a situação enunciada, a solução fornecida e também o texto orientador para os professores sobre a Situação de Aprendizagem 3.

De forma sintética, nessa Situação de Aprendizagem 3, o documento pretendia explorar a ideia geral de função como interdependência, explorando funções anteriormente estudadas. Define-se como competências e habilidades: “capacidade de compreensão dos fenômenos envolvendo crescimento ou decrescimento, bem como a expressão da rapidez com que crescem ou decrescem a partir de qualidades expressas nos gráficos das funções representadas” (SÃO PAULO, 2008d, p.27). A Situação de Aprendizagem 3 usa como estratégia a apresentação de três formas básicas de crescimento ou decrescimento: “a das funções do 1º. Grau, a das funções que crescem mais rapidamente do que ela e a das funções que crescem ou decrescem mais lentamente do que a do 1º. Grau” (SÃO PAULO, 2008d, p.27).

Consideram ainda que o estudo da taxa de variação não é muito comum no Ensino Médio, mas que se trata de estudo importante para compreensão de fenômenos naturais (descrição de movimentos) ou econômicos (taxas de inflação). Registram ainda que “Todas as competências básicas podem ser desenvolvidas por meio de tal tratamento qualitativo das funções: a expressão/compreensão de fenômenos, a argumentação/tomada de decisão, a contextualização/abstração de relações” (SÃO PAULO, 2008d, p.27).

A “Atividade 3” é uma das seis atividades que compõe a Situação de Aprendizagem 3. Em seu enunciado apresenta o movimento de uma pedra lançada verticalmente e o descreve em linguagem natural, destacando como o movimento de subida ou de descida da pedra se intensifica ou diminui. Em seguida, apresenta duas funções analíticas (de 1º e 2º graus) para expressar a velocidade e a altura da pedra em função do tempo. Nas questões para os estudantes, solicita a construção de dois gráficos, a identificação de valores particulares (valor máximo da altura, tempo quando a pedra volta à posição inicial) ou ainda a confirmação de algumas afirmações a partir da interpretação do gráfico.

Trata-se de uma situação que envolve conhecimento algébrico, e contempla em seu enunciado a essência dessa forma de conhecimento ao estabelecer a relação entre as grandezas de forma geral usando como instrumento a variável. Entretanto, pode-se questionar se a situação possibilita ao estudante reconhecer essa essência; se as questões formuladas encaminham para essa apropriação; se o fato de os estudantes conseguirem representar por meio de gráficos ou identificar valores particulares prova que identificaram as grandezas envolvidas, estabeleceram relações e generalizaram.

Em busca do reconhecimento do nível de generalização alcançando nessa “Atividade 3”, foi usado o modelo elaborado nesta tese para análise do processo de generalização (Figura 20).

Análise do enunciado da situação Funções ‘ Atividade 3’	
Categoria (do processo de generalização)	Nível
Conteúdo	III
Elemento mediador	IV
Expressão e significado	III
Validade	II

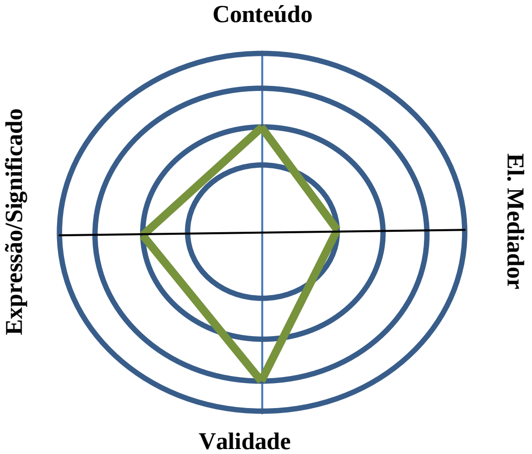


Figura 20 - Análise do enunciado da situação “funções”.

Em relação à componente ”conteúdo” da generalização, considera-se que a situação se encontra no nível III, a generalização sobre a base da objetivação de alguns conceitos. Muitas relações estão explicitadas no próprio enunciado da situação, por exemplo, quando descreve o movimento e a velocidade da pedra subindo e descendo, ou quando define, por meio de uma expressão analítica, o que seria a função para a velocidade e a altura do objeto em relação ao tempo. Além disso, as questões definidas não requerem a relação entre os conceitos já objetivados no enunciado (e, portanto, não foi classificada como de nível IV), mas sim outras formas de representação (a construção gráfica) ou valores particulares que podem ser obtidos com a resolução das expressões analíticas também já indicadas. Nessa situação, é necessário que o aluno já tenha objetivado e compreendido a relação entre distância e tempo (velocidade) e também a relação entre o tempo e a altura atingida pela pedra. Tais relações então podem ser descritas analiticamente por funções.

Em relação à componente da generalização “elemento mediador”, considera-se que a situação não prevê especificamente o processo de generalização, mas sim o seu produto, e por meio de seu enunciado é possível perceber que o elemento variável está pré-definido. Para que haja realmente compreensão e para que se resolva a situação proposta, pressupõe-se que o aluno tenha compreendido as relações entre velocidade, altura e tempo, bem como as expressões analíticas de função em sua forma generalizada, que contém a representação das grandezas como variáveis e em sua forma simbólica, e, portanto, está no nível IV.

Em relação à “forma de expressão e significado”, o enunciado se refere, por exemplo, ao símbolo “v”, como representante da velocidade do objeto em questão e ao símbolo “h”, como a altura atingida pelo objeto. Assim, há no enunciado da questão um alcance em relação ao nível III em relação à forma de expressão e significado. Além disso, as questões também estão relacionadas às representações gráficas dos movimentos explicitados no enunciado. Trata-se de outra forma de expressão (não só por meio da expressão analítica) para as relações entre velocidade/tempo e altura/tempo. Entretanto, destaca-se que o enunciado contém muitas explicações em linguagem natural, que contribuem para a explicitação do papel dos símbolos.

Nesse enunciado especificamente, não há preocupação em comprovar a validade de uma generalização, isso porque as questões propostas nessa situação não se referem ao processo de generalização em si, mas à representação gráfica de algumas relações ou à determinação de valores particulares, por exemplo: “determinar o valor de t, quando a pedra volta a passar pela posição inicial”. Entretanto, pode-se considerar que o item f) trabalha com a validade da generalização no nível das premissas e argumentação na medida em que direciona o estudante a analisar a veracidade de algumas afirmações a partir dos gráficos elaborados. Assim, nessa componente, considera-se que a situação atinge o nível II em relação aos critérios de validade da generalização.

O modelo elaborado nesta tese e que possibilita a análise da generalização nas situações de ensino não indica por si só de que forma essa generalização está sendo trabalhada pelos estudantes e, portanto, tem suas limitações.

Deve se considerar que ao usar o modelo em uma situação cujo objetivo principal não é o processo de generalização das relações, só é possível analisar os indícios que revelam o nível de generalização presente e que se considera apropriado pelos estudantes para interpretação do enunciado.

Assim, podem ser encontradas situações que alcançam o nível III em relação ao conteúdo da generalização, no sentido de que é “objetivo” de tal situação que o estudante atinja esse nível; portanto existem questionamentos direcionadores dentro da situação que orientam o aluno nesse sentido. Por outro lado, como foi visto nesse último exemplo analisado, pode acontecer do próprio enunciado da situação apresentar elementos que já estão generalizados e, assim, implicitamente se considera que o estudante que resolveu a situação proposta também compreendeu e atingiu o nível de generalização apresentado no enunciado.

Dessa forma, considera-se que a interação entre professor e estudante é reveladora do que realmente foi apropriado e possibilitou a resolução da situação enunciada.

Durante o curso de atualização para professores, quando esse modelo de análise ainda não havia sido elaborado, tal situação foi resolvida e discutida entre os professores. Não existem dados do desenvolvimento dessa situação com os estudantes, e, portanto, não se realizou uma nova análise completa baseada na utilização do modelo e que possibilitasse relacionar graficamente à “zona mediadora de aprendizagem”.

Entretanto, é possível destacar algumas intervenções dos professores que durante a discussão revelaram as diferenças entre o que é implicitamente esperado como generalizado (em relação aos conceitos algébricos) pelo estudante, conforme apresentado pelo modelo, e o que alegam os professores por meio de sua experiência em sala de aula.

Em relação à componente “conteúdo da generalização”, pode-se considerar que o enunciado da situação alcança o nível III em que alguns conceitos são objetivados. Entretanto, não avança para estabelecer a relação entre conceitos. Durante a discussão com os professores, um dos primeiros pontos questionados foi a falta de referência na situação à aceleração da gravidade, apesar de se ter identificado que a “velocidade da pedra diminui a uma taxa constante de 10m/s a cada segundo, aproximadamente”. Desta forma, essa relação ficou particularizada nessa situação de ensino, não sendo discutida a sua generalização para outras situações em que se considera um corpo em queda livre, em que se caracterizaria o conceito de aceleração.

Em relação à componente “formas de expressão e significado”, considera-se que no enunciado estão contempladas as expressões analíticas, gráficas e linguagem natural relacionadas às relações entre velocidade/tempo e altura/tempo. Entretanto, os professores destacam impasses que podem ser considerados técnicos em relação à construção gráfica. Alegam ainda que para a construção de gráficos, os estudantes, em geral, são orientados a usar valores positivos e negativos para uma das grandezas que estão relacionadas, no caso para a variável independente “tempo”; mas não se considera o tempo negativo nessa situação e, portanto, o estudante deveria estar atento ao contexto enunciado.

> Já tem o primeiro erro por que ele vai adotar o tempo negativo em matemática, em física de repente até ele volta, em matemática […] você teria que corrigir, o tempo não existe negativo… por que se você está dando em matemática ele não associa as relações físicas. (Suzana, GV6, 00:08:25).

Outra professora alerta para o desenho da parábola relacionado à expressão analítica $h = 45 + 40\ t -5t^2$.

> Angélica: As vezes a parábola,[inaudível] só por que as vezes muda a ordem aqui, né? Ele não vai reparar que a concavidade é voltada para baixo por que o -5 é o último.
>
> Pesquisadora: Ah sei, aquela mania que a gente tem de colocar direto a equação com a b e c e o menos 5 já está lá no final
>
> Angélica: Isso. (GV6,00:11:42).

A professora, nesse caso, está se referindo ao fato de serem destacados os coeficientes de uma equação de segundo grau, como a, b e c e em geral os professores apresentam a equação em sua forma geral, neste formato $f(x) = ax^2 + bx + c$. Os estudantes identificam se a parábola tem a concavidade voltada para cima ou para baixo, analisando o primeiro coeficiente que aparece, que não é necessariamente o "a" se a equação não estiver organizada. Este é um procedimento técnico, não está necessariamente acompanhado da apropriação do estudante.

5.5 CONTRIBUIÇÕES DO MODELO DE ANÁLISE DA GENERALIZAÇÃO EM SITUAÇÕES DE ENSINO

O processo de constituição deste modelo de análise de generalização em situações de ensino se concretizou após o estudo teórico do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o reconhecimento da importância do processo de generalização neste movimento.

Entende-se como "modelo" a partir de Davydov (1982), no sentido em que se trata de uma representação gráfica que relaciona as componentes (conteúdo, elemento mediador, expressão e significado, critérios de validade) que pelo estudo teórico foram abstraídas do processo de generalização. Entende-se que esse modelo possibilita uma relação direta entre o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.

Esse modelo não pretende ser único ou limitado sem que nele possam ser feitas novas alterações. Para aperfeiçoar o modelo podem se considerar novas componentes, ou novos níveis entre elas. Desta forma, torna-se cada vez mais possível precisar o processo de generalização envolvido nas situações de ensino, ou na interação dos estudantes com os professores.

Da forma como está apresentado nesta tese, sua principal contribuição é a de possibilitar que pesquisadores e professores discutam suas componentes e os níveis e analisem criticamente o processo de generalização possibilitado nas situações e ações de ensino. Ainda que o modelo possua características de ser classificatório no sentido em que analisa a situação e destaca para cada componente um nível de generalização, não é esta sua intenção principal. Este foi o modo encontrado para reconhecer as diferenças no desenvolvimento do processo de generalização, mas não se espera a linearidade na passagem entre os níveis. Pelo contrário, entende-se que as componentes se integram, ainda que em diferentes níveis, e que o avanço, por exemplo, no "conteúdo" da generalização impulsiona avanços também na necessidade de "formas de expressão e significado" e vice-versa.

Destaca-se que, na versão inicial, o modelo seria organizado em uma esfera. As componentes do processo de generalização seriam então gomos dessa esfera. E os níveis permitiriam ainda mais mobilidade nessa representação tridimensional. Entretanto, para efeitos de análise e explicitação nesta tese, optou-se pela representação plana, facilitando o registro gráfico, porém, o modelo requer aprofundamento também em sua apresentação visual.

É importante destacar que ao analisar as situações de ensino por meio do modelo, podem ser identificadas situações que objetivam desenvolver no estudante o próprio processo de generalização, e direcionam suas questões para isso, ou situações de ensino que não objetivam o desenvolvimento do processo de generalização matemática, mas recorrem a conceitos matemáticos em seu nível mais generalizado e formalizado. Desta forma, o modelo também permite destacar o nível de generalização já atingido pela própria situação.

Entende-se que, seja por desenvolver o processo de generalização intencionalmente ou recorrer a conceitos matemáticos generalizados, as situações de ensino podem ser analisadas pelo modelo em seu potencial de ensino do processo de generalização. Entretanto, é apenas na interação com os estudantes que este “potencial” de ensino se concretiza, tornando-se real. Então, de forma paralela ao conceito de “zona de desenvolvimento proximal” de Vigotski (2001), entende-se que o modelo possibilita o reconhecimento de uma “zona mediadora de aprendizagem” relacionada ao processo de generalização. Isso porque é possível realizar a análise da situação enunciada e também a análise da interação entre professora e estudantes com base nessa situação enunciada. A distância representada graficamente no modelo entre a análise do enunciado e a análise da interação revela os alcances ou limitações em relação ao processo de generalização e orienta novas ações dos professores.

Considera-se ainda que o modelo possa ser constantemente discutido e reelaborado no processo de formação de professores. Para a reelaboração do modelo, identificando outras componentes ou níveis, é necessário que o professor aprofunde seu conhecimento sobre o processo de generalização matemática. Além disso, da forma como já está elaborado, o modelo possibilita ao professor uma análise crítica de suas próprias práticas e ações de ensino, enquanto seleciona situações a serem apresentadas aos estudantes ou revê seus questionamentos durante a interação com eles, durante as aulas.

6 UMA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO SOBRE EQUAÇÕES: EM BUSCA DA OBJETIVAÇÃO DA ESSÊNCIA DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO EM AÇÕES DE ENSINO

Durante os estudos desta pesquisa em busca de alcançar o objetivo de investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, foi reconhecido que a essência do conhecimento algébrico, que pode ser revelada pelo movimento histórico e lógico dos conceitos, não coincide com o objeto de ensino da álgebra, mas o constitui.

Torna-se necessário, desta forma, compreender esse movimento histórico e lógico como processo “de objetivação” de conceitos algébricos no desenvolvimento da humanidade, bem como estabelecer a relação com o processo de “apropriação” desses conceitos (que compõe o objeto de ensino da álgebra), a ser possibilitado nas ações de ensino e concretizado a partir de situações-problema desencadeadoras de aprendizagem (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011).

Para tanto, durante o movimento de pesquisa, optou-se por destacar e acompanhar uma professora que esteve presente ao curso, durante as reuniões de planejamento de suas aulas envolvendo conteúdo algébrico. Esse acompanhamento foi realizado no segundo semestre de 2011, durante encontros realizados semanalmente entre a pesquisadora e a professora.

As reuniões de planejamento com a professora foram conduzidas com o objetivo comum de elaborar uma atividade orientadora de ensino (reconhecendo seus elementos, ações e operações), conforme desenvolvido por Moura (2001), Moura et al. (2010) e Moura, Sforni e Araújo (2011). Portanto, era necessário promover uma situação que gerasse nos alunos a necessidade dos conceitos e considerasse o seu movimento histórico e lógico. As ações planejadas foram concretizadas com os estudantes e analisadas constantemente, sempre visando à aprendizagem dos estudantes.

A própria professora definiu a turma com a qual gostaria de trabalhar e realizar o planejamento. “Eu acho melhor a 6ª. série, começar com eles equações, que está na proposta já do planejamento. Trabalhar com resolução de equações, sistemas” (E1, 00:02:34).[27]

Considerando que as equações são instrumentos do conhecimento algébrico para compreender os fenômenos da realidade objetiva, a pesquisadora procurou identificar, com a professora, situações-problema às quais as equações pudessem estar relacionadas, sendo usadas como instrumento para resolução.

---

[27]Todos os encontros foram gravados em áudio, e a referência das falas da professora e da pesquisadora está identificada da seguinte maneira (E número do encontro; instante em que se iniciou a fala). Por exemplo, nesse caso, (E1, 00:02:34) se refere ao primeiro encontro, com a fala iniciada por volta de dois minutos.

A professora relata que os estudantes confundiam os conceitos de perímetro e área, apesar de eles já terem sido discutidos em aula. Cita o resultado de uma avaliação externa realizada com essa turma, cuja dificuldade foi revelada, e, portanto, teria a necessidade de retomar esses conceitos.

Conforme os princípios da Atividade Orientadora de Ensino, pretendia-se elaborar uma situação desencadeadora de aprendizagem, considerando que:

> A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência, ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (MOURA et al., 2010, p.103-104).

Definiu-se então a necessidade de gerar uma situação que contemplasse os conceitos de perímetro e área e que usasse as equações como instrumento para resolver os problemas. Essa definição surgiu da necessidade da professora, mas historicamente conforme registros babilônicos (BAUMGART, 1992), os problemas que relacionavam área e a soma de comprimento e largura eram muito comuns.

Após o levantamento de algumas situações apresentadas tanto pela professora quanto pela pesquisadora e que relacionavam os conceitos de perímetro e área, definiu-se que a situação deveria possibilitar aos estudantes perceberem que espaços definidos com perímetros iguais não possuíam necessariamente a mesma área e, de maneira inversa, espaços com a mesma área não possuíam necessariamente perímetros iguais. Foi usado como critério para a escolha que a situação contemplasse a necessidade humana de controlar os terrenos por meio das grandezas área e perímetro. Portanto, a situação deveria envolver e contemplar ações em que os estudantes pudessem delimitar terrenos regulares e não regulares, dividindo-os em formas diferentes para que trabalhassem com as grandezas perímetro e área.

O envolvimento da professora com a situação se evidencia e a pesquisadora explica que a situação criada será desencadeadora de várias outras ações a serem detalhadas e desenvolvidas de acordo com o retorno da aprendizagem dos estudantes. Indica ainda, segundo os princípios da atividade orientadora de ensino, a necessidade de não só mostrar um terreno, mas também de elaborar uma história que envolva os estudantes; com o que a professora concorda: “Isso seria legal, montar a história de alguma cidade ou de algum país, sei lá... nome” (E2, 00:43: 48).

Depois de mais discussões sobre a sistematização das situações, professora e pesquisadora se conscientizam das potencialidades da criação de uma situação desencadeadora, no sentido de que podem ser criados terrenos que tenham o mesmo perímetro, mas áreas diferentes, ou a mesma área e perímetros diferentes. Inclusive áreas de círculos, ou localização dentro do terreno, usando o plano cartesiano.

No terceiro encontro de planejamento, a professora mostra como pensou em sistematizar a situação após as conversas (Apêndice M). A professora registra uma possibilidade para a situação e inclui registro sobre a organização física dos estudantes na sala, e as ações em cada aula. Esse primeiro registro escrito[28] da professora, considerando as conversas com a pesquisadora, foi a base para detalhar as demais ações, e definir situações-problema que usassem as equações como instrumento de resolução.

As ações de planejamento continuam nos demais encontros no sentido de elaborar cada vez mais a situação, tornando-a potencialmente desencadeadora da aprendizagem. A partir da organização das ações realizada pela professora, a pesquisadora sugere a criação de uma história virtual, que gere a necessidade e o envolvimento dos estudantes para a aprendizagem e que descaracterize as ações como simples tarefas sem encadeamento, no que a professora concorda. “Eu senti também necessidade de ter uma história” (Angélica, E3, 00:39: 58).

Assim, em busca de gerar situações para as quais os estudantes atribuíssem significado, destaca-se como fundamental definir a situação que desencadeia a aprendizagem e que envolve os estudantes em atividade. Para Moura (1996) e Moura et al. (2010), diferentes recursos metodológicos podem concretizar a situação que desencadeia a aprendizagem. Entre eles estão, o jogo, as situações do cotidiano e a história virtual do conceito. As ações foram planejadas utilizando como recurso metodológico a história virtual a seguir, que serviu como situação desencadeadora de aprendizagem.

> Agora estão todos numa nau viajando em alto mar e de repente um marinheiro grita... Terra à vista... sim, eles encontraram um local onde aportar e se instalar. Desceram todos do navio e foram desvendar a mata para ver como conseguiram se acomodar, então encontraram uma grande clareira... Mas que ótimo lugar para acampar e se instalar, podemos até construir uma nova cidade por aqui. O lugar era realmente lindo, com espaço enorme, cheio de árvores ao redor e banhado por um rio.

A clareira é o cenário inicial da história e a professora criou uma reprodução em tecido (Figura 21) em um tamanho suficiente para que fosse colocado no chão, no meio da sala, e todos os alunos pudessem se sentar em volta dele, promovendo assim a interação entre os alunos. Durante todas as aulas relacionadas a essa situação, os estudantes trabalharam coletivamente. Foram organizados grupos.

[28]Ao final do semestre, a professora havia registrado com detalhes todo o processo de planejamento realizado.

Figura 21 - Material produzido pela professora para representar o cenário da história virtual.

Pode-se destacar aqui a importância de algumas operações realizadas pela professora conforme as condições; nesse caso, a elaboração de um espaço que representasse a cena da história virtual e sobre o qual todos os estudantes poderiam trabalhar. Nesse tecido, eles representavam o seu terreno, faziam medições e discutiam sobre os conceitos de perímetro e área, conforme as orientações da professora. Quando a turma ouviu a história e viu o material, surgiu o interesse sobre o que seria trabalhado em matemática. “Achei que eles participaram, se envolveram, algumas meninas falaram: ‘Que da hora!’” (Angélica, E6, 00:05:23). A professora também percebe que o fato de ter construído um material que os colocasse envolvidos com a situação, também foi um elemento que os aproximou, e conta: “Eles ficaram muito tempo olhando o desenho. ‘Nossa, que grande, você que fez professora?’” (E6, 00:07:13).

A história foi sendo conduzida e retomada durante várias aulas com os estudantes. A ideia era de que eles se sentissem como esses personagens que chegaram a um lugar desconhecido e com necessidade de organização, em relação à divisão do espaço. Instaurada nos alunos uma necessidade e um motivo para resolução das situações-problema, era necessário que professora e pesquisadora organizassem as próximas ações no sentido em que se encaminhasse ao estabelecimento da relação entre as grandezas e para o recurso às equações como instrumentos para resolvê-las.

Em relação aos conceitos de área e perímetro, a primeira ação dos estudantes sobre a clareira foi a de construir um terreno para cada grupo. Para isso, cada grupo recebeu um barbante (todos com o mesmo tamanho) para criar o seu próprio terreno (Figura 22).

Figura 22 - Estudantes delimitando seus terrenos na “clareira” com o pedaço de barbante do mesmo tamanho.

Aqui se reconhece que o uso de um pedaço de tecido para representar o terreno; o uso do barbante para criar um espaço delimitado; o uso de pequenos pedaços de papel como unidade de medida de área (que foram posteriormente usados) são todos signos que auxiliam os estudantes a compreender os conceitos de área e perímetro. Sem a ação explícita do professor e sem a definição do objetivo do ensino, nem o pedaço de tecido, nem o barbante, nem os pedaços de papel fariam o papel de signos e não serviriam como mediadores para a construção dos conceitos matemáticos.

O principal objetivo dessa ação era que, após a construção dos terrenos, os alunos medissem as áreas ocupadas e comparassem primeiro visualmente e depois por meio da medição. Para tanto, necessitariam de uma unidade de medida, que foi definida com a professora (no caso uma subdivisão da folha sulfite).

> Aí eu fui falando: como é que a gente vai saber se tá certo o que a gente escreveu? Por que um grupo disse que este terreno era o maior de todos, outro grupo falou que era o inverso. Como a gente faz para ver se está certo? Aí um menino falou assim: Ah, a gente pega o terreno, desenha assim e vê se cabe dentro do outro. Mas como a gente vai desenhar? (Angélica, E9, 00:50).

No momento de elaboração dessa ação, tanto para a pesquisadora quanto para a professora, a expectativa era a de que de posse de medidas das áreas dos diferentes grupos (considerando a unidade de medida estabelecida conjuntamente), os estudantes e a professora pudessem posteriormente gerar equações que relacionassem às diferentes áreas e contribuíssem para encontrar valores desconhecidos. Nesse movimento, as equações servem para estabelecer igualdades entre grandezas de mesma natureza, mas relacionadas a objetos diferentes. A grandeza relacionada é a área e os objetos são os terrenos de cada um dos grupos de estudantes. Pode-se dizer que a relação entre as grandezas ocorre aqui, mas ainda de forma limitada, presa a casos particulares e sem possibilidade de ser estabelecida de forma geral.

Assim, de posse dos dados das medições dos terrenos, foram elaboradas situações-problema que poderiam ser resolvidas com equações de primeiro grau envolvendo as áreas encontradas. Os primeiros problemas de equações propostos foram sobre a comparação de áreas do terreno de um grupo com o de outro grupo. As equações que resolviam os problemas propostos incluíam a falta de uma parcela da adição, a falta do 1º ou 2º termo da subtração e até a falta de elementos de expressões que envolvem o produto de um número por uma adição. Nesse caso, a técnica de resolução não era tão facilmente desenvolvida pelos estudantes, apesar da compreensão do problema proposto.

O uso de frações 1/3, ½, ¼, 1/6 de 1/8 da folha de sulfite A4 permitiu que se criassem problemas para serem resolvidos por meio de equações de primeiro grau, também com frações, atribuindo sentido a algumas operações que, muitas vezes, são ensinadas de forma mecanizada com os estudantes; por exemplo, a necessidade de encontrar o denominador comum, a necessidade de adicionar frações e outros.

Essas aprendizagens foram desencadeadas com a primeira ação do planejamento, que se baseava no valor do perímetro fixo e na comparação entre as áreas encontradas das diferentes formas. No planejamento da ação seguinte, a intenção era manter a área fixa e alterar o perímetro. E outra questão foi lançada aos estudantes: “Agora, vamos reorganizar nossos terrenos neste espaço de modo que todos fiquem com a mesma área, e com perímetros diferentes. Como podemos fazer isso?”.

O novo objetivo dessa ação era o de que os estudantes dividissem igualmente o pedaço de terra (Figura 23). Para tanto foi necessário medir o terreno total da clareira, o que foi feito usando as unidades do sistema internacional de medidas, e, ao final, ficou definido que cada grupo ficaria com 15 dm².

Os estudantes delimitaram na clareira os seus novos terrenos que agora tinham a mesma área e perceberam que o que variava entre eles eram os valores dos perímetros (Figura 24). Após essa reformulação dos terrenos, o trabalho com equações foi novamente inserido, agora utilizando como grandeza desconhecida a medida dos perímetros. Nesse momento, a preocupação era de formular questões cuja resolução tornasse o uso de equações necessárias, com os estudantes compreendendo a facilidade dos cálculos e a organização do pensamento por meio da escrita da equação.

Figura 23 - Delimitação do terreno total da clareira a ser usado.

Figura 24 - Terrenos construídos pelos estudantes com a mesma área.

Historicamente, encontram-se registros de equações de primeiro grau e com uma incógnita para resolver situações-problema, mesmo sem recorrer ao simbolismo formal usado atualmente. Por muito tempo, as ideias algébricas se desenvolvem por meio de problemas que envolvem somente uma incógnita (RADFORD, 2011).

As situações-problema foram elaboradas para que os estudantes as resolvessem com diferentes tipos de equações, por exemplo: com a incógnita presente em só um lado da igualdade, com a incógnita dos dois lados; com a necessidade de parênteses; com a necessidade de frações e outros. Por exemplo:

a) O dobro do perímetro do meu terreno subtraindo 10 dm tem a mesma medida que o perímetro do terreno da família Bergamine. Qual a medida do perímetro do meu terreno?

b) Com um pedaço de barbante consigo dar três voltas ao redor meu terreno. Ana me mostrou que com o mesmo pedaço de barbante posso dar só uma volta no terreno da família Araújo e ainda sobram 20 dm do barbante. Qual é a medida do meu terreno?

Nesses problemas, a medida desconhecida é o perímetro do "meu terreno" (o terreno da professora), mas as demais medidas dos perímetros, por exemplo, da família Bergamine, ou da família Araújo, são medidas conhecidas pelos estudantes, e, portanto, não são caracterizadas como outra incógnita do problema.

Desta forma, os estudantes compreendiam o significado das equações que elaboravam, ainda assim encontraram dificuldades em simbolizar e resolver aquelas que exigiam procedimentos técnicos mais elaborados, por exemplo: Um terço da soma do meu perímetro com 4 dm é igual à diferença entre perímetro do meu terreno com o da família Adams. Qual a medida em dm do meu terreno?

A partir dessas dificuldades, enfatizou-se o ensino de algumas técnicas para resolver equações, e a apresentação da técnica de resolução não constituiu algo enfadonho e sem sentido para os estudantes, mas sim surgiu para suprir uma necessidade definida pela situação.

Uma última observação é necessária em relação às ações de planejamento da professora (Quadro 7). No movimento com a turma e conforme as potencialidades da situação que foi produzida, a professora também teve condições de trabalhar com os estudantes outros tópicos de ensino, que foram relevantes para o processo de ensino e aprendizagem, mas não relevantes nesta pesquisa. Pode-se citar como exemplo, entre as ações também desenvolvidas, mas que não destacavam conceitos algébricos, a definição do nome para o lugar onde se passa a história virtual. A professora criou assim a oportunidade de trabalhar com conceitos de estatística, também previstos no programa curricular da 6ª série (frequência absoluta, frequência relativa, construção de gráficos de barras e gráficos de setores) a partir de uma votação realizada com a turma.

6.1 ANÁLISE DE EPISÓDIOS: EM BUSCA DA ESSÊNCIA DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO NAS AÇÕES DE ENSINO

Ao longo das ações da professora com os estudantes e de seus relatos sobre a aprendizagem deles, foram se revelando elementos que permitiram analisar como a essência do conhecimento algébrico é contemplada.

Quadro 7 – Síntese das ações e operações de planejamento elaboradas

•Definição e elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem: a história virtual
• Estudo de porcentagem e estatística por meio de: - votação para escolher o nome do lugar onde se passa a história - construção de uma tabela para organizar os votos por nome - explicações sobre porcentagem, frequência absoluta e frequência relativa - cálculo da porcentagem de votos para cada nome - construção de gráficos de barras e setores
• Desenvolvimento da história virtual (divisão dos estudantes em grupos)
• Estudo de área, perímetro e equações - construção de um terreno com valor de perímetro fixo e determinado - discussão sobre as formas geométricas - verificação visual da medida das áreas de cada terreno - comparação entre as áreas (usando símbolos) - determinação de uma unidade para medida das áreas e verificar a veracidade das relações estabelecidas visualmente - resolução de problemas relacionados às medidas das áreas usando equações.
Operações auxiliares para esta etapa: - estudo de frações para determinar por meio de divisões em uma folha sulfite a medida da unidade padrão mais adequada para a área dos terrenos
• Continuação dos estudos de área, perímetro e equações - determinar o tamanho da clareira, com as unidades do sistema métrico decimal - dividir para que todos os grupos tenham terrenos com a mesma área sobrando espaços livres entre os terrenos - construção do terreno de cada grupo com 15 dm^2 - medida dos perímetros dos terrenos de cada grupo - resolução de problemas com as medidas dos perímetros usando equações
Operações auxiliares para esta etapa - pesquisa sobre a história do metro

Tal essência foi destacada durante o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e se refere a estabelecer a relação entre as grandezas de forma geral. Parte-se do princípio, nesta tese, que essa essência deve estar contemplada nas diferentes situações de ensino e constituir os objetos de ensino da álgebra, possibilitando ao estudante apreender o conhecimento algébrico por meio do pensamento teórico. No caso dessa situação, esperava-se que as equações fossem os instrumentos matemáticos para resolver situações-problema. Assim, o conceito de equação, sua representação simbólica e seus modos de resolução deveriam ser derivados de uma situação na qual fosse necessário reconhecer grandezas e estabelecer relação entre elas. No capítulo 5, foi visto que isso também pode ser realizado por meio das sequências, e de forma ainda mais aprofundada por meio das funções. Entretanto, no momento do planejamento, procurando respeitar uma orientação curricular, a necessidade de ensinar da professora se encontrava relacionada ao estudo das equações.

É necessário ainda considerar que, no momento de realização desse planejamento, não havia total clareza por parte da pesquisadora do que se constituía a essência do conhecimento algébrico, embora houvesse indícios no sentido de que tal essência tinha relação com o aspecto simbólico da sua linguagem, mas não só, e também deveriam ser destacadas as relações entre as grandezas. Pode-se notar que o fato de estabelecer relações entre as grandezas de forma geral não é predominante no desenvolvimento da situação, nem é destacado pela professora e pesquisadora. Tal movimento poderia ser destacado nessa situação considerando, por exemplo, uma relação entre a medida da área de todos os retângulos envolvidos, ou pela medida da área de triângulos, o que constituiria, então, no que tem sido destacado como a diferença entre fórmulas e equações na proposta curricular do Estado de São Paulo.

A seguir serão destacados episódios a partir das reuniões entre a pesquisadora e a professora que foram considerados reveladores de nexos conceituais teóricos e da essência do conhecimento algébrico nas ações planejadas e discutidas.

• Episódio 1: Um procedimento para estabelecer a generalização numérica

Uma das concepções de álgebra, como foi visto pelas diferentes pesquisas, refere-se ao seu entendimento como aritmética generalizada. Trata-se de uma concepção fortemente arraigada na formação matemática e também pedagógica dos professores, e acaba por se refletir em suas ações. Durante o início do processo de planejamento, a professora relata dificuldades dos estudantes com a operação de subtração entre números inteiros e indica para a pesquisadora as ações que usou para resolvê-las.

A professora destaca que surgiam muitas dúvidas nos exercícios em que os estudantes precisavam completar os espaços em branco (valores desconhecidos), principalmente quando esse valor era o minuendo em uma subtração. E cita um exemplo (E1, 00:13:02): "Por exemplo, quando falta o primeiro termo da subtração. Estava assim: p(pe) menos 308 é igual a 1967, aí muitos ao invés de fazer a adição, a operação inversa, eles subtraíram, fizeram 1967 menos 308 e aí colocaram número negativo".

A professora, tanto nesse exemplo quanto em outros citados, explica que tem o hábito de conversar com a turma dando exemplos de números menores, para em seguida retomar a situação apresentada: "Aqui ó tá faltando o primeiro termo e vai dar um número positivo então tem que ser maior, então o primeiro termo tem que ser maior que a diferença" (E1, 00:14:10).

A análise realizada sobre esse episódio é de que a professora, ao exemplificar a mesma operação com valores menores, pretendia que os estudantes compreendessem um procedimento por meio de quantidades acessíveis (no caso, somar o resultado da diferença com o subtraendo). Os estudantes têm controle sobre os procedimentos com quantidades menores e a professora esperava que depois eles generalizassem tal procedimento para um valor que envolve quantidades sobre as quais não se tem controle. Trata-se da generalização de um procedimento aritmético e a partir de casos particulares.

Por exemplo, em a – 5 = 7, os alunos possuem um controle aritmético e sabem que a=12, possuem controle sobre as quantidades e conseguem determinar o valor desconhecido mesmo sem um modo geral de ação. Entretanto, para p-308=1967, é necessária a conscientização do procedimento, pois o controle sobre as quantidades está menos acessível.

Se analisarmos o processo de generalização nesse episódio, por meio do modelo construído e apresentado nesta tese, para análise do processo de generalização em situações de ensino (Figura 25), pode-se identificar que, em relação ao “conteúdo”, a generalização está sendo estabelecida de quantidades numéricas que não estão associadas diretamente a nenhum conceito ou grandeza, portanto, no nível I. Como elemento mediador para estabelecer a generalização, o nível II, pois a professora recorre a outros elementos particulares para representar o geral. Entretanto, o elemento particular utilizado não é uma quantidade maior, mas sim uma quantidade menor, para que seja possível estabelecer a relação a partir do concreto sensível. Os símbolos usados nessa situação são letras que representam quantidades desconhecidas, portanto identifica-se o nível II para a forma de expressão e conteúdo, e o nível I para os critérios de validade da generalização, que é considerada apenas por meio de exemplos.

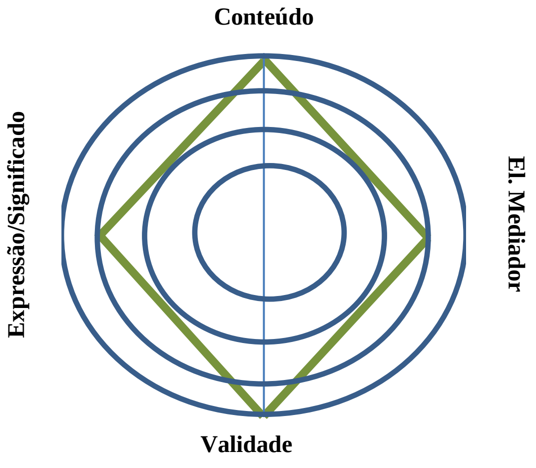


Figura 25 - Análise da generalização envolvida no Episódio 1.

Pode-se relacionar essa forma de generalização com o que Radford (2001) denomina generalização factual, que trata da generalização das ações numéricas, e, apesar de permanecer nesse nível numérico, permite que os estudantes resolvam outros casos particulares inclusive de quantidades maiores.

Entretanto, pode ser destacado que o modo como é conduzida tal generalização e sua organização no ensino influencia na aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, reconhecer a essência do conhecimento algébrico é relevante. O argumento da professora de mostrar que o primeiro termo da subtração (o minuendo) tem que ser maior do que o resultado da diferença e positivo é válido somente quando se trabalha no campo dos números naturais. Por exemplo, em $a – b = c$, com a, b e c sendo números naturais. Porém, no campo dos números inteiros, com a, b e c sendo números inteiros, essa relação não é válida; de uma quantidade positiva se subtrairmos uma quantidade negativa, encontramos um valor ainda maior. Portanto, usar esse argumento pode gerar confusões, no caso dos estudantes que também trabalham com números inteiros.

Por outro lado, considera-se que o processo de subtração deve ser realizado com grandezas de mesma natureza. Também seria o caso então de reconhecer o papel que cada elemento representa na operação (seja para quantidades grandes ou pequenas). O primeiro valor (minuendo) não é necessariamente o valor maior, se considerarmos a possibilidade de trabalhar com números inteiros, mas é o valor do qual se tira uma quantidade (o subtraendo), que também pode ser positiva ou negativa. E o resultado dessa operação indica a diferença entre ambos os elementos. Para determinar o minuendo, então é necessário que na diferença seja acrescida o valor que foi tirado (o subtraendo). Este é o procedimento geral que vale aritmética ou geometricamente, e de forma simbólica é descrito como se $a-b=c$, então $a = c+b$, sendo a, b e c quaisquer números reais. É a relação entre grandezas a ser destacada.

Por meio dos casos particulares é que se alcança o modo geral; entretanto, isso não deve acontecer somente pela repetição de casos particulares, o que caracterizaria uma forma empírica de conhecimento, mas também pela análise sobre um caso particular. Esta análise permitirá reconhecer a relação estabelecida e encontrar um modo geral, que explique outros casos particulares.

- **Episódio 2: A identificação das grandezas: um passo necessário e anterior à generalização**

Ainda usando o exemplo dado pela professora, observou-se como a identificação da relação entre as quantidades numéricas é fundamental para garantir que o valor desconhecido seja encontrado corretamente. Os estudantes não perceberam que o valor encontrado não poderia ser validado como resposta.

Assim, a pesquisadora, nesse momento, procura verificar com a professora se os estudantes compreendem a relação entre os números, e o que cada um deles representa. Sugere então para a professora que associe a equação a uma situação-problema. Ela responde que não tinha feito isso, mas intui que, se tivesse feito, eles saberiam resolver.

Associar a equação com uma situação-problema não se trata de "contextualizar", mas de relacionar e identificar as quantidades associadas a grandezas, para que a relação possa ser estabelecida. Historicamente, as primeiras equações e a resolução delas surgem da necessidade de encontrar valores desconhecidos em situações-problema. Nessas situações, as grandezas com as quais se trabalhavam estavam identificadas. Entende-se desta forma que a operação técnica no caso de (p-308 = 1967) de somar 1967 + 308 é validada, ainda que não generalizada.

A situação definida com os estudantes, conforme o planejamento entre a pesquisadora e a professora, contemplava essa necessidade de identificar as grandezas. Os estudantes reconheciam as dimensões das áreas e dos perímetros como as grandezas. E as situações propostas envolviam o valor desconhecido em uma delas. Desta forma, os estudantes puderam atribuir significados aos valores e símbolos que foram usados na situação.

Entende-se aqui que a identificação das grandezas é um movimento inicial necessário para a generalização, ainda que se considere que posteriormente tais grandezas serão tratadas de forma abstrata. Se forem considerados o movimento do pensamento e os níveis de generalização, o fato de reconhecer as quantidades numéricas associando-as a uma determinada grandeza permite aos estudantes que se refiram a ela no movimento do concreto sensível ao abstrato. Espera-se que o estudante compreenda que aquela quantidade não é uma quantidade qualquer, mas está associada a uma grandeza específica, por exemplo, um número; não é uma quantidade aleatória, mas representa a medida de uma área, sendo identificado como o elemento particular que permitirá o alcance da relação geral.

Em Davydov (1982), encontra-se a importância da compreensão sobre grandezas para o conhecimento matemático. O termo que Davydov usa é na verdade o de "magnitude". Nesta tese se faz referência à "magnitude" e "grandeza" como termos semelhantes. Esse pesquisador considera que

> Operando com objetos reais e destacando neles os parâmetros das magnitudes (peso e volume, superfície e longitude etc.) as crianças aprendem a comparar as coisas por uma ou outra magnitude, determinando a igualdade ou desigualdade das mesmas (maior-menor). Estas relações se anotam com signos. Logo as crianças passam a

> anotar os resultados da comparação mediante a fórmula literal, quer dizer, na forma geral de representação de relações entre quaisquer magnitudes. (DAVYDOV, 1982, p.431).

No programa elaborado por Davydov, em uma primeira etapa os estudantes registram com traços as diferenças entre as magnitudes e posteriormente com símbolos, estudando algumas propriedades. Em outra etapa, propõem-se mudanças sobre as magnitudes para que os estudantes usem os sinais de mais e menos e criem novas igualdades, por exemplo: "Se a=b, a+c>b", o que abre caminho para a introdução de equações e inequações simples. Considera ainda que "[...] o simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativo das propriedades fundamentais das magnitudes, são inteiramente acessíveis às crianças de 7 anos já antes de entrar no conhecimento com características numéricas dos objetos" (DAVYDOV, 1982, p.434).

Uma das vantagens desse método é também superar o impasse entre álgebra e aritmética. Ao estudar a estrutura das fórmulas literais, comparando-as para chegar às conclusões, as crianças se habituam a deduzir e analisar as premissas e condições. Entretanto, mais uma vez, é necessário estar atento ao que realmente representa a essência do conhecimento algébrico, como foi destacado pelo movimento histórico e lógico dos conceitos, o estabelecimento de relações entre as grandezas de forma geral. Um dos objetivos do programa de Davydov é apresentar o conceito de número para os estudantes a partir dos processos de medida. Nesse sentido, realmente precisa identificar as grandezas e estabelecer relações entre elas, e uma dessas relações pode ser a de medida, de quantas unidades de uma determinada grandeza eu preciso para constituir outra. Assim, Davydov explica:

> [...] o professor introduz o número como caso singular e particular de representação das *relações gerais* entre magnitudes, quando uma delas se toma como medida de cálculo da outra. O número se obtém pela fórmula geral $\frac{A}{C} = N$, onde N é qualquer número, A qualquer objeto representado como magnitude e C qualquer medida. (DAVYDOV, 1982, p.434, grifos do autor).

Ainda sobre a identificação de grandezas, a própria conceituação do que é uma "grandeza" foi questionada pela pesquisadora durante uma reunião com a professora durante uma discussão ocorrida em outro projeto[29] do qual a pesquisadora participa. A questão

[29]O projeto a que se refere intitula-se "Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Princípios e Práticas para a Organização do Ensino". Ele está vinculado ao Observatório da Educação, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e é também coordenado pelo Professor Manoel Oriosvaldo de Moura. Para esse projeto, são realizadas reuniões semanais com integrantes de quatro escolas públicas, conduzidas a partir de discussões entre fundamentos da teoria histórico-cultural e atividades orientadoras de ensino. A atividade orientadora que estava sendo discutida neste dia (27/9/2011) era o "Verdim" (Anexo D).

principal girava em torno de reconhecer se a distância entre um ponto e outro e o tamanho de um passo seriam considerados como grandezas diferentes, ou se a grandeza considerada era o comprimento. Portanto, distância entre dois pontos e tamanho do passo, por serem medidas de comprimento, não seriam considerados como grandezas diferentes. Nesse momento da pesquisa, a pesquisadora relata para a professora que entende que, apesar de eles serem medidas lineares de comprimento, deveriam ser considerados como grandezas diferentes, mas de mesma natureza sobre as quais é possível estabelecer relações.

> Malu (E12; 00:20:45) […] as duas [distância de um ponto a outro e tamanho do passo] se medem com unidades de comprimento linear, diferente de área, diferente de capacidade, de outras coisas […], então, o que eles estavam entendendo que eram grandezas comprimento, área, capacidade, tempo, isso , eu até entendo que pode ser traduzido como grandezas, mas e quando a gente fala de relações de grandezas? Eu não vou poder… como eu relaciono comprimento com comprimento, essa relação existe e é por que na minha cabeça são grandezas diferentes, falar da distância e falar do tamanho do passo.
>
> Angélica: é por que o tamanho do passo pode diminuir é uma grandeza, o tamanho do passo que ele dá, e a distância é a grandeza que já tem, [...] ah, entendi que ela falou que era só comprimento, as duas eram comprimento, e grandeza não é só isso mesmo.
>
> Malu: […] Não é né? O que a gente fala de função? Função a gente relaciona grandezas, e eu posso relacionar a distância com o tamanho do passo.
>
> Angélica: sim, aí a quantidade de passos, vai contar quantos passos deu para chegar na casa, vc vai relacionar passos e a distância do percurso da casa.
>
> Malu: Agora se eu falo que a distância e o tamanho do passo são a mesma grandeza, como é que eu vou relacionar, se ele são a mesma, é como se eu só pudesse nesse momento medir, medir por que eu poderia comparar, mas não relacionar de outra forma.

A relação geral de medida entre grandezas é ainda diferente da relação geral entre grandezas estabelecida algebricamente. Na relação de medidas, a grandeza de um objeto é usada como elemento de comparação para “medir” a mesma grandeza em outro objeto. A alteração de uma das grandezas não implica alteração da outra grandeza, mas sim no valor de medida estabelecido. Na relação algébrica, a grandeza de um objeto relacionada à grandeza de outro objeto, ou a outra grandeza do mesmo objeto, provoca nele alterações, por exemplo, as variações de lado de um triângulo equilátero provocam variações na altura dele.

Para solucionar tal impasse, em relação ao conceito de grandeza, nesta tese o conceito de “grandeza” é definido a partir dos conceitos de qualidade e quantidade de Caraça (1952). Consideramos que **qualidade** é o conjunto de relações que um determinado objeto/fenômeno estabelece com outros. À qualidade de um objeto pode ser atribuída uma **quantidade** que não é necessariamente expressa em número. Caraça exemplifica que “coragem” é uma qualidade que não pode ser quantificada numericamente, apesar de que é possível estabelecer noções e relações de “mais” ou “menos” coragem.

A partir disso se conceitua como “grandeza”, a qualidade atribuída a um objeto/fenômeno possível de ser quantificado e, assim, pode-se fazer referência a sua altura, largura, área, massa, bem como à relação desse objeto com outros objetos e seu movimento no tempo e espaço, como distância, velocidade e outros.

Desta forma, defende-se que são grandezas diferentes as anteriormente discutidas conforme o diálogo, mas a justificativa para conceituar como grandezas diferentes é que são qualidades atribuídas a objetos diferentes. Então, por exemplo, na situação discutida, a distância é a qualidade estabelecida de um objeto (árvore) em relação a outro (casa), portanto é uma grandeza passível de ser medida com unidades de comprimento. Por sua vez, o tamanho do passo pode ser entendido também como a distância entre um pé e outro (da mesma pessoa). Por estarem relacionados a objetos diferentes, serão aqui considerados como grandezas diferentes, mas de mesma natureza.

Se, por um lado, o tamanho do passo é usado como unidade de medida para determinar a distância de um ponto a outro, não se pode dizer que se estabelece uma relação geral, mas sim uma relação particular da qual se deriva o número, como indica Davydov. Se, por outro lado, se considera a variação do tamanho do passo e a variação da distância entre um ponto e outro, ambas as variações podem ser consideradas como grandezas variáveis e então a relação está estabelecida de forma geral.

- **Episódio 3: A irregularidade dos objetos e fenômenos**

A professora envolvida com a situação de planejamento e procurando imaginar os formatos de áreas que poderiam surgir dos desenhos dos estudantes e no movimento do pensamento com a pesquisadora questiona: “Estou pensando aqui… mas se fosse um desenho todo desregular mesmo, sem ser circulo, sem ser polígono, né, aí fica também difícil… vai surgir outro problema, como eles vão medir a área daquilo ali também, pra dividir em partes iguais?” (E2, 00:20:30).

Destaca-se aqui o quanto as ações na escola já pressupõem a regularidade de formas e movimentos, que não são encontradas na natureza e nas ações humanas. Por outro lado, o quanto a humanidade necessita reconhecer regularidades nas formas e movimentos para que eles possam ser controlados.

A preocupação da professora em relação a isso, mais uma vez, se revela (E2, 00:22:41): "Por que aí eu pensei assim, a pergunta 'Mas como a gente vai calcular a área disso' por que é como você falou, eu só passei figuras regulares, então eles vão perguntar como calcula área de terreno irregular? Aí, qual seria assim a minha ação? Eu falo?"

Nesse momento, a pesquisadora procura destacar a importância de orientar os estudantes no processo de pensamento em relação ao cálculo da área, ainda que não cheguem a alcançar e definir uma fórmula para determiná-la. Considera ainda que o fato de os estudantes conseguirem reconhecer a necessidade de utilizar uma unidade padrão dividindo-a em partes cada vez menores sobre as quais têm controle é fundamental para a apropriação do conceito e da medida de área.

Essa ação necessária para o desenvolvimento do plano de aula não estabelece a relação entre as grandezas de forma geral, é, sim, uma ação de medida. Poderia ter sido mais detalhada e estudada com os estudantes se fosse enfatizada a necessidade de estabelecer uma relação geral que permitisse a determinação das áreas de diferentes figuras. Por exemplo, seria uma ação então destacar qual é a lei geral para determinar áreas de retângulo; como definir uma lei geral para determinar área de triângulos e outros.

• Episódio 4: Estabelecendo relações entre grandezas

Uma das primeiras ações da professora sobre o terreno da clareira é de que os alunos construam seus próprios terrenos usando um pedaço de barbante. Considerando que este teria o mesmo tamanho, o perímetro seria o mesmo para todos os terrenos.

> O que eu pensei assim, pra cada um ir marcar o seu terreno do jeito que quisesse, eu daria o barbante de mesmo tamanho, cada um ia lá e colocava do jeito que queria, só que daí ia sair figuras irregulares com certeza, eu acho… e aí, eu pediria pra eles verificarem se todos tem o mesmo espaço…com certeza uns iam ficar com mais e outros com menos…e aí eu lançaria vamos dividir o terreno agora em áreas iguais. (Angélica, E2,00:27:57).

A discussão segue no sentido de sistematizar algumas ações: usar barbantes com a mesma medida; verificar a área de cada terreno construído; estimular os alunos para a necessidade de uma unidade padrão de área; usar frações da unidade padrão; dividir um terreno e outros.

A fala de um aluno durante a execução da situação em sala revela como a aparência gera confusões de interpretações. Ele notou que as áreas de alguns grupos estavam ficando maiores e questionou a professora, achando que os barbantes tinham tamanhos diferentes.

Não havia percebido que a definição do formato do terreno é que provocava a sua maior ou menor área, e não o tamanho do barbante.

> Outra coisa que foi interessante assim, é que eu mostrei […]. Olha aqui todo mundo está vendo que o barbante é do mesmo tamanho, eu até tinha pregado com durex nas duas pontas pra mostrar. Aí, quando eu entreguei depois, um menino falou assim ‘Professora, por que tem grupo que tem barbante maior?’ Mas por que, por que o terreno ficou maior, por que a figura que a pessoa montou, deu a impressão que era maior. Eu falei assim: ‘Você viu que eu dei o mesmo tamanho de barbante pra todo mundo’ Aí, ele que não tinha prestado atenção, virou para o colega, e o colega disse: ‘Não, ela mostrou’. (Angélica, E8; 00:20:49).

A professora reconhece a potencialidade da situação no sentido de estabelecer a relação entre as grandezas.

> Eu acho que esta situação [referindo-se à situação que está sendo planejada] que a gente está pensando ela mostra bem a diferença dos dois, perímetro e área e aí eles estão mexendo, estão vendo como calcula e que dá pra calcular de todas as figuras, isso aqui é uma introdução pra gente bolar outro problema ou também em cima disso a gente vai criar pra forma algébrica? (E2, 00:40:55).

Em outro encontro de planejamento, ela revela que destacou situações propostas nas apostilas recebidas. “Por exemplo, tenho um quadrado com 3 cm de lado e outro com o dobro da medida. A área da segunda figura também será o dobro da área da primeira? Esse aqui é um probleminha que eu peguei da apostila... pra ir trabalhando um pouco das regularidades” (E3,00:28:35).

Como pesquisadora, a intenção é destacar que em uma situação como esta que está sendo apresentada na apostila, a relação entre as grandezas também se revela. Por exemplo, pode-se observar que ao aumentar o lado de um quadrado, a área também aumenta, entretanto não na mesma razão, mas no quadrado da razão. No momento da reunião com a professora, a sugestão para desenvolver essa situação com os estudantes foi a de não usar medidas particulares, quantidades numéricas, mas de considerar uma medida simbólica para o lado e estabelecer a relação entre lado e área.

A referência teórica para oferecer essa sugestão era dada pelos estudos de Davydov (1982), e considerando que as relações entre lado e área do quadrado podem ser expressas em diferentes formas de linguagem, recorrendo ou não às quantidades numéricas. Assim, a situação poderia ser desenvolvida com os estudantes no sentido de destacar: a identificação das grandezas envolvidas (lado e área); estabelecer as relações, de forma particular (por meio das quantidades numéricas) e geral (recorrendo a um modelo simbólico), e no movimento de um para o outro do particular ao geral e do geral ao particular. Esse exercício contemplaria a essência da álgebra no sentido de destacar a relação entre as grandezas.

• Episódio 5: Associando um símbolo a uma grandeza

Após etapa em que os grupos de estudantes construíam seus próprios terrenos, a professora orientou para uma comparação entre as medidas das áreas. A orientação era a de que os estudantes deveriam definir relações de maior ou menor entre as áreas dos terrenos dos diferentes grupos. Para tanto, era necessária a identificação dos grupos por nomes, abreviaturas, figuras ou símbolos que simplificassem a escrita.

Essa sugestão, dada pela pesquisadora, foi aceita pela professora, conforme trechos do seguinte diálogo:

> Pesquisadora: Quando eles começarem a fazer as relações eles precisarão dar um nome, ou um símbolo, ou uma figura para cada uma das áreas, entendeu? De cada grupo. Por que se não, como eles vão relacionar? A gente não vai dar letra direto para eles, entendeu. Então eles vão criar alguma coisa. Você pode até sugerir para eles criarem um símbolo, ou uma palavra ou uma letra, mas algo que simbolize aquela área, e então aquela representação deles é que será usada para fazer as comparações. (E8; 00:38: 33)
>
> Professora: Ah entendi então, verdade, eles vão fazer as comparações primeiro antes disso, e aí eles vão contando alguma coisa. Aí em função destas perguntas, eu uso. E aí se um grupo ainda estiver escrevendo, por exemplo, por que na hora que eu falei para eles formarem os grupos, eu falei para eles darem um nome, cada grupo ser o nome assim de uma família. E aí eles deram o nome, então, por exemplo, se eu ver um grupo escrevendo o nome todinho da família, eu vou ter que alertar, olha você está perdendo tempo.(E8, 00:39:31)
>
> Pesquisadora: É, mas é mais ou menos isso, essa representação com as letras, essa forma mais abreviada, ela surge justamente para facilitar o registro, de algum jeito eles tem que perceber que ficar escrevendo toda vez o nome da família, vai dificultar. (E8; 00:40:28).
>
> Professora: E não só de escrita, mas visualização. (E8, 00:41:12).

Após a discussão da professora com os estudantes, o registro que ficou combinado foi o de usar as letras do alfabeto para nomear cada grupo e representar a medida de cada área. A Figura 26 mostra a organização final das comparações.

Esse movimento de comparação das áreas, usando os símbolos, no caso as letras do alfabeto que foram atribuídas, pode ser comparado à introdução do programa de Davydov (1982), desde o primeiro ano escolar no sistema escolar russo, na década de 1970, do conceito de grandeza. Para ele, o conceito de grandeza pode ser considerado de forma geral, sendo os números naturais e reais suas representações particulares.

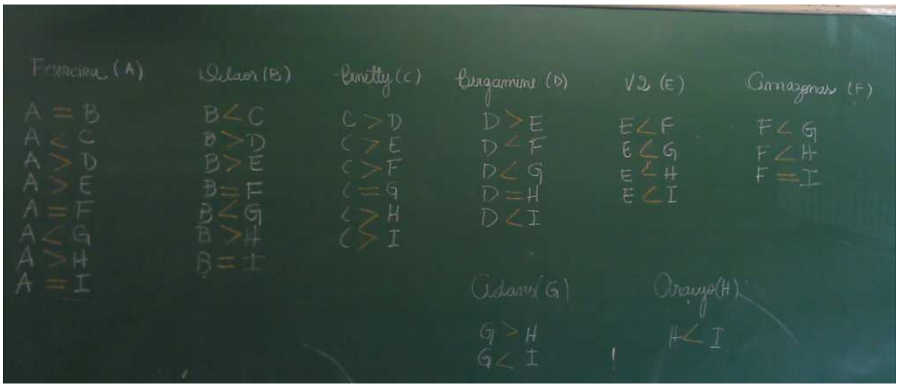


Figura 26 - Comparação entre as medidas das áreas dos terrenos.

Por outro lado, é possível perceber que essas relações estão sendo estabelecidas não entre grandezas diferentes, mas entre a mesma grandeza em objetos diferentes. A grandeza analisada e comparada, nesse momento, em todos os terrenos é a área, o que existe é uma comparação entre elas e um reconhecimento em relação ao que é maior e menor. Além disso, o uso da letra do alfabeto para abreviar o nome de um grupo não contempla a variação, o movimento, pois a letra como símbolo está associada a um determinado número que é a área de um dos terrenos.

Pode-se associar esse momento à álgebra sincopada de Diofanto, em que a palavra *arithmo* representa a quantidade. No caso dos estudantes da 6ª série, as abreviaturas estão sendo usadas para representar uma quantidade, por exemplo, o A está sendo usado para representar a quantidade da área de um grupo. A variação não é necessária nesse momento. Trata-se de relações importantes, mas ainda que contemple a relação entre grandezas de mesma natureza, mas em objetos diferentes, não as estabelece de maneira geral, mas somente para aquela situação particular, presa àquela medida numérica.

A professora organizou outros questionamentos com os estudantes hipotetizando que ela também construiria um terreno e elaborou questões para que eles pensassem sobre as possibilidades de esse terreno hipotético ter a área maior, menor ou igual a dos demais terrenos.

A professora ainda comenta que este movimento de estabelecer relações de comparação de medida não é uma prática comum de ensino, e reconhece que os sinais de maior e menor são pouco mencionados e utilizados.

> Ah, eu achei legal, este início de comparar os terrenos, nem passou isso pela minha cabeça, estava pensando só em perguntar se todos estavam com o mesmo espaço, mas é legal por que este sinal aí, eles vem o que só comparando dois números, no ensino fundamental I, na 6ª série aparece pouquinho nos exercícios de livro para comparar números positivos negativos qual é maior que o outro. (E5, 01:10:21).

Destacam-se as incertezas da própria pesquisadora no momento de planejamento com a professora, principalmente no que se refere aos modos de ação de condução da turma para claramente identificar a grandeza e associar um símbolo a ela. Nesse caso, trata-se do próprio movimento de pensamento da pesquisadora que, posteriormente com o avanço dos estudos, teve possibilidade de criar argumentos a partir do estudo histórico e lógico para justificar suas falas.

> Pesquisadora: Uma outra coisa que…Eu tenho um monte de dúvidas, você sabe, espero que você não esteja achando que eu sei de tudo, por que uma outra coisa que ainda está me incomodando é por exemplo, eles vão usar uma letra, um símbolo para o nome do terreno, eles precisam ter a noção de que este símbolo não é só o nome do terreno, este símbolo representa o valor da área, e isso é muito diferente. E precisa ficar de olho nisso. Ah, se um aluno falar ah, vou por m por que é a inicial, tudo bem, mas este m (eme) tem que ser mais que a inicial, tem que simbolizar o valor da área mesmo. (E8, 00:41:41).
> […]
>
> Professora: Aí assim, como identificar que eles estão usando a letra e não estão relacionando com a área? (E8, 00:42:58).
>
> Pesquisadora: Boa pergunta, não sei também, eu acho que é na hora que eles estiverem explicando ou relacionando. Eu não sei, isso pra mim ainda não está claro, mas acho que tem um problema sério nisso. (E8, 00:43:11).
>
> Professora: É, mas é do jeito que você falou mesmo, eu posso colocar para eles explicarem e conforme a fala deles eu vejo como eles entenderam ou não. (E8, 00:46:23).
>
> Pesquisadora: Ou quando você for usar exercícios que não estão ligados ao terreno, por que aí eles mesmos talvez sintam falta de saber, por exemplo, quando você já estiver nas equações da apostila, eles talvez sintam falta de saber o que representa aquela letra, entendeu? Por que a letra que eles vão escrever vai ter um significado muito maior, no terreno, eu tenho certeza que vai ter, eu não sei como vai acontecer depois, mas é questão de ir olhando e fazer os exercícios aos poucos, e ver o que eles estão percebendo. (E8, 00:46:37).
> […]
>
> Pesquisadora: E uma outra coisa, que acho legal você falar, por exemplo, você vai falar de área, falar que a gente entende que área pra matemática é entendida como uma grandeza, usar o termo mesmo, e o que é uma grandeza? Aquilo que pode ser medido. Então eu posso medir a área, eu posso medir o perímetro, eu posso medir a distância. Então, aí o que é uma maça, eu posso medir a maçã, ah tá, eu vou falar do peso da maça? Ah, então o peso da maça é uma grandeza e eu posso por na equação. Ou então, eu estou falando da quantidade de maçãs, e coloco m, o m não se refere só a uma maçã, o m é uma quantidade de maças, entendeu? (E8, 00:47:34).

Nesse momento da pesquisa, já era possível reconhecer a importância do símbolo associado à grandeza. No caso, o que se pretendia destacar, e que hoje foi conscientizado, é a necessidade de associar o símbolo não ao objeto em sua totalidade, mas a uma grandeza, enquanto uma qualidade atribuída ao objeto que pode ser quantificada, assim pode ser o peso, o comprimento, a velocidade e outros.

O estágio simbólico em álgebra incorpora não só o recurso às letras, mas a possibilidade de que tais letras representem não só um objeto, mas também um conjunto de objetos, e as grandezas relacionadas a estes. O uso desse simbolismo e a representação por letras permitem que a manipulação ocorra de maneira mais simplificada desde que se respeitem as regras e propriedades dessa manipulação. Tais regras e propriedades, sim, estão relacionadas ao conjunto de objetos ou à grandeza que a letra (símbolo) está representando.

Uma das professoras durante o curso de atualização apresentou a seguinte descrição de uma aula com alunos da 6ª série que considerou como tendo atingido os objetivos da aprendizagem de um conceito algébrico

> Introduzir as letras no cotidiano do aluno. Através de um alvo, onde cada círculo corresponde a uma fruta. Era dividido em grupo e conforme ia acertando o alvo, somavam-se os pontos. Essa soma era algébrica, pois usava a letra que iniciava o nome da fruta. (Ana, RE2).

Claramente, a professora associa um símbolo a uma quantidade específica, e não há variação nessa quantidade. Por vezes, a tentativa de facilitar as explicações e o uso dos símbolos algébricos provocam erros conceituais que se estendem ao longo da escolaridade. Por exemplo, é o que acontece com uma situação comum quando um professor associa m + m + m igual a 3 m e relaciona este m como uma abreviatura de maçã, assim se refere a uma maçã + uma maçã + uma maçã, e ele está efetuando uma adição aritmética não algébrica; não há aqui variação nem generalização, mas sim associação da letra como representação de um objeto. Posteriormente, o estudante associará a letra a uma unidade, e terá dificuldades em compreender, por exemplo, que a letra m pode representar a variação de um comprimento ou de qualquer outra grandeza.

É importante que os símbolos algébricos, para que realmente permitam que as relações entre as grandezas sejam estabelecidas, estejam associados às quantidades, às medidas das grandezas dos objetos e não aos objetos em si. E que tais relações provoquem realmente a variação. Por exemplo, posso dizer que a área de um triângulo depende de sua altura porque, se alterar a altura do triângulo, a área se altera, e, desta forma, estabeleço uma relação geral entre as grandezas altura do triângulo e sua área. Trata-se de um processo diferente de estabelecer a relação entre a altura de uma porta (a) específica e a de um objeto (e) específico, em que se pode dizer que a= 3e. Entretanto, se modificar o objeto (e), não se modifica a altura da porta, mas sim a relação de “a para e”, que não será mais de três vezes maiores. Isso está relacionado a um processo de medição de objetos e não a um processo algébrico, no qual os símbolos permitem a generalização das relações quantitativas.

Para efetuar as medições comparam-se grandezas que são fixas em quantidades numéricas. Nos processos algébricos, por meio de seu simbolismo, pode-se expressar a relação entre grandezas de forma genérica, abstrata e considerando a variação, identificando de que forma as variáveis associadas a essas grandezas se comportam dentro da situação proposta.

Retomando a situação que estava sendo desenvolvida no planejamento, observa-se que as relações entre a mesma grandeza (área) dos diferentes terrenos foram inicialmente estabelecidas visualmente. Agora se reconhece que este não é um processo algébrico, mas um processo de comparação de medidas e de atribuição de símbolos à medida de uma grandeza do objeto. Pode-se considerar que é apenas um processo de iniciação aos procedimentos algébricos.

A situação prossegue com a professora questionando como poderia ser verificado se a relação estabelecida estava correta. Nesse momento, o objetivo era inserir a necessidade de uma unidade padrão de medida que pudesse fornecer os valores (ainda que aproximados) das áreas dos diferentes terrenos. Definir numericamente esses valores por meio de processos de medida cada vez mais precisos permite que as relações estabelecidas (ainda que particulares e não gerais) sejam validadas.

- **Episódio 6: As equações como instrumento para resolver situações-problema de área e perímetro**

Para introduzir as equações, foram elaboradas questões pela pesquisadora e pela professora para determinar valores desconhecidos relacionados à área e ao perímetro e às medidas de área e ao perímetro dos terrenos criados pelos estudantes.

As situações-problema a serem resolvidas com equações foram usadas em dois momentos. No primeiro, as situações consideravam os terrenos com perímetros fixos e, portanto, a relação era feita entre as áreas. Por exemplo: “Qual é o valor que devo acrescentar à área D para que tenha a área do terreno da família A? Registre seu cálculo”.

Nessa situação, os valores da área A e D eram conhecidos. O valor desconhecido era aquele a ser acrescentado. Já na situação seguinte, a professora orientou os alunos que trabalharia como se não conhecesse os valores de área dos terrenos; então, nesse caso, os valores desconhecidos são os da área de cada terreno. Seguem dois exemplos: “Se dobrar a área A vou conseguir o valor de 34u. Como posso representar isso? Qual é o valor da área A?”; e “A metade da área D é 8u. Represente e determine o valor da área D”.

Assim, aos poucos, usando as letras do alfabeto como símbolos para representar cada uma das áreas dos grupos, e escrever simbolicamente as equações relacionadas, a professora criou condições para discutir com os alunos técnicas de resolução de equações envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; usando também medidas hipotéticas, e não somente as medidas de área definidas para cada grupo.

As situações foram se complexificando, no sentido de serem geradas equações mais elaboradas para determinar o valor desconhecido. As questões eram apresentadas em linguagem comum e se referiam agora a medidas de terrenos arbitrários. Por exemplo: "Angélica construiu um terreno cujo dobro da área mais 3 unidades resulta em 15. Como posso representar isso e descobrir o valor?"

As equações também foram usadas como instrumentos para resolver situações-problema, mas relacionados aos perímetros dos terrenos, quando a professora já havia desenvolvido o trabalho com os estudantes de fixar a área dos terrenos. Nessa situação, a professora hipotetizou que também havia construído um terreno e, para encontrar o perímetro, estabeleceu relações com os perímetros dos terrenos que haviam sido montados pelos estudantes. Assim, o valor desconhecido refere-se sempre ao perímetro do terreno da professora. São exemplos dessas situações

a) O perímetro do meu terreno somado com o perímetro terreno da família Camargo Leal é igual a 50 dm. Qual o perímetro do meu terreno?
b) O dobro do perímetro do meu terreno subtraindo 10 dm tem a mesma medida que o perímetro do terreno da família Bergamine. Qual a medida do perímetro do meu terreno?
c) Com um pedaço de barbante consigo dar três voltas ao redor meu terreno. Ana me mostrou que com o mesmo pedaço de barbante posso dar só uma volta no terreno da família Araújo e ainda sobram 20 dm do barbante. Qual é a medida do meu terreno?
d) Um terço da soma do meu perímetro com 4d m é igual a diferença entre perímetro do meu terreno com o da família Adams. Qual a medida em dm do meu terreno?

A professora relata que os estudantes conseguiram resolver tais situações registrando na forma de equações, mas encontraram dificuldades naquelas em que o valor desconhecido estava presente em dois lados da igualdade ou quando houve a necessidade de introduzir o uso de parênteses, para respeitar a ordem das operações a serem efetuadas. Estas são dificuldades do procedimento para resolver as equações. A professora procurou resolver as equações com os grupos, orientando-os em relação aos procedimentos corretos e destacando que a relação entre as grandezas envolvidas não fosse alterada.

A partir do que foi descrito nos dois últimos episódios (5 e 6), é possível retomar a análise da generalização envolvida nessa etapa da situação (Figura 27), em que os estudantes atribuem símbolos à grandeza área ou perímetro e trabalham com equações. As intervenções da professora e a discussão com os estudantes encaminharam para definir a área de cada terreno por meio de uma letra, e foram estabelecidas comparações do tipo A>B, procurando identificar que a medida da área do terreno A era maior que a medida da área do terreno B. Somente essa representação na forma de letras não é suficiente, se a ela não estiverem atribuídos significados. Por exemplo, para realmente compreender esta notação A>B, era necessário que os estudantes compreendessem que a letra A simbolizava um terreno e a grandeza em discussão era a área. Desta forma, esse simbolismo carrega uma abstração, mas ainda não uma generalização, pois a letra A se refere somente à medida da área do terreno A e não contempla a variação. Trata-se de uma situação diferente de quando se atribui, por exemplo, a letra x à área como uma grandeza variável. Assim, nesse momento, a generalização atingida era a de nível II para o conteúdo, pois se esperava que os estudantes reconhecessem a área como uma grandeza atribuída ao terreno, e a noção de área já contém em si uma abstração e não depende unicamente da percepção direta dos objetos. Por serem destacados valores específicos da área, conhecidos e desconhecidos, entende-se que o elemento mediador usado para estabelecer as relações a serem generalizadas nessa situação estava no nível I. Da mesma forma, os critérios de validade se encontravam no nível I, considerando que por serem valores específicos de medidas de área os estudantes tinham a possibilidade de verificar exatamente se a relação estabelecida era válida. Como forma de expressão e significado para essa situação atribui-se o nível II, pois as letras estão expressando quantidades desconhecidas associadas às grandezas, apesar de não contemplarem a variação.

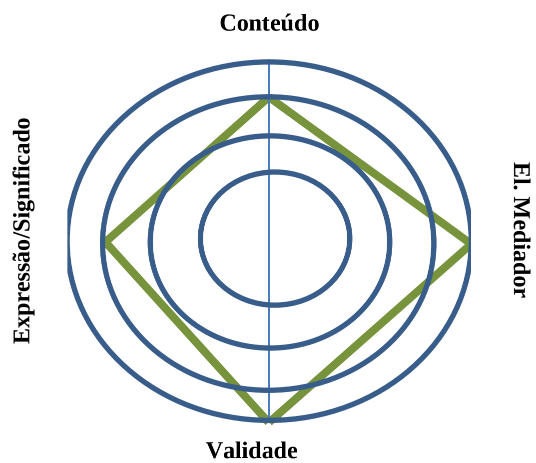


Figura 27 - Análise da generalização nos episódios 5 e 6 do planejamento com a professora.

6.2 O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO E O PROCESSO DE FORMAÇÃO DA PESQUISADORA E DA PROFESSORA

Considerando que a Atividade Orientadora de Ensino é a mediação entre a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem dos estudantes, entende-se que a necessidade de o professor ensinar deve trazer à tona a necessidade de o estudante aprender. A necessidade de a professora Angélica ensinar se revela já em suas primeiras falas, bem como sua preocupação com a organização antecipada das ações de ensino. O planejamento para o segundo semestre foi iniciado com antecedência. A primeira reunião para definir ações com os estudantes foi realizada em meados de junho. Sobre isso, a professora comenta: “Mas, aí é bom por que tem bastante tempo para ir planejando bem” (E1, 00:01:05)[30].

A dinâmica de trabalho da professora até esse momento incluía as orientações curriculares fornecidas pela escola, e também outras situações. “Eu estou mesclando. Pego atividade da apostila e complemento com outras situações. Só o livro didático que eu não uso, eu uso mais às vezes para eles visualizarem.” (E1, 00:02:02).

Mesmo com o uso desses materiais, a professora não se sente satisfeita, e por isso procura cursos de atualização que contribuam para sua formação como professora. A disponibilidade dela em reorganizar, a partir das ações do curso de atualização realizado, todas as suas ações para o segundo semestre do ano é reveladora da existência de sua necessidade e motivo. Nesse sentido, entende-se que ela esteve durante o processo de realização desse planejamento em atividade de ensino.

Por outro lado, quando o planejamento conjunto com a professora foi iniciado, o objetivo principal da pesquisadora era o de concretizar as discussões iniciadas durante o curso de atualização e gerar outros dados de análise para investigar o objetivo geral da pesquisa sustentada nesta tese: investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra revelado em propostas curriculares e nas ações dos professores.

Para a análise realizada por episódios, buscou-se identificar como a essência do conhecimento algébrico, reconhecido por meio dos estudos do movimento histórico e lógico, como “estabelecer a relação entre as grandezas variáveis de forma geral”, poderia ser alcançada e desenvolvida por meio das ações de planejamento.

Assim, os episódios destacados referem-se aos processos de identificação das grandezas, de estabelecimento de relações, de possibilidades relacionadas ao processo de

[30]Os registros dos dados seguem a ordem (Número do encontro; momento de início da fala).

generalização, e como as equações como instrumento da álgebra possibilitam a resolução de situações-problema. Entretanto, durante o momento de desenvolvimento desse planejamento (2º semestre de 2011), os estudos da pesquisadora ainda não permitiam estabelecer sínteses em relação ao papel do movimento histórico e lógico dos conceitos para definição da essência do conhecimento algébrico, assim como não estava claro como essa essência, ainda nebulosa, iria se expressar no objeto de ensino e nas ações de ensino. O que havia era a hipótese da importância do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o estabelecimento de relações com o objeto de ensino da álgebra. Conforme novos estudos foram sendo realizados e os dados do curso de atualização com os professores e das reuniões de planejamento com a professora Angélica foram analisados, foi possível estabelecer as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.

Cumpre notar que estabelecer esse planejamento conjunto só foi possível porque a professora envolvida se disponibilizou a estudar textos teóricos, planejar e detalhar antecipadamente várias ações de ensino, e realizá-las com um grupo de estudantes.

As discussões possibilitaram à professora e pesquisadora aprofundarem conhecimentos sobre a teoria histórico-cultural e o movimento histórico e lógico dos conceitos matemáticos. Nesse movimento de atividade de aprendizagem e de ensino é que foi possível reconhecer elementos que relacionam o conhecimento científico (em seu movimento histórico e lógico) ao objeto de ensino da álgebra (ou conteúdo de ensino).

Leituras realizadas (DIAS; MORETTI, 2010; MOURA et al., 2010) durante o processo de planejamento e a discussão promovida a partir delas são dados reveladores da necessidade de professora e pesquisadora compreenderem que o objeto de ensino da álgebra não está definido *a priori*, mas se encontra em movimento.

Por exemplo, durante a leitura de Moura et al. (2010), a professora destaca:

> Ele fala assim, sobre passar o conhecimento científico para o contexto escolar, na pagina 68 (pausa) quando ele fala assim, ele fala sobre, não sei se eu entendi direito, que existe uma perda, por que você vai selecionar os conteúdos relevantes, o potencial deste conceito que desenvolve nas funções psíquicas do sujeito, eu entendi assim que existe uma perda transformando este conhecimento científico em conteúdo escolar. (Angélica, E13, 00:27:42).

A posição da pesquisadora foi de ressaltar que necessariamente há uma seleção de uma parcela do conhecimento produzido pela humanidade a ser contemplada na escola. Sendo impossível abarcar no período escolar todo o conhecimento produzido, é necessário que, dentro do objeto de ensino (no caso da álgebra), esteja contemplada a essência dessa forma de conhecimento, que nesta tese, vem sendo estudada e revelada por meio do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos.

Considera-se ainda que o conteúdo algébrico contribua para a formação dos indivíduos se for desenvolvido pela via do pensamento teórico e se contemplar a essência dessa forma de conhecimento. Essa defesa em relação ao conteúdo não está relacionada a um movimento conteudista, em que se sobrecarregam professores e estudantes de conceitos e técnicas em geral desenvolvidas no ambiente escolar na forma de uma listagem de tópicos por bimestre, sem que a eles seja atribuído algum significado. A professora destaca a dificuldade em “cumprir” o programa mesmo com o aumento da carga horária.

> Assim, também, eu nunca consegui completar o que estava no planejamento, mas que eles aumentavam , quando eu estudava era 180 dias, mais no finalzinho aumentou para 200 dias, mas por mais que aumente, eu não termino, pra ver o tanto que é colocado assim também em Matemática. (Angélica, E13,00:32:52).
>
> Estou falando isso, por que esta história do curso e do doutorado é justamente pra retomar pelo menos no ensino de álgebra, apontar isso e abrir a discussão de com que critérios a gente olha para o currículo e fala o que é realmente importante. E se pensar que esta formação de conceitos não é dada instantaneamente, eu não posso falar assim, no primeiro bimestre ele vai aprender área. Não, ele não vai aprender área, quem sabe no 4º. Bimestre, ou no terceiro, que seja. Mas eu não tenho como dizer: Todos vocês vão aprender área agora, é o momento certo para aprender área e depois disso a gente não vai mais falar de área, a gente vai falar de outra coisa e vai ser o momento certo de vocês aprenderem outra coisa, não pode ser tão fechado; as pessoas aprendem com ritmos diferentes, de maneiras diferentes, então é muito séria a questão de pensar o currículo. Estou falando de álgebra porque é o que a gente trabalha, mas isso é qualquer currículo. Qualquer currículo deveria ser de tempos em tempos repensado, reorganizado, por que o conhecimento científico vai avançando. (Pesquisadora, E13, 00:33:48).

A reorganização de um programa curricular deve incluir entre outros critérios aqueles relacionados ao conhecimento específico e o que nele é essencial. A pesquisa realizada nesta tese visa a contribuir com elementos para o estabelecimento de tais critérios, no sentido de reconhecer o que dentre o conhecimento algébrico deve estar contemplado como objeto de ensino da álgebra e, portanto, deve ser inserido no programa curricular. Desta forma, a lista do que chamamos “conteúdos” pode ser determinada por conceitos essenciais e pela relação entre eles, os nexos conceituais teóricos.

Não se trata de algo simples de ser definido e, por isso, constantes pesquisas devem ser realizadas e mesmo no processo de formação com os professores. Em outra reunião, enquanto a pesquisadora falava sobre a necessidade de aprofundamento conceitual, para a constituição de uma situação, conforme os princípios da Atividade Orientadora de Ensino, a professora comenta: ‘”E até mesmo a dificuldade para saber qual é a essência do conteúdo, é por que eu não sei, então é difícil” (E15; 00:53:22).

No caso da professora Angélica, o contato com a pesquisadora também proporcionou novas ações acadêmicas, e o trabalho desenvolvido conjuntamente gerou duas apresentações em congressos nacionais: o 16º Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino (ENDIPE), realizado em 2012, e o 11º Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado em julho de 2013.

7 SÍNTESES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca desta pesquisa se insere na relação entre a álgebra como objeto da ciência e objeto de ensino. Porém, os conteúdos do ensino não são vulgarizações ou simples adaptações de conhecimentos científicos (CHERVEL,1990), nem transpostos diretamente da ciência algébrica. É necessário, então, compreender como se desenvolve o conhecimento algébrico na atividade humana (objetivação), como ocorre a atividade humana de apropriação do conhecimento, e de que forma o conceito algébrico pode ser tratado como objeto de ensino sem que perca sua especificidade. Os objetos de ensino de qualquer ciência, e nesta tese em particular, do conhecimento algébrico, devem ser constituídos por elementos fundamentais que instrumentalizem e desenvolvam o pensamento teórico dos estudantes.

A procura de respostas para "o que ensinar", visando à qualidade de formação dos estudantes, destacou-se como uma questão central nesta tese: "Quais princípios devem orientar a constituição de um objeto de ensino, em particular, da álgebra?". Entendendo ainda que a definição e escolha do conhecimento algébrico como objeto de ensino estão atreladas ao que se espera da formação do aluno, ao que se entende como função social da escola.

Assim, nesta tese, o objetivo foi estabelecer relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. Considera-se que o conhecimento sobre essas relações é fundamental para a organização do ensino de matemática e, portanto, trata-se de conhecimento a ser contemplado em programas de formação de professores. São necessários estudos teóricos que possibilitem reconhecer o movimento de constituição do conhecimento matemático, mas não só, pois é preciso reconhecer quais são os nexos conceituais e a essência desta forma de conhecimento que precisam ser apropriados pelos estudantes. Pode-se pensar ainda mais que, identificada tais relações entre o conhecimento específico e o objeto de ensino, é necessário refletir como organizar o ensino de forma a emergir tais nexos conceituais.

As categorias do materialismo dialético, os conceitos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade foram os fundamentos teóricos, para traçar e desenvolver a hipótese de que "o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes". Desta forma, o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos caracteriza-se como um princípio para a constituição de objetos de ensino.

Para atingir o objetivo de investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, a pesquisa foi conduzida em dois movimentos de análise que estavam inseridos na dinâmica singular/particular/universal sob os princípios da lógica dialética.

O primeiro, relacionado ao movimento histórico e lógico dos conceitos, partiu de episódios singulares da história da álgebra analisados em suas formas de pensamento e linguagem manifestadas e no processo de formação de conceitos, por meio de categorias do materialismo dialético, que possibilitaram revelar nexos conceituais teóricos em busca de reconhecer como universal, a essência do conhecimento algébrico.

Considerando como hipótese que tal essência deve constituir o objeto de ensino da álgebra, foi estabelecido o segundo movimento de análise. Este caminhava entre os singulares destacados (sequências, equações e funções) e pela análise de suas manifestações curriculares, em situações de ensino e no discurso de professores, em busca de princípios para a constituição do objeto de ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes. Nesse processo, o movimento histórico e lógico dos conceitos transformou-se de objeto de estudo (no primeiro movimento) para instrumento de análise (no segundo movimento), considerando que, desta forma, se revelam as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e objeto de ensino da álgebra.

No processo desses dois movimentos principais de análise, derivaram-se as sínteses teóricas e consideram-se algumas implicações para os processos de organização do ensino e para a formação de professores.

- **O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos não se confunde com o estudo da história da álgebra**

Um estudo realizado considerando a história da álgebra organiza os fatos conforme o tempo e espaço, destacando possíveis causas e consequências para o seu acontecimento. Conforme Kopnin (1978, p.183), “Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento”. O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos recorre aos elementos investigados pelos historiadores da álgebra e destaca dimensões filosóficas e psicológicas. Nesse sentido, supera a explicitação de fatos históricos por ressaltar o movimento do pensamento que originaram tais fatos. Desta forma, o lógico e o histórico compõem um par dialético, em busca da compreensão dos fenômenos da realidade objetiva, destacando não só a história de determinado objeto de conhecimento, por exemplo, a história dos conceitos algébricos, mas também a história do processo de constituição desse conhecimento. Assim, a relação dialética entre o histórico e o lógico é que possibilita que se compreenda um determinado objeto ou fenômeno, explicitando a relação entre os seus elementos, bem como a relação entre ele e outros objetos e fenômenos dentro de um sistema integrado. Em relação ao objeto de ensino da álgebra, o **movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos não se caracteriza como uma nova estratégia metodológica ou didática de abordagem dos objetos de ensino**. Assim como não se trata de estudar episódios de história da álgebra e reorganizá-los para apresentação didática com a intenção de que eles gerem necessidades ou interesses nos estudantes.

- **Por meio do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos, é possível reconhecer elementos fundamentais e nexos teóricos que revelam a essência do conhecimento algébrico.**

Os elementos que compõem os nexos conceituais teóricos da álgebra considerados nesta tese foram: a fluência e o movimento reconhecido nos objetos e fenômenos da realidade objetiva; o controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos; o movimento da linguagem e dos modos de resolução de problemas (forma e conteúdo do conhecimento algébrico); entre o elemento desconhecido e o elemento que varia (o reconhecimento de grandezas variáveis); a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos. O estudo desses elementos possibilitou revelar como essência do conhecimento algébrico o estabelecimento de relação entre grandezas variáveis de forma geral. Tal essência caracteriza-se como um princípio que constitui o objeto de ensino da álgebra. Desta forma, esse campo do conhecimento científico não perde sua especificidade ao ser tratado como objeto de ensino, e, por ter sido gerado a partir de nexos conceituais teóricos, também possibilita o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

- **A partir do movimento histórico e lógico dos conceitos definiu-se como essência do conhecimento algébrico o "estabelecimento de relação entre grandezas variáveis de forma geral"**

O conceito de grandeza está sendo entendido como a qualidade de um objeto ou fenômeno que é possível de ser quantificada. A qualidade de um objeto ou fenômeno só pode ser atribuída se este mesmo objeto ou fenômeno for observado em relação a outro objeto ou fenômeno. Desta forma, a altura, a espessura, a área e a velocidade são exemplos de grandezas atribuídas aos objetos, que estão implícita ou explicitamente relacionadas à mesma grandeza em outro objeto. Por exemplo, quando se diz “um prédio é alto”, implicitamente pode ser entendido que ele é alto, comparado à altura das casas, ou das pessoas, mas esse mesmo prédio pode não ser considerado alto se comparado a outro prédio. Considera-se para o estudo da matemática as grandezas que podem ser quantificadas. Admitindo que essas quantidades sejam variáveis, entende-se que a relação entre as grandezas deve ser estabelecida de forma geral, e não associada à determinada situação particular. **O objeto de ensino da álgebra deve ser constituído por ações de ensino que destaquem a identificação de grandezas, as possibilidades de que sejam quantificadas e admitam variação de quantidades, para então estabelecer relações entre tais grandezas de forma geral.**

- **É necessário diferenciar as relações entre grandezas variáveis estabelecidas de forma geral (algébrica) e outras formas de relação entre grandezas**

Por exemplo, as relações de medida são entre a mesma grandeza em diferentes objetos. Quando se pretende estabelecer tais relações, consideram-se as quantidades fixas atribuídas às grandezas em cada objeto que participa da relação. Por exemplo, a largura de uma determinada mesa pode estar relacionada a três vezes a largura de um pedaço de madeira. Entretanto, se for admitida a variação das quantidades atribuída a uma ou outra grandeza, a relação se desfaz. Por exemplo, se a largura da mesa for alterada, a relação com a largura do pedaço de madeira não é mais a de três vezes maior.

- **A essência do conhecimento algébrico se revela de diferentes formas por meio dos instrumentos da álgebra (sequências, equações e funções) na organização do ensino**

As funções, que representam um estágio avançado relacionado ao conhecimento algébrico, contemplam essa essência de forma total. Para estabelecer uma função, é necessário reconhecer grandezas que variam relacionadas aos objetos e fenômenos e estabelecer relações entre elas, ainda que tais relações sejam também condicionadas ao campo de variação de cada grandeza, havendo situações cuja relação não se estabelece sendo, portanto, necessário definir o domínio de cada função. No caso das sequências, também se estabelece uma relação entre grandezas variáveis; entretanto, ela está associada à grandeza ordem ou posição do objeto. As sequências são necessariamente formadas com uma grandeza que varia (de um objeto ou fenômeno) associada a outra grandeza (a posição que a representação desta grandeza ocupa na sequência). Pode-se dizer que se trata de uma situação particular de funções. O estabelecimento de uma lei geral de formação da sequência relaciona uma grandeza que é variável e a sua posição na sequência. Por exemplo, nas progressões aritméticas ou geométricas, reconhece-se uma lei geral a partir da identificação da posição (o valor n). Por sua vez, entende-se que as equações, como são comumente chamadas de uma incógnita, representam casos singulares das relações entre grandezas. Mesmo que estejam associadas a grandezas variáveis, ao serem criadas, as equações destacam ou captam um momento da relação entre grandezas, sendo possível atribuir à incógnita, o valor específico determinado. Por exemplo, durante o estudo de funções, podem-se captar momentos específicos, destacando-se as equações para determinar zeros ou raízes das funções, valores máximos ou mínimos e outros. Por exemplo, dada uma determinada função que relaciona o lucro de uma empresa à quantidade de produtos vendidos. Tanto o lucro quanto a quantidade de produtos são grandezas variáveis, sobre as quais podem ser estabelecidas relações. Quando se pretende captar um momento específico dessa relação, por exemplo, "qual é a quantidade de produtos que devo vender para alcançar 100 reais", é necessário criar uma equação a partir da função estabelecida entre grandezas variáveis, que é desta forma um momento singular da relação entre grandezas. As sequências, equações e funções foram reconhecidas nesta tese como instrumentos do conhecimento algébrico para compreender e interpretar os objetos e fenômenos da realidade objetiva. Entretanto, esses tópicos recorrentes nos programas curriculares acabam por receber mais destaque do que a essência do conhecimento algébrico. Ainda que não tenham sido citados como objetos de ensino da álgebra, eles conduzem e orientam a organização dos programas curriculares.

- **O processo de generalização foi destacado no estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como um elemento dos nexos conceituais teóricos para revelar a essência do conhecimento algébrico**

Entende-se que esse processo pode se desenvolver em diferentes níveis, no sentido de que pode ser estabelecida a generalização sobre os diferentes objetos ou fenômenos da realidade objetiva diretamente, ou sobre os conceitos, propriedades, relações, generalização de métodos e outros. A partir dos estudos teóricos destacaram-se quatro componentes do processo de generalização (conteúdo, elemento mediador, formas de expressão e significado, critérios de validade). O conteúdo indica "o que" está sendo generalizado, que pode variar, desde características físicas de objetos a relações conceituais; o elemento mediador indica "como" a generalização está se processando e que pode variar entre o uso de um elemento particular desconhecido e até um elemento que contempla a variação; a forma de expressão e significado indica como a generalização se “expressa” e se identifica com seu conteúdo, desde o uso da linguagem natural até expressões simbólicas que contêm como significado a relação entre conceitos; e o critério de validade que indica como o processo de generalização concretizado pode ser provado que se movimenta entre casos particulares e o controle de provas conceituais. Para cada uma dessas componentes, foram estabelecidos quatro níveis: nível I, da experiência sensível; nível II, das primeiras abstrações e relações entre objetos e fenômenos; nível III, das regras estabelecidas sobre relações; e nível IV, que atinge as estruturas matemáticas complexas. Não se almeja com tal classificação a linearidade do processo de pensamento da generalização, mas sim a possibilidade de analisar e reorganizar ações de ensino visando ao desenvolvimento desse processo de generalização pelos estudantes.

A concretização do objetivo desta tese, de investigar a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, foi iniciada pelo estabelecimento dos primeiros movimentos de análise que destacavam o estudo isolado do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o estudo isolado do objeto de ensino da álgebra. Com o destaque da essência do conhecimento algébrico, foi possível retomar, por meio das análises de propostas curriculares e da realização de um curso com professores, como tal essência se revelava ou não em tópicos de ensino. Esta foi a principal relação estabelecida entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra: **Destacar a partir do estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos a relação teórica essencial da álgebra como um elemento para constituir os objetos de ensino da álgebra**.

Considera-se a importância de tal relação, na medida em que as pesquisas, que se desenvolvem sobre o processo de ensino da álgebra, revelam a influência que as diferentes concepções de álgebra e de seu ensino exercem sobre a constituição do que seria o objeto de ensino da álgebra. Entende-se que o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos gera um quadro interpretativo e abrangente do desenvolvimento do conhecimento algébrico. Porque, por vezes, as diferentes concepções de álgebra e de seu ensino não refletem “álgebras” diferentes, mas momentos históricos diferentes de seu desenvolvimento. Por exemplo, a concepção da álgebra como estudo para resolver problemas e a álgebra como relação funcional. Por vezes, também são as concepções de aprendizagem que influenciam o entendimento sobre o que é ou deve ser o ensino da álgebra. Assim, entende-se que a álgebra deve ser “contextualizada” (Helena, A38) para a compreensão do estudante, ou é necessário fazer uso de “recursos facilitadores” (Mônica, A27) que a tornem mais “concreta” e outros. A compreensão sobre o uso do recurso simbólico é outro ponto de destaque nessas diferentes concepções de álgebra. Dessa forma, a letra pode ser compreendida como um algo que substitui o número, ou que o representa de forma geral, reforçando a necessidade de manipulação desses símbolos, considerando que tal manipulação gera a compreensão dos procedimentos algébricos.

Essas diferentes concepções de álgebra e educação algébrica geram diferentes resultados no processo de ensino. Por isso, não se trata de assumir ou escolher uma ou outra concepção, mas sim de entender o alcance em relação ao conhecimento que elas potencialmente podem produzir. Essa compreensão só é possível se retomarmos o que realmente constitui a álgebra, o que só pode ser realizado pelo estudo do movimento histórico e lógico de seus conceitos. As concepções de álgebra não são diferentes entre si, elas partem do mesmo conhecimento algébrico (universal), entretanto prendem-se ao que seria um de seus momentos ou particularidades. Por isso, a necessidade constante de retomar o que seria a relação teórica essencial da álgebra.

O objeto de ensino da álgebra também não pode conter em si todo o conhecimento algébrico acumulado na experiência histórica humana. É impossível considerar que em alguns anos de escolaridade de um sujeito ainda em formação lhe sejam apresentados todos os conhecimentos acumulados em séculos de desenvolvimento. Entretanto, esse objeto de ensino deve conter a totalidade concreta da álgebra, uma estrutura que permite a compreensão de cada fato, objeto, fenômeno e a inter-relação entre eles, como nos esclarece Kosik (1976, p.36): “O concreto, a totalidade, não são, por conseguinte, todos os fatos, o conjunto dos fatos, o agrupamento de todos os aspectos, coisas e relações, visto que a tal agrupamento falta ainda o essencial: a totalidade e a concreticidade”.

O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos necessita de elementos filosóficos, epistemológicos e psicológicos e a sua apropriação pode orientar as concepções de professores a respeito do que é a álgebra. Para que tais concepções sejam modificadas, é necessário que se tenha clareza em relação ao que se concebe como conhecimento algébrico, reconhecendo seus nexos conceituais e sua essência. Essa modificação na concepção dos professores em relação ao conhecimento algébrico possibilita o movimento da didática, da reorganização do ensino.

Reconhecendo conceitos algébricos como “produtos” que compõem a lista de conteúdos e são objetos de ensino da álgebra, os professores podem destacar suas características, efetuar classificações, desenvolver técnicas e tratá-los apenas de forma empírica, por sua aparência, sem alcançar a essência dessa forma de conhecimento. É o que pode ser observado no tratamento das equações e funções quando estas são insistentemente classificadas e desenvolvidas como objetos matemáticos com fim em si mesmos. Entretanto, compreender a especificidade do conhecimento em questão e seu processo de desenvolvimento por meio do movimento histórico e lógico municia o professor com elementos que lhe permitam atingir o objetivo do processo educativo. Ele, por meio da apropriação de tais conceitos, pode desenvolver o pensamento teórico dos estudantes, possibilitando a eles atribuir significado aos conhecimentos produzidos pela humanidade e que os compreendam como instrumentos para resolver situações-problema e atender as necessidades colocadas na sociedade em que vivem.

Além disso, o que se apresenta como objeto de ensino da álgebra cumpre minimamente duas funções: desenvolver o sujeito e possibilitar a apropriação dos conhecimentos já formados historicamente. Essas duas funções são interdependentes, sendo impossível separá-las. O sujeito se desenvolve ao se apropriar dos conhecimentos, e seu desenvolvimento permite a apropriação de novos conhecimentos.

Admitindo que a essência do conhecimento algébrico constitua o objeto de ensino da álgebra, derivam-se implicações de forma direta para a elaboração de programas curriculares e para o modo de ação dos professores sobre a organização do ensino.

- **Seleção do conteúdo de ensino nos programas curriculares: o que constitui o objeto de ensino da álgebra**

Ainda que a formação do conceito no indivíduo (ontogênese) não siga totalmente o processo de formação dos conceitos na espécie humana (filogênese), não se pode desconsiderar que o estudo de como o conhecimento algébrico se desenvolveu na espécie humana apresenta elementos fundamentais que podem contribuir para a superação de impasses epistemológicos na formação do indivíduo.

O conteúdo de ensino de um conhecimento científico contém sua essência e especificidade como construção histórica da humanidade, ainda que seja passível de transformações em função de condições psicológicas de desenvolvimento do sujeito, ou condições pedagógicas e estratégias metodológicas de ensino. Segundo Davydov (1982, p.6):

> Coluna vertebral da disciplina é seu programa, ou seja, a descrição sistemática e hierárquica dos conhecimentos e artes que procede assimilar. O programa, determinante do conteúdo da matéria, estabelece os métodos do ensino, o caráter do material didático, os prazos de estudo e outros elementos do processo docente. E, o que é mais substancial, ao indicar a estrutura dos conhecimentos assimiláveis e o método de sua coordenação, o programa projeta esse tipo de pensamento que se forma nos alunos ao assimilar isto no material de estudo proposto.

Assim, pode-se considerar que definir os conceitos que irão compor o conteúdo de ensino, que faz parte de um programa, não é tarefa de menor importância, pois não se trata de apresentar o conteúdo na forma de produto da ciência a que corresponde, mas sim explicitar as conexões lógicas de desenvolvimento dessa ciência como forma de interpretar a realidade. A partir disso, se organizam as demais condições metodológicas e didáticas.

Os critérios para a organização do conteúdo em programas curriculares nem sempre estão expostos nas propostas ou conscientizados por professores que se orientam por eles. A tradição que já existe no ensino de álgebra e do que é componente de seu conteúdo também é um fator que os torna, de certa forma, “imutáveis”. Mas há sempre movimento no conhecimento como visto, e por isso a necessidade de que mesmo esse conteúdo dos programas assumido por tantos anos seja revisto.

A definição dos critérios para a organização de conteúdos em um programa curricular de álgebra precisa ser explicitada. Tais critérios estão associados a conhecimentos pedagógicos, psicológicos, sociais e outros, mas também à ciência particular sobre a qual se organiza o objeto, neste caso, a álgebra. Nos programas curriculares, os conhecimentos se apresentam como lista de tópicos que compõe o conteúdo de uma disciplina. Entretanto, não há garantias de que todos esses tópicos contemplam a essência do conhecimento algébrico ou o desenvolvem pela via do pensamento teórico. Estabelecem-se conteúdos ou objetivos mínimos, mas o que pode determinar se estes são os essenciais é a compreensão do movimento histórico e lógico dos conceitos.

Não é o caso de elaborar um programa curricular para que o estudante alcance a “essência” da álgebra no seu último ano de escolaridade, mas sim que essa essência constitua o objeto de ensino da álgebra nas diferentes situações propostas ao aluno durante todos os anos de estudo e tenha essa possibilidade de se aproximar de tal essência, desenvolvendo formas de pensamento teóricas. Nesse sentido, questões epistemológicas, filosóficas, sociais do desenvolvimento do conhecimento algébrico no decorrer da experiência humana explicitam o seu movimento e o seu processo de constituição e devem ser contempladas nas situações de ensino para além das questões técnicas da utilização do conhecimento algébrico como um produto.

O papel do movimento histórico e lógico dos conceitos no processo de ensino é o de conduzir os estudantes no movimento da história humana, com os problemas, dúvidas e necessidades que a humanidade se deparou e superou. É possível analisar que esse movimento histórico e lógico, na forma como se entende nesta tese, não está contemplado na elaboração de programas curriculares de álgebra. Há ênfase no ensino das técnicas utilizadas em diferentes momentos históricos para resolver os problemas.

Espera-se, desta forma, contribuir com elementos para que no ensino de conceitos matemáticos, em geral, e algébricos, de forma específica, sejam destacadas, por exemplo, não só as técnicas de resolução de equações, ou a lei geral na forma algébrica de uma sequência, ou os elementos de uma função, mas também que grandezas estão relacionadas nas equações, porque é importante estabelecer, por exemplo, relações entre os lados de um triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras), ou como expressar a variação de uma determinada grandeza.

Nesse sentido, destaca-se como necessário rever o conhecimento algébrico, não como consequência linear do conhecimento aritmético, mas sendo elaborado em diferentes momentos históricos e sistematizado em momentos nos quais o conhecimento aritmético não é mais suficiente para interpretação da realidade objetiva.

Essa situação leva a questionar a concepção de álgebra como aritmética generalizada e se nos basearmos também na lógica formal, é compreensível esperar que a álgebra seja um conhecimento ensinado em etapa posterior à aritmética. Sendo muitas vezes compreendida como aritmética generalizada, a álgebra se torna a generalização dos casos particulares da aritmética, mas se tomarmos o pensamento teórico como princípio, tal lógica se inverte. Então, faz sentido manter em pauta a discussão, reforçada por Lins e Gimenez (1997), na qual defendem a inserção da álgebra mais cedo na escola, não por uma questão de posicionamento diferente do conteúdo algébrico na lista de conteúdos, mas para que se reflita sobre as especificidades e diferenças do pensamento algébrico e aritmético e sobre a necessidade de sua inserção e as formas apropriadas de conduzi-lo no processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista a formação do pensamento teórico do estudante.

Uma discussão que se faz bastante presente nas pesquisas atuais é o processo da *early algebra* (CAI; KNUTH, 2011), com a sugestão de inserir a álgebra em anos anteriores no programa escolar. Entretanto, existe uma decisão anterior a esta de apresentar a álgebra mais cedo aos estudantes, que é a de rever o objeto de ensino da álgebra, o seu conteúdo real.

Que a essência do conhecimento algébrico revele pelo movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e constitua os objetos de ensino nas programações curriculares é fundamental para o estudante compreender os momentos nos quais o conhecimento algébrico foi necessário, de que forma foi sendo utilizado, como forma de pensamento e linguagem e interpretação dos fenômenos da realidade objetiva.

A investigação sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos responde ainda às questões que Sacristán (2000, p.124) propõe: "Quem está autorizado a participar nas decisões do conteúdo da escolaridade? Por que ensinar o que se ensina, deixando de lado muitas outras coisas?". Questões que muitas vezes se perdem em discussões de poder, políticas e sociais, deixando para trás a especificidade do conhecimento que se tornará objeto de ensino, ou seja, seus nexos conceituais e sua essência.

Entende-se que esta tese contribui a partir da elaboração de um "modelo de análise do processo de generalização em situações de ensino" com as discussões sobre a organização de programas curriculares. Ainda que não estabeleça um novo programa, oferece um elemento, na forma de "modelo", que permite analisar criticamente as situações de ensino elaboradas, no caso, especificamente sobre o processo de generalização. Outros modelos podem ser gerados. No processo de elaboração deles, a interação entre pesquisadores e professores é fundamental, para discutir o processo de constituição de determinado conhecimento e a organização de situações que contemplem o que se considera essencial desta forma de conhecimento.

- **Da essência do conhecimento algébrico aos modos de ação dos professores: o processo de organização do ensino**

A importância do conhecimento algébrico no ensino é considerada pelos professores. Entretanto, reconhecer a sua importância não implica as especificidades desta forma de conhecimento científico que estão sendo consideradas no ensino a partir do pensamento teórico. Assim, se considera que a relação estabelecida entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, a partir da definição do que se constitui como essência do conhecimento algébrico, gera implicações e transformações na organização do ensino, nos modos de ação dos professores, na definição de conteúdos dos programas curriculares, desde a escolha das situações a serem apresentadas aos alunos até os modos de encaminhamento da situação durante as interações em aula. É importante reforçar que não se trata de escolher ou listar situações de registros históricos da álgebra, mas sim que o essencial dos conceitos algébricos constitua o objeto da álgebra que compõe as situações de ensino apresentadas aos estudantes. Dessa forma, espera-se que a relação do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra gerem necessidades de aprendizagem dos estudantes e apropriação dos significados históricos e culturais em relação aos processos de conhecimento.

Foi o que se pretendeu estudar e analisar durante o processo de planejamento de ações de ensino com uma professora. Reconhece-se que o desconhecimento desse processo histórico de formação do conceito algébrico limita o professor ao ensino do que se apresenta em apostilas e livros, que reforça a aprendizagem dos instrumentos da álgebra de forma técnica sem significado para o estudante, somente por meio de suas "operações".

Como apresentar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos em diferentes situações de ensino? Como é possível realizar a mediação entre o que é o processo de formação de conceitos algébricos e a sua transformação como conteúdo de ensino?

Entende-se aqui que a atividade orientadora de ensino, conceito proposto inicialmente por Moura (1996, 2001), concretiza a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra. Tal conceito constituído a partir dos elementos da atividade (necessidades, motivos, ações e operações) tem sido constantemente aprimorado pelo GEPAPe, gerando aprofundamentos sobre o estudo da atividade pedagógica (MOURA et al., 2010), e tem se mostrado como instrumento mediador da atividade de ensino e aprendizagem e, portanto elemento fundamental na formação de professores e estudantes.

No caso da atividade orientadora de ensino, as necessidades do professor e do estudante devem coincidir para que o processo de ensino e aprendizagem realmente se concretize. Para tanto, são necessárias variadas ações e operações, elementos que compõem a atividade. "Denominamos ação ao processo que se subordina à representação daquele resultado que há de ser alcançado, quer dizer, o processo subordinado a um objetivo consciente" (LEONTIEV, 1983, p.83).

A atividade orientadora de ensino (AOE), desta forma, não se caracteriza por ser uma tarefa ou uma situação-problema com um fim em si mesmo, modelado com uma série de passos a serem linearmente seguidos, como os problemas e exercícios apresentados em livros e apostilas. Planejada para desencadear no estudante a necessidade de aprendizagem de determinado conceito, apresenta situações desencadeadoras dessa aprendizagem, na forma de histórias virtuais, jogos ou situações emergentes do cotidiano. Tais situações devem contemplar o movimento histórico e lógico dos conceitos e são apenas o ponto de partida de um processo de ensino e aprendizagem desenvolvido coletivamente, cujo objetivo final é sempre a apropriação de um conceito.

A elaboração dessas atividades e o seu desenvolvimento com os estudantes requerem do professor domínio aprofundado dos nexos conceituais do conhecimento envolvido e movimento do pensamento teórico no sentido do abstrato ao concreto, concreto este que se caracteriza por ser a síntese de múltiplas abstrações.

Nesta tese, durante as ações de planejamento entre pesquisadora e professora para um a turma de estudantes, foi possível analisar como a essência do conhecimento algébrico se revela nas ações de ensino, o que foi apresentado no capítulo 5.

A determinação cada vez mais precisa dos nexos conceituais da álgebra por parte de professores e sua apresentação cada vez mais sistematizada em programas curriculares orientarão a elaboração de atividades de ensino e, consequentemente, possibilitará o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes e a apropriação do conhecimento científico em movimento, e não apenas de seu produto específico que, por muitas vezes, adquire sentido somente para o matemático, não sendo elemento da atividade do estudante, ou tornando-se uma tarefa a ser executada com outros fins, por exemplo, de aprovação na escola.

Assim, reconhecer os elementos do conhecimento algébricos essenciais, que caracterizam seu movimento histórico e lógico e seu desenvolvimento como conhecimento científico produzido pela humanidade, revela a essência que constitui o objeto de ensino da álgebra.

Nesses movimentos de análise e síntese em busca de investigar a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, a pesquisadora se apresenta como sujeito da pesquisa que aos poucos vai se constituindo. No curso com os professores, é o sujeito que tem o desafio de se apropriar do movimento histórico e lógico dos conceitos e organizar intervenções que possibilitem a outros professores essa apropriação, visando também a discutir princípios para a organização do ensino da álgebra na Educação Básica, a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural.

Nas ações de planejamento com a professora, para uma turma específica de estudantes, tem novamente por desafio estabelecer a organização do ensino por meio da apropriação do movimento histórico e lógico e da essência ainda não totalmente revelada. O processo de análise dessas ações de planejamento revela as potencialidade e limitações alcançadas em relação à organização do ensino.

A elaboração de um modelo de análise da generalização em situações de ensino trata-se de uma ação fundamentada, mas ousada, no sentido em que se torna necessário estabelecer componentes e níveis ao processo de generalização, nunca antes decomposto. Mas entende-se que este é o processo de movimento do conhecimento, o processo de análise que decompõe em elementos e gera abstrações, que, posteriormente, em um processo de síntese, estabelecem o movimento do pensamento do abstrato ao concreto.

Desta forma, considera-se que as ações da pesquisadora, organizadas e justificadas metodologicamente e fundamentadas teoricamente, possibilitaram alcançar o objetivo de investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra.

Portanto, possibilitou a defender a tese de que o movimento histórico e lógico dos conceitos é a fundamentação que, pela via da lógica dialética e do pensamento teórico, revela a essência do conhecimento algébrico. O conteúdo dessa essência encontra-se na possibilidade de estabelecer a relação entre as grandezas variáveis de forma geral e deve constituir o objeto de ensino da álgebra, a despeito de quando este seja iniciado, manifestando-se por seus instrumentos (equações, sequências, funções e outros), que podem revelar as relações entre grandezas numéricas, geométricas, matriciais, vetoriais e outras. Desta forma, o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos caracteriza-se como um princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra, e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. 7. ed. Madrid: AlianzaUniversidad, 1988.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BEDNARZ, N.; KYERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra**: perspectives for research and teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. cap.2, p.15-37.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.) **Early algebraization**: a global dialogue multiple perspectives. Hardcover, 2011, p. 5-21.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica**. Guia de livros didáticos**: PNLD 2011: matemática. Brasília: MEC/SEB, 2011.

______. ______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. London: Springer, 2011.

CARAÇA. B. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

CARLSON, D. The teaching and learning of tertiary algebra. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.) **The future of the teaching and learning of algebra:** The 12th ICMI Study. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. cap.11, p. 293-310.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**: categorias e leis da dialética. São Paulo: Editora Alfa-Omega, 1982.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares. Reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n.2, 1990.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática uma breve história.** 2.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

COSTA, A. B. da. A construção do conceito de sequências na perspectiva lógico-histórica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n.21, p.133-157, Mar. 2010.

CURY, H. N.; LANNES, W.; BROLEZZI, A. C.; VIANNA, C. R. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 4, n. 4, p. 9-15, 2002.

DANTZIG, T. **Número**: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscu: Editorial Progresso, 1988.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalizacion en la ensenanza**. Havana: Pueblo y Educacion, 1982.

DIAS, M. da S. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

DIAS, M. da S.; MORETTI, V. D. **Números** e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino. Curitiba: Ibpex, 2010.

EISENMANN, P. A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. **The Teaching of Mathematics**, v. 12, n. 2, p.73-81, 2009.

ENGELS, F.; MARX, K. **Para a crítica da economia política**. Primeiro fascículo, Berlin, Franz Duncker, 1859. Edições Progresso. Lisboa: Moscovo, 1982. Disponível em: <http://www. marxists.org>. Acesso em: 29 maio 2013.

______. Introdução à "dialéctica da natureza". In: Obras Escolhidas. **Editorial Avante**, t. 3, p.43-61, 1876. Disponível em: <http://www.marxists.org>. Acesso em: 29 maio 2013.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 1995.

FARFAN, R. M.; GARCIA, M. A. El concepto de funcion: un breve recorrido epistemológico. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,** v. 18, 2005.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a Educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1 [10], p. 78-91, mar. 1993.

FONT, V. Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. **Educación matemática**, Santillana; Distrito Federal; México, v.19, n. 002, p.95-128, ago. 2007.

FONT, V.; CONTRERAS, A. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, p.33-52, 2008.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0, 2012.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v.33, n. 1, p. 89-105, 2010.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht**,** Holland: Riedel, 1983.

GIOVANI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**. ren. São Paulo: FTD, 2009.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 22, n. 2.3, p.237-284, 2002.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. Significado de la demonstración en educación matemática. In: INTERNATIONAL CONFERENCE Of PME, 21th, 1997, Lahti. **Proceedings**... Lahti: Finland, v. 2. p. 313-321, 1997.

GOMEZ-GRANELL, C. Aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1996.

ILYENKOV, E. The concept of ideal. In: **Problems of dialectical materialism**. Progress Publishers, 1977. Disponível em: <http://www.marxists.org/archive/ilyenkov/works/ideal/ideal.htm>. Acesso em: 5 dez. 2012.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. São Paulo: Atual, 2009.

IMENES, L. M. P.; LELIS, M. C. **Matemática Imenes & Lelis**. São Paulo, SP: Moderna, 2009.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática.** Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

KARLSON, P. **A magia dos números**. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

KENDAL, M.; STACEY, K. Algebra: a world of difference. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study.** New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. cap.13, p.329-346.

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on it main activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. cap.2, p. 21-34.

KLEIN, J. **Greek mathematical thought and the origin of algebra**. Massachusetts: Dover Publications, 1992.

KNUTH, E. J.; ALIBALI, M. W.; McNEIL, N.; WEINBERG, A.; STEPHENS, A. Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. **ZDM,** v. 37, n. 1, 2005

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do Homem).

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LACASA, P. **Aprender en la escuela, aprender en la calle**. Madrid: Visor Distribuciones, 1994.

LACASTA, E.; PASCUAL, J. R. **Las funciones en los graficos cartesianos**. Madrid: Sintesis, 1998.

LEFEBVRE, H.; GUTERMAN, N.. Introdução. In: LENIN, W. I. **Cadernos sobre a dialética de Hegel**. Tradução José Paulo Netto. Rio de Janeiro. Editora UFRJ, 2011.

LENIN, W. I. **Cadernos sobre a dialética de Hegel**. Tradução José Paulo Netto. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2011.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidad**. 2. ed. Havana: Pueblo y Educación, 1983.

______. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitário, 1975.

______. O homem e a cultura. In: ______. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978. p. 261-284.

______. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 5. ed. São Paulo: Ícone, 1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

MALINOWSKI, B. **Uma teoria científica da cultura**. São Paulo: Abril, 1978.

MARX, K. **O capital**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2006.

______. Teses sobre Feuerbach. In: Engels, F. **Ludwig Feuerbach e o fim da filosofia alemã clássica**. Estugarda, 1888. p. 69-72. Disponível em: <www.marxists.org>. Acesso em: 29 maio 2013.

MILIES, C.P. Breve história da álgebra abstrata. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2012.

MORETTI, V.; MOURA, M. O. de. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, p. 67-82, 2003.

MOURA, M. (Coord.). **Controle da variação de quantidades**: atividades de ensino. São Paulo: Edusp, 1996.

______. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A.; CARVALHO, A. (Orgs.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola. São Paulo: Pioneira, 2001.

______. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R. L. L. (Org.). **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora Unesp, 2004. p. 257-284.

______. Teoria da atividade: contribuições para a pesquisa em educação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2013. p. 1-16.

MOURA, A. R. L; SOUSA, M. C. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetiké –** Cempem. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, v.16, n.30, p.63-75, jul./dez. 2008.

______. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife, 2004.

MOURA, M. O. de et al. **A atividade pedagógica na teoria histórico cultural**. Brasília: LiberLivro, 2010.

MOURA. M. O. de; SFORNI, M.; ARAÚJO, E. Objetivação e apropriação de conhecimentos na atividade orientadora de ensino**.** **Teoria e Prática da Educação**, v. 14, n. 1, p. 39-50, jan./abr. 2011.

NCTM-NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards of school mathematics**. Reston, VA, 2000.

NESSELMAN, G. H. F. **Versuch einer kritischen geschichte der algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen** [Essay on a critical history of algebra. 1st Part. The algebra of Greeks]. Berlin: G. Reimer, 1842.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, v.10, n.3, p.531-543, 2004.

OLIVEIRA, B. A dialética do singular-particular-universal. In: ABRANTES, A. A.; SILVA, N. R. da; MARTINS, S.T. F. **Método histórico-social na psicologia social**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005. cap. 2, p. 25- 51.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes**: indicadores para a organização do ensino. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PIRES, C. M. C. Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **BOLEMA**, Rio Claro, SP, ano 21, n.29, p.13-42, 2008.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator,** v. 3, n. 2, 1992.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, 2009.

PRADO JR, C. **Dialética do conhecimento**. 4. ed. São Paulo: Brasiliense, 1963.

PUIG, L.; ROJANO, T. The history of algebra in mathematics educations. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds**.) The future of the teaching and learning of algebra**: The 12th ICMI Study. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. cap. 8, p. 189-224.

RADFORD, L. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. Org. Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

______. Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25th, 2001, Netherlands. **Proceedings**… Marja van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.). The Netherlands: Freudental Institute, Utrecht University, 2001. p. 81-88, v. 4.

______. Some reflections on teaching algebra through generalization. In: BEDNARZ, N.; KYERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra**: perspectives for research and teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996a. cap.7, p.107-111.

______. The anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. **Acta Didactica Universitatis Comenianae**. Mathematics, Issue, v. 10, p. 103-120, 2010.

______. The rhetoric of generalization: a cultural, semiotic approach too student`s processes of symbolizing. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23rd, 1999, Haifa. **Proceedings…** Haifa: Technion-Israel Institute of Technology, 1999. p. 89-96, v.4.

______. The roles of geometry and arithmetic in the development of álgebra: historical remarks from a didactic perspective. In: BEDNARZ, N.; KYERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra**: perspectives for research and teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996b. cap. 3, p.39-53.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.
ROSA, J.E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2012.

RUBINSTEIN, S. L. **El ser y la consciencia**. La Habana: Editora Universitária, 1965.

RUBIO, N V. **Competencia del profesorado en en analisis didacticos de practicas, objetos y procesos matemáticos**. Tese (Doutorado)- Universidade de Barcelona, Barcelona, Espanha, 2012.

SACRISTÁN, J.G. **Compreender e transformar o ensino**. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SÃO PAULO (SP). Secretaria de Educação. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 1ª série. São Paulo: SEE, 2008a. v.1.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 7ª série. São Paulo: SEE, 2008b. v.3.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 3ª série: 2º bimestre. São Paulo: SEE, 2008c.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 3ª série: 3º bimestre. São Paulo: SEE, 2008d.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 2ª série. São Paulo: SEE, 2008e. v. 1.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 6ª série. São Paulo: SEE, 2009a. v.4.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 7ª série. São Paulo: SEE, 2009b. v. 2.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 7ª série. São Paulo: SEE, 2009c. v. 3.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 8ª série/9º ano. São Paulo: SEE, 2009d. v.2.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 1ª série. São Paulo: SEE, 2009e. v. 2.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio: 1ª série. São Paulo: SEE, 2009f. v. 3.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 6ª série/7º ano. São Paulo: SEE, 2010a. v. 4.

______. ______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental: 8ª série/9º ano. São Paulo: SEE, 2010b. v.2.

______. ______. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: matemática. São Paulo: SEE, 2008f.

______. ______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática:** 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1988.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental**: ciclo II: matemática. São Paulo: Secretaria Municipal de Educação/DOT, 2007.

______. ______. ______. **Referencial de expectativas para o desenvolvimento da competência leitora e escritora no ciclo II**: caderno de orientação didática de Matemática. São Paulo: Secretaria Municipal de Educação/DOT, 2006.

SCHMITTAU, J. The development of algebraic thinking: a vygotskian perspective. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)-International Reviews on Mathematical Education**, v. 37, n.1. p. 16-22, 2005. Disponível em: <http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html>. Acesso em: 16 jul. 2011.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. The development of algebra in the elementar mathematics curriculum of V. V. Davydov. **The Mathematics Educator**, v.8, n.1, p. 60-87, 2004. Disponível em: <http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/>. Acesso em: 15 jul. 2011.

SOARES, M. **Alfabetização e letramento**. São Paulo: Contexto, 2003.

STACEY, K.; CHICK, H. Solving problem with algebra. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra**: The 12th **ICMI** Study**.** New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. cap. 1, p. 1-20.

STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.) **The future of the teaching and learning of algebra:** the 12th ICMI study. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Ensenanza del algebra elemental**: una propuesta alternativa. Mexico: Trillas, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.) **As ideias da álgebra.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

VALENTE, W. R. **Uma história de matemática escolar no Brasil**: 1730-1930. São Paulo: Annablume, 2007.

VIÈTE, F. **The analytic art**. Tradução Richard Witmer. Mineola, New York: Dover Publications, 2006.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

______. **Obras escogidas**. Madri: Visor, 1997. t. 5.

______. **Teoria e método em psicologia**. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (via do participante)

Concordo em participar, como voluntário, do projeto de pesquisa que tem como pesquisadora responsável Maria Lucia Panossian, doutoranda da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, orientada por Manoel Oriosvaldo de Moura que podem ser contatados pelo e-mail malupanossian@hotmail.com.

O presente trabalho tem por objetivo:

Investigar princípios teóricos e metodológicos norteadores do ensino de álgebra a partir da análise de propostas curriculares e da elaboração de atividades de ensino fundamentadas no desenvolvimento lógico e histórico do conceito

Estou ciente de que minha participação consistirá em participar das discussões e propostas do Curso de Atualização: Atividades de Ensino de Álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural, cujos encontros serão gravados em aúdio e vídeo. Compreendo que este estudo possui finalidade de pesquisa, que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, com a preservação do anonimato dos participantes, assegurando, assim minha privacidade. Sei que posso abandonar a minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum pagamento por esta participação.

____

NOME COMPLETO

____

ASSINATURA

São Paulo ________, ________________ de 2011.

APÊNDICE B – "Necessidade da Álgebra no Ensino" - Texto produzido pela pesquisadora para utilização durante o curso de atualização com os professores.

Sobre a necessidade da álgebra no ensino

Por que é importante ensinar álgebra? Se fizermos esta pergunta a um grupo de professores podemos encontrar respostas variadas. Alguns podem dizer que já faz parte do currículo e que, portanto, deve ser seguido. Outros podem se dar conta de que nunca haviam parado sequer para pensar a este respeito. Outros ainda podem discursar sobre como foi difícil começar a ensinar álgebra e como seus alunos não se interessam etc. Desta questão deriva outra que podemos ouvir frequentemente de estudantes com variações, mas querendo dizer: Por que é importante aprender álgebra?

Esta é uma pergunta difícil de ser respondida em uma frase, ou mesmo uma conversa simples. A ela estão atreladas concepções do professor que responde em relação ao que é o ensino, o que é álgebra, e também concepções dos estudantes sobre o seu 'estar' na escola etc. O que tentaremos neste texto é de maneira geral e a partir dos conceitos da teoria histórico-cultural explicitar o que consideramos justifica a relevância da álgebra no ensino.

Parte-se aqui da concepção de que a escola é a instituição encarregada de garantir às futuras gerações a apropriação do conhecimento histórico acumulado pela humanidade, permitindo assim que esta apropriação se transforme também em novos conhecimentos que deem à humanidade melhores condições de vida.

Assim, a princípio há uma explicação ou justificativa histórica para a presença do conhecimento algébrico no ensino. Este conhecimento é parte do conhecimento científico da humanidade. Surge a partir de necessidades práticas e da vida cotidiana dos homens que a princípio procuravam métodos para elaborar e resolver equações que proporcionavam, por exemplo, as soluções para problemas de áreas e cálculos de volumes. Mas o desenvolvimento da álgebra não se mantém atrelado somente à resolução de problemas elaborados a partir de necessidades cotidianas, ele se desenvolve também a partir de necessidades da própria ciência matemática. Tal ciência foi se desenvolvendo repleta de paradoxos, alguns sendo satisfeitos e outros não. Por exemplo, os antigos se viam às voltas com a dificuldade de aceitar números negativos, e suas raízes, o que posteriormente originou o conjunto dos números complexos. Atualmente a ciência matemática atingiu tal grau de desenvolvimento que dificilmente seus conceitos podem ser encontrados em forma simples, mas estão presentes em suas formas mais elaboradas e complexas não só no desenvolvimento da Matemática, mas também nos de outras ciências.

Do ponto de vista psicológico pode-se entender que o ensino de álgebra leva o estudante ao desenvolvimento do pensamento teórico. Este é diferente do pensamento empírico no sentido em que permite que os estudantes captem a essência do conhecimento por meio de generalizações teóricas e não por casos particulares. Uma generalização enquanto forma de pensamento teórico permite que os conceitos sejam compreendidos relacionados entre eles, de maneira que sua essência seja revelada. Enquanto o conhecimento empírico baseia-se no objeto e suas representações, e estabelece o processo de generalização formal das propriedades dos objetos, baseado na observação, na percepção, gerando como produto um conceito empírico apresentado por meio de uma palavra que descreve o objeto, permitindo assim certa sistematização e classificação dos mesmos, o conhecimento teórico, por sua vez, busca a relação entre as coisas, os objetos no interior de um sistema. Também se baseia na percepção dos objetos, mas busca neles, mais do que é externo, visível, busca as relações entre suas propriedades. Seu produto, o 'conceito' teórico do objeto, concretiza-se por meio da transformação do saber e é expresso por diferentes meios da atividade intelectual.

Assim, por exemplo, podemos nos deparar com generalizações empíricas e teóricas dos objetos da álgebra. Arrisquemos aqui um exemplo sobre o conceito de equação. Se considerarmos a generalização empírica baseada no objeto e suas representações, podemos planejar que apresentar aos estudantes exemplos variados de equações e suas formas de representação é o suficiente para que ele adquira o 'conceito', nomeado pela palavra 'equação', podendo inclusive classificar e sistematizar as equações diferenciando–as em equações de 1º grau, de 2º grau, com uma ou duas variáveis etc. Mas fica a questão: tal tipo de generalização permite realmente ao estudante a apropriação do conceito de equação? Consideramos então que em um processo de generalização teórica do conceito de equação, o estudante se depararia com necessidades de relacionar este conceito a outros, como os de variação, de relação entre quantidades, de movimento, de função. Compreender esta relação entre os conceitos permitiria que ele inserisse o conceito de equação em um sistema, as relações entre suas propriedades, adquirindo condições de se apropriar efetivamente deste conceito.

Consideramos ainda que vale a pena destacar algumas especificidades do conhecimento algébrico. Enquanto parte do conhecimento matemático uma de suas características potenciais é permitir tratar dos objetos e suas relações de uma maneira distante da realidade imediata, entretanto esta sua característica tem sido entendida negativamente em formas de ensino que estão sempre em busca do conhecimento mais adaptado ao ' cotidiano' do aluno. O que historicamente foi um avanço em relação à formas de pensamento e linguagem no conhecimento científico é considerado um retrocesso nas questões de ensino. Nossa insistência enquanto professores em buscar o 'conhecimento útil' no sentido do conhecimento que o aluno 'vê' sendo constituído desconsidera estas formas de pensamento e linguagem (no caso a algébrica) que não são aparentemente 'úteis'. Afinal nenhum aluno encontrará uma equação ao andar pela rua, mas certamente não teria também o conforto de um caixa eletrônico se a humanidade em algum momento não tivesse conseguido generalizar procedimentos e elaborar padrões para organizar o funcionamento de uma máquina, lógico que com o auxílio de outras áreas científicas, como informática. Aliás, mesmo o funcionamento dos computadores recorre à álgebra booleana, de Boole que por volta de 1847 introduziu conceitos de lógica simbólica demonstrando que ela poderia ser representada por equações algébricas.

Mas isto nos leva a outra especificidade do conhecimento algébrico, em geral desconsiderado no ensino. Durante seu desenvolvimento, o objeto da álgebra foi se modificando. No início o objeto da álgebra era a resolução de problemas envolvendo equações e as técnicas para resolver estas equações, sendo que muitas das discussões entre os matemáticos giravam em torno de procurar procedimentos gerais que resolvessem as equações de terceiro e quarto grau, ou mais.

Em determinado momento histórico, a necessidade da própria ciência se modificou e então a álgebra passou a estudar grupos, estruturas, vetores e procedimentos de generalização para eles. Mas pouco se ouve falar em relação a este novo objeto de estudo da álgebra na escola do ensino fundamental e médio, talvez por sua complexidade, talvez pela falta de iniciativa de repensar o currículo de álgebra considerando os avanços científicos.

Ainda que existam falhas em realmente definir os conceitos algébricos relevantes e essenciais para o ensino, fato é que em geral a linguagem algébrica se apresenta como um empecilho aos estudantes. Esta é outra especificidade do conhecimento algébrico, seu conjunto de símbolos e regras que são criações humanas, não é facilmente apropriado pelos estudantes que tem dificuldades em compreender o poder de generalização e variação que o símbolo lhe apresenta. Mas a linguagem algébrica é fundamental enquanto objeto de ensino e também enquanto instrumento, pois a partir dela os demais conceitos algébricos podem ser ensinados.

Todas estas considerações feitas até aqui nos levam de volta à pergunta inicial: Por que é importante ensinar álgebra? Com base como fizemos aqui em alguns conceitos da teoria histórico cultural, em especial a importância do movimento lógico e histórico do objeto de estudo, nas questões de linguagem e pensamento, podemos seguramente dizer que a álgebra é um campo de estudo que amplia o campo de ação dos estudantes em relação ao controle da natureza, dos problemas da realidade que se apresentam, deixando claro que não se pretende com isso fazer referência aos problemas do cotidiano individual (como o troco do mercado). Podemos afirmar ainda que o estudante que realmente se apropria das formas de pensar da álgebra e de sua linguagem tem então outro instrumento para atuar sobre a realidade. O conhecimento algébrico gera condições aos sujeitos principalmente quando o conhecimento aritmético não é mais suficiente. Entretanto isso não significa dizer que o ensino do conhecimento algébrico deva ser posterior ao do conhecimento aritmético. São formas diferentes de pensamento que se entrelaçam muitas vezes, mas não são lineares.

Consideramos que pensar a respeito da necessidade da álgebra no ensino é passo inicial para que professores reconsiderem a inclusão da álgebra no currículo, pensando em questões de sua organização, sua relação com a aritmética, seus conceitos principais e principalmente em seus modos de ação para ensinar álgebra que certamente estarão voltados a criação nos estudantes desta mesma necessidade de compreender a importância da álgebra atribuindo-lhe valor.

Gerar nos alunos a necessidade de aprender um assunto tão complexo nem sempre é tarefa fácil, mas muitas vezes imprescindível se queremos vê-los motivado a se apropriarem deste conhecimento acumulado pela humanidade.

APÊNDICE C - Organização dos registros escritos do curso de atualização.

Organização dos registros escritos do curso de atualização “Atividades de ensino de álgebra a partir dos elementos da teoria histórico-cultural” realizado no primeiro semestre de 2011 pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

RE1 – Questionário de formação estudantil e profissional dos professores participantes e expectativas em relação ao curso.

RE2 – Descrição de uma aula com conteúdo algébrico.

RE3 – Questionamento sobre a necessidade da álgebra no ensino a partir de uma tirinha de Calvin (Apêndice D)

RE4 – Comentários gerados a partir da leitura do texto ‘Necessidade da álgebra no ensino’ – Apêndice B.

RE5 – Planos de ensino dos professores.

RE6 – A relação dos professores com a atual proposta curricular do estado de São Paulo

RE7 – Registros de análise da atividade extraída do Caderno do Professor (2009), 7ª. Série, volume 2, página 13 – Tópico: Sequências.

RE8 – Relações entre álgebra e movimento

RE9 – Critérios para organização do ensino a partir da situação hipotética de uma professora para escolher recursos e preparar uma aula.

RE10- Proposta de organização dos conteúdos algébricos a partir do tópico Sequências.

RE11- Comentários sobre o texto lido de Bento de Jesus Caraça (p.65 a 82, p.107 a 139).

RE12- Registro escrito da apresentação final do curso.

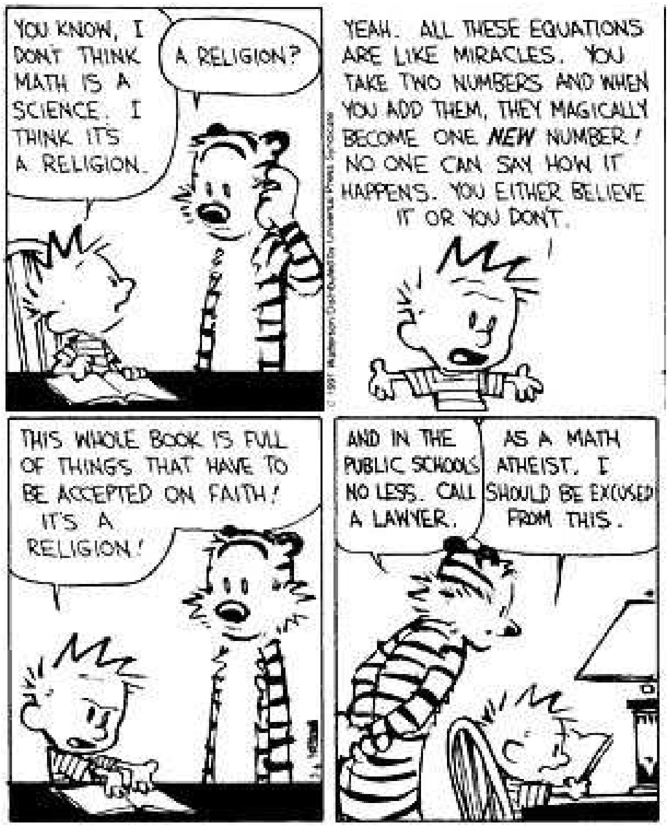
RE13- Sínteses para a organização do ensino de conceitos algébricos.

RE14 – Avaliação do curso.

RE15 – Autoavaliação.

APÊNDICE D - Quadrinho com o personagem Calvin para desencadear a discussão sobre a necessidade de álgebra no ensino.

Leia o seguinte quadrinho:



1º.quadrinho
Calvin: Sabe, eu não acho que a matemática é uma ciência. Eu acho que é uma religião.
Hobbes (o tigre): Uma religião?

2º.quadrinho
Calvin: Sim, todas estas equações são como milagres, você pega dois números e quando você os adiciona, eles magicamente se transformam num novo número. Ninguém pode dizer como isso acontece. Quer você acredite ou não.

3º.quadrinho
Calvin: Todo este livro está cheio de coisas que tem de ser aceitas na fé. Isso é uma religião.

4º.quadrinho
Hobbes: E nas escolas públicas não menos. Chame um advogado.
Calvin: Como um ateísta matemático, eu deveria ser dispensado disto.

A partir da leitura do quadrinho e de suas experiências de formação e profissionais, discuta em pequenos grupos sobre se:

a) É realmente importante que a álgebra seja conteúdo de ensino? Por quê?

b) Os estudantes compreendem esta importância? Ou qual é a visão dos estudantes sobre a álgebra?

c) É possível explicitar para os estudantes esta importância? Como?

d) O que pode ser considerado como objeto da álgebra e que deve ser ensinado aos estudantes?

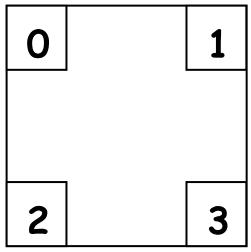
APÊNDICE E - O jogo FANTAN.

Fan-Tan: a sorte em um punhado de grãos

Os coreanos têm um antigo provérbio que diz: Quem quiser perdurar no mundo, deve perdurar no Fan-Tan. Esta afirmação está ligada à crença popular de que um marido só é fecundo após ter vencido sucessivamente 3 partidas de Fan-Tan, no intervalo entre dois períodos férteis de sua mulher. Mas, apesar de sua popularidade na Coréia, esse jogo surgiu na China, há centenas de anos. Depois espalhou-se por vários países asiáticos e chegou à Europa levado pelos portugueses, que o conheceram em Macau. (Trecho extraído de **Os melhores jogos do mundo,** Rio de Janeiro: Abril, 1978).

- ✓ **Participantes:** 4 jogadores

- ✓ **Composição**
  - 1 tabuleiro
  - Grãos ou pedrinhas
  - 80 fichas em 4 cores



- ✓ **Objetivo do jogo**

  Ganhar o maior número de fichas dos adversários.

- ✓ **Preparação do jogo**

  Cada jogador fica com 20 fichas da mesma cor
  Um punhado de grãos deve ser colocado no centro do tabuleiro
  Deve-se sortear o primeiro banqueiro.

- ✓ **Modo de Jogar**

- Cada jogador aposta a quantidade de fichas que quiser no número que preferir do tabuleiro (de 0 a 3)
- Os jogadores NÃO podem apostar no mesmo número
- Um dos jogadores (ou o banqueiro se tiver) apanha um punhado de feijões e espalha sobre o tabuleiro. Formam-se grupos de 4 feijões.
- O número de feijões que sobrar indicará o número do tabuleiro que irá ganhar.
- O vencedor de cada rodada ganha de cada um dos outros jogadores o número de fichas igual ou menor ao que apostou. Exemplo: Se o jogador vencedor apostou 3 fichas ele deverá ganhar 3 fichas de cada participante, a não ser que o outro participante tenha apostado uma quantidade menor do que essa.
- Será vencedor do jogo, o jogador que tiver o maior número de fichas, quando um dos jogadores não tiver mais fichas para apostar.

- ✓ **Adaptação do jogo. O Fantan com Bônus**

BÔNUS

- Os jogadores devem estimar a quantidade de feijões sobre a mesa antes de iniciar a divisão por grupos de 4.
- O jogador que mais se aproximar do valor exato de feijões ganha uma ficha de cada um dos demais jogadores.
- Pode haver no jogo um participante que é o banqueiro, que controla as quantidades e preenche a tabela.

TABELA A SER PREENCHIDA

BÔNUS		Quantidade de grupos de 4 feijões **(q)**	RESTO **(r)**	Quantidade total de feijões **(t)**	
Jogador	Valor estimado				
					1ª. rodada
					2ª. rodada
					3ª. rodada
					4ª. rodada
					5ª .rodada
					6ª. rodada
					7ª. rodada
					8ª. rodada

ALGUMAS QUESTÕES RELACIONADAS AO JOGO FANTAN

a) Qual seria o total de feijões no tabuleiro se havia 7 grupos de 4 feijões e ainda 3 sem grupo. Registre o cálculo e o resultado.
b) Se o total de feijões era de 38 e havia nove grupos de 4 feijões sobre a mesa, quantos restavam? Registre.
c) Foram organizados q grupos de 4 feijões e restaram 3 feijões. O total de feijões é t, como você representaria essa afirmação usando somente símbolos e números?

d) Complete esta tabela baseada na contagem dos feijões do Jogo de Fantan.

Quantidade de grupos com 4 feijões (q)	Resto de feijões no tabuleiro (r)	Quantidade total de feijões (t)
7	3	
	1	21
8		35
10	2	
	3	71

e) Como podemos representar o valor t (total de feijões) em função de q (quantidade de grupos de feijões) e r (resto de feijões não agrupados no tabuleiro)?

f) Se q = 10 e r = 1, quanto vale t? Registre.

g) Se t = 15 e q = 3, quanto vale r? Registre.

APÊNDICE F - Situação de ensino com o *software* Geogebra.

1ª situação
Desenhe na tela os gráficos das funções seguintes:
$y = xy = x + 2y = x - 2$
Escreva as observações do grupo em relação às características destes três gráficos.

2ª situação
Desenhe na tela os gráficos das funções seguintes
$Y = xy = 3xy = 5x$
Escreva as observações do grupo em relação às características destes três gráficos:

3ª situação
Dadas as funções
$y = x$, $y = x – 1$, $y = x + 1$

a) Represente-as no mesmo plano cartesiano
b) Dê as coordenadas de dois pontos do plano que pertençam a cada uma das retas
c) Indique as coordenadas do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas
d) Em que ponto cada reta intercepta o eixo das abcissas?
e) Qual a posição relativa das retas?

4ª situação
Desenhe os gráficos de
$y = 3xy = 3x + 3y = 3x – 3$
Analise-os comparando a raiz de cada função e o ponto onde cada gráfico intercepta o eixo y. Escreva suas observações.

5ª situação
Desenhe os gráficos
$y =-2x – 7$ e $y = 4x + 5$.
Qual é o ponto comum a eles?

6ª situação
Determine o ponto comum aos gráficos
$f(x) = -x + 2g(x) = x+2$

7ª situação
Trace num mesmo sistema coordenado, os gráficos das seguintes funções
$y = x^2$ $y = x^2 + 2y = x^2 - 2$
Determine as coordenadas dos vértices dessas parábolas
As concavidades das parábolas estão voltadas para cima ou para baixo? Por quê?

8ª situação
Como você pode obter os gráficos de
$y = x^2 + 2$ e $y = x^2 -2$, conhecendo o gráfico de $y = x^2$

9ª situação
Obtenha os pontos comuns aos gráficos de
$y = x^2 + 2x$ e $y = x + 2$

APÊNDICE G - Texto síntese sobre “Equações e Fórmulas” na Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

O trabalho com equações e fórmulas é apresentado a partir da 6ª série no volume 4. Considera-se que “[…] a exploração de fórmulas é estratégia eficaz para introduzir o uso de letras em Matemática” (SÃO PAULO, 2009a).

Entende-se que é mais fácil para o aluno manipular as letras na fórmula do que na equação.

Espera-se que o aluno use os símbolos e represente a relação entre as grandezas de mais de uma forma. Por exemplo, P = 4. a então a = P/4.

A partir deste entendimento apresentam-se na 6ª. Série fórmulas relacionadas à geometria: perímetro de um retângulo, área de um triângulo retângulo, entre outras como média aritmética; fórmulas relacionadas à economia (cálculo de imposto), à saúde (IMC), à física (distância) etc.

Ainda na 6ª série indica-se a introdução de alguns procedimentos de resolução de equações de 1º grau e entende-se que: “Uma equação nada mais é do que uma pergunta feita em linguagem matemática” (ibid., p.21). Recorre-se ao uso de balanças, ressaltando-se suas limitações em relação às raízes negativas, ou necessidade de extração de raiz quadrada e recomenda-se que o estudante compreenda a equivalência das expressões algébricas.

A equação é vista como uma pergunta “A forma de se perguntar em matemática é por meio de uma equação” (ibid., p.30) e entende-se que o estudante tem condições de resolvê-la por meio do pensamento lógico e de seu conhecimento aritmético realizando as operações inversas, sem que se apresente a técnica específica.

Na 7ª série, no volume 2 se apresentam os produtos notáveis com significados geométricos, destaca-se ainda que o produto da soma de dois números (x+ a) (x+ b) é uma situação que permite “….a construção de noções fundamentais aplicadas tanto á fatoração de trinômios quanto à resolução de equações de segundo grau pelo método conhecido como ‘soma e produto de raízes’ (SÃO PAULO, 2009 b, p.22). Posteriormente ressalta-se que é importante “[…] atribuir significado aos importantes conceitos de **valor numérico de um polinômio** e de **raiz de um polinômio**…” (ibid.,p.34) e retoma-se o processo de escrita de expressões algébricas associado à área e perímetro de um retângulo

Continuando e com a intenção de aprofundar o trabalho com equações o Volume 3 da 7ª série, traz a análise de situações de transposição da linguagem materna para a linguagem algébrica que normalmente induzem ao erro. É o caso do exemplo “Há seis vezes mais alunos do que professores” que normalmente é erroneamente escrita como 6 A = P, sugere-se a verificação com recursos aritméticos como uma estratégia interessante para constatar o erro.

Espera-se ainda que na 7ª série o aluno tenha condições de resolver tecnicamente equações mais complexas, além de que “O aluno deve reconhecer nesse estudo que as equações constituem uma ferramenta importante para a representação e resolução de problemas cujo encaminhamento através de recursos aritméticos seria muito complicado” (SÃO PAULO, 2008, p.15).

Ainda na 7ª série se estudam os Sistemas de Equações Lineares onde se pretende discutir o significado das equações com duas incógnitas e os métodos de resolução de sistemas por meio da análise de situações-problema, posteriormente inclui-se a representação gráfica das equações com duas variáveis no plano cartesiano.

Ao final da 7ª série se discutem as equações com mais de uma incógnita que possuem soluções inteiras positivas, as equações diofantinas, na expectativa de que se encaminhe a discussão para:

“1- estabelecer um critério de existências de solução que envolva diretamente a noção de máximo divisor comum;
2- estabelecer um algoritmo para encontrar as soluções quando elas existirem” (p.53)

Referências

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Caderno do professor:** matemática, ensino fundamental – 6ª série, v.4. São Paulo: SEE, 2009 a.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental – 7ª série, v. 2. São Paulo: SEE, 2009b .

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental – 7ª série, v.3. São Paulo: SEE, 2008.

Para discutir

1) As situações propostas nos Cadernos dos Alunos da Proposta Curricular contemplam o movimento lógico e histórico da linguagem algébrica? (Álgebra Retórica, Sincopada e Simbólica?)

2) Quais são as potencialidades e limitações desta proposta no sentido de formar no aluno a compreensão do que é essencial no objeto da álgebra?

3) O fato de o aluno transcrever um problema da linguagem materna para a linguagem matemática simbólica significa que ele compreendeu o problema?

4) Qual é o papel das equações na história da matemática? E para o ensino?

5) Qual ou quais os conceitos fundamentais da álgebra podem ser desenvolvidos a partir dos estudos das equações?

APÊNDICE H - Soluções de um grupo de estudantes para a situação de ensino “Altura da Pirâmide”.

1) ANÁLISE

Analise o problema da altura da pirâmide, e as respostas que três grupos de alunos da 6ª série forneceram. Explicite os critérios de análise em relação principalmente à aprendizagem de conceitos algébricos e ao recurso da linguagem.

Para ajudar na análise: Que conceitos algébricos podem ser discutidos? Que tipo de linguagem está sendo utilizada pelo estudante? Qual a relação entre a linguagem e o pensamento?

2) SUGESTÕES PARA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO

Apresente sugestões de encaminhamentos metodológicos para aprendizagem (destes estudantes especificamente) a partir do que foi observado nesta situação.

GRUPO 1

$12 + P = A$

P = Representa o número de pedras necessárias, no máximo 60.

A = Representa a altura da pirâmide, no máximo 72.

GRUPO 2

$60 + 12 = 72$

72 = altura máxima

12 = altura mínima

$12 + Y = X$ mínimo 12 máximo 62

(Y) Representa qualquer ato número de 1 pedra a 60 pedra

Para ele chegar à 72 ele vai usar as 60 pedras do deposito e 12 que ele já colocou

E a mínima são as 12 pedras que ele já colocou.

GRUPO 3

$12 + X = CM$ que tem Q pedras

X = quantidade de pedras que farão quer

min = 1 max = 60

CM = coluna mestra

Q = quantidades de pedras ao total na coluna

APÊNDICE I - O movimento lógico-histórico: modificações na linguagem algébrica.

O conhecimento e o pensamento matemático, assim como outras formas de conhecimento, surgem na prática. É da necessidade prática da vida cotidiana dos homens de contagem, medição etc. que se constitui a Matemática.

É possível perceber, na evolução histórica da Matemática, fases em que se elaboram os conceitos inspirada na experiência sensível e fases de sistematização e generalização. Tais fases se revezam, ainda que seja alto o grau de abstração atingido pela Matemática e que a faça momentaneamente esquecer sua base.

Tentaremos acompanhar esse movimento do pensamento e da linguagem matemática que se amplia e generaliza.

A linguagem matemática, abstrata, geral, rigorosa, precisa, apresenta-se de forma teórica e impessoal. O alto grau de abstração alcançado pelo conhecimento matemático faz com que seus conceitos pareçam incompreensíveis e sua linguagem inacessível aos que não se aprofundam nesse conhecimento. Assim, gera emoções contrastantes nos sujeitos conforme a existência ou não de sentidos e motivos que os aproximem do conhecimento matemático. Podemos encontrar exemplos de sujeitos completamente motivados e desafiados por essa forma de conhecimento, bem como reconhecer aqueles que não encontram qualquer sentido nessa atividade.

Como um conjunto de símbolos e signos[31] formados pelos grupos humanos, a linguagem matemática está repleta de conceitos e significados. Tais conceitos, fruto do processo de generalização e abstração, surgem das necessidades humanas da vida cotidiana, da experiência prática e vão se transformando e originando novos conceitos conforme são geradas novas necessidades pela própria atividade humana. Por outro lado, muitos conceitos, inclusive matemáticos, originam-se antes mesmo de possuírem uma necessidade prática, isso por que a reflexão abstrata, derivada da experiência prática, caminha além das necessidades do problema prático (ALEKSANDROV, 1988).

Com modificação e refinamento, alguns conceitos se estabilizam e a eles são diretamente atrelados alguns símbolos e signos. Dessa forma, por um lado, surge a impressão falsa de que tais símbolos possuem vida própria desvinculada da realidade objetiva e, por outro lado, o uso desses símbolos permite e possibilita que o pensamento se distancie de fatos reais e siga livre, mediante raciocínios, articulações, relações, originando novos conceitos.

Desde tempos muito remotos, são identificadas as necessidades humanas e sociais de contagem na vida cotidiana, de registros de números, de cálculo com operações, de comunicação e representação de quantidades. Essas necessidades foram sendo satisfeitas das mais variadas maneiras: por meio de técnicas corporais[32], com o uso de instrumentos como o ábaco, o aperfeiçoamento de cálculos, a evolução do registro numérico e a criação de diferentes sistemas de numeração. Ao longo do desenvolvimento histórico da humanidade, surgiram novas necessidades, técnicas foram superadas e novos conhecimentos para o controle das quantidades foram desenvolvidos.

Os conceitos aritméticos que dão conta das relações quantitativas das coleções de objetos se originam “[...] pela via da abstração, como resultado da análise e generalização de uma imensa quantidade de experiência prática” (ALEKSANDROV, 1988, p. 35, tradução

[31] Davýdov (1982) apresenta os símbolos e signos como formas de atividade humana, como meios de idealização de objetos materiais. São meios para que o pensamento teórico opere com objetos, idealizando-os e transformando-os. Os símbolos possuem a forma semelhante ao objeto que representam, já os signos não possuem essas semelhanças.

[32] Por exemplo, os papuas da Nova Guiné contavam por meio de uma ordem estabelecida das articulações e membros do corpo (IFRAH, 1994).

nossa) e se fixam na linguagem na forma de nome dos números, dos símbolos, nas operações, nos algoritmos usados.

Conforme Moisés (1999):

> Observamos que o progresso na linguagem numérica e de cada desenvolvimento da idéia numérica está associada à necessidade de contar quantidades cada vez maiores, ou menores, com velocidades cada vez maiores para a realização de cálculos cada vez mais complexos. Cada desenvolvimento da sociedade exigia que a matemática e sua linguagem também se desenvolvessem. (p. 134)

Destacamos, dessa forma, a importância fundamental do uso de símbolos numéricos no desenvolvimento da aritmética e da matemática em geral. Por muito tempo, esses foram os únicos símbolos usados. Tais símbolos permitem a objetivação do conceito de número abstrato, além de permitir que facilmente se realizem operações com eles. Os símbolos numéricos, por exemplo, concretizam o conceito abstrato de número que não tem uma imagem objetiva, mas pode ser concebido na mente. A aritmética pode ser compreendida como "[...] a ciência das relações quantitativas reais consideradas abstratamente, isto é, simplesmente como relações" (ALEKSANDROV, 1988, p. 27, tradução nossa). Entretanto, os signos numéricos engessam o movimento.

> O 'Número manual' é a compreensão de que o número só existe a partir da contagem, isto é, na forma de numeral e, portanto, visível, fixo e imutável, podendo ser 'pego com as mãos e visto com os olhos. (LIMA; MOISÉS *apud* SOUSA, 2004, p. 193)

Os conceitos geométricos também provêm das necessidades práticas. Nos primeiros problemas práticos, conceitos aritméticos e geométricos não eram diferenciados. A inter-relação da aritmética e geometria conduziu a muitos avanços na Matemática. Qualquer ato de medir articula conhecimentos aritméticos e geométricos. No desenvolvimento histórico, tal articulação está na origem dos conceitos de números racionais, irracionais e reais. Conceitos que não surgem como simples reflexo da experiência prática, mas a transcendem.

Os conceitos e conteúdos algébricos fundamentalmente tratam das operações matemáticas consideradas de forma abstrata e generalizadas. O desenvolvimento da linguagem algébrica não é algo tão natural quanto se queira supor. Ele ocorre também a partir de pressões sociais e necessidades humanas de cada época (ALEKSANDROV,1988). Considerando o uso de palavras, letras, signos e símbolos, é possível traçar um caminho da linguagem algébrica.

Tal caminho passa pelas álgebras não simbólicas (álgebra retórica, geométrica, sincopada) e chega até a simbólica. Ao revisitar esse caminho, nos parágrafos seguintes, não se pretende discriminar em importância maior ou menor qualquer uma dessas álgebras, mas somente destacar o momento de modificação, avanços e reflexo do pensamento algébrico articulado à linguagem.

Diversas civilizações, em certos momentos, sentiram necessidade de formular uma álgebra própria (hindus, chineses, egípcios, gregos, árabes, persas) para solucionar problemas do dia-a-dia. Para isso, faziam uso de equações para representar a regularidade dos seus movimentos.

A concepção do zero foi um dos passos decisivos e que permitiu aos hindus aperfeiçoarem a numeração escrita e abrir caminho para o desenvolvimento da álgebra. Até o século VI, eram usadas palavras e símbolos para o zero, como representação de algo que faltava, de ausência. Com os sábios da Índia, o signo (pequeno círculo) foi concebido como número e hoje está na base de toda álgebra e matemática (IFRAH, 1994).

Com os árabes e particularmente com Mohammed Ibn Mussa al-Khowarizmi, divulgam-se os métodos de cálculo e procedimentos algébricos dos hindus. O termo álgebra provém de uma obra de Al-Khowarizmi cujo título iniciava com o termo *aljabr* que, latinizado, tornou-se álgebra e significava a operação de passar os termos de um membro a outro para torná-los positivos em uma equação (IFRAH, 1994).

Valendo-se de linguagem comum, poemas e prosas, os representantes do que hoje se denomina álgebra retórica – por exemplo, Al-Khowarizmi – propõem problemas relacionados à vida do povo e, em seu livro, detalha percursos de solução de problemas. Sem linguagem própria, o pensamento algébrico desenvolve-se, sendo estruturado por meio da linguagem comum e atrelado ao número. O pensamento algébrico que se desenvolvia, diretamente relacionado aos problemas da vida, encontra na linguagem comum, na palavra, um meio para ser refletido. Egípcios, europeus e árabes usam as palavras para estudar o movimento (SOUSA, 2004).

> A linguagem matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos numéricos. (LIMA; MOISÉs *apud* SOUSA, 2004, p. 205)

A ambiguidade da palavra traz muitas dificuldades para a representação do movimento. Com a retórica, é difícil criar palavras que representem quantidades desconhecidas. Em outro momento do movimento lógico-histórico da álgebra, Euclides usa as figuras para estudar o movimento. Conforme Sousa (2004), “Euclides preferiu desenhar a variação e representar as operações que envolviam adição e subtração a partir de segmentos de reta. Os segmentos representavam números conhecidos e desconhecidos” (p. 208). Entretanto, a linguagem das figuras também não se mostrou prática para a representação do movimento.

Abreviando as palavras e mantendo o pensamento, pode-se considerar o momento da álgebra sincopada, tendo como representante o grego Diofanto e seu sistema de símbolos. Este usou palavras e abreviaturas para estudar o movimento e considerava que a variável estava relacionada ao número, não às suas propriedades ou à sua representação geométrica.

Também árabes e europeus usavam palavras para representar valores desconhecidos, e os egípcios usavam a palavra AHA, que significa montão. O uso de abreviaturas para as palavras denota um outro momento e nível de abstração do simbolismo algébrico. O que não se pode descartar é que o nível de abstração desse momento é dependente do anterior, mas não pode ser caracterizado conforme qualquer juízo de valor. É o momento em que “[...] se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente” (EVES, 1995, p. 206).

Nesse momento, ainda não havia o simbolismo formal, não havia um sistema de símbolos literais. Conforme Aleksandrov (1988):

> [...] o conteúdo da álgebra havia deixado para trás sua forma. Mas a forma era indispensável: a abstração dos números concretos e a formulação de regras gerais necessitavam do correspondente método de expressão; era essencial ter algum meio de denotar números arbitrários e operações com eles. O simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da álgebra. (p. 63, tradução nossa)

Há aproximadamente 400 anos, surge o simbolismo algébrico da maneira como é visto atualmente. Com sua representação na forma mais sintética, o francês Viete (1540-1603) é considerado o “Pai” da álgebra simbólica ao usar símbolos literais para quantidades desconhecidas e também para quantidades dadas. Viete usou apenas letras apara estudar o movimento. Com Descartes (1596-1650), o simbolismo algébrico “[...] criou uma espécie de ‘língua internacional’ compreendida sem equívoco pelos matemáticos do mundo inteiro”

(IFRAH, 1994, p. 338). O simbolismo permitiu que outras ciências e a própria álgebra se constituíssem de maneira mais formal. Como ressalta Sousa (2004):

> Foi o simbolismo pensado por Viete que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser, não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. (p. 112)

O contexto econômico, político, social e cultural do Renascimento traz novas necessidades. Outras ciências exerciam pressão para que a matemática fosse mais eficiente. Adotar o simbolismo matemático e suas aplicações auxiliava na estruturação do pensamento. A partir da metade do século XVII, a álgebra simbólica começa a se impor como conhecimento científico. O uso do simbolismo pretendia mais do que simplesmente sintetizar a escrita, pretendia facilitar o uso do pensamento. A algebrização pelas letras, como afirmava Leibniz (*apud* IFRAH, 1994), "[...] poupa o espírito e a imaginação, cujo uso é preciso economizar. Ele nos permite raciocinar sem muito esforço, ao colocar os caracteres no lugar das coisas para desimpedir a imaginação" (p. 338).

Existe um movimento do pensamento algébrico que, aliado à maneira como se estrutura e se reflete na linguagem, separa-o de conexões diretas com os problemas do cotidiano. No século XIX, a busca pelo rigor, as transformações internas da Matemática e a pressão de outros campos científicos levam a uma abordagem mais formalista dessa ciência. Com a matemática das grandezas variáveis, tomam forma os conceitos de *variável*, como generalização abstrata de variáveis concretas como tempo, distância, velocidade etc., e *função*, como imagem abstrata da relação de dependência entre grandezas (ALEKSANDROV, 1988).

Nesse momento, também é possível observar uma mudança de qualidade no conhecimento algébrico, em seu objeto e em seu campo de aplicação. A álgebra, que em sua forma original se ocupava das relações entre os números expressos em sua forma abstrata e nos cálculos formais realizados com grandezas concretas que eram então representadas por letras, passa também a trabalhar com grandezas de uma forma ainda mais geral e abstrata. É o que acontece, por exemplo, com as grandezas vetoriais, sobre as quais também trabalha propriedades e operações.

A álgebra abstrata ou moderna prescinde dos números, sendo que seus objetos podem ser matrizes, vetores, sobre os quais se definem operações e propriedades. Conforme Aleksandrov (1988):

> Resumindo, é possível dizer que, enquanto a matemática elementar se ocupa de grandezas constantes, o seguinte período das grandezas variáveis, a matemática moderna é a matemática de todas as possíveis relações e interdependências quantitativas (em geral variáveis) entre grandezas. (p. 89, tradução nossa)

Assim, para compreender a linguagem algébrica e também a criação e o uso do sistema simbólico algébrico e o desenvolvimento da linguagem em suas complexidades e contradições, é necessário entender seu movimento histórico e sua essência revelada pelo movimento do pensamento (lógico).

No movimento histórico de origem e transformação de conceitos matemáticos, também se deve considerar que cada novo conceito abre espaço para novo simbolismo (ALEKSANDROV, 1988). A aritmética, por exemplo, se desenvolve apoiada sobre símbolos numéricos; e a álgebra, sobre fórmulas válidas para números em geral. No movimento histórico da álgebra, é possível reconhecer os movimentos da realidade objetiva sendo expressos na Antiguidade pela álgebra retórica, por meio das palavras, quando os símbolos ainda não haviam sido criados; pela álgebra geométrica, (variável figura); pela álgebra sincopada (variável numeral) em que se usam as abreviaturas; e posteriormente pela álgebra simbólica (variável-letra) (SOUSA, 2004).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEKSANDROV, A. D. *et al*. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. 7 ed. Madrid: Alianza Universidad, 1988.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 1995.

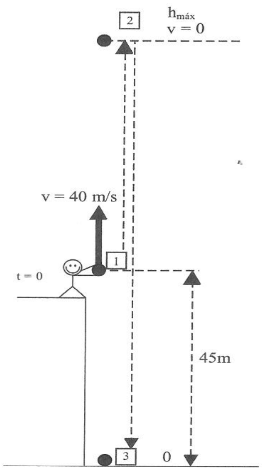
IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 7 ed. São Paulo: Globo, 1994.

MOISÉS, R. P. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica**: o problema em movimento. 1999. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação)– Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

APÊNDICE J - Análise de uma situação sobre o tópico funções na Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Leia a Atividade 3 e resolva-a. No decorrer da resolução indique possíveis dificuldades dos estudantes durante o processo.



Atividade 3

Quando uma pedra é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial 40 m/s, a partir de uma altura inicial de 45 m, ela sobe com velocidade cada vez menor, até atingir uma altura máxima em relação ao solo, quando momentaneamente pára. A partir daí, ela desce cada vez mais rapidamente até voltar ao solo. Sabemos que por causa da força da gravidade (peso), que a puxa para baixo, a velocidade da pedra diminui a uma taxa constante de 10 m/s a cada segundo, aproximadamente. Podemos descrever o movimento da pedra por meio de uma função do 1º grau, que representa sua velocidade, e de uma função do 2º grau, que representa sua altura em relação ao solo. Nesse caso, as funções que representam a velocidade e a altura são as seguintes:

$v = 40 - 10t$

(a partir do valor inicial 40 m/s, a velocidade diminui 10 m/s a cada segundo, ou seja, a taxa de variação da velocidade –10 m/s por s, que se escreve –10 m/s²)

$h = 45 + 40t - 5t^2$

(a partir do valor inicial 45 m, a altura aumenta até um valor máximo, diminuindo posteriormente até atingir o valor zero.)

Pede-se:

a) Construir o gráfico de v como função de t;

b) Construir o gráfico de h como função de t;

c) Determinar o valor máximo de h(t);

d) Determinar o valor de t quando a pedra voltar a passar pela posição inicial;

e) Determinar depois de quanto tempo a pedra atinge o solo;

f) Observando os gráficos de h(t) e v(t), assinalar V (Verdadeiro) ou F (Falso) nas frases seguintes:

1) "A velocidade decresce a taxa constante".

2) "A altura h cresce cada vez mais lentamente até atingir o valor máximo; depois, decresce cada vez mais rapidamente".

3) "A altura cresce a taxas decrescentes até o valor máximo; depois, decresce a taxas crescentes".

a, b, c , d, e

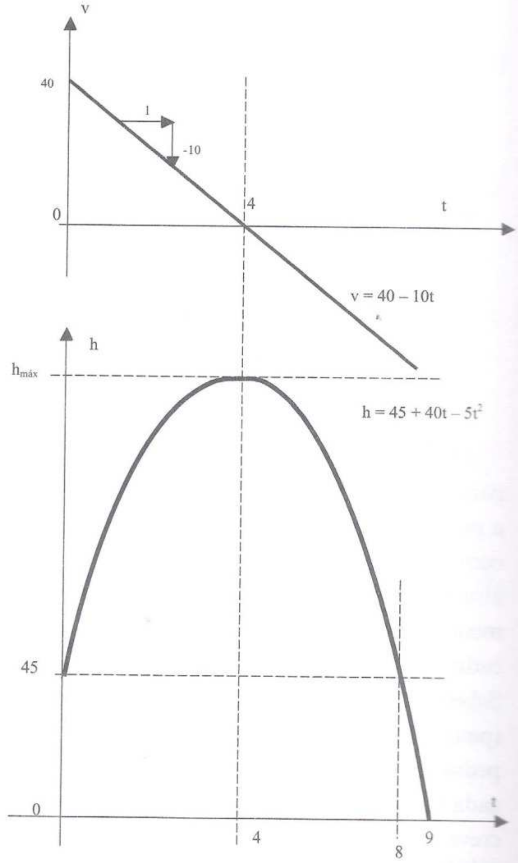
O gráfico da velocidade v como função do tempo t é uma semi-reta, com início no ponto (0;40) e com inclinação negativa e igual a –10. Como v diminui de 10 m/s a cada segundo, após 4s a velocidade será igual a zero, ou seja, a semi-reta corta o eixo x (ver figura mais à frente).

O gráfico da altura h em função do tempo t é um arco de parábola, iniciando no ponto (0;45), com a concavidade para baixo. Seu ponto de máximo coincide com o instante em que a velocidade é igual a zero, ou seja, ocorre para t = 4s. A altura máxima é o valor de h(t) para t = 4, ou seja, é h(4) = 125 m.

A pedra leva 4s subindo até a altura máxima e igual tempo descendo até a posição de partida; logo após 8s estará de volta à posição inicial.

O instante em que ela toca o solo é o valor de t para h = 0, ou seja, é a raiz da equação $0 = 45 + 40t - 5t^2$; resolvendo, encontramos t = 9s.

Todos esses resultados estão sintetizados nos seguintes gráficos:



f) Observando os gráficos e especialmente as concavidades, concluímos que as três afirmações são verdadeiras.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do professor: matemática, ensino médio – 3ª série**, 3º.bimestre. São Paulo: SEE, 2008

Esta situação está proposta para os alunos do 3º. Ano do Ensino Médio. O que é necessário conceitualmente e em relação à organização do ensino (princípios teóricos e metodológicos) para que os alunos cheguem a este estágio em condições de resolver tranquilamente tal situação.

Questões direcionadoras

1)Os alunos compreendem bem o movimento apresentado?
(como apresentar aos alunos mais situações com reconhecimento de movimento?)

2)Identificam as grandezas que variam e sua interdependência?

(como apresentar aos alunos mais situações em que se possam reconhecer a variação entre as grandezas e a interdependência entre elas? Nesta situação elas são dadas previamente.)

3) A situação possibilita diferentes registros da função através de desenho, linguagem comum, gráficos, expressão analítica etc.?

4)O valor constante da velocidade com que a bola diminui foi dado. Haveria alguma outra forma dele ser apresentado?

(por exemplo, através da figura identificando os instantes e a velocidade a cada instante para que os estudantes encontrassem o valor constante – identificando a proporcionalidade)

$T_0 = 0 V_0 = 40$

$T_1 = 1 V_1 = 30$

$$a = \frac{30 - 40}{1 - 0} = -10 \qquad V_1 - V_0 = a\,(t_1 - t_0)$$

5)Os alunos conseguiriam representar a expressão analítica se ela não fosse dada previamente?

6) Que estratégias os alunos utilizam para desenhar os gráficos solicitados nos itens a e b?

7)Os alunos compreendem quando o gráfico é crescente ou decrescente? E o que seriam os pontos de máximo e/ou mínimo?

8) Em que medida situações como essa contemplam o movimento lógico-histórico do conceito?

9)Situações como essa geram a necessidade de conhecimento no estudante? São desafiadoras?

10)Que conceitos estão subentendidos nesta situação?

11)Que outras situações ou encaminhamentos metodológicos poderiam ser promovidos no decorrer da organização do ensino de álgebra para que o estudante não tivesse dificuldade com esta situação?

APÊNDICE K - 1Situação de ensino: O campeonato de futebol.

Resolva a seguinte situação-problema proposta. Caso tenha dificuldades apoie-se nas questões auxiliares que vem em seguida:

Vamos fazer um campeonato de futebol na escola, cada time joga apenas uma vez com os demais. Nessas condições, responda:

a) Temos 5 times para jogar, quantos jogos serão realizados?

b) Se realizamos 21 jogos, quantos times participaram do campeonato?

c) E se tivéssemos n times? Qual seria o número de jogos (j) necessário.

d) Se fossem 100 times no campeonato, quantos jogos teríamos?

e) Ao todo, serão 66 jogos no campeonato, quantos times estão jogando?

QUESTÕES AUXILIARES

a)Temos 4 times para jogar, atribua um nome ou uma letra para cada time, e monte a tabela de jogos do campeonato. Lembre-se: cada time só joga uma vez com os demais.

b)Se temos 5 times para jogar, o primeiro time, joga quantas vezes? E o segundo time? E o terceiro?

c)Se temos 7 times para jogar, o primeiro time joga quantas vezes? E o segundo time?

d)Complete a tabela.

Número de times(n)	***Quantidade de jogos de cada time***	***Quantidade de jogos no campeonato***
5		
6		
7		
8		
9		
10		
N		

2) Discuta as potencialidades e limitações desta situação em relação ao ensino de algum conceito algébrico, registre:

Veja agora como a situação foi encaminhada com um grupo de estudantes e os resultados atingidos.[33]

O grupo de estudantes tenta escrever todos os jogos possíveis na situação necessitando do registro escrito e montando tabelas de jogos entre os times. Quando a professora percebe isso procura intervir, veja trechos do diálogo.

[33] Situação e dados extraído de Panossian (2008)

Pesq.: *Certo, 10 jogos. Deixa eu te perguntar uma coisa agora em relação a esta questão que vocês estavam respondendo (questão da primeira folha). O primeiro time no meio de 5 times ele joga quantas vezes?*
L: *4*
Pesq.: *e o segundo time, ele joga quantas vezes?*
B*: três*
Pesq.: *ele não jogou antes já?*
L: *então…*
Pesq.: *quantos jogos ele tem?*
C: *ele vai ter quatro eu acho também, por que ele já jogou um*
G: *então, ele já jogou com o primeiro, e o primeiro já jogou quatro*
C: *então, mas se o primeiro jogou quatro, quer dizer que o segundo time já jogou com você, então já tem uma, aí ele vai jogar com esses três, vai dar quatro também.*
Pesq.: *e o terceiro quantas vezes ele joga?*
G: *quatro*
C: *ele vai ter três jogos*
Pesq.: *ele não joga com o primeiro?*
C: *joga*
Pesq.: *então quantos jogos têm?*
G: *quatro, todos jogam 4*
Pesq.: *então cada time joga quantas vezes?*
L: *a gente está fazendo sabe como? Por rodada, não é rodada, ele vai jogar com ele.*
G: *se ele jogou com ele… (inaudível)*
Pesq.: *mas pensa aqui, são 4, cada time joga quatro vezes, só que basta fazer 5 vezes quatro, que você encontra o número de jogos? Vocês estavam fazendo isso não estavam?*
C: *sim.*
Pesq.: *quanto tinha dado quando vocês fizeram 5 vezes 4?*
C: *deu 20*
Pesq.: *mas e aí, deram 20 jogos aqui?*
L: *dez*
Pesq.: *por que deu dez, e não deu 20?* (Tentando mostrar a contradição entre a maneira que eles pensaram e o resultado atingido com a montagem de todos os jogos)
C: *boa pergunta*
Pesq.: *então pensa.*
B: *então gente, a gente repetiu cada um, 1, 2, 3, 4, 5 (mostrando os dedos das mãos)*
L: *(interrompeu o pensamento do outro estudante) vocês que inventaram de fazer vezes, eu não… se fosse assim 5 vezes 5*
C: *de qualquer jeito tem que repetir*
B: *aqui é a mesma coisa, 6 jogos cada um (ajudando o G a preencher a tabela)*
C: *e o terceiro*
G: *não tem terceiro*
(conversa misturada)
B: *quando tem 5, são 10 jogos*
G: *sabe por quê*
C: *por que vai ser a metade*

Os estudantes continuam tentando resolver as questões e preencher a tabela, em determinado momento um dos estudantes percebe uma relação entre os números de jogos conforme aumentam os times e conseguem preencher a tabela.

L: *(começa a completar a tabela, apontando o dedo entre as duas últimas colunas) 15 mais 6, 21, 21 mais 7, 28, 28 mais 8 36, 36 mais 9…45…*
C: *agora tem que fazer com n*
L: *professora?*
PESQ.: *o que aconteceu com vocês meninos?*

L: *deixa eu explicar, deu 15, depois 21, tem que fazer a tabela do 8 agora, ó, tem que conferir, por que aqui deu 21 e aí eu vi que aumentou 5, aqui aumentou 6, daí aqui aumentou 7, 8 e 9.*
Pesq.: *tudo bem, eu não vou pedir pra você fazer a tabela, por que vai dar isso mesmo, tá? Mas é o seguinte eu queria que você visse, se dá pra achar estes resultados a partir destas duas colunas.*
C: *dá, dá…*
Pesq.: *mas tentem achar como*
B: *(olhando a folha enquanto os outros conversam) eu acho que é só multiplicar aqui ó 5 vezes 4 que daria 20 que dividido por 2 dá dez, 6 vezes 5 que dá 30, dividido por 2 é 15,…*
L: *ah moleque, fui eu que ensinei*
B: *você que ensinou nada*
Pesq.: *tá, então vai conferindo*
C: *7 vezes 6, 42 dividido por 2 dá 21.*
B: *acertei…*
L: *é tá certo, 10 vezes 9 dividido por 2…45*
G: *por que divide por 2?*
C: *por que tem duas colunas*
L: *(rindo)*
L:*Professora*
L: *não toca aí, foi inteligente mas…*

O estudante B identifica um procedimento aritmético para encontrar os números da tabela, mas não consegue justificá-lo, o que inclusive os demais estudantes percebem.

d) Complete a tabela

Número de times(n)	Quantidade de jogos de cada time	Quantidade de jogos no campeonato
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45
n	N-1	NX(N-1):2

Imagina-se que tendo preenchido a tabela das questões auxiliares os estudantes não terão mais dificuldades para responder as questões anteriormente propostas. Entretanto outro ponto de destaque no diálogo dos estudantes mostra que a dificuldade persiste. Veja o que acontece depois que os estudantes preenchem a tabela e voltam para resolver o item c) E se tivéssemos n times, qual seria o número (j) de jogos necessários?

<u>O campeonato de futebol – Grupo 1</u>
L: *então ó se tivéssemos n times, qual seria o número de jogos? esse aqui tá relacionado a esse não é?*
Pesq.: *a esse, a esse, a esse, a esse,… o que significa o n times?*
B: *o número de times*
Pesq.: *número de times, você conhece este número de times?*
B: *não*

***Pesq.:** tá, aqui vocês conheciam não é? Tá, até onde vocês conheciam? Tem uma parte lá que vocês não conheciam. Vocês não escreveram a quantidade de jogos necessários? Era diferente?*
***G:** o número de jogos Necessários (reforçando a palavra)*
***Pesq.:** no campeonato né? São os jogos do campeonato.*
(meninos pensando)
***Pesq.:** não foi você que falou aqui, o que você tinha feito depois para descobrir esse*
***B:** é eu só multipliquei e dividi por 2*
***Pesq.:** sim, você só multiplicou e dividiu por 2 e depois como vocês fizeram para achar isso?*
***L:** vai lá Gabriel*
***Pesq.:** foi você que escreveu isso? então fala*
***G:** ah, eu peguei aqui que o n representa esta coluna e peguei o n-1 que representa esta coluna, como ele multiplicava esse por esse, eu multipliquei esse por esse e dividi por 2*
***Pesq.:** certo e o que simboliza esse vezes esse dividido por 2?*
***G:** o n vezes n-1 dividido por 2*
***Pesq.:** quando você faz esta conta o que você alcança*
***L:** o resultado*
***Pesq.:** resultado de quê?*
(juntos) dos jogos
***Pesq.:** da onde*
(juntos) do campeonato
***Pesq.:** então neste caso aqui, qual o número de jogos que eu tô chamando de j, necessário no campeonato se a gente tem n times?*
***G:** depende*
***Pesq.:** depende do que*
***L:** do número de times*
***Pesq.:** e se o número de times é n?*
***L:** aqui ó n, aí qual seria o número de jogos necessários*
***Pesq.:** gente, vamos lá…*
***L:** n times… qual seria o número de jogos necessário…a gente tem que fazer tipo assim…(mostrando a fórmula da outra folha)*
***Pesq.:** isso é o que, uma representação, não é? Do número de jogos? Então por que vocês não representam aqui?*
***L (escrevendo):** n vezes…*
***B:** Poe uma bolinha que fica melhor*
***L:** n vezes n-1*
***B:** aí abre parênteses*
***G:** dividido por 2 que é igual a j*
***PESQ.:** é isso?*
***B:** eu acho que é?*

c) E se tivéssemos n times? Qual seria o número de jogos (j) necessário.

$N \cdot (N-1) : 2 = J$

***PESQ.:** é, por que vocês acham que é isso?*
***C:** por que é o mesmo que esse… que vai chegar ao número de jogos do campeonato*
***PESQ.:** então estão convencidos de que é?*
***C:** eu tenho vamos dizer 10% de certeza que é.*

Discuta em seu grupo possíveis razões para que o grupo de alunos que após ter efetuado o registro simbólico de uma relação entre o número de jogos e o número de times ainda tenha dificuldades para resolver os demais itens da situação.

APÊNDICE L - Comentários a respeito dos processos de análise e síntese.

PARA DAVYDOV[34]

Existem duas etapas sucessivas do caminho geral do conhecimento: analítica e sintética. Este autor entende que o 'concreto' aparece duas vezes. Primeiro como contraponto inicial da contemplação e representação que se elabora o conceitos (concreto a partir da experiência sensível) e depois surge como resultado mental da associação de abstrações.

> Se o homem examina o fenômeno ou o objeto sem relacioná-lo com um certo todo, como extrinsecamente separado e independente, este será pois conhecimento abstrato, por mais detalhado e graficamente colorido que seja, por mais 'concretos' que sejam os exemplos com que se ilustre. E vice-versa, quando o fenômeno ou o objeto se tomam formando unidade com o todo, se estudam em conexão com outras de suas manifestações, em relação com sua essencia, com a fonte (lei) geral, se trata de conhecimento concretos, ainda que se expresse com ajuda de símbolos e signos mas 'abstraídos' e 'convencionais' (DAVYDOV,1982, p.352)

Para Davydov, a ANÁLISE é o procedimento para destacar a abstração inicial, decompor o que a um mesmo tempo tem caráter de generalidade e apareça como base geral do todo a estudar. Tarefa fundamental da análise – reduzir as diferenças existentes à essência das mesmas. "A redução dos fenômenos particulares a base do processo formativo, à essência dos mesmos, não pode efetuar-se mediante a comparação simples e a indução, que somente destacam a similitude externa e a generalidade formal. Para isso é necessário uma análise especial que permite destacar e analisar a essência de qualquer objeto ao estudá-lo, bem seja a ele mesmo ou a sua imagem ideal" (p.348)
NO processo de SÍNTESE, é a etapa em que com base nos atributos essenciais dos objetos e fenômenos consolidam-se os conceitos, sendo possível então esclarecer como eles aparecem no mundo sensorial-observável. A síntese aparece, pois no trânsito da abstração ao mental concreto.

PARA KOPNIN[35]

> "Efetivamente, o juízo e a dedução desempenham imenso papel na formação dos conceitos. Para encontrar nos fenômenos o universal que é refletido no conceito, é necessário abranger o objeto de todos os lados, emitir toda uma série de juízos sobre aspectos isolados do mesmo. O essencial no fenômeno não pode ser definido sem um sistema integral de deduções. Na formação dos conceitos cabe enorme papel à análise enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também á síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas. O processo analítico é inconcebível sem indução e dedução. Constituído, o conceito leva implícitos em forma original, todos os juízos e deduções que se verificaram no processo de sua formação. O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas idéias, o resultado de um longo processo de conhecimento" (KOPNIN, 1978 p.191)

"… o pensamento consiste tanto da decomposição dos objetos da consciência nos elementos destes quanto na unificação, em certa unidade, dos elementos inter-relacionados. Sem análise não há sintese" (Engels) – (p.235).A relação análise e síntese é orgânica, interior.

---

[34]DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalizacion en la ensenanza**. Havana: Pueblo y Educacion, 1982.
[35]KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

APÊNDICE M - Primeiro registro escrito do planejamento de ações de ensino.

Pensando na aula.

1ª Aula: Dizer a idéia do condomínio mostrar o pedaço de terra, eles irão formar famílias de 4 pessoas, é importante destacar que este grupo precisa ser bem escolhido porque trabalharam juntos todo o semestre.

1. Juntar-se em grupo e escolher o nome da família.
2. Sugerir nomes para o condomínio.
3. Escolha do nome por votação (TABELA, GRÁFICO E PORCENTAGEM)

obs: Fazer o seguinte combinado, quando for a minha aula eles já devem se organizar em grupo no seguinte formato U para que possamos colocar o terreno no centro da sala e deverão anotar no caderno como um diário. Usaremos Réguas.

2ª Aula: Demarcando o terreno.

- O presidente do condomínio disponibilizou a mesma quantidade de cerca para cada família, pediu que fizessem uma planta de como querem o terreno com as medidas exatas e depois cercassem o terreno.

A professora distribui barbantes do mesmo comprimento para cada aluno e pede para que no caderno desenhe seu terreno obedecendo as medidas do barbante e depois cole o barbante no E.V.A da maneira que desenharam. Perguntas.

Os terrenos têm formas de quais figuras geométricas?

Todos receberam barbantes de mesmo comprimen

to, porém as figuras saíram iguais?
Por que?
Qual foi a orientação dada?
O que as figuras tem em comum?
Qual o nome damos a este conceito?
O que significa calcular o perímetro?

Para calcular o perímetro de um terreno quadrado que mede 6,5 m de lado?

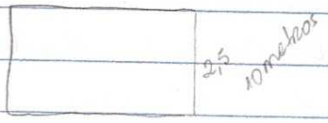
Para calcular o perímetro de um terreno retangular que mede 15,8m de largura por 6,3m de comprimento?

*

Para registrar no caderno
Qual o raciocínio rápido que usamos para calcular o perímetro de um quadrado qualquer?

Qual o raciocínio rápido que usamos para calcular o perímetro de um retângulo qualquer?

* Outra questão: Sabemos que a planta abaixo está em escala



0,5cm = 2m.

3ª Aula Comparando os terrenos

O presidente olhou as demarcações de terra surgiu uma dúvida "Todos os terrenos tem o mesmo perímetro, mas todas as famílias ficaram com o mesmo espaço de terra?"

Ouvir as conclusões dos grupos.

Intervir para que as conclusões sejam baseadas em fatos, podendo chegar a uma unidade padrão para calcular os espaços dos terrenos, se isso acontecer, iniciar o conto de como se definiu o metro.

Quando começamos a comparar este espaço estamos nos apropriando de um conceito matemático, alguém sabe o nome correto? AREA

Para calcular a área de um terreno quadrado de lado 10m?

Para calcular a área de um terreno retangular de lado 19 m e 5m?

Para registrar

Qual o raciocinio que usamos para calcular a área de um quadrado qualquer?

Qual o raciocinio usado para calcular a área de um retângulo qualquer?

4ª Aula Redimensionando os terrenos

O presidente do condomínio percebeu que é melhor que todas as famílias tinham o mesmo espaço, por isso pede para removerem cercas e redimensionarem o terreno de forma que todos tinham a mesma área.

obs: Possivelmente surgirá a dúvida, mas qual área? A que vocês acharem melhor desde que não ultrapasse as limitações do terreno.

ANEXOS

ANEXO A - Carta Caitité.

Iuaip, 11 de março de 2011.

Caros colegas,

Como vocês sabem, estou em Iuaip, país maravilhoso, para conhecer os avanços dos seus acadêmicos em matemática. Já participei do primeiro seminário. O nosso tema foi a descoberta de um sistema de numeração de uma comunidade chamada de Caitité. Os renomados professores Ovatsug e Oigres apresentaram as suas descobertas iniciais baseadas em escritas que parecem representar os bens de um rico senhor daquela comunidade. Os professores disseram que foi possível perceber que as quantidades de um a doze podem ser representadas da seguinte forma: <, +, N, <I, <<, <+, <N, +I, +<, ++, +N, NI. Descobriram também que povo caitité, embora não muito desenvolvido matematicamente, já tinha um símbolo para o zero: I

Os professores mostraram uma inscrição que apresentava a figura de um jegue seguida dos símbolos +N<. Supomos que quem fez esta inscrição estava querendo comunicar o valor do jegue.

No próximo seminário pretendemos descobrir a lógica do sistema de numeração dos caitités. Acreditamos que isso poderá trazer grande contribuição para entender a cultura desse povo. Estou enviando-lhes este resumo do que já presenciei porque sei o quanto vocês ficarão desafiados para encontrar uma solução geral para o problema que estamos investigando.

Peço-lhes que procurem descobrir qual o sistema de numeração dos Caitités, pois isso daria grande prestígio para a nossa academia. Se vocês conseguirem descobrir, escrevam, com os nossos numerais, quanto custa o jegue e escrevam também quanto seria 23 e 203 em escrita caitité. Se possível nos elucidem sobre o modo como fizeram para descobrir isso. Vocês podem mandar a resposta por *e-mail.*

Saudações universitárias,

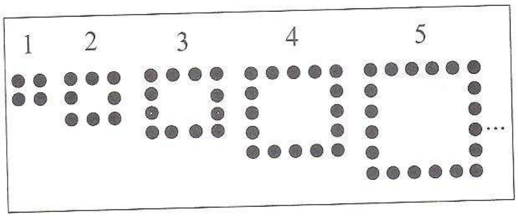
Manoel Oriosvaldo de Moura (Ori)

ANEXO B - Situação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008).

1º. MOMENTO
Resolva a seguinte situação, explorando seus modos de resolução. Registre e comente.
A seguir também registre como ela poderia ser encaminhada com os estudantes, pensando em como eles resolveriam esta situação.

Atividade 1

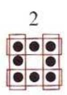
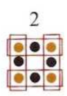
Cada figura da sequência de bolinhas a seguir está indicada por um número. Qual seria a fórmula para determinar o número de bolinhas de uma figura genérica **n** dessa sequência?



[36]

2º. MOMENTO
Na proposta encontramos alguns encaminhamentos para resolução e trabalho com esta situação,veja:

Solução 1

	$4(n+1)$	*São contadas 4 filas com uma bolinha a mais que o número da figura.*
	-4	*Contudo, as bolinhas do canto são contadas duas vezes, portanto, devemos subtrair 4 do total.*
$4(n+1)-4$		*Expressão final.*

[36] Atividade extraída do Caderno do Professor, 2009, 7ª série, Volume 2, página 13.

Solução 2

3 	$4(n-1)$	*São contados 4 grupos com uma bolinha a menos que o número da figura.*
3 	$+4$	*Sobram 4 bolinhas no canto, portanto, devemos acrescentar 4 ao total.*
$4(n-1)+4$		*Expressão final.*

Solução 3

4 	$4n$	*São contados 4 grupos com o número de bolinhas igual ao número da figura.*
$4n$		*Expressão final.*

Solução 4

5 	$(n+1)^2$	*Completa-se a figura fechando um quadrado com a quantidade de linhas e colunas iguais ao número da figura acrescido de 1. A quantidade de bolinhas nesse quadrado será, portanto, igual ao quadrado do número da figura acrescido de uma unidade.*
5 	$(n-1)^2$	*Devemos, contudo, subtrair do total de bolinhas as acrescentadas anteriormente. Estas formam um segundo quadrado que tem a quantidade de linhas e colunas iguais ao número da figura, menos 1. Portanto, a quantidade de bolinhas no quadrado menor é igual ao quadrado do número da figura diminuído uma unidade.*
$(n+1)^2-(n-1)^2$		*Expressão final.*

14

A partir destas indicações o que você acrescentaria ao registro anterior?

PARA O ENCAMINHAMENTO DAS DISCUSSÕES

Algumas questões que podem ser feitas em relação à situação proposta:

1) Que aprendizagem a situação promove?
2) Que conceitos algébricos estão envolvidos?
3) O que representa a letra n para os estudantes?
4) Que forma de pensamento está contemplada?
5) Contempla o movimento histórico da álgebra?
6) Qual é o papel da linguagem algébrica nesta situação, como ela pode se manifestar e ser desenvolvida?
7) Como modificar e aperfeiçoar esta situação para que ela possa ser usada em sua aula?

Algumas considerações da pesquisadora sobre a situação proposta:

Da natureza da situação proposta: (o que desencadeia a aprendizagem?)
Parte-se do princípio de que nenhuma situação é em si boa ou ruim, ou pode ser qualificada segundo critérios subjetivos. Toda situação proposta ao aluno só pode ser qualificada quando em relação aos objetivos da aprendizagem, aos modos de organização do ensino; às adequações em relação aos sujeitos que ensinam e aprendem etc. Assim, uma determinada situação pode ser adequada para, por exemplo, aplicar conceitos, mas ser completamente inadequada para forma-los
É importante que a situação proposta se constitua realmente como um ‘ problema’ para o estudante e neste sentido desencadeie a aprendizagem, quando a situação é facilmente resolvida pelo estudante ele dificilmente se motivará a procurar novos modos de resolução, além do que muitas situações podem ser resolvidas com estratégias aritméticas que o estudante já possui e que, portanto, não geram a necessidade do conhecimento algébrico.
Assim, por exemplo, um aluno nesta situação poderia construir a seguinte tabela:

1	2	3	4		N
4	8	12	16		4n

Para este aluno a situação já está resolvida, e assim nenhuma das soluções propostas no caderno do professor e mais complexas são necessárias. Este aluno não encontrará nesta situação motivo para discuti-las.

Do movimento histórico (como historicamente a humanidade chegou a este conhecimento?)
Considerando que é preciso gerar no aluno a necessidade do conhecimento algébrico através da situação proposta, uma possibilidade é tentar compreender como esta necessidade foi gerada na humanidade. Assim no caso desta situação que apresenta uma sequencia em forma de figuras, mas que pode ser também reescrita com símbolos numéricos, uma possibilidade seria retomar historicamente a necessidade humana de generalizar sequencias, a constituição, por exemplo, das progressões aritméticas e geométricas.

Dos conceitos envolvidos
A situação permite o trabalho com a identificação de padrões e regularidades; sequencias numérica. Com orientações do professor o estudante pode trabalhar com tabelas e ser induzido a generalizar na forma de uma expressão algébrica. A presença da letra n pode permitir ao professor discutir seu papel enquanto variável, mas conforme o seu encaminhamento é possível que o estudante tome a variável como ‘ qualquer número’, e não como símbolo da relação entre dois conjuntos. A discussão da variável como incógnita, número geral, ou relação funcional também pode aparecer e deve levar em conta o movimento que nem sempre é regular e padronizado, o campo de variação; a relação entre grandezas etc.
Quando uma variável é previamente indicada no simbolismo formal, encontram-se maiores dificuldades do aluno compreender seu conceito. É possível que o conceito já esteja formado e então, a situação servirá como aplicação do conceito e o estudante não terá dificuldades em resolvê-las. Mas podem ser acrescentadas outras questões para que se verifique realmente a apropriação do conceito, por exemplo: quantas bolinhas conterá o quadrado que ocupa a posição 100; ou ainda a situação inversa um quadrado possui 340 bolinhas que posição ele ocupa? Quantas bolinhas estão em cada lado? Um aluno que ainda não conseguiu realmente generalizar a situação terá dificuldades para responder à estas questões

Das formas de pensamento
Vamos considerar para esta discussão duas formas de pensamento: o pensamento empírico e teórico

De forma bastante sintética podemos dizer que o pensamento empírico produz generalizações empíricas, a partir de resultados particulares e com base nos aspectos externos dos objetos ou fenômenos que estão sendo estudados. Já o pensamento teórico produz as generalizações teóricas, que buscam a essência do conhecimento, e reconhecem o conceito dentro de um sistema de conceitos. Entende-se aqui que uma das finalidades da escola deveria ser a formação do pensamento teórico dos estudantes.
O pensamento algébrico permite o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. A generalização algébrica quando realizada por meio de casos particulares e aritméticos, não se consolida, é ainda uma generalização empírica (Exemplo: do campeonato de futebol). Com isso não se quer dizer que o conhecimento aritmético é apenas fruto do pensamento empírico, por surgir a partir de situações cotidianas e práticas da vida do homem, pode-se ter a impressão errada de que seus conceitos (por exemplo: o conceito de número) advém da experiência visível do homem, quando na verdade, este também é um conceito que deve ser ensinado na escola a partir de orientações e generalizações de um pensamento teórico.

Da linguagem
A linguagem simbólica, formal que atualmente usamos e da qual os alunos devem se apropriar, passou por um longo processo histórico até se concretizar como tal. É importante que os alunos percebam essa alteração da linguagem, modificações estas que eles podem vivenciar se encontrarem situações problemas propostas adequadas. Apresentar ao aluno o simbolismo da álgebra diretamente pode causar estranhamento e a identificação do símbolo destituído de significado. Assim, importante seria promover situações em que o estudante reconhecesse a variação e pudesse expressá-la inicialmente com uma linguagem retórica, depois sincopada, e finalmente chegando à simbólica.
No caso específico da situação proposta, a letra n estava indicada, mas é preciso verificar se os alunos compreendem a que ela se refere.

ANEXO C - A situação-problema da altura da pirâmide[37]

Estamos há quatro mil anos. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras.

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

"Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos no depósito 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma, não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. No entanto, eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito, que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço?"

Como escrever isso com a linguagem matemática?

[37]Problema extraído de: SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

ANEXO D2 - Verdim e seus amigos.

Era uma vez Verdim, um ser encantado que vivia em uma floresta de outro mundo. Verdim tinha muitos amigos e juntos brincavam todos os dias na clareira dessa floresta. Quase todos viviam próximos à casa de Verdim, menos três deles: Gigante chamado Tililim e outros dois anões, o Edim e o Enim.

Certo dia Verdim convidou a todos para brincarem em sua casa. Como o Tililim, Edim e Enim moravam muito longe, Verdim explicou como chegar até sua casa.

Saindo da clareira, do lado que o sol se põe deveriam dar cinqüenta passos para frente, depois trinta passos à direta e mais quarenta passos até a grande árvore, e então deveriam continuar em frente e sua casa estaria a apenas dez passos dali.

Com a explicação de Verdim, anotaram tudo que deveriam fazer para não se esquecer de nada.

No dia seguinte, seguiram na direção correta. Mas, apesar disso, não conseguiram chegar a casa de Verdim.

O que pode ter acontecido? Por que eles não conseguiram chegar?

Como podemos ajudar Verdim a saber o que aconteceu para buscar outro modo de explicar como chegar até sua casa?