ANA RUTH STAREPRAVO

**A multiplicação na Escola Fundamental I:
análise de uma proposta de ensino**

Tese apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Educação

Área de concentração: Ensino de Ciências e
Matemática

Orientador: Prof. Dr. Lino de Macedo

São Paulo

2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

- 375.3
S795m Starepravo, Ana Ruth
 A multiplicação na escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino / orientação Lino de Macedo. São Paulo: s.n., 2010.
 262 p.; figs. ; quadros ; apêndices
- Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.
1. Ensino 2. Aprendizagem 3. Construtivismo (Educação)
 4. Multiplicação 5. Matemática (Estudo e ensino) I. Macedo, Lino de, orient.
-

FOLHA DE APROVAÇÃO

Ana Ruth Starepravo

A Multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino

Tese apresentada à Faculdade de Educação
da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Doutor em Educação

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

*Dedico este trabalho à
todos os professores que acreditam
que é possível fazer diferente e
e que fazem diferença
na vida de seus alunos*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho expressa muito sobre mim, sobre a pessoa que me tornei a partir do encontro com outras pessoas ao longo da minha vida: pessoas que conheci somente por meio dos livros, pessoas que fizeram parte da minha história, pessoas que iluminam o meu presente. A todas elas o meu **sincero agradecimento**.

Para algumas dessas pessoas meu agradecimento é nominal uma vez que estiveram mais presentes em minha vida nesse momento:

Ao Prof. Dr. Lino de Macedo pelo primoroso trabalho de orientação. Por ter me acolhido tão generosamente e me concedido a honra dessa convivência. Por ter compartilhado não apenas seus conhecimentos, mas oferecido a sua sabedoria. Por se fazer presente em cada uma das páginas desse trabalho. Você será sempre uma referência em minha vida.

Ao Prof. Dr. Nilson José Machado por tudo que aprendi em suas aulas e pelas inestimáveis contribuições generosamente oferecidas por ocasião do Exame de Qualificação. Minha admiração e respeito pelo seu trabalho se fazem notar na influência que exerceu nessa tese.

À Prof^a. Dr^a. Neuza Bertoni Pinto pelo olhar cuidadoso dirigido ao meu trabalho, pela criteriosa avaliação realizada no Exame de Qualificação e pelas valiosas contribuições oferecidas. Elas foram de fundamental importância para a conclusão dessa tese.

Aos queridos colegas: Carolina, Heloisa, Paula, Ana Luiza, Alexandre, Eduardo e Francine, pela parceria neste grupo de pesquisa, pela convivência que tanto aprendizado me proporcionou. Agradeço especialmente pelas leituras cuidadosas, pelo olhar crítico e pelos apontamentos e sugestões que tanto enriqueceram este trabalho.

À professora que tão generosamente ofereceu a sua turma para a realização dessa pesquisa; aos seus alunos, por tudo que me ensinaram; à escola que não apenas abriu suas portas, mas também ofereceu as melhores condições para a realização desse estudo.

À Universidade Positivo, especialmente à professora Rossana Ghilardi Cardoso, por permitir que as alunas do curso de Pedagogia realizassem o estágio obrigatório como auxiliares dessa pesquisa.

Às estagiárias Giovana e Manoella por me acompanharem com tanta dedicação durante a fase de coleta de dados. Sem a ajuda de vocês certamente não seria possível apresentar, com tantos detalhes, os episódios da sala de aula que em muito enriqueceram esse estudo.

À estagiária Juliane pela sua colaboração nas transcrições das aulas.

Ao meu marido Marcos pelo seu apoio incondicional. Por compreender minhas ausências e ser tão presente. Por ser companheiro de todas as horas, por me ouvir e por estar sempre pronto a ajudar. Por tornar o meu trabalho muito mais fácil e a minha vida muito mais bonita.

Aos meus pais Brasília e Emília pelo exemplo de vida. Por me ensinarem a apreciar aquilo que realmente tem valor na vida.

À minha querida sogra Maria Alice pela revisão no texto e pelo apoio durante essa fase da minha vida. À você e ao meu sogro Eliton Borges agradeço principalmente por terem me presenteado com uma linda segunda família.

Aos meus queridos cunhados Michelle e Thiago Borges pelo apoio, pelo incentivo, pela revisão cuidadosa desse trabalho (Michelle) e pela colaboração na tradução do resumo (Thiago).

À minha querida sobrinha Lídia por participar mais uma vez da minha vida acadêmica, dedicando-me seu tempo e sua companhia.

Ao meu irmão José Emílio e à minha cunhada Ana Lúcia pelo incentivo, por me desafiarem a ir sempre além e por estarem sempre por perto nos momentos difíceis.

À minha querida irmã Maria Brasília pelo presente tão especial que me ofereceu. Por meio dele pude olhar minha própria história com outros olhos e valorizar muito mais tudo que já construí. Isso me deu muita força para concluir essa tese.

Às queridas amigas Andréa Santana e Ana Júlia por me incentivarem (quase me empurrarem) a estudar fora de Curitiba. Por acreditarem tanto no meu trabalho e me apoiarem incondicionalmente. Por me oferecerem uma amizade que o tempo não consegue envelhecer.

Às professoras Sandra Bozza e Isabel Parolin, amigas, sócias, companheiras de idéias e de ideais. Por me apoiarem, por me ouvirem, por fazerem parte da minha vida.

Às queridas amigas de São Paulo, Camilla Ritzmann e Marília Fanucchi, por terem me recebido tão calorosamente em suas casas, pelas incontáveis caronas, por compartilharem das angústias e das alegrias da vida acadêmica e por terem feito com que minhas idas à São Paulo não fossem apenas viagens de estudo, mas também de lazer.

Aos amigos Marcos e Luciana Melo pelo apoio nessa e em tantas outras empreitadas. Por acreditarem no meu trabalho e me ajudarem a crescer profissionalmente.

À professora Dr^a Evelise Maria L. Portilho pelas preciosas contribuições na elaboração do texto para o Exame de Qualificação.

Aos amigos Luca Rischbieter e Regina Shudo pelos livros emprestados, pelas consultas telefônicas, por se mostrarem sempre prontos a ajudar.

Às professoras Dr^a Maria Lucia Faria Moro e Dr^a Maria Tereza Carneiro Soares por terem me ensinado os primeiros passos da pesquisa acadêmica. O que aprendi com vocês durante o mestrado foi de grande valia também para a realização dessa pesquisa.

Aos funcionários da Pós-graduação e da Biblioteca da FEUSP, por estarem sempre prontos a ajudar, tornando nossa vida acadêmica muito mais fácil.

À Universidade de São Paulo, pela oportunidade que me concedeu de realizar o doutorado numa das instituições de maior prestígio do país.

Possuir todo um mundo de conhecimento e perder-se a si mesmo é uma terrível fatalidade na educação, assim como na religião.

John Dewey

RESUMO

STAREPRAVO, Ana Ruth. **A multiplicação na escola Fundamental I**: análise de uma proposta de ensino. 2010. 262p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

O presente trabalho consiste numa pesquisa qualitativa sobre o ensino e a aprendizagem de matemática, cujo objetivo foi o de propor uma metodologia, fundamentada no construtivismo piagetiano, para ensinar multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A observação de que o ensino desse conteúdo, em muitas escolas, privilegia a memorização da tabuada e a aplicação de algoritmos, em detrimento da compreensão, mobilizou uma investigação sobre como organizar o ensino dessa noção privilegiando o desenvolvimento da racionalidade e a aquisição de competências que transcendem o âmbito da matemática. Para isso foi realizada uma intervenção de ensino, planejada e desenvolvida pela própria pesquisadora, ao longo de um semestre (21 aulas) em uma turma de terceira série de uma escola da rede municipal de Curitiba. A multiplicação foi explorada em problemas de proporcionalidade simples (situações de correspondência um-para-muitos e de arranjo retangular). A divisão, por ser sua operação inversa, foi explorada em algumas atividades e dados relativos a essa operação foram incorporados ao estudo. As aulas foram gravadas em vídeo e transcritas em diários enriquecidos com observações e comentários da pesquisadora os quais, junto com as produções dos alunos e relatórios feitos pela professora da turma, compuseram nossa base de dados. Na análise buscamos indicativos da ocorrência de uma *interação construtiva*, caracterizada por progressos nos seguintes âmbitos: *relações intelectuais* (compreensão das operações aritméticas em questão pelas crianças); *relações sociais/morais* (conquistas que transcendem o conteúdo matemático); *relações didáticas* (efeitos sobre o próprio processo interventivo). Os resultados apontam para uma interação de qualidade construtiva uma vez que a intervenção teve efeito de aperfeiçoamento sobre os sujeitos envolvidos. Verificamos a substituição progressiva de estratégias de contagem por estratégias de cálculo, aquisição de competências aritméticas e interações entre as crianças (indícios de uma relação de cooperação). Apontamos ainda para mudanças de atitudes dos alunos no que se refere às seguintes questões: envolvimento nas atividades propostas, relação com a matemática, forma de tratar os problemas apresentados, comunicação e expressão em sala de aula. No âmbito didático destacamos o tratamento dispensado ao erro, usado como estratégia didática, o papel interventivo que a avaliação exerceu no processo de ensino e a importância da escrita para a reflexão do professor sobre a sua própria prática.

Palavras chave: Ensino - aprendizagem - construtivismo - multiplicação - tabuada - competência.

ABSTRACT

The present work consists of a qualitative research in education and the mathematics learning that objective was to propose a methodology based on Piaget's constructivism, to teach multiplication in the early years of Elementary School. The observation that shows how this content has been treated, in many schools, as a memorization and application matter, rather than a comprehension issue, directed to an investigation how about organize the teaching of this matter prioritizing the development of rationality and the acquisition of competences that go beyond mathematics. For that, a planned learning intervention was developed and made by the researcher herself over a period of one semester (21 classes) in a third grade public school from Curitiba. The multiplication was explored in simple proportionality problems (in one-to-many correspondence and rectangular array problems). The division, as it's the inverse, was also explored in some activities and the data collected was also included in this study. The classes were recorded in video and a transcript enriched by observations and comments from the researcher was produced. The transcript, the student's works and daily reports done by the teacher form our database. In the analysis, we look for indications of a constructive interaction, characterized by progresses in the following areas: intellectual relationships (comprehension of the arithmetical operations used); social/moral relationships (acquisition of non mathematical aptitudes); didactic relationships (effects on the intervention process itself). The results show a constructive quality interaction as the intervention had a development effect on the subjects involved. We verified the progressive substitution of the counting strategies for calculation strategies, the acquisition of arithmetical aptitudes and interaction between the students (signs of a cooperative relationship). Also some attitudes changes were observed in the students regarding the following matters: the engagement in the activities, the relationship with mathematics, the approach on the problems, communication and expression at the classroom. In the didactic field, we highlight the treatment regarding the errors, used as a didactic strategy, the interfered paper the evaluation exercised to the teaching process and the importance of writing for the teacher's reflection about its practice.

Key words: Learning - education - constructivism - multiplication - arithmetic table - competence.

Lista de Figuras

Figura 1 - Modelo usado tradicionalmente para representar uma situação de ensino	56
Figura 2 - Modelo proposto por Brousseau para representar uma situação de ensino	56
Figura 3 - Sistema de contagem usado pelos sumérios	64
Figura 4 - Símbolos usados no sistema de numeração egípcio	64
Figura 5 - Símbolos usados no sistema de numeração chinês	64
Figura 6 - Número 3 845 no sistema de numeração chinês	65
Figura 7 - Número 3 845 no sistema de numeração egípcio.....	65
Figura 8 - A diferença entre $4 + 4 + 4$ e 3×4	70
Figura 9 - Folha fotocopiada apresentada aos alunos (aula 1)	108
Figura 10 - Retângulos e a respectiva representação por meio de notações aditivas (aula 2)	108
Figura 11 - Quadrinhos de EVA usados para compor retângulos	108
Figura 12 - Folha fotocopiada 1 - problemas apresentados aos alunos (aula 2)	109
Figura 13 - Folha fotocopiada 2 - problemas apresentados aos alunos (aula 3)	110
Figura 14 - Retângulo em cartolina e tiras com as representações correspondentes	110
Figura 15 - Uma distribuição possível no Jogo dos Restos	112
Figura 16 - Tabela de pontuação - Jogo dos Restos	112
Figura 17 - Problemas sobre o Jogo dos Restos - folha 1(aula 6)	113
Figura 18 - Problemas sobre o Jogo dos Restos - folha 2 (aula 6)	114
Figura 19 - Problemas apresentados aos alunos (aula 7)	115
Figura 20 - Problemas apresentados aos alunos (aula 9)	116
Figura 21 - Problemas apresentados aos alunos (aula 10)	117
Figura 22 - Cartela do Jogo Batalha dos Números	118
Figura 23 - Tabela para conferir a pontuação total obtida no Jogo Batalha dos Números	119
Figura 24 - Tabela - registro coordenadas pedidas e pontos obtidos - Batalha dos Números	120
Figura 25 - Problemas sobre o Jogo Batalha dos Números	121
Figura 26 - Quadro da tabuada (1)	122
Figura 27 - Quadro da Tabuada (2)	123
Figura 28 - Jogo Mini-Yam	125
Figura 29 - Tabela para o registro da pontuação – Jogo Mini-Yam	125
Figura 30 - Tabela para registro da pontuação obtida por equipes no jogo Mini-Yam	126
Figura 31 - Problema sobre o Jogo Mini-Yam (aula 17)	127
Figura 32 - Problema sobre o Jogo Mini-Yam (aula 18)	128
Figura 33 - Problema 1 (aula 19)	129
Figura 34 - Problemas 2 a 4 (aula 19)	129
Figura 35 - Registro feito por ANC (aula 1)	139
Figura 36 - Registro feito por GAE (aula 1)	139
Figura 37 - Registro feito por HEI para quantificar retângulo desenhado por colega (aula 1).....	140
Figura 38 - Solução apresentada por FLE (aula 9)	142
Figura 39 - Solução apresentada por MEB ao mesmo problema	142
Figura 40 - Solução apresentada por GAE ao mesmo problema	142
Figura 41 - Tabela cálculo pontuação - Batalha dos Números, preenchida por SAB (aula 12).....	143
Figura 42 - Tábua da multiplicação, conforme registros feitos por MAS.....	144
Figura 43 - Tabela cálculo pontuação obtida por uma equipe no jogo Mini-Yam (aula 16).....	145
Figura 44 - Tabela Jogo dos Restos preenchidas por JUB - frente e verso (aula 8)	150
Figura 45 - Tabela Jogo dos Restos preenchidas por LEA - frente e verso (aula 8)	152
Figura 46 - Cartaz 1 reprodução registros de BRA - Batalha dos Números (aula 11)	152
Figura 47 - Tabela reproduzida em um cartaz e preenchida pelos alunos (aula 12)	152
Figura 48 - Cartaz 2 reprodução registros de BRA - Batalha dos Números (aula 11)	153
Figura 49 - Tabela de pontuação - Batalha dos Números, preenchida por LEI (aula 12)	154
Figura 50 - Tabela de pontuação - Batalha dos Números, preenchida por FRA (aula 12).....	154
Figura 51 - Solução apresentada por AND ao problema 2 (aula 17)	155
Figura 52 - Solução apresentada por LEI ao problema 2 (aula 17)	155
Figura 53 - Resposta apresentada por MEB ao problema 1 (aula 6)	156
Figura 54 - Resposta apresentada por FRA ao problema 3 (aula 6)	157
Figura 55 - Tabela - Jogo dos Restos preenchida por DES (aula 8)	157
Figura 56 - Solução apresentada por DES ao problema 5 (aula 10)	158

Figura 57 - Solução apresentada por FRA ao problema 5 (aula 10)	158
Figura 58 - Cartaz com a tabela - jogo Mini-Yam, usado na discussão coletiva (aula 17)	159
Figura 59 - Tabela de pontuação (por equipes), preenchida por RIS, LUJ e FLE (aula 16)	160
Figura 60 - Retângulo formado por LUJ com quadrinhos EVA	161
Figura 61 - Retângulo formado por LUJ após a intervenção da estagiária	161
Figura 62 - Registro feito por LUJ para reproduzir o retângulo no papel	161
Figura 63 - Quadro da tabuada com os retângulos localizados por FAB (aula 15)	164
Figura 64 - Registro dos retângulos (12 quadradinhos), montados por GAG e FAB (aula 15)	165
Figura 65 - Tipos de notações produzidas pelos alunos no problema 2 (aula 15)	167
Figura 66 - Registros feitos por ANC - problema 3 (aula 6)	167
Figura 67 - Registros feitos por CAS - problema 3 (aula 6)	167
Figura 68 - Registros feitos por AMA - problema 3 (aula 6)	167
Figura 69 - Problema 2 (aula 6)	168
Figura 70 - Registros do retângulo feito no quadro (aula 15)	169
Figura 71 - Registros feitos pela dupla JUB e DES (aula 15)	170
Figura 72 - Solução apresentada por SAB ao problema 2 (aula 7)	171
Figura 73 - Solução apresentada por LUJ - problema de divisão (aula 20)	172
Figura 74 - Solução apresentada por FEG - problema de divisão (aula 20)	173
Figura 75 - Solução apresentada por VAM ao problema 1 (aula 19)	173
Figura 76 - Solução apresentada por LOS ao problema 2 (aula 19)	174
Figura 77 - Solução apresentada por LEA ao problema 1 (aula 19)	174
Figura 78 - Solução apresentada por EAS ao problema 2 (aula 19)	175
Figura 79 - Solução apresentada por PEP ao problema 2 (aula 19)	175
Figura 80 - Solução apresentada por DES - problema de divisão (aula 21)	175
Figura 81 - Solução apresentada por BRA ao mesmo problema (aula 21)	176
Figura 82 - Solução apresentada por RIS ao mesmo problema	176
Figura 83 - Registros feitos por MED 1ª rodada - Jogo dos Restos (aula 8)	178
Figura 84 - Problema apresentado aos alunos (aula 9)	179
Figura 85 - Reprodução do registro feito por ALU no quadro (aula 1)	181
Figura 86 - Registro feito no quadro durante a discussão coletiva (aula 19)	183
Figura 87 - Registro feito no quadro - procedimento de solução FAB (aula 19)	183
Figura 88 - Solução apresentada por SAB - problema 2 (aula 7)	184
Figura 89 - Tabela de pontuação - jogo Mini-Yam preenchida por MEB (aula 16)	186
Figura 90 - Reprodução registro SAB na primeira rodada - Jogo dos Restos (aula 4)	189
Figura 91 - Solução GAE ao problema 1 (aula 9) - reproduzida por ele no quadro	189
Figura 92 - Solução MEB ao mesmo problema e reproduzida por ela no quadro	189
Figura 93 - Tabela de pontuação - Jogo Mini-Yam preenchida por MED (aula 16)	190
Figura 94 - Solução apresentada por LEP ao problema 4 (aula 10)	194
Figura 95 - Registros feitos por VAM na tabela 3 (aula 12)	196
Figura 96 - Registros VAM - tabela 2, após preenchimento tabela 3 (aula 12)	196
Figura 97 - Solução apresentada por MEB e AMA (aula 13)	198
Figura 98 - Notação LOS - Jogo dos Restos apresentada em um problema (aula 10)	200
Figura 99 - Tabela usada na simulação de uma partida - jogo Mini-Yam (aula 16)	201
Figura 101 - Ilustração problema de estimativa: colocação do piso de uma cozinha	202
Figura 102 - Ilustração problema de estimativa: cubos empilhados	202

Lista de Quadros

Quadro 1 - Propriedades da multiplicação	63
Quadro 2 - Problemas de estrutura multiplicativa que envolvem isomorfismo de medidas	72
Quadro 3 - Objetivos das atividades desenvolvidas durante a intervenção	105
Quadro 4 - Categorias de análise e seus recortes de estudo	137
Quadro 5 - Tipos de notações produzidas pelos alunos - problema 2 (aula 6)	167
Quadro 6 - Síntese dos resultados	203

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	15
2 INTRODUÇÃO	22
3 CONTEXTO TEÓRICO	28
3.1 Os processos de ensino e de aprendizagem numa perspectiva construtivista	28
3.1.1 Desenvolvimento, aprendizagem e a Teoria da Equilibração	29
3.1.2 As Concepções de aprendizagem que assumimos	34
3.1.3 As Concepções de ensino que assumimos	45
3.2 A relação professor-aluno-saber matemático	53
3.2.1 Informação, conhecimento e saber	53
3.2.2 Contribuições da Teoria das Situações Didáticas	55
3.2.3 O Desenvolvimento de intenções cognitivas na escola	58
3.3 A noção de multiplicação	62
3.3.1 O conceito de multiplicação e suas origens na história da matemática	62
3.3.2 A construção da noção de multiplicação pela criança	67
3.4 Revisão de literatura	76
3.4.1 Pesquisas internacionais	79
3.4.2 Pesquisas brasileiras	83
4 CONTEXTO METODOLÓGICO	91
4.1 Pesquisa qualitativa construtivista	91
4.2 O trabalho de campo	98
4.2.1 Objetivos da pesquisa	98
4.2.2 Local	98
4.2.3 Sujeitos	101
4.2.4 Procedimentos de coleta de dados	103
4.2.5 Procedimentos de registro dos dados	130
4.2.6 Procedimentos de análise dos dados	134
5 RESULTADOS	138
5.1 Relações intelectuais	138
5.1.1 Questões relativas à operação de multiplicação	138
5.1.2 Questões relativas à operação de divisão	165
5.2 relações sociais/morais	177
5.2.1 Interações entre as crianças	177
5.2.2 Atitudes dos alunos	181
5.3 Relações didáticas	188
5.3.1 A questão do erro	188
5.3.2 O papel da avaliação	192

5. 3. 3 Limites da intervenção	198
6 DISCUSSÃO	204
6. 1 Relações intelectuais	204
6. 1. 1 A contagem, o cálculo e a compreensão da noção de multiplicação	204
6. 1. 2 A construção da notação simbólica convencional	209
6. 1. 3 A questão do ensino da tabuada na escola	216
6. 2 relações sociais/morais	220
6. 3 Relações didáticas	228
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	234
REFERÊNCIAS	236
APÊNDICES	

1 APRESENTAÇÃO

A presente pesquisa teve por objetivo propor uma metodologia fundamentada no construtivismo de Piaget, para ensinar multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, estudamos aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem dessa noção no contexto da sala de aula, numa perspectiva segundo a qual os conteúdos escolares devem contribuir de modo decisivo para a formação pessoal e social.

Para apresentá-la, inspiramo-nos nas primeiras linhas da obra que Azanha (1992) dedicou à pesquisa educacional, as quais reproduzimos aqui: “há trabalhos intelectuais cuja apreciação e avaliação independem de um conhecimento das motivações e propósitos do seu autor. Em outros, porém, esse conhecimento pode ser esclarecedor do percurso escolhido dentre os itinerários possíveis” (AZANHA, 1992, p. 11).

Em nosso caso, consideramos que o conhecimento relativo aos aspectos acima mencionados tem fundamental importância, uma vez que permite ao leitor contextualizar esse estudo, ou seja, situá-lo na trama da qual é parte integrante e que lhe esclarece o significado. Assim, começamos apresentando um panorama geral que torna explícito o contexto de origem e de inserção dessa pesquisa, uma vez que, embora realizada no tempo e no espaço de um doutorado, certamente ultrapassa seus limites. Para isso será usado, temporariamente, o discurso na primeira pessoa do singular, por considerá-lo mais adequado ao texto narrativo do qual nos valem, a partir de agora, nessa apresentação.

O que se apresenta nessa tese não começou no momento de meu ingresso nessa etapa da pós-graduação, mas é fruto das escolhas feitas ao longo de minha vida. Tais escolhas foram inspiradas por meus sonhos, meus ideais e minhas necessidades, que alimentaram diferentes projetos cuja realização ou desenvolvimento guiaram-me até aqui.

Desde criança nutri o desejo de ser professora, provavelmente por influência de minha família: sou filha de um professor e minhas duas irmãs mais velhas também são professoras. Após concluir o Magistério, ingressei, em 1991, no curso de Pedagogia da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e desde o início do curso já atuava na escola de Ensino Fundamental. Trabalhei inicialmente como professora auxiliar e, mais tarde, assumi o papel de professora regente nas séries iniciais, onde permaneci por 8 anos, na instância particular de ensino.

Foi na disciplina de Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, ministrada pela Prof. Maria Lúcia Faria Moro (a qual mais tarde veio a ser minha orientadora no Mestrado), que nasceu meu interesse pela área de cognição e aprendizagem, especialmente pela Epistemologia Construtivista de Piaget. No âmbito profissional, buscava desenvolver uma prática pedagógica coerente com a perspectiva construtivista do conhecimento e encontrei em Ferreiro e Teberosky (1999) um apoio importante para o trabalho com a leitura e escrita em sala de aula. Partindo da premissa de que ler não é o mesmo que decifrar e, escrever não é o mesmo que copiar, a pesquisa realizada pelas referidas autoras permitiu evidenciar o que elas definiram como “uma construção real e inteligente por parte das crianças desse objeto cultural, por excelência, que é a escrita” (FERREIRO; TEBEROSKY, 1999, p. 283).

Tive então a oportunidade de observar esse fascinante processo de construção da língua escrita por parte dos meus próprios alunos e essa experiência me levou a questionar a forma como encaminhava o trabalho com as demais disciplinas do currículo. Para desenvolver um ambiente alfabetizador em sala de aula no qual as crianças pudessem interagir com o universo da língua escrita, tendo papel ativo na compreensão dessa linguagem, foi necessário romper com muitos dos pressupostos que orientavam minha prática docente, o que me obrigou a reconstruir o próprio conceito de aprendizagem.

Uma nova compreensão desse processo começava a se esboçar para mim e, embora ainda fosse um tanto frágil, começou a ganhar força à medida que verificava os grandes progressos dos meus alunos em relação à leitura e à escrita. Contudo sentia-me frustrada por não lograr resultados semelhantes em relação ao trabalho com a matemática. Nessa disciplina, meus esforços concentravam-se basicamente no ensino das quatro operações, por considerar o seu domínio o objetivo principal da matemática nas séries iniciais. Mas o foco desse encaminhamento incidia apenas no ensino das técnicas operatórias.

Quanto aos resultados, verificava que os alunos eram capazes de repetir os algoritmos convencionais por mim ensinados, no entanto não podiam julgar a validade dos resultados obtidos nem usá-los com autonomia na solução de problemas. Estes últimos, inclusive, tinham seu papel bastante reduzido em minhas aulas, constituindo-se em exercícios de aplicação dos algoritmos ensinados.

A atitude mais comum por parte de meus alunos diante de um problema matemático, era a de dirigir-me perguntas tais como: *é de mais ou de menos? É de vezes ou de dividir?* Na

maioria das vezes apoiavam-se em dicas verbais presentes nos enunciados para determinar a operação matemática correspondente. Assim, se na pergunta fossem usados termos como “ao todo”, sabiam que se tratava de uma adição; “quantos sobraram” ou “qual a diferença”, concluíam tratar-se de uma subtração.

Não estava satisfeita com tais resultados e, ainda que intuitivamente, comecei a formular a hipótese de que o domínio das quatro operações ia muito além da habilidade de efetuar seus algoritmos correspondentes. No entanto, não conseguia fugir do modelo de ensino explicativo que iniciava pela apresentação do conceito, seguido da exemplificação e de numerosos exercícios de fixação. Comecei então a questionar minha atitude como professora: *como podia ter uma determinada postura ao trabalhar com a língua escrita e outra, tão diferente, ao trabalhar com a matemática? Seria a natureza específica do conhecimento matemático um obstáculo para a assunção de uma nova postura pedagógica?*

O conflito que se instalou levou-me a buscar uma fundamentação específica para o trabalho com a matemática na escola. As primeiras referências foram encontradas em Liberman e Wey (1988). A escola em que eu trabalhava adotou os livros didáticos das autoras e tive a oportunidade de participar de diversos cursos de formação com elas. O material de base 10, ou Material Dourado, era a ferramenta mais utilizada para o trabalho com o Sistema de Numeração Decimal. Passei a usar esse material diariamente em minhas aulas de matemática, as quais ainda focavam o ensino dos algoritmos convencionais, mas com ênfase na manipulação de materiais de apoio.

Nessa época, por intermédio da mãe de um aluno, que estava acompanhando com interesse o trabalho realizado com seu filho, recebi o convite de uma editora de minha cidade (Curitiba) para avaliar uma coleção de livros didáticos de matemática para as séries iniciais. A Editora estava interessada na compra dos direitos autorais do referido material e buscava uma apreciação crítica de um profissional da educação, que atuasse em sala de aula. Após a conclusão desse trabalho, fui convidada, pela editora, para escrever a minha própria coleção de livros didáticos.

O desafio proposto foi aceito com muita relutância, pois não me considerava preparada para produzir um material do gênero, contudo, considerei que um desafio dessa magnitude poderia me proporcionar grande crescimento profissional. Somente quando já estava trabalhando no último volume da coleção (STAREPRAVO, 1996), tive os primeiros contatos com os estudos de Kamii (1996); Kamii e DeVries (1991); Kamii e Livingston

(1995), os quais provocaram um profundo impacto em minhas crenças acerca do ensino e da aprendizagem de matemática.

Em Kamii e Livingston (1995) encontrei, pela primeira vez, uma visão crítica em relação ao ensino dos algoritmos convencionais na escola. As autoras apontam a precocidade no seu ensino como nociva para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e destacam a importância da elaboração de procedimentos de solução de problemas pelas crianças. As idéias por elas defendidas vieram ao encontro dos questionamentos que eu vinha fazendo acerca do modelo de ensino do qual me valia nas aulas de matemática e da minha insatisfação com os resultados obtidos. Assim, serviram de inspiração para a construção de um modelo de intervenção pedagógica pautada na resolução de problemas.

Durante o ano letivo de 1997, comecei a realizar um trabalho com minha turma de 3ª série, no qual as crianças eram desafiadas a elaborar procedimentos pessoais de cálculo e de resolução de problemas. Os resultados deste trabalho, embora constatados sem o controle e rigor de um trabalho de pesquisa, despertaram um grande interesse por um estudo mais profundo sobre a questão, pois estas crianças, em relação aos alunos de minhas turmas anteriores, passaram a apresentar atitudes diferenciadas diante dos problemas. Como não dispunham de um único recurso para resolver esses problemas, elas preocupavam-se muito mais com o contexto e a significação dos mesmos, melhorando, inclusive o seu desempenho em relação à matemática.

Essa experiência me estimulou a estudar mais, pois comecei a atinar para o fato de que a aprendizagem de matemática se constituía num processo muito mais complexo do que eu supunha até então. O trabalho em sala de aula nessa perspectiva me fascinava, mas, ao mesmo tempo, sentia falta de uma fundamentação teórica mais consistente.

Em 1999 ingressei no Programa de Pós-Graduação UFPR com o objetivo de realizar uma investigação mais aprofundada sobre os procedimentos de solução elaborados pelos alunos para resolver problemas. Para tratar desse tema no âmbito de uma pesquisa de Mestrado era necessário delimitar o foco da investigação e o recorte escolhido foram os problemas de estruturas multiplicativas, conforme a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1983).

A pesquisa, um estudo de caso, foi realizada com quatro alunos de uma terceira série do Ensino Fundamental e tinha como objetivo descrever analiticamente os procedimentos de solução das crianças para problemas de multiplicação e divisão apresentados oralmente, a

partir de encartes de ofertas veiculadas por jornais locais. Os resultados dessa pesquisa destacaram a importância de três momentos na resolução de problemas: o da antecipação da solução, anterior à produção do registro; o da produção da notação e o das interpretações das notações, destacando o papel do adulto neste último momento (STAREPRAVO, 2001; STAREPRAVO; MORO, 2005).

Como o estudo foi realizado com apenas quatro sujeitos, por meio de intervenções individuais, seus resultados suscitaram questões sobre a possibilidade de coordenação desses três momentos de solução num contexto de sala de aula. Tais questões poderiam ser investigadas em outra pesquisa, colocando-me a possibilidade de prosseguir com esse percurso acadêmico pelo ingresso consecutivo no doutorado.

Entretanto, naquele momento, optei pelo investimento em minhas atividades profissionais. Acabara de integrar o quadro de professores do curso de Pedagogia da PUCPR e experimentava grande demanda no trabalho com a formação continuada de professores, recebendo muitos convites por parte de secretarias Municipais de Educação e de instituições privadas de ensino para a realização de cursos e oficinas pedagógicas sobre o ensino da matemática nas séries iniciais, além de diferentes propostas de assessorias e consultorias pedagógicas.

Somava-se a isso a necessidade de uma nova reformulação da minha coleção de livros didáticos, nessa época já reformulada e sob o selo da Editora Atual/Grupo Saraiva (STAREPRAVO, 2003). Embora as primeiras versões tivessem sido aprovadas na avaliação do Ministério da Educação e Cultura (MEC), integrando o guia do Programa Nacional do livro Didático (PNLD), era necessário atualizá-la, deixando-a mais compatível com a concepção de ensino-aprendizagem que eu defendia então. Dessa forma, meu percurso acadêmico foi interrompido temporariamente e passei a me dedicar integralmente às atividades mencionadas.

No entanto, depois de quase quatro anos trabalhando com a formação de professores, novas questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática começaram a inquietar-me. Embora procurasse me atualizar, com muita leitura e troca com colegas, achei que já era tempo de retomar meu percurso acadêmico. Movida pelo desejo de ampliar minhas experiências, no contato com outras linhas de pesquisa, optei pela continuidade dos estudos fora de Curitiba. Dentre as opções pesquisadas, a Universidade de São Paulo (USP) oferecia uma linha de pesquisa totalmente compatível com meus interesses acadêmicos e um corpo

docente, cuja produção científica já sustentava minha atuação profissional (por exemplo, MACHADO, 1992; MACEDO, 1994; 1995; KISHIMOTO, 2005). Além disso, a facilidade de acesso a São Paulo permitia que o curso fosse realizado sem necessidade de uma mudança de cidade.

Era necessário então definir meu interesse de pesquisa que naquele momento girava em torno de duas possibilidades, as quais embora não fossem totalmente incompatíveis, apontavam para direções diferentes: de um lado inquietavam-me questões relativas à formação de professores das séries iniciais na área de matemática; de outro, nutria o desejo de aprofundar as investigações realizadas no mestrado, levando-as para o contexto da sala de aula. Ambas me seduziam igualmente e ambas pareciam-me capazes de oferecer contribuições relevantes tanto para minha formação pessoal quanto para o desenvolvimento da área. Assim, em função da existência de um prazo para inscrição no processo de seleção, esbocei dois projetos de pesquisa cada qual relacionado às duas vertentes acima mencionadas. Optei pela apresentação do projeto relacionado à formação de professores num contexto de oficinas de jogos, o qual foi aprovado pela comissão avaliadora e viabilizou meu ingresso no programa de Pós-Graduação. No entanto ainda não estava convencida de que era o melhor caminho a seguir, pelo menos no espaço de uma formação como o doutorado.

Acolhida pelo professor Lino de Macedo e seu grupo de orientandos, tive a oportunidade de discutir com outros pesquisadores sobre o projeto apresentado, expor minhas expectativas e anseios e definir, com maior clareza o tema a ser abordado na pesquisa. Levando em conta o tempo disponível para a realização da pesquisa e o percurso acadêmico já trilhado até então, optamos pelo estudo sobre o ensino e a aprendizagem da noção de multiplicação no contexto da sala de aula. Quanto ao outro projeto, não foi abandonado, mas adiado para um futuro próximo. Certamente a pesquisa agora realizada, no âmbito do doutorado, oferecerá grandes contribuições à realização daquele e de outros projetos.

Considero importante também situar o presente estudo em relação ao percurso profissional e acadêmico do orientador da pesquisa. O professor Lino de Macedo tem se dedicado ao longo de sua carreira acadêmica ao estudo da Epistemologia Genética de Piaget. Em 1987 fundou o Laboratório de Psicopedagogia do Instituto de Psicologia da USP (LaPp - IPUSP) e desde então tem coordenado as atividades de pesquisa e formação docente ali desenvolvidas, voltadas para o estudo das relações entre o jogo, a psicopedagogia e a epistemologia construtivista de Piaget. Diferentes pesquisas têm sido realizadas no contexto

do LaPp, muitas delas relacionadas ao desenvolvimento das oficinas de jogos para crianças, adolescentes e professores. Além dos jogos, situações-problemas também tem sido foco de estudos e produções por parte dos integrantes do LaPp, os quais enfatizam a “convicção de que jogos e situações-problemas podem ser recursos úteis para uma aprendizagem diferenciada e significativa” (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 6).

Suas publicações têm se constituído em referência fundamental para o estudo da aprendizagem e do ensino escolar no Brasil, principalmente no que tange à questão da educação inclusiva e do desenvolvimento de competências na escola. No presente estudo, sua influência como *orientador* faz-se notar no sentido que considero o mais bonito desse termo e que vai além de sua função diretriz: é o de *alguém que inspira outrem e lhe serve de modelo*. Assim, embora a tese se constitua numa produção pessoal, não a considero um trabalho individual, pois o que aqui é relatado se constitui, em forma e em conteúdo, como fruto desse encontro entre orientador e doutoranda.

Encerro assim o texto de apresentação dessa tese, passando então para o texto introdutório através do qual pretendemos apresentar nosso tema de investigação tanto num movimento ascendente, no sentido de situá-lo num âmbito mais amplo, que é o do papel da educação escolar na formação pessoal, quanto num movimento descendente, justificando o recorte escolhido e especificando nossa questão de investigação.

2 INTRODUÇÃO

Ao nosso ver, a tarefa de ensino não pode prescindir de uma conscientização - por parte de quem a realiza - sobre as razões de a estar realizando. Assim consideramos fundamental dar início ao texto dessa pesquisa examinando a seguinte questão: *por que ensinar matemática na escola?*

A resposta, embora possa parecer óbvia, encerra muito mais do que uma questão de propósitos ou finalidades, pois aponta para a própria concepção que se tem acerca do fenômeno educativo. Podemos pensar a educação escolar como um processo responsável pela transmissão da herança sociocultural dos antepassados, destacando-se assim seu caráter enciclopédico. Mas também podemos pensá-la numa perspectiva mais ampla - e é assim que o fazemos nesse trabalho - como um *espaço de formação pessoal e social*. Tal perspectiva não exclui a primeira, mas a integra considerando que a educação visa o aperfeiçoamento da capacidade humana de transformar seu meio e a si mesmo (ARANHA, 1996) e situa-se, assim, numa permanente tensão entre conservação e transformação.

Dentre os pontos que distinguem as concepções acima mencionadas, destacamos aqui o lugar conferido aos conteúdos disciplinares em cada uma. Enquanto na primeira eles parecem ocupar o lugar mais importante, na segunda eles só se justificam na medida em que podem ser colocados a serviço das pessoas (MACHADO, 2004). Nesse sentido, responder à questão sobre por que ensinar matemática na escola requer uma definição acerca do lugar do saber na relação pedagógica. Definir claramente este lugar é imprescindível para que, de protagonista absoluto, o saber não passe a ser relegado justamente no espaço em que deveria se constituir no próprio elo de ligação entre as pessoas.

Assim, colocar as pessoas em primeiro plano não significa subestimar o saber ou considerá-lo num plano meramente utilitário, mas conceber que, na escola, a justificativa dos conteúdos próprios de cada disciplina está na possibilidade de se transcender suas fronteiras, como tão bem explicitado por Develay (2002):

Para que a matemática? Evidentemente para manipular frações, resolver equações, desenhar funções, calcular ângulos, probabilidades ou perímetros. Mas também para contribuir à abstração, dar início à demonstração. Para que a matemática? Pela própria matemática, mas também por algo que vai além da matemática e que não se reduz à simples matemática. (DEVELAY, 2002, prefácio).

A partir do exposto parece ficar evidente que a matemática, bem como as demais disciplinas escolares se justificam em grande parte pelo amanhã, ou seja, pelo futuro. Entretanto, tal justificativa, coloca-nos diante de um duplo desafio: *como trabalhar numa perspectiva de porvir; sem sacrificar o iminente? Como saber se o que se trabalha na escola, no presente, de fato servirá ao futuro de nossos alunos?*

A primeira questão nos leva a considerar os perigos de se tratar o processo educativo apenas na perspectiva de futuro. Um deles é apontado por Cirigliano (1972) na análise que faz sobre os fins da educação comparando-os com aqueles da própria *existência*. O autor afirma que a idéia de fim exterior e remoto ao que se faz é prejudicial à educação porque gera uma grande pressa em terminar, o que pode se constituir, segundo ele, no mesmo que viver à espera de morrer: “a única meta é terminar e assim se desperdiça a vida [...] O fim da vida é ela mesma, não seu término ou terminação alheia a ela. O fim da vida é o que fazemos com ela e nela”. (CIRIGLIANO, 1972, p. 52). No cotidiano escolar, essa exterioridade dos fins da educação pode ser verificada quando um aluno não consegue atribuir sentido ao que se espera que aprenda: *por que estudar matemática? Para tirar notas boas nas provas, para passar de ano, para passar no vestibular...*

Fica claro assim, que justificar os conteúdos escolares pelo amanhã não significa abdicar do que possam significar hoje, mas, antes, entender que da própria atribuição de sentido aos conteúdos pelos alunos, no presente, pode depender o papel que venham a exercer no seu futuro. Há que se considerar, ainda, - e aí entramos na segunda questão - que na dinâmica do mundo atual, marcada pela evolução tecnológica e cujas transformações redesenham continuamente as relações pessoais, profissionais e sociais, preparar um aluno para o amanhã é prepará-lo para o desconhecido.

Na busca de respostas às questões colocadas e tentando superar a crescente fragmentação do saber, discute-se atualmente um novo modelo de educação, pautado no desenvolvimento de competências. Numa consulta a um dicionário comum, vê-se a palavra competência definida como a soma de conhecimentos ou de habilidades. No contexto educacional, entretanto, tal definição deve ser ampliada, abordando o aspecto essencial da mobilização de conhecimentos e habilidades, ou seja, a idéia de competência está mais ligada ao que o indivíduo é capaz de fazer a partir do que possui. Competência, implica então, fazer escolhas, decidir, mobilizar recursos e agir (MACEDO, 2005).

Convém destacar que, nesse contexto, as competências não podem ser consideradas segundo a atribuição que lhes é dada no âmbito profissional, onde são frequentemente relacionadas ao desempenho, à eficácia (ainda que envolvam saberes). As aprendizagens no exercício de um ofício podem ocorrer basicamente no plano da ação, do fazer, uma vez que visam um resultado específico, de caráter mais imediato.

Na escola as competências devem ser concebidas para além do saber-fazer. Assim, a idéia de competência integra a de ação, mas no contexto escolar essa ação não pode visar apenas a eficácia. Sobre esta questão, Denyer et al. (2007) esclarecem:

É possível realizar uma ação e até ser bem sucedido, sem aprender nada. Entretanto, alguém competente não é alguém que triunfa, mas alguém que sabe como e porque triunfa, alguém que dispõe da inteligência de sua ação e que, portanto, pode aproveitá-la, segundo as necessidades e as circunstâncias. Isso é bem diferente do “repetidor”, capaz somente de aplicar receitas, do ousado [aquele que se arrisca sem medo] ou, inclusive, do “esforçado”. Em uma ou em cem palavras, quem diz “competência”, não diz só *eficácia da ação*, mas também *compreensão* de sua eficácia, podendo estendê-la a outras situações. (DENYER et al., 2007, p. 107, tradução nossa, grifo dos autores).

Assim, se no mundo do trabalho as aprendizagens são orientadas pela lógica da ação, na escola a orientação deve ser *racional*, no sentido da *compreensão* ou da *inteligência da ação*, como foi definida pelos autores supracitados. Pensando no conteúdo matemático que é objeto dessa pesquisa, podemos supor que alguns dos comportamentos valorizados na escola como saber recitar a tabuada ou saber aplicá-la para efetuar cálculos podem dizer muito pouco ao professor sobre a existência de competências aritméticas por parte de seus alunos.

Kamii (1996), cujos estudos apoiam-se no construtivismo piagetiano, aponta a relação entre ensino de matemática e desenvolvimento da autonomia. Para a autora, ensinar técnicas e procedimentos matemáticos que são repetidos pelos alunos sem o domínio das relações que as produzem, da estrutura que as sustentam, não é educar, mas doutrinar. Tem-se então que o desenvolvimento da autonomia, meta precípua da educação, não ocorre mediante repetidos sucessos, mas pela compreensão dos mecanismos que os tornaram possíveis.

A autonomia intelectual, à qual Kamii (1996) se refere, se sustenta, a nosso ver, sobre a própria idéia de racionalidade, cujo desenvolvimento, tanto no plano individual, quanto social, depende em grande parte da educação escolar, como apontado por Brousseau (2008). Sobre esta questão o autor sublinha o papel da matemática:

O comportamento racional de uma sociedade, ou seja, suas relações tanto com a verdade quanto com a realidade, não repousa exclusivamente nas virtudes individuais de seus membros; requer *uma prática social e uma cultura que devem*

ser ensinadas na escola. A matemática constitui um campo no qual a criança pode iniciar-se mais precocemente na racionalidade, no qual pode forjar sua razão no âmbito das relações autônomas e sociais. (BROUSSEAU, 2008, p. 15, grifo nosso).

Diante do exposto fica evidenciado que, ao mesmo tempo em que o acesso ao saber pode promover o desenvolvimento da racionalidade, o pensamento racional é a própria condição de acesso ao saber. Assim, a resposta que foi delineada à questão apresentada no início deste texto coloca-nos uma nova pergunta : *as aulas de matemática, em nossas escolas, têm realmente se constituído num espaço privilegiado de acesso ao saber, de desenvolvimento de competências, de formação pessoal e social?*

Os resultados apresentados pelos diferentes sistemas de avaliação dos órgãos governamentais, sejam de âmbito estadual, como o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 2007) ou nacional, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2007), apontam para avanços no acesso à escolarização que não tem sido acompanhados por índices correspondentes no que se refere ao desempenho acadêmico dos alunos. Dados apresentados no *Jornal da Ciência*, da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC)¹ em dezembro de 2007, relativos aos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA, 2006)², sugerem que a escola não está conseguindo contribuir de maneira efetiva na promoção do acesso ao saber: em matemática, por exemplo, numa escala que vai até seis, 73% dos estudantes brasileiros avaliados ficaram situados no nível um, ou abaixo disso.

Na sociedade atual, o conhecimento é um bem social de indiscutível importância e o desafio da educação consiste justamente em torná-lo acessível para todos. Isso só poderá acontecer mediante a existência de projetos educacionais que tenham a distribuição social do conhecimento como meta fundamental e ao mesmo tempo como fonte inspiradora, propiciando assim um processo de inclusão daqueles que estão à margem dessa sociedade. Valemo-nos da reflexão com a qual Pozo (2004) inicia sua obra sobre aquisição de conhecimento, para reforçar o que defendemos aqui:

¹ Jornal da Ciência - e-mail 3404, de 05 de dezembro de 2007. Acesso eletrônico em 09/01/2009 (<http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=52820>)

² O exame do PISA se constitui numa avaliação internacional aplicada a cada três anos pela OCDE (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico) a alunos de 15 anos de idade. Os alunos são avaliados nas áreas de Língua, Matemática e Ciências, sendo que em cada edição, enfatiza-se, particularmente, uma delas.

Diz-se que vivemos numa *sociedade do conhecimento*, mas, para muitos, é sobretudo uma *sociedade da informação*, uma vez que quem não pode ter acesso às múltiplas formas culturais da representação simbólica (numéricas, artísticas, científicas, gráficas, etc.) está social, econômica e culturalmente empobrecido, além de viver confundido, oprimido e desconcertado diante de uma avalanche de informação que não se pode traduzir em conhecimento, para a qual não se pode dar sentido. (POZO, 2004, p. 11, grifo do autor)

Ao nosso ver, a democratização do saber depende de uma intencionalidade em relação ao desenvolvimento de competências na escola. Para além de ensinar conceitos, regras, procedimentos, é preciso orientar a ação educativa para a *compreensão*. Cabe então aos professores um questionamento permanente sobre o tratamento dispensado, em sala de aula, aos conteúdos disciplinares: *estão sendo de fato compreendidos pelos alunos ou apenas repetidos? São eles fins em si mesmos?* Destacamos ainda uma importante pergunta formulada por Denyer et al. (2007): “*o que geralmente ocorre nas aulas, se presta ou não à aquisição de competências?*” (DENYER et al., p. 85, tradução nossa).

Debruçamo-nos sobre essas perguntas, levando-as para o contexto do ensino da matemática nos anos iniciais da escolaridade básica, no qual situam-se as questões que estão na base da presente pesquisa: *como organizar, disciplinar o saber matemático em sala de aula, para que este contribua, de fato, para a formação pessoal e social dos alunos? Como gerir a tarefa de ensino de forma que, sem excluir o saber matemático, se coloquem as pessoas em primeiro plano?*

Nosso interesse voltou-se para a análise dessas questões, ligadas ao ensino da multiplicação e segundo o referencial construtivista piagetiano, sobre o qual, conforme já mencionado na apresentação desse trabalho, temos fundamentado nosso percurso profissional e acadêmico. A escolha da noção de multiplicação como o conteúdo da matemática a ser estudado no contexto das questões acima apresentadas deu-se, em parte, em função de estudos já realizados anteriormente (STAREPRAVO, 2001; STAREPRAVO; MORO, 2005). Mas também por se tratar de um conteúdo curricular que consideramos de grande importância para a formação dos alunos e que costuma ser visto por muitos professores (e alunos) como uma questão de memória (tabuada) e aplicação de procedimentos ensinados (algoritmos).³

³ Tal observação provém do trabalho com a formação continuada de professores ao qual já nos referimos na apresentação dessa pesquisa.

Empreendemos assim um estudo de uma proposta de ensino da noção de multiplicação⁴, desenvolvida e aplicada em sala de aula pela própria pesquisadora, tendo como referencial a Teoria Construtivista Piagetiana. Na intervenção realizada trabalhamos apenas com a multiplicação em situações de proporcionalidade simples, especificamente com problemas de correspondência um-para-muitos e de arranjo retangular⁵. O objetivo foi o de investigar se essa proposta, da forma como foi concebida e realizada, poderia contribuir efetivamente para uma aprendizagem de orientação racional, favorecendo o desenvolvimento de competências matemáticas ou até mesmo de outras competências não relacionadas imediatamente ao conteúdo matemático em questão.

A descrição detalhada desse estudo, seus objetivos específicos, fundamentos e resultados são apresentados no presente trabalho, conforme especificado a seguir.

Primeiro apresentamos o contexto teórico da pesquisa, o qual se organiza em torno de três temas principais: os processos de ensino e de aprendizagem numa perspectiva construtivista; a relação-professor-aluno-saber matemático; a noção de multiplicação. Apresentamos ainda uma breve revisão da literatura na área, voltando-nos para alguns dos trabalhos de pesquisa realizados nos últimos anos sobre o ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, especialmente aqueles cujo foco incide sobre a noção de multiplicação.

Na segunda parte explicitamos nossas opções metodológicas, situando nosso estudo no contexto da pesquisa qualitativa e justificando nossa opção por uma abordagem construtivista. Especificamos também os objetivos da pesquisa e descrevemos detalhadamente o trabalho de campo.

Por fim apresentamos os resultados, a discussão e nossas considerações finais. Nessa parte, concluímos o trabalho fazendo uma interlocução entre os dados que coletamos, a teoria sobre a qual nos fundamentamos e nossos objetivos de investigação.

⁴ Embora o foco da intervenção realizada em sala de aula incidisse sobre a operação de multiplicação, exploramos também a divisão, conforme será justificado mais adiante.

⁵ A escolha desse recorte não significa que desconsideramos a importância de se trabalhar na escola com outros tipos de situações ou problemas de multiplicação (combinatória, comparação, etc.), mas ocorreu em função do interesse específico na construção da tabuada.

3 CONTEXTO TEÓRICO

A presente pesquisa trata-se de um estudo sobre uma proposta de ensino da noção de multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental e inclui um trabalho de campo que consistiu na realização de uma intervenção pedagógica elaborada e desenvolvida pela pesquisadora. A análise do processo interventivo foi estruturada em torno das duas bases sobre as quais se apóia o construtivismo piagetiano: *interação* e *equilibração majorante* (PIAGET, 1976).

Nesse capítulo apresentamos as bases teóricas sobre as quais fundamentamos nosso estudo, explicitando as concepções que assumimos sobre os processos de ensino e de aprendizagem, sobre a relação professor-aluno-conhecimento matemático e sobre a noção de multiplicação.

3.1 Os processos de ensino e de aprendizagem numa perspectiva construtivista

No texto de introdução dessa tese, apresentamos dados relativos aos resultados obtidos por estudantes brasileiros no exame do PISA, edição de 2006. Conforme já comentado, os dados concernentes ao desempenho na prova de matemática sugerem que nossos estudantes estão completando o Ensino Fundamental sem obter sucesso no que pode ser considerado como tarefa básica de qualquer aluno: aprender aquilo que a escola se propôs a ensiná-lo.

Dessa afirmação originam-se algumas questões essenciais para um exame cuidadoso do problema nela levantado: o que significa, exatamente, aprender matemática? Quando um aluno não aprende, quem fracassou: ele ou a escola? Nossos alunos estão interessados em aprender aquilo que a escola quer lhes ensinar?

Por meio dessas questões, queremos introduzir o tema a ser explorado nesse capítulo, fundamentando-nos na abordagem usada por Macedo (2005) na qual as atividades de ensino e de aprendizagem são tratadas em uma perspectiva de indissociabilidade e complementaridade, sem que seja, com isso, desconsiderado o caráter irreduzível de tais conceitos.

Conforme apontado por Macedo (2005), durante muito tempo a escola tratou as relações professor-aluno e ensinar-aprender de forma independente e dissociada. Nesse sentido, o ensino era visto como problema do professor e a aprendizagem como um problema

do aluno. Esse era um traço característico de uma escola que se organizava segundo a lógica da exclusão em favor da qual contava com um recurso poderoso: a reprovação.

Hoje, entretanto, vivemos no Brasil um cenário bastante diferente, marcado pelo direito que os estudantes receberam de cursar a escola básica sem a ameaça da reprovação - Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, 1996). Vale ressaltar que se a referida lei favorece o desenvolvimento de uma escola que se pretende para todos, que se estrutura segundo a lógica da inclusão - e acreditamos que realmente faz isso - o sucesso dessa escola não pode ser determinado por decreto.

Segundo Macedo (2005), tratar o ensino e a aprendizagem, na escola, numa relação de interdependência é condição necessária (ainda que não suficiente) para que a promoção contínua não se constitua hoje em um pseudo-sucesso, correspondente ao pseudo-fracasso de ontem. Quando afirmamos que ensinar e aprender são atividades indissociáveis e complementares, significa que as vemos como partes de um mesmo todo, que se complementam uma na outra. Nesse sentido, as habilidades de ensino, que outrora giravam em torno de um domínio incontestável do conteúdo, acompanhado de uma boa capacidade de comunicação (para expor a matéria) e do domínio da classe (em termos de disciplina), tornaram-se mais complexas.

Assumir que ensinar é uma atividade que só se completa na aprendizagem do aluno, implica em tornar o professor co-responsável pela aprendizagem, o que requer dele uma reconstrução de suas habilidades de ensino ou, conforme apontado por Meirieu (1998), a reconstrução de sua própria identidade, como um *profissional da aprendizagem*.

Mas, afinal, o que significa aprender? Como podemos explicar esse processo tão social e, ao mesmo tempo tão pessoal?

Nossa concepção de aprendizagem apóia-se em Piaget (1964, 1970, 1976). Embora o referido autor não tenha se dedicado ao estudo da aprendizagem no sentido mais estrito como a consideramos nessa pesquisa (ligada a um conteúdo escolar), seus estudos sobre o desenvolvimento da inteligência constituem um aporte essencial ao nosso estudo.

Assim, iniciamos esse capítulo com uma exposição da teoria de Piaget (1964, 1970, 1976), com foco nos elementos que nos serviram de aporte para a elaboração do texto no qual apresentamos nossas concepções acerca dos fenômenos de ensino e de aprendizagem.

3. 1. 1 Desenvolvimento, aprendizagem e a Teoria da Equilibração

Para Piaget (1970) o problema da inteligência está vinculado ao problema epistemológico fundamental da *natureza dos conhecimentos*: serão estes cópias da realidade ou assimilação do real pelas estruturas de transformação? De acordo com a primeira concepção, o conhecimento - definido pelo autor como cópia - provém de respostas dos organismos aos estímulos exteriores. Segundo Piaget (1970), essa concepção de conhecimento-cópia inspirou muitos métodos educativos, cuja relação fundamental envolvida na aprendizagem, é a de associação.

Já a segunda concepção tem a assimilação como relação fundamental. Nos dois trechos que transcrevemos a seguir, vemos como os conceitos de *assimilação* e de *operação*, recebem destaque na concepção de Piaget (1970, 1964) sobre o desenvolvimento do conhecimento:

[...] os conhecimentos derivam da ação, não no sentido de meras respostas associativas, mas no sentido muito mais profundo da associação do real com as coordenações necessárias e gerais da ação. Conhecer um objeto é agir sobre ele e transformá-lo, apreendendo os mecanismos dessa transformação vinculados com as ações transformadoras. Conhecer é, pois, assimilar o real às estruturas de transformações, e são as estruturas elaboradas pela inteligência enquanto prolongamento direto da ação. (PIAGET, 1970, p. 30).

Conhecimento não é uma cópia da realidade. Conhecer um objeto, conhecer um acontecimento, não é somente experienciar realidade. Conhecer um objeto, conhecer um acontecimento, não é simplesmente olhar para ele e fazer uma cópia ou imagem mental dele. Conhecer um objeto é agir sobre ele. Conhecer é modificar, transformar o objeto e entender o processo dessa transformação; e, como consequência, entender como o objeto é construído. (PIAGET, 1964, p. 176)

De acordo com a teoria de Piaget, o conhecimento não provém, originalmente, nem do sujeito, nem dos objetos, mas da *interação* entre eles, a qual se caracteriza pela ocorrência de trocas com influência mútua. A ação à qual Piaget se refere, nas duas citações acima, é a *operação*: uma ação interiorizada que modifica o objeto de conhecimento, sendo assim a própria essência do conhecimento. Como ação interiorizada e reversível, a operação é “um tipo particular de ação que forma as estruturas lógicas” (PIAGET, 1964, p. 177). Convém destacar que uma operação nunca é isolada, ligando-se a outras operações em uma estrutura total: as estruturas operatórias.

O processo de desenvolvimento, para Piaget (1964), é espontâneo e está relacionado à totalidade das estruturas do conhecimento e, nesse sentido, diferencia-se do processo de aprendizagem que é provocado pelas situações e está limitado a um único problema ou a uma única estrutura. Assim, para Piaget (1964) a aprendizagem se insere no processo de desenvolvimento cognitivo geral, estando assim subordinada ao desenvolvimento.

Para explicar a formação e mesmo o desenvolvimento do conhecimento, Piaget (1976) recorre a um processo central de equilíbrio, explicando que este procede de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas por meio de um processo dinâmico “que conduz de certos estados de equilíbrio aproximado a outros, qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações” (PIAGET, 1976, p. 11).

O autor salienta que somente em alguns casos, a reequilibração representa uma volta ao estado de equilíbrio anterior, assim o interesse de Piaget (1976) centra-se na equilíbrio como processo que pode corrigir e completar a forma precedente de equilíbrio, ou seja, a “equilíbrio majorante”. Os mecanismos que intervêm nesse processo são os das regulações que conduzem a uma reequilibração com melhoramento das estruturas anteriores.

Para Piaget (1976), os sistemas cognitivos assim como os organismos são ao mesmo tempo: abertos, no sentido das trocas com o meio e fechados enquanto ciclos. O sistema total é diferenciado em subsistemas hierarquizados, com estruturas análogas e que são religados uns aos outros por conexões também cíclicas. Assim o sistema cognitivo é composto por um conjunto de estruturas compreendendo as características de totalidade, transformação e auto-regulação, uma estrutura é composta por um conjunto de esquemas.

Em um texto sobre os processos de equilíbrio majorante, Macedo (1994) define um esquema como uma coordenação de ação, um “saber fazer”, lembrando que os esquemas dos sujeitos permitem que os objetos sejam assimilados às suas estruturas. Os esquemas, as estruturas e os sistemas possibilitam diferentes tipos de ações e conteúdos que os modificam continuamente.

O funcionamento dos ciclos epistêmicos, acima mencionados, está relacionado a dois processos fundamentais que constituem os componentes de todo equilíbrio cognitivo: *assimilação* e *acomodação*. Assimilar significa incorporar um elemento exterior (objeto ou evento) em um esquema sensorio motor ou conceitual do sujeito, portanto às suas estruturas. A acomodação refere-se ao ajustamento dos esquemas aos elementos assimilados.

Para Piaget, a atividade inteligente ou as condutas adaptadas, consistem justamente no equilíbrio entre dois pólos: o da assimilação e o da acomodação. Conforme explicado por Montagero e Naville (1998, p. 103) “em um ato inteligente, essa tendência a integrar o novo ao conhecido (assimilação às formas de conhecimento existentes) está perfeitamente compensada pela capacidade de modificar essas formas para dar conta das propriedades da novidade (acomodação)”. Enquanto o pólo assimilador foca a atividade do sujeito, o pólo

acomodador exprime a pressão do real e permite ao sujeito submeter-se às exigências do meio.

Na elaboração da teoria da equilibração, Piaget (1976) recorre a dois postulados pautados nos conceitos de assimilação e acomodação:

Primeiro: todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, ou seja, incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com a sua natureza. De acordo com este postulado, a atividade do sujeito é necessária, porém não suficiente à construção de novidades.

Segundo: todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, ou seja, se modificar em função de suas particularidades, mas, sem com isso perder sua continuidade (portanto seu fechamento enquanto ciclo de processos interdependentes) nem seus poderes anteriores de assimilação. Este postulado indica a necessidade de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação.

Piaget (1976) aponta para três formas de equilibração. A primeira refere-se à equilibração entre a assimilação de objetos a esquemas de ação do sujeito bem como à acomodação destes aos objetos. Há, nesta forma o início de uma conservação mútua, dado que o objeto é necessário ao desenrolar da ação e a significação desse objeto que o transforma pela ação é conferida, reciprocamente pelo esquema de assimilação. A segunda forma de equilibração deve assegurar as interações entre os subsistemas, ou seja, a equilibração intervém nas interações entre as partes. Os processos de assimilação e acomodação recíprocos buscam assegurar as interações entre dois ou mais esquemas, cuja junção compõe um outro esquema que os integra. Na terceira forma, a equilibração assegura as interações entre os subsistemas e a totalidade, ou seja, intervém nas interações das partes com o todo. Assim, a segunda forma envolve uma equilibração pela diferenciação, enquanto que a terceira envolve a equilibração pela integração. A integração em um todo é tarefa da assimilação e a diferenciação exige acomodação.

O autor ressalta que assim como nas outras formas de equilibração, nesta terceira há conservação mútua do todo e das partes, mas agora numa dimensão de hierarquia. Os três tipos de equilibração são relativos ao equilíbrio entre assimilação e acomodação e conduzem simplesmente os caracteres positivos pertencentes aos esquemas, subsistemas ou totalidades em jogo. Macedo (1994) esclarece o significado destes aspectos positivos lembrando que se interagir implica um fazer, um “agir em direção a”, este aspecto positivo tem seu

complementar negativo, “pois fazer X, implica não fazer não-X.” (MACEDO, 1994, p.147). O autor lembra ainda que a correspondência entre as afirmações e as negações é, para Piaget, um aspecto fundamental nos processos de equilibração majorante.

Os três tipos de equilibração, descritos em seus aspectos positivos, são resultantes do ajustamento progressivo da assimilação e da acomodação e podem, segundo Piaget (1976), ser efetuados de maneira espontânea e intuitiva, por tateamentos sucessivos, com eliminação dos fracassos e retenção dos sucessos. Entretanto, “a medida que o sujeito procura uma regulação, isto é, tende a obter uma estabilidade coerente, torna-se então necessário utilizar as exclusões de modo sistemático, apenas assegurando ao equilíbrio uma correspondência exata das afirmações e das negações” (Piaget, 1976, p.18). A não correspondência exata entre afirmações e negações, gera contradições que perturbam o sujeito, ou seja, gera desequilíbrios.

Piaget (1976, p.19) destaca o papel desencadeador dos desequilíbrios, pois para ele, a sua fecundidade “se mede justamente pela possibilidade de superá-los – quer dizer sair deles”. Assim a fonte real do progresso deve ser buscada, segundo o autor, na reequilibração, não no sentido de volta à forma anterior de equilíbrio, mas com melhoramento obtido, ou seja, na equilibração majorante.

Retornando aos dois postulados sobre a equilibração anteriormente apresentados, podemos dizer que o processo de equilibração resulta da tendência que todo sistema cognitivo tem de se alimentar (por meio da assimilação) e de modificar-se para se acomodar aos elementos assimilados. Os desequilíbrios são causados por perturbações cognitivas, as quais constituem obstáculos à assimilação e essas perturbações geram regulações, que visam compensá-las. Assim, as regulações são reações às perturbações, mas Piaget ressalta que nem toda perturbação acarreta uma regulação, pois para que isso aconteça é necessário que o sujeito possua uma estrutura capaz de assimilar o objeto ou evento como perturbador (MACEDO, 1994). Uma regulação ocorre quando há retomada de uma atividade com modificação em relação ao seu primeiro resultado e, como esse processo é dirigido pelo próprio sistema cognitivo, não havendo controle externo, trata-se de auto-regulação.

A este estudo interessa especialmente o papel dos desequilíbrios na construção de conhecimento, uma vez que a intervenção pedagógica realizada pela pesquisadora visava desencadear um processo de aprendizagem. Consideramos a intervenção realizada como uma proposta interativa, uma vez que foram propostas diferentes atividades visando provocar a

interação entre os alunos e o objeto de conhecimento, no caso as noções elementares de multiplicação. Em nossa análise procuramos responder às seguintes questões: qual foi o efeito dessa interação sobre as crianças? As atividades propostas causaram algum tipo de perturbação? Como os alunos reagiram a essas perturbações? A interação teve um efeito de aperfeiçoamento sobre os sujeitos envolvidos?

A teoria da equilibração, brevemente discutida aqui, apresenta muitos desafios à educação escolar, sobretudo no que se refere à superação de seu caráter transmissivo. Não se trata de negar o papel das transmissões sociais na aquisição do conhecimento, mas de compreender o funcionamento dos mecanismos assimiladores dos alunos, pois sem esta compreensão, o ensino acaba sendo uma forma de “despejar” conteúdos em recipientes vazios, o que poderia ser caracterizado como uma interação nula, inócua, ou seja, uma interação que não tem efeito transformador. Superar o caráter transmissivo da educação escolar implica numa reorganização da relação entre professores e alunos e entre estes e o saber, em busca de uma relação mais investigativa, que privilegie a ação mental, o confronto de idéias, o estabelecimento de relações e que propicie o movimento contínuo de assimilações e acomodações relativas aos conteúdos escolares.

3. 1. 2 As concepções de aprendizagem que assumimos

A partir do quadro teórico piagetiano exposto no item anterior e apoiando-nos em Charnay (1996) e em publicação do *Institute National de Recherche Pédagogique* (INRP) – ERMEL (1991), destacamos a seguir seis pressupostos básicos sobre o conceito de aprendizagem. Esses pressupostos sintetizam as concepções que assumimos acerca do processo de aprendizagem, sobre as quais estruturamos nosso estudo e, ao mesmo tempo, apontam diretrizes para a definição de alguns princípios de ensino.

Convém pontuar que embora tais pressupostos sejam apresentados em uma sequência linear, fazemos isso apenas por limitações próprias do âmbito no qual discorreremos sobre eles, que é o de um texto escrito. Essa sequência não implica uma ordem entre eles nem qualquer tipo de hierarquia, sendo que todos têm igual relevância e estão diretamente ligados uns aos outros.

Pressuposto 1: aprender não é o mesmo que acumular informações, mas, ao contrário, requer um processo de construção de conhecimento por meio de integração, modificação, transformação e (re)elaboração.

Nesse sentido, aprender não é o mesmo que memorizar ou repetir procedimentos ensinados pelo professor, mas é o resultado de um processo de apropriação do conhecimento pelo sujeito na sua interação com o meio. Charnay (1996), que se apóia na Teoria da Equilibração de Piaget (1976), explica que esse processo ocorre por meio de desequilíbrios e reequilibrações :

Os conhecimentos não se empilham, não se acumulam, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrios, no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados. Uma nova fase de equilíbrio corresponde então a uma fase de reorganização dos conhecimentos, em que os novos saberes são integrados ao saber antigo, às vezes modificados. (CHARNAY, 1996, p.43)

Essa concepção aponta para a complexidade do processo de aprendizagem e para a insuficiência do esquema ‘estímulo - resposta’ classicamente utilizado para explicá-lo. Considerando-se este esquema, geralmente se pensa que primeiro há um estímulo e que a resposta é provocada por este estímulo, mas essa idéia é criticada por Piaget (1964), uma vez que, de acordo com o autor, a resposta estava lá primeiro:

Um estímulo é um estímulo somente na extensão em que ele é significativo, e ele se torna significativo somente na extensão em que haja uma estrutura que permita sua assimilação, uma estrutura que pode integrar este estímulo, mas que, ao mesmo tempo provoque a resposta. (PIAGET, 1964, p.180)

Nesse sentido, aquilo que o aluno já sabe tem uma influência muito grande em seu processo de aprendizagem. Conforme apontado por Charnay (1996, p. 44), o aluno “não pode ser considerado como uma página em branco sobre a qual será suficiente imprimir conhecimentos corretos e bem enunciados”.

Nas investigações realizadas por Piaget (por exemplo Piaget e Szeminska, 1975 e Piaget et al., 1995), é possível observar como o autor se interessava particularmente pelas respostas incorretas dos sujeitos, tratando-as não como ausência de conhecimento, mas como uma forma de conhecer própria da criança. Para ele estas manifestações espontâneas das crianças (em oposição à reprodução de um repertório de respostas ensinadas) eram fonte de informações sobre o seus estágio de conhecimento. Em um texto no qual faz uma análise sobre o método de trabalho em grupo, Piaget (1998b) comenta sobre a preocupação dos professores com a possível fixação de erros, deixando clara sua posição sobre a aprendizagem como um processo muito mais complexo do que a mera reprodução de conteúdos ensinados:

Um erro revelador de uma verdadeira pesquisa é freqüentemente mais útil que uma verdade simplesmente repetida, porque o método adquirido durante a pesquisa permitirá corrigir a falta inicial e constitui um verdadeiro progresso intelectual, ao passo que a verdade meramente reproduzida pode ser esquecida e a repetição é em si mesma desprovida de valor. De maneira geral, a aquisição dos métodos de trabalho é mais importante para o futuro do estudante do que a aquisição de muitos conhecimentos particulares. Foi por isso que nossos colaboradores insistiram, com razão, mais nesse aspecto do problema do que no perigo dos erros momentâneos dos alunos. (PIAGET, 1998b, p. 150)

O processo de construção do conhecimento é, portanto, dinâmico e só pode ocorrer mediante uma verdadeira atividade do sujeito que conhece, o que nos levará ao próximo pressuposto, sobre a ação. Quando aprender é confundido, na escola, com memorizar, conhecimentos são também confundidos com informações. Estas últimas são efêmeras, podem servir a um propósito imediato (que na escola se traduz em exames ou provas), mas acabam por ser esquecidas, perdidas. E essa perda, segundo Piaget (1998b) não ocorre por acaso, mas porque se constitui em algo recebido de fora e apenas gravado na memória, sem emergir de uma atividade real do sujeito, do seu esforço sistemático de assimilação. Nesse sentido, a solidez do conhecimento está relacionada à atividade que o sujeito empreende em sua construção.

Pressuposto 2: aprender exige ação por parte de quem aprende.

Esse pressuposto apóia-se na concepção piagetiana anteriormente mencionada sobre a natureza dos conhecimentos como derivados da ação e tem uma implicação muito importante para a educação escolar.

As ações valorizadas pelo construtivismo, conforme apontado por Macedo (1994), se qualificam como ações interiorizadas, ou seja, em operações do sujeito cognoscente. Conceber que não se aprende na passividade implica em colocar o pensamento dos alunos em ação. No contexto escolar essa ação é freqüentemente confundida com a manipulação de materiais, levando a uma concepção equivocada de escola ativa como uma escola que valoriza a manipulação, mais do que essa ação mental à qual Piaget (1970) se referia:

[...] acabou-se por compreender que uma escola ativa não é necessariamente uma escola de trabalhos manuais e que, em certos níveis a atividade da criança implica uma manipulação de objetos e mesmo um certo nível de tateios materiais, por exemplo, na medida em que as noções lógico-matemáticas elementares são tiradas não desses objetos, mas das ações dos sujeitos e de suas coordenações, noutros níveis a atividade mais autêntica de pesquisa pode manifestar-se no plano da reflexão, da abstração mais avançada e de manipulações verbais, posto que sejam espontâneas e não impostas com o risco de permanecerem parcialmente incompreendidas. (PIAGET, 1970, p. 68)

Para Piaget (1995) é necessário distinguir a abstração empírica, que se apóia sobre a experiência física com os objetos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, da abstração reflexionante que se apóia sobre a experiência lógico-matemática ou sobre as atividades cognitivas do sujeito. Nesse tipo de abstração há uma transferência para um plano superior, do que foi tirado de um nível inferior de atividade e assim ela será reflexionante em dois sentidos complementares, explicitados pelo autor na obra que dedicou ao estudo dessa noção:

Em primeiro lugar, ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar procedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos essa transferência ou essa projeção com o termo “reflexionamento” (*réfléchissement*). Em segundo lugar, ela deve, necessariamente, reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido no plano de partida A, ou por em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por “reflexão” (*réflexion*). (PIAGET, 1995, p.6).

Conforme apontado por Spinillo e Magina (2004) os professores das séries iniciais defendem a manipulação de materiais ditos concretos, como se a aprendizagem de matemática dependesse diretamente da possibilidade de tornar os conhecimentos concretos e fisicamente manipuláveis. Assim, a ação dos alunos em sala de aula acaba se reduzindo a uma experiência de caráter físico. Ao conhecimento lógico-matemático, aquele que se processa na mente de cada um, na esfera das abstrações reflexionantes, atribui-se um papel secundário.

Um exemplo pode ser verificado na utilização do Material Dourado para ensinar os algoritmos convencionais das operações aritméticas. Muitos professores, com o intuito de favorecer a ação dos alunos nas aulas de matemática e a compreensão dos processos envolvidos nessas operações, recorrem a esse material. O que acontece entretanto é que ele acaba servindo apenas para visualizar os procedimentos já ensinados anteriormente, como por exemplo aqueles verbalizados em expressões como “vai um” ou “empresta um”. Nesse sentido a ação do aluno acaba por ser mesmo um trabalho manual com vistas à constatação de um procedimento ensinado.

Muito além de uma ação guiada, por vezes proposta na escola por meio da manipulação de materiais diversos, é necessário que o aluno seja capaz de elaborar estratégias e procedimentos que lhe permitam antecipar uma ação ainda não realizada, pois isso é uma característica da atividade matemática. Não se trata de abolir o uso de materiais manipuláveis, mas de usá-los para desencadear uma verdadeira atividade por parte dos alunos.

Pressuposto 3: a aprendizagem está diretamente relacionada com a superação de um obstáculo, ou seja, só há aprendizagem quando o novo conhecimento é reconhecido pelo aluno como um meio de responder uma pergunta.

Daí a importância da resolução de problemas como um recurso de aprendizagem em matemática. De acordo com Gálvez (1996), os alunos só podem construir o sentido para as noções matemáticas quando as desvendam, inicialmente, como ferramentas para resolver problemas. É claro que esse pressuposto não se aplica apenas à aprendizagem de matemática, uma vez que a própria história do desenvolvimento humano é fortemente marcado pelo enfrentamento de situações problemas. A sobrevivência de nossa espécie é resultado da capacidade de superar os desafios apresentados pelo ambiente, num processo permanente de adaptação ou, em outras palavras: “viver sempre foi uma situação-problema” (MACEDO, 2002, p.113).

Conforme apontado pelo referido autor, desde o nascimento somos expostos permanentemente ao enfrentamento de situações novas, que exigem mobilização de recursos, alteração de hábitos e atualização de esquemas. Macedo (2002) lembra que um recém-nascido, sendo mamífero, possui o poder de ordenhar, no entanto esse reflexo relaciona-se a uma mama da espécie e precisa adaptar-se às suas condições particulares. O trecho do referido autor, transcrito a seguir, mostra que o bebê é exposto, nesse momento, à primeira de uma série de situações-problema que enfrentará ao longo da sua vida:

[...] como assimilar o leite, construindo sobre o reflexo de sucção, um esquema psicológico acomodado às características físicas e socioculturais daquela que alimenta a criança? Depois disso, e mal tendo aprendido a mamar, logo nascem os dentes, o leite diminui ou seca, criando um novo contexto ou recorte para o qual os processos anteriores de acomodação agora são insuficientes. [...] Assim também acontece em outros momentos de nossa vida: mal nos tornamos adultos e precisamos refletir, tomar decisões relacionadas ao nosso envelhecimento; mal envelhecemos e enfrentamos nossa morte. (MACEDO, 2002, p. 113 e 114)

Explorando essa questão no contexto escolar, Meirieu (1998), define situação-problema como “uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. Essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema se dá ao vencer o obstáculo na realização da tarefa.” (MEIRIEU, 1998, p.192). Dessa forma um problema se constitui numa situação, cuja solução não é conhecida a priori por aquele que a enfrenta. Villa e Calejo (2006)

destacam a finalidade educativa dos problemas matemáticos, usando o termo “problema” para:

... designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com uma conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (VILLA; CALEJO, 2006, p. 29).

Fica claro que as ações realizadas pelos alunos para resolver um problema não são do mesmo tipo daquelas necessárias à realização de exercícios, pois estes últimos servem para praticar, para treinar habilidades que já são de domínio do sujeito. Já o problema exige análise da situação, elaboração, escolhas, estabelecimento de relações, avaliação dos resultados obtidos em função dos objetivos almejados, ou seja, regulações.

Entretanto, o que se vê com frequência é uma redução da atividade de resolução de problemas a um treinamento por meio de exercícios de aplicação. As noções matemáticas são apresentadas por meio de definições, explicações e exemplos seguidos de exercícios de fixação que são praticados pelo aluno repetindo-se procedimentos e técnicas ensinadas pelo professor. Nesse sentido, aquilo que deveria ser aprendido como ferramenta, acaba por se constituir, de forma precoce, no próprio objeto de estudo.

A concepção que sustenta essa prática é a de que o sujeito aprende do simples para o complexo e que portanto um conhecimento pode ser decomposto em unidades mais simples e apresentadas em partes aos alunos, evitando assim dificuldades próprias de uma situação complexa. Essa concepção, entretanto, há muito vem sendo questionada por pesquisadores interessados em descobrir a gênese do conhecimento no ser humano. Na década de 80, os estudos realizados por Ferreiro e Teberosky (1999) mostraram que a criança não se apropria da língua escrita de maneira fragmentada como proposto nos métodos de alfabetização silábicos. A pesquisadora apontou a importância das interações da criança com o universo da língua escrita, mostrando as hipóteses que levantam sobre o seu significado, muito antes de receber qualquer tipo de intervenção escolar. Tais hipóteses só são formuladas mediante a interação com a língua em sua utilização social, portanto, não fragmentada.

Lerner e Sadovsky (1996), em extenso estudo sobre a compreensão do sistema de numeração decimal por crianças em idade pré-escolar, constataram que as crianças elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas e que a construção da notação

convencional não segue a ordem da sequência (numérica), ainda que ela desempenhe um papel importante nessa construção. Isso ocorre porque fora da escola as crianças convivem com os números e estes não se apresentam em partes e nem sempre são usados para quantificar. As autoras sugerem que o trabalho com números na Educação Infantil deve oferecer oportunidades às crianças de explorar sequências mais longas (até 100, por exemplo), para que possam observar regularidades presentes em nosso sistema de numeração e formular hipóteses sobre sua composição e sobre sua leitura e escrita.

Outro exemplo são os estudos realizados por Kamii e colaboradores (por exemplo Kamii e Housman, 2002; Kamii e Livingston, 1995) sobre procedimentos elaborados por crianças da Educação Infantil e séries iniciais, para solucionar problemas e para realizar cálculos sobre os quais nunca receberam nenhuma instrução formal. As estratégias de solução desenvolvidas e os procedimentos mobilizados revelam um raciocínio numérico e uma compreensão das relações envolvidas nos problemas que não segue a linearidade sob a qual se assentam grande parte dos métodos de ensino.

Vemos então que os problemas tem um papel essencial na aprendizagem por desencadear a ação, colocando o sujeito num movimento sistemático de assimilação. Uma vez que a resposta não encontra-se imediatamente acessível ao aluno, as estratégias que mobiliza inicialmente para obtê-la dificilmente o levarão a uma solução sem que sejam necessários, ajustes, regulações, ou seja, sem que sejam realizadas acomodações.

Pressuposto 4: uma aprendizagem resulta na aquisição de um conhecimento que pode ser utilizado em diferentes contextos.

Em outras palavras, podemos dizer que o conhecimento só é pleno para o sujeito se este for capaz de utilizá-lo em situações diferentes daquela na qual se originou.

Muitos professores já perceberam que mediante uma mudança na forma de se propor um problema ou uma questão matemática, os alunos ficam imobilizados, alegando não saber como resolvê-lo ainda que conheçam um algoritmo que poderia levá-los a uma solução. Conforme mencionado anteriormente, as noções matemáticas que deveriam ser desvendadas pelos alunos como ferramentas para solucionar problemas, são muitas vezes ensinadas de forma descontextualizada, com ênfase sobre técnicas e procedimentos. Decorre daí que muitos alunos conhecem algoritmos e fórmulas matemáticas, mas só conseguem reconhecer a

necessidade de sua utilização em situações muito próximas àsquelas usadas pelo professor para exemplificar sua utilização.

Sobre essa questão, Brousseau (1996) esclarece que enquanto na esfera científica a matemática apresenta explicações gerais, desvinculadas do contexto específico de produção de um dado conhecimento, na escola um conhecimento matemático deve ser construído por meio de situações que lhe dêem sentido, ou seja, ligados a contextos específicos. No entanto, é preciso que esse conhecimento se desvincule da situação que lhe deu origem para que se transforme em saber, aplicável a outras situações; dessa forma o saber que foi re-contextualizado precisa ser re-descontextualizado para tornar-se um conhecimento cultural reutilizável.

Nesse sentido, se os modelos matemáticos, as fórmulas e os algoritmos não devem ser colocados no plano inicial da aprendizagem, isso não significa que devam ser eliminados das aulas de matemática. É necessário compreender que o algoritmo convencional não constitui ponto de partida, mas de chegada, sendo o último passo de um processo de evolução de procedimentos.

Inicialmente os alunos devem elaborar seus próprios procedimentos, ou seja, empreender suas ações com finalidades específicas, ligadas a contextos específicos, sendo que a construção do conhecimento está fortemente ligada a uma matemática prática, cujas noções estudadas podem ser aplicadas em situações do cotidiano. Quando a criança se apropria de noções matemáticas em situações de uso, ela atribui sentido ao objeto de conhecimento, ou seja, nesse contexto prevalece uma matemática prática. Entretanto não podemos reduzir a matemática escolar ao seu valor utilitário, uma vez que a construção de significação de um conhecimento deve ser considerada em dois níveis, conforme mencionado por Charnay (1996): um externo, que se refere ao campo de utilização desse conhecimento e aos limites desse campo; e outro interno, relativo ao funcionamento de uma ferramenta, ou seja da compreensão sobre *como* e *porque* tal ferramenta funciona.

Segundo Pais (2006), restringir a matemática escolar ao plano da utilidade imediata se constitui numa visão tão equivocada quanto a de priorizar uma abordagem teórica e abstrata, uma vez que tal restrição não poderia de fato contribuir para a formação intelectual do aluno. O autor argumenta:

As operações envolvidas em uma aplicação utilitária do saber são realizadas sem a necessidade de justificar as fórmulas empregadas. Os valores utilitários

caracterizam-se por esse uso imediato. Quando os conteúdos são aplicados para resolver tais problemas, não é necessário justificar o raciocínio implícito. São valores que dizem respeito ao cotidiano, por isso sua importância é mais perceptível, diante dos resultados imediatos. Embora haja, no senso comum, uma tendência de realçar a importância prática da matemática, a função educativa da escola não deve se resumir a essa visão pragmática. (PAIS, 2006, p. 20).

Na teoria de Piaget (1978), essa questão pode ser tratada no âmbito dos dois sistemas cognitivos que orientam a ação: o *fazer* e o *compreender*. O primeiro estaria mais ligado a essa questão da matemática prática, utilitária, da mobilização de estratégias e aplicação de procedimentos com vistas à obtenção de um resultado. Esse sistema é o da execução e por isso está relacionado a um contexto específico. Já o segundo, relaciona-se ao *como* e ao *porque* do funcionamento das estratégias e dos procedimentos empregados, operando assim no plano da razão, do sentido. Macedo (1994) explica que esse sistema coordena o que é da ordem do geral, daquilo que se aplica não apenas a um contexto específico, mas a um conjunto de situações. O autor lembra ainda que os dois sistemas são solidários: “fazemos na medida em que compreendemos e compreendemos na medida em que fazemos” (MACEDO, 1994, p. 74).

Dessa forma, aprender matemática implica em fazer e em compreender e nesse processo deve-se evitar uma visão puramente pragmática, uma vez que a função formativa dessa disciplina, como destacado por Pais (2006), resulta de um entrelaçamento entre os seus valores utilitários, científicos e estéticos.

Pressuposto 5: embora aprender se constitua como uma atividade pessoal, ela se beneficia das interações sociais.

Esse pressuposto se apóia na concepção piagetiana de que o pensamento da criança se desenvolve no confronto com o pensamento dos outros, sejam outras crianças ou um adulto.

Numa análise sobre os métodos transmissivos de ensino Piaget (1998b) se refere ao pressuposto básico sobre o qual tais métodos se assentavam: a noção de que a estrutura mental de uma criança era idêntica à de um adulto, carecendo apenas de mais conteúdos e exercício. Nessa perspectiva, a relação social fundamental na escola se dava entre professor e aluno, sendo o primeiro encarregado de transmitir ao segundo os conhecimentos acumulados historicamente e treinar seu intelecto na perspectiva do adulto. A interação entre os próprios alunos não era necessária, pelo contrário, era vista como fator de distração e perda do foco no que era essencial.

O autor menciona três observações fundamentais que mostram a insuficiência de uma educação pautada na relação professor-aluno tal qual se configura num modelo de educação transmissivo, ou seja, de obediência e de submissão intelectual. A primeira refere-se à dificuldade sentida pelos professores de se fazer compreender pelos alunos, o que se explica pelo fato de que a criança, ao contrário do que se supunha, se constitui num ser ativo que procura compreender o mundo que a cerca. A segunda observação diz respeito ao pensamento pré-formal, que está pouco formado na criança e precisa ser desenvolvido, uma vez que ela não possui *a priori* a disciplina experimental e dedutiva. O verbalismo pode servir para repassar informações, mas não ajuda a desenvolver tal disciplina. A terceira observação é de que a razão necessita de um elemento social de cooperação: “[...] resta que a evolução da razão depende estreitamente dos fatores sociais e que as contribuições hereditárias ou adquiridas não bastam por si só para conduzir as inteligências individuais ao nível racional” (PIAGET, 1998b, p. 140).

De acordo com a concepção piagetiana, a educação escolar deve privilegiar interações sociais baseadas na cooperação e não na coerção. A cooperação seria a base do respeito mútuo, pois quando ele é unilateral, ou seja, somente do aluno para o professor, este último exerce uma coerção intelectual sobre o primeiro. Nesse sentido o aluno aceita como verdade tudo que é dito pelo professor. Segundo Piaget (1998a) a cooperação entre os indivíduos leva a uma crítica mútua e a uma objetividade progressiva, ambos fundamentais para o desenvolvimento intelectual:

Pensar em função dos outros é, portanto, substituir o egocentrismo do ponto de vista próprio e os absolutos ilusórios da coerção verbal por um método de estabelecimento de relações verdadeiras, que garante não apenas a compreensão recíproca, mas também a constituição da própria razão. A esse respeito, o produto essencial da cooperação não é outro senão a «lógica das relações», esse instrumento de ligação que permite à criança libertar-se simultaneamente das ilusões de perspectiva mantidas pelo egocentrismo e das noções verbais devidas à autoridade adulta mal-compreendida. (PIAGET, 1998a, p. 119)

Nas aulas de matemática, as interações sociais baseadas na cooperação podem ocorrer quando os alunos trabalham juntos na solução de um problema, quando comparam seus procedimentos de solução, quando discutem sobre diferentes estratégias de solução. Da mesma forma, elas ocorrem entre professor e aluno quando o primeiro não procura impor verdades aos seus alunos, mas valoriza o diálogo, a problematização. Quando um professor simplesmente responde às perguntas, quando julga as atividades feitas por seus alunos em

termos de certo ou errado, pouco contribui para o seu desenvolvimento intelectual, pois para aprender é necessário confrontar suas idéias com as de outros, trocar pontos de vista, se descentrar do seu próprio pensamento.

Quando um aluno explica para os colegas ou para o professor como pensou para resolver um problema, ele tematiza seus conhecimentos e tem oportunidade de pensar sobre sua própria forma de aprender, ele precisa objetivar aquilo que é pessoal, portanto subjetivo. Em outras palavras, ele passa a operar não mais no plano da ação, mas da reflexão. Nesse sentido e conforme o exposto, vemos que as interações sociais não apenas favorecem a aprendizagem, mas se constituem em condição necessária para sua ocorrência.

Pressuposto 6: aprendizagem é um processo que se realiza a longo prazo.

Aprendemos por aproximações sucessivas, confrontando-nos com um objeto de conhecimento em diferentes contextos, fazendo novas leituras dos mesmos objetos. Como a aprendizagem depende da ação do sujeito cognoscente, ela não ocorre em função de lições específicas ou seguindo as etapas pré-determinadas, de acordo com a linearidade de alguns métodos de ensino influenciados por uma visão cartesiana do conhecimento.

Podemos afirmar que, de certa forma, esse pressuposto sintetiza o que foi explicitado nos demais e isso pode ser justificado no excerto a seguir, retirado de um texto no qual Meirieu (1998) defende que para aprender não é possível passar da ignorância ao saber sem superar obstáculos e que a aprendizagem dos conteúdos escolares depende, em grande parte, da compreensão dos professores acerca da precariedade dos conhecimentos construídos na escola:

O professor quase não leva em conta que cada sucesso obtido, deverá um dia, ser ultrapassado, re trabalhado, reorganizado. Acredita poder instalar de uma só vez o sujeito em aquisições rigorosas e definitivas: mas não é nada disso, e é preciso que ele aceite que o que pode ser absolutamente necessário para o progresso de um aluno é, muitas vezes, de uma extrema precariedade. Confundem-se, com muita frequência, o necessário e o definitivo, o inútil e o precário: ora, talvez seja útil ensinar aos alunos do curso elementar (segundo e terceiro anos do ensino primário na França) que o sujeito faz a ação na frase, mas essa representação cria obstáculo para a compreensão da voz passiva, será necessário então derrubá-la e substituí-la por uma outra mais adaptada... *E esse progresso evidentemente nunca termina, constitui a própria trama do progresso intelectual.* (MEIRIEU, 1998, p. 59, grifo nosso)

A aprendizagem se realiza a longo prazo porque não se constitui num processo de acumulação, porque a cada obstáculo superado, novos desafios se colocam, porque o sujeito

que interage com um objeto de conhecimento hoje, já não é o mesmo que o fez ontem e da mesma forma não o será amanhã. A aprendizagem nos transforma, nos modifica, nos dota de novas ferramentas para continuar aprendendo.

Assim, aprender também é recomeçar, voltar atrás, repetir. Essa repetição não é aquela destituída de significado, mas uma repetição com compreensão do que se faz e do porque se faz, que visa o aperfeiçoamento de certas habilidades e até mesmo a automatização de um certo repertório de respostas. A memorização é importante quando libera a memória imediata e permite ao aluno estabelecer novas relações. Os resultados presentes na tábua da multiplicação, por exemplo, quando memorizados ajudam na realização de estimativas, na resolução de problemas e na realização de cálculos envolvendo números de magnitude mais alta. Para isso, entretanto, a memorização não pode ser visada como objetivo primeiro, mas adquirida pelo uso freqüente, pela necessidade de focar a atenção em aspectos mais complexos da atividade. A repetição, quando tem sentido para o sujeito, é importante e geralmente procede de uma relação afetiva com o objeto em questão. O termo usado na língua inglesa para aquilo que se conhece de cor - *by heart* - traduz exatamente esta relação, que se manifesta, por exemplo, quando decoramos uma poesia ou determinada letra de música, como se fosse um procedimento mais do coração do que da mente. Nesse sentido é como se repetíssemos para conhecer não apenas intelectualmente, mas também *por meio do coração*.

3. 1. 3 As concepções de ensino que assumimos

A partir dos pressupostos sobre a aprendizagem anteriormente expostos, formulamos alguns princípios de ensino, os quais orientaram a intervenção pedagógica realizada nessa pesquisa. Assim como os pressupostos anteriormente apresentados, tais princípios são complementares entre si e a organização linear usada nesse texto não implica em qualquer diferença de *status* entre eles.

Princípio 1: ensinar não é o mesmo que preencher a mente dos alunos com verdades científicas, pois não se trata de uma doutrinação.

Partindo do pressuposto que aprender não é o mesmo que repetir, é necessário que o professor se desvencilhe de qualquer influência de uma visão empirista de conhecimento e compreenda que o aluno traz consigo uma gama de conhecimentos construídos em sua interação com o meio, os quais, ainda que instáveis, provisórios e mesmo incorretos do ponto

de vista da lógica do adulto, se constituem no ponto de partida para a construção do saber matemático.

Para ensinar deve-se levar em conta que os conhecimentos não se amontoam, não são acumulados numa espécie de pirâmide na qual a base seria constituída por elementos mais simples, num encadeamento progressivo aos mais complexos. Dessa forma, ensinar não é uma atividade que se caracteriza pela apresentação do conhecimento por partes bem definidas, nessa seqüência de complexidade crescente, uma vez que aquilo que é considerado simples no contexto de uma análise do próprio saber, pode ser considerado complexo em outro contexto, como por exemplo, aquele da aprendizagem do aluno. Para exemplificar recorreremos mais uma vez à questão do ensino dos algoritmos convencionais na escola: segundo a lógica do saber em questão, operar com os números em colunas, começando pelas ordens menos elevadas (da direita para a esquerda) é uma simplificação do cálculo, uma vez que não precisamos operar com os números como um todo, mas em partes. Do ponto de vista de uma criança em processo de aprendizagem, isso representa uma complexidade maior, visto que se trata de um procedimento da ordem do geral, de um saber descontextualizado e portanto, exige um nível de abstração que é, muitas vezes, ainda inacessível à criança.

Quando os algoritmos são ensinados precocemente as crianças passam a executá-los sem compreender os procedimentos envolvidos e por isso não são capazes de julgar a sua validade. Podem obter resultados corretos, mas não sabem justificá-los. Nessa perspectiva o ensino se aproxima de uma doutrinação, como pode ser inferido da citação a seguir:

Ensinando regras prontas e usando prêmios e punições, embora de forma amena, as escolas, sem se darem conta, estão ensinando o conformismo, a obediência cega e a dependência dos adultos. Por volta da 4ª série, se perguntarmos às crianças quais os passos que elas seguiram numa divisão pelo processo longo, todas elas dirão: “Eu não sei por quê (eu obtive este número), mas o professor me disse para fazer assim.” (KAMII; LIVINGSTON, 1995 p. 98).

Quando não se pretende *doutrinar* é necessário fazer emergir os conhecimentos dos alunos, suas hipóteses, suas representações, sua maneira própria de conceber um objeto do conhecimento. Assim, ensinar consiste em oferecer oportunidades ao aluno de estabelecer relações entre o que já sabe e o novo, de modificar seus conhecimentos, reelaborando-os num processo contínuo, consiste ainda em propor situações que possibilitem uma evolução desses procedimentos, de suas representações, de seus modelos explicativos. Uma vez que a

aprendizagem exige ação por parte de quem aprende, então o professor pode ajudar o aluno, mas jamais pode *aprender por ele*.

Princípio 2: um bom ensino é aquele que coloca o pensamento do aluno em ação.

Para colocar o pensamento dos alunos em ação é necessário que o enfoque do ensino incida sobre as suas descobertas, e não sobre a fala do professor. Com o objetivo de caracterizar a função educacional do construtivismo, Macedo (1994) contrapõe a visão construtivista a uma visão não-construtivista do conhecimento, destacando que enquanto a primeira valoriza as ações, na qualidade de operações do sujeito cognoscente, visões não-construtivistas valorizam a transmissão e por isso têm na linguagem o seu instrumento por excelência.

A linguagem é, sem dúvida, um instrumento essencial para a prática docente. É por meio dela que se estabelece a relação professor-aluno-saber, cuja própria configuração é fortemente influenciada pelo lugar que a linguagem ocupa nesta relação: quando a escola é vista como espaço de transmissão de conhecimentos, a linguagem tem o papel mais importante. A palavra transmissão é usada aqui em seu sentido de passar de um lugar a outro, de um possuidor a outro (que não possui). Nesta perspectiva, há um saber considerado socialmente relevante que precisa ser transmitido pela escola. O professor, que possui este saber, serve-se da linguagem para apresentá-lo aos seus alunos, que supostamente não o possuem e nem dispõem de outros meios para alcançá-lo.

Entretanto, a escola pode ser vista de outra forma, para além de um espaço de transmissão, como espaço de construção do conhecimento, assumindo então uma perspectiva na qual o papel mais importante é o das ações dos sujeitos, as quais, “organizadas enquanto esquemas de assimilação, possibilitam classificar, estabelecer relações, na ausência das quais aquilo que, por exemplo, se fala ou escreve perde seu sentido” (MACEDO, 1994, p.15).

Dessa forma, ao contrário do que dita o senso comum, ensinar não é explicar a matéria e o bom professor não é aquele que tira todas as dúvidas dos alunos. Ensinar consiste em criar condições para que os próprios alunos formulem as explicações e as coloquem em prova, mas consiste também, e principalmente, em criar condições para que aprendam a fazer perguntas, para que desenvolvam um olhar inquisitivo para o mundo.

Quando os alunos aprendem a se fazer perguntas a ação atinge sua plenitude no sentido que ela só se concretiza como algo espontâneo, oposto à coerção. Agir significa tomar

iniciativa e imprimir movimento a alguma coisa, e nesse sentido, a aprendizagem se constitui nas respostas às perguntas que o próprio aluno se faz. Fica claro então que não se trata de uma ação física ou direcionada pelo professor, mas de uma ação mental, impulsionada pelo desejo da descoberta. Não existe ação mental quando os alunos recebem informações prontas para aplicar em exercícios escolares. Já dizia Freinet (1973) que um professor que não domina técnicas ou não dispõe de materiais pode, ainda assim, obter resultados satisfatórios em sala de aula se souber coordenar, organizar os interesses das crianças, incentivar a descoberta e aguçar a curiosidade, e foi o que ele fez como professor.

Assim, conforme apontado por Machado (2004), uma ação essencial do professor se constitui em *mapear relevâncias*, indicando caminhos e percursos a serem seguidos na ampliação das redes de significação dos alunos. Uma vez que seus interesses vão seguir diferentes sentidos e muitas descobertas poderão ser feitas, é necessário pontuar o que é mais relevante.

Princípio 3: ensinar implica em problematizar, em apresentar desafios genuínos aos alunos.

O professor pode desencadear a construção de conhecimento pelos alunos quando propõe bons problemas, pois estes colocam o pensamento dos alunos em ação. Com base em Charnay (1996), apresentamos os elementos que caracterizam um bom problema: primeiro a atividade deve ser reconhecida pelo aluno como um problema. Além disso é necessário que o problema seja compreendido por ele, que o aluno seja capaz de antecipar a existência de uma resposta possível. A atividade deve ainda, se constituir de tal forma que lhe permita usar seus conhecimentos anteriores para encontrar a solução, mas deve oferecer resistência suficiente para que estes sejam questionados e reelaborados visando responder à situação. Finalmente, é preferível que a validação venha da própria situação e não do professor.

Assim, fica claro que um problema, para ser fonte de uma nova aprendizagem, deve apresentar alguma dificuldade para o aluno, de forma que se constitua em um desafio intelectual. Entretanto, é necessário dosar o grau de dificuldade para que o aluno não desanime diante do problema, ou seja, ele deve poder conectar seus conhecimentos com a questão apresentada, aproximando-se da solução. Em outras palavras, os problemas devem apresentar questões que possam ser assimiladas pelos esquemas de conhecimento do sujeito e gerar uma modificação nesses esquemas.

Para Freitas (1999) a resolução de problemas deve se constituir no eixo condutor de toda atividade educacional na área de matemática, uma vez que “da mesma forma que é possível identificar um problema na gênese do desenvolvimento histórico das principais idéias matemáticas, o mesmo pode ocorrer no contexto educacional.” (FREITAS, 1999, p. 72).

O ensino de matemática deve objetivar a aquisição, pelo aluno, do hábito de propor problemas a si mesmo e de resolvê-los como forma de aprender, e é nesse sentido que os problemas colocam o pensamento dos alunos em ação, conforme foi mencionado anteriormente e reforçado aqui através de um excerto retirado de uma obra de Encheverría e Pozo (1998), na qual os autores defendem que o professor deve ensinar guiando a atividade criadora e descobridora do aluno:

Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado. (ENCHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 14-15).

Princípio 4: para ensinar é necessário organizar um conjunto de situações que permitam ao aluno reutilizar, várias vezes, em diferentes contextos, os mesmos conhecimentos.

Esse princípio decorre da necessidade de re-descontextualização do saber, mencionada anteriormente. Conforme referência já feita à Brousseau (1996), no processo de construção do conhecimento pela criança, o mesmo deve estar vinculado a uma situação que lhe dê significado, mas é igualmente importante que, numa etapa posterior, tal conhecimento possa ser generalizado, que possa ser desvinculado da situação na qual foi gerado para se aplicar a novas situações. Nesse sentido é que o referido autor se refere à uma tensão na qual se situa a ação do professor:

Podem ser vistas aqui as duas partes, bastante contraditórias do papel do professor: fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido por parte dos alunos como resposta razoável a uma situação familiar e, ainda, transformar essa ‘resposta razoável’ em um ‘fato cognitivo extraordinário’, identificado, reconhecido a partir do exterior. Para o professor, é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder. (BROUSSEAU, 1996, p. 48-49).

Para esse processo de re-descontextualização, o aluno deve se tornar consciente dos mecanismos usados para obtenção de uma resposta, tanto daqueles que o conduziram a uma resposta correta, ou seja ao sucesso, quanto daqueles que resultaram em fracasso. Usar um mesmo conhecimento em diferentes contextos pode ajudar o aluno a perceber invariantes, aquilo que permanece enquanto forma quando se modifica um conteúdo. O ensino deve visar a superação da relação de oposição entre repetição e conscientização, tratando-os numa perspectiva de complementaridade, conforme a concepção piagetiana acerca do *fazer* e do *compreender* já mencionada anteriormente (PIAGET, 1978).

Nesse sentido é que o professor pode encontrar no jogo um recurso de grande auxílio à realização de sua tarefa de ensinar matemática, uma vez que, conforme apontado por Macedo, Petty e Passos (2005) ele conjuga permanentemente novidade e repetição. Ao mesmo tempo em que apresenta desafios novos (pois cada partida é uma novidade, põe novos problemas) ele é pura repetição, no sentido de que os materiais e as regras são as mesmas.

O jogo é, por natureza, uma atividade autotélica, ou seja, que não apresenta qualquer finalidade ou objetivo fora ou para além de si mesmo. Nesse sentido, é puramente lúdico, assim os alunos precisam ter a oportunidade de jogar pelo simples prazer de jogar, ou seja, como um momento de diversão e não de estudo, e nesse sentido sua utilização na escola como ferramenta de ensino, pode parecer contraditória. Entretanto as crianças podem se divertir jogando, envolvidos naquilo que Brousseau (2008) denomina como uma *situação a-didática*, enquanto o professor trabalha observando como seus alunos jogam. Essa é uma excelente oportunidade para observar, por exemplo, como organizam suas ações e se são capazes de avaliar os seus resultados, quais conhecimentos mobilizam e a que tipo de estratégias recorrem, se planejam suas ações e se fazem antecipações.

O jogo, quando explorado no contexto escolar, não deve ser escolhido ao acaso, mas fazer parte de um projeto de ensino do professor, que possui uma intencionalidade com essa atividade. Também é importante que o professor elabore problemas a partir de situações vivenciadas pelos alunos durante o jogo para que tenham oportunidade de refletir sobre as ações empreendidas e sobre os conhecimentos mobilizados. O professor oferece, dessa forma, oportunidade aos alunos de trabalhar no plano da reflexão sobre uma situação na qual trabalharam no plano da ação.

Princípio 5: ensinar é promover o confronto de idéias, a discussão, a necessidade de objetivação do pensamento.

Quando o ensino é pautado em uma visão transmissiva do conhecimento, o professor ensina determinados procedimentos e os alunos os reproduzem, sendo que a validação dos resultados é feita pelo professor. É comum nas aulas de matemática, que a correção de exercícios de cálculo e problemas de aplicação sejam feitas no quadro, no qual os alunos devem reproduzir a solução registrada no caderno. O professor avalia uma solução apresentada em termos de certo ou errado. Se for considerada correta, os demais alunos, ao compará-la com a que registraram em seus próprios cadernos, agem da seguinte forma: não estando igual àquela validada pelo professor, apagam-na e copiam a do colega, geralmente sem saber porque a sua solução estava incorreta e muito menos porque a outra estava correta. O mais importante é o resultado. Uma vez que os meios para atingi-los já foram ensinados, o aluno é avaliado pela capacidade de reproduzi-los corretamente.

Quando o ensino se pauta numa visão construtivista de conhecimento, o trabalho com problemas matemáticos não é precedido da apresentação dos seus possíveis processos de solução. Os alunos elaboram seus próprios procedimentos e nesse sentido, quando o professor propõe um problema, não espera que todos o resolvam da mesma forma. Ao contrário, ele valoriza os diferentes meios de solução por saber que representam a forma como os alunos compreenderam as relações matemáticas envolvidas no problema. Assim, após resolverem um problema os alunos devem comparar os diferentes processos mobilizados para a sua solução.

Isso pode ser feito por meio de discussões coletivas orientadas pelo professor. Nessas discussões os alunos devem apresentar suas soluções, argumentando sobre sua validade. O professor também pode pedir que expliquem os motivos pelos quais um determinado procedimento (empregado por um colega) levou ao sucesso ou a fracasso na resolução de um problema. Além disso, comparando diferentes procedimentos os alunos podem observar aqueles que são mais eficazes, mais econômicos. Explicar seus próprios procedimentos faz com que o aluno reconstrua os processos mobilizados na solução, que faça uma objetivação do próprio pensamento, que pense na perspectiva do outro, daquele que o ouve. Explicar o procedimento usado por outrem exige descentrar-se do seu próprio pensamento para assumir a perspectiva do outro. Busca-se dessa forma, superar a coerção do adulto por meio de uma relação de cooperação, e esta relação segundo Piaget (1998b):

[...] não age apenas sobre a tomada de consciência do indivíduo e sobre seu senso de objetividade, mas culmina na constituição de toda uma estrutura normativa que sem dúvida coroa o funcionamento da inteligência individual, completando-a, contudo, no sentido da reciprocidade, única norma fundamental que conduz ao pensamento racional. Pode-se portanto dizer, a nosso ver, que a cooperação é efetivamente criadora, ou, o que dá na mesma, que ela constitui a condição indispensável para a constituição plena da razão. (PIAGET, 1998b, p. 144).

Nesse sentido também é importante promover atividades em grupo, propor problemas para serem resolvidos conjuntamente. Nessas situações a discussão não é feita *a posteriori* mas durante o próprio processo de solução, sendo necessário coordenar diferentes pontos de vista para atingir um objetivo comum.

Princípio 6: ensinar é despertar no aluno uma intenção de compreender o mundo por meio das ferramentas oferecidas pelas disciplinas escolares.

Todo ensino pretende promover uma mudança de um estado para outro, uma vez que a aprendizagem consiste num processo de transformação, de modificação do sujeito. Tal processo, como já mencionado, ocorre somente mediante a ação empreendida pelo sujeito que aprende e essa ação pode ser desencadeada pelo professor, mas não induzida. Todo o processo de aprendizagem é, então, orientado e, ao mesmo tempo, sustentado por um objetivo a ser alcançado. É nesse sentido que Meirieu (1998) aponta para a possibilidade de uma transmissão somente na medida em que um projeto de ensino encontra um projeto de aprendizagem:

É por isso que o ofício do professor requer essa dupla e incansável prospecção, por um lado, no que diz respeito aos sujeitos, às suas aquisições, suas capacidades, seus recursos, seus interesses, seus desejos, e, por outro lado, no que diz respeito aos saberes que devem ser incessantemente percorridos, inventariados para neles descobrir novas abordagens, novas riquezas, novas maneiras de apresentação. (MEIRIEU, 1998, p. 40).

A aprendizagem, de acordo com a perspectiva assumida aqui, não é algo que se possa *fazer pelo outro*, não se trata de receber conhecimentos ou de se passar de um estado ao outro como num passe de mágica. Ela demanda esforço pessoal em direção aos objetivos almejados e nesse sentido ela é orientada por uma intencionalidade de quem aprende. Somente essa intenção pode sustentar o trabalho empreendido no processo de aprender. Por isso o ensino deve promover o desenvolvimento de uma intenção, por parte do aluno, de compreender o mundo agindo sobre ele, modificando-o ao mesmo tempo em que se modifica a si próprio. Deve desenvolver a intenção de encontrar respostas por meio das ferramentas oferecidas pelas

disciplinas escolares e experimentar o prazer da descoberta como fruto do trabalho e do esforço pessoal. Sobre esta questão da *intenção* nos deteremos mais especificamente no próximo capítulo

3. 2 A relação professor-aluno-saber matemático

No capítulo anterior, ao abordar a questão do ensino e da aprendizagem escolar, delineamos alguns elementos que caracterizam o papel do aluno e o papel do professor na relação que se estabelece entre ambos na escola. No presente capítulo o foco incide sobre essa relação, na perspectiva de uma tríade com o saber matemático. Começamos por especificar a própria noção de saber, confrontando-a com as noções de informação e conhecimento e em seguida abordamos a questão da estruturação de situações de ensino, na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986, 1996, 2008). Por fim, discorreremos sobre a noção de *intenção*, conforme apresentada por Rey (2002), focando a questão do desenvolvimento de *intenções cognitivas* na escola.

3. 2. 1 Informação, conhecimento e saber

Conforme comentário já feito anteriormente, muitas vezes os professores trabalham com o saber matemático apenas em seu caráter universal, sem dar oportunidade ao aluno de relacioná-lo com aquilo que já sabem, de atribuir sentido ao que é ensinado. Para o aluno, o produto do ensino acaba por se constituir num rol de informações fragmentadas, as quais, sem terem sido transformadas por ele em conhecimentos, são armazenadas durante um tempo e depois esquecidas.

Existem diferenças importantes entre informação, conhecimento e saber, as quais nem sempre são levadas em conta na escola. Num texto em que analisa o ensino de matemática e as propostas pedagógicas, Micotti (1999), aborda essas diferenças, salientando que, enquanto as informações são dados que se encontram no mundo objetivo, exterior ao indivíduo, o conhecimento é o resultado de uma experiência pessoal com as informações. Assim o conhecimento é subjetivo, exige interpretação pessoal e, portanto, não é passível de transmissão direta como a informação. Já o saber, tem aspectos subjetivos (individuais) e sociais:

O saber compreende informações e conhecimento; nele prepondera o aspecto social. Não basta alguém interpretar as coisas a seu modo para que sua interpretação seja reconhecida como válida, para isso é preciso que outros abonem esse conhecimento

ou essa interpretação - a comunidade científica, a sociedade. (MICOTTI, 1999, p. 155).

É necessário então que o ensino integre informação, conhecimento e saber. Não é admissível que os alunos simplesmente reproduzam informações e saberes ensinados pelo professor, tampouco, que a sua atividade intelectual fique apenas na esfera da compreensão particular e pessoal, pois para isso não precisariam ir à escola. O aluno deve construir seu conhecimento e, mediante a boa intervenção do professor, esse conhecimento deve ser transformado em saber socializado.

Machado (2004) aborda esta questão numa perspectiva mais ampla, de projetos e de valores, destacando a importância da *mobilização do conhecimento* pelas pessoas. Para o referido autor, na sociedade atual, denominada ora como sociedade do conhecimento, ora como da informação, o foco da discussão educacional não deveria incidir sobre o conhecimento em si, mas sobre a possibilidade de ser usado na realização dos projetos pessoais de cada um. Nesse sentido o autor aponta para a necessária diferenciação entre algumas palavras, cujo significado tem sido por vezes confundido no contexto escolar: *dados, informações, conhecimentos e inteligência*.

Visando abstrair de tais palavras o seu uso mais adequado, o autor apresenta-as como elementos constituintes de uma grande pirâmide, cuja base é composta pelos *dados*, por meio dos quais são obtidas as informações. Nos níveis intermediários estariam situados, então, *informações e conhecimentos*. Estes últimos, embora procedam das informações, situam-se num nível acima, pois resultam de uma articulação, de um trabalho intelectual das pessoas, as quais, com sua *inteligência*, estão no topo da pirâmide. Dessa forma é que o ensino só se justifica, segundo o autor, na medida em que o conhecimento esteja a serviço das pessoas:

Por mais relevante que seja a distinção entre o conhecimento e a mera informação ou o dado bruto, o conhecimento não pode ser considerado um *fim em si mesmo*. Acima do nível do conhecimento, situam-se as pessoas, com sua inteligência, com seus interesses, seus desejos, seus projetos. [...] Existe, portanto, entre o conhecimento e a inteligência uma relação similar à existente entre os dados e as informações: assim como um banco de dados sem qualquer pessoa nele interessada pode ser considerado entulho, de todo conhecimento do mundo pode dizer-se, analogamente, que, se não estiver em condições de ser mobilizado para a realização dos projetos das pessoas, será mera matéria morta. *Ao fim e ao cabo, o que conta são as pessoas e seus projetos*. (MACHADO, 2004, p. 79-80, grifo nosso).

Entretanto, o que vemos ainda com frequência nas escolas é a valorização excessiva de um saber que, pela própria forma como é explorado, não se coloca a serviço das pessoas. Trabalhando com a formação de professores, é possível perceber, com certa frequência, a

manifestação de uma preocupação maior com o conteúdo do que com os próprios alunos. Talvez esse seja o reflexo, na escola, de uma sociedade na qual se valoriza mais o ter do que o ser, mais a posse do que o processo de obtenção e que acabou levando para o contexto escolar uma demasiada pressa em terminar, uma urgência que é incompatível com o processo da aprendizagem. A manifesta preocupação dos professores em *vencer o conteúdo*, os remete para o contexto de uma luta. É como se os professores precisassem subir em um ringue todos os dias para lutar contra os conteúdos. Contudo, ainda que o resultado de tal luta seja favorável ao professor, em geral não é possível saborear o gosto da vitória porque, junto com os conteúdos, os alunos acabam também sendo *nocauteados*.

É imprescindível, portanto, que na relação professor-aluno-saber matemático estes últimos não sejam reduzidos a um rol de conteúdos que devem ser transmitidos aos alunos a qualquer preço, mas que se constituam, de fato, em instrumentos para o desenvolvimento cognitivo, social e afetivo, ou seja, para a realização de seus projetos pessoais, conforme a perspectiva defendida por Machado (2004).

3. 2. 2 Contribuições da Teoria das Situações Didáticas

Na análise que faz sobre as interações sociais que ocorrem em sala de aula entre alunos, professores e saber matemático, Brousseau (2008) voltou sua atenção para a *situação didática*, definida como o “entorno do aluno, que inclui tudo o que especificamente colabora no comportamento matemático de sua formação” (BROUSSEAU, 2008, p. 53). O autor destaca que uma interação torna-se didática somente se um dos sujeitos manifesta a intenção de modificar o sistema de conhecimento do outro, ou seja, é a intencionalidade que a caracteriza como uma situação de ensino. Ele faz uma crítica ao *esquema triangular* (figura 1) por meio do qual a situação de ensino é comumente representada, uma vez que nesta perspectiva são consideradas apenas as relações entre aluno e professor, excluindo-se as relações do sujeito com um meio que ele denomina de *adidático*.

Figura 1 - Modelo usado tradicionalmente para representar uma situação de ensino (BROUSSEAU, 2008, p. 54)

Assim, Brousseau (2008) sugere que o tradicional esquema seja ampliado de forma a considerar, além das situações com fins didáticos propostas pelo professor, um outro meio, que decorre do primeiro, mas no qual o aluno atua de forma autônoma (figura 2).

Figura 2 - Modelo proposto por Brousseau para representar uma situação de ensino (BROUSSEAU, 2008, p. 54)

Brousseau (1996) defende a importância do meio *adidático*, lembrando que se aprendizagem consiste na realização de acomodações, isto é, de modificações no sistema de conhecimentos do sujeito, é necessário levar em conta que há uma grande diferença entre adaptar-se a um problema formulado pelo meio e adaptar-se ao desejo do professor. Nesse sentido, embora seja o professor quem irá apresentar a situação, o aluno deve elaborar seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e os fazer funcionar ou os modificar não em função das exigências do professor, mas como resposta às exigências do meio.

Assim, na situação *adidática*, o aluno reage frente a um problema sem a intervenção direta do professor, sendo que a resolução de um problema deve ser uma responsabilidade do aluno. Este deve procurar obter um resultado, aceitando sua responsabilidade na resolução da situação. Este processo é denominado por Brousseau (1996) de *devolução*, no qual o aluno aceita sua responsabilidade em uma situação de aprendizagem ou de um problema e, o professor aceita as consequências dessa devolução.

Para o autor, a aprendizagem é uma modificação do conhecimento que o aluno deve *produzir por si mesmo* e deve ser *provocada pelo professor*. Assim, para que a aprendizagem

possa ser tratada na escola sob esta ótica, é necessário que o professor busque uma situação apropriada. Ela será uma situação de aprendizagem quando a resposta inicial do aluno para a questão apresentada não for aquela que se pretende ensinar. Esta resposta inicial deve, juntamente com os conhecimentos anteriores, servir como estratégia de base para a busca da solução. Ao mostrar-se ineficiente para a solução, deve obrigar o aluno a realizar modificações em seu sistema de conhecimentos.

Brousseau (1998) propõe uma classificação das interações que o sujeito faz com o meio, que determinam as diferentes relações com o saber a ser ensinado e são expressas nas seguintes fases da situação didática: dialética da ação, dialética da formulação, dialética da validação, dialética da institucionalização.

Na dialética da ação, o sujeito age sobre a situação e esta lhe oferece informações sobre sua ação. Como a situação retroage às ações do aluno, este deve ajustar suas ações pela observação dos seus resultados, sem a intervenção de outro sujeito. O aluno reconhece que as suas decisões e as estratégias escolhidas determinam o resultado e estas estratégias podem ser modificadas.

Na dialética da formulação, existe a troca de informação entre diferentes sujeitos. Em uma sala de aula, é o momento da socialização das estratégias usadas na resolução dos problemas. Os alunos comunicam aos colegas as ferramentas usadas para encontrar a resposta de um problema e observam as ferramentas usadas pelos colegas.

Na dialética da validação, as estratégias ou ferramentas comunicadas na etapa anterior são colocadas em discussão. Neste momento questiona-se a eficiência das ferramentas e devem ser propostos argumentos em defesa delas para que possam ser validadas.

Finalmente, na dialética da institucionalização, um procedimento é reconhecido convertendo-se em um recurso de referência (Brousseau, 1996). Uma vez institucionalizado, o conhecimento poderá ser reutilizado na resolução de problemas. Nesta etapa, o professor tem papel fundamental, uma vez que é ele quem fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber (CANÔAS, 1997).

Brousseau (1996) chama atenção para o fato de que, na educação tradicional, o ensino se reduz à institucionalização dos conhecimentos, sem a preocupação do professor em criar uma situação de sentido para o conhecimento. O professor transmite saberes que deseja que o aluno aprenda. Este o recebe passivamente e depois se verifica o que ele aprendeu. O que falta ao ensino tradicional é justamente as dialéticas da ação e da formulação.

Em consequência, na resolução de problemas, os alunos não se envolvem na busca de soluções que lhes sejam significativas. Nesse caso, de acordo com Silva (1999), o objetivo dos alunos passa a ser encontrar a resposta certa que já é conhecida pelo professor ao propor as questões aos seus alunos. Resolver problemas trata-se então de encontrar a “conta” que é esperada pelo professor, o qual, por sua vez, contribui com dicas, ou pistas, através do uso de palavras-chave ou na própria estruturação dos textos que enunciam os problemas.

Essa questão é explorada por Brousseau (2008), através da noção de *contrato didático*, que se trata do conjunto de comportamentos do professor, que são esperados pelos alunos e vice-versa. Tais expectativas, de ambas as partes, acabam por regular a relação professor-aluno-saber, definindo os papéis de cada um.

3. 2. 3 O desenvolvimento de intenções cognitivas na escola

No início desse capítulo, referimo-nos à uma visão equivocada, por vezes assumida na escola, ao tratar os conteúdos como fins em si mesmos. Muitos são os professores que já se sentiram desarmados diante de um questionamento por parte de seus alunos acerca das razões pelas quais precisam estudar um determinado conteúdo matemático. As respostas, que em geral se apóiam na preparação para as etapas subsequentes do currículo não costumam satisfazer os alunos, os quais acabam sucumbindo ao ensino escolar, ainda que não vejam sentido naquilo que lhes é ensinado.

Dessa forma o aluno adapta-se aos desejos do professor, e passa a operar não segundo uma lógica do saber, como um sujeito que deseja compreender, mas segundo a lógica do contrato didático anteriormente mencionado. Voltamos então à questão da mobilização do conhecimento pelas pessoas. Os professores por vezes se preocupam com o fato de seus alunos não dominarem este ou aquele conteúdo de determinada disciplina, sem focar naquilo que, segundo apontado por Machado (2004), pode constituir um verdadeiro problema: a falta de vontade de saber. E nesse caso, afirma o referido autor, todo esforço de ensino será em vão.

Um aluno pode até mesmo ser capaz de mobilizar determinado conhecimento, ou seja, possuir determinada capacidade, mas não ter a intenção de usá-la. Segundo Rey (2002), o termo intenção expressa a idéia de um *exercício cognitivo do querer*. O autor exemplifica: “não é suficiente possuir a capacidade de uso desta ou daquela operação lógica para ser racional. Além dela é necessário querê-la, ou seja, ter a intenção de usá-la (REY, 2002, p.

179). É nesse sentido que o autor se refere à intenção, como um *querer ver*, um *querer conceber*.

Assim, na análise que o autor faz sobre a questão das competências transversais e sobre a possibilidade de transferência⁶, destaca o fato de que o aluno pode ter uma determinada capacidade, dominar procedimentos necessários à resolução de um determinado problema, mas não ter a intenção de resolvê-lo conforme a lógica do saber, mas sim de acordo com o que supõe que é esperado dele. No caso de um problema matemático pode ser a aplicação de um procedimento, de uma fórmula ou de um modelo matemático ensinado anteriormente pelo professor.

Quando se assume uma perspectiva de aprendizagem que visa ao desenvolvimento da autonomia, que não se pauta numa visão transmissiva de conhecimento, mas na construção ativa de um sujeito que conhece na medida em que é capaz de tecer uma rede de significações, fica claro que o conteúdo escolar não se justifica apenas pelo seu próprio uso na escola. Ele deve transcender seus muros na medida em que possibilita o desenvolvimento de competências escolares, as quais extrapolam o âmbito das disciplinas e por isso mesmo podem ser de grande auxílio às pessoas como instrumento de inserção e de transformação do seu próprio meio. Assim, os conteúdos disciplinares devem ser meio para o desenvolvimento de competências e a atividade docente deve visar o desenvolvimento de intenções cognitivas que irão orientar a mobilização de tais competências.

Rey (2002) destaca duas intenções cognitivas que, segundo ele, são características da educação escolar e cujo desenvolvimento não se restringe ao âmbito de uma ou outra disciplina, mas deveria se constituir no objetivo do conjunto delas: a *intenção escritural* e a *intenção racional*. Em relação à primeira o autor destaca seu caráter transversal, uma vez que a prática da leitura e da escrita cobre todo o conjunto de disciplinas escolares e as extrapola. Convém destacar que a prática escritural em nossa sociedade não se restringe à palavra escrita, mas engloba também a palavra falada. De acordo com o referido autor ela é condição para a elaboração do saber, uma vez que por meio dela é que se tematiza, que se explicita, que se objetiva:

Observemos, *en passant*, que a forma social escritural não diz respeito apenas à palavra escrita; por um efeito retroativo, ela abre para o oral novas funções que ele não tinha anteriormente: falar oralmente sobre o que se faz, para explicá-lo,

⁶ Essa transferência se refere à mobilização de capacidades, habilidades adquiridas em um determinado contexto para outro, diferente.

justificá-lo ou comentá-lo, implica manter uma fala “escritural”, pois o verbo não é a ferramenta da ação, mas é a ação que é objeto da palavra. (REY, 2002, p. 189)

A linguagem escrita, conforme destacado por Rey (2002) é um instrumento intelectual indispensável para a compreensão das coisas, na medida em que separa o fluxo verbal do real e permite apreender, isoladamente, os elementos do encadeamento falado. O autor chama a atenção para a necessidade de se explorar na escola, não apenas uma escrita com função de comunicação, mas também, e, sobretudo, uma escrita destinada ao próprio escritor. Segundo ele, repensar a escrita nessa perspectiva poderia trazer um novo sentido ao uso dos cadernos na escola: como um instrumento efetivo *do* aluno e *para* o próprio aluno, com anotações, lembretes, textos elaborados por ele mesmo, lista de resultados já obtidos e descobertas efetuadas.

Sobre a *intenção racional* o autor destaca a importância de se colocar a racionalidade como base da relação com o outro na escola, uma vez que somente por meio dela se possibilita um verdadeiro acesso ao saber: na relação pedagógica deve-se convencer e não persuadir o outro. Nesse sentido, conforme apontado pelo autor, conhecer não se trata de um ato de conformismo ou de aceitação do aluno:

[...] o desejável é que ele absorva o saber porque ele o tem, sem constrangimento nem influência, por verdadeiro, porque ele compreendeu suas razões. Contra a força, o argumento autoritário e a sedução, trata-se de aprender a pensar por si mesmo. Essa modalidade de relação com o outro, na qual a única restrição é aquela do discurso racional, é condição absoluta para o surgimento de uma intenção racional. (REY, 2002, p. 202).

Essa idéia de acesso ao saber se assenta na concepção piagetiana sobre a importância das relações de cooperação para os progressos cognitivos da criança e sobre a qual já discorremos anteriormente. É nesse sentido que Piaget (1998b) defende o trabalho em grupos como um bom método de trabalho na escola, uma vez que, ao intercambiar idéias com os outros, o sujeito entra no campo da racionalidade justamente por tentar resolver as contradições entre os diferentes pontos de vista. Nesse intercâmbio não há prevalência de idéias por diferença de *status* entre os envolvidos, como ocorre freqüentemente na relação professor-aluno.

Assim, não se espera que o aluno acredite numa verdade proferida pelo professor, de acordo com o que Rey (2002) denomina de uma *persuasão que conduz à crença*, pois para fazer crer todos os meios são válidos, como por exemplo fazer-se valer do *status* de professor, intimidar, chantagear, seduzir, recompensar. Tais mecanismos são freqüentemente usados na

escola, ainda que o sejam, muitas vezes, de forma inconsciente. Para convencer, ao contrário, é preciso fornecer razões. Assim é preciso que o professor, em sua ação também trabalhe com o intercâmbio de idéias, num esforço constante para que o aluno deixe de lado qualquer influência advinda de uma diferença de status em relação ao saber. É pautada nesse objetivo, que a teoria de Brousseau, conforme revisada anteriormente, valoriza as situações *adidáticas*.

Nas aulas de matemática é possível observar, com freqüência, a aceitação passiva dos saberes como verdades, sem que se compreenda suas razões. Uma vez que se pode chegar ao resultado correto pela aplicação de regras previamente ensinadas, não importa aos alunos compreender os mecanismos que o conduziram até ali (e isso acontece justamente quando essa compreensão não é valorizada pelo professor). Mesmo que o aluno possua habilidades e seja capaz de mobilizar conhecimentos, pode não fazê-lo, porque não há essa intencionalidade em suas ações.

Esta questão pode ser analisada no contexto de um estudo realizado por Carraher, Carraher e Schliemann (1995), no qual examinaram a diferença no desempenho de crianças e adolescentes que trabalhavam no setor informal, diante de problemas matemáticos em situações do cotidiano e da escola:

Nas aulas de matemática, as crianças fazem conta para acertar, para ganhar boas notas, para agradar a professora, para passar de ano. Na vida cotidiana, fazem as mesmas contas para pagar, para dar troco, convencer o freguês de que seu preço é razoável. Estarão usando a mesma matemática? O desempenho nas diferentes situações será o mesmo? Que papel exerce a motivação da venda? Que explicação existe para que alguém seja capaz de resolver um problema em uma situação e não em outra? (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, p. 19).

Os resultados de suas pesquisas mostraram que muitos desses alunos fracassaram diante de tarefas escolares, cuja solução poderia ser obtida por meio dos procedimentos que usaram com tanta desenvoltura em situações similares fora da escola, e que lhes garantiram o sucesso naquele contexto. Contudo esses procedimentos não foram usados para resolver os problemas escolares. Para resolvê-los a maioria aplicou os algoritmos ensinados pelo professor, cujos mecanismos de produção desconheciam e que, por isso mesmo, não lhes permitiram fazer um julgamento de sua validade.

Podemos dizer que a intenção com a qual os alunos resolviam os problemas nas situações de trabalho não era do mesmo tipo daquela que orientava sua ação na escola. Dessa forma vemos que a aprendizagem de matemática, para além de promover o desenvolvimento de habilidades e competências relativas a essa disciplina (e de outras que a transcendem),

deve instalar, em cada aluno essa *intenção racional*, esse olhar sobre o mundo com desejo de compreendê-lo.

Destacamos ainda a relação de complementaridade entre as intenções cognitivas sobre as quais discorremos nesse texto (escritural e racional). A argumentação é base da racionalidade e esta se constrói por meio do debate, do confronto de idéias, os quais só são possíveis mediante a objetivação das idéias. Nesse sentido intenção escritural e intenção racional, embora irreduzíveis, são indissociáveis e complementares.

3. 3 A noção de multiplicação

A multiplicação é explorada nesse capítulo em dois contextos: o da matemática e o da educação. No primeiro focamos o saber matemático propriamente dito com a apresentação do conceito de multiplicação, suas propriedades e aplicações, bem como de uma breve revisão histórica de sua utilização; no segundo nosso interesse se volta para questões relativas ao ensino e à aprendizagem dessa noção.

3. 3. 1 O conceito de multiplicação e suas origens na história da matemática

Na obra que se tornou referência para professores de matemática - em Portugal e no Brasil - pelo rigor com que explora os conceitos fundamentais da matemática, Caraça (1952) apresenta a multiplicação como uma das *operações fundamentais* da aritmética, juntamente com a adição, subtração e divisão e com outras três que a elas se ligam imediatamente: potenciação, radiciação e logaritmação. Na exposição que faz sobre a multiplicação, o autor explicita sua forte relação com a divisão, apresentando esta última como a operação inversa da multiplicação, sendo que ambas são classificadas como operações de segundo grau (as de primeiro grau são a adição e sua inversa, a subtração e as de terceiro grau a potenciação e suas inversas, radiciação e logaritmação).

O autor define a multiplicação como uma soma de parcelas iguais e composta por três termos: *multiplicando*, que exerce um papel passivo uma vez que representa a parcela que se repete; *multiplicador*, que exerce um papel ativo, indicando o número de vezes que o multiplicando aparece como parcela, ou seja, que se repete; e *produto*, que é o resultado da multiplicação. Multiplicando e multiplicador são também chamados de *fatores* da multiplicação.

As propriedades da multiplicação (quadro 1), bem como das demais operações, são classificadas por Caraça (1952) em dois grupos distintos. Enquanto as do primeiro grupo dizem respeito à forma como os resultados variam em função da variação dos dados, as do segundo grupo se referem às formas pelas quais os dados podem ser combinados sem gerar uma alteração nos resultados. Estas últimas, denominadas de *propriedades formais*, são de uma aplicação constante no cálculo aritmético e algébrico e, nas palavras do autor “quem as conhece bem, principalmente as de soma e de produto, tem a chave do cálculo algébrico” (CARAÇA, 1952, p. 25).

GRUPO	PROPRIEDADE	REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
1º	unicidade	$a = a', b = b' \rightarrow a \cdot b = a' \cdot b'$
	monotónica	$b > b' \rightarrow a \cdot b > a \cdot b'$
	anulamento	$0 \cdot a = 0$
	modular	$a \cdot 1 = a ; a \cdot b = a \rightarrow b = 1$
	redução	$c \neq 0, a \cdot c = b \cdot c \rightarrow a = b$
2º	comutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
	associativa	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
	distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Quadro 1 - Propriedades da multiplicação

A busca pela origem da multiplicação na história da humanidade nos remete à história da invenção dos números, uma vez que, na contagem por agrupamentos, com formação de bases (5, 10, 12, 60, etc.) já é possível identificar o uso de procedimentos multiplicativos. Um exemplo, apresentado por Ifrah (1989), é o sistema de contagem usado pelos sumérios, por volta do ano 3 500 a. C. Usando base 60 e o auxílio de uma unidade de 10 (dezena), os sumérios desenvolveram formas de representação originais apoiados na utilização de pedras (figura 3), no que se constituía, como destacado pelo autor, em uma idéia bastante abstrata para a época:

A multiplicação por 10 do valor de uma ficha é aqui exprimida pela perfuração deste objeto; ao conferir uma pequena marca circular (verdadeiro símbolo gráfico representando a bolinha da dezena) ao cone de valor 60 ou à esfera de valor 3.600, obtêm-se na verdade as figurações respectivas dos números 600 (= 60 x 10) e 36.000 (= 3.600 x 10). (IFRAH, 1989, p. 133-134).

Figura 3 - Sistema de contagem usado pelos sumérios (IFRAH, 1989, p. 133)

Em relação aos primeiros sistemas notacionais de numeração, Ifrah (1989), destaca o fato de se tratarem de modelos concretos que se apoiavam no princípio aditivo e que exigiam uma numerosa repetição de símbolos. O sistema egípcio, por exemplo, de base 10, permitia a representação de números de magnitude alta (além do milhão), mas exigia a utilização de uma grande quantidade de símbolos (comparativamente ao sistema de numeração decimal posicional). Os símbolos usados pelos egípcios são mostrados na figura 4:

Símbolo		∩	⊙	⋈	⌒	☞	𐍌
Valor	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

Figura 4 - Símbolos usados no sistema de numeração egípcio (IMENES, 1989, p. 22)

Já o sistema de numeração chinês, desenvolvido há mais de três mil anos, recorrendo ao uso de um princípio multiplicativo, dispensava a repetição fastidiosa de símbolos iguais.

Nesse sistema são usados signos que correspondem aos nossos algarismos de 1 a 9 e mais aos números 10, 100, 1 000 e 10 000. Na figura 5 vemos os símbolos usados pelos chineses, em sua forma clássica:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

Figura 5 - Símbolos usados no sistema de numeração chinês (IFRAH, 1989, p. 228)

Para exemplificar a forma como os números eram escritos pelos chineses mostramos na figura 6 a grafia chinesa do número 3 845, em cuja representação podemos identificar a seguinte relação de decomposição: $3 \times 1000 + 8 \times 100 + 4 \times 10 + 5$. A título de comparação, na figura 7 é apresentada a grafia usada pelos egípcios para representar o mesmo número, considerando-se que o sistema usado por eles, valia-se apenas do princípio aditivo.

Figura 6 - Número 3 845 no sistema de numeração chinês

Figura 7 - Número 3 845 no sistema de numeração egípcio

Embora o nosso sistema de numeração seja posicional e o princípio multiplicativo não seja tão visível na sua representação escrita, quanto o é no sistema chinês, ele pode ser identificado facilmente na numeração falada, sobretudo em números envolvendo centenas e milhares, como por exemplo *seiscentos* (seis centos ou seis grupos de 100); ou cinco mil (cinco grupo de mil). Na língua francesa, por exemplo, o princípio multiplicativo também é identificado na leitura do número 80: *quatre-vingts* (ou quatro vintes).

Além da utilização do princípio multiplicativo nos sistemas de numeração antigos, há também registros que mostram como o cálculo da multiplicação era realizado por alguns povos da antiguidade. Os egípcios, por exemplo, desenvolveram um interessante método de duplicação sucessiva. No exemplo que segue, vemos o raciocínio envolvido na aplicação desse método para encontrar o resultado de 128×12 (IFRAH, 1989, p. 168) :

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536

Os números eram registrados em duas colunas. A primeira iniciava com o número 1 e a segunda com o número 12. Em seguida os números de cada coluna eram dobrados até que se chegasse ao número 128 na primeira coluna. Seu par, na coluna da direita era o resultado da multiplicação: $128 \times 12 = 1536$.

Caso a multiplicação envolvesse um multiplicador (registrado na coluna da esquerda) ao qual não fosse possível se chegar por meio da duplicação, esta era efetuada até se obter o maior número contido nele. No segundo exemplo apresentado por Ifrah (1989) os fatores são 84 e 15. O maior número obtido pela duplicação na coluna da esquerda e que está contido em 84 é o 64, assim, ao obtê-lo, a duplicação era interrompida e procurava-se nessa coluna os números que somados, resultassem em 84. Os seus pares, na coluna da direita eram então adicionados e o total correspondia ao produto da multiplicação, como mostrado a seguir:

1	15
2	30
<u>4</u>	<u>60</u>
8	120
<u>16</u>	<u>240</u>
32	480
<u>64</u>	<u>960</u>
$4 + 16 + 64 = \underline{84}$	$60 + 240 + 960 = \underline{1\,260}$

Além dos egípcios, outros povos como os indianos e os árabes também desenvolveram seus próprios métodos para multiplicar, o que deixa claro que os algoritmos das operações aritméticas que usamos mais largamente hoje, e que são ensinados em nossas escolas, são fruto de séculos de construção e só se tornaram possíveis mediante a própria evolução dos sistemas de numeração.

É interessante notar que o método de duplicação sucessiva dos egípcios tem uma forte relação com a etimologia da palavra *multiplicar*: *multi* quer dizer numeroso (em grande quantidade) e *plicar* quer dizer dobrar, assim, em sua origem, a palavra multiplicar traduz a idéia de *dobrar múltiplas vezes*.

Com essa breve exposição procuramos situar, de uma forma bem abrangente, a noção de multiplicação no contexto da própria evolução dos sistemas de contagem e de numeração. Antes de passar ao próximo item no qual discorreremos sobre a construção da noção de multiplicação pela criança, convém destacar, ainda em relação à noção de multiplicação propriamente dita, sua estreita relação com a idéia de *proporcionalidade*, a qual tem vasta aplicação não somente na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento como por exemplo na física, na geografia e na química.

Sua utilização não se restringe ao âmbito acadêmico, mas é verificada também em situações simples do cotidiano como por exemplo na adaptação de uma receita ou na leitura

de uma planta baixa. Na área de matemática a proporcionalidade se constitui num conceito fundamental, com aplicações tanto no campo da aritmética, quanto da geometria, podendo ser considerada assim um elemento de integração entre diferentes eixos dessa disciplina.

Raciocinar proporcionalmente significa colocar duas (ou mais) variáveis em relação, como no exemplo: 1 carro - 4 rodas; 2 carros - 8 rodas; 3 carros - 12 rodas, etc. Para que a relação entre os dois conjuntos (carros e rodas) seja proporcional, deve-se manter a relação de 1 para 4. Assim, a cada elemento acrescentado no primeiro conjunto (carros) quatro elementos devem ser acrescentados no segundo (rodas). Essa é uma idéia básica presente no raciocínio multiplicativo, e que pode ser identificada já no método de multiplicação usado pelos egípcios, conforme os exemplos apresentados anteriormente.

3 . 3. 2 A construção da noção de multiplicação pela criança

Para muitos professores, o ensino da multiplicação (bem como das demais operações) visa basicamente o domínio do algoritmo convencional e sua posterior aplicação para resolver problemas. Dessa forma o domínio da tabuada da multiplicação (até 10) é algo que se espera dos alunos ainda no início do segundo ciclo do Ensino Fundamental, uma vez que tal domínio passa a ser tratado como um pré-requisito para a utilização dos algoritmos de multiplicação e de divisão. Entretanto, uma criança pode saber a tabuada de cor e até mesmo usá-la corretamente num algoritmo ensinado pelo professor, sem ter compreendido as relações envolvidas nessa operação. A compreensão da operação da multiplicação implica um processo de construção desse conceito pela criança.

Interessados em compreender como se originava a idéia de multiplicação na criança, Piaget e Szeminska (1975) buscaram sua origem no esquema de correspondência um-para-muitos. Os autores mostraram que o esquema de correspondência e seu uso em inferências transitivas constituem a base não apenas para a construção do número, mas também para a construção das operações aritméticas da adição e da multiplicação. Segundo os pesquisadores, as crianças que compreendem a correspondência termo-a-termo e suas relações transitivas também podem compreender correspondências do tipo um-para-muitos. Descrevemos a seguir, e de forma resumida, uma parte de um experimento realizado por Piaget e Szeminska (1975) para estudar a coordenação das relações de equivalência e a composição multiplicativa dos números.

Usando flores de plástico nas cores azul (F_1) e cor-de-rosa (F_2) e jarros (J_1), os pesquisadores investigaram inicialmente se as crianças eram capazes de estabelecer a seguinte relação: se o conjunto de flores azuis corresponde ao conjunto de jarros ($F_1 = J_1$) e o conjunto de flores cor-de-rosa também corresponde ao conjunto de jarros ($F_2 = J_1$), então os dois conjuntos de flores correspondem-se entre si ($F_1 = F_2$).

As crianças executavam a correspondência termo-a-termo (usando os materiais) apenas entre cada conjunto de flores e o conjunto de jarros, mas não entre os dois conjuntos de flores. Assim, as crianças que tiveram sucesso nessa tarefa o fizeram com base na relação entre flores e jarros e as que fracassaram não conseguiram estabelecer essa relação, mesmo quando os pesquisadores mencionavam a ação já realizada anteriormente por elas (colocar cada conjunto de flores nos jarros).

Num prolongamento desse experimento, os pesquisadores questionavam as crianças sobre o que aconteceria se todas as flores (azuis e cor-de-rosa) fossem colocadas nos jarros. Se elas não pudessem antecipar a relação $F = 2J_1$ (o conjunto de flores corresponde ao dobro do conjunto de jarros, resultando em 2 flores em cada jarro) a solução poderia ser encontrada pela manipulação do material. Uma vez estabelecida essa relação, as flores eram retiradas, deixando apenas os jarros à vista das crianças. Elas eram solicitadas a pegar em uma caixa, potes finos (J_2) nos quais poderiam colocar apenas uma flor em cada um. O objetivo era investigar se as crianças seriam capazes de compreender que se $F = 2J_1$ e $F = J_2$, então $J_2 = 2J_1$, ou seja, se as crianças compreendiam a necessidade de pegar o dobro do número de potes em relação ao de jarros.

Os resultados desses experimentos mostraram que as crianças que não conseguiram antecipar a relação de 2 flores por jarro ($F = 2J_1$) na primeira parte do experimento, também não anteciparam a necessidade de pegar dois potes para cada jarro na segunda parte, fazendo a correspondência termo-a-termo entre os potes e os jarros (que lhes eram acessíveis visualmente) e não entre os tubos e as flores. Algumas dessas crianças, percebendo que faltariam potes, passaram a usar a correspondência 2 para 1 no decorrer da realização da tarefa, por tentativas sucessivas. Entretanto, diante de um novo problema, em que deveriam fazer a correspondência 3 para 1, essa relação não era antecipada, sendo descoberta, como no caso anterior, apenas após algumas tentativas. Já as crianças que mostraram domínio das relações de equivalência e realizaram a antecipação da relação 2 flores para cada jarro, na primeira etapa do experimento, e de 2 potes para cada jarro na segunda parte, também

realizaram generalizações dessa relação 2 para 1, para outras (3 para 1, 4 para 1, etc.), conforme pode ser verificado nos trechos dos protocolos de entrevista com duas crianças diferentes, transcrito a seguir⁷:

GROS (5;10) acha-se convencido da equivalência $X = Z$, se $X = Y$ e $Z = Y$: “se eu colocar todas essas flores ($X + Y$) nessas jarras? - 1 azul e 1 cor-de-rosa - Isso é quanto? - 2 - E se eu te desse mais isso (uma nova coleção de 10), quantas haveria por jarra? - 3 - Por quê? - Colocaria uma, uma, uma. - E agora, se eu tiver a idéia de colocá-las em potes que não terão mais que uma flor por pote? - (prepara $10 + 10 + 10$ potes)”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1975, p. 297)

BORA (6 anos) sabe também imediatamente que haverá 2 flores por jarra, “*porque há 2 coisas* (= 2 coleções de 10)”. Do mesmo modo, prepara 2 ou 3 potes por jarra, segundo se lhe apresente 2 ou 3 coleções equivalentes de flores. Mesmas respostas para 2 ou 3 coleções de ovos: e se eu acrescentar isto ($10 + 10 + 10 + 10$)? - 4 *por boneca*. E se botar ainda isto (10)? - 9, *oh, não*, 5. (PIAGET; SZEMINSKA, 1975, p. 297)

Os autores chamam a atenção para o fato de que as crianças que apresentam as reações do tipo daquelas mencionadas nos excertos acima, já realizam uma correspondência múltipla, que é própria da multiplicação e cujas relações envolvidas são diferentes daquelas usadas na adição: “quando das correspondências 1 a 1, 2 a 1, 3 a 1 etc., o valor n de cada conjunto não é mais compreendido apenas como procedente de n a $n + n$, mas de ‘1vezes n ’ a ‘2 vezes n ’, 3 vezes n ’, etc.” (PIAGET; SZEMINSKA, 1975, p. 297).

Na investigação relatada em parte aqui, bem como em outras realizadas por Piaget e seus colaboradores, os pesquisadores destacaram que as composições aditivas e multiplicativas (tanto lógicas quanto numéricas) são solidárias entre si, o que significa que a construção cognitiva de uma implica a outra. Entretanto, os resultados dessas investigações também mostram que a compreensão das relações multiplicativas representa uma transformação qualitativa no pensamento da criança.

Importantes estudos sobre a compreensão da multiplicação realizados nas últimas décadas e que tem fundamentado diversas pesquisas sobre essa questão, realizadas no âmbito da pós graduação (alguns exemplos são apresentados no próximo capítulo), analisam as diferenças entre o pensamento aditivo e o pensamento multiplicativo, como por exemplo Kamii e Livingston, 1995; Vergnaud, 1983, 1994, 1998; Nunes e Bryant, 1997. Nos autores citados também podemos encontrar um apoio importante para a organização de situações de

⁷ Os números entre parênteses referem-se à idade da criança (anos e meses). No trecho do segundo protocolo apresentado, os autores se referem também a outro experimento, com os mesmos objetivos de investigação, mas usando materiais diferentes (no lugar de flores, jarras e tubos, ovos, ovelhos e bonecas).

ensino dessa noção na escola. Assim fazemos a seguir uma breve revisão dos estudos realizados por esses autores sobre a multiplicação.

Kamii e Livingston (1995), pautadas nos estudos de Piaget, ressaltam que no raciocínio multiplicativo estão envolvidos três níveis de abstração, uma vez que é necessário operar com unidades simples, unidades compostas e um total. As autoras usam uma ilustração para exemplificar os níveis de abstração e as relações de inclusão necessárias à adição e à multiplicação (KAMII; LIVINGSTON, 1995, p. 109):

Figura 8 - A diferença entre $4 + 4 + 4$ e 3×4 (KAMII; LIVINGSTON, 1995, p. 109)

Como mostrado na figura 8, para multiplicar é necessário fazer uma correspondência entre quatro unidades de um e uma unidade de quatro e estabelecer uma relação de inclusão considerando essa correspondência: uma unidade de quatro em duas unidades de quatro; duas unidades de quatro em três unidades de quatro e assim por diante. Conforme apontado pelas autoras, em relação ao exemplo mostrado na ilustração: “a multiplicação, dessa forma, exige a construção de ordens superiores, que devem funcionar *simultaneamente* às unidades das ordens inferiores, na correspondência quatro por um”(KAMII; LIVINGSTON, 1995, p. 110).

As autoras destacam ainda, que a construção das unidades de ordem superior é essencial para que a criança compreenda o significado de uma notação multiplicativa. Elas exemplificam sugerindo que quando uma criança apresenta 7 como resultado de 3×4 é porque ela trata os dois números (3 e 4) como sendo unidades simples.

No conjunto de suas obras, a primeira autora faz uma crítica enfática à precocidade com que os algoritmos convencionais são ensinados na escola (por exemplo Kamii e Livingston, 1995; Kamii, 1996; Kamii e Housman, 2002). Segundo ela, por se tratarem do resultado de um longo processo de construção por parte de matemáticos adultos, a simples

transmissão de algoritmos aos alunos acaba por impedir que eles elaborem seu próprio raciocínio e que compreendam de fato as operações aritméticas.

As dificuldades apresentadas pelas crianças no aprendizado das operações aritméticas, despertaram o interesse do psicólogo francês Gérard Vergnaud por conhecer os procedimentos usados por crianças para resolver problemas de matemática e compreender a aquisição e desenvolvimento dos conceitos matemáticos envolvidos nessas soluções. Vergnaud (1983, 1994, 1998) elaborou a Teoria dos Campos Conceituais, na qual é destacada a importância das situações que dão significado aos conceitos matemáticos. Para ele a resolução de problemas tem uma função essencial na construção de conhecimento uma vez que o saber se constitui *a partir* dos problemas a resolver, isto é, das situações a dominar, sendo que as concepções dos alunos são moldadas pelas situações que encontram.

Segundo o autor, “um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações cujo tratamento se faz necessário através de conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas estritamente interligados” (Vergnaud, 1983, p.127).

A necessidade da Teoria dos Campos Conceituais, é justificada por Vergnaud (1983) com base em três argumentos: a) é difícil e algumas vezes até mesmo absurdo, estudar isoladamente a aquisição de conceitos interconectados. Como exemplo o autor cita o estudo da multiplicação, divisão, razão, números racionais, funções lineares e não-lineares, análise dimensional e vetor espacial, que não são conceitos independentes uns dos outros; b) é mais proveitoso, dentro de uma abordagem psicogenética para a aquisição de idéias específicas, abranger um domínio mais amplo do conhecimento, abordando uma diversidade maior de situações; c) existem diferentes conceitos e procedimentos envolvidos na habilidade das crianças de solucionar uma mesma classe de problemas. Ainda que estes conceitos ou representações possam parecer frágeis ou estar parcialmente errados, são importantes para a resolução de problemas mais simples e se constituem em fator importante para a construção de conceitos e procedimentos próximos daqueles socialmente estabelecidos.

A atenção de Vergnaud (1983, 1994) se voltou ao estudo de dois campos conceituais: o das *estruturas aditivas* e o das *estruturas multiplicativas*. As estruturas aditivas são as estruturas ou relações em jogo que só estão formadas de adições e subtrações em diferentes níveis. Já as estruturas multiplicativas consistem do conjunto de situações que envolvem a multiplicação ou a divisão de dois números, ou a combinação de tais operações em diferentes níveis (abrangendo os conceitos de função linear, razão, fração, números racionais entre

outros). O autor ressalta que as estruturas aditivas constituem um campo conceitual e as estruturas multiplicativas constituem outro.

Na perspectiva dos campos conceituais, multiplicação e divisão, como operações inversas, constituem-se nos dois lados de uma moeda e nesse sentido não devem ser trabalhadas de forma desvinculada na escola. Para Vergnaud (1983), olhando-se as estruturas multiplicativas como um conjunto de problemas, é possível identificar três subgrupos diferentes de problemas aritméticos de multiplicação e de divisão, conforme envolvam eles : a) isomorfismo de medidas , b) produto de medidas e, c) proporção múltipla.

As atividades propostas aos alunos na intervenção realizada nessa pesquisa, envolviam problemas que, de acordo com essa classificação, pertencem ao primeiro subgrupo. Trata-se, segundo Vergnaud (1994) de problemas de proporcionalidade simples que descrevem um grande número de situações corriqueiras da vida, bem como de ordem técnica e nele podem ser identificadas quatro classes de problemas: multiplicação, divisão 1 (divisão partição), divisão 2 (divisão por quota) e problemas de regra de três. Destes, apenas problemas de regra de três não foram usados em nossa pesquisa.

No quadro a seguir exemplificamos as quatro classes de problemas, conforme a classificação feita por Vergnaud (1991):

CLASSE	RACIOCÍNIO	EXEMPLO
MULTIPLICAÇÃO	Conhecendo o valor de 1 carrinho deve-se determinar o valor de n carrinhos (todos com o mesmo preço).	Um carrinho custa 5 reais, quanto custam 4 carrinhos iguais a esse?
DIVISÃO PARTIÇÃO	Conhecendo o valor total e o número de partes deve-se determinar o valor de cada parte.	Quatro carrinhos de mesmo preço custam 20 reais. Qual o valor de cada carrinho?
DIVISÃO QUOTA	Conhecendo o valor total e o valor de cada parte, deve-se determinar o número de partes	Com 20 reais, quantos carrinhos de 5 reais é possível comprar?
REGRAS DE TRÊS	Conhecendo o valor de um número x de carrinhos ($x \neq 1$), deve-se determinar o valor de y carrinhos ($y \neq 1$).	Três carrinhos custam 15 reais, quanto custam 5 carrinhos?

Quadro 2 - problemas de estrutura multiplicativa que envolvem isomorfismo de medidas

Nunes e Bryant (1997), analisam as descontinuidades entre o pensamento aditivo e o pensamento multiplicativo, destacando que enquanto a adição envolve as ações de *unir* e *separar*, a multiplicação envolve ações de outra natureza e que estão ligadas a três tipos de situações multiplicativas: a) situações de correspondência um-para-muitos; b) situações que envolvem relações entre variáveis, ou seja, co-variação; e c) situações que envolvem

distribuições e cortes sucessivos. De acordo com essa classificação, as atividades que foram propostas aos alunos na intervenção realizada na presente pesquisa, pertencem ao primeiro e ao terceiro grupos.

As situações do primeiro tipo envolvem a relação de proporcionalidade já mencionada e exemplificada nesse texto, e que correspondem aos problemas de multiplicação que foram classificados por Vergnaud no subgrupo isomorfismo de medidas. Os autores esclarecem que por se tratarem de situações nas quais há uma relação constante que liga dois conjuntos, as ações envolvidas nesse tipo de situação são de *replicação e do seu inverso*. Na replicação não é possível simplesmente unir, somando qualquer quantidade a um conjunto, é preciso somar a quantidade necessária a cada conjunto para manter invariável a correspondência um-para-muitos. No seu inverso, a replicação implica em tirar as quantias correspondentes de cada conjunto para que a proporção seja mantida. No exemplo dos carros e rodas, já citado anteriormente nesse texto, se um elemento for retirado do conjunto de carros, quatro elementos deverão ser retirados do conjunto das rodas. A respeito deste tipo de situação, os autores apontam para dois novos sentidos de números:

A proporção, que é expressada por um par de números que permanece invariável em uma situação mesmo quando o tamanho do conjunto varia, e o fator escalar, que se refere ao número de replicações aplicadas a ambos conjuntos mantendo a proporção constante. Deveria estar claro que nenhum desses sentidos se relaciona ao tamanho do conjunto: a proporção e o fator escalar permanecem constantes, mesmo quando o tamanho varia. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 144).

No terceiro tipo de situações os autores situam a ação de *distribuir*, que envolve a distribuição equitativa de um conjunto (por exemplo, de doces, para um número x de receptores, crianças), esclarecendo que a diferença entre a distribuição e a adição e subtração, consiste na relação multiplicativa que a distribuição estabelece entre dois ou mais conjuntos.

A relação parte-todo das situações distributivas é comparada, pelos autores, com esta mesma relação nas situações aditivas e são apontadas as diferenças fundamentais entre os dois tipos de situações: - nas situações aditivas o tamanho do todo é igual à soma das partes, que não precisam ser iguais (havendo assim apenas uma relação a ser considerada) - nas situações de distribuição e divisão⁸, há três elementos que precisam ser considerados: o *tamanho do*

⁸ Sobre o significado das palavras distribuição e divisão, os autores classificam a primeira como uma *ação* da segunda. Nesse sentido a divisão vai além da distribuição porque envolve a realização da relação inversa entre o número de receptores e o tamanho de sua quota.

todo, o número das partes e o tamanho das partes, que deve, necessariamente, ser o mesmo para todas as partes.

Os autores comparam, ainda, as situações de distribuição com situações de correspondência um-para-muitos, diferenciando-as pela posição que a ação da distribuição ocupa em ambas. A primeira é o ponto de partida da partição, enquanto que a segunda representa uma ação que está no passado (já é dada), como no exemplo de 1-carro-4 rodas.

Outra diferença importante consiste na utilização que as crianças irão fazer dos três elementos já apontados na relação parte-todo de uma situação distributiva. Esta questão é bem explicitada pelos autores, num exemplo de distribuição de um número n de doces por x crianças:

Se você mantém o número de crianças igual e aumenta o número de doces, haverá mais doces por criança, mas se você mantém o número de doces igual e aumenta o número de crianças, haverá menos doces por criança. Há uma relação direta entre o número total de doces e doces por criança, porém uma relação inversa entre o número de crianças e doces por criança. (Nunes e Bryant, 1997, p. 148).

Segundo os autores, estas relações são novas, pois não estão presentes nas situações de correspondência um-para-muitos, nas quais a proporção é fixa desde o início. A compreensão desta relação inversa é necessária para que a criança avance na atividade de simples distribuição para a compreensão da divisão.

Os autores também apontam, apoiados em Vergnaud (1983), dois tipos de situações de divisão: a dos problemas partitivos (os quais, de acordo com os autores, são mais comumente encontrados pelas crianças em situações de divisão da vida cotidiana) e a dos problemas de divisão por quota. Os problemas do primeiro tipo são considerados mais simples, por envolver uma distribuição que pode ser feita na forma de correspondência termo - a - termo, enquanto que os problemas do segundo tipo exigiriam a compreensão da relação inversa entre quociente e divisor, o que é bastante difícil para as crianças.

Na revisão que fizemos sobre a noção de multiplicação nos trabalhos citados, não encontramos referência específica a um tipo de problema que exploramos em nossa pesquisa, os problemas de configuração retangular. Consideramos, entretanto, que também envolvem relações de correspondência um-para-muitos, porém envolvendo a bidimensionalidade. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (2000), é destacada a importância de se trabalhar com um conjunto de situações que explorem os diferentes significados da

multiplicação⁹ e, entre esses significados, apresentam-se as situações associadas à configuração retangular.

Esse tipo de situação multiplicativa integra aspectos da aritmética e da geometria, dois campos que costumam ser trabalhados de forma totalmente desvinculada na escola, sem se levar em conta que o trabalho com a geometria pode contribuir para a ampliação da compreensão dos alunos relativa ao campo numérico.

Conforme apontado por Caraça (1952), aritmética e geometria estão muito relacionadas desde suas origens, e isso é mostrado pelo autor quando aborda a questão da medição. Ele recorre ao contexto de divisão de terras no Egito antigo, mais propriamente à relação dos indivíduos com o Estado com base na propriedade privada,¹⁰ para explicar a necessidade da expressão numérica da medição. Medir consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie, assim, para medir o comprimento de um objeto, aplica-se a ele uma certa unidade de comprimento depois determina-se quantas vezes um comprimento cabe no outro. No caso da medida de uma área, não se trata de uma medição linear, pois há uma nova dimensão em jogo, o que torna a ação de medir mais complexa. Medir implica na escolha de uma unidade apropriada, numa aplicação dessa unidade, numa comparação entre grandezas que se expressa por meio de números, num processo em que aspectos da geometria e da aritmética se influenciam mutuamente, uma vez que a escolha da unidade de medida e sua expressão por meio de um número são aspectos intimamente ligados. Não seria adequado, por exemplo, medir a distância entre duas cidades usando-se como unidade o milímetro, uma vez que resultaria em um número de magnitude muito elevada, nesse sentido há uma exigência de comodidade nessa escolha, a qual se traduz em “que a expressão numérica da medição não dê números maus de enunciar e dos quais se não faça, portanto uma idéia clara”. (CARAÇA, 1952, p. 31).

Essa relação entre a aritmética e a geometria é também destacada no texto dos PCN de matemática:

A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois

⁹ Os outros significados da multiplicação, apresentados no documento, são: multiplicação comparativa, comparação entre razões e combinatória.

¹⁰ O autor apresenta uma história registrada por Heródoto sobre a possível origem da geometria ligada ao processo de divisão de terras durante o reinado de Sesóstris, no século V a.C.

estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (PCN, 2000, p. 55-56)

De acordo com o exposto, destacamos a importância do ensino da multiplicação na escola básica, uma vez que, em sua relação com a noção de proporcionalidade, trata de um conceito fundamental da matemática, ou, valendo-nos da expressão usada por Meirieu (1998), de uma *noção-chave* dessa disciplina.

As noções-chave ou os conteúdos fundamentais de uma disciplina, conforme apontado por Denyer et al. (2007), são aqueles que favorecem tanto sua articulação interna, quanto uma articulação externa (com outras disciplinas). A noção de multiplicação, tratada na perspectiva de um *campo conceitual*, favorece os dois tipos de articulação: interna, por sua relação com os conceitos de razão, proporção, e pela integração entre aritmética e geometria; externa, porque a noção de proporcionalidade se aplica a campos variados, conforme já mencionado.

A reorganização dos conteúdos disciplinares em torno de seus conceitos fundamentais, ou de *noções-chave*, é apontada pelos autores mencionados (DENYER et al., 2007; MEIRIEU, 1998) como imprescindível para que os conteúdos não se constituam em fins em si mesmos, mas possibilitem o desenvolvimento de competências na escola.

3. 4 Revisão de Literatura

O baixo desempenho dos alunos brasileiros em relação à matemática, revelado nos resultados dos exames dos sistemas de avaliação dos órgãos governamentais aos quais já nos referimos anteriormente, têm suscitado uma importante discussão sobre a necessidade de mudanças no ensino da matemática. Nos últimos anos verificou-se um aumento expressivo na produção acadêmica sobre o ensino e a aprendizagem de matemática, consolidando assim uma área específica de pesquisa a qual começou a tomar forma no Brasil, no final da década de 70: a Educação Matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Os objetivos de investigação da Educação Matemática (EM) variam de acordo com os problemas e questões específicas levantadas pelos pesquisadores, entretanto Fiorentini e Lorenzato (2006) apontam para dois objetivos básicos:

- um, de natureza pragmática, que tem em vista a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da matemática;
- outro, de cunho científico, que tem em vista o desenvolvimento da EM enquanto campo de investigação e de produção de conhecimentos. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 10)

Conforme levantamento feito pelos referidos autores, o processo ensino-aprendizagem da matemática constitui uma das grandes tendências mundiais de investigação em EM, sendo que a aprendizagem individual tem sido mais estudada do que aquela que ocorre em grupos, nas interações de uma sala de aula do ensino regular.

Pais (2002) analisa o grande desenvolvimento verificado nas últimas décadas nessa área de pesquisa, e usa a expressão *tendências teóricas* para reportar-se a um determinado coletivo de pesquisadores que compartilha de um mesmo referencial teórico, e cujo interesse de investigação volta-se para temáticas educacionais específicas. Como exemplo o autor cita algumas tendências: *Didática da Matemática*, *Etnomatemática*, *Modelagem Matemática*, *História da Matemática*, entre outras.

Para realização da presente pesquisa apoiamo-nos principalmente em estudos realizados no campo da *Didática da Matemática*¹¹. Foi na França, no final dos anos 60, que essa tendência começou a emergir como uma área do conhecimento relativamente autônoma, embora mantendo estreita relação com outras três áreas: Matemática, Pedagogia e Psicologia (GÁLVEZ, 1996a).

Segundo Moreno (2006, p. 48), o interesse principal da *Didática da Matemática* é “estudar e descrever as condições necessárias para facilitar e otimizar a aprendizagem, por parte dos alunos, dos conteúdos de ensino da matemática.” Nesse sentido e conforme apontado por Pais (1999), o objetivo das pesquisas nessa tendência não se reduz à formulação de um receituário para determinados problemas de aprendizagem, mas sua realização pode fornecer subsídios essenciais para o trabalho do professor:

[...] é necessário destacar que é somente a partir de seus resultados de pesquisas, *sobretudo em sala de aula*, que se pode indicar propostas pedagógicas com a finalidade de contribuir para uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem de matemática e uma conseqüente contribuição para a melhoria do seu ensino. (PAIS, 1999, p. 11, grifo nosso)

Atualmente a produção nesse campo é muito vasta, estruturando-se em torno de algumas noções fundamentais, as quais passaram a ser divulgadas mais amplamente no Brasil

¹¹ Embora a expressão Didática da Matemática tenha um sentido mais amplo, como uma parte da pedagogia que trata dos preceitos científicos que orientam a atividade educativa na área da matemática - e nesse sentido ela incluiria as demais - ela também é usada para designar a corrente francesa inserida nesse campo mais amplo.

a partir da segunda metade da década de 90, com a tradução de uma obra argentina organizada por Parra e Saiz (1996) e que reúne textos de autores argentinos, mas também provenientes da Espanha, França e Chile.

Em 1999 foi lançada uma importante obra na qual são apresentados os elementos fundamentais do referencial teórico da *Didática da Matemática* francesa (MACHADO, S. D. A. et al., 1999). Os autores, todos brasileiros, tiveram uma vivência direta com a referida tendência, tanto por meio da experiência acadêmica - alguns cursaram o Doutorado em universidades francesas - quanto pela realização de estágios no *Institut de Recherche de l'Enseignement Mathématiques de Paris VII* (IREM). Nessa obra os autores abordam, entre outras, as noções de: Situações Didáticas; Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986) e Campos Conceituais (VERGNAUD, 1994), às quais já nos referimos nos capítulos anteriores.

As pesquisas em *Didática da Matemática* colocam em foco um sujeito que é *aluno*, ou seja, uma criança ou um adolescente em situação de aprendizagem escolar que interage com conteúdos específicos dessa ciência. Nesse sentido, fica evidente que a idéia de sujeito, nesse enfoque, não é a mesma de Piaget (1964), cujo olhar voltava-se para um *sujeito epistêmico*. Conforme apontado por Macedo (1994) o interesse de Piaget pela criança se dava na medida em que, através dela, podia explicar os passos necessários à construção de conhecimento. Além disso, sabemos que Piaget ocupou-se em estudar as grandes categorias do conhecimento como espaço, tempo, causalidade, etc. e não os processos de aquisição dos conteúdos escolares.

Convém ressaltar ainda, que o próprio objeto de estudo da *Didática da Matemática* envolve um elemento ao qual Piaget não se voltou em suas pesquisas, que é o ensino. Contudo, assinaladas essas diferenças, destacamos que a concepção de aprendizagem e o papel atribuído aos problemas nesse processo, no marco da referida tendência, revelam marcada influência da Teoria da Equilibração (PIAGET, 1976).

Diferentes pesquisas realizadas no Brasil nas últimas décadas, sustentam-se teoricamente nessa tendência. Sua influência, entretanto, não se restringe ao âmbito acadêmico, sendo verificada nos documentos curriculares oficiais, cujo propósito é o de orientar as práticas dos professores para o trabalho com a matemática em sala de aula. Como exemplo, podemos citar o tratamento dispensado às operações matemáticas nos PCN, as quais são apresentadas como pertencentes aos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1994).

3. 4. 1 Pesquisas internacionais

Entre os estudos que chegaram ao Brasil por meio da obra organizada por Parra e Saiz (1996) destacamos quatro, pela contribuição expressiva à estruturação do nosso trabalho: Lerner e Sadovsky (1996); Saiz (1996); Parra (1996) e Gálvez (1996b). Os três primeiros constituem-se em investigações no campo da aritmética e auxiliaram-nos tanto no planejamento do módulo de ensino, em torno do qual estruturamos a intervenção que foi realizada em sala de aula nessa pesquisa, quanto na análise dos resultados. O quarto, uma investigação no campo da geometria, ajudou-nos na discussão dos nossos resultados¹².

Lerner e Sadovsky (1996), realizaram uma importante investigação - à qual já nos referimos anteriormente (item 3.1.2) - sobre a compreensão do sistema de numeração decimal por crianças de 5 a 8 anos. Além dos resultados já mencionados - relativos à construção da notação numérica - aponta-se para a precocidade com que os algoritmos convencionais das operações aritméticas são apresentados às crianças na escola, chamando a atenção para a indesejável *compartimentalização do saber*. Os resultados desse estudo mostram que as crianças naturalmente iniciam uma soma ou subtração pela esquerda (pela ordem mais elevada do número), explicitando o valor representado pelos algarismos, o que permite controlar o resultado pelo cálculo aproximado¹³. Procedendo dessa forma, fazem desaparecer a diferença entre contas *com dificuldade*¹⁴ e *sem dificuldade*.

As autoras recomendam que as crianças sejam incentivadas a desenvolver meios próprios para realizar cálculos, argumentando que a busca de procedimentos para resolver operações aritméticas “não é só uma aplicação do que as crianças já sabem do sistema, é também a origem de novos conhecimentos a respeito das regras que regem a numeração escrita” (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 143).

No segundo estudo mencionado, fundamentando-se na Teoria das Situações Didáticas, Saiz (1996) analisou as dificuldades enfrentadas por crianças da escola primária¹⁵ com a

¹² Lembramos que nosso interesse por esse e outros estudos ligados à geometria que ainda serão abordados no presente capítulo, decorre da opção por introduzir a multiplicação - na intervenção realizada em nossa pesquisa - por meio de sua representação geométrica (arranjo retangular)

¹³ Esses resultados corroboram àqueles divulgados nos estudos de Kamii (por exemplo KAMII; LIVINGSTON, 1995)

¹⁴ Nomenclatura frequentemente usada na escola quando, em uma adição, a soma dos algarismos de uma coluna é maior que 9 ou numa subtração quando, em uma mesma coluna, o algarismo do *minuendo* é um número de magnitude mais baixa do que o algarismo do *subtraendo*.

¹⁵ Mantemos a nomenclatura usada pela autora - corresponde ao Ensino Fundamental no Brasil.

operação aritmética da divisão. Com base nos resultados de um estudo exploratório realizado com 300 alunos de 5^a e 6^a séries, a autora chama a atenção para o que denomina de *aplicação cega do algoritmo*, quando os alunos simplesmente retiram os dados numéricos dos enunciados, usam-nos em uma determinada operação aritmética (realizada por meio do seu algoritmo convencional) e não são capazes de controlar o resultado. Conforme apontado pela autora “a maior parte das crianças realiza a prova da divisão (prova dos 9), porém ninguém faz a ‘prova do problema’, quer dizer, ninguém verifica se o resultado obtido é a solução do problema formulado.” (SAIZ, 1996, p. 169).

A autora também destaca a importância da elaboração de procedimentos de cálculos pelos alunos para a compreensão da divisão. Ainda que esses procedimentos sejam pouco econômicos, eles exigem uma carga mental menor e permitem aos alunos manter o significado do cálculo, o que não ocorre, em geral, quando usam o algoritmo convencional. Este, segundo Saiz (1996), não deve ser eliminado das aulas de matemática, mas deveria se constituir no último passo de um processo de evolução de procedimentos.

O terceiro estudo trata-se de uma pesquisa realizada por Parra (1996) sobre o cálculo mental na escola primária. A autora diferencia o *cálculo automático ou mecânico*, que é realizado por meio de algoritmos convencionais ou máquinas de calcular, do *cálculo pensado ou refletido*, e destaca a importância de se investir no trabalho com este último nos primeiros anos de escolaridade. Parra (1996, p. 189) define cálculo mental como “o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter os resultados exatos ou aproximados” e justifica sua importância na escola, com base em três argumentos: 1) as aprendizagens no terreno do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas; 2) o cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico; 3) o trabalho de cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática. Convém destacar que a referida autora não relega o papel do cálculo automático, mas o coloca como um objetivo a ser alcançado a longo prazo, sugerindo que o trabalho de cálculo pensado seja acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático.

A psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária são objetos de estudo da pesquisa realizada por Gálvez (1996b). Com base nos estudos realizados por Piaget sobre a construção das relações espaciais e apoiando-se também na Teoria das

Situações Didáticas de Brousseau, a autora analisa o papel e o lugar da geometria nos programas oficiais das escolas primárias do México. Os resultados apontam para uma proposta de ensino que privilegia o “conhecimento de uma coleção de objetos definidos como fazendo parte de um saber cultural” (GÁLVEZ, 1996b, p. 249) em detrimento do desenvolvimento de um domínio das relações do aluno com o próprio espaço. A pesquisadora defende a possibilidade de se desenvolver, na escola, situações de ensino nas quais os alunos formulem e resolvam problemas relativos ao espaço, usando seu conhecimento intuitivo, porém precisando reformulá-lo e aperfeiçoá-lo para se apropriar do saber cultural.

De outra obra argentina, publicada mais recentemente no Brasil (PANIZZA et al., 2006), destacamos dois estudos, cuja revisão foi de grande importância para a análise e discussão dos resultados de nossa pesquisa: Quaranta e Wolman (2006) e Broitman e Itzcovich (2006).

No primeiro, o interesse das pesquisadoras volta-se para o papel das discussões nas aulas de matemática, levando em conta que os momentos de discussão estruturam-se a partir dos objetivos e conteúdos de ensino e também dos conhecimentos dos alunos. Quaranta e Wolman (2006) se referem às discussões como uma modalidade de intercâmbio entre todos os alunos de uma turma sob a orientação do professor. Para estudar essa questão empreenderam uma análise de fragmentos de registros de aulas de matemática em turmas de 1ª a 3ª séries, envolvendo a resolução de problemas de adição, de subtração e de divisão.

Sobre o papel das discussões, Quaranta e Wolman (2006) defendem que se constituem em momentos didáticos, ou seja, espaços de ensino e de aprendizagem no qual intervém um saber específico, situando as mesmas em relação às diferentes fases de uma situação didática, destacando sua fundamental importância especialmente naquelas de *formulação* e *validação*¹⁶. Por fim, baseadas na análise que fizeram dos registros de aulas anteriormente mencionados, as autoras apresentam sugestões sobre como organizar espaços de discussão nas aulas de matemática.

No outro trabalho mencionado, Broitman e Itzcovich (2006), focam problemas relativos ao ensino da geometria nas séries iniciais, tratando-a tanto como um estudo do espaço real, quanto de um espaço matematizado. Para os referidos autores há diferenças entre a *geometria empírica*, esta intuitiva, da observação e a geometria das *matemáticas*, das demonstrações. Em relação à primeira, destacam os conhecimentos espaciais, cujas aquisições

¹⁶ Conforme a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998) apresentada no presente trabalho em 3.2.2.

são espontâneas e independem de um ensino sistematizado. Sobre a segunda os autores destacam que seu processo construtivo depende de uma intencionalidade didática.

Visando oferecer contribuições para o ensino da geometria nas séries iniciais, os autores discutem a questão com base nas pesquisas já realizadas sobre o processo de construção de conceitos da geometria que não são intuitivos e que, portanto, não mantém uma relação imediata com o espaço físico das crianças. Para concluir, os autores propõem e analisam três situações de ensino envolvendo problemas que permitem iniciar as crianças no estudo de características de figuras e sólidos geométricos.

Em outra pesquisa, esta realizada no campo da aritmética e divulgada no Brasil na língua original¹⁷ por meio de uma revista voltada à educadores que atuam na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental, Broitman (2000) analisa o tratamento didático de problemas de estrutura multiplicativa no início da escolaridade básica. Nesse estudo a autora faz uma análise dos procedimentos de solução apresentados por crianças de 6 anos a dois problemas específicos: um de multiplicação (correspondência um-para-muitos) e outro um problema de divisão partição¹⁸.

Na discussão a pesquisadora chama a atenção para a variedade e riqueza dos procedimentos usados, os quais revelam diferentes formas de compreensão e tratamento das relações multiplicativas. Embora tenham sido registradas diferenças entre os procedimentos usados por crianças diferentes, os quais apontam para uma progressão em termos de representações matemáticas, a autora enfatiza que não deveriam ser considerados como “níveis” pelos quais as crianças devem passar até se apropriar do sistema simbólico de notação convencional. Como argumento, Broitman (2000) aponta para as variações didáticas de um problema que influenciam os modos de solução utilizados pelos alunos. Assim, uma criança que resolve um problema usando um procedimento aditivo, com apoio em notações numéricas numa dada situação, pode recorrer ao desenho para resolver outro problema de mesma estrutura, mas envolvendo números de magnitude diferente, por exemplo.

3. 4. 2 Pesquisas brasileiras

¹⁷ Língua espanhola (a pesquisadora é argentina).

¹⁸ Os problemas foram: 1) *quantas patas tem 6 cachorros?* 2) *tenho 12 caramelos e quero repartir em partes iguais entre meus 3 primos. Quantos caramelos cada um receberá?*

O ensino e a aprendizagem da multiplicação tem se constituído como objeto de estudo em diferentes pesquisas realizadas no contexto da pós-graduação (mestrado e doutorado) no Brasil. A revisão que apresentamos a seguir tem o intuito de construir um panorama geral sobre a forma como esta questão vem sendo estudada no âmbito acadêmico e situar a contribuição do nosso estudo ao quadro atual. Apresentamos inicialmente um conjunto de estudos que se relacionam com a nossa pesquisa por investigarem o tema em questão apoiando-se na epistemologia genética de Piaget e tendo como referencial a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. No segundo grupo, inserimos algumas pesquisas que, embora não tenham a multiplicação como objeto de estudo, assemelham-se ao nosso próprio estudo em relação à metodologia usada na pesquisa e cuja leitura ajudou-nos a delinear nossos procedimentos de coleta, registro e análise dos dados.

Franchi (1995) realizou um estudo sobre a compreensão de situações multiplicativas elementares por alunos de uma 4ª série, levando em conta as relações estabelecidas entre professor, alunos e o saber matemático no decorrer do processo de ensino. O estudo visava captar os processos de resolução matemática de problemas verbais multiplicativos usados pelos alunos, bem como suas dificuldades diante dessa tarefa.

Os dados foram coletados pela pesquisadora em três etapas. A primeira foi a observação participativa, por meio da qual a pesquisadora registrou suas observações sobre os procedimentos de ensino utilizado, aspectos relativos ao contrato didático em vigor na classe e o desempenho dos alunos frente às atividades desenvolvidas. Na segunda etapa foram realizadas entrevistas individuais nas quais os alunos eram solicitados a resolver problemas de estrutura multiplicativa em um contexto caracterizado por ser um espaço de diálogo diferenciado que favorecesse a manifestação mais espontânea dos alunos. A última etapa se deu em sessões de estudo para os alunos com dificuldade, no que se caracterizou como um acompanhamento extra-classe.

Em sua análise a autora chama a atenção para a influência do contrato didático sobre a relação dos alunos com o saber matemático em questão e da interferência recíproca da linguagem corrente e da linguagem matemática. Sobre o ensino das operações de multiplicação e de divisão na turma investigada, a pesquisadora destaca a separação entre as situações-problema escolares e as vivências das crianças de hoje:

“com suas fantasias, seus mitos, sua linguagem, seu modo pessoal de proceder, uma vez que a estas não cabia expressar-se sobre situações problematizáveis. As

possibilidades de atribuição, pelos alunos, de significado às operações aritméticas eram igualmente limitadas pela instauração de uma interlocução pontual entre aluno e professor no desenvolvimento da tarefa. Os procedimentos próprios aos alunos se excluíam desse processo e não eram valorizados” (FRANCHI, 1995, p.175).

A pesquisadora aponta para a necessidade de se permitir, em sala de aula, que os alunos elaborem procedimentos de solução, que tenham oportunidade de refletir sobre eles e que percebam que seus modos de solução são valorizados pelo professor.

Procedimentos de resolução de problemas verbais multiplicativos elaborados por crianças das séries iniciais foram o objeto de estudo de Taxa (1996). A pesquisadora analisou questões relativas à representação mental dos problemas, levando-se em conta o papel das abstrações e a utilização de material concreto de apoio.

Seu estudo foi realizado com 60 crianças de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental, distribuídas em três grupos: 1) sujeitos que não aprenderam multiplicação na escola; 2) sujeitos que estavam aprendendo multiplicação e 3) sujeitos que já tinham aprendido multiplicação. Verificou-se que as crianças do primeiro grupo recorreram preferencialmente aos procedimentos de contagem - embora este tenha sido usado também por crianças dos outros dois grupos - e que a adição repetida foi um procedimento bastante utilizado na solução de problemas pelos sujeitos dos três grupos. Na análise dos erros dos alunos, a pesquisadora destacou a preocupação destes em operar com os dados numéricos sem procurar compreender o enunciado e identificar a incógnita do problema.

A autora salienta que a discussão com os alunos sobre os diferentes procedimentos usados para resolver um mesmo problema (no caso dos resultados de sua pesquisa, especificamente os procedimentos de contagem, aditivos e multiplicativos) oferecem oportunidades importantes para os alunos avançarem na compreensão dos mesmos. Destaca, ainda, que alunos com dificuldades para responder problemas apresentados por escrito, conseguiram resolver problemas apresentados oralmente e com apoio em material concreto. Nesse sentido aponta para a manipulação de objetos como um elemento facilitador da construção de uma representação correta e da resolução do problema. Em função da observação da utilização da contagem como procedimento para resolver problemas multiplicativos, a autora chama a atenção para a possibilidade e os benefícios de se explorar problemas desse tipo com crianças mais novas.

Posteriormente, Taxa (2001) realizou um estudo com alunos ingressantes de terceira série do Ensino Fundamental para analisar as relações entre o desempenho matemático - em

especial em tarefas de solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa ligadas ao produto cartesiano - as operações combinatórias e o nível de abstração em prova de múltiplos comuns (PIAGET et al, 1995). Com base nos resultados de uma prova do SARESP, à qual foram submetidos no início da pesquisa, foram selecionados 64 crianças para compor dois subgrupos da amostra: os de melhor desempenho e os de pior desempenho na referida prova. Usando as provas piagetianas, a pesquisadora submeteu os sujeitos dos dois grupos a uma avaliação sobre as noções de múltiplos comuns e operações combinatórias, e tarefas de solução de problemas multiplicativos (produto cartesiano).

Os resultados mostraram que os sujeitos com melhor desempenho escolar em matemática também apresentaram os melhores níveis de classificação no desenvolvimento cognitivo, em provas piagetianas e em provas do tipo lápis e papel para solução de problemas multiplicativos.

Com base na análise sobre os procedimentos usados pelos alunos para resolver os problemas de combinatória, a autora chama a atenção para a necessidade de se desenvolver, em sala de aula um ambiente no qual o professor possa acompanhar o desenvolvimento das atividades dos alunos frente aos problemas propostos. Sugere ainda algumas orientações metodológicas para as aulas de matemática: troca de idéias entre os alunos sobre os problemas propostos (antes da resolução em si); uso de material concreto de apoio (incluindo aí as representações gráficas que os alunos podem fazer das situações propostas); socialização das diferentes representações gráficas usadas pelos alunos na solução dos problemas e a discussão sobre os procedimentos e as representações gráficas usadas.

Guimarães (2004) estudou as relações existentes entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização e o desempenho de crianças em situações que envolveram resolução de problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidas a situações lúdicas com jogo de argolas. O recurso ao jogo foi justificado pela pesquisadora por oferecer um contexto diferente daquele propriamente escolar para se pensar em relações multiplicativas.

Os resultados apontam para o fato de o jogo ter favorecido o desencadeamento dos processos cognitivos estudados. A pesquisadora destacou a importância das situações-problema apresentadas aos alunos para o progresso dos tateios empíricos, por meio dos quais os alunos lidaram inicialmente com o jogo, para a realização de antecipações. Ressaltou ainda que as situações nas quais os alunos foram solicitados a explicar suas jogadas por meio de

verbalizações ou representações gráficas, contribuíram para a tomada de consciência dos erros, uma vez que tornaram-se observáveis para os sujeitos e conseqüentemente para a busca de novos procedimentos visando o êxito.

Ao discorrer sobre as implicações pedagógicas de seu estudo, Guimarães (2004) ressalta as contribuições da teoria piagetiana à educação. Segundo a pesquisadora, uma fundamentação teórica sólida e a clareza sobre os conceitos que se quer trabalhar são imprescindíveis para o desenvolvimento de atividades lúdicas que garantam o desencadear do processo de equilíbrio, possibilitando a construção das estruturas apropriadas à multiplicação.

Barreto (2001) analisou os procedimentos de resolução de problemas verbais multiplicativos elementares mobilizados por alunos de uma 5ª série, e destacou o elevado grau de dificuldade dos alunos para resolver os problemas multiplicativos de quarta-proporcional. A análise qualitativa dos procedimentos não canônicos mobilizados pelos alunos para resolver os problemas apresentados aponta para a diversidade de procedimentos mobilizados e o uso de procedimentos intuitivos, diferentes do método ensinado pela escola, destacando a forte incidência de procedimentos de adição repetida. Os resultados encontrados, segundo a pesquisadora, indicam a necessidade de uma mudança no foco de interesse dos professores ao trabalharem com problemas, que deve ser deslocado do resultado final para o processo envolvido na solução, pois o primeiro caso leva a uma institucionalização precoce de procedimentos uniformes que são valorizados no âmbito escolar.

Numa pesquisa sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo, também realizado com alunos de 5ª série, Bonanno (2007) analisou as suas dificuldades para resolver problemas de estrutura multiplicativa, apontando para o predomínio do uso de algoritmos convencionais por parte dos alunos. A pesquisadora relaciona o baixo desempenho dos alunos na resolução dos problemas propostos à falta de compreensão da própria situação, o que os levou, muitas vezes, à escolha de uma operação inadequada para resolvê-los. Foram observados também: a aplicação correta de algoritmos convencionais, mas com dados incorretos - o que revela dificuldade para interpretar os enunciados - e o reconhecimento da operação correta e aplicação correta do algoritmo, mas sem a compreensão dos processos envolvidos. Mesmo em cálculos considerados fáceis pelos alunos, a explicitação de suas etapas foi difícil para a maioria.

Na discussão a autora aponta para a relação entre o baixo desempenho dos alunos na solução dos problemas propostos e a falta de ferramentas de controle dos resultados obtidos, destacando a importância de se explorar a construção do campo multiplicativo por meio da elaboração de procedimentos pessoais pelos alunos.

Oliveira (2004) estudou o impacto da aplicação de uma sequência de atividades geométricas envolvendo relações aritméticas - em especial as estruturas multiplicativas - em alunos de uma 4ª série, no que se refere às seguintes questões: constituição de relações numéricas; atribuição de significado às expressões numéricas; e desenvolvimento do sentido numérico no aprendizado de aritmética. As atividades propostas visavam a mobilização de processos de contagem em problemas de multiplicação de arranjo retangular, por meio dos quais procurou-se provocar um confronto entre noções de grandeza lineares e bilineares por variações ocorridas no perímetro e na área dos retângulos. Foram propostas também atividades de composição e decomposição de retângulos.

A análise dos procedimentos mobilizados pelos alunos diante das atividades propostas, apontam para uma contribuição das atividades no domínio da geometria para o desenvolvimento de relações numéricas. A autora chama a atenção ainda para a contribuição das atividades de composição e decomposição de figuras retangulares para a compreensão da relação 'parte-todo' em situações multiplicativas, e destaca o desenvolvimento de uma flexibilidade do raciocínio numérico e de autoconfiança dos alunos para resolver problemas.

Num enfoque diferente, mas com o mesmo referencial teórico das demais pesquisas revisadas, Canôas (1997) e Ewbank (2002) interessaram-se por estudar o campo conceitual multiplicativo na perspectiva dos professores.

A primeira autora mencionada investigou as concepções e competências de professores das séries iniciais com relação às operações de multiplicação e de divisão. Em seu estudo observou como os professores lidavam com situações multiplicativas em situação variadas (interpretação e avaliação de enunciados, resolução de problemas, formulação de enunciados e habilidades algorítmicas).

Os resultados mostraram que os professores investigados apresentavam dificuldades semelhantes àsquelas observadas nos alunos para lidar com as questões propostas. Sugerem ainda uma visão estreita em relação ao campo multiplicativo, sobretudo no que diz respeito à variedade de situações presentes nesse campo. Para as professoras investigadas, a multiplicação resume-se à soma de parcelas iguais e a divisão se resume à distribuição em

partes iguais. Canôas (1997) também verificou a falta de compreensão das discontinuidades entre o campo aditivo e o campo multiplicativo e chamou a atenção para o papel que o livro didático exerce nas aulas de matemática dessas professoras, sendo tomado como fim e não como um meio. Salienta a necessidade de uma formação sólida do professor em relação ao conteúdo e à forma como a criança constrói seu conhecimento matemático, como elemento fundamental para a escolha e uso do livro didático.

Resultados semelhantes foram encontrados por Ewbank (2002), que investigou os processos de ensino empregado por professores do Ensino Fundamental e da Educação de Jovens e Adultos. Seu objetivo era o de verificar a influência que a compreensão, concepções e crenças dos professores sobre a multiplicação e sobre sua aprendizagem exerce sobre o modo como ensinam essa noção para crianças e adultos. Para isso realizou entrevistas de estimulação de recordação, entrevista clínica, questionário de crenças e propôs que resolvessem problemas de multiplicação. Os dados coletados mostram que as experiências vividas por esses professores em sua própria formação escolar constituem-se no referencial mais importante para o ensino e sinalizam para necessidade de se rever as propostas de formação inicial e continuada dos professores, no sentido já apontado por Canôas (1997).

Destacamos por fim os estudos feitos por Vilas Bôas (2007), Castro (2004), Abreu (2008) e Bertini (2009) os quais, apesar de não focarem a questão da multiplicação, foram revisados em função do tipo de metodologia usada na realização da pesquisa.

O primeiro trata-se de uma pesquisa que integra as produções do LAPp.¹⁹ Vilas Bôas (2007) realizou um estudo sobre o jogo como recurso metodológico para a construção da noção de número na Educação Infantil segundo a perspectiva piagetiana. Assim como em nossa pesquisa, a pesquisadora atuou diretamente com os sujeitos em sala de aula (diferentes turmas de Educação Infantil), propondo atividades com jogos variados. Seu interesse voltou-se, mais especificamente, para as notações produzidas pelas crianças.

Vilas Bôas (2007) analisou os procedimentos usados por elas para superar os desafios postos, bem como de seus erros e dificuldades. Seus resultados sugerem que o jogo é um contexto propício para as crianças pensarem em alguns aspectos do número, como contagem correspondência e cálculo. A pesquisa destaca o papel problematizador dos jogos e assinala que os problemas oriundos desse contexto podem ser tanto desencadeadores como de

¹⁹ Laboratório de Psicopedagogia do Instituto de Psicologia da USP (LaPp - IPUSP), coordenado pelo Prof. Dr. Lino de Macedo, ao qual já nos referimos na apresentação do presente trabalho.

aplicação, lembrando que o jogo coloca o sujeito diante de novos problemas, que demandam a construção de novos esquemas de ação, mas também oferece novos contextos de aplicação para esquemas já construídos.

Os outros três estudos citados focam o uso de tarefas exploratório-investigativas nas aulas de matemática. Bertini (2009) analisou as potencialidades e limitações do uso de tarefas investigativas. Fez isso a partir das ações e reflexões de uma professora de terceira série numa relação de parceria com a pesquisadora nos momentos de estudo, preparação e reflexão sobre as tarefas desenvolvidas em sala de aula.

Os resultados mostraram que a exploração de problemas mais abertos favorece não apenas a aprendizagem dos conceitos envolvidos mas também o desenvolvimento da capacidade de registrar suas próprias idéias e de argumentar a favor delas perante o professor e os colegas. A professora da turma na qual a pesquisa foi realizada assistiu aos vídeos de suas aulas e elaborou registros reflexivos sobre o desenvolvimento das mesmas. A pesquisadora destaca a importância desses momentos de reflexão pessoal para o desenvolvimento profissional da professora.

Num estudo semelhante, Abreu (2008) analisou o processo de reflexão sobre a própria prática a partir das atividades investigativas. Os dados de análise foram: os registros-escritos dos alunos; registros escritos da professora-investigadora, colhidos em forma de narrativa, que serviram como diário de campo; registros em áudio de dois grupos de trabalho e de uma aula de socialização dos resultados. A análise foi organizada em torno de três eixos: (a) mediação/interação realizada pela professora; (b) autonomia adquirida pelo aluno; e (c) a aula de matemática como um espaço de produção de conhecimentos.

Na discussão foram destacadas as contribuições que a pesquisa sobre a própria prática, por meio da análise de suas aulas, podem oferecer à formação do professor. Aponta-se ainda para as contribuições do trabalho com atividades investigativas para o desenvolvimento matemático dos alunos.

Castro (2004), que também enfrentou as dificuldades de se pesquisar sobre a própria prática, destaca o papel da produção de narrativas reflexivas escritas, baseadas em diários de campo e em gravações em áudio, visando aliar a fidelidade dos fatos à subjetividade destes. Na discussão, destacou que a experiência de planejar, vivenciar, analisar, refletir e escrever a respeito da experiência pedagógica com investigações matemáticas em sala de aula foi extremamente formativa para a professora-pesquisadora.

Consideramos que nosso estudo integra-se ao quadro de produções aqui exposto, oferecendo uma contribuição original quanto ao modo de se fazer pesquisa em sala de aula. Embora se assemelhe àqueles citados nessa parte final de revisão, tem sua particularidade no uso de uma abordagem qualitativa construtivista.

Em relação ao objeto de estudo - o ensino da noção de multiplicação - pensamos que a nossa pesquisa pode oferecer uma contribuição ao atual quadro, por colocar em foco não apenas as competências matemáticas dos alunos, mas também outras, que transcendem os limites dessa disciplina.

4 CONTEXTO METODOLÓGICO

Nessa parte do trabalho explicitamos, justificamos e fundamentamos nossas opções metodológicas. Também descrevemos as condições nas quais a pesquisa foi realizada, desde a caracterização dos sujeitos, até a apresentação detalhada dos meios e instrumentos dos quais nos servimos para coletar, registrar e analisar os dados.

4.1 Pesquisa qualitativa construtivista

Uma pesquisa pode ser definida como um conjunto de atividades orientadas pelo desejo de se descobrir novos conhecimentos em determinado domínio. Há, naturalmente, diferentes formas de se fazer pesquisa, as quais se definem tanto em função do objeto de conhecimento quanto em função da própria concepção de conhecimento assumida pelo pesquisador.

Numa visão positivista, a pesquisa busca verdades absolutas e incontestáveis e para isso recorre a um método que trata a realidade como algo objetivo, estável e que pode ser estudado de forma controlada por meio de intervenções experimentais. Procura-se eliminar toda subjetividade pelo isolamento e controle das variáveis que compõem o fenômeno de estudo (REES, 2008). O rigor do método experimental já contribuiu de maneira decisiva para o desenvolvimento das ciências físicas e naturais.

Essa forma de fazer pesquisa, entretanto, é incompatível com a visão de conhecimento que assumimos, de acordo com a qual a realidade só pode ser concebida como algo dinâmico, contextualizado e indissociável daquele que pretende conhecê-la.

Em nossa pesquisa, em vez de buscar a separação entre pesquisador e objeto de estudo, optamos pela participação ativa do primeiro na construção do conhecimento, em consonância com a concepção de Lüdke e André (1986), sobre o papel do pesquisador numa abordagem qualitativa de pesquisa:

[...] é a partir da interrogação que ele faz aos dados, baseada em tudo o que ele conhece a respeito do assunto – portanto, em toda a teoria acumulada a respeito -, que se vai construir o conhecimento sobre o fato pesquisado. O papel do pesquisador é justamente o de servir como veículo inteligente e ativo entre esse conhecimento acumulado na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 4 e 5)

De acordo com as referidas autoras, a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados por um pesquisador que se coloca em contato direto com a realidade estudada uma vez que seu interesse se volta para a análise de um problema conforme ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas. Para além de um conjunto de técnicas e métodos de coleta de dados, a pesquisa qualitativa pode ser vista como um modo de se fazer ciência e de se considerar a produção do conhecimento (DEMO, 1998; MARTINS, 2004). Ela é indicada para a realização de estudos de fenômenos humanos complexos, quando se concebe que as circunstâncias particulares em que um determinado objeto se insere são essenciais para que se possa compreendê-lo. Nesse sentido, quando decidimos estudar o ensino e a aprendizagem de matemática no contexto da sala de aula, considerando os múltiplos fatores que intervêm nesse processo, inserimos nosso estudo no contexto das pesquisas qualitativas.

Nesse tipo de pesquisa o conhecimento é visto como uma produção construtivo-interpretativa, como pode ser inferido da citação que segue:

A variedade de material obtido qualitativamente exige do pesquisador uma capacidade integrativa e analítica que, por sua vez, depende do desenvolvimento de uma capacidade criadora e intuitiva. [...] A intuição aqui mencionada não é um dom, mas uma resultante da formação teórica e dos exercícios práticos do pesquisador (MARTINS, 2004, p. 292).

Assim, a metodologia adotada deve estar em consonância com a concepção que se tem do objeto de estudo e, em nosso caso, esse objeto é concebido segundo a perspectiva epistemológica construtivista. Dessa forma, estudá-lo por meio de uma abordagem qualitativa construtivista parece-nos ser, antes de tudo, uma questão de coerência.

Uma pesquisa construtivista é interacionista, uma vez que procura enfrentar a complexidade da realidade estudada pela coordenação dos elementos que a compõe e não pelo isolamento de variáveis. A decisão de realizar a pesquisa em uma sala de aula de uma escola regular, enfrentando o desafio de ensinar um conteúdo que faz parte do programa curricular, colocou-nos diante de uma realidade dinâmica e complexa. Dinâmica porque em permanente mutação, complexa porque constituída por diferentes elementos interagindo entre si (pesquisadora, alunos, professora da turma, saber matemático em questão, atividades propostas, etc.).

Nesse tipo de abordagem, um pesquisador, com certa pretensão de conhecimento de uma realidade, interage com ela para conhecê-la e precisa lidar com o que essa interação

apresenta como novidade. Conforme apontado por Macedo (2009) “a visão interacionista de Piaget é dialética, entendida como jogo de relações *irredutíveis, complementares e indissociáveis* que estruturam o sistema cognitivo no nível em que isso é possível para o sujeito que conhece e igualmente para o objeto que é conhecido” (MACEDO, 2009, p. 47, grifo nosso). Assim, na relação do pesquisador com o objeto de conhecimento, ambos se complementam num contexto de trocas.

Em nossa pesquisa foi realizada uma intervenção de ensino relativa à noção de multiplicação. Nessa intervenção, conforme já comentado, havia vários elementos interagindo e o nosso interesse estava justamente em observar os efeitos dessa interação em cada um dos elementos, como por exemplo: qual o efeito das atividades propostas sobre as crianças? Qual o efeito das atividades das crianças sobre a pesquisadora? Qual o efeito das intervenções da pesquisadora sobre a professora da turma?

Outro aspecto importante da pesquisa construtivista é a idéia de equilibração, pois ao pensar em termos de *efeitos da interação*, a avaliação torna-se fundamental, como um instrumento de intervenção. Avaliar nesse sentido significa orientar a ação em função do objetivo almejado, significa regular, acompanhar algo que se movimenta. Nesse sentido avaliar a aprendizagem dos alunos em relação à noção de multiplicação não significa realizar provas e medir a aprendizagem em termos de respostas certas ou erradas, mas observar, acompanhar os modos de enfrentamento de um mesmo problema em diferentes momentos em busca de indícios de progresso, de aperfeiçoamento.

Piaget fazia isso em suas pesquisas, observando como as crianças evoluíam na compreensão de um problema. A influência do método-clínico piagetiano, por meio do qual busca-se “compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra-argumentações do pesquisador” (CARRAHER, 1998, p. 6) poderá ser verificada na apresentação dos resultados, sobretudo em alguns recortes que contém diálogos estabelecidos entre pesquisadora e alunos. Embora nosso estudo tenha se desenvolvido num outro contexto e com objetivos diferentes daqueles realizados por Piaget e seus colaboradores, procuramos apreender do seu método de pesquisa dois elementos essenciais: *observação e reflexão*.

Tais elementos, que se constituem nas habilidades básicas de qualquer pesquisador não se tratam, por isso, de ações triviais, sobretudo quando se trata de uma pesquisa qualitativa.

Para observar e para refletir é necessário ter disciplina, tanto para o registro quanto para a análise dos dados.

Além disso, a opção por empreender a pesquisa em sala de aula, por meio da realização de uma intervenção pedagógica planejada e desenvolvida pela pesquisadora, colocou diante de nós o instigante desafio de conciliar duas práticas distintas: *ensino* e *pesquisa*. Nesse sentido duas questões mereceram especial cuidado durante todo o processo de pesquisa e, em especial, na fase de coleta e análise dos dados: como conciliar tais práticas que se constituem por objetivos tão diferentes? Como evitar que os objetivos da pesquisa se confundissem com aqueles próprios da atividade de ensino?

Para lidar com estas questões procuramos, em primeiro lugar, definir com clareza as diferenças existentes entre objetivos de ensino e de pesquisa e encontramos em Fiorentini e Lorenzato (2006) um apoio importante. Embora reconheçam a existência de uma indissociabilidade entre as referidas atividades, os autores salientam que os objetivos de ensino exigem do professor o desenvolvimento de uma prática pedagógica que seja o mais eficaz possível do ponto de vista da formação dos alunos. Os objetivos de pesquisa, entretanto, se voltam para aquilo que se pode conhecer a partir das experiências docentes.

Dessa forma, o foco do pesquisador deve estar na análise e compreensão do processo educativo dos alunos ou no potencial didático-pedagógico (bem como possíveis limitações) de uma determinada prática. Decorre daí que “uma experiência educativa pode resultar em um fracasso pedagógico, mas, do ponto de vista investigativo, a mesma experiência pode significar uma rica fonte de aprendizado ou de produção de conhecimento sobre a prática docente” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 75).

Em nosso caso, era necessário exercer uma prática de ensino com foco no tema de estudo, tendo o cuidado de centralizar o olhar de pesquisador para o recorte específico, ainda que, na prática, nosso movimento estivesse sendo exercido dentro de uma totalidade maior, que é o fenômeno educativo.

Para lidar com esse desafio sem cair nas armadilhas por ele apresentadas, era necessário dedicar atenção especial aos procedimentos de coleta, registro e análise dos dados. Estava claro que nossos objetivos eram totalmente compatíveis com uma abordagem qualitativa construtivista, no entanto uma questão ainda nos inquietava: como usufruir da liberdade que esse tipo de abordagem oferece, sem perder o rigor e cuidado exigidos pelo estudo científico? Ainda que encontrássemos uma referência fundamental no método clínico

piagetiano, nossos objetivos de pesquisa, bem como o contexto da sala de aula de uma turma regular do Ensino Fundamental requeriam uma adequação dos procedimentos de coleta, de registro e de análise dos dados.

Tendo essa questão em mente, empreendemos um exame sobre algumas estratégias de pesquisa qualitativa, focando nossa atenção sobre duas específicas: a pesquisa-ação e o estudo de caso. Embora nossa pesquisa não se enquadre em nenhuma dessas, consideramos que em alguns aspectos se aproximava de ambas e, nesse sentido, tal revisão contribuiu de maneira decisiva para o desenho metodológico de nossa investigação.

A afinidade de nosso estudo com a pesquisa-ação se faz notar no papel exercido pelo pesquisador e pelos sujeitos da pesquisa, conforme especificado por Thiollent (2007):

Em geral, a idéia de pesquisa-ação encontra um contexto favorável quando os pesquisadores não querem limitar suas investigações aos aspectos acadêmicos e burocráticos da maioria das pesquisas convencionais. Querem pesquisas nas quais as pessoas implicadas tenham algo a “dizer” e algo a “fazer”. Não se trata de simples levantamento de dados ou de relatórios a serem arquivados. Com a pesquisa-ação os pesquisadores pretendem desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos observados. (THIOLLENT, 2007, p. 18)

Entretanto, ainda que em nossa pesquisa houvesse realmente uma ação por parte das pessoas implicadas no problema a ser estudado, tal problemática não foi levantada na própria realidade a ser estudada, ou seja, não havia emergido do próprio grupo, como ocorre numa pesquisa-ação, mas nasceu de um interesse particular da pesquisadora. Além disso, ainda que nosso estudo tenha sido realizado em sala de aula e não em situação de laboratório, trata-se de uma pesquisa qualitativa com raiz na Psicologia e nesse sentido, nossos objetivos e interesses de análise diferenciavam-se daqueles próprios das perspectivas sociológicas ou antropológicas.

Por outro lado, levando-se em conta a característica de nosso estudo que nos aproximava desse tipo de estratégia - a ação por parte das pessoas implicadas no problema - procuramos incorporar à nossa investigação sua preocupação com questões éticas da pesquisa. Nesse plano, um princípio básico da pesquisa-ação consiste no respeito com que o pesquisador deve tratar os sujeitos envolvidos (THIOLLENT, 2007). Nesse sentido, tomamos o cuidado para que nossa inserção em sala de aula não fosse uma imposição, mas se efetivasse pelo consentimento e aceitação por parte do grupo.

Especialmente em relação à professora da turma, procuramos nos certificar de que a sua participação na pesquisa tratava-se de uma decisão pessoal e não de uma determinação da

direção ou da coordenação pedagógica da escola. Além disso, cuidamos para que professora e alunos não fossem tratados como meros objetos de investigação. Para isso, realizamos reuniões com a professora, antes, durante e após o término da pesquisa, tanto para informá-la sobre nossos objetivos e sobre o desenho da pesquisa, quanto para conhecer suas expectativas e a sua forma de olhar para o processo interventivo. Explicitamos também nossos objetivos de pesquisa aos alunos e informamos sobre os procedimentos que seriam usados, com destaque para a gravação das aulas em vídeo, a qual foi autorizada pelos responsáveis.

Além disso, após o término da fase de coleta de dados, no primeiro semestre de 2007, foi dado prosseguimento à intervenção no segundo semestre, embora de forma menos sistemática. O interesse pela continuidade do trabalho foi manifestado por alunos e pela professora da turma. No início de 2008, voltamos à escola para oficializar nosso agradecimento e aproveitamos para entregar uma declaração à professora pela sua participação na pesquisa. Firmamos também um compromisso de entregar à escola uma cópia da tese, assim que finalizada e de apresentá-la em um encontro com os professores no ano de conclusão da mesma (no caso, 2010).

Durante todo o processo, percebemos uma receptividade muito grande tanto por parte dos alunos, quanto da professora e da equipe pedagógica. Algumas professoras de outras turmas, mostraram-se bastante interessadas pela pesquisa e em função disso, foi realizado em maio de 2007, um encontro, no período noturno, com todos os professores da escola e a pesquisadora. O objetivo era informá-los sobre o estudo que estava sendo realizado com uma das turmas da terceira série e discutir sobre o ensino da matemática na perspectiva nele assumida.

Assim, durante todo o período de inserção na escola, procuramos orientar nosso modo de proceder com base nos princípios éticos da pesquisa-ação.

Em relação à outra abordagem anteriormente mencionada, o estudo de caso, trata-se também de uma estratégia de pesquisa indicada àqueles que desejam estudar fenômenos sociais complexos. Com vistas a diferenciar a estratégia específica do contexto mais amplo no qual pode ser inserida, que é da pesquisa qualitativa, e de outras possíveis estratégias, Yin (2005) apresenta uma definição técnica para o estudo de caso, separando-a em duas partes. A primeira, transcrita abaixo, refere-se às intenções e aos objetivos do pesquisador:

Um estudo de caso é uma investigação empírica que

- investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando
- os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. (YIN, 2005, p. 32, grifo do autor).

No que se refere aos aspectos acima expostos, fica evidente, em nossa pesquisa, o desejo de se lidar com as condições contextuais - daí a escolha do ambiente de sala de aula e não de laboratório para sua realização - considerando sua relevância para o fenômeno estudado. Embora nossa pesquisa não se trate de um estudo de caso, a revisão que fizemos acerca dessa estratégia de pesquisa foi de grande importância para a definição dos procedimentos de coleta, registro e análise dos dados, conforme justificamos a seguir.

Uma das marcas de um estudo de caso, é beneficiar-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta de dados e em nossa pesquisa, que se realizou por meio de uma intervenção pedagógica elaborada e conduzida pela pesquisadora, a teoria exerceu um papel essencial na fase de coleta dos dados, tanto no que diz respeito ao planejamento das atividades para os alunos quanto à forma como a própria investigação foi conduzida.

Conforme apontado por Yin (2005), a maioria dos estudos de casos não termina exatamente como foi planejado e a compreensão das questões teóricas básicas da pesquisa, é essencial para que o pesquisador seja capaz de fazer julgamentos analíticos durante a coleta de dados. É a partir desses julgamentos que ele pode identificar a necessidade de mudanças ou adaptações em seu projeto. No trecho que transcrevemos abaixo o autor, dirigindo-se diretamente àqueles que pretendem usar o estudo de caso como estratégia de pesquisa, mostra que deverão estar aptos a fazer inferências durante a coleta dos dados:

Sem uma noção muito clara das questões em discussão, você poderia deixar passar pistas importantes e não saberia identificar uma mudança no curso do estudo, quando ele fosse aceitável ou mesmo desejável. O ponto-chave é que a coleta de dados para um estudo de caso não se trata meramente de registrar os dados mecanicamente, como se faz em alguns outros tipos de pesquisa. Você deve ser capaz de interpretar as informações à medida que estão sendo coletadas [...] (YIN, 2005, p. 86, grifo do autor).

Essa interpretação das informações à qual o autor se refere, foi fundamental em nossa investigação, sendo que as próprias mudanças no curso da intervenção tornaram-se objeto de análise na pesquisa. Nesse sentido, os três princípios de coleta de dados apresentados por Yin (2005) e dos quais nos apropriamos, contribuíram de maneira expressiva para nosso estudo: a)

utilização de várias fontes de evidência; b) criação de um banco de dados; c) manutenção de um encadeamento de evidências. As fontes usadas em nosso estudo e a forma como foram organizadas e tratadas, serão especificadas mais adiante.

Por meio deste texto, procuramos apresentar os fundamentos metodológicos que caracterizam nosso estudo como uma pesquisa qualitativa construtivista, bem como explicitar os elementos de outras abordagens da pesquisa qualitativa (pesquisa-ação e estudo de caso), que serviram como referência para a estruturação da estratégia que adotamos para a definição dos procedimentos usados em nossa investigação.

Diante do exposto, consideramos que ao apresentar os procedimentos de coleta, registro e análise dos dados faz-se necessário construir uma narrativa detalhada, de forma que o leitor possa visualizar as atividades propostas, seu encaminhamento em sala de aula, os modos pelos quais foram registrados e analisados. A esses aspectos será dedicado o próximo capítulo.

4. 2. O trabalho de campo.

4. 2. 1 Objetivos da pesquisa

O objetivo geral dessa pesquisa foi propor uma metodologia, fundamentada no construtivismo de Piaget, para ensinar multiplicação para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse estudo, que foi realizado mediante uma intervenção pedagógica planejada e desenvolvida pela pesquisadora, buscamos analisar a referida proposta metodológica por meio dos seguintes procedimentos:

- Descrever os recursos usados pelos alunos para resolver os problemas apresentados.
- Destacar os processos desencadeados pela intervenção realizada e que foram indicativos da ocorrência de uma interação construtiva.
- Avaliar as atividades realizadas em função de seus efeitos sobre os sujeitos da pesquisa, considerando-se os três tipos de relações em jogo: intelectuais, sociais/morais e didáticas.

4. 2. 2 Local

4. 2. 2. 1 A escola:

A pesquisa foi realizada em uma escola da rede municipal de Curitiba, localizada em um bairro de classe média a, aproximadamente, 15 quilômetros do centro. A referida unidade foi inaugurada em 1992 e o projeto estrutural do imóvel segue o modelo das demais unidades construídas na época.

Em 2007, ano em que a pesquisa foi realizada, contava com um total de 529 alunos da Educação Infantil (para crianças de 5 anos), à segunda etapa do segundo ciclo do Ensino Fundamental. Embora estivesse organizada em ciclos de aprendizagem, a nomenclatura “série” era ainda usada internamente, entre professores e alunos. Daí nossa opção pelo uso dessa mesma nomenclatura – 3ª série – para nos referirmos à primeira etapa do segundo ciclo, onde nossa pesquisa foi feita. No referido ano, a escola contava com 34 educadores em sua equipe pedagógica (entre professores regentes, professores especializados e pedagogas) e atendia os alunos em dois turnos: manhã e tarde. A implantação do Ensino Fundamental de 9 anos foi iniciada nessa escola apenas no ano 2007, sendo que no ano em que a pesquisa foi realizada havia 4 turmas de 1º ano do novo currículo.

A clientela era constituída, em sua maioria, por crianças de classe média baixa que moravam nas imediações da escola.

Em relação à sala de aula, consideramos o tamanho adequado à quantidade de alunos, mas havia mais carteiras do que alunos, o que acabava reduzindo um pouco o espaço. Uma das paredes era ocupada inteiramente por janelas, propiciando boa iluminação e um espaço arejado. Nas paredes havia diferentes cartazes de temas variados (mapas, tabuadas, equivalência de medidas, origem e evolução do dinheiro, animais em extinção e dinossauros). Os mesmos cartazes permaneceram ali durante o ano todo.

Algumas aulas foram realizadas na sala da turma de Educação Infantil, uma vez que ficava vazia no período matutino. Essa sala foi usada na maioria das aulas em que trabalhamos com jogos, pois no lugar de carteiras individuais, havia mesas para quatro crianças. Além disso, essa sala era um pouco maior do que a da terceira série, o que facilitava nossa locomoção entre os alunos para observar como jogavam.

Na maioria das aulas realizadas na própria sala da terceira série, as carteiras foram arrumadas em U, de forma que as crianças pudessem participar melhor das discussões.

4. 2. 2. 2 O contexto de escolha dessa escola:

Nossa opção pela realização do estudo em uma escola da rede pública, se deu em função de ela se constituir no espaço de formação acadêmica da maioria das crianças brasileiras. Fizemos inicialmente um levantamento de algumas escolas municipais com as quais já possuíamos algum tipo de contato anterior (pela realização de atividades de pesquisa e/ou de formação de professores) e selecionamos três unidades, em bairros diferentes, todos de fácil acesso. Como a coleta de dados exigiria a colaboração de auxiliares de pesquisa e seria realizada num período relativamente longo de tempo, durante o qual estaríamos presentes na escola duas vezes por semana, consideramos que escolas muito distantes do centro e/ou de difícil acesso não seriam adequadas.

A diretora da primeira escola com a qual foi feito contato foi tão acolhedora e demonstrou tanto interesse pela realização da pesquisa em sua unidade, que consideramos desnecessário visitar as outras duas escolas, definindo assim o local de pesquisa.

O primeiro contato com a unidade escolhida foi feito em dezembro de 2006, num encontro com a diretora e as duas pedagogas, no qual foram expostos os objetivos da pesquisa e as condições de sua realização. Também foram explicitados os motivos pelos quais pretendíamos realizar a intervenção pedagógica em uma turma do segundo ciclo e apresentado um esboço do roteiro de atividades. As duas pedagogas consideraram que as atividades eram mais adequadas ao currículo da terceira série e sugeriram, com anuência da diretora, que a pesquisa fosse realizada nessa série. Devido à proximidade de encerramento das atividades daquele ano letivo, a diretora sugeriu que ela mesma apresentasse a proposta de pesquisa às duas professoras de terceira série e investigasse a disponibilidade e abertura para a realização da pesquisa em suas turmas. Concordamos, mas foi solicitado apenas que a participação não fosse imposta às professoras, pois isso poderia comprometer o desenvolvimento da pesquisa.

Pouco antes do encerramento daquele ano letivo, a diretora da escola informou-nos que uma das professoras ficou particularmente interessada pela pesquisa, mostrando total disponibilidade para sua realização na turma da qual seria professora regente no ano seguinte.

4. 2. 2. 3 O encontro com a professora:

O primeiro contato com a professora ocorreu em fevereiro de 2007, na semana que antecedia o início das aulas com os alunos, em uma reunião na qual foram apresentados os

objetivos da pesquisa e as suas condições de realização. Confirmada a disponibilidade e o interesse da professora na realização da pesquisa em sua turma, ficou combinado que nossas atividades iniciariam na primeira semana de março, quando as crianças já tivessem integradas à nova série. Foi marcada também uma nova reunião com a professora para o início de março, na qual seria apresentado o roteiro da intervenção pedagógica. Nessa reunião, antes de apresentar as atividades que compunham o módulo de intervenção, foi solicitado à professora que falasse sobre: a) a forma como costumava encaminhar o trabalho com a multiplicação e a divisão na terceira série; b) sua opinião acerca do desempenho de seus alunos em relação à matemática, com base nas três semanas de trabalho com aquela turma e; c) suas expectativas em relação à intervenção pedagógica que seria realizada durante a pesquisa. O registro dessa entrevista é apresentado no Apêndice 1.

Por meio das questões acima apresentadas, pretendíamos conhecer as suas concepções sobre o ensino e a aprendizagem das noções e operações relativas à multiplicação e à divisão, bem como caracterizar o tipo de contrato didático que regia as relações dessa professora com seus alunos nas aulas de matemática.

Não queríamos que a professora apenas nos cedesse sua turma para a realização da pesquisa, mas que se sentisse envolvida com ela. Assim, ficou combinado que ela observaria as aulas, colaboraria com as atividades quando julgasse oportuno e faria um relatório de cada aula, direcionado por um roteiro que lhe seria entregue no início de cada dia em que estivéssemos na escola²⁰. Assinamos um Termo de Consentimento para Participação na Pesquisa, no qual foram especificados os direitos e deveres de cada parte, sendo que cada uma ficou com uma cópia do mesmo (Apêndice 2).

4. 2. 3 Sujeitos

4. 2. 3. 1 Caracterização dos sujeitos

Os sujeitos de nossa pesquisa foram os alunos e a professora da terceira série A da referida escola, turno matutino. Essa turma iniciou o ano letivo de 2007 com 30 alunos, sendo 16 meninos e 14 meninas. Durante o ano, 10 desses alunos deixaram a turma: 3 trocaram de turno, 3 foram transferidos para outra escola e 4 mudaram para outra cidade. O mesmo número de alunos foi incorporado, ao longo do ano, nessa turma: 3 alunos vindos do outro

²⁰ No item 4.2.5.3 será melhor explicitado o papel da professora na pesquisa.

turno e 7 transferidos de outra escola. A maior parte das modificações ocorreu logo nas primeiras semanas de aula ou após o término do primeiro semestre, sendo que durante o período em que a coleta de dados foi realizada com regularidade e de forma mais intensa, o quadro de alunos variou muito pouco.

A maior parte dos alunos morava no bairro no qual a escola está situada e suas idades variavam entre 8 e 10 anos, sendo que a maioria deles completou 9 anos durante o ano de 2007.

A professora, com 34 anos de idade em 2007, contava com 16 anos de experiência docente nas séries iniciais do Ensino Fundamental, atuando sempre na rede pública de ensino. Fez Magistério e graduou-se em Pedagogia pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (PR), tendo concluído seu curso em 1997. Em 2002 fez um curso de especialização em Educação Infantil e participava regularmente de cursos de formação de professores promovidos pela Secretaria Municipal de Educação de Curitiba. Destacamos se tratar de uma pessoa muito alegre, comunicativa e solidária.

4. 2. 3. 2 O encontro com os alunos

Nosso primeiro contato com os alunos da 3ª série A ocorreu na última semana de fevereiro, no mesmo dia em que apresentamos o roteiro de intervenção para a professora. Após o recreio ela nos apresentou às crianças (a pesquisadora que aqui escreve e duas estagiárias), mencionando que já lhes havia explicado sobre a realização da pesquisa. Nessa ocasião conversamos com as crianças, falando um pouco sobre nós e sobre nossa inserção naquela turma. Explicamos como a pesquisa seria desenvolvida, quanto tempo duraria, com que frequência estaríamos presente em sala de aula e que recursos seriam utilizados. Aproveitamos também para entregar o Termo de Consentimento para Participação na Pesquisa, explicando-lhes que deveria ser assinado pelos pais ou responsáveis (Apêndice 3).

As crianças estavam muito animadas com a perspectiva de fazer parte da pesquisa e ficaram especialmente interessados na idéia de serem filmadas. Fizeram muitas perguntas e se mostraram ansiosas em relação ao início das atividades.

Nesse dia permanecemos em sala observando uma aula, durante a qual as crianças se levantaram muitas vezes para conversar conosco, mostrar seus cadernos e fazer perguntas variadas sobre a pesquisa, mas também sobre nossa vida pessoal.

As carteiras estavam dispostas em pares, mas as crianças trabalhavam individualmente, respondendo algumas perguntas sobre um texto informativo cujo tema era *Animais em extinção*. As perguntas haviam sido registradas no quadro-negro antes do recreio e algumas crianças ainda estavam copiando-as enquanto outras já estavam respondendo. Percebemos que as crianças chamavam muito a professora, pedindo que ela explicasse o que era para responder em cada questão. Muitas delas, ao registrar uma resposta, levavam o caderno até a professora pedindo-lhe que fizesse a correção. Percebemos que havia uma relação bastante afetiva entre a professora e os alunos, mas também de muita dependência.

4. 2. 4 Procedimentos de coleta dos dados

A intervenção pedagógica por meio da qual coletamos os dados dessa pesquisa foi realizada, de modo mais sistemático, durante o primeiro semestre de 2007. Essa intervenção foi estruturada na forma de um módulo de ensino.

Planejamos, inicialmente, realizar as atividades duas vezes por semana (quartas e sextas-feiras) no período anterior ao recreio, o que correspondia a, aproximadamente, 2 horas em cada dia. Entretanto, no decorrer do semestre surgiram variados imprevistos (tanto por parte da escola, quando dos pesquisadores), os quais impossibilitaram que essa regularidade fosse mantida. Em algumas semanas estivemos presentes em sala de aula nos dois dias, em outras apenas um dia e houve semanas em que a intervenção não foi realizada. Durante o primeiro semestre foram realizadas 19 aulas com duração de 2 horas cada uma.

Apesar de termos delimitado o período de coleta de dados para o primeiro semestre de 2007, a intervenção continuou a ser realizada também no segundo semestre, porém com menor regularidade (entre duas a três vezes por mês). Essa continuidade, sem um compromisso direto com a pesquisa em questão, ocorreu em função do interesse pessoal da pesquisadora pela investigação em sala de aula. Além disso, a própria postura da professora, que nos ofereceu tão abertamente a sua turma e a receptividade dos alunos suscitaram um compromisso de continuidade. Nesse período não foi possível contar com o apoio das estagiárias, dessa forma apenas algumas aulas foram filmadas (com o apoio de um tripé). Desse período, incorporamos ao nosso estudo apenas duas aulas, cujos dados consideramos relevantes para a pesquisa. Esses dados consistem nos registros produzidos pelos alunos para resolver os problemas propostos e observações registradas pela pesquisadora sobre a produção dos registros e sobre a explicação das crianças para os procedimentos usados.

Assim, consideramos nesse estudo as atividades realizadas em 21 aulas totalizando 42 horas.

4. 2. 4. 1 O módulo de ensino

As atividades propostas em cada aula foram elaboradas pela pesquisadora a partir de sua experiência docente fundamentada na literatura citada nessa pesquisa. Além disso, algumas das atividades aqui propostas são exploradas também no contexto de formação de professores no qual atua e já foram apresentadas nos livros didáticos de sua autoria (STAREPRAVO, 2003).

Convém ressaltar que a escolha e a elaboração das atividades também foram se desenhando ao longo da intervenção, como poderá ser observado na apresentação das atividades exploradas em cada aula (item 4.2.4.3). A forma como elas foram planejadas e desenvolvidas durante nossa inserção em sala de aula fica mais evidenciada no capítulo de apresentação dos resultados, especialmente quando tratamos do papel exercido pela avaliação ao longo da intervenção.

O foco, em termos de conteúdo da matemática, estava na multiplicação, sobretudo na construção da tabuada (até 10) e isso pode ser verificado nas atividades exploradas em cada aula. Entretanto alguns fatores nos levaram a propor atividades envolvendo também situações elementares de divisão, sendo o principal deles a compreensão da relação entre multiplicação e divisão como operações inversas. Na fundamentação teórica desse trabalho destacamos os estudos desenvolvidos por Vergnaud (1983; 1994), que trata as operações de multiplicação e de divisão como parte de um mesmo campo conceitual: o das *estruturas multiplicativas*. Uma vez que a pesquisa foi desenvolvida no contexto da sala de aula, com todos os alunos da turma, em horário regular de aula e com a participação da professora, consideramos importante que algumas das atividades explorassem também a divisão. Por um lado, ofereceríamos oportunidade aos alunos de observar relações entre as duas operações aritméticas e por outro, ofereceríamos oportunidade à professora de observar como seus alunos lidavam com a divisão num contexto diferente daquele em que se privilegia a aplicação do algoritmo.

Em função disso, alguns aspectos sobre o ensino e a aprendizagem da divisão também foram analisados nessa pesquisa e decorre daí nossa opção por incorporar os dados relativos a duas aulas realizadas no segundo semestre, uma vez que em ambas foram explorados

problemas de divisão²¹. Esses dados complementam aqueles coletados no período regular da coleta de dados.

No quadro a seguir são especificados os objetivos das atividades propostas aos alunos. Elas foram organizadas em quatro grandes blocos de acordo com o recurso principal utilizado.

BLOCOS DE ATIVIDADES	AULAS	OBJETIVOS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS
Problemas envolvendo arranjo retangular	1, 2, 3, 4, 14 e 15	<ul style="list-style-type: none"> ■ Determinar o número total de quadradinhos em determinados arranjos retangulares. ■ Compor arranjos retangulares a partir de notações aditivas e multiplicativas dadas. ■ Estabelecer relação de correspondência entre alguns arranjos retangulares e notações aditivas e multiplicativas dadas. ■ Produzir notação simbólica convencional para determinados arranjos retangulares. ■ Compor diferentes arranjos retangulares para determinados números. ■ Construir uma tábua da multiplicação entre os números de 1 a 10 em arranjo retangular 10 x 10.
Jogo dos Restos	4, 5, 6, 7, 8, 9, e 10	<ul style="list-style-type: none"> ■ Formar grupos iguais com quantidades discretas. ■ Determinar o número total de grãos em situação de correspondência um-para-muitos. ■ Usar a notação simbólica convencional para representar distribuições feitas no jogo. ■ Interpretar registros feitos pelos colegas durante o jogo. ■ Resolver problemas de multiplicação e de divisão elaborados a partir de situações próprias do jogo.
Jogo Batalha dos Números	11, 12 e 13	<ul style="list-style-type: none"> ■ Calcular a pontuação obtida num jogo no qual não é possível visualizar elementos de contagem. ■ Usar procedimentos diferentes de cálculo como controle de resultado.
Jogo Mini-Yam	16, 17, 18 e 19	<ul style="list-style-type: none"> ■ Usar os produtos registrados no quadro da tabuada (ou memorizados) para determinar a pontuação parcial obtida no jogo. ■ Elaborar procedimentos para resolver problemas de multiplicação e de divisão elaborados a partir de situações próprias do jogo. ■ Elaborar procedimentos de cálculo para encontrar o resultado de multiplicações envolvendo números maiores que 10 (em um dos fatores).
Problemas de divisão envolvendo situações do cotidiano	20 e 21	<ul style="list-style-type: none"> ■ Elaborar estratégias de solução para resolver problemas verbais de divisão (partição e quota).

Quadro 3 - Objetivos das atividades desenvolvidas durante a intervenção

4. 2. 4. 2 Rotina das aulas

Embora em cada aula tenham sido exploradas atividades diferentes, podemos destacar alguns procedimentos de ordem geral que constituíram certa rotina. Todas elas iniciavam com uma conversa com os alunos através da qual eram informados sobre as atividades com as quais trabalharíamos naquele dia. Nessa conversa as crianças eram questionadas sobre a

²¹ Ressaltamos que numa dessas aulas (19/09) o problema em questão não havia sido planejado anteriormente, mas foi proposto a partir de uma situação ocorrida em classe que foi considerada pela pesquisadora como bastante propício à exploração da operação de divisão.

atividade ou sobre o material a ser usado. Por exemplo, em aulas nas quais trabalhamos com jogos, as crianças eram convidadas a falar sobre o jogo apresentado: se já o conheciam, se conheciam outros jogos similares, etc. Em várias aulas, esse momento inicial foi dedicado também à retomada das atividades realizadas no último encontro.

Quando as atividades eram apresentadas por meio de textos escritos, em geral fazíamos uma leitura coletiva e as crianças eram solicitadas a falar sobre o que leram. Em algumas sessões a leitura era feita individualmente, mas seguida sempre de uma discussão sobre seu conteúdo.

As atividades eram realizadas individualmente, em duplas ou em grupos, de acordo com a natureza da atividade ou dos seus objetivos. Sempre que um aluno terminava uma atividade era orientado a comparar seus registros com aqueles produzidos por alguns colegas.

Em todas as aulas os alunos eram convidados a apresentar seus registros de solução para a pesquisadora e os colegas e, em geral, o faziam no quadro-negro. Além de mostrar os registros que produziam, eram solicitados a dar explicações sobre como pensaram para resolver os problemas²².

4. 2. 4. 3 Atividades desenvolvidas em cada aula

Apresentamos a seguir, uma síntese das atividades propostas às crianças em cada aula, com alguns comentários sobre o seu desenvolvimento²³:

AULA 1 (07/03)

Atividade: composição de retângulos em papel quadriculado; registro do número total de quadradinhos em determinados arranjos retangulares.

Materiais: folhas de papel quadriculado (1cm²), lápis e régua.

Foi solicitado aos alunos que dobrassem suas folhas ao meio, desenhassem um retângulo e depois trocassem sua folha com a de um colega. Cada criança deveria descobrir o número total de quadradinhos contidos no retângulo desenhado pelo colega.

²² Havia uma preocupação de nossa parte em estimular a participação de diferentes alunos. Algumas vezes perguntávamos quem gostaria de mostrar a solução para os colegas, outras vezes chamávamos os alunos nominalmente. O número de alunos chamados variava de acordo com a diversidade de procedimentos usados.

²³ As aulas foram filmadas e o material coletado em vídeo foi parcialmente transcrito no Diário da Pesquisadora. Esse diário, que se constituiu numa espécie de protocolo de observação, contém uma descrição detalhada sobre o desenvolvimento de cada sessão. No próximo capítulo apresentaremos mais detalhes sobre esse instrumento de registro dos dados.

Os números obtidos nas contagens realizadas pelas crianças foram registrados na lousa e, a partir destes registros, foram propostas à classe toda, questões relativas às formas de contagem usadas. Um dos retângulos foi reproduzido no quadro e alguns alunos foram chamados para mostrar como realizaram a contagem. Outras questões foram propostas às crianças, a partir do retângulo registrado no quadro:

- quantos quadradinhos há na primeira fileira (ou primeira linha)?
- e na fileira de baixo (ou segunda linha), é preciso contá-los um a um para *descobrir* quantos quadradinhos há? Como podemos fazer para saber a quantidade sem contá-los?
- é preciso contar um a um os quadradinhos de cada linha? Por quê?
- como podemos proceder para não esquecer o número de quadradinhos de cada linha?

Na última parte dessa aula as crianças trabalharam com o problema apresentado em uma folha fotocopiada (figura 9).

AULA 2 (09/03)

Atividades: correspondência entre notações aditivas dadas e determinados arranjos retangulares; registro do número total de quadradinhos em determinados arranjos retangulares sem o uso da contagem unitária; produção de notações aditivas que possam representar a organização de quadradinhos em um retângulo.

Materiais: retângulos desenhados em cartolina, tiras de cartolina contendo notações aditivas, quadradinhos de borracha EVA, folha fotocopiada.

Na primeira atividade algumas crianças foram chamadas até o quadro para identificar adições correspondentes aos agrupamentos dos quadradinhos em determinados retângulos. As adições foram apresentadas em tiras de cartolina e os retângulos (os mesmos da folha com a qual haviam trabalhado no encontro anterior) colados no quadro (figura 10).

Em seguida a turma foi organizada em duplas e, para cada uma, foi entregue um saquinho plástico contendo quadradinhos de EVA. Depois de realizarem uma exploração livre do material, foi proposto que tentassem montar um retângulo qualquer sem usar todos os quadradinhos e em seguida um retângulo que tivesse 10 quadradinhos no total²⁴.

²⁴ Os quadradinhos de EVA são apresentados na figura 11. Cada dupla recebeu 45 quadradinhos.

Depois de trabalharem com os dois problemas apresentados na folha fotocopiada (figura 12) cada dupla recebeu uma tira de cartolina e foi solicitado que registrassem ali uma adição que indicasse a configuração de um retângulo a ser montado por outra dupla (com os quadradinhos de EVA).

Figura 9. Folha fotocopiada apresentada aos alunos (aula 1)

Figura 10. Retângulos e respectiva representação por meio de notações aditivas (aula 2).

Figura 11. Quadradinhos de EVA usados para compor retângulos

Figura 13. Folha fotocopiada 2 - problemas apresentados aos alunos (aula 3)

AULA 4 (21/03):

Atividades: correspondência entre notações aditivas e/ou multiplicativas e determinados retângulos; Jogo dos Restos.

Materiais: retângulos de cartolina, tiras com sentenças de adições e de multiplicações correspondentes aos retângulos, Kits do Jogo dos Restos (feijões, pratinhos de plástico, dados numéricos e tabelas de pontuação).

A primeira atividade foi usada para formar as equipes para o jogo: uma parte das crianças recebeu retângulos de cartolina (quadriculados) e a outra parte recebeu tiras contendo sentenças matemáticas (figura 14). Cada criança recebeu apenas um retângulo ou uma tira de cartolina e para cada retângulo havia três sentenças matemáticas correspondentes (de adição ou multiplicação) e as crianças se agruparam conforme essa correspondência.

Figura 14. Retângulo em cartolina e tiras com as representações correspondentes

Jogo dos Restos:²⁵ trata-se de um jogo de distribuição, cujo objetivo é, ao final de 5 rodadas, ficar com um valor de resto maior que o valor obtido pelos demais jogadores. Na figura 15 apresentamos uma fotografia que mostra uma distribuição possível no jogo.

Materiais:

- um saquinho de feijões
- seis pratinhos (de plástico ou papelão)
- um dado
- uma tabela de registro para cada jogador (figura 16)

Número de jogadores: 2 a 4

Modo de jogar: antes de iniciar a primeira rodada cada jogador pega um punhado de feijão e o primeiro a jogar lança o dado. O número mostrado no dado²⁶ indica a quantidade de pratinhos que ele deve usar para fazer a distribuição dos feijões do seu punhado, respeitando as seguintes regras:

- Todos os pratinhos devem ter a mesma quantidade de grãos.
- Todos os pratinhos devem ser usados.
- Deve-se distribuir o maior número possível de grãos.

Ao terminar sua distribuição, o jogador preenche a tabela com os dados relativos à jogada efetuada naquela rodada, coloca os feijões novamente no saquinho e passa a vez ao próximo. Todos os outros jogadores, cada um na sua vez, fazem o mesmo. Ao final de cada rodada os jogadores devem devolver os grãos usados e, antes de iniciar uma nova rodada, cada um pega um novo punhado de feijões. O jogo termina quando todos os jogadores tiverem completado as 5 rodadas. Vence aquele que tiver o maior resto²⁷.

Antes de apresentar as regras do jogo, foi realizada uma discussão sobre o significado da palavra *resto*. A transcrição dessa discussão pode ser vista no Apêndice 4.

²⁵ Esse jogo foi desenvolvido no laboratório do Programa de Estudo e Pesquisas no Ensino da Matemática (PROEM) da PUC-SP. Foi usado por Franchi (1995) em sua pesquisa de doutorado intitulada “Compreensão das estruturas multiplicativas elementares”

²⁶ Foi combinado com as crianças que só valeriam os números de 2 a 6. No caso de obter o número 1, o jogador deveria lançar o dado novamente.

²⁷ Embora seja um jogo que depende basicamente do fator sorte, sua escolha se deu em função do seu potencial didático

Figura 15. Uma distribuição possível no Jogo dos Restos

JOGO DOS RESTOS				
RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				

Figura 16. Tabela de pontuação - Jogo dos Restos

AULA 5 (28/03):

Atividade: Jogo dos Restos.

Materiais: Kits para o Jogo dos Restos.

Na primeira parte dessa aula foi formada uma roda com as crianças sentadas no chão para uma retomada das regras do jogo por meio da simulação de algumas rodadas. Para isso foi usado o material do jogo (pratinhos, feijões e um dado grande, de espuma) e reproduzida, em cartolina, a tabela de pontuação (de modo que ficasse bem visível a todos). Foi realizada uma discussão sobre as regras do jogo e sobre como preencher a tabela da pontuação. Também foi proposta a análise coletiva do registro feito por uma aluna na primeira rodada da partida realizada na aula anterior.

O restante da aula foi usado para a realização de mais uma partida do jogo.

AULA 6 (30/03):

Atividades: resolução de problemas sobre o Jogo dos Restos.

Materiais: folhas fotocopiadas.

No início dessa aula foi feita uma discussão sobre os procedimentos de contagem usados pelos alunos nas duas partidas do Jogo dos Restos. Depois foram propostos aos alunos cinco problemas sobre o jogo, apresentados por escrito em duas folhas fotocopiadas (figuras 17 e 18).

PENSANDO SOBRE O JOGO DOS RESTOS

1. Observe como o LUJ colocou seus feijões nos pratinhos:

a) Para descobrir o total de grãos ele contou os feijões de cada pratinho, um a um. AMA que estava jogando com ele, só contava um a um os feijões do primeiro pratinho. Como ela poderia descobrir o total de grãos agindo desta forma? Explique por escrito.

b) De acordo com as regras do jogo, explique porque ele não distribuiu todos os feijões nos pratinhos.

2. Na sua vez de jogar, MEB colocou seus feijões nos pratinhos e não sobrou nenhum. Veja como ficaram os pratinhos:

Pinte os retângulos que mostram, em linguagem matemática, a distribuição dos feijões nos pratinhos.

$6 + 6 + 6 + 6$	4×6	6×4	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$
-----------------	--------------	--------------	-------------------------

Figura 17. Problemas sobre o Jogo dos Restos - folha 1 (aula 6)

3. Registre as sentenças matemáticas que podem representar a distribuição de feijões nos pratinhos ilustrada abaixo:

a)

4. Desenhe os feijões e pratinhos que poderiam ser representados pelas seguintes sentenças matemáticas:

a) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

b) 4×5

5. Em uma de suas jogadas, JUB usou 5 pratinhos, colocou 8 grãos em cada um e sobraram 3 grãos. Quantos grãos ela tinha ao todo?

Figura 18. Problemas sobre o Jogo dos Restos - folha 2 (aula 6).

AULA 7 (04/04):

Atividade: resolução de problemas sobre o Jogo dos Restos.

Materiais: folhas fotocopiadas e folhas de papel A4.

Os problemas foram apresentados um a um, em filipetas de papel, contendo apenas os enunciados, sem espaço para a resolução (figura 19). As crianças receberam folhas de papel A4 para o registro de seus procedimentos de solução e só apresentamos o segundo problema depois que todas as crianças haviam resolvido o primeiro e havíamos discutido sobre as soluções apresentadas. O mesmo foi feito em relação ao terceiro problema, cujas questões apresentadas foram discutidas apenas oralmente. O objetivo era o de explorar a leitura do

senunciados dos problemas, visto que na aula anterior muitos alunos mostraram dificuldade para interpretar o enunciado do problema em questão²⁸.

Veja os registros que LOS fez nas duas primeiras rodadas do jogo dos restos:

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª	4	3	3	15
2ª	3	5	0	15

1. Mostre, através de um desenho, a distribuição dos feijões nos pratinhos feita por LOS na primeira rodada.

2. Na segunda rodada LOS tinha 15 feijões. Ela distribuiu esses feijões em três pratinhos e ficou com cinco grãos em cada um. Se ela dividisse esses mesmos feijões em cinco pratinhos, quantos grãos ela colocaria em cada um?

3. Veja como VAM resolveu o problema 5 apresentado na aula passada:

Em uma de suas jogadas, JUB usou 5 pratinhos, colocou 8 grãos em cada um e sobraram 3 grãos. Quantos grãos ela tinha ao todo?

Ela fez desenhos, mas não registrou a resposta do problema.

- Qual era a pergunta do problema?
- Como os registros de VAM podem ajudar a encontrar a resposta?

Figura 19. Problemas apresentados aos alunos (aula 7)

AULA 8 (11/04):

Atividade: Jogo dos Restos.

Materiais: Kits para o Jogo dos Restos.

A aula iniciou com uma discussão coletiva sobre diferentes formas possíveis de se determinar o número total de grãos em cada rodada do jogo. Nesse dia foi solicitado aos alunos que registrasse, no verso da folha da tabela, os cálculos realizados em cada rodada.

²⁸ A dificuldade mencionada, bem como a elaboração de atividades com base na avaliação das atividades dos alunos em cada aula, serão temas explorados na apresentação dos resultados e na discussão dos mesmos.

AULA 9 (13/04):

Atividade: resolução de problemas sobre o Jogo dos Restos.

Materiais: folhas fotocopiadas de papel A4 (figura 20).

Após a solução do primeiro problema, algumas crianças foram chamadas ao quadro para mostrar suas soluções. O segundo problema só foi apresentado depois da discussão sobre os diferentes procedimentos usados na solução do primeiro.

Na terceira rodada do JOGO DOS RESTOS DES usou seis pratinhos, colocou quatro grãos em cada um e sobraram dois grãos. Quantos grãos ela tinha no total?

1. Veja os registros feitos pelo PEP na 4ª rodada do JOGO DOS RESTOS:

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
4ª	5	3	4	12

40

$3+3+3+3+3=15$

$15+4=19$

$12+3=15$

$6+6=12$

a. Qual o total de grãos registrado por PEP na tabela de pontuação?

b. Qual o total de grãos registrado por PEP no cálculo mostrado ao lado?

c. Um dos resultados registrados por ele está errado. Qual deles está errado? Por que?

2. Este é o registro feito por GAF na 3ª rodada do JOGO DOS RESTOS. Confira se ele calculou corretamente o total de grãos e mostre como você fez para calcular.

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
3ª	6	3	1	18

Figura 20. Problemas apresentados aos alunos (aula 9)

AULA 10 (18/04):

Atividade: resolução de problemas sobre o Jogo dos Restos.

Materiais: folhas fotocopiadas contendo os enunciados dos problemas e folhas de papel A4 (figura 21).

3. Veja o registro de cálculo feito por CAS na 3ª rodada do JOGO DOS RESTOS e responda as perguntas:

- Quantos pratinhos ela usou?
- Quantos grãos colocou em cada pratinho?
- Sobrou resto? Explique como você descobriu.
- Quantos grãos de feijão ela tinha ao todo?

5. LOS usou a adição para calcular o total de feijões em cada rodada. Ela poderia calcular de outra forma? Como? Mostre outra forma de calcular o total de feijões de LOS de em cada rodada.

4. Veja o registro de cálculo feito por LEA para calcular o total de feijões na 5ª rodada do Jogo dos Restos. Mostre com um desenho a distribuição dos feijões nos pratinhos feita por LEA nesta rodada e depois preencha a tabela.

$$5^a \quad 4 \times 3 = 12$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
5ª				

Figura 21. Problemas apresentados aos alunos (aula 10)

AULA 11 (20/04):

Atividade: Jogo Batalha dos Números.

Materiais: Cartelas do Jogo Batalha dos Números e fichas numeradas, tesoura, pratinhos de plástico e tabela para conferir a pontuação obtida no jogo.

O jogo explorado nessa aula trata-se de uma adaptação do Jogo *Batalha Naval* feita por um ex-aluno da pesquisadora, como parte de um projeto sobre jogos, desenvolvido com os alunos da terceira série de uma escola particular de Curitiba, em 1996 (STAREPRAVO, 2006). Assim, antes de apresentar as regras do *Batalha dos Números*, foi pedido aos alunos que falassem sobre o jogo original.

Batalha dos Números: o objetivo consiste em capturar, na cartela do adversário, a maior quantidade de pontos em um determinado número de rodadas.

Materiais: 2 cartelas contendo a indicação de colunas e linhas, respectivamente por letras e números (figura 22), lápis.

Número de jogadores: 2

Cada jogador recebe uma cartela (ilustração abaixo) e deve preenchê-la com os números de 1 a 6, repetindo 6 vezes cada número. Um jogador não pode ver a cartela do outro, desde seu preenchimento até o final da partida e cada um deve escolher as coordenadas que deseja atingir na cartela do outro. Uma coordenada é formada por uma letra e um número.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Figura 22. Cartela do Jogo Batalha dos Números

Cada jogador, na sua vez, escolhe uma coordenada, informa ao adversário e este localiza, em sua cartela, o número registrado no quadradinho correspondente. Ele deve riscar

esse número e informá-lo ao jogador que fez o pedido. Quem faz o pedido registra a coordenada pedida e os pontos obtidos. Não é permitido pedir duas vezes uma mesma coordenada.

Cada jogador faz um pedido e registra os pontos obtidos, alternadamente, até que se completem um determinado número de rodadas combinado previamente. Vence aquele jogador que obteve a maior pontuação total.

Na partida realizada nesse dia houve uma pequena modificação no modo de jogar. Cada criança recebeu uma folha contendo uma cartela do jogo e fichas para serem recortadas contendo os números de 1 a 6. Em vez de preencher suas cartelas com os respectivos números, espalharam as fichas sobre elas. Dessa forma em vez de informar ao adversário o número atingido pela coordenada pedida, o jogador lhe entregava a ficha colocada sobre essa coordenada. Cada jogador recebeu um pratinho de plástico para colocar as fichas obtidas. Ao final do jogo cada um ficou com 15 fichas (número de rodadas) e determinou sua pontuação total a partir dos números marcados em cada uma.

Ao final da partida cada aluno recebeu uma tabela para conferir a pontuação total (figura 23).

VALOR DA FICHA	QUANTAS FICHAS COM ESTE VALOR EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESSAS FICHAS	ESPAÇO PARA CÁLCULOS
1			
2			
3			
4			
5			
6			

NOME: _____ DATA: _____ PONTUAÇÃO TOTAL: _____

Figura 23. Tabela para conferir a pontuação total obtida no Jogo Batalha dos Números

de alunos recebeu uma folha fotocopiada contendo o enunciado do problema. Depois que todas as duplas concluíram a atividade, foi realizada uma discussão coletiva sobre o problema e algumas crianças foram ao quadro mostrar como o resolveram.

O segundo problema foi apresentado em outra folha, com uma cópia para cada aluno, mas foi sugerido que continuassem trabalhando em duplas.

Para calcular a sua pontuação no Jogo Batalha dos Números, HEI juntou os números que somavam 10. Mostre quais os números que ela pode ter juntado para formar cada 10 registrado. Depois confira se a pontuação total está correta.

COORDENADA PEDIDA	PONTOS OBTIDOS
F1	4
A3	5
B1	3
E4	4
F2	2
F3	4
F6	4
E5	5
E2	4
E3	4
F5	5
C3	3
C1	2
C2	3
D1	4
D2	2

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 10 + \\
 10 \\
 10 \\
 9 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

A pontuação total de HEI é 49? ---

Explique como você descobriu isso: _____

Estes são os pontos que a SAB conseguiu no jogo Batalha dos Números:

5 3 1 4 3 3 6 3 6 6 5 6 6 6 5 5

Preencha a tabela a partir dos pontos obtidos por SAB e calcule sua pontuação total

NÚMEROS	QUANTOS DESTES NÚMEROS ELA CONSEGUIU	QUANTOS PONTOS ELA FEZ COM ESSES NÚMEROS
1		
2		
3		
4		
5		
6		

REGISTRE SEUS CÁLCULOS AQUI

PONTUAÇÃO TOTAL:

Figura 25. Problemas sobre o Jogo Batalha dos Números.

AULA 14 (16/05):

Atividade: montagem da tábua da multiplicação (1 a 10)

Materiais: quadrado de 10x10 quadradinhos, retângulos de papel colorido.

Cada criança recebeu uma folha fotocopiada contendo um quadrado de 10 x 10 quadradinhos. Os alunos foram questionados sobre a multiplicação correspondente ao quadrado que receberam e foram informados que dentro dele poderiam registrar as tabuadas (até 10).

Para a construção desse quadro da multiplicação foram entregues dois retângulos de papel colorido para cada criança os quais deveriam ser usados para cobrir linhas e colunas daquele quadrado, conforme os comandos que eram formulados. Por exemplo: cobrir o quadrado usando os dois retângulos coloridos, de forma que fiquem aparecendo apenas os quadradinhos das três primeiras colunas e das cinco primeiras linhas (figura 26).

As crianças deveriam identificar as multiplicações correspondentes aos retângulos obtidos a partir de diferentes comandos e registrar o número total de quadradinhos de cada um conforme o exemplo mostrado na ilustração abaixo ($3 \times 5 = 15$).

Figura 26. Quadro da tabuada (1).

No início o preenchimento da tabela foi feito coletivamente. Foram apresentados alguns comandos e as crianças cobriam as linhas e colunas correspondentes em suas próprias folhas, depois o retângulo formado a partir daquele comando era mostrado no quadrado que

estava fixado no quadro, para que pudessem comparar com aqueles encontrados por elas. A cada novo retângulo formado, as crianças eram questionadas sobre a multiplicação correspondente e o número total de quadradinhos.

Depois foi sugerido às crianças que registrassem os números de 1 a 10 na primeira coluna e na primeira linha do quadrado. Foi mostrado que a partir dessa numeração seria mais fácil identificar as multiplicações correspondentes aos diferentes retângulos, pois não precisariam mais contar o número de linhas e de colunas, uma vez que já estariam indicados. Na ilustração abaixo (figura 27), vemos um exemplo.

Figura 27. Quadro da tabuada (2).

Depois de localizados alguns retângulos conjuntamente e feito o registro dos resultados correspondentes às multiplicações identificadas, foi sugerido que as crianças trabalhassem sozinhas ou em duplas para preencher todos os quadradinhos construindo assim a sua própria tábua da multiplicação. Quando todos terminaram, discutimos sobre como usar aquele quadro para encontrar resultados das tabuadas²⁹.

AULA 15 (30/05):

Atividade: encontrar diferentes composições retangulares para determinados números; produzir notação simbólica convencional para indicar os arranjos retangulares.

²⁹ Como recolhemos os quadros (uma vez que se constituíam em dados da pesquisa) entregamos outra folha para que as crianças preenchessem e ficassem com uma tabela para si. Essa tabela foi recortada, colada em uma cartolina e plastificada (por iniciativa da professora da classe).

Materiais: quadradinhos de borracha EVA, papel quadriculado.

Os alunos foram organizados em duplas, e cada uma recebeu um saquinho com 24 quadradinhos de EVA. Foi proposto que, usando os quadradinhos recebidos, tentassem formar o maior número possível de retângulos diferentes, usando um total de: a) 12 quadradinhos; b) 15 quadradinhos e c) 24 quadradinhos.

Os alunos receberam também folhas de papel quadriculado para registrar os retângulos formados e as notações de multiplicação e de divisão correspondentes a cada um.

AULA 16 (01/06):

Atividade: Jogo Mini-Yam.

Materiais: dados, copos plásticos tampas de caixas de sapato, tabelas do jogo (pontuação individual e pontuação da equipe).

O jogo explorado nessa aula trata-se de uma adaptação do jogo Yam, o qual já foi comercializado, no Brasil, pela *Grow*. A versão proposta aos alunos segue as regras apresentadas por publicação do *Institute National de Recherche Pédagogique* – ERMEL (1991), com modificações apenas na tabela de pontuação para adaptá-la à faixa etária das crianças da terceira série.

Mini-Yam: o objetivo do jogo é obter a maior pontuação pela repetição de um mesmo número em seis dados. A cada rodada os jogadores devem escolher um número diferente e, em três lances, tentar obter o maior número de dados com o número escolhido.

Materiais:

- 6 dados
- 1 copo
- Uma tampa de caixa de sapato
- Tabela para registro da pontuação

Número de jogadores: 2 a 4

Modo de jogar: O primeiro jogador lança os seis dados e escolhe o número que deseja obter repetidas vezes naquela rodada. Separa os dados que já caíram com esse número e lança os outros novamente. Por exemplo, se no primeiro lance obteve: 6, 4, 2, 3, 4 e 1, o jogador pode separar os dois dados que marcam 4 e lançar novamente os outros quatro dados (figura 28). O objetivo naquela rodada passa a ser o de obter a maior quantidade de dados com o

número 4 em três lançamentos. No segundo e no terceiro lançamento separa novamente os dados que marcarem esse número. Ao final dos três lances registra sua pontuação na tabela (figura 29) e passa a vez ao próximo jogador.

A cada rodada os jogadores devem escolher um número diferente a ser repetido nos dados. Se no primeiro lance não conseguir nenhum número repetido, ainda assim deve fazer sua escolha, optando por um dos números indicados nos dados (separa o dado com o número escolhido e lança novamente os outros cinco dados). Vence aquele que, ao final das seis rodadas obtiver a maior pontuação total.

Figura 28. Jogo Mini-Yam

JOGO MINI-YAM							
NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI						QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1							
2							
3							
4							
5							
6							
PONTUAÇÃO TOTAL							
ESPAÇO PARA CÁLCULOS							

Figura 29. Tabela para registro da pontuação - Jogo Mini-Yam

Os alunos jogaram em equipes de 3 ou 4 crianças e a medida que concluíam a partida, cada equipe recebeu uma folha contendo uma tabela para o cálculo da pontuação total feita pela equipe (figura 30).

JOGO MINI-YAM – PONTUAÇÃO DA EQUIPE		
NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTAS VEZES ESTE NÚMERO FOI MARCADO NAS TABELAS DESTA EQUIPE	QUANTOS PONTOS NOSSA EQUIPE FEZ COM ESTE NÚMERO
1		
2		
3		
4		
5		
6		
PONTUAÇÃO TOTAL DA NOSSA EQUIPE		
ESPAÇO PARA CÁLCULOS		

Figura 30. Tabela para registro da pontuação obtida pela equipe no jogo Mini-Yam.

AULA 17 (12/06):

Atividade: Resolução de problemas sobre o jogo Mini-Yam.

Materiais: folhas fotocopiadas.

As regras do jogo Mini-Yam foram retomadas no início da aula e foi feita uma discussão sobre os registros feitos na tabela do jogo preenchida coletivamente na aula

anterior. Os alunos foram questionados sobre a possibilidade de se utilizar a multiplicação para calcular os pontos obtidos em cada rodada.

A possibilidade de se utilizar a tábua da multiplicação para preencher a tabela do jogo foi colocada em discussão e os alunos foram solicitados a falar sobre como isso poderia ser feito.

Dois problemas foram apresentados aos alunos. O primeiro foi apresentado em uma folha fotocopiada (figura 31) e o segundo foi proposto oralmente e consistia na seguinte questão: *qual é a maior pontuação que um jogador pode fazer em uma única partida do jogo Mini-Yam?*

Veja as tabelas de pontuação preenchidas pelas alunas de uma das equipes no jogo Mini-Yam:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	X X X X X X	5
2	X X X X X X	8
3	X X X X X X	12
4	X X X X X X	20
5	X X X X X X	24
6	X X X X X X	24
PONTUAÇÃO TOTAL		79

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	X X X X X X	3
2	X X X X X X	12
3	X X X X X X	12
4	X X X X X X	12
5	X X X X X X	20
6	X X X X X X	18
PONTUAÇÃO TOTAL		77

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	X X X X X X	4
2	X X X X X X	8
3	X X X X X X	12
4	X X X X X X	16
5	X X X X X X	20
6	X X X X X X	24
PONTUAÇÃO TOTAL		79

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	X X X X X X	5
2	X X X X X X	8
3	X X X X X X	3
4	X X X X X X	8
5	X X X X X X	20
6	X X X X X X	30
PONTUAÇÃO TOTAL		74

Confira a pontuação de cada aluna e calcule quantos pontos testa equipe fez no total

Figura 31. Problema sobre o Jogo Mini-Yam (aula 17)

AULA 18 (04/07):

Atividade: Jogo Mini-Yam e resolução de um problema sobre o jogo.

Materiais: dados, copos plásticos, tampas de caixa de sapato e tabelas de pontuação do jogo (individual e por equipes). Folhas fotocopiadas com o enunciado do problema.

Depois de jogarem uma partida de Mini-Yam e calcularem a pontuação total obtida pela equipe, cada uma recebeu uma folha contendo um problema sobre o jogo (figura 32).

Preencha a tabela desta equipe com as informações que estão faltando:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTAS VEZES ESTE NÚMERO FOI MARCADO NAS TABELAS DESTA EQUIPE	QUANTOS PONTOS ESSA EQUIPE FEZ COM ESTE NÚMERO
1	18	
2	16	
3		24
4	13	
5		45
6		60
PONTUAÇÃO TOTAL DA EQUIPE:		

Figura 32. Problema sobre o Jogo Mini-Yam (aula 18)

AULA 19 (06/07):

Atividade: resolução de um problema sobre o jogo Mini-Yam.

Materiais: folhas fotocopiadas com os enunciados dos problemas, folhas de papel A4.

Nesse dia foram propostos quatro problemas envolvendo o jogo Mini-Yam. Cada um foi apresentado separadamente e as crianças receberam uma folha em branco para o registro da solução dos três últimos, cujos enunciados foram entregues em filipetas de papel (figuras 33 e 34).

1. A tabela abaixo mostra a pontuação feita pelo **LEP** no Jogo Mini-Yam. Descubra quantas vezes ele conseguiu cada número nos dados para somar a pontuação indicada e complete a tabela:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO ELE CONSEGUIU	QUANTOS PONTOS ELE FEZ COM ESTE NÚMERO
1		5
2		10
3		6
4		12
5		20
6		30

Figura 33. Problema 1 (aula 19)

2. A equipe da **RAR** marcou 60 pontos escolhendo o número 5 nos dados. Quantas vezes elas conseguiram o número 5 na equipe?

3. A equipe do **EAS** conseguiu 13 vezes o número 5 nos dados. Quantos pontos eles fizeram ao todo com o número 5?

4. A equipe do **RIS** conseguiu 15 vezes o número 6 nos dados. Quantos pontos eles fizeram ao todo com o número 6?

Figura 34. Problemas 2 a 4 (aula 19)

AULA 20 (12/09)³⁰:

Atividade: resolução de um problema de divisão-partição.

Materiais: folhas de papel A4.

O problema proposto aos alunos foi elaborado com base em uma conversa que tivemos em sala (em um encontro anterior) sobre o que as crianças preferiam ganhar como presente de aniversário: brinquedo, roupa ou dinheiro. Nesse dia a referida discussão foi retomada e a pesquisadora anunciou ter um problema para resolver solicitando a ajuda dos alunos. Eles foram informados de que a pesquisadora tinha seis sobrinhos e de que dispunha de 100 reais para comprar presentes para o dia das crianças e que após a discussão da aula anterior, havia decidido dar dinheiro aos sobrinhos para que cada um pudesse comprar o que mais lhe interessasse.

³⁰ Lembramos que as aulas 20 e 21, conforme já comentado, aconteceram no segundo semestre.

O problema, proposto oralmente, consistia no seguinte: *se eu tenho 100 reais e seis sobrinhos, quanto de dinheiro poderei dar a cada um, para que todos recebam a mesma quantia?*

AULA 21 (19/09):

Atividade: resolução de um problema de divisão-quota.

Materiais: folhas de papel A4.

O problema explorado nesse dia surgiu de uma situação ocorrida em sala de aula enquanto trabalhávamos com um problema envolvendo um jogo. Logo no início da aula, foi possível perceber que as crianças estavam muito agitadas e pouco envolvidas com a atividade proposta (resolução de problemas sobre um jogo explorado na aula anterior). O motivo veio à tona quando a professora de Educação Física entrou na sala e pediu licença para vender as fichas referentes ao “Dia da Torta”.³¹ As crianças colocaram dinheiro sobre as carteiras (cédulas e/ou moedas) e a referida professora passou em cada uma, recolhendo o dinheiro e entregando as fichas. As crianças compraram quantidades diferentes de fichas, mas a maioria delas demonstrou não saber quantas fichas poderia comprar com o dinheiro levado. Era a própria professora quem fazia o cálculo.

Quando ela saiu da sala, as crianças estavam ainda mais agitadas. Com suas fichas sobre as carteiras, conversavam sobre o que poderiam comprar na hora do recreio. Foi sugerido, então, que mantivessem as fichas sobre as carteiras e guardassem a folha com o problema apresentado anteriormente. Em seguida foi solicitado que explicassem no que consistia o Dia da Torta. Mediante a explicação apresentada, a pesquisadora retirou 12 reais da carteira e pediu às crianças que a ajudassem com a seguinte questão (proposta oralmente): *hoje vou receber algumas amigas em casa para um lanche e poderia comprar alguns pedaços de torta aqui. Com 12 reais, quantas fichas eu consigo comprar?*

4. 2. 5 Procedimentos de registro dos dados

A opção de realizar a coleta de dados de nosso estudo em sala de aula, durante uma intervenção pedagógica planejada e conduzida pela pesquisadora, exigiu especial atenção aos

³¹ O Dia da Torta é uma tradição naquela escola. Nesse dia (que acontece uma vez por ano), alunos e funcionários levam tortas (doces e salgadas) para a escola, as quais são vendidas durante o recreio, a R\$ 0,50 o pedaço (a escola oferece suco). A verba arrecadada é revertida para a conservação do prédio da escola.

procedimentos de registro dos dados. Precisávamos observar como as crianças lidavam com os problemas propostos, que tipo de recursos mobilizavam, como se relacionavam com os colegas durante o desenvolvimento das sessões e como produziam e interpretavam suas notações na resolução dos problemas. Assim, além de toda a produção escrita dos alunos, era necessário um registro detalhado das circunstâncias nas quais tais registros foram produzidos, incluindo as falas da pesquisadora e dos alunos.

Nessas condições, a gravação das sessões em vídeo era um recurso necessário para garantir fidedignidade no registro dos dados. Entretanto, o uso de uma filmadora exigia a colaboração de pelo menos uma pessoa que atuasse como assistente de pesquisa. Essa pessoa teria que estar presente em todas as sessões e conhecer os objetivos da pesquisa, uma vez que, apesar de seguir um roteiro elaborado pela pesquisadora, em alguns momentos seria obrigada a fazer escolhas sobre o que focar na filmagem.

Consideramos que uma aluna do curso de Pedagogia poderia atender às condições expostas e se dispor a participar da pesquisa. Se essa participação pudesse contar como parte das horas do estágio obrigatório do curso, então teríamos garantia de sua frequência. Assim, na segunda quinzena de fevereiro de 2007, entramos em contato com a coordenação do curso de Pedagogia de duas universidades de Curitiba e expusemos nosso interesse em contar com uma estagiária daquela instituição. Embora as duas coordenadoras tenham se comprometido em apresentar a proposta para as alunas do 4º ano, somente uma delas nos deu um retorno, anunciando que havia três voluntárias interessadas em participar da pesquisa. As três planejavam produzir seus Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) sobre o ensino e a aprendizagem de matemática, o que justificava o interesse na realização do estágio nas condições expostas.

Na última semana de fevereiro foi realizada uma reunião com a coordenadora de estágio do curso e as três alunas. Nessa reunião foi apresentado o projeto de pesquisa e as condições de participação da estagiária na pesquisa (atribuições, compromisso de frequência, habilidades desejáveis, etc). Ao final da reunião, as três alunas se dispuseram a participar, sendo que duas delas acompanhariam a coleta de dados na escola e a terceira ajudaria na transcrição dos vídeos.

Antes do início da coleta de dados foi feita mais uma reunião, desta vez somente com as estagiárias, na qual revisamos o roteiro de intervenção e discutimos sobre aspectos técnicos da filmagem. Ficou combinado que uma delas ficaria responsável pela filmagem e a outra

faria anotações sobre o desenvolvimento de cada sessão. Nossa parceria foi documentada em um Termo de Compromisso para Participação na Pesquisa, assinado por nós, pela coordenadora de estágio e pelas estagiárias (Apêndice 5).

As estagiárias recebiam, a cada dia, um roteiro de filmagem e um roteiro de observação. O primeiro constava de indicações sobre o que deveria ser focado na gravação em vídeo, de acordo com as atividades propostas, o segundo continha questões sobre os procedimentos e atitudes das crianças frente às atividades (um exemplo de cada pode ser encontrado nos Apêndice 6 e 7).

4. 2. 5.1 Diários da Pesquisadora

Após cada encontro, todos os registros produzidos eram reunidos (vídeo, anotações da estagiária e produções escritas dos alunos) para a produção de um diário no qual eram registrados, por escrito, os dados coletados naquele dia. Isso foi feito por meio de uma descrição detalhada sobre o desenvolvimento das atividades com base nos vídeos, sem incluir, inicialmente, as falas da pesquisadora e dos alunos. Quando os diálogos eram considerados importantes para a composição do relatório, eram identificados por meio de uma anotação referente à contagem de tempo do vídeo³², para serem transcritos numa etapa posterior, com auxílio de uma das estagiárias. Também era feita uma análise das produções escritas dos alunos e a tabulação de acordo com as respostas apresentadas, levando-se em conta o tipo de procedimento usado e o tipo de notação produzida. Apresentamos no Apêndice 8, a título de exemplo, o diário referente às atividades realizadas na aula 6 (30/03).

Esse relatório incluía anotações de cunho mais pessoal, referentes às impressões da pesquisadora acerca das atividades desenvolvidas e dos resultados obtidos, sobretudo quando esses resultados indicavam a necessidade de reestruturação no roteiro de atividades. Também continham questões a serem discutidas com o orientador, como por exemplo, a necessária (e tão difícil) separação entre professor e pesquisador, papéis que eram exercidos pela mesma pessoa nessa pesquisa.

Assim, nos diários, além da descrição das atividades e da transcrição de alguns diálogos, há também um registro de nossas reflexões acerca da necessidade de uma reorientação no roteiro e desenvolvimento da intervenção. Ao todo foram produzidos 21

³² Um exemplo desse tipo de anotação (inserida no texto do relatório): *transcrição de falas – 2:06 até 2:43*.

diários, um para cada dia de nossa inserção em sala de aula, os quais compuseram nossa base de dados.

4. 2. 5. 2 Produção escrita dos alunos

Os registros produzidos pelos alunos, no decorrer da intervenção pedagógica, constituíram também uma importante fonte de dados para o estudo. Embora uma primeira análise de tais registros já tenha sido incluída nos diários, toda produção escrita dos alunos foi arquivada, ficando assim disponível para novas consultas. Essas pastas foram organizadas de acordo com a aula na qual os registros foram produzidos. Sempre que necessário foram feitas anotações, nas próprias folhas dos alunos, sobre o contexto de produção dos registros ou sobre as explicações que as crianças davam para os registros produzidos.

4. 2. 5. 3 Registros produzidos pela professora

Ao longo do primeiro semestre a professora produziu relatórios de observação relativos a cada aula³³, os quais foram registrados em um único caderno. A produção destes relatórios foi proposta com o intuito de envolver a professora com a pesquisa e, ao mesmo tempo, de colher informações sobre o desenvolvimento da intervenção através de alguém que não estava diretamente envolvida no seu planejamento e execução, mas que fazia parte do contexto estudado. A escrita foi orientada por um roteiro diário de observação, previamente elaborado pela pesquisadora e entregue à professora antes do início de cada aula. Esses roteiros eram compostos por questões relacionadas aos seguintes aspectos: recursos usados pelos alunos para resolver os problemas propostos; compreensão por parte das crianças das noções matemáticas envolvidas nas atividades; atitudes das crianças nas aulas; intervenções realizadas pela pesquisadora (no Apêndice 9 apresentamos um desses roteiros, a título de exemplificação). O caderno com a coletânea dos relatórios foi recolhido apenas após o término do primeiro semestre.

Além da entrevista com a professora já mencionada no item 4. 2. 2. 3 foi realizada outra, em dezembro de 2007, com o objetivo de esclarecer algumas questões relativas ao currículo de terceira série, na escola, e as condições de elaboração do planejamento das aulas de matemática. Também nos interessava saber como a professora trabalhou com a matemática

³³ Como esses relatórios foram feitos apenas no primeiro semestre, não temos registros da professora relativos às aulas 20 e 21.

durante o período da nossa intervenção, nos dias em que não estávamos na escola. Por escolha da professora, a entrevista foi enviada por e-mail, respondida por ela, por escrito e devolvida pela mesma via (Apêndice 10).

4. 2. 6 Procedimentos de análise dos dados

A análise dos dados foi realizada de modo progressivo e, em diferentes níveis, desde o primeiro dia de nossa inserção em sala de aula. Uma vez que optamos por realizar essa coleta através de uma intervenção de ensino planejada e desenvolvida pela pesquisadora, um primeiro nível de análise já tomava forma ao final de cada aula: era necessário observar cuidadosamente o material produzido pelos alunos para avaliar as atividades propostas e tomar decisões acerca da continuidade da intervenção.

Ao final de cada aula, contávamos não apenas com as produções escritas dos alunos, mas também com as observações feitas por uma das estagiárias e com o registro em vídeo através do qual era possível recuperar diálogos, observar como as crianças lidaram com as atividades propostas e como a pesquisadora havia conduzido as atividades. Todo esse material foi usado para produzir uma primeira versão do diário da pesquisadora (conforme já comentado no item 4.2.5.1). O foco da nossa atenção, nesse momento, estava nas produções dos alunos e, com o intuito de mapeá-las, fizemos uma classificação das respostas apresentadas pelas crianças para cada problema considerando: conteúdo da resposta, tipo de procedimento usado, tipo de notação produzida e verificação de erros. Para isso fundamentamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983, 1994) e na experiência de análise de dados na pesquisa desenvolvida no mestrado (STAREPRAVO, 2001).³⁴

A análise realizada nessa etapa teve um papel orientador da intervenção, uma vez que a avaliação das atividades realizadas e a proposição de novas atividades foram orientadas por questões oriundas desse processo, como por exemplo: *por que as crianças continuam usando a contagem unitária, quando já reconhecem a possibilidade de recorrer ao cálculo? A ausência de elementos de contagem (como os feijões no Jogo dos Restos) pode contribuir para o uso do cálculo? A dificuldade das crianças em produzir notações convencionais indica uma precocidade de nossa parte na exploração das mesmas?*

³⁴ Um exemplo desse tipo de tabulação pode ser visto no diário apresentado no Apêndice 8.

Ao mesmo tempo em que orientavam o desenvolvimento da intervenção, questões como estas, acima mencionadas, foram importantes para orientar a análise posterior dos dados e nos levaram a buscar mais subsídios nas teorias sobre as quais fundamentamos a intervenção.

Ao final do período de coleta de dados, contávamos com um grande volume de material: todos os registros produzidos pelos alunos, 38h de gravação em vídeo (boa parte desse material já transcrito), 21 diários da pesquisadora e o caderno de relatórios da professora (além do registro das duas entrevistas). Os diários foram enriquecidos com a transcrição dos diálogos, cuja localização, em cada um dos DVDs, já havia sido indicada previamente.

Era necessário então definir as categorias de análise em função de uma delimitação mais precisa do foco do estudo, o qual, naquele momento, ainda estava um tanto difuso, pendendo ora para as questões de aprendizagem, ora para as questões de ensino. A definição do foco não era tarefa simples, dado que assumimos nessa pesquisa a necessidade de se tratar ensino e aprendizagem numa relação de interdependência (MACEDO, 2005). Além disso, tínhamos a questão do conteúdo, ou seja, da questão específica de matemática sobre a qual estávamos estudando no contexto da sala de aula.

Foram feitas repetidas leituras dos diários da pesquisadora com o intuito de observar, nesses registros, o que os dados nos diziam sobre a compreensão da *multiplicação* em sala de aula, no contexto da intervenção realizada³⁵. Realizamos então uma análise sobre as formas como as crianças lidaram com as atividades propostas com foco nos procedimentos usados, não mais em cada aula, mas no conjunto das atividades propostas.

Ao mesmo tempo, era preciso considerar os progressos dos alunos no que dizia respeito à capacidade de expressão (oral e escrita) e à interação entre pares, dirigindo também nosso olhar para os dados que indicavam mudanças de atitudes das crianças em sala de aula. Essas observações confirmavam o que havia sido mencionada, por ocasião do Exame de Qualificação, por um dos membros da banca sobre os dados apresentados naquela ocasião: o papel do *conteúdo como meio* e não como um fim em si mesmo.

Assim, numa etapa subsequente de análise, era preciso fazer uma interlocução entre a intervenção realizada e os resultados obtidos, levando-se em conta as observações sobre os

³⁵ Levando-se em conta que nesse estudo, conforme já mencionado, exploramos a multiplicação somente em problemas de proporcionalidade simples (situações de correspondência um-para-muitos e de arranjo retangular). Nosso recorte não incluía a idéia de comparação, combinatória ou proporcionalidade múltipla.

progressos dos alunos nas diferentes esferas anteriormente mencionadas. Além disso, não podíamos deixar de considerar os relatórios feitos pela professora, uma vez que forneciam dados importantes sobre os efeitos da intervenção sobre os alunos, sobretudo no que se referia à mudança de atitude dos mesmos durante o processo interventivo.

A partir das repetidas leituras dos diários da pesquisadora foram selecionados alguns recortes, cuja análise poderia nos fornecer informações sobre aspectos relativos tanto à compreensão da multiplicação pelas crianças (no contexto da intervenção realizada), quanto aos efeitos da intervenção para além do conteúdo propriamente dito e às potencialidade e limitações das atividades propostas.

A escolha destes recortes foi orientada pela Teoria Construtivista de Piaget (1976), que se apóia em duas bases: *interação* e a *equilibração majorante*. Nesse sentido buscávamos qualificar as interações que estavam em jogo na intervenção realizada e analisar os possíveis efeitos de aperfeiçoamento dessas interações sobre os sujeitos envolvidos.

Convém ressaltar que, ao mesmo tempo em que os temas relativos a cada recorte emergiram da leitura dos diários esta leitura também foi orientada pelos temas em questão. Teve início um processo de localização e seleção, nos diários, de situações ou *episódios* relativos a cada tema, os quais foram destacados com marcadores de texto coloridos. Também foram destacados, nos relatórios da professora, os comentários e reflexões relativos a cada um dos temas.

A partir dessa seleção foi iniciada, então, a produção do texto de apresentação dos resultados como produto de uma leitura interpretativa dos dados à luz das teorias sobre as quais fundamentamos nosso estudo. O texto foi estruturado pelos temas levantados e enriquecido com excertos dos episódios anteriormente mencionados.

Na medida em que o texto ganhava forma, observou-se que em função das características das questões exploradas em cada tema, estes poderiam ser reorganizados em dois grandes grupos, conforme as questões se referissem a *relações intelectuais* ou a *relações sociais/morais*, de acordo com nomenclatura usada por Piaget (1998). No caso do nosso estudo, as *relações intelectuais* referiam-se às questões do conteúdo matemático e da sua apropriação por parte das crianças. Já as *relações sociais/morais* estavam mais relacionadas às conquistas na esfera social, ou seja, para além do conteúdo curricular da matemática. Havia, entretanto, questões mais ligadas ao processo de ensino cujo foco incidia sobre a análise da própria intervenção e que não cabiam em nenhum dos grupos anteriormente citados, as quais

passaram então a ser tratadas nesse estudo como *relações didáticas*. Considerando que os três grupos constituem formas de relações interdependentes, uma categorização a partir delas seria propícia para analisar questões tanto do ensino quanto da aprendizagem, numa triangulação com a questão do desenvolvimento.

Dessa forma, na versão final do texto, os resultados são apresentados em três categorias: *relações intelectuais*, *relações sociais/morais* e *relações didáticas*. Na primeira, a análise se volta para a compreensão da multiplicação pelas crianças, uma vez que a intervenção realizada focava este conteúdo. Entretanto são abordadas também questões relativas à compreensão da divisão dado que essa operação também foi explorada na intervenção (de forma menos sistemática, conforme já mencionado e justificado anteriormente). Na segunda, analisamos indícios de conquistas dos alunos na esfera social, ou seja, para além do conteúdo curricular. Finalmente, na terceira, a análise incide sobre o próprio processo interventivo, suas potencialidades e limites.

No quadro 2 apresentamos os temas ou recortes referentes a cada categoria de análise, conforme serão apresentados no próximo capítulo, dos resultados.

CATEGORIAS	RECORTES OU TEMAS DE ANÁLISE	
Relações intelectuais	Questões relativas à operação de multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> • Uso da contagem unitária • Progressos da contagem para o cálculo • A questão da ordem dos fatores • A questão da posição nos arranjos retangulares
	Questões relativas à operação de divisão	<ul style="list-style-type: none"> • A notação simbólica convencional • Procedimentos de resolução de problemas
Relações sociais/morais	<ul style="list-style-type: none"> • Interação entre as crianças • Atitudes dos alunos 	
Relações didáticas	<ul style="list-style-type: none"> • A questão do erro • O papel da avaliação • Limites da intervenção 	

Quadro 4 - Categorias de análise e seus recortes de estudo

5 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os resultados da análise dos dados coletados no trabalho de campo, cujos procedimentos (tanto de coleta quanto de análise) foram descritos no capítulo anterior.

Conforme já mencionado, os resultados foram organizados em três categorias: relações intelectuais e relações sociais/morais (PIAGET 1998) e relações didáticas. Na primeira foram escolhidos recortes através dos quais analisamos os efeitos da intervenção sobre os alunos em relação ao conteúdo explorado: a multiplicação e a divisão. São quatro recortes ligados à multiplicação e dois recortes ligados à divisão. Na segunda, a análise focou questões ligadas às conquistas dos alunos para além do conteúdo curricular e na última voltou-se para o próprio processo interventivo, identificando suas potencialidades e limites.

Ao longo do capítulo foram apresentados episódios recortados do diário da pesquisadora e trechos dos relatórios produzidos pela professora da turma. Estes foram diferenciados no texto pelo uso das seguintes siglas: DIAPE (diário da pesquisadora) e REPROF (relatório da professora). Sempre que os episódios escolhidos continham transcrições de discussões coletivas ou de diálogos, recorremos ao uso de siglas para diferenciar as personagens que figuravam nessas transcrições: P (para a pesquisadora), E (para as estagiárias) e PROF (para a professora). No caso dos alunos, usamos siglas sempre compostas por três letras (por exemplo, GAG, DES, ALU, etc). Com o intuito de facilitar a leitura dos excertos, usamos negrito para destacar as falas, diferenciando-as mais marcadamente do texto narrativo ou descritivo.

5. 1 Relações intelectuais

5. 1. 1 Questões relativas à operação de multiplicação

São descritos a seguir processos desencadeados pela intervenção realizada em sala de aula, focando a relação das crianças com a operação de multiplicação. Os recortes escolhidos sintetizam nossas observações sobre os modos de enfrentamento dos problemas pelos alunos, suas dificuldades, perturbações e progressos. No conjunto dos recortes consideramos o processo interventivo em sua totalidade e em cada um deles referimo-nos às intervenções

pontuais, que tiveram lugar em uma situação ou problema específico, o que justifica o uso freqüente da primeira pessoa do singular (não apenas aqui, mas em todo o capítulo).

5. 1. 1. 1 Uso da contagem unitária

As crianças não usaram procedimentos multiplicativos nas primeiras atividades propostas, recorrendo basicamente à contagem unitária. Isso pareceu-nos bastante significativo uma vez que a tabuada já havia sido ensinada no ano anterior, havendo inclusive cartazes com as tabuadas (do 1 ao 10) afixados na parede da sala, desde o início do ano.

Sobre a atividade proposta na primeira aula, na qual deveriam descobrir o número de quadradinhos usados para compor determinados retângulos, foram registrados os seguintes comentários no Diário da Pesquisadora:

Todas as crianças realizaram contagem unitária para determinar o número de quadradinhos dos retângulos desenhados pelos colegas. Quando questionados sobre a possibilidade de se contar de outra forma, a primeira sugestão foi a de contar os quadradinhos dois a dois (independente do número de quadradinhos em cada linha ou coluna). Um único aluno mencionou a possibilidade de contar de seis em seis, afirmando que poderia fazer uma adição: $6 + 6 + 6 + 6$ (o retângulo de sua folha tinha 4 linhas com 6 quadradinhos cada uma). Sua idéia foi registrada no quadro e colocada em discussão.

(DIAPE1, 07/03)

Nos registros produzidos pelos alunos após a discussão, observamos que a maioria recorreu a procedimentos aditivos. Estes consistiam em registrar o número de quadradinhos de cada linha ou de cada coluna do retângulo (ou ambos, em alguns casos) e agrupá-los em pares, como no exemplo mostrado na figura 35. Também verificamos o uso da adição cumulativa, conforme o exemplo mostrado na figura 36:

Figura 35. Registro feito por ANC (aula 1)

Figura 36. Registro feito por GAE (aula 1)

Mesmo registrando o número de quadradinhos de cada linha e/ou coluna, algumas crianças continuaram realizando a contagem unitária para determinar o número total de quadradinhos, conforme pode ser observado no registro mostrado na figura 37:

Figura 37. Registro feito por HEI para quantificar retângulo desenhado por colega (aula 1)

Convém destacar que apesar de passarem a utilizar outros tipos de contagem e até mesmo estratégias de cálculo nas atividades com retângulos, o recurso à contagem unitária foi retomado pelos alunos no decorrer da intervenção, tanto nos jogos quanto nas atividades de resolução de problemas.

Nas primeiras partidas do Jogo dos Restos, a maioria das crianças utilizou exclusivamente esse recurso para determinar o número total de feijões nos pratinhos, embora algumas delas tenham antecipado a possibilidade de se utilizar a multiplicação. Verificamos a ocorrência dessa antecipação na simulação de uma jogada, após a apresentação das regras do jogo aos alunos:

P: (pego um punhado de feijão e coloco sobre a mesa. Lanço um dado e ele mostra o número 5) **quantos pratinhos eu vou usar?**

CRIANÇAS³⁶: **cinco!**

P: (pego 5 pratinhos e coloco dois grãos em cada um) **lembrem que todos os pratinhos devem ficar com a mesma quantidade de feijões... o que eu faço agora? Sobraram todos esses** (aponto os grãos que ficaram sobre a mesa)

FAB: **continua dividindo.**

P: **vocês sabem por que eu coloquei de dois em dois?**

AND: **que daí é mais rápido.**

P: **então agora eu vou colocar três em cada um** (coloco mais três grãos em cada pratinho). **E agora?**

CRIANÇAS: **coloca dois em dois.**

P: (coloco mais dois grãos em cada pratinho e aponto os dois grãos que restaram) **posso colocar esses nos pratinhos?**

CRIANÇAS: **não**

PEP: **esse vai ser o resto.**

³⁶ Usamos CRIANÇAS para identificar uma fala coletiva (do conjunto de alunos). As falas de um grupo de alunos foram identificadas como ALGUMAS CRIANÇAS.

Explico como devem preencher a tabela, registrando o número de pratinhos (5), a quantidade de grãos em cada um (7) e o resto (2) e pergunto como poderiam fazer para descobrir o número total de grãos. Alguns alunos dizem: **cinco vezes sete**.
(DIAPE4, 21/03)

Todavia, tanto na primeira quanto na segunda partida (aulas 4 e 5), nenhuma criança utilizou a multiplicação durante o jogo. O recurso ao cálculo foi verificado apenas mediante a minha intervenção na qual sugeria o uso da adição. Contudo, foi possível constatar (por meio do vídeo) que na minha ausência as crianças tornavam a usar a contagem unitária. Em alguns casos a adição era usada junto com essa contagem, como pode ser visto no exemplo a seguir. Nesse caso a criança não contou diretamente os feijões, mas recorreu à contagem nos dedos:

ANC faz a distribuição usando 4 pratinhos. Coloca 6 grãos em cada um. Preenche as duas primeiras colunas da tabela e aponta a última. FAB, que joga com ela, faz a contagem dos grãos: (aponta um pratinho) **seis...** (aponta outro pratinhos) **doze...** (segue contando nos dedos) **treze, catorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito...** (usa os mesmos dedos para contar os feijões do ultimo pratinho) **dezenove, vinte, vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro**.
(DIAPE4, 21/03)

Em seus relatórios, a professora declarou ter se surpreendido com o fato de seus alunos recorrerem preferencialmente à contagem em situações nas quais poderiam ter usado a multiplicação. Um de seus comentários refere-se à forma como as crianças procederam quando questionados sobre o número de alunos em sala na aula cinco (nesse dia eles estavam organizados em equipes de quatro crianças cada uma):

Observei que a maioria das crianças ainda não tem bem definida as noções de multiplicação. Somente a FAB percebeu que ao invés de contar de um em um os alunos da sala, seria mais fácil multiplicar pelo número de alunos e mesas.
(REPROF, 21/03)

Outro comentário é relativo ao uso da contagem unitária pelos alunos durante uma partida do Jogo dos Restos:

Alguns alunos me surpreenderam pela dificuldade que tiveram em jogar, mesmo após toda a retomada (ALU, ANC, FLE). Eles não perceberam que tinha pratinhos com mais feijões que outros e também não contavam os restos na hora de somar [...] Surpreendeu-me também o fato de nenhum aluno observar que daria para usar a multiplicação na hora da soma dos feijões.
(REPROF, 28/03)

A contagem unitária foi utilizada também como estratégia para resolver problemas relativos ao Jogo dos Restos. Conforme mostrado na transcrição apresentada a seguir, FLE usou esse recurso e afirmou ser mais rápido contar de um em um do que recorrer ao cálculo,

como fizeram seus colegas. Disse isso quando solicitado a comparar sua solução (figura 38) com outras duas registradas no quadro por MEB (figura 39) e GAE (figura 40): P: **alguém resolveu de um jeito diferente... que não foi igual ao jeito que o GAE ou que a MEB fizeram?**

FLE: (levanta a mão) **eu fiz, professora.**

P: **como que você fez, FLE? Explica prá gente.**

FLE: **eu fiz seis pratinhos e coloquei quatro feijões em cada um.**

P: **não foi igual ao da MEB?**

FLE balança a cabeça negativamente.

P: **como então que foi... diferente?**

FLE: **eu fui contando quatro em cada um** (aponta seu registro) **e fui vendo quanto dava, mas não fiz aquilo ali** (aponta a notação aditiva feita por MEB no quadro)

P: **venha então mostrar prá gente como você fez.**

FLE: (levanta de sua carteira e me mostra seu registro) **eu fiz assim.**

P: **ah... e daí como que você contou tudo no final?**

FLE: (olha para seus registros, olha para mim) **eu contei de um em um.**

P: **tá... é um jeito também. E qual você acha que vai mais rápido, contar de um em um ou fazer do jeito que ela fez aqui?** (aponto o registro feito por MEB)

FLE: **contar de um em um.**

(DIAPE9, 13/04)

Figura 38. Solução apresentada por FLE (aula 9)

Figura 39. Solução apresentada por MEB ao mesmo problema

Figura 40. Solução apresentada por GAE ao mesmo problema

Quando a maioria das crianças já estava usando estratégias de cálculo nas atividades relativas ao Jogo dos Restos (adição e multiplicação), verificamos novamente o recurso à contagem unitária, e de forma expressiva, na primeira partida do Jogo Batalha dos Números.

Na referida partida, realizada na aula 7, nenhuma criança usou a multiplicação para calcular a sua pontuação total. A maioria dos alunos recorreu à contagem nos dedos, como pode ser verificado na fala de BRA. Ela registrou os pontos obtidos em cada uma das 15 rodadas em uma única coluna, colocou o sinal de mais ao lado, e registrou o resultado abaixo dessa coluna (54):

P: **BRA, conta prá gente como é que você fez a soma para chegar nesses cinquenta e quatro aqui** (aponto o número 54 que ela registrou como resultado).
 BRA: **contando nos dedos.**

(DIAPE 12, 04/05)

A multiplicação só foi usada pelos alunos no preenchimento da tabela que lhes foi oferecida para conferirem a pontuação total (número de fichas multiplicado pelo valor da ficha), mesmo nessa ocasião, algumas crianças ainda recorreram a procedimentos aditivos. O uso da adição para calcular a pontuação total com apoio nos dados registrados na tabela pode ser observado nas notações produzidas por SAB (figura 41):

VALOR DA FICHA	QUANTAS FICHAS COM ESTE VALOR EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESSAS FICHAS	ESPAÇO PARA CÁLCULOS
1	7	7	$3+3+3+3=$
2	0	0	$6 \quad 6$
3	4	12	$11=2$
4	1	7	$5+5+5+5=$
5	4	20	$10 \quad 10$
6	6	36	20
PONTUAÇÃO TOTAL:			$6+6+6+6+6+6=$ $12 \quad 12 \quad 12$

Figura 41. Tabela cálculo pontuação - Batalha dos Números, preenchida por SAB (aula 12)

Algumas crianças recorreram à *sobrecontagem*³⁷ para preencher a tábua da multiplicação. MAS, por exemplo, quando estava preenchendo a sexta coluna do quadro, registrou 18 como resultado de 3 x 6 e abaixou o retângulo que cobria as linhas de seu quadro, deixando à mostra o retângulo de 4 x 6 (figura 42):

MAS: (olha para o número quatro registrado no início da quarta linha) **ta... agora mais seis...** (aponta o número 18 que ele registrou na terceira linha) **dezoito... tá... dezoito** (levanta o polegar), **vinte** (levanta o indicador), **vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro** (levanta um dedo para cada número que fala. Registra o número 24 no quadro. Continua usando esse procedimento para preencher toda a sexta coluna sempre contando, nos dedos, mais seis a partir do último número registrado).

(DIAPE, 14, 16/05)

³⁷ Contagem a partir do último elemento de uma sequência (*counting-on*). Procedimento comumente usado na adição como um avanço em relação à contagem de todos os elementos (*counting-all*).

1	2	3	4	5	6	
2	4	6	8	10	12	
3	6	9	12	15	18	
4	8	12	16	20		

Figura 42. Tábua da multiplicação, conforme registros feitos por MAS.

Verificamos novamente o recurso à contagem unitária nas atividades relativas ao jogo Mini-Yam, sobretudo na primeira partida realizada na aula 16. Para marcar os pontos obtidos em cada rodada, somente algumas crianças usaram o quadro da tabuada (buscando o produto do número marcado nos dados pelo número de dados com o mesmo número) e o fizeram por sugestão nossa (pesquisadora, professora ou estagiárias). Entre aqueles que recorreram à contagem alguns usaram os dedos e outros as próprias bolinhas marcadas nas faces dos dados. Observamos também o uso de cálculo mental combinado com a contagem, como descrito abaixo:

DES lança seis dados e consegue o número 3 em quatro deles. Aponta o primeiro dado e diz: **três** (aponta o segundo dado), **seis...** (aponta cada bolinha do terceiro dado) **sete, oito nove...** (aponta cada bolinha do quarto dado) **dez, onze, doze.**
(DIAPE16, 01/06)

Nesse mesmo dia, quando foi proposto aos alunos que determinassem a pontuação total obtida pela equipe, a despeito de estarem operando com números de magnitude mais alta do que aqueles referentes à pontuação individual, observamos novamente o recurso à contagem nos dedos. O uso desse procedimento é descrito na transcrição a seguir. Os cálculos mencionados referem-se ao preenchimento da sétima linha da tabela mostrada na figura 43:

Para calcular os pontos feitos pela equipe com o número 6, as alunas começam pela tabela de FAB, que fez 30 pontos e juntam com os pontos da ALU, que fez 24. Contam nos dedos: **trinta e um, trinta e dois, trinta e três, trinta e quatro...** (VAM e ALU param quando chegam em 44 e FAB continua até 54). Depois somam a pontuação de VAM (24) e de MEB (18) sempre contando nos dedos. FAB é quem controla a contagem nos dedos. ALU tenta ajudar, mas se perde e VAM só acompanha a contagem oral. Elas conseguem chegar ao resultado correto (96 pontos). (DP16, 01/06)

Preenchem a tabela de acordo com a pontuação feita pela sua equipe:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTAS VEZES ESTE NÚMERO FOI MARCADO NAS TABELAS DESTA EQUIPE	QUANTOS PONTOS NOSSA EQUIPE FEZ COM ESTE NÚMERO
1	15	15
2	18	36
3	13	39
4	12	48
5	16	80
6	16	96
PONTUAÇÃO TOTAL DA NOSSA EQUIPE	324	

ESPAÇO PARA CÁLCULOS

```

      3
     15
      36
      39
+     48
      80
      96
-----
     324
  
```

Figura 43. Tabela cálculo pontuação obtida por uma equipe no jogo Mini-Yam (aula 16)

Embora as meninas tenham registrado a quantidade de vezes que o número 6 foi marcado nas tabelas das quatro jogadoras (16), elas não usaram a multiplicação para determinar a pontuação feita pela equipe com esse número ($16 \times 6 = 96$). Em vez disso fizeram um levantamento da pontuação relativa ao número 6 marcada nas tabelas de pontuação individual e somaram esses valores ($30 + 24 + 24 = 18$).

Diante do exposto até aqui, convém ressaltar que de acordo com o programa curricular da escola, a tabuada é ensinada no ciclo anterior, quando já são apresentados também os algoritmos da multiplicação e da divisão. Segundo a professora da turma, no início do 2º ciclo é feito um trabalho de revisão com os alunos, considerando-se que já possuem domínio da tabuada. Nas duas entrevistas realizadas com a professora, ao falar sobre essa revisão, ela enfatizou o trabalho com os algoritmos convencionais:

Primeiro retomo as operações com um algarismo, de modo concreto por meio do material dourado. Então, mais tarde por Abril/Maio, eu passo para as operações com dois algarismos, também utilizando o material dourado, seguido de registros e técnicas, com o método longo.

(ENTREVISTA 1, março/2007)

Na 2ª etapa do 1º ciclo, é trabalhado a multiplicação e divisão de maneira bastante lúdica, com material concreto e jogos. Somente depois de construído os conceitos é que é iniciado o registro das operações. No início da 3ª série é revisado este trabalho, mas é dado mais ênfase a técnica operatória das operações.

(ENTREVISTA 2, dezembro 2007)

5. 1. 1. 2 Progressos da contagem para o cálculo

No decorrer do semestre, verificamos que houve uma progressiva substituição das estratégias de contagem por estratégias de cálculo. De modo geral, percebemos que as crianças passaram da contagem unitária para a contagem por agrupamentos, por meio de procedimentos aditivos e depois para a multiplicação (com apoio na tabuada).

Na aula 4, alguns alunos recorreram espontaneamente à contagem de quatro em quatro para determinar o número total de alunos na classe (estavam organizados em sete mesas, sendo seis delas com 4 crianças e uma com 3 crianças) e essa forma de contagem foi relacionada por uma aluna à multiplicação. Isso pode ser verificado no diálogo que se seguiu à questão por mim apresentada à classe: *“quantos alunos há na sala hoje?”*

PEP: (após fazer a contagem dos alunos um a um) **vinte e sete!**

P: **tá, e como é que você descobriu que tem 27?**

PEP: **contando**

GAE: **vinte e quatro!**

Algumas crianças apontam os grupos e contam: **“quatro, oito, 12, 16...”** Outras crianças contam os alunos um a um. Chamo FAB e peço que explique como contou.

P: **FAB, levanta um pouquinho. Gente, a FAB contou de um jeito diferente do PEP. O PEP foi fazendo assim, ó** (aponto as crianças de um grupo uma a uma) **um, dois, três, quatro...** (aponto as crianças de outro grupo) **cinco, seis, sete, oito...** (aponto outro grupo) **nove, dez... ele contou um por um. FAB, diz pra gente como é que você contou.**

FAB: **de quatro em quatro**

P: **por que você contou de quatro em quatro?**

FAB: **porque é mais fácil**

P: **e por que é mais fácil?**

OUTRA CRIANÇA: **porque daí tem quatro em uma mesa e quatro nas outras**

P: **exatamente**

Várias crianças apontam para uma mesa que tem apenas 3 crianças e dizem: **aquela ali tem 3.**

P: **aquela ali tem 3, então vamos fazer assim: tirando aquela equipe, quantas mesas de 4 crianças a gente tem aqui?**

CRIANÇAS: (contam apontando cada uma) **seis!**

P: **seis. Seis mesas de quatro. Se a gente fosse fazer uma adição, como é que dava para fazer?**

LEA: **seis vezes quatro!**

P: **a LEA já disse uma multiplicação. Ela disse que dava para fazer seis vezes quatro. Porque tem seis grupos, cada um com quatro crianças. Ou dava para fazer também assim: 4 mais 4 mais 4 mais 4... dava para fazer assim?**

CRIANÇAS: **dava**

P: **quantos números quatro a gente ia falar?**

CRIANÇAS: **seis.**

(DIAPE4, 21/03)

Nesse mesmo dia, quando alguns alunos sugeriram o uso da multiplicação para determinar o número total de grãos nos pratinhos no Jogo dos Restos, MED mencionou a

necessidade de se controlar a igualdade na distribuição para que fosse possível abdicar da contagem unitária:

MED: tem gente que faz... que pega os feijões e coloca nos pratos, mas daí fica 7 né, mas daí pra não ficar contando de um em um os quadradinhos (refere-se aos feijões) tem que colocar certo, que daí contando um já sabe que é 7 nos outros... que daí dá certo.

(DIAPE4, 21/03)

Enquanto nas duas primeiras partidas do Jogo dos Restos a maioria das crianças usou a contagem unitária para determinar o número total de grãos, na terceira vez que jogaram, a maioria delas recorreu à adição e algumas já usaram a multiplicação.

Convém destacar que entre a segunda e a terceira vez que jogaram, tivemos dois encontros (aulas 6 e 7) nos quais os alunos resolveram problemas envolvendo questões relativas ao jogo. Além disso, antes de iniciarem a partida na aula 8 propus aos alunos que descobrissem outras formas de determinar o número de grãos em cada rodada e que os procedimentos usados fossem registrados no verso da folha da tabela. Na transcrição abaixo vemos um trecho da discussão realizada antes do início da partida:

Desenho no quadro cinco pratinhos, cada um com cinco feijões e mais dois feijões fora dos pratinhos. Aponto cada feijão e faço a contagem um a um, até 18. Digo-lhes que observei a utilização dessa forma de contagem pela maioria das crianças durante o jogo.

PEP: dava prá contar de cinco em cinco.

P: então... hoje vocês devem tentar descobrir o total de grãos sem contá-los de um em um...

PEP: É que dá pra contar o primeiro pratinho daí... tipo ali (aponta os desenhos no quadro) tem 5... daí eu faço cinco, dez, quinze, vinte e vinte e cinco (do seu lugar aponta cada pratinho enquanto faz a contagem).

P: Isso, então você pode fazer assim... 5, 10, 15, 20, 25... (enquanto falo, aponto no quadro cada pratinho desenhado).

PEP: vinte e cinco. Daí conta mais dois.

P: (aponto os dois feijões que foram registrados fora dos pratinhos) 26 e 27. Isso é fácil fazer porque com o cinco vocês já conseguem contar de 5 em 5. Agora, por exemplo, se fossem aqui... 7 em cada um, já era mais difícil ir contando (a medida em que falo vou desenhando mais dois feijões dentro de cada pratinho). Alguns alunos começam a contar de sete em sete usando a adição cumulativa: 7, 14, 21...

P: como é que a gente poderia contar esses daqui?

MED: de sete em sete.

P: de sete... então, prá mostrar como eu estou contando, quantos números sete eu tenho que registrar?

Algumas crianças: **cinco!**

P: então vocês... se fosse na folha do jogo podiam registrar lá... 7 mais 7, mais 7, mais 7 e mais 7 (enquanto falo registro no quadro $7 + 7 + 7 + 7 + 7$).

(DIAPE8, 11/04)

O procedimento de cálculo mais usado pelos alunos durante a partida realizada nesse dia foi adição repetida, por meio do agrupamento dos números em pares. Esse procedimento

já havia sido usado com frequência nas atividades envolvendo arranjos retangulares e nesse dia foi sugerido por mim como uma forma de evitar a contagem nos dedos realizada frequentemente pelos alunos que recorriam à adição cumulativa. Na transcrição abaixo vemos como LEP recorre à contagem nos dedos ao usar a adição cumulativa para determinar o número total de grãos na distribuição mencionada anteriormente:

P: **o LEP falou assim 6...** (aponto o desenho de 5 pratinhos cada um com 7 feijões)
LEP, como é que ficaria aqui - sete mais sete, mais sete, mais sete... como é que ficariam os teus registros daquele jeito que você falou?

LEP: **sete... ali no primeiro.**

P: **sete** (registro o número 7 abaixo do primeiro pratinho)

LEP: **catorze...** (aponta o segundo pratinho)

P: **catorze** (registro o número 14 abaixo do segundo pratinho)

LEP conta nos dedos, falando em voz baixa: **quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um.** Anuncia o resultado em voz alta: **vinte e um...**

P: **vinte e um** (registro o número 21 abaixo do terceiro pratinho). **Mas LEP, você reparou que se fizer assim é mais fácil** (aponto o registro da adição feita anteriormente pelo agrupamento dos números em pares) **que daí não precisa contar um por um. Ó, se você coloca todos os setes, você não precisa contar nos dedos** (registro no quadro cinco números 7 um ao lado do outro) **por isso que a gente faz desse jeito, prá não precisar contar nos dedos.**

(DIAPE 8, 11/04)

Na sequência dessa discussão, uma aluna foi chamada para ir ao quadro e mostrar como poderia determinar o número total de grãos sem recorrer à contagem nos dedos a partir de outra distribuição: 7 pratinhos, cada um com 4 feijões e resto 1. No trecho transcrito a seguir vemos como CAS faz seus registros mediante a minha intervenção e a participação dos colegas:

CAS liga os dois primeiros números 4 com traços e registrando um número 8:

4 4 4 4 4 4 1

 8

P: **olha, isso a gente já sabe de cabeça que dá 8, daí o que você pode juntar também? Dois quatros já dá oito. O que você pode fazer? Quem ajuda ela?**

PEP: **eu juntava outros dois quatros** (antes de PEP falar, CAS já estava começando a marcar o próximo par de números 4 com o giz)

4 4 4 4 4 4 1

 8

P: **aí ela não precisa contar nos dedos LEP porque ela já tinha visto que aqui dá 8** (aponto o primeiro par de números 4, com o 8 registrado abaixo deles) **então aqui...** (aponto o segundo par de números 4 marcado por ela) **também tem que dar...**

CRIANÇAS: **oito!** (CS registra outro 8)

4 4 4 4 4 4 1

 8

P: **e agora, AMA, o que ela pode fazer?**

AMA: **junta os outros dois quatros.**

P: e precisa contar nos dedos prá saber quanto vai dar?

AMA: não.

P: por quê?

AMA: porque já sabe... é oito (CAS marca o último par de números 4 e registra abaixo um número 8)

$$\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ 8 & 8 & 8 & & & & \end{array}$$

PEP : (Enquanto CAS está fazendo o registro) **daí ela conta oito mais oito, mais oito e dá 24.**

P: daí o que não foi contado ainda, gente?

Algumas crianças dizem “oito” e outras crianças dizem “um”.

P: daí ela tem que lembrar daquele 1 que sobrou. E agora o que ela pode fazer?

ALU: contar 8 com 8

P: oito com oito, já dá quanto?

CRIANÇAS: dezesseis

P: então como você pode fazer, CAS prá mostrar que você tá juntando um 8 e outro 8?

CAS faz traços juntando os dois primeiros números 8, mas não sobra espaço no quadro para registrar o total abaixo, então apaga os traços e registra apenas o número 16:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ 8 & 16 & 8 & 8 & & & \end{array}$$

P: ela apagou gente, aquela linha que juntava os dois números 8... não tem problema, não precisa fazer a linha, mas o que ela pode fazer com esse 8 e esse 8... (aponto os dois primeiros números 8) senão ela esquece que já somou?

MED: circular

P: pode circular, pode fazer um risco em cima deles, senão ela pode esquecer que já somou. Ela pode fazer como o MED falou... faz um círculo... (círculo o primeiro 8 na lousa) ou faz um X... (faço um X no segundo 8)

$$\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ \textcircled{8} & 16 & \cancel{8} & 8 & & & \end{array}$$

P: tá... ela já tem 16, mas o que ela não contou ainda, gente?

CRIANÇAS: o outro 8

P: e quanto dá 16 com mais 8?

CRIANÇAS: 24

P: e o que ainda falta?

MED: 25... porque tem mais o que sobrou!

(DIAPE 8, 11/04)

A possibilidade de usar a multiplicação para descobrir o total de grãos é mencionada por FAB, referindo-se aos registros feitos no quadro pela colega (CAS):

FAB: professora, essa continha ali... (aponta os registros do quadro) **também pode fazer de seis vezes o quatro.**

P: Ah, olha gente, que coisa interessante que a FAB disse. Vem mostrar aqui FAB.

FAB: (vai até o quadro e aponta os registros feitos) **é que essa continha aqui também dá prá fazer de vezes.**

P: e por que dá prá fazer de vezes?

FAB: porque é seis vezes o quatro.

Nos registros produzidos pelas crianças durante o jogo, vemos notações aditivas (figura 44) e multiplicativas, sendo que as últimas foram usadas por apenas quatro alunos. Destes, três usaram os dois tipos de notação (exemplo na figura 45) e somente um usou exclusivamente notações de tipo multiplicativo.

JOGO DOS RESTOS				
RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª	3	17	0	51
2ª	2	20	1	47
3ª	3	7	2	23
4ª	3	8	2	26
5ª	2	8	1	17

Handwritten calculations for Figure 44:

$$1^a: \begin{array}{r} 17 \\ + 17 \\ + 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$2^a: \begin{array}{r} 20 \\ + 20 \\ + 1 \\ \hline 47 \end{array}$$

$$3^a: 7 + 7 + 7 + 2 = 23$$

$$4^a: 8 + 8 + 8 + 2 = 26$$

$$5^a: 8 + 8 + 1 = 17$$

Figura 44. Tabela Jogo dos Restos preenchida por JUB – frente e verso (aula 8)

JOGO DOS RESTOS				
RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª	6	4	5	29
2ª	5	4	2	22
3ª	2	9	0	18
4ª	6	2	2	14
5ª	4	3	3	15

Handwritten calculations for Figure 45:

$$1^a: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 29$$

$$2^a: 5 \times 4 = 20 \quad \begin{array}{r} 20 \\ + 2 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$3^a: 9 + 9 = 18$$

$$4^a: 6 \times 2 = 12 \quad \begin{array}{r} 12 \\ + 2 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$5^a: 4 \times 3 = 12 \quad \begin{array}{r} 12 \\ + 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

Figura 45. Tabela Jogo dos Restos preenchida por LEA – frente e verso (aula 8)

Nos dois encontros seguintes (aulas 9 e 10) as crianças resolveram problemas elaborados a partir dos registros produzidos por elas durante o jogo. O recurso à multiplicação na solução dos problemas é comentado pela professora em seu relatório:

Nesta aula percebi que vários alunos já estão compreendendo os princípios da multiplicação, visto que alguns já usaram na sessão de hoje.

(REPROF, 13/04)

Ao comparar os procedimentos usados pelos alunos para descobrir a pontuação total obtida no jogo Batalha dos Números nas duas partidas realizadas podemos ver, de forma significativa, uma substituição da contagem pelo cálculo. Enquanto na primeira (aula 7), a maioria das crianças recorreu à contagem nos dedos, na aula seguinte, quando jogaram pela segunda vez, somente um aluno usou este tipo de procedimento.

Convém mencionar que antes de jogarem a segunda partida foi feita uma discussão coletiva sobre diferentes possibilidades de se calcular a pontuação total no jogo. Para isso usamos um cartaz com a pontuação obtida por uma aluna no encontro anterior (BRA), a qual havia recorrido à contagem nos dedos para determinar sua pontuação total. Na discussão, as crianças sugeriram o agrupamento dos números iguais, conforme mostrado no trecho transcrito a seguir. Os registros mencionados na transcrição podem ser encontrados na figura 46:

P: **Olha só...** (aponto a pontuação registrada no cartaz) **quando a gente conta nos dedos pode se perder na contagem, que é muito número. Não sei se o resultado da BRA está certo... quem tem uma idéia de que números a gente poderia juntar aqui, que a gente já sabe a soma e não precisa contar nos dedos?**

UMA ALUNA: seis mais seis.

PEP: **dá prá juntar... dá prá juntar todos os números de... de... de uma fileira... assim... daí prá fazer a conta.**

P: **mas não é tudo da mesma fileira?**

PEP: **Não... mas fazer assim... fazer uma fila de quatro... prá poder somar... uma de três...**

P: **ah... somar os que são iguais. Assim dá... só que... gente... agora eu não posso pegar no número... eu não posso pegar porque agora está escrito³⁸. O que eu faço nesse 4** (aponto o registro da primeira coordenada) **prá saber que esse 4 eu já peguei... eu não posso usar mais?**

UM ALUNO: **faz um risco.**

P: **fazer um risco? Então ó... peguei um 4 e eu vou por esse 4 aqui...ó** (risco o primeiro 4 e registro-o novamente canto superior direito do cartaz). **Tem mais quatro?**

CRIANÇAS: **sim** (apontam no cartaz).

Localizo o outro número 4 (7ª coordenada), risco-o e registro no lado direito da folha. As crianças dizem que tem mais um número quatro. Localizo e procedo da mesma forma. As crianças dizem que tem ainda mais um 4 embaixo (última coordenada). Risco e registro ao lado dos outros.

³⁸ Na primeira partida os alunos usaram fichas que foram espalhadas sobre as tabelas do jogo. Assim, quando pediam uma coordenada recebiam do colega a ficha que ele havia colocado ali.

PEP: ô, professora... mas tem que somar e depois ver quanto que deu o resultado do 4... daí vai ver mais que deu do 6... daí dos outros...

(DIAPE12, 04/05)

As crianças foram sugerindo os números a serem agrupados e eu fui riscando-os e registrando-os no espaço em branco do cartaz para efetuarmos os cálculos. Na figura 46 temos uma fotografia que mostra o cartaz, depois de realizados todos os cálculos para conferir a pontuação total de BRA. Os registros em vermelho foram feitos por mim, durante a discussão coletiva. As notações multiplicativas foram feitas sempre que sugeridas pelas crianças.

Figura 46. Cartaz 1 - reprodução registros de BRA - Batalha dos Números (aula 11)

Quando as crianças sugeriram a utilização do agrupamento de números repetidos para conferir a pontuação total obtida por BRA no jogo, comentei sobre a relação entre essa estratégia e o uso da tabela que havia oferecido no dia 20/04 para conferirem a pontuação total obtida naquela partida. Essa tabela também havia sido reproduzida em um cartaz e afixada no quadro, então sugeri que ela fosse preenchida concomitante à realização dos cálculos no outro cartaz. Assim, a cada cálculo registrado no primeiro, uma criança foi chamada ao quadro para preencher a linha correspondente no segundo (figura 47).

NÚMERO	QUANTAS FICHAS COM ESTE VALOR ELA CONSEGUIU	QUANTOS PONTOS ELA FEZ COM ESSES NÚMEROS	ESPAÇO PARA CÁLCULOS
1	3	3	
2	1	2	
3	3	9	
4	4	16	
5	2	10	

Figura 47. Tabela reproduzida em um cartaz e preenchida pelos alunos (aula 12)

Outro procedimento de cálculo explorado nessa discussão consistia em juntar pares (ou trios) de números cuja soma era 10. Usei esse procedimento, registrando os resultados parciais em outro cartaz que reproduzia a pontuação de BRA (figura 48) e pedi aos alunos que tentassem descobrir qual era a minha idéia para juntar os números de dois em dois, conforme pode ser observado na transcrição abaixo:

P: Querem ver uma idéia? Eu vou fazer e eu quero ver quem descobre o que eu pensei. Prestem atenção! Vamos ver como eu pensei, ó... prá juntar os números... vamos ver quem descobre (vou até o segundo cartaz com as coordenadas e pontos de BRA, risco dois números 5 e registro um 10 à direita, no alto do cartaz, depois risco um número 6 e um número 4 e registro outro número 10 ao lado do primeiro .

FAB: dez em dez!

Risco outro par de números (4 e 6) e marco outro 10 junto com os anteriores.

BRA: dois em dois!

P: eu estou juntando de dois em dois números... mas é na ordem que eles aparecem (aponto a coluna de números)?

CRIANÇAS: não!

P: por que eu escolhi juntar esse 5 com esse 5 (aponto), depois o 6 com 4 e depois outro 6 com outro 4?

VÁRIAS CRIANÇAS: porque vai dar 10!

P: ah... é um jeito bem fácil de calcular porque depois eu só tenho 10 prá somar... não é mais fácil juntar 10?

(DIAPE12, 04/05).

Figura 48. Cartaz 2 - reprodução registros de BRA - Batalha dos Números (aula 11)

Nesse dia, durante o jogo, verificamos o uso dos procedimentos de cálculo sobre os quais discutimos antes da partida. Dezesesseis alunos juntaram os números em grupos cuja soma era 10. Seis alunos calcularam a pontuação total pelo agrupamento dos números repetidos (somente um deles usou a multiplicação, mas apagou as notações). Um aluno fez outro tipo de agrupamento, e somente dois alunos somaram os números na mesma ordem em que foram registrados na tabela de pontuação (um usou cálculo mental e outro contou nos

P: (deslizo um dos retângulos deixando à mostra um quadrado de 3 x 3) e **agora, qual a multiplicação?**

GAE: (identifica de imediato) **três vezes três.**

P: e **você sabe o resultado?**

GAE: (olha para o cartaz da tabuada do 3, que está afixado na parede) **nove.** (Registra o número 9 e continua preenchendo a terceira coluna sozinho, sempre consultado o cartaz da tabuada do 3.

(DIAPE, 14, 16/05)

Em relação ao jogo Mini-Yam, também verificamos uma substituição dos procedimentos de contagem usados pelas crianças na primeira partida, realizada na aula 16, pelo uso do cálculo, na segunda vez que jogaram (aula 18). Na segunda partida a maioria das crianças usou a multiplicação para preencher cada linha da tabela de pontuação do jogo (consultando o quadro da tabuada ou recorrendo a resultados já memorizados). Também foi significativo o uso do cálculo mental na determinação da pontuação total ou por equipes.

Convém ressaltar que entre as duas partidas, na aula 17, discutimos sobre o jogo e sobre a possibilidade de usar a multiplicação no preenchimento da tabela de pontuação. Além disso, foram propostos dois problemas sobre o jogo.

O primeiro apresentava as tabelas preenchidas pelas alunas de uma das equipes durante o jogo e solicitava aos alunos que conferissem a pontuação de cada uma e determinassem a pontuação total obtida pela equipe. O uso do cálculo mental foi explorado na discussão coletiva que se seguiu à solução desse problema.

O segundo problema foi apresentado oralmente. Seu enunciado era: *qual é a maior pontuação que um jogador pode fazer em uma única partida?*

Verificamos o uso da multiplicação pela maioria dos alunos na solução desse problema. Apresentamos abaixo dois exemplos de solução nos quais os alunos usaram procedimentos multiplicativos e aditivos, porém de forma diferente (figuras 51 e 52).

Figura 51. Solução apresentada por AND ao problema (aula 17)

Figura 52. Solução apresentada por LEI ao problema 2 (aula 17)

No relatório feito pela professora, relativo à segunda partida do jogo, na aula 18, ela comenta sobre o uso do cálculo, considerando-o como um avanço em relação aos procedimentos usados pelos alunos anteriormente:

Desta vez as crianças usaram para a contagem dos pontos outras estratégias. Fizeram cálculo mental e adição na folha. Poucos precisaram usar o quadro da tabuada para anotar os pontos obtidos. Para minha surpresa, realizaram a contagem com segurança e rapidez. Atribuo estas mudanças ao domínio que eles já estão tendo da tabuada e das estratégias de soma que já se acostumaram a realizar.

(REPROF, 04/07)

5. 1. 1. 3 A questão da ordem dos fatores

Quando as crianças passaram a usar a multiplicação no lugar da contagem unitária ou da adição, verificamos que realizavam, com certa frequência, a inversão dos fatores, sem levar em conta o papel do multiplicando (parcela que se repete) e do multiplicador (número de vezes que essa parcela se repete). Nos problemas envolvendo o Jogo dos Restos, apresentados na aula 6 temos dois exemplos dessa inversão dos fatores na multiplicação. No primeiro deles, mostrado na figura 53, MEB registra duas notações multiplicativas, embora apenas uma delas represente a distribuição dos feijões nos pratinhos. O segundo, na figura 54, mostra a notação multiplicativa feita por FRA (5×3) que não corresponde à distribuição mostrada na ilustração, nem à notação aditiva que usou corretamente para representar essa distribuição.

1. Observe como **LUJ** colocou seus feijões nos pratinhos:

a) Para descobrir o total de grãos ele contou os feijões de cada pratinho, um a um. **AMA** que estava jogando com ele, só contava um a um os feijões do primeiro pratinho. Como ela poderia descobrir o total de grãos agindo desta forma? Explique por escrito.

Fazendo conta de vezes. Ex: 5×6 , 6×5 e depois contar o resto.

Figura 53. Resposta apresentada por MEB ao problema 1 (aula 6)

Figura 54. Resposta apresentada por FRA ao problema 3 (aula 6)

Outros dois episódios, ambos registrados durante uma partida do Jogo dos Restos, mostram as crianças oscilando entre duas possíveis multiplicações correspondentes às distribuições dos feijões nos pratinhos. No primeiro vemos PEP tentando ajudar DES a fazer uma notação matemática para descobrir o número total de grãos que ela pegou na primeira rodada do jogo:

PEP: (pega a tabela de DES e observa os registros feitos por ela na primeira rodada-figura 55) **quantos pratinhos... três! Dezesete em cada pratinho... três vezes dezesete!**

DES: **hã?**

PEP: **três vezes dezesete.**

DES olha para cima, balançando o lápis.

PEP: (fica olhando para a tabela de DES, balança a cabeça negativamente) **não! É dezesete vezes três... quer dizer.**

DES: **dezesete vezes três?**

PEP: (balança a cabeça afirmativamente, olha para a tabela, olha para a DES) **você tem 3 pratinhos... dezesete em cada... dezesete mais dezesete mais dezesete.**

Entrega a folha para DES, que registra no verso: $17 + 17 + 17$. Apaga o registro e faz a mesma adição em uma conta armada.

(DIAPE 8, 11/04)

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª	3	17	0	

Figura 55. Tabela do Jogo dos Restos preenchida por DES (aula 8)

No outro episódio, após fazer a distribuição dos feijões nos pratinhos, MED anuncia, em forma de pergunta, uma multiplicação em que a ordem dos fatores está invertida em relação à distribuição feita. Ele esperava uma confirmação da estagiária e, na ausência de uma resposta, refez a pergunta, incluindo a outra multiplicação:

MED usa 3 pratinhos e coloca 7 grãos em cada um. Conta os grãos de um pratinho, vira sua folha da tabela e, olhando para a distribuição feita, diz:

MED: **na rodada quatro, então vai ser três...** (conta novamente os feijões de um pratinho, olha para a estagiária) **sete vezes três?** (a estagiária não responde, então

ele aponta para um dos pratinhos) **tem sete grãos... no pratinho... daí tem mais três pratinhos** (aponta os três pratinhos). **É sete vezes três ou três vezes sete?**

E: **o que você acha? São quantos pratinhos?**

MED: **três.**

E: **Três vezes quantos feijões?**

MED: **sete. Três vezes sete?** (registra uma adição na folha: $7 + 7 + 7$).

(DIAPE 8, 11/04)

A inversão na ordem dos fatores foi verificada também nas notações multiplicativas usadas para responder um problema sobre os registros feitos por uma aluna durante uma partida do Jogo dos Restos (figura 56). Embora de acordo com o contexto do jogo apenas uma notação multiplicativa pudesse representar cada adição, várias crianças registraram duas multiplicações ou até mesmo uma única, porém com a ordem dos fatores invertidas, como foi o caso de FRA (figura 57):

Figura 56. Solução apresentada por DES ao problema 5 (aula 10)

Figura 57. Solução apresentada por FRA ao problema 5 (aula 10)

A transcrição a seguir mostra o diálogo entre dois alunos e uma das estagiárias, durante a solução do problema mostrado acima:

MED: (trabalha com o registro feito pela colega na terceira rodada. Olha para a folha, olha para a estagiária) **10 mais 10... eu posso fazer dez vezes um...** (balança a cabeça negativamente) **é... dez vezes dois!**

A estagiária olha para sua folha, mas não diz nada. MAS que está sentado ao lado de MED, dirige-se também à estagiária

MAS: **Pode fazer sete vezes três? A primeira?**

E: **por quê?**

MAS: **porque é a mesma coisa que três vezes sete.**

E: **mas por que três vezes sete?**

MS: **tá aqui** (bate com o lápis na folha)

E: **aonde que está três vezes sete?**

MAS: **aqui é três... setes** (aponta os três números 7 registrados na primeira rodada).
(DIAPE10, 18/04)

Nas discussões coletivas referentes ao preenchimento da tabela do jogo Mini-Yam, observamos que as crianças invertiam a ordem dos fatores quando verbalizavam as multiplicações referentes aos pontos marcados em cada rodada. Isso pode ser verificado, por exemplo, num episódio registrado na aula 17, quando afixei no quadro a tabela de pontuação preenchida coletivamente durante a simulação de uma partida realizada no encontro anterior e pedi às crianças que falassem sobre ela, explicando o significado dos registros feitos ali (figura 58).

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESSE NÚMERO EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	x x x x x	5
2	x x x	6
3	x x x	9
4	x x x	12
5	x x x x x	20
6	x x x	18
PONTUAÇÃO TOTAL:		70

Figura 58. Cartaz com a tabela - Jogo Mini-Yam, usado na discussão coletiva em (aula 7)

Propus algumas questões específicas para alguns alunos, cujas respostas exemplificam a questão da inversão na ordem dos fatores:

P: (dirijo a pergunta nominalmente a MAS) **qual a multiplicação que corresponde a esses registros feitos na segunda linha da tabela** (figura 58)?

MAS: **uma vez cinco.**

P: **mas eu consegui... aqui... uma vez o número cinco?**

MAS: (sorri, balança a cabeça negativamente) **não!**

P: **eu consegui qual número aqui?**

BRA: (respondendo a pergunta que foi dirigida a MAS) **cinco vezes um.**

MAS: **é... cinco vezes um.**

P: **o resultado é o mesmo, né? Mas ali nós temos cinco vezes o número um.**

Agora aqui... (aponto a sexta linha da tabela e dirijo a pergunta, nominalmente ao JOV) **dá prá fazer uma multiplicação para descobrir esse resultado aqui?**

JOV: **cinco vezes quatro.**

P: mas qual é o número que aparece nos dados... é o cinco ou é o quatro? (aponto a sexta linha da tabela) Nessa linha aqui.

JOV: quatro.

P: é o quatro... o número escolhido nos dados, nessa linha aqui?

JOV balança a cabeça negativamente.

ALGUMAS CRIANÇAS: é o cinco.

P: olha aqui... (aponto a sexta linha na tabela) qual foi o número escolhido nos dados nessa linha aqui?

JOV: cinco.

P: quantas vezes eu consegui esse número nos dados?

JOV: quatro.

P: então... quatro vezes o número cinco... o resultado é o mesmo, mas aqui eu consegui quatro dados com o número cinco... não cinco dados com o número quatro.

(DIAPE16, 12/06)

No preenchimento da tabela para cálculo da pontuação por equipes, referente à primeira partida do Jogo Mini-Yam, realizada na aula 16, verificamos que uma das equipes fez uma inversão relativa ao número que se repete nos dados (3) e o número de vezes que foi repetido (13), mas em uma notação aditiva. Isso pode ser visto na figura 59. Os registros aos quais nos referimos foram destacados em vermelho.

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTAS VEZES ESTE NÚMERO FOI MARCADO NAS TABELAS DESTA EQUIPE	QUANTOS PONTOS NOSSA EQUIPE FEZ COM ESTE NÚMERO
1	4	4
2	10	20
3	13	39
4	10	40
5	10	50
6	9	54
PONTUAÇÃO TOTAL DA NOSSA EQUIPE	299	
<div> <div> 24 30 24 9 4 7 92 </div> <div> 92 57 56 299 </div> <div style="border: 2px solid red; border-radius: 50%; padding: 10px; display: inline-block;"> 13 13 13 39 </div> </div>		

Figura 59. Tabela de pontuação (por equipes), preenchida por RIS, LUJ e FLE (aula 16)

5. 1. 1. 4 A questão da posição nos arranjos retangulares

Nas atividades envolvendo a composição de retângulos, observamos que as crianças tiveram dificuldades para reconhecer a igualdade do número total de quadradinhos de um retângulo quando em posições diferentes.

Na transcrição a seguir, vemos um exemplo dessa questão na atividade em que as crianças receberam quadradinhos de borracha EVA para formar retângulos a partir de adições dadas para depois reproduzi-los em papel quadriculado. Nesse exemplo LUJ trabalha com a primeira notação aditiva: $5 + 5 + 5 + 5$.

LUJ monta o primeiro retângulo usando os quadradinhos de borracha: 4 linhas, cada uma com 5 quadradinhos (figura 60). Termina, pega o lápis e o papel quadriculado. Conta os quadradinhos da primeira coluna do retângulo que montou, apontando cada quadradinho com o lápis. Faz isso duas vezes e diz para a estagiária que está ao seu lado:

LUJ: **mas aqui só tem 4... tem que dar 5.**

E: **quanto tem aqui** (aponta a adição)? **Lembra que você fez com essa aqui?**

LUJ: (fica olhando durante vários segundos para seu retângulo, aponta os quadradinhos da última linha, olha para a estagiária) **está certo?**

E: (aponta os quadradinhos da primeira linha) **quantos têm aqui?**

LUJ: (conta os quadradinhos da primeira linha) **cinco... mas aqui tem quatro** (aponta as colunas e faz um giro com a mão acima do retângulo, indicando uma mudança de posição deste retângulo).

A estagiária vira o retângulo deixando-o com 5 linhas de 4 quadradinhos (figura 61).

LUJ conta os quadradinhos da primeira linha e depois da primeira coluna.

E: **tem quantos?**

LUJ gira novamente sua mão acima do retângulo. Depois repete o movimento com a mão encostada nos quadradinhos e gira novamente o retângulo para retornar à posição inicial. O retângulo se desmonta. Monta-o novamente e começa a reproduzi-lo no papel quadriculado. Hesita muito ao desenhá-lo. Traça uma linha horizontal de um quadradinho e outra vertical de 5 quadradinhos (figura 62). Não sabe como continuar, olha para o retângulo formado com os quadradinhos de borracha.

E: **O que você fez? Mostra prá mim.**

LUJ: (vira a folha, deixando-a atravessada sobre a carteira. Conta cinco quadradinhos ao lado da linha vertical) **cinco.**

E: **vai dar 5 linhas e agora, quantos quadradinhos em cada uma?**

LUJ fica olhando para o registro que fez no papel quadriculado e não responde. Inclina a cabeça para a direita para observar o retângulo que fez com os quadradinhos de EVA. Diz: **quatro**. Reproduz o retângulo no papel, completando o registro já iniciado.

(DIAPE2, 09/03)

Figura 60. Retângulo formado por LUJ com quadradinhos de EVA

Figura 61. Retângulo formado por LUJ após a intervenção da estagiária.

Figura 62. Primeiro registro feito por LUJ para reproduzir o retângulo no papel

No relatório feito pela professora, relativo às atividades realizadas no dia 09/03, há uma menção às dificuldades que as crianças tiveram para reconhecer a igualdade dos retângulos em função da mudança de posição dos mesmos:

Na realização da atividade, algumas crianças tiveram dificuldade no momento da colagem do retângulo recortado, pois quando mudava-se a posição da figura, a criança tinha dúvida se estava certa ou não, se era o mesmo retângulo. Essa interferência foi feita por mim e alguns alunos quiseram jogar fora e fazer novamente.

(REPROF, 09/03)

Na aula 3, as crianças trabalharam novamente na composição de retângulos, desta vez a partir do registro de sentenças de multiplicação (com números e palavras). No trecho de um diálogo entre a professora da turma e MEB, transcrito a seguir, podemos observar como a aluna fica em dúvida sobre a posição na qual deve desenhar o retângulo representado pela seguinte sentença: *3 vezes 5 quadradinhos* (ela não fez o retângulo com os quadradinhos de EVA).

MEB: **professora daí aqui é para fazer o três assim** (aponta com o dedo uma linha vertical na folha quadriculada) **ou assim** (aponta com o dedo uma linha horizontal na folha quadriculada)?

PROF: **o que você acha?**

MEB: **eu acho que é assim** (aponta com o dedo uma linha vertical).

PROF: **três vezes quantos quadradinhos?**

MEB: **cinco.**

PROF: **isso.**

MEB começa a cortar o papel quadriculado sem desenhar o retângulo.

PROF: **então primeiro pega a régua ali...** (aponta a régua que ela tem sobre a carteira) **faz primeiro com a régua.**

MEB encosta a régua na folha e começa a traçar uma linha na vertical

PROF: **se você fizer assim...** (faz uma linha vertical com o dedo sobre a folha) **ou assim...** (faz uma linha horizontal com o dedo sobre a folha) **vai ser o mesmo número ou não?**

MEB inclina a cabeça olhando para a folha

PROF: **vai ser o mesmo retângulo ou não?**

MEB: **não**

PROF: **não? Não dá?**

MEB: (inclina a cabeça para o lado, olha a folha, gira a folha 90 graus sobre a carteira) **não sei...**

PROF: **tenta fazer dos dois jeitos pra ver... daí desenha atrás pra ver se vai ser um retângulo diferente ou não.**

MEB desenha um retângulo de 5 linhas, cada uma com 3 quadradinhos e mostra para a professora.

PROF: **Agora faz do outro jeito pra ver se vai dar um retângulo diferente.**

MEB desenha do mesmo lado da folha, mas gira essa folha 90 graus para desenhar e novamente faz um retângulo de 5 linhas cada uma com 3 quadradinhos. Vira a folha novamente, de forma que este retângulo fica com 3 linhas, cada uma com 5 quadradinhos. Mostra para a professora.

PROF: **conta... conta pra ver.**

MEB: (conta os quadradinhos do primeiro retângulo desenhado, um a um, começando pela primeira linha de três. Depois vira a folha, deixando o segundo retângulo “de pé” e conta da mesma forma) **é o mesmo!**

PROF: **então...**

MEB recorta o primeiro retângulo desenhado e cola na folha com o enunciado da atividade.

(DIAPE3, 16/03)

Outro episódio que ilustra esta questão foi registrado na aula 15. Após a exploração das atividades relativas aos Jogos dos Restos e Batalha dos Números e depois de terem montado a tábua da multiplicação, propusemos novas atividades envolvendo a composição de retângulos com quadradinhos de EVA. Desta vez o problema consistia em formar o maior número possível de retângulos diferentes a partir de um determinado número total de quadradinhos. Novamente verificamos que algumas crianças não conservavam a quantidade de quadradinhos de um retângulo quando modificada sua posição. A transcrição a seguir mostra duas alunas interagindo com a estagiária enquanto tentam formar retângulos diferentes com 12 quadradinhos no total:

RAR desenha em sua folha o retângulo de 3 linhas, cada uma com 4 quadradinhos, que havia montado com os quadradinhos de EVA.

E: **qual a multiplicação correspondente a esse retângulo?**

RAR: (olha demoradamente para o retângulo que registrou no papel, depois olha para a estagiária) **três vezes quatro**. (Começa a fazer outro retângulo com seus quadradinhos. Desta vez organiza-os em quatro linhas, cada uma com três quadradinhos. ANC, que faz dupla com ela também montou esse retângulo sobre sua carteira.

E: **e agora, qual é a multiplicação desse?**

Cada menina olha para o retângulo que montou sobre a mesa.

ANC: **três vezes quatro**.

RAR: **três vezes quatro**.

E: **é diferente daquele que vocês já fizeram?**

As duas meninas se olham e depois olham para o papel quadriculado no qual RAR registrou o primeiro retângulo. RAR desmancha o retângulo que acabou de montar com os quadradinhos de EVA e ANC continua observando o retângulo que está no papel.

E: **é diferente?**

RAR: (balança a cabeça negativamente. ANC olha para a estagiária, olha para o retângulo do papel e para aquele que montou com seus quadradinhos, olha novamente para a estagiária e aponta o retângulo do papel) **é que esse aqui é três vezes quatro e esse (aponta o retângulo que montou sobre sua mesa) é quatro vezes três**.

E: **mas o retângulo é diferente?**

ANC balança a cabeça afirmativamente.

E: **ou ele é igual, mas um está deitado e outro de pé?**

ANC: (olha para os dois retângulos, inclina a cabeça para o lado, observa-os novamente) **é... igual!**

(DIAPE15, 30/05)

Em outro exemplo, uma aluna usa o quadro da tabuada para encontrar um retângulo com 15 quadradinhos (3x5). Quando questionada sobre a possibilidade de encontrar um retângulo diferente com o mesmo número de quadradinhos, ela localiza um retângulo igual em posição diferente. Depois reconhece a igualdade:

FAB me diz que encontrou um retângulo sem precisar dos quadradinhos de EVA, pois procurou no quadro da multiplicação. Ela explicou como fez e eu pedi que repetisse para a estagiária, que estava filmando. Ela mostra seu quadro para a estagiária, vira-o para que fique de frente para a filmadora (fica de “ponta-cabeça” para ela). Aponta o número 15 (assinalado na figura 63) com a parte de trás do lápis e diz: **é que eu achei o número 15 aqui...** (passa o lápis sobre a terceira linha – do número 15 até o número 3 e de volta ao número 15. Depois passa o lápis sobre a coluna – do número 15 até o 5 e de volta ao 15, conforme indicado pelas setas na figura 63) **daí eu fiz esse retângulo daqui** (passa o lápis sobre todo o contorno do retângulo).

E: **e só tem uma vez o número quinze aí?**

FAB: (aponta cada linha do retângulo que localizou no quadro da tabuada) **tem cinco aqui, cinco aqui e cinco aqui.**

E: **mas só tem esse número 15 aí na tabuada?**

FAB: (leva o dedo à boca, vira o quadro para si. O colega ao lado aponta o outro número 15, que está na quinta linha. Ela aponta esse número 15, olha para a estagiária) **aqui também tem** (passa o lápis sobre o retângulo – marcado em azul na figura 63).

E: **e será que dá o mesmo retângulo ou é um retângulo diferente?**

FAB: (fica olhando para o quadro, aponta alguns quadradinhos, olha para a estagiária, sorri) **é um retângulo maior.**

E: **é maior?**

FAB olha para o quadro da multiplicação e balança a cabeça afirmativamente. Continua olhando para o quadro.

E: **monte ele com os seus quadradinhos... prá ver se é maior.**

FAB: (coloca o quadro sobre a carteira e aponta os cinco primeiros quadradinhos da terceira coluna. Pega o lápis e a folha de papel quadriculado, coloca o lápis sobre o papel, olha para o retângulo já desenhado - 3 linhas com 5 quadradinhos cada uma - aponta-o, olha para a estagiária, sorri) **é igual a esse aqui, mas só que vai ficar em pé.**

E: **então precisa desenhar?**

FAB: **não.**

(DP15, 30/05)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 63. Quadro da tabuada com os retângulos localizados por FAB (aula 15)

Apesar de admitirem a igualdade no número de quadradinhos de um retângulo quando em posição diferente, o registro duplicado de retângulos foi observado nas folhas de algumas duplas, como pode ser verificado na figura 64. No exemplo, o mesmo retângulo foi desenhado em posições diferentes e para cada uma foram registradas as duas notações multiplicativas correspondentes (3×4 e 4×3).

Figura 64. Registro dos retângulos (12 quadradinhos), montados por GAG e FAB (aula 15)

5. 1. 2 Questões relativas à operação de divisão

São descritos a seguir processos desencadeados pela intervenção realizada em sala de aula, focando a relação das crianças com a operação de divisão. Conforme já comentado, esta operação não era o foco da intervenção de ensino realizada, entretanto pelos motivos já expostos anteriormente, algumas atividades propostas aos alunos também envolveram a

divisão. Dessa forma, os recortes escolhidos descrevem os modos de enfrentamento das crianças diante das atividades propostas, sem analisar os efeitos da intervenção sobre possíveis progressos em relação à operação em questão.

5. 1. 2. 1 A notação simbólica convencional

Conforme mencionado anteriormente, a operação de divisão já havia sido trabalhada no 1º ciclo, inclusive com a apresentação do algoritmo convencional. Apesar disso, observamos uma grande dificuldade dos alunos para produzir notações simbólicas convencionais de divisão.

Isso foi verificado em duas atividades diferentes: na primeira, realizada na aula 6, solicitamos que as crianças representassem por meio de “sentenças matemáticas” uma distribuição realizada no Jogo dos Restos (grãos nos pratinhos), a qual foi apresentada por meio de uma ilustração. Na segunda, realizada na aula 15, os alunos deveriam encontrar diferentes configurações retangulares para determinados números (usando quadradinhos de EVA), reproduzir em papel quadriculado os retângulos formados e registrar as multiplicações e divisões que poderiam representar a organização dos quadradinhos em cada retângulo. Diferentemente da primeira situação, esta foi proposta oralmente e o tipo de notação matemática a ser produzida foi especificada.

Na primeira atividade menos da metade dos alunos da classe produziu algum tipo de notação de divisão. Embora não seja nosso objetivo realizar uma análise quantitativa, especificamos, no quadro 5, os tipos de notações produzidas e a quantidade de alunos correspondente. Valemo-nos desse recurso apenas para facilitar a apresentação e visualização dos dados.

Na sequência são apresentados alguns exemplos das notações produzidas pelos alunos e especificadas no quadro 5. Todas se referem ao tipo de notação descrito na última linha do quadro, mas enquanto a Figura 66 mostra uma notação de divisão correspondente à distribuição apresentada na ilustração, as figuras 67 e 68 apresentam notações de divisão que não correspondem a essa distribuição.

Tipo de notação	Quantidade de alunos (total =28)	Observações sobre as notações de divisão
Nenhuma notação	2	
Somente aditiva	3	
Somente multiplicativa	5	
Aditiva e multiplicativa	5	
Aditiva e de divisão	1	A notação de divisão não correspondia à distribuição mostrada na figura
Multiplicativa e de divisão	4	Nenhuma das 4 notações de divisão correspondia à distribuição mostrada na figura
Aditiva, multiplicativa e de divisão	8	5 dessas notações correspondiam à distribuição mostrada, sendo que 3 delas eram completas e 2 incompletas (sem o resultado)

Quadro 5. Tipos de notações produzidas pelos alunos - problema 2 (aula 6)

Figura 66. Registros feitos por ANC - problema 3 (aula 6)

Figura 67. Registros feitos por CAS
problema 3 (aula 6) Figura 68. Registros feitos por AMA
problema 3 (aula 6)

Convém mencionar que a possibilidade de usar uma sentença matemática de divisão para representar uma distribuição realizada no jogo já havia sido discutida com a classe toda. Essa discussão foi feita a partir da distribuição apresentada (também por meio de desenho) no problema 2 (figura 69). Um trecho dessa discussão é apresentado a seguir:

P: quais são as operações matemáticas que foram colocadas nos retângulos?
ALGUMAS CRIANÇAS: de mais e de vezes.

P: **isso... então é... adição... e multiplicação** (registro o nome dessas operações no quadro, com os respectivos sinais ao lado. Abaixo registro o sinal da divisão). **E esse sinal aqui... de qual operação é esse sinal?**

CRIANÇAS: **dividido.**

P: **e como a gente poderia fazer um registro de divisão para essa distribuição dos feijões nos pratinhos?**

PEP: **divididos por quatro!**

P: **o que foi dividido por quatro?**

PEP: **os pratinhos.**

P: **foram os pratinhos? Alguém tem outra idéia?**

MED: **foram os feijões.**

Digo aos alunos que para registrar uma divisão é preciso pensar no número total e em quantas partes foi dividido. Pergunto quantos feijões ela tinha ao todo e em quantos pratinhos ela dividiu esses feijões. Registro no quadro a sentença matemática correspondente – $24 : 6 = 4$

(DIAPE6, 30/03)

2. Na sua vez de jogar, **MEB** colocou seus feijões nos pratinhos e não sobrou nenhum. Veja como ficaram os pratinhos:

Pinte os retângulos que mostram, em linguagem matemática, a distribuição dos feijões nos pratinhos.

$6 + 6 + 6 + 6$	4×6	6×4	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$
-----------------	--------------	--------------	-------------------------

Figura 69. Problema 2 (aula 6)

Na outra atividade mencionada os resultados foram semelhantes, verificamos que a maioria das crianças não conseguiu produzir notações de divisão relativas à organização dos quadradinhos nos retângulos formados (total de 12, 15 ou 24 quadradinhos).

Após terem reproduzido, no papel quadriculado, os retângulos que formaram usando 12 quadradinhos, constatamos que a maioria das duplas havia feito notações de multiplicação, mas nenhuma delas fez notações de divisão. Assim, antes de propor a formação de retângulos com as outras quantidades (15 e 24), foi feita uma discussão sobre os registros já feitos, cujo desenvolvimento é mostrado a seguir, de forma resumida:

Alguns alunos foram chamados para registrar no quadro os diferentes retângulos que haviam formado com 12 quadradinhos, acompanhados das notações multiplicativas correspondentes. Questionei sobre a possibilidade de representar os retângulos por meio de notações de divisão usando como exemplo um retângulo de 6 linhas, cada uma com 2 quadradinhos. LEA mencionou as duas multiplicações possíveis (e já registradas no quadro): **“seis vezes dois ou dois vezes seis”**. ALU disse: **“dois divididos por seis”** Quando questionei as sugestões apresentadas, PEP sugeriu: **“doze divididos por seis profe”**. Solicitei a ajuda dos alunos para registrar, usando linguagem matemática, a idéia do PEP. Após a produção desse registro ($12 : 2 = 6$), questionei sobre a possibilidade de registrar uma notação de divisão diferente

daquela. Fiz uma seta abaixo de cada coluna do retângulo desenhado no quadro (figura 70).

P: **olhando assim... temos dois grupos ó... um grupo... outro grupo. Agora... olhando assim...** (aponto cada linha) **temos quantos grupos?**

ALGUMAS CRIANÇAS: **dois.**

P: **ó, aqui tem um grupo, outro grupo, outro grupo....** (faço uma seta ao lado de cada linha)

CRIANÇAS: **seis.**

P: **então tem também uma outra divisão para esse retângulo.**

LEA: **seis vezes dois.**

P: **isso é uma multiplicação.**

RAR: **seis divididos por dois.**

P: **será? Qual é o total de quadradinhos?**

CRIANÇAS: **doze.**

P: **então... na divisão a gente vai sempre pensar no total, primeiro.**

PEP: **doze divididos por seis.**

(DIAPE15, 30/05)

Figura 70. Registros do retângulo feito no quadro (aula 15)

No diálogo apresentado, é possível perceber que as crianças tentavam “adivinhar” as sentenças de divisão, sem levar em conta o número total de quadradinhos. LEA mencionou duas vezes sentenças de multiplicação e ALU e RAR sugeriram sentenças de divisão, mas que não correspondiam ao retângulo (“dois divididos por seis” e “seis divididos por dois”). Somente PEP conseguiu verbalizar as duas divisões que correspondiam à organização dos quadradinhos no retângulo. A maioria das crianças nem opinou.

Quando trabalharam na composição de retângulos com 15 e com 24 quadradinhos no total, a maioria das duplas não produziu notações de divisão. No último caso, por exemplo, apenas três duplas fizeram alguma notação de divisão. Uma delas registrou duas divisões para três dos quatro retângulos formados, mas sem o registro dos resultados (figura 71). Duas duplas fizeram uma notação de divisão para apenas um dos quatro retângulos desenhados e as demais fizeram apenas notações multiplicativas ou não fizeram nenhum tipo de notação matemática, apenas desenharam os retângulos.

Figura 71. Registros feitos pela dupla JUB e DES (aula 15)

A dificuldade dos alunos na produção de notações de divisão foi também registrada pela professora da turma, ao analisar o desempenho de seus alunos nesta última atividade:

Sobre os registros da divisão na situação proposta, percebi que as crianças ainda não compreenderam, demonstraram muita insegurança ao realizar a atividade. Os problemas propostos hoje contribuíram para que as crianças construíssem diferentes registros para o algoritmo da multiplicação. Quanto a divisão, ajudou a “esclarecer” um pouco mais, mas ainda não está firmado para eles o conceito da divisão.

(REPROF, 30/05)

5. 1. 2. 2 Procedimentos de resolução de problemas

Embora tenhamos constatado dificuldades, por parte das crianças, na produção de notações simbólicas convencionais, observamos que elas foram capazes de resolver

problemas de divisão em diferentes contextos elaborando procedimentos próprios de solução. Os procedimentos mais usados foram de tipo aditivo e de tipo multiplicativo.

Procedimentos de divisão foram encontrados apenas em soluções nas quais as crianças representaram a situação por meio de desenhos e somente nos problemas de divisão-partição. Escolhemos dois exemplos para ilustrar esse tipo de procedimento, cada um relativo a um problema diferente e com soluções apresentadas por alunos diferentes.

O primeiro mostra os registros produzidos por SAB para resolver um problema apresentado por escrito sobre o Jogo dos Restos (figura 72).

Figura 72. Solução apresentada por SAB ao problema 2 (aula 7)

Ela desenhou os feijões (total) e os pratinhos (partes). Em seguida fez traços ligando os feijões dois a dois a cada pratinho. Marcou, ao todo, dez feijões. Fez mais dois traços ligando outros dois feijões ao último pratinho e contou os feijões que sobraram (3). Fez novos traços saindo de cada um dos cinco últimos feijões, ligando-os, um a um, a cada pratinho. Desenhou novamente 15 feijões, depois os cinco pratinhos³⁹ com três feijões dentro de cada um. Explicou que fez isso para mostrar a solução já que os primeiros registros ficaram muito riscados.

No segundo exemplo (figura 73), temos a solução apresentada por LUJ a um problema proposto oralmente, cujo enunciado era: “*tenho cem reais e quero dividir esse dinheiro entre meus 6 sobrinhos. Quanto devo dar a cada um para que todos recebam a mesma quantia?*”. Em sua solução ele usa tanto procedimentos de divisão quanto de adição:

³⁹ Embora no registro que fez em sua folha tenha desenhado só 4 pratinhos, no quadro fez os 5 pratinhos.

Figura 73. Solução apresentada por LUJ - problema de divisão (aula 20)

LUJ desenhou a cédula de 100 reais e as seis crianças. Em seguida desenhou cinco cédulas de 20 reais e fez traços ligando-as a cada criança (uma ficou sem). Apagou e desenhou seis cédulas de 10 reais, ligando-as a cada criança. Depois desenhou mais quatro cédulas de 10 reais e, abaixo delas, oito de 5 reais. Fez traços ligando estas últimas às crianças, apagou e fez novamente. Mostrou seus registros para a professora e disse que cada criança receberia 15 reais. A professora mencionou a possibilidade de se dividir os dez reais que sobraram (aponta em seu registro as duas notas de 5 reais que não foram ligadas a nenhuma criança). Depois dessa intervenção ele fez os outros registros.

Várias crianças tentaram resolver esse problema usando procedimentos de divisão semelhantes ao de LUJ, mas desistiram, recorrendo depois a procedimentos de tipo aditivo. LOS, por exemplo, chegou a desenhar 100 quadradinhos, as 6 crianças e tentou ligar os quadradinhos, um a um a cada criança. Quando percebeu a inviabilidade desse procedimento, devido à grande quantidade de traços, apagou tudo.

Na figura 74 temos um exemplo do uso de procedimentos aditivos para solucionar esse problema de divisão. FEG desenhou 10 cédulas de 10 reais e depois 6 crianças. Em seguida fez as setas ligando as cédulas de 10 reais a cada criança. Registrou um número 10 abaixo de cada uma e anunciou a soma: “**sessenta**”. Depois registrou os números 5, anunciando a cada dois deles: “**setenta, oitenta, noventa**”. Ao registrar cada número um, continuou contando: “**noventa e um, noventa e dois, noventa e três, noventa e quatro,**

noventa e cinco, noventa e seis”. Continuou acrescentando os centavos e contando até chegar em R\$ 16,66. Separou cada coluna com os traços e registrou o resto.

Figura 74. Solução apresentada por FEG - problema de divisão (aula 20)

Na solução dos problemas de divisão-quota, verificamos o uso de procedimentos aditivos e de procedimentos multiplicativos. São apresentados a seguir dois exemplos de procedimentos aditivos, nos quais os alunos usaram desenhos. Cada um se refere a um problema diferente, ambos sobre o jogo Mini-Yam, apresentados na aula 19:

1. A tabela abaixo mostra a pontuação feita pelo LEP no Jogo Mini-Yam. Descubra quantas vezes ele conseguiu cada número nos dados para somar a pontuação indicada e complete a tabela:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO ELE CONSEGUIU	QUANTOS PONTOS ELE FEZ COM ESTE NÚMERO
1	5	5
2	5	10
3	2	6
4	3	12
5	4	20
6	5	30

1-□□□□□=5
 2-□□□□□=10
 3-□□□=6
 4-□□□□=12
 5-□□□□□=20
 6-□□□□□=30

Figura 75. Solução apresentada por VAM ao problema 1 (aula 19)

2. A equipe de RAR marcou 60 pontos escolhendo o número 5 nos dados. Quantas vezes elas conseguiram o número 5 na equipe?

Figura 76. Solução apresentada por LOS ao problema 2 (aula 19)

Para resolver esses mesmos problemas algumas crianças recorreram ao quadro da multiplicação ou realizaram cálculo mental (adição ou multiplicação). Nesses casos as notações não foram usadas para resolver o problema, mas para comunicar o procedimento usado. São apresentados a seguir três exemplos. O primeiro é relativo ao problema 1 e os outros ao problema 2:

1. A tabela abaixo mostra a pontuação feita por LEP no Jogo Mini-Yam. Descubra quantas vezes ele conseguiu cada número nos dados para somar a pontuação indicada e complete a tabela:

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTE NÚMERO ELE CONSEGUIU	QUANTOS PONTOS ELE FEZ COM ESTE NÚMERO
1	5	5
2	5	10
3	2	6
4	3	12
5	4	20
6	5	30

1. Eu descobri olhando na tabela, eu vi quantas vezes dava aquela quantidade
 Ex: $5 \times 2 = 10$

Figura 77. Solução apresentada por LEA ao problema 1 (aula 19)

Figura 78. Solução apresentada por EAS ao problema 2 (aula 19)

Figura 79. Solução apresentada por PEP ao problema 2 (aula 19)

No relatório da professora, relativo às atividades realizadas nesse dia, ela mencionou o fato de as crianças não reconhecerem os problemas como sendo de divisão e interpretou esse fato como indicativo da falta de compreensão dos problemas, ainda que, utilizando-se de procedimentos aditivos ou multiplicativos, os alunos tenham conseguido resolvê-los:

O problema após o jogo, percebi que a maioria deles não identificaram que era de divisão. Muitos somaram e multiplicaram, não entenderam o que o exercício estava pedindo. [...] No problema 2 eles não identificaram uma situação de divisão, a maioria usou a adição e a multiplicação.

(REPROF, 06/07)

Outros exemplos de procedimentos elaborados pelos alunos para resolver problemas de divisão podem ser verificados nos registros produzidos pelos alunos na aula 21. O problema, proposto oralmente, consistia em descobrir quantas fichas de R\$ 0,50 era possível comprar com R\$ 12,00 e foi resolvido por todos os alunos.

Na figura 80 temos um exemplo de procedimento de solução no qual o aluno registrou fichas de R\$ 0,50 adicionando-as até obter como resultado R\$ 12,00. Depois contou o número de fichas desenhadas:

Figura 80. Solução apresentada por DES - problema de divisão (aula 21)

Outras crianças também registraram fichas de R\$ 0,50 e adicionaram-nas até obter R\$ 6,00. Depois dobraram o resultado obtido, um exemplo desse tipo de solução pode ser visto na figura 81.

Handwritten solution for Figure 81:

$$50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 6$$

Below the sequence, there are annotations:

- 6 reais $\rightarrow$ 12 fichas
- + 6 reais $\rightarrow$ 12 fichas
- $\frac{24}{24}$ 24 fichas

Figura 81. Solução apresentada por BRA ao mesmo problema

Na figura 82 vemos um procedimento de solução que, de acordo com a explicação do aluno que o produziu, consistiu em registrar a quantidade de fichas que poderiam ser compradas com cada R\$ 1,00, (duas fichas) e depois fazer uma adição para verificar o número total de fichas.

Handwritten solution for Figure 82:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 24$$

Below the sequence, there is a vertical addition:

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

Figura 82. Solução apresentada por RIS ao mesmo problema

Além de verificarmos a elaboração de procedimentos variados para resolver os problemas mencionados, percebemos que os alunos foram capazes de explicar com desenvoltura os meios de solução empregados.

5. 2 Relações sociais/morais

5. 2. 1 Interações entre as crianças

As atividades propostas, bem como a sua forma de exploração, visavam propiciar interação entre os alunos. Foi possível constatar ao longo da nossa intervenção que as crianças passaram a interagir mais entre si e que algumas das atividades propostas provocaram maior interação entre as crianças do que outras.

Nos primeiros encontros percebemos que as crianças interagiram pouco entre si. Na aula 3, por exemplo, verificamos que embora estivessem organizadas em duplas, grande parte das crianças não interagiu com o(a) colega para resolver o problema proposto que consistia em montar um retângulo com quadradinhos de EVA, a partir de uma notação aditiva dada. Registramos dois tipos de situações que mostram a ausência de interação entre as crianças: na primeira um dos alunos montou o retângulo e o outro ficou apenas observando; na segunda, cada aluno montou seu próprio retângulo correspondente à adição dada sem compará-lo com o do colega. Houve casos, entretanto, em que as crianças tentaram montar dois retângulos (cada um o seu), mas o número de quadradinhos não foi suficiente, fato que os levou a interagir na montagem de um único retângulo correspondente à notação apresentada⁴⁰.

Desde o primeiro encontro, incentivamos as crianças a compararem entre si as soluções apresentadas e os registros produzidos. Entretanto, nos primeiros encontros tais comparações raramente foram feitas sem a nossa intervenção (minha ou de uma das estagiárias).

Nos jogos, ao contrário, houve uma forte interação entre as crianças. Durante as partidas do Jogo dos Restos, por exemplo, observamos que as crianças realizavam juntas as distribuições e que se ajudavam tanto na verificação da correção dessas distribuições, quanto no preenchimento da tabela do jogo. Isso pode ser verificado no episódio apresentado a seguir, registrado durante uma partida do Jogo dos Restos, na aula 8⁴¹:

Na primeira rodada o MED usa 5 pratinhos e coloca 12 feijões em cada (resta 1 grão). Registra estas informações na tabela, vira a folha e no verso registra a adição: $12 + 12 + 12$. Pára, olha os pratinhos e enquanto isso FAB conta-os em voz alta: FAB: (aponta cada pratinho) **um, dois, três, quatro... cinco vezes doze!** MED acrescenta um sinal de mais (+) e um número 12 à adição já registrada.

⁴⁰ Como as notações aditivas eram diferente para cada dupla, esse fato ocorreu apenas com algumas delas.

⁴¹ Na partida realizada nesse dia foi solicitado aos alunos que registrassem no verso da folha da tabela do jogo, os cálculos que poderiam ser usados para descobrir o número total de grãos em cada rodada.

VAM: (dirigindo-se ao MED e apontando a adição que ele registrou) **apaga isso daí então... faz cinco vezes doze!**

MED: **é... mas eu vou escrever assim... de mais.**

Os três contam juntos quantos números 12 MED registrou: **um, dois, três, quatro...**

MED acrescenta outro sinal de mais (+) e outro número 12.

VAM: **tanta continha grande...**

FAB: **todo mundo vai ajudar... beleza?**

MED: (marca o primeiro par de números 12 - figura 83 - olha para as colegas) **doze mais doze é...**

FAB: **vinte e quatro.**

MED: **vinte e quatro?**

FB balança a cabeça afirmativamente e MED registra o número 24.

VAM: **viu... tenho uma amiga bem esperta que eu tenho, né?**

MED: (marca o outro par de números 12 e registra 24. Ao lado coloca o número 12, repetindo o que está acima - figura 83. Marca o par de números 24) **agora vinte e quatro...** (começa usar os dedos para contar) **vinte e cinco, vinte e seis, vinte e sete...**

FAB: **quarenta e oito.**

VAM: **como você fez?**

FAB: **eu fiz de cabeça... quarenta e oito.**

ME registra o número 48 e ao lado registra o sinal de mais e o número 12.

VAM: **quarenta e oito mais doze.**

MED conta nos dedos, de 48 até 60. Anota o resultado.

VAM: **será que é sessenta?**

FAB: **não... é oitenta... apaga aí!**

MED pega a borracha e a estagiária interfere:

E: **por que você vai apagar MED?**

MED: **por causa que a FAB disse que está errado.**

E: **mas está errado mesmo?**

MED: **não sei...**

E: **faça a conta de novo... ali do lado** (aponta o espaço em branco da folha, ao lado do registro que ele fez)

Os três contam nos dedos ($48 + 12$) e verificam que o resultado é 60. MED vira a folha e registra o número 61 na coluna referente ao total de grãos.

VAM: **por que sessenta e um? Não é sessenta que a gente contou?**

MED: **porque eu contei mais um do resto!**

VAM: **ah... tinha mais um no resto.**

(DIAPE8, 11/04)

Figura 83. Registros feitos por MED 1ª rodada - Jogo dos Restos (aula 8).

Verificamos que a partir da aula 9 os alunos passaram a interagir mais entre si, não apenas nos jogos, mas também na resolução dos problemas propostos. Temos um exemplo dessa interação no diálogo estabelecido entre dois alunos que trabalhavam juntos para responder uma questão relativa aos registros que um deles produziu durante uma partida do

Jogo dos Restos. Os referidos registros foram fotocopiados e apresentados aos alunos, acompanhados de três questões (figura 84).

1. Veja os registros feitos por PEP na 4ª rodada do JOGO DOS RESTOS:

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
4ª	5	3	4	12

4^2
 $3+3+3+3+3$
 $\checkmark$ 6 $\checkmark$ 6 (c)
 $6+6=12$ (b)
 $12+3=15$
 $\checkmark$ $15+4=19$ (a)

a. Qual o total de grãos registrado pelo PEP na tabela de pontuação?
 b. Qual o total de grãos registrado pelo PEP no cálculo mostrado ao lado?
 c. Um dos resultados registrados por ele está errado. Qual deles está errado? Por que?

Figura 84. Problema apresentado aos alunos (aula 9)

No trecho do diálogo apresentado a seguir PEP e GAF discutem sobre a questão c:

PEP: (aponta o número 12 registrado na quinta coluna da tabela) **aqui tá errado ou é aqui** (aponta o número 19, marcado na figura 84 com a letra a).

GAF: **aqui** (aponta o 12 registrado na última coluna da tabela).

PEP: **eu acho que é... aqui** (aponta o 19 - figura 84a).

GAF: (aponta as notações indicadas na figura 84 com as letras b e c) **é que aqui você contou doze... mais esse três**

PEP: **GAF, mas e aqui?** (Ri e aponta o 12 registrado na tabela).

GAF: **ai tá errado!**

PEP: **Por que?**

GAF: **porque é dezenove e não doze.**

PEP: **é dezenove aqui...** (ri, pega a borracha e tenta apagar o número 12 registrado na tabela) **apaga!** (Olha para GAF, olha para frente, tenta apagar novamente, olha para GAF). **Eu tinha que ficar com o original e não com o xerox!**⁴²

GAF: **é que aqui você não contou com o resto.**

PEP: (olha para a tabela) **mas daí ia dar dezesseis...** (refere-se à soma do total marcado -12 - com o resto - 4)

GAF: **então tá errado aqui e aqui** (aponta o registro da tabela e dos cálculos apresentados abaixo dela)

PEP: **os dois... daí o que que escreve? Tem que ser a...b. Tem que responder aqui** (aponta a folha em branco do GAF, pega sua própria folha) **tem que por a... qual será que é o resultado?** (Olha para a tabela) **três grãozinhos em cada... eu tinha cinco pratinhos** (olha para GAF) **três... ó...** (olha para a tabela, levanta um dedo, olha para GAF) **seis...** (levanta outro dedo, olha para frente) **três... seis... nove** (levanta mais um dedo, olha para GAF). **Doze...** (levanta o quarto dedo) **quinze** (levanta o quinto dedo). **Quinze... tá** (aponta a tabela) **em todos os pratinhos juntos tem quinze grãos** (olha para GAF) **é quinze... ih... ó, tem cinco pratinhos** (mostra 5 dedos) **três vezes um... três. Três vezes dois... seis. Três vezes três...**

⁴² Ele faz esse comentário porque o registro apresentado na atividade foi feito por ele mesmo, durante a partida realizada no encontro anterior.

nove. Três vezes quatro... doze. Três vezes cinco... quinze (enquanto fala vai apontando cada dedo, olhando para o colega, como a esperar que este diga também a tabuada. GAF acompanha balançando a cabeça afirmativamente, a cada resultado anunciado pelo colega). **Então põe 15 aí!** (aponta a folha em branco do colega).

Antes que façam o registro, a estagiária intervém, propondo questões que os levam a interpretar os registros de cálculo apresentados abaixo da tabela e que levaram à soma 19.

(DIAPE9, 13/04)

Observamos ainda que quando duas crianças recebiam apenas uma folha contendo o enunciado de um problema, a interação entre elas era maior do que quando cada uma recebia sua própria folha. Vale ressaltar, entretanto, que nos últimos encontros, mesmo quando foram propostas atividades para serem feitas individualmente, várias crianças pediram para trabalhar com um colega e foi possível verificar que houve interação na resolução dos problemas.

Na aula 4, a primeira na qual exploramos um jogo, foi solicitado à professora que comentasse sobre o barulho que as crianças fizeram. Essa questão foi abordada porque na primeira conversa com a professora, antes da nossa inserção em sala, ela mencionou que não trabalhava muito com jogos, justificando sua atitude pelo fato dos jogos causarem muito tumulto na sala. Em seu relatório vemos que ela sugeriu, nesse dia, que o barulho poderia ser uma explicação para as dificuldades apresentadas pelas crianças na realização das distribuições e das contagens no jogo:

O barulho que houve durante o jogo prejudicou a aprendizagem. Muitas crianças perderam a atenção, contando errado, não conseguiram se entender dentro do grupo.

(REPROF, 21/03)

Em outros relatórios, feitos posteriormente, quando solicitada a comentar sobre as atividades realizadas em duplas, ela destacou a dificuldade das crianças para trabalhar em equipes, mencionando novamente a questão do barulho, mas indicou ter percebido avanços na interação entre as crianças e atribui valor a esse tipo de interação:

O trabalho em duplas foi interessante. Algumas duplas conversaram entre si, outras não, um dos alunos “tomou para si” a atividade. Eles tem bastante dificuldade de pensarem juntos para encontrar a solução. Em relação a outras duplas a interação foi mais no sentido de verificar se o deles estava certo.

(REPROF, 30/05)

Na atividade que eles primeiro resolveram sozinhos e depois em duplas, deu para notar que eles tem dificuldade em trabalhar em duplas. Pensar juntos, chegar a uma solução pensando com outra pessoa é algo que gera tumulto. Mas vejo que é um trabalho a longo prazo e que já houve melhora em relação ao início do trabalho. Vale a pena investir pois é uma atividade muito rica e significativa para a aprendizagem deles.

(REPROF, 12/06)

5. 2. 2 Atitudes dos alunos

Na análise dos resultados relativos às interações entre as crianças foi mencionada a ocorrência de uma mudança na atitude dos alunos que, ao longo da intervenção, passaram a interagir mais entre si. Outras mudanças de atitude foram também observadas no que se refere ao envolvimento dos alunos nas atividades propostas e na forma como passaram a lidar com os problemas apresentados.

Indícios dessas mudanças podem ser verificados, por exemplo, na participação dos alunos nas discussões coletivas. No decorrer da intervenção os alunos passaram a manifestar, com frequência, comportamentos incomuns nos primeiros encontros, como por exemplo: pedir para ir ao quadro mostrar uma solução mesmo sem estar certo sobre a sua correção, interpretar a solução apresentada por um colega, expressar sua opinião, comparar soluções e explicar as diferenças entre elas.

São apresentados a seguir dois episódios através dos quais podemos ilustrar a mudança de atitude dos alunos em relação à participação nas discussões. O primeiro foi registrado na aula 1 e o outro na aula 19.

No primeiro encontro, quando solicitados a explicar um registro apresentado por uma colega para contar os quadradinhos de um retângulo (figura 85), inicialmente apenas dois alunos se manifestaram: um deles afirmou que ela havia copiado os números e outro disse não saber como ela procedeu. Somente depois de instigar a classe através de perguntas mais direcionadas aos registros produzidos é que uma aluna sugeriu uma explicação:

Figura 85. Reprodução do registro feito por ALU no quadro (aula 1)

P: olhem só o registro que a AL fez aqui. Quem sabe explicar o que ela fez?

Ninguém responde.

P: de onde será que ela tirou esses números aqui ó... 16, 24, 32 e 40? (aponto cada número registrado por ALU - figura 85)

GAE: ela copiou!

P: copiou? De onde? Ela fez agora... como pode ter copiado?

GAE: uê... mas ela deve ter decorado.

P: (dirijo-me à ALU) **você sabia de cor esses números ALU?**

ALU: **não.**

P: **como então ela chegou a esses números que colocou aqui? Olha só... ela colocou aqui dezesseis, depois vinte e quatro... trinta e dois e... no final quarenta** (aponto os números enquanto falo). **Como ela fez isso?**

MED: **sei lá!**

P: **alguém tem uma idéia?**

Ninguém responde.

P: **esse 16 aqui, gente... ela marcou esses dois números 8 aqui** (aponto a linha que AL fez unindo os dois primeiros números) **e registrou um 16... por que ela colocou esse 16 aqui?**

FAB: **é oito mais oito?**

(DIAPE1, 07/03)

No outro episódio, podemos perceber uma atitude diferente dos alunos. A transcrição a seguir refere-se a uma discussão coletiva sobre os procedimentos usados por eles para resolver um problema envolvendo o Jogo Mini-Yam, cujo enunciado era: *a equipe de RAR marcou 60 pontos escolhendo o número 5 nos dados. Quantas vezes elas conseguiram o número 5 nessa equipe?*

P: **Quem quer explicar como pensou para resolver esse problema?** (vários alunos levantam a mão. Peço ao PEP que conte como resolveu o problema)

PEP: **eu contei quantas vezes de 5 que dava sessenta.**

P: (dirigindo-me a todos os alunos) **olhem lá no quadro da tabuada que vocês fizeram... tem 60 na tabuada do 5?**

As crianças consultam o quadro da tabuada e respondem: **não!**

P: **qual é o maior número que tem na tabuada do 5, aí nesse quadro?**

CRIANÇAS: (após consultarem o quadro) **cinquenta.**

P: (registro o número 50 no quadro) **quantos dadinhos de 5 uma equipe precisa tirar... prá fazer 50 pontos?**

MED: **doze.**

P: **vocês concordam com o ME?**

ALGUMAS CRIANÇAS: **não... são dez.**

P: **por que dez?**

LEA: **porque 5 vezes 10 que é 50!**

P: **isso nós podemos descobrir olhando no quadro da tabuada... porque 5 vezes 10 é cinquenta... mas teve gente que não procurou na tabela, mas foi desenhando os dados e contando quantos pontos dava.**

Algumas crianças levantam a mão e dizem que desenharam os dados.

P: **então... teve gente que já descobriu que 10 dados de 5 dava 50 pontos...** (registro no quadro $10 \times 5 = 50$ - figura 86) **mas qual foi o total de pontos que elas fizeram?**

CRIANÇAS: **sessenta.**

P: **então, HEI... 10 dados de 5... já eram suficientes prá dar 60 pontos?**

HEI: **dez? Não... faltava mais dez pontos.**

ALU: **dez pontos ou mais dois dados!**

P: **mais dez pontos... ou mais dois dados... porque duas vezes 5 dá 10** (faço o registro dessa multiplicação e uma elipse sobre os resultados das duas multiplicações. Registro o número 60 - figura 86) **tudo junto dá 60 pontos.** (Aponto a primeira multiplicação) **quantas vezes a gente teve que repetir 5 prá ficar com 50?**

CRIANÇAS: **dez vezes.**

P: **mas dez vezes não foram suficientes para dar 60 pontos... então a gente teve que repetir... mais quantas vezes?**

CRIANÇAS: **mais duas.**

P: (faço o retângulo mostrado na figura 86) **então ao todo foram 12 vezes** (faço a seta e escrevo "12 vezes" - figura 86). **Mas eu vi que a FAB fez de um jeito**

diferente... ela encontrou o número 30 na tabuada do 5... quantas vezes 5 que dá 30?

CRIANÇAS: (após consultarem o quadro da tabuada) seis vezes!

P: então... ela descobriu que 6 vezes 5 dava 30

FEG: então mais seis vezes... dava 60.

Eu digo: isso... ela viu que 6 dados de 5 dava 30 pontos (registro no quadro: 6 dados = 30 pontos) então, ela viu que se tivesse mais 6 dados.... teria mais quantos pontos?

CRIANÇAS: mais 30 (registro: 6 dados = 30 pontos. Circulo os dois números 30 e registro um número 60 - figura 87) aqui... esses 30 pontos, mais 30 pontos, dá quanto?

CRIANÇAS: sessenta.

P: então ela viu que eram 12 ... pois fez 6 dados mais 6 dados.

(DIAPE19, 06/07)

Figuras 86. Registro feito no quadro durante a discussão coletiva (aula 19)

Figuras 87. Registro feito no quadro procedimento de solução FAB (aula 19)

Nesse segundo episódio a participação das crianças é maior. Desde o início, várias delas pediram para falar e demonstraram maior interesse em compreender e explicar as estratégias de solução usadas pelos colegas. Essa atitude é também mencionada pela professora da turma no relatório referente às atividades realizadas nesse dia:

A discussão feita sobre as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema foi muito rica, pude observar a linha de raciocínio usada e me surpreendi principalmente com aqueles alunos considerados “fracos”. As crianças também se surpreenderam com as estratégias utilizadas, palpitam, dizem se acham difícil ou não. Nestas discussões eles estão mais soltos, sem vergonha de exporem suas opiniões, mais desenvolvidos na oralidade.

(REPROF, 06/07)

Nos relatórios e comentários feitos pela professora observamos ainda indícios importantes de mudança de atitude daqueles alunos que, segundo sua avaliação, apresentavam dificuldades em matemática. Já no primeiro relatório produzido por ela há uma menção a um desses alunos:

Minha maior surpresa foi com um aluno que tem muitas dificuldades (LUJ). Durante a atividade ele respondeu aos questionamentos (fato raro, ele é muito apático). Desenvolveu uma linha de raciocínio, pediu para ir ao quadro e mesmo não acertando, não demonstrou vergonha.

(REPROF 07/03)

Na aula 3, em uma conversa com as estagiárias, a professora comentou que estava se surpreendendo com o bom desempenho de alguns alunos que considerava “fracos em

matemática”, referindo-se nominalmente a LUJ, SAB e CRI⁴³. Na conversa que tivemos antes do início da intervenção, ela já havia se referido a SAB como a aluna da classe que apresentava mais dificuldades em matemática. Contou, inclusive, que ela não participava das aulas dessa disciplina junto com seus colegas, mas era encaminhada para outra sala na qual outra professora realizava uma intervenção individual com ela, num programa de “recuperação paralela”.

Convém destacar que durante nossa inserção em sala, SAB teve uma participação muito expressiva. Sempre tentou resolver os problemas propostos oferecendo-se, várias vezes, para ir ao quadro mostrar a solução apresentada. Nessas ocasiões observamos bastante desenvoltura para explicar seus registros. Um exemplo pode ser visto no trecho transcrito a seguir no qual ela explica como procedeu para resolver um problema proposto na aula 7 (figura 88)⁴⁴:

Figura 88. Solução apresentada por SAB - problema 2 (aula 7)

SAB: eu desenhei os cinco pratinhos e depois os quinze feijões... (aponta no desenho - figura 88) **daí eu fui fazendo essas linhas aqui prá mostrar os feijões que podiam colocar em cada pratinho... esses dois aqui, depois esses dois aqui... esses dois... esses dois e esses dois** (enquanto fala aponta para duplas de feijões e os respectivos pratinhos aos quais foram ligados). **Daí... depois... sobraram esses aqui...** (aponta os cinco últimos feijões) **daí então eu fui colocando em cada pratinho... em um em um**⁴⁵.

P: e por que você fez aqueles desenhos lá embaixo... explica prá gente, SAB (aponto o desenho dos pratinhos com os feijões dentro).

⁴³ Não há outras menções a CRI por se tratar de um aluno que foi transferido para outra escola no final de março.

⁴⁴ A solução de SAB para este problema foi apresentada no item 5.1.2.2 e é retomada aqui com o intuito de mostrar a desenvoltura da aluna diante dos colegas.

⁴⁵ Como pode ser observado na registrada por ela em sua folha, depois de distribuir os 10 primeiros grãos (dois a dois), ela tentou colocar mais dois em cada pratinho (fez os traços ligando o 11º e o 12º grãos ao último pratinho). Como viu que sobraram 3 grãos e que não seria possível colocar mais dois em cada pratinho, contou os feijões que haviam sobrado após a primeira distribuição (5) e verificou que poderia colocar mais um grão em cada pratinho. Quando fez o registro no quadro, já fez direto um traço ligando cada um dos cinco últimos grãos a um pratinho.

SAB: **ah... estes daqui é porque daí ficou muito riscado aqui...** (aponta os primeiros registros) **daí então eu fiz aqui prá mostrar melhor como que ficou... esses todos aqui...** (aponta os 15 feijões enfileirados) **dentro dos pratinhos.**

P: **e quanto que deu... em cada pratinho?**

SAB: **em cada? É... (olha para o desenho) deu três em cada.**

(DIAPE7, 04/04)

O episódio relatado ilustra também uma mudança de atitude dos alunos frente aos problemas apresentados, sobretudo problemas verbais, apresentados por escrito. Na aula 6, quando foi proposto um problema que descrevia a distribuição feita por uma aluna no Jogo dos Restos e perguntava sobre o número total de feijões⁴⁶, observamos uma grande preocupação por parte das crianças com a “conta” a ser realizada. Essa atitude dos alunos foi registrada no Diário da Pesquisadora:

[...] em suas observações, a estagiária também destacou a grande dificuldade dos alunos com a leitura dos enunciados. Tivemos a impressão de que as crianças queriam adivinhar o que era para fazer, sem usar a leitura como orientadora de suas ações. Para resolver o problema 5, por exemplo, vários alunos somaram todos os números apresentados no enunciado. LUJ subtraiu o resto (3) do número de grãos em cada pratinho (8). Quando questionados sobre os procedimentos de solução usados, não souberam explicar porque somaram ou subtraíram os números, mesmo assim não perceberam que a resposta era absurda, ficaram esperando nosso julgamento.

(DIAPE6, 30/03)

No decorrer da intervenção e conforme vários exemplos já apresentados, as crianças passaram a apresentar uma atitude mais investigativa, elaborando procedimentos pessoais de solução, comparando os procedimentos com aqueles usados pelos colegas e até mesmo passando a julgar a validade dos resultados obtidos. No episódio relatado a seguir podemos observar como MEB julga a validade de um resultado obtido por ela (Jogo Mini-Yam), comparando-o com os resultados obtidos por suas colegas:

Após realizar vários cálculos usando os números registrados na última coluna da tabela, MEB chegou a um total de 89 pontos (cálculos marcados com a letra a, na figura 89). Fez uma nova adição, juntando todos os resultados parciais obtidos anteriormente e obteve um total de 277 pontos (cálculo marcado com a letra b, na figura 89). Antes de registrar esse valor como a pontuação total obtida no jogo, olhou as folhas das colegas. Observou que a pontuação feita por elas foi bem menor que a sua (74, 79 e 84), então pegou a borracha e disse: **eu acho que está errado esse aqui.** A estagiária, que estava observando perguntou por que ela achava que estava errado. MEB diz: **deu muito grande esse número aqui** (aponta o 277). **Eu vou fazer de novo.** Fez novos cálculos usando os números registrados na última coluna da tabela, desta vez agrupando-os de forma diferente (cálculos marcados com

⁴⁶ O enunciado do problema em questão era o seguinte: “em uma de suas jogadas JUB usou 5 pratinhos, colocou 8 grãos em cada um e sobraram 3 grãos. Quantos grãos ela tinha ao todo?”.

a letra c na figura 89). Explicou para a estagiária que para calcular, desta vez foi marcando na tabela os números que já tinha somado⁴⁷.

(DIAPE16, 01/06)

JOGO MINI-YAM									
NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMERO EU CONSEGUI						QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO		
1	X	X	X	~	~	~	3		
2	X	X	X	X	X	X	12 ^x		
3	X	X	X	X	~	~	12 → 24		
4	X	X	X	~	~	~	12		
5	X	X	X	X	~	~	20		
6	X	X	X	~	~	~	18 ^x		
PONTUAÇÃO TOTAL		77							
ESPAÇO PARA CÁLCULOS									
<div><div><div><div><div>12</div><div>+12</div><div>3</div><div>27</div></div><div><div>27</div><div>+12</div><div>39</div></div><div><div>39</div><div>+12</div><div>51</div></div><div><div>51</div><div>+20</div><div>71</div></div><div><div>71</div><div>+3</div><div>74</div></div></div><div><div><div>27</div><div>39</div><div>51</div><div>71</div><div>89</div><div>277</div></div><div>(a)</div></div></div><div><div><div>12</div><div>+18</div><div>30</div></div><div><div>30</div><div>+20</div><div>50</div></div><div><div>50</div><div>+12</div><div>62</div></div><div><div>62</div><div>+24</div><div>86</div></div></div><div><div><div>74</div><div>+3</div><div>77</div></div><div>(c)</div></div></div>									

Figura 89. Tabela de pontuação - jogo Mini-Yam preenchida por MEB (aula 16)

Foi possível observar também o desenvolvimento de uma atitude bastante positiva dos alunos em relação às aulas de matemática. Na aula 14, por exemplo, quando as crianças trabalharam no preenchimento do quadro da multiplicação, percebemos que estavam muito envolvidas com a atividade e interessadas na sua execução. Quando discutíamos sobre o preenchimento da tabela e foi mostrado que era possível encontrar diferentes retângulos dentro do quadrado de 10x10, cobrindo algumas linhas e colunas, ALU, que olhava para o quadro com muita atenção falou em voz alta: “**que máximo... professora!**” PEP comentou: “**que legal... parece o Batalha dos Números**”, referindo-se à cartela do jogo.

⁴⁷ O registro deste episódio não foi feito por meio da gravação em vídeo, mas por escrito. A estagiária que observava esta equipe anotou as falas de MEB e depois escreveu um pequeno relatório descrevendo as ações realizadas por ela. A partir desse registro o texto foi reescrito e incorporado ao Diário da Pesquisadora 16.

Sobre a forma como as crianças trabalharam no preenchimento do quadro da multiplicação, foram registrados os seguintes comentários no diário da pesquisadora:

Várias crianças olham para os cartazes das tabuadas para completar seus quadros. Para preencher a quarta coluna, BRA conta nos dedos sempre mais 4 a partir do número anteriormente registrado. DES procede da mesma forma para completar a sexta coluna (contando sempre mais 6). MEB tem uma tabelinha com as tabuadas e a usa para registrar os resultados. Nenhuma criança demonstra dificuldade para preencher a tabela e todas ficam muito envolvidas na atividade. Algumas fazem isso mais rápido, usando cálculo mental ou resultados já conhecidos das tabuadas (ou ainda copiando das tabuadas afixadas na parede), sem precisar recorrer à contagem nos dedos.

(DIAPE14, 16/05)

Em seu relatório, a professora da turma também comenta a atitude das crianças frente à atividade proposta e, respondendo a um questionamento sobre o tempo gasto nessa atividade, defende a importância do preenchimento do quadro pelas próprias crianças (em oposição à ideia de receberem um quadro já preenchido):

Os alunos gostaram muito de montar a tabuada no quadrado 10x10. Para eles foi muito significativo porque compreenderam o uso da multiplicação. Fizeram o registro dos resultados num clima de brincadeira. Caso tivessem recebido a tabela já preenchida para eles não teria significado, até achariam interessante a disposição das tabuadas, mas o aproveitamento não seria o mesmo.

(REPROF, 16/05)

Outro episódio que ilustra a atitude positiva dos alunos em relação às aulas de matemática foi registrado numa conversa entre MED, MAS e uma das estagiárias, na aula 10, enquanto escreviam a resposta de um problema:

MAS: (dirigindo-se à estagiária que está filmando) **você gosta de escrever?**

MED, que faz dupla com MAS, pára de escrever e fica olhando para a estagiária esperando uma resposta.

E: **mais ou menos... não sou muito de escrever...**

MED: (sorri) **eu gosto de jogar futebol.**

MAS: **eu gosto de escrever... quando não tenho nada para fazer, eu escrevo!**

MED: ó... **professora** (para a estagiária) **segunda, quarta e sexta é o dia que eu mais gosto... por causa que... segunda eu tenho escolinha de futebol e Educação Física... quarta eu jogo futebol ali na quadra... nós... e tem a aula com vocês e sexta eu jogo futebol e fico na aula com vocês também!**

(DIAPE14, 16/05)

Temos ainda uma importante menção às mudanças de atitudes dos alunos, na entrevista realizada com a professora da turma pós o período de coleta de dados da pesquisa na qual ela destaca tais mudanças como um ponto positivo do processo interventivo que foi realizado em sua classe:

Achei a pesquisa realizada muito proveitosa. Percebi que os alunos gostaram, participaram e melhoraram na forma de se expressar oralmente, eles “pegaram mania” de querer explicar como realizavam as atividades. Também melhoraram na hora de trabalhar em equipe, com menos algazarra e mais respeito com o colega.

(ENTREVISTA 2, dezembro 2007)

5. 3 Relações didáticas

5. 3. 1 A questão do erro

Uma característica a ser destacada em relação à intervenção realizada refere-se à forma como o erro foi tratado no desenvolvimento das atividades propostas aos alunos. Em vez de apontá-los ou mesmo corrigi-los, procuramos problematizá-los, com o intuito de levar os alunos a perceberem os próprios erros e procederem à correção. São apresentados, a seguir, três episódios que ilustram essa questão: um deles mostra uma intervenção realizada com a turma toda e os outros dois mostram a realização de intervenções individuais.

O primeiro ocorreu em 28/03 após constatarmos que a maioria das crianças preencheu incorretamente a tabela do Jogo dos Restos na partida realizada no encontro anterior:

Iniciamos esse encontro sentados no chão, em roda. Pedi que as crianças falassem sobre as regras do jogo e apresentei um cartaz com o registro feito por SAB, na primeira rodada da partida do Jogo dos Restos (figura 90).

P: como a gente pode conferir se a SAB contou corretamente o total de feijões dessa rodada? Quem tem uma idéia?

SAB: somar três e oito? (Refere-se aos números que registrou na 2ª e na 3ª colunas da tabela - figura 90)

LEA: não... é fazer de vezes.

P: por que de vezes?

LEA: porque é quantos pratinhos ela tinha e quantos feijão que tinha em cada um...

P: tá... e quantos pratinhos ela usou gente?

CRIANÇAS: três

P: e quantos feijões ela colocou em cada um?

CRIANÇAS: oito

P: e quanto que dá oito mais oito?

CRIANÇAS: dezesseis

P: e o que mais?

GAE: mais os oito do outro pratinho...

P: e quanto que dá dezesseis mais oito?

CRIANÇAS: (várias delas contam nos dedos) vinte e quatro

P: então está certo esse total que ela colocou aqui? (aponto o número 24 registrado na 5ª coluna da tabela)

ALGUMAS CRIANÇAS: sim.

ALGUMAS CRIANÇAS: não... é vinte e cinco

P: Porque não está certo?

ALGUMAS CRIANÇAS: porque ela esqueceu de contar o resto

P: e precisa contar o resto?

EAS: precisa... porque senão... daí não dá certo, fica faltando.

(DIAPE5, 28/03)

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
1ª	3	8	1	24

Figura 90. Reprodução registro SAB na primeira rodada - Jogo dos Restos (aula 4)

O segundo episódio ocorreu quando um aluno apresentou, no quadro, uma solução incompleta para um problema sobre o Jogo dos Restos (figura 91). Em vez de apontar o erro, sugeri que ele comparasse sua solução com outra já registrada ali por uma colega (figura 92). O enunciado do problema em questão era: *Na terceira rodada do JOGO DOS RESTOS DES usou seis pratinhos, colocou quatro grãos em cada um e sobraram dois grãos. Quantos grãos ela tinha no total?*

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

Figura 91. Solução GAE ao problema 1 (aula 9) reproduzida por ele no quadro

$$8 + 8 + 8 = 24 + 2 = 26$$

Figura 92. Solução MEB ao mesmo problema reproduzida por ela no quadro

Pela comparação com outra solução, GAE reconheceu a incorreção da resposta e completou seu registro acrescentando 2 ao resultado ($24 + 2 = 26$). Fez isso no quadro e, quando retornou à sua carteira, o fez também em sua folha. A transcrição apresentada a seguir mostra a intervenção realizada:

P: o que é isso que você fez GAE, explica prá gente o que é isso que você fez. O que é esse seis? (aponto o número 6 registrado por GAE)

GAE: é por causa que tinha seis... seis pratinhos e quatro grãos.

P: quatro grãos aonde, GE?

GAE olha para seu registro, olha para mim e não responde.

P: olha lá no desenho da MEB... dá prá explicar a tua conta pelo desenho dela?

Onde é que está esse seis que você escreveu aí? Mostra lá no desenho da MEB onde está esse seis que você escreveu aí, GAE.

GAE vai até o registro feito por MEB e aponta cada pratinho.

P: (faço a contagem enquanto ele aponta cada um) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tá, e o número 4 que você escreveu lá, onde está?

GAE aponta cada grão desenhado no último pratinho.

P: só esses?

GAE balança a cabeça negativamente e aponta os feijões de cada pratinho.

P: gente, por isso que ele tá fazendo de vezes, que ele já está abreviando... que são seis vezes, cada um daqueles quatro feijõezinhos. Agora olha lá o resultado dela GAE, se deu igual ao teu.

GAE olha para o resultado registrado pela MEB e balança a cabeça negativamente.

P: O que tem de diferente do teu?

GAE: (vai novamente até o registro feito por MEB, aponta cada número 8 registrado por ela) **é porque ela colocou um monte de 8... e aqui ela colocou 24 mais 2.**

P: **e por que ela colocou mais 2?**

GAE: **por causa que sobraram 2.**

P: **ah, e o teu resultado não tem que contar esses 2?**

GAE: **balança a cabeça afirmativamente**

P: **então tua conta pode estar certa, mas falta fazer o que?**

GAE: **colocar mais 2.**

P: **então quanto vai ficar o total?**

GAE: **vinte e seis.**

(DIAPE9, 13/04)

O terceiro episódio foi registrado na aula 16 mediante um erro de cálculo cometido por um aluno no preenchimento da tabela do Jogo Mini-Yam (figura 93a). Ele usou o algoritmo convencional da adição e quando foi solicitado a explicar como realizou o cálculo, não conseguiu perceber a incorreção do resultado. O erro só foi percebido por ele quando usou outro procedimento de cálculo como instrumento de verificação.

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMEROS EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1	X X X	3
2	X	2 (b)
3	X X X X	12
4	X X X X	16 31 (c)
5	X X X	15 (d)
6	X X	12
PONTUAÇÃO TOTAL		
ESPAÇO PARA CÁLCULOS $\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ 12 \\ 16 \\ 15 \\ 15 \\ \hline 108 \end{array} \quad \begin{array}{l} 31 + 5 = 36 \text{ (e)} \\ 36 + 24 = \text{ (f)} \\ \begin{array}{r} 50 \\ + 10 \text{ (g)} \\ \hline 60 \end{array} \end{array}$		

Figura 93. Tabela de pontuação - Jogo Mini-Yam preenchida por MED (aula 16)

Na transcrição a seguir, vemos como a intervenção realizada possibilitou ao aluno corrigir sua resposta:

MED: **olha professora... tá certo o meu... aqui?** (aponta o resultado 108)

P: **explica prá mim como você conseguiu esse resultado.**

MED: **cinco com cinco... é dez... (aponta os números 5 dos dois 15 registrados na adição - figura 93a) daí mais seis... (aponta o número 6 do 16) dezesseis... (aponta o número 2 do 12) dezessete... dezoito. Daí eu pus o oito aqui (aponta o 8 de 108) e vai um (aponta o número 1 que registrou acima da coluna das dezenas). Aí eu**

somei aqui, ó... três mais um... (aponta os dois primeiros números dessa coluna) **quatro, com dois seis...** (aponta o terceiro número) **sete, oito, nove, dez** (aponta os outros números registrados nessa coluna).

P: **tá... então vamos fazer assim, prá conferir... olha aqui onde você registrou seus pontos em cada rodada** (aponta a última coluna da tabela). **Tem algum par de números aqui que você já saberia fazer de cabeça a soma... que você podia juntar sem armar a conta?**

MED: (olha para os números que registrou nessa coluna, aponta os dois primeiros) **tem... o três e o dois.**

P: **e dá quanto?**

MED: **cinco.**

P: **então você já pode registrar esse resultado... prá não esquecer.**

MED faz dois traços unindo os números 3 e 2 e registra o número 5 (figura 93b).

P: **e agora... tem outros dois números que você já sabe de cabeça quanto dá a soma? Que você pode juntar de cabeça?**

MED: (aponta os dois números 12) **doze com doze dá vinte e quatro.**

P: **então anota.**

MED faz os traços ligando os dois números 12 e registra 24 (figura 93c), olha para mim.

P: **e agora?**

MED: (olha para os números que sobraram – 15 e 16 e aponta-os) **ficou esse e esse.**

P: **e você consegue juntar esses dois de cabeça?**

MED: **não... de cabeça não.**

P: **e se fosse quinze com quinze... daí você saberia?**

MED: **quinze com quinze? É trinta.**

P: **e quinze com dezesseis... dá mais que trinta ou dá menos que trinta?**

MED: (aponta os dois números) **quinze com dezesseis dá... dá mais... é... trinta e um.**

P: **então anota.**

MED faz dois traços juntando o número 15 ao 16 e registra 31 (figura 93d).

P: **tá... e agora, como você pode fazer para juntar esses números?**

MED: (aponta o número 31 e o número 5) **trinta e um com cinco... dá... trinta e seis... trinta e seis daí...**

P: **não quer anotar?**

MED: **tá, vou colocar aqui, trinta... e... um... mais... seis... igual... trinta e seis** (faz o registro - figura 93e). **Tá... agora mais esse vinte e quatro. Trinta e seis... mais vinte... e... quatro... igual** (faz o registro - figura 93f). **Trinta com vinte** (faz dois traços ligando o 3 do 30 ao 2 do 20) **já dá cinqüenta** (registra o número 50). **Seis e quatro dá dez** (faz os registros mostrados em 93g). **Cinqüenta mais dez é sessenta!** (Registra o número 60 e olha prá mim) **deu sessenta.**

P: **deu o mesmo resultado que na outra conta?**

MED: (olha a conta) **não.**

P: **e qual dos dois que está certo?**

MED: (aponta os registros que acabou de fazer) **esse aqui.**

P: **como você sabe?**

MED: **por que eu acabei de fazer aqui e é esse que tá certo... ó... três com dois dá 5... doze com doze dá vinte e quatro... daí aqui... mais trinta e um... tudo junto deu sessenta.**

(DIAPE16, 01/06)

Nos relatórios que produziu a professora destacou a contribuição desse tipo de intervenção, realizada mediante os pedidos de correção dos alunos. Isso pode ser verificado nos comentários apresentados a seguir e que se referem às atividades realizadas em encontros posteriores àqueles nos quais ocorreram os episódios relatados.

A intervenção feita pela pesquisadora levou os alunos a explicar como haviam realizado os cálculos sem dizer que a forma feita estava correta ou não. Acho isso bem interessante porque neste momento é uma “descoberta” para mim. Várias vezes

já me surpreendi com a linha de raciocínio utilizada pelos alunos. Para eles também é muito produtivo, pois eles perdem o medo de errar e de expor as suas idéias.

(REPROF, 04/07)

Vários alunos se dirigiram à pesquisadora perguntando se o problema estava certo, ela sempre respondia: “você acha que está certo? Por quê?”. Esta forma de agir contribuiu muito para a aprendizagem das crianças, pois os levou a defender os seus pontos de vista, a representar suas idéias e assim chegarem a suas conclusões.

(REPROF, 06/07)

5. 3. 2 O papel da avaliação

No decorrer da intervenção, várias atividades que haviam sido planejadas para os alunos antes da nossa inserção em sala, foram modificadas e/ou substituídas em função da avaliação das atividades dos alunos em cada sessão. Essas avaliações foram realizadas a partir das gravações em vídeos, das anotações da estagiária e dos registros produzidos pelos alunos e exerceram uma função orientadora no planejamento da intervenção. São apresentados a seguir alguns exemplos que ilustram o papel orientador da avaliação.

A primeira modificação mais expressiva no planejamento das atividades ocorreu mediante uma análise das dificuldades apresentadas pelos alunos para resolver os problemas envolvendo o Jogo dos Restos, propostos na aula 6. Destacamos a seguir, três questões relativas a essa análise que serviram para orientar o planejamento das atividades propostas aos alunos nos encontros subseqüentes:

- Não foi uma boa estratégia apresentar todos os problemas ao mesmo tempo (na mesma folha). Percebemos que várias crianças sentiram-se ansiosas para terminar todas as atividades e tentaram resolver os problemas sem ler os enunciados (tentavam “adivinhar” o que era para ser feito).
- O trabalho com sentenças matemáticas foi muito precoce, sobretudo da divisão. As crianças fizeram notações matemáticas somente para atender à solicitação feita, mas a maioria não compreendia o significado de tais registros.
- As atividades propostas aos alunos, bem como a frustração sentida nesse dia mediante as dificuldades apresentadas por eles, revelaram uma excessiva preocupação em “cumprir o programa escolar”. Nesse momento faz-se necessário reorganizar o planejamento da intervenção a partir do que já foi possível aprender com as crianças.

(DIAPE6, 30/03/07)

A partir desse dia os problemas passaram a ser apresentados em filipetas de papel, ou oralmente, sempre um de cada vez. Um novo problema não era proposto até que todos

tivessem resolvido o anterior e tivéssemos discutido sobre a sua solução. Também foram apresentados diferentes problemas envolvendo registros produzidos pelos próprios alunos durante os Jogos. Percebemos que houve um envolvimento muito maior das crianças tanto na solução desses problemas (em relação àqueles apresentados na aula 6) quanto nas discussões sobre as soluções apresentadas e na própria forma de jogar.

A essa constatação corroboram os comentários feitos pela professora nos relatórios relativos às atividades desenvolvidas na aula 6 (as quais foram objeto da avaliação acima apresentada) e na aula 9 (um dos encontros em que foram propostos problemas sobre os registros produzidos pelos próprios alunos no Jogo dos Restos):

Nesta aula os alunos tiveram muitas dificuldades em resolver os problemas propostos. A linguagem usada na atividade foi de difícil compreensão para eles. Devido a isso, as crianças não tiveram muito interesse pela atividade, ficando muito dispersos.

(REPROF, 30/03)

As crianças receberam os registros feitos por alguns colegas e após alguns minutos de agitação e comentários entre eles, logo demonstraram interesse em ler e resolver a questão pedida. A discussão sobre os registros foi muito produtiva, pois ajudou alguns alunos a sanarem suas dúvidas e os alunos que foram citados nas atividades sentiram-se valorizados, mesmo que tenham errado na hora de registrar.

(REPROF, 13/04)

Outra questão interessante a destacar sobre a proposição de problemas elaborados a partir de registros produzidos pelas próprias crianças, se refere à oportunidade que lhes foi oferecida de analisar notações simbólicas convencionais em um contexto mais significativo para eles. Um exemplo foi o problema sobre a notação produzida por LEA numa partida do jogo dos Restos (figura 94).

Observamos que as crianças conseguiram interpretar a notação de multiplicação, compreendendo que o número 4 se referia à quantidade de pratinhos e o número 3 se referia à quantidade de grãos em cada pratinho. Todos conseguiram representar a distribuição por meio de um desenho e preencheram corretamente a tabela, inferindo da adição feita por LEA ($12 + 3$) que havia sobrado 3 grãos fora dos pratinhos. Embora as crianças tenham usado com frequência a propriedade comutativa da multiplicação para representar uma distribuição apresentada por meio de ilustração (item 5.1.1.3), nessa situação oposta (representar por meio de desenho uma notação relativa à uma distribuição feita no jogo) nenhuma criança inverteu os fatores da multiplicação em relação ao desenho ou ao preenchimento da tabela (supondo

serem 3 pratinhos, cada um com 4 feijões e resto 3 – o que não seria possível de acordo com as regras do jogo).

4. Veja o registro de cálculo feito por LEA para calcular o total de feijões na 5ª rodada do Jogo dos Restos. Mostre com um desenho a distribuição dos feijões nos pratinhos feita por LEA nesta rodada e depois preencha a tabela.

5ª $4 \times 3 = 12$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

RODADA	PRATINHOS	GRÃOS EM CADA PRATINHO	RESTO	TOTAL DE GRÃOS
5ª	4	3	3	15

Figura 94. Solução apresentada por LEP ao problema 4 (aula 10)

A exploração do Jogo Batalha dos Números, não prevista no roteiro original da intervenção, é outro exemplo de modificação no planejamento provocada pela avaliação das atividades dos alunos. A decisão de utilizar esse jogo foi orientada pela constatação do uso da contagem unitária (no Jogo dos Restos), por crianças que já reconheciam a possibilidade de utilizar estratégias de cálculo.

Ao propor o novo jogo, nossa intenção era a de observar como os alunos procederiam para determinar sua pontuação total na ausência de elementos de contagem (como os feijões) e se este poderia oferecer contribuições para a substituição de estratégias de contagem por estratégias de cálculo.

Na avaliação das atividades desenvolvidas na aula 11, no qual o Jogo Batalha dos Números foi apresentado aos alunos, foram destacadas as seguintes questões:

- Na apresentação do jogo, as crianças mostraram dificuldades para localizar uma coordenada na tabela do jogo. O fato de explorar a localização de coordenadas com essa tabela já preenchida parece ter causado tal dificuldade.
- O uso de fichas de papel distribuídas sobre a tabela 1 não funcionou, pois as fichas saíam do lugar muito facilmente, até mesmo com a respiração das crianças, quando se aproximavam da tabela.
- A maioria das crianças usou a contagem nos dedos para calcular a pontuação total obtida no jogo e muitos erraram o resultado.
- A tabela que foi entregue aos alunos para que conferissem a pontuação total obtida no jogo (por meio de procedimentos multiplicativos) foi preenchida pela maioria, mas não foi usada por eles com essa função de controle.

(DIAPE11, 20/04)

A partir dessa avaliação, consideramos importante iniciar a aula 12, fazendo uma retomada com os alunos sobre as regras do jogo. Pedimos que eles falassem sobre o preenchimento da cartela⁴⁸ e sobre como deveriam proceder para localizar uma coordenada (para isso foi afixado no quadro um modelo desta tabela em branco). Foi proposta também uma alteração na forma de jogar: nesse dia eles registrariam os números na cartela, ou tabela 1 (em vez de espalhar fichas numeradas sobre ela). Dessa forma, como não teriam fichas com os pontos obtidos, o registro passava a ser essencial para a determinação da pontuação total e, conseqüentemente, do vencedor da partida.

Antes de jogarem fizemos uma discussão coletiva sobre a possibilidade de se usar estratégias de cálculo em substituição à contagem nos dedos para determinação da pontuação total. Isso foi feito a partir da análise dos pontos obtidos por uma aluna na partida realizada no encontro anterior e do total (incorreto) registrado por ela⁴⁹.

Conforme já mencionado anteriormente, na segunda partida do jogo apenas um aluno ainda recorreu à contagem nos dedos. Verificamos, entretanto que mesmo usando estratégias de cálculo, quase metade dos alunos obteve um resultado incorreto, mas ao contrário do que ocorreu no encontro anterior, nesse dia várias crianças usaram a tabela 3 com a função de controle do resultado.

Houve casos em que a criança corrigiu o resultado obtido no primeiro cálculo realizado (incorreto) em função do resultado (correto) obtido após o preenchimento da tabela 3. Mas registramos também outros casos nos quais a criança usou o primeiro resultado (que estava incorreto) como controle para preenchimento da tabela 3 e para os cálculos realizados ali. Um exemplo do primeiro caso é apresentado a seguir:

Após o registrar na tabela 2 os pontos obtidos nas 15 rodadas do jogo, VAM realizou a soma (fazendo agrupamentos de 10) e obteve 50 pontos. Em seguida preencheu a tabela 3 (figura 95), realizou os cálculos e obteve como total 53 pontos. Ao verificar que o total obtido não foi o mesmo, conferiu os registros e os cálculos feitos na tabela 3 e, certificando-se de que estavam corretos, apagou os registros feitos na folha da tabela 2 (figura 96) e refez os cálculos (usando o mesmo procedimento anterior - agrupamento de 10). Obteve como resultado 53 pontos.

(DIAPE12, 04/05)

⁴⁸ Nesse dia as crianças usaram três tabelas, as quais serão diferenciadas neste texto por meio de números: tabela 1 - Cartela usada no jogo, com a indicação das coordenadas nas quais foram espalhados os números de um a seis; tabela 2 - usada no jogo para registrar as coordenadas pedidas e os pontos obtidos em cada rodada; tabela 3 - usada após o jogo para conferir a pontuação total. Nas figuras 50 e 51 temos exemplos das tabelas 3 e 2, respectivamente. A tabela 1 pode ser visualizada no capítulo de metodologia (4. 2. 5. 3)

⁴⁹ Essa discussão já foi explorada no item 5.1.1.2 relativo aos progressos da contagem para o cálculo.

VALOR DA FICHA	QUANTAS FICHAS COM ESTE VALOR EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESSAS FICHAS	ESPAÇO PARA CÁLCULOS
1	3	3	$3+4=$ $12+20=$ $8+6=$
2	2	4	32 14 $+3$ 53
3	4	12	
4	2	8	
5	4	20	
6	1	6	
PONTUAÇÃO TOTAL:			

Figura 95. Registros feitos por VAM na tabela 3 (aula 12)

JOGO BATALHA DOS NÚMEROS - TABELA DE PONTUAÇÃO		
COORDENADA PEDIDA	PONTOS OBTIDOS	
F3	5 5	10 10 10 10 10 3
B2	1 1	20 20
E4	5 5	
D5	3 3	$10+10+3=23$
A1	4 4	
C6	6 6	
B5	3 3	
C1	4 4	
E6	3 3	
A6	2 2	
D1	4 4	
F5	5 5	
B3	3 3	
C2	5 5	
A3	2 2	
A4	1 1	

Figura 96. Registros feitos por VAM - tabela 2, após preenchimento tabela 3 (aula 12)

Observando a forma como as crianças realizaram os cálculos a partir dos pontos marcados na tabela 2, percebemos que o tipo de registro feito por aqueles que agruparam os números de 10 em 10 pontos, não favorecia o controle do resultado. Embora riscassem os números agrupados marcando as somas parciais, depois de chegar ao total tinham dificuldade para conferir a correção do cálculo.

No exemplo mostrado anteriormente, VAM não conseguiu verificar a correção dos cálculos feitos na tabela 2 então teve que calcular outra vez. Depois de refazer os cálculos, desenvolveu um procedimento para conferir a soma:

Quando VAM se certifica de que os cálculos realizados na tabela 3 estão corretos, tenta conferir os cálculos feitos na tabela 2. Depois de algumas tentativas, desiste e registra novamente, em cada linha, os números referentes à pontuação obtida em cada rodada (copiando os números que já havia riscado). Realiza novos cálculos e registra os resultados parciais ao lado da tabela (5 números 10 e um número 3). Em seguida ela confere os resultados parciais que registrou, marcando com setas os seguintes agrupamentos (nessa ordem), conforme pode ser visto na figura 96:

- 5 e 5 (coordenadas F3 e E4).
- 4 e 6 (coordenadas A1 e C6).
- 4, 3 e 3 (coordenadas C1, E6 e B3).
- 5 e 5 (coordenadas F5 e C2)

Marca com X outros agrupamentos:

- 1, 3, 3, 2 e 1 (coordenadas B2, D5, B5, A6 e D1)
- 2 e 1 (coordenadas A3 e A4)

A cada agrupamento marcado, correspondia um número registrado ao lado da tabela (somas parciais)

(DIAPE12, 04/05)

A constatação dessa dificuldade no controle do resultado, bem como a observação do procedimento desenvolvido por VAM orientaram a elaboração do problema proposto aos alunos em 11/05, no qual eles deveriam conferir, em duplas, a pontuação total registrada por uma colega (figura 97). O exemplo apresentado ilustra o tipo de procedimento mais usado pelos alunos para indicar os números que poderiam ter sido agrupados pela colega.

Algumas duplas optaram por agrupar inicialmente os números em pares ($5 + 5$; $6 + 4$). Para isso uniam cada par de números por traços que os ligavam à soma obtida (10), independente da localização desses números na tabela 2. Quando não era mais possível obter 10 pontos pela soma de dois números passavam a agrupá-los em trios, mas desistiram desse tipo de procedimento ao constatar que a grande quantidade de traços não propiciava o controle do resultado. Na segunda tentativa, os alunos passaram a levar em conta a posição dos números na tabela procurando agrupá-los pela proximidade física (como mostrado na figura 97).

Figura 97. Solução apresentada por MEB e AMA (aula 13)

5. 3. 3 Limites da intervenção

As várias leituras que realizamos do material coletado, sobretudo após o término da intervenção, bem como a produção do texto de apresentação dos resultados até aqui expostos, nos permitiram tecer algumas críticas sobre as atividades propostas aos alunos e sobre o tipo de intervenção realizada em sala de aula, no que diz respeito tanto ao conteúdo quanto ao seu aspecto didático, num entrelaçamento entre os três tipos de relações envolvidas.

A primeira consideração a ser feita refere-se à forma como foram conduzidas as discussões coletivas. Em vários trechos das transcrições foi possível perceber um excesso de direcionamento durante essas discussões, em situações nas quais as questões propostas aos alunos poderiam ser mais abertas. Um exemplo pode ser verificado em uma discussão sobre as regras do Jogo dos Restos:

Faço a distribuição dos feijões em 5 pratinhos (número indicado no dado), ficando 7 grãos em cada um. Explico como devem preencher a cartela do jogo, registrando o número de pratinhos (5) e o número de grãos em cada pratinho (7), referentes à

distribuição que eu havia feito. Aponto a última coluna da tabela e pergunto às crianças como podem fazer para descobrir o número total de feijões daquela rodada. Alguns alunos dizem: **cinco vezes sete**.

P: **e o que devem fazer caso não saibam de cabeça o resultado de cinco vezes sete? Precisa contar um a um os feijões dos pratinhos?**

ALGUMAS CRIANÇAS: **não!**

P: (aponto dois pratinhos) **quanto vai dar se eu juntar esses dois?**

ALUNOS: **quatorze**

P: (pego outros dois pratinhos) **e esses dois?**

UM ALUNO: **vinte e um**

P: **esses dois dá 21?**

ALGUNS ALUNOS: **não, é vinte e oito...**

P: **e tem mais esse aqui** (pego o último pratinho)

UM ALUNO: **trinta e cinco**.

(DIAPE4, 21/03)

Quando os alunos sugeriram a utilização da multiplicação (*cinco vezes sete*), seria interessante pedir que explicassem essa idéia, ou seja, que justificassem o uso da multiplicação naquele contexto. Na seqüência, quando as crianças negam a necessidade de se contar um a um os feijões dos pratinhos, em vez de propor o uso da adição, questionando-lhes apenas sobre os resultados parciais poderia ter sido pedido que explicassem como proceder de forma a evitar a contagem unitária.

Outro exemplo refere-se a uma discussão sobre as notações multiplicativas produzidas pelos alunos como resposta a um problema proposto na aula 10. Foram apresentadas as notações aditivas produzidas por LOS durante uma partida do Jogo dos Restos e os alunos deveriam mostrar uma forma diferente de calcular a pontuação em cada rodada. No trecho apresentado a seguir a discussão refere-se às notações apresentada por MED como resposta ao registro produzido por LS na primeira rodada (figura 98):

MED faz os seguintes registros no quadro: $7 \times 3 = 21$ ou $3 \times 7 = 21$. Peço que as crianças olhem os registros apresentados pelo colega e que levante a mão aqueles que também fizeram 3×7 . Várias crianças levantam a mão. Vou até o quadro e marco a notação aditiva de LOS com giz colorido (figura 98).

P: **o que representa esse daqui é três vezes o sete ou é sete vezes o três?**

ALGUMAS CRIANÇAS: **é três vezes o sete**.

OUTRAS CRIANÇAS: **os dois**.

P: **os dois têm o mesmo resultado, mas aqui eu tenho três números 7 ou eu tenho sete números 3?**

MED: **são sete vezes o número 3**.

ALGUMAS CRIANÇAS: **é três vezes o sete**.

P: **esse segundo registro aqui não corresponde à distribuição dos feijões que a LOS fez... é só três vezes sete, porque para ter sete vezes três teria que ser assim: três mais três, mais três...** (registro: $3+3+3+3+3+3+3$) e isso nem dava porque no jogo só tem 6 pratinhos. **O resultado é o mesmo, mas no jogo isso seria outra coisa... seria uma jogada diferente.**

(DIAPE10, 18/04)

Figura 98. Notação LOS - Jogo dos Restos e apresentada em um problema (aula 10)

Nesse caso, em vez de explicar a diferença entre as duas notações multiplicativas, essa questão poderia ter sido problematizada na discussão, oferecendo aos alunos a oportunidade de refletir a respeito dos papéis exercidos pelo multiplicador e pelo multiplicando e sobre a propriedade comutativa da multiplicação.

Em outro episódio, registrado durante a apresentação das regras do jogo Mini-Yam, temos mais um exemplo do direcionamento excessivo em função do tipo de pergunta feita aos alunos. Durante a simulação de uma partida, são obtidos três dados com o número 4 e uma aluna é chamada para ir ao quadro e mostrar como poderia registrar, na tabela de pontuação do jogo, os resultados obtidos:

Entrego a canetinha para a CAS e peço que ela vá até o quadro para preencher a tabela (figura 99). Digo que os demais alunos devem ajudá-la.

P: **qual foi o número que eu escolhi?**

CRIANÇAS: **quatro.**

P: **então como você vai preencher, CAS... quantos desse número eu consegui?**

CAS: **três.**

P: **então vai marcar o que?**

Ela leva a canetinha até a tabela e começa a marcar um X ao lado do número 3.

P: **era o número quatro... você está marcando em qual?**

CAS: (vira para mim) **três.**

P: **eu escolhi o número três ou o quatro... nessa rodada?**

CAS: **quatro** (os outros alunos respondem junto. Ela marca com um X três quadradinhos da referente ao número 4).

P: (enquanto CAS faz os registros na tabela) **tem que achar primeiro o número escolhido... prá depois anotar quantos desse número conseguiu. Agora... o que diz ali do lado... na próxima coluna?**

CRIANÇAS: **quantos pontos eu fiz com esse número.**

LEA: **doze!**

P: **qual é a multiplicação que podemos fazer?**

LEA e PEP: **três vezes quatro!**

Peço que as crianças procurem essa multiplicação no quadro da tabuada.

(DIAPE16, 01/06)

Quando LEA anunciou a pontuação obtida na rodada (*doze*), esse resultado poderia ter sido colocado em discussão, pedindo que os alunos julgassem sua validade, argumentando a

favor ou contra o resultado apresentado. Nesse caso, o uso da multiplicação poderia aparecer como uma justificativa para o resultado apresentado por LEA.

NÚMERO ESCOLHIDO NOS DADOS	QUANTOS DESTES NÚMEROS EU CONSEGUI	QUANTOS PONTOS EU FIZ COM ESTE NÚMERO
1		
2		
3		
4	X X X	12
5	X X X X	20
6		
PONTUAÇÃO TOTAL:		

Figura 99. Tabela usada na simulação de uma partida - jogo Mini-Yam (aula 16)

Outra questão importante a ser destacada nessa análise refere-se às modificações que poderiam ser feitas na intervenção realizada, em função dos resultados obtidos ou, posto de outra forma: a partir da leitura *a posteriori* dos dados relativos às atividades dos alunos, que modificações poderiam ser feitas nas atividades para os alunos?

O primeiro ponto a ser destacado refere-se aos enunciados dos problemas propostos nas primeiras sessões. As crianças mostraram dificuldades para interpretá-los, sendo que a solução dos mesmos ficou muito dependente de uma leitura conjunta, seguida da explicação sobre o que era solicitado. Percebemos também que alguns enunciados não foram bem formulados. Um exemplo pode ser visto em um dos problemas apresentado na aula 2, no qual foi solicitado às crianças que respondessem “qual dos retângulos abaixo tem mais quadradinhos”, quando os dois retângulos apresentados tinham a mesma quantidade (um com 4 linhas de 10 quadradinhos cada e o outros com 10 linhas de 4 quadradinhos cada).

Também foi possível observar que o uso do cálculo nas primeiras atividades sobre configuração retangular, se deu mediante uma restrição imposta pela pesquisadora e não pela necessidade gerada por uma restrição do próprio problema. Nesse sentido faltou propor problemas nos quais a contagem direta não fosse um recurso diretamente acessível. Alguns exemplos:

- Desafiá-los a descobrir o número total de quadradinhos de EVA necessários para formar um determinado retângulo, cujo contorno é apresentado por meio de uma

ilustração, mas oferecer aos alunos uma quantidade de quadradinhos insuficiente para cobrir toda a sua superfície.

- Propor a realização de estimativas a partir de ilustrações dadas para descobrir a quantidade de lajotas que ainda faltam ser colocadas em uma cozinha (figuras 101) ou a quantidade de cubos empilhados (figura 100). Depois propor discussões sobre as formas de verificação das estimativas feitas.

Figura 100. Ilustração problema de estimativa: colocação do piso de uma cozinha.

Figura 101. Ilustração problema de estimativa: cubos empilhados.

Constatamos também que algumas atividades poderiam ter sido mais bem exploradas, como por exemplo, o uso das tabelas para conferir a pontuação no Jogo Batalha dos Números e para marcar a pontuação da equipe no jogo Mini-Yam. No primeiro caso, faltou promover uma discussão coletiva sobre a função da tabela, sobre como proceder em caso de diferença no resultado obtido com o uso dessa tabela e no primeiro cálculo efetuado. Em relação à segunda tabela mencionada, também faltou discutir coletivamente sobre a sua função e sobre as diferentes formas de procedimentos usados para preenchê-la, uma vez que a pontuação total obtida pelas equipes poderia ser descoberta apenas somando-se a pontuação total de cada um (sem necessidade de preencher a tabela oferecida), como de fato foi feito por alguns alunos.

Apesar da preocupação em problematizar os erros cometidos pelos alunos durante o processo de intervenção, a leitura *a posteriori* dos diários nos permitiram identificar algumas situações em que o erro de um ou mais alunos poderia ter sido explorado com a classe toda e isso não aconteceu. Um episódio relatado no item 5.3.1, mostrou a intervenção feita a partir de um erro de cálculo cometido por MED e que é verificado frequentemente entre os alunos que recorrem ao algoritmo convencional da adição. Embora o aluno tenha conseguido chegar ao resultado correto, por meio do cálculo mental, ele não foi incentivado a refletir sobre o erro, ou seja, sobre o motivo pelo qual o algoritmo ao qual recorreu não o levou ao resultado

correto. Uma atividade de análise sobre os registros feitos por MED poderia ter sido proposta à turma toda.

Apontamos alguns dos limites da intervenção realizada, os quais são apenas ilustrativos dos aspectos dessa proposta de ensino que podem ser corrigidos, melhorados ou enriquecidos e que a experiência vivida nessa pesquisa nos permitiu enxergar até esse momento.

Para finalizar esse capítulo apresentamos um quadro-síntese dos resultados aqui expostos:

RESULTADOS	
Encontramos indicativos da ocorrência de uma interação de <i>qualidade construtiva</i> uma vez que a intervenção teve efeito transformador sobre os sujeitos envolvidos, no plano das relações intelectuais (compreensão e tratamento do conteúdo em questão), no plano das relações sociais/morais (progressos para além do conteúdo curricular) e no plano das relações didáticas (sobre o próprio processo interventivo).	
Relações intelectuais	<ul style="list-style-type: none"> • Ausência de procedimentos multiplicativos nas primeiras atividades propostas com prevalência inicial da contagem unitária e regresso a esta estratégia diante de problemas novos. • Substituição progressiva das estratégias de contagem por estratégias de cálculo (uso de procedimentos aditivos e multiplicativos). • Uso da propriedade comutativa na produção de notações de multiplicação e de notações aditivas (adição repetida). • Não conservação (inicial) da quantidade mediante mudanças de posição em arranjos retangulares (atividades propostas causaram perturbação). • Dificuldade na produção da notação simbólica convencional da divisão (para representar arranjos retangulares e situações de um-para-muitos). • Prevalência de procedimentos aditivos e multiplicativos (estes com menor frequência) na solução de problemas de divisão.
Relações sociais/morais	<ul style="list-style-type: none"> • Ocorrência de interação entre as crianças com indícios de desenvolvimento de uma relação de cooperação. • Desenvolvimento de uma atitude investigativa com indícios de mudanças na qualidade da relação das crianças com a matemática: envolvimento nas atividades propostas, elaboração de procedimentos pessoais para resolver problemas, participação nas discussões realizadas. Segundo a professora da turma “perderam o medo de errar” e “pegaram mania de querer explicar como realizavam as atividades”. • Desenvolvimento da capacidade de comunicação e expressão (tanto oral quanto escrita).
Relações didáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Erro como um observável para os alunos e para a pesquisadora. • Avaliação das atividades <i>dos</i> alunos como orientadora no planejamento das atividades <i>para</i> os alunos. • Análise <i>a posteriori</i> da intervenção realizada revelou os limites das atividades propostas e da atuação da pesquisadora, com apontamento de possíveis modificações. Por exemplo: intervenções pontuais menos diretivas, exploração de mais questões adidáticas, proposição de mais atividades para análise de erros.

Quadro 6. Síntese dos resultados

6 DISCUSSÃO

Tendo qualificado as interações e os processos resultantes da intervenção pedagógica realizada em sala de aula, procedemos agora à discussão sobre os efeitos das interações desencadeadas pela pesquisadora no que se refere à compreensão das operações aritméticas em questão pelas crianças (relações intelectuais), aos progressos verificados para além do conteúdo específico da matemática (relações sociais/morais) e ao próprio processo interventivo (relações didáticas).

Por meio dessa discussão pretendemos caracterizar a relação de interdependência que se estabelece, em sala de aula, entre os aspectos acima mencionados.

6.1 Relações intelectuais

6.1.1 A contagem, o cálculo e a compreensão na noção de multiplicação.

Em relação à forma como as crianças lidaram com os problemas propostos, destacamos anteriormente o recurso sistemático à contagem unitária em situações nas quais o raciocínio multiplicativo poderia ter sido aplicado. Esse resultado coloca-nos uma primeira questão sobre o processo de construção da noção de multiplicação na escola: *por que as crianças não usaram espontaneamente a multiplicação, uma vez que já haviam recebido instrução formal sobre essa operação no ano anterior?*

Uma possível explicação está na ênfase que se dá, no processo de ensino desta noção, aos seus aspectos sintáticos, tratando-a em sala de aula segundo uma perspectiva formalista da matemática. Os alunos, sujeitos dessa pesquisa, já conheciam a linguagem matemática relativa à operação de multiplicação e sua inversa, a divisão, e alguns deles já eram capazes, inclusive, de recitar a tabuada. Conforme apontado pela professora da turma, eles também já conheciam os algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão. Tudo isso, aliado à forma como as crianças lidaram com os primeiros problemas propostos, nos fornece indícios de que o tipo de instrução recebida anteriormente privilegiou o significado formal dos símbolos matemáticos, em detrimento do seu significado referencial, ou seja, daquele que permite ao aluno “associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para, entre outras coisas, resolver problemas.” (GÓMEZ-GRANELL, 2008, p. 264).

Segundo a perspectiva de aprendizagem que assumimos e cujos pressupostos básicos foram expostos no contexto teórico desse estudo, a aprendizagem de uma noção matemática não se restringe ao domínio de símbolos e regras, mas também envolve a compreensão desse sistema simbólico, constituindo-se assim num processo de construção que exige a ação mental do aluno em situações de interação com o objeto de conhecimento em busca da apreensão do seu significado.

Entretanto, o que ainda se vê em muitas escolas, é a forte influência de uma concepção de aprendizagem como algo que ocorre mediante a instrução direta do professor. Nessa perspectiva, a multiplicação é mais uma operação aritmética, a ser ensinada depois que os alunos conhecem a adição e a subtração. Ela é apresentada por meio de sua notação simbólica convencional e exemplificada através de ilustrações ou de uma manipulação de objetos pelos alunos (palitos, grãos, etc.), guiada pelo professor. Segue-se então a apresentação das tabuadas e do algoritmo da multiplicação, os quais são usados nos exercícios de aplicação. O sucesso dos alunos nesses exercícios determina o momento em que se pode passar a um novo conteúdo, como por exemplo, a divisão, e assim sucessivamente.

A ausência de procedimentos multiplicativos nas primeiras atividades propostas durante nossa intervenção, sugere que quando o ensino se trata de uma transmissão de saberes na perspectiva acima mencionada, estes não se transformam em ferramentas, ou seja, não constituem uma ajuda importante aos alunos para resolver problemas num contexto que não seja aquele próprio dos exercícios de aplicação que se seguem às explicações e exemplificações do professor. Poderíamos então concluir que os alunos não usaram procedimentos multiplicativos porque, a despeito da instrução formal recebida, não haviam de fato compreendido a multiplicação. Mas, *o que significa compreender a multiplicação?* No contexto teórico desse estudo discorreremos sobre esta questão, explicitando alguns aspectos do raciocínio multiplicativo que indicam a particularidade dessa operação, sobretudo no que a difere da operação de adição. Entretanto, a conclusão acima mencionada nos coloca uma nova questão: *como avaliar os progressos na compreensão dessa noção por parte dos sujeitos de nossa pesquisa?*

Antes de mais nada, convém lembrar que em nossa intervenção trabalhamos apenas com um dos significados da multiplicação. As atividades que foram propostas aos alunos envolviam apenas situações multiplicativas associadas à configuração retangular e

correspondência um-para-muitos. Dessa forma, deve estar claro que quando nos referimos à compreensão da multiplicação, o fazemos no contexto dessas situações.

Na apresentação dos resultados dessa pesquisa destacamos a progressiva substituição, por parte das crianças, dos procedimentos de contagem unitária por procedimentos de cálculo (adição e multiplicação) e isso foi considerado por nós como um indício importante de progresso cognitivo das crianças rumo à compreensão da noção de multiplicação. Entretanto destacamos igualmente o fato de que, diante de problemas novos, envolvendo os mesmos tipos de situações multiplicativas, mas em contextos diferenciados, as crianças voltavam a utilizar a contagem unitária. Tais resultados, aparentemente contraditórios nos conduzem a duas questões importantes sobre as quais discutimos a seguir.

A primeira refere-se à concepção de aprendizagem como um processo que se dá a longo prazo e que está sujeito a avanços e retrocessos. Um conhecimento construído pela criança em um dado contexto, não é imediatamente transferível a outros, porque está fortemente vinculado à situação que lhe deu origem. Assim, para compreender a noção de multiplicação é importante que a criança tenha oportunidade de trabalhar com seus diferentes significados, mas também com um mesmo tipo de situação multiplicativa em contextos variados. Quando a criança descobre que um procedimento usado em determinado contexto pode também ser eficaz quando aplicado a outro, diferente, ela começa a “descolar” os conhecimentos de situações mais específicas e estes passam a ser progressivamente generalizados ou “re-descontextualizados”, conforme expressão usada por Brousseau (1996).

É claro que essa re-descontextualização não se dá apenas mediante a ação das crianças na resolução dos problemas, mas também, e sobretudo, pela reflexão sobre essa ação. Nesse sentido, podemos dizer que se a diversidade de contextos nos quais um mesmo tipo de situação multiplicativa foi explorada contribuiu para a substituição progressiva das estratégias de contagem por estratégias de cálculo, igualmente importante foram as atividades envolvendo a análise e discussão sobre os procedimentos mobilizados.

A segunda questão diz respeito à visão que o adulto (professor) tem em relação aos procedimentos de cálculo como uma forma mais fácil ou mais rápida de resolver problemas que também podem ser resolvidos pela contagem. O fato de as crianças terem recorrido sistematicamente à contagem unitária, mesmo reconhecendo a possibilidade de se usar procedimentos aditivos ou multiplicativos, mostra que o recurso à primeira estratégia não implica necessariamente a incompreensão da multiplicação. Para um adulto que têm fluência

no cálculo, de fato é mais fácil usar a adição ou a multiplicação para determinar, por exemplo, o número total de quadradinhos em um retângulo ou de grãos em um determinado número de pratinhos (como era solicitado no Jogo dos Restos), mas para a criança pode não ser. Isso foi indicado por um dos alunos (FLE) quando afirmou que era mais rápido *contar de um em um* os feijões nos pratinhos do que usar procedimentos aditivos ou multiplicativos, como haviam feito dois de seus colegas⁵⁰.

Nesse sentido, o cálculo pode facilitar ou agilizar a solução de um problema para o qual a contagem unitária se mostra um procedimento eficaz, somente na medida em que a criança começa a ter fluência nele. Antes disso, usar o cálculo significa trocar um procedimento sobre o qual a criança tem domínio, que o executa bem, por outro que ela ainda não domina e que, portanto, ainda não é o mais fácil para ela. A interpretação que fazemos do regresso às estratégias de contagem por parte dos alunos em nossa pesquisa encontra apoio em ERMEL (1991):

É preciso aceitar também que, para situações aparentemente análogas, determinado aluno dá a impressão de regredir: para ele a situação mais segura nem sempre é a mais econômica e a aprendizagem também é feita de hesitações, de retornos aparentes... antes de as aquisições se estabilizarem. (ERMEL, 1991, p. 120)

A fluência no cálculo é adquirida pelo seu uso repetido em situações variadas. Falamos aqui em repetição, em exercício, porém não se trata de uma repetição enfadonha, sem sentido, mas em situações significativa para as crianças, como é o caso da repetição que ocorre, por exemplo, no contexto de um jogo. Kamii e Livingston (1995) ressaltam que do ponto de vista da aritmética os jogos podem constituir um excelente contexto para o treino das quatro operações, justamente pela satisfação que proporcionam e pelo retorno imediato que oferecem às crianças, que não precisam esperar por uma validação do professor uma vez que ela virá do próprio jogo ou dos colegas.

Ficou evidenciado na apresentação dos resultados, que os alunos sujeitos dessa pesquisa, foram adquirindo essa fluência ao longo do processo interventivo e nesse ponto destacamos a contribuição dos jogos e das intervenções realizadas por meio dos problemas relativos a eles.

Muitas vezes, nas aulas de matemática, os materiais com os quais os alunos trabalham se restringem ao lápis e papel, o que acaba por limitar as possibilidades de experimentação e

⁵⁰ Referimo-nos a um episódio apresentado em 5.1.1, quando três alunos (entre eles FLE) foram chamados para mostrar como resolveram o seguinte problema: *Na terceira rodada do Jogo dos Restos, DES usou 6 pratinhos, colocou quatro grãos em cada um e sobraram dois grãos, quantos grãos ela tinha no total?*

de pesquisa da criança. Quando os alunos jogaram o Jogo dos Restos, notamos que tiveram dificuldades para realizar distribuições eqüitativas em decorrência da falta de experiência com a manipulação de materiais de apoio, sendo que a própria professora da turma se declarou surpresa pelo fato de seus alunos não terem percebido que haviam pratinhos com quantidades diferentes de feijões, ou seja, o que a surpreendeu foi o fato de apresentarem dificuldades para realizar aquilo que deveria se constituir numa ação corriqueira (pelo menos para crianças de uma terceira série).

Nesse sentido chamamos a atenção para a importância de se trabalhar com jogos nas aulas de matemática tanto pelos motivos já expostos anteriormente e por outros que se referem ao plano das relações sociais/morais (e que serão discutidos mais adiante), quanto pelo fato de oferecerem às crianças oportunidades para manipular materiais, testar hipóteses e analisar os efeitos de sua ação sobre eles.

Jogos, como o que foi acima mencionado, podem criar um contexto muito rico para a manipulação de materiais na escola porque permitem aos alunos conjugar experiências de natureza física e de natureza lógico-matemática, conforme a diferenciação apresentada por Piaget (1995). A manipulação, nesse caso, não foi direcionada pelo professor, mas orientada pelos objetivos próprios do jogo, sendo que a situação criada por ele exigiu dos alunos a coordenação de suas ações em relação aos materiais em questão, às regras (limitações impostas pelo meio no qual eles atuavam) e ao outros, que jogavam com eles.

Além disso, os jogos explorados ao longo do processo interventivo também criaram um contexto para a proposição de problemas por meio dos quais os alunos puderam analisar a utilização dos procedimentos de cálculo, bem como de suas representações notacionais convencionais. Ofereceram assim uma contribuição para a superação da dicotomia entre a repetição e a conscientização tão presente nos exercícios escolares tradicionais.

Em vários episódios registrados durante os momentos em que as crianças resolviam problemas sobre os jogos foi possível observar a contribuição deste tipo de atividade tanto para a aquisição da fluência no cálculo quanto para a própria construção na noção de multiplicação. Destacamos aqui um trecho de um desses episódios, já apresentado anteriormente no item 5. 2. 1, e que se refere a um problema no qual as crianças deveriam observar dois registros produzidos por um aluno numa mesma rodada de uma partida do Jogo dos Restos para fazer um julgamento sobre a validade destes registros (somente um deles estava correto). O primeiro, que havia sido feito na tabela do jogo apresentava incorreção no

número total de grãos (*pratinhos: 5; grãos em cada pratinho: 3; resto: 4; total de grãos: 12*). O segundo, feito no verso dessa tabela, e que deveria ter sido usado como referência para o preenchimento da mesma, tratava-se de um procedimento aditivo, cujo resultado - 19 - foi obtido pela adição repetida do número de grãos de cada pratinho $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ sucedida pelo acréscimo do resto (4)⁵¹. O trecho apresentado a seguir mostra como PEP se expressa enquanto procura descobrir qual dos registros está incorreto:

(Olha para o registro feito na tabela) **três grãozinhos em cada... eu tinha cinco pratinhos**⁵² (olha para GAF) **três... ó...** (olha para a tabela, levanta um dedo, olha para GAF) **seis...** (levanta outro dedo, olha para frente) **três... seis... nove** (levanta mais um dedo, olha para GAF). **Doze...** (levanta o quarto dedo) **quinze** (levanta o quinto dedo). **Quinze... tá** (aponta a tabela) **em todos os pratinhos juntos tem quinze grãos.** (DIAPE9, 13/04)

Sua fala e seus gestos mostram que ele opera simultaneamente com unidades de ordens superiores (no caso unidades de 3) e com as unidades das ordens inferiores. Nos dedos ele marca cada unidade simples (número de pratinhos), fazendo a correspondência entre três unidades de um e uma unidade de 3 e verbaliza as unidades de ordem superior já numa relação de inclusão que leva em conta essa correspondência (*três, seis, nove...*). Esse tipo de procedimento revela uma construção essencial à compreensão da multiplicação, conforme apontado por Kamii e Livingston (1995).

Assim na avaliação que fizemos sobre a compreensão da multiplicação pelos sujeitos da nossa pesquisa com base na substituição progressiva das estratégias de contagem pela utilização de procedimentos de cálculo, levamos em conta tanto o uso que as crianças fizeram dessa noção para resolver os problemas de quantificação propostos, quanto a questão da fluência no cálculo, como algo que se adquire mediante o exercício e a reflexão e que permite ao aluno trocar os procedimentos mais simples por outros que exigem um nível mais elevado de abstração.

6. 1. 2 A construção da notação simbólica convencional

Na apresentação dos resultados dessa pesquisa outro ponto que destacamos e sobre o qual consideramos importante discutir, refere-se às dificuldades apresentadas pelas crianças

⁵¹ Na figura 84 (página 179), são apresentados os registros aos quais nos referimos aqui.

⁵² PEP usa a primeira pessoa do singular porque os registros apresentados no problema (que foi proposto à turma toda) haviam sido produzidos por ele mesmo.

para produzir notações simbólicas convencionais de divisão. Esses resultados evidenciam que a aprendizagem de notações matemáticas não pode ser tomada como algo independente da compreensão das relações nelas envolvidas. Conforme apontado por Brizuela (2006), tal aprendizagem não se trata apenas de uma questão de habilidades perceptivo-motoras e nesse sentido as notações matemáticas são, em si mesmas, *objetos conceituais* (FERREIRO; TEBEROSKY, 1999).

Exploramos anteriormente o papel das abstrações envolvidas na construção do pensamento hierárquico como base para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo na criança. Para se compreender uma notação convencional de multiplicação, como por exemplo $5 \times 3 = 15$, os números 5 e 3 não podem ser vistos como unidades de mesma ordem. Da mesma forma, uma notação de divisão não pode simplesmente ser retirada de uma situação de distribuição, apresentada por exemplo, por meio de um desenho (uma vez que não se trata simplesmente de uma relação de *associação*). Isso ficou evidenciado, nessa pesquisa, quando solicitamos às crianças que representassem, através de uma sentença matemática de divisão, uma dada distribuição equitativa (relativa ao Jogo dos Restos), apresentada por meio de desenho.

As crianças já haviam recebido instrução formal sobre a representação aritmética da operação de divisão e antes de trabalharem com a referida atividade foi realizada uma discussão sobre a possibilidade de se representar as distribuições realizadas no Jogo dos Restos por meio de notações de divisão, mas a maioria das crianças não conseguiu produzir tais notações. O mesmo foi verificado nas situações envolvendo arranjo retangular.

Entretanto, conforme destacado na apresentação dos resultados, a despeito das dificuldades com a notação convencional, as crianças foram capazes de resolver problemas de divisão, inclusive envolvendo conteúdos sobre os quais ainda não haviam recebido instrução formal, como foi o caso dos problemas propostos nas aulas 20 e 21, os quais envolviam números decimais.

Tais resultados colocam em evidência uma questão importante sobre a aprendizagem de matemática, amplamente explorada pela literatura, mas nem sempre levada em conta no processo de ensino: *o domínio da linguagem matemática formal relativa às operações aritméticas não é pré-requisito para a resolução de problemas envolvendo tais operações*. Ao contrário, a formalização precoce das soluções pode levar os alunos a querer “decalcar” a solução do enunciado de um problema, como foi verificado na atitude dos sujeitos de nossa

pesquisa quando, na aula 6, foram propostos os primeiros problemas por meio de formulação escrita (sobre o Jogo dos Restos).

Em ERMEL (1991) esta questão é tratada na perspectiva de que o aluno, mediante um problema, é um *novato*, enquanto que o professor pode ser visto como um *perito*. Isso significa que este último é capaz de reconhecer imediatamente o melhor tipo de solução para um problema, enquanto que o aluno está *em processo de aprendizagem* e por isso deve construir seus próprios meios de solução. Nesse sentido, quando na escola, exige-se que a solução dos problemas sejam antecedidas da indicação do cálculo a ser efetuado (o registro da sentença matemática), coloca-se o aluno, equivocadamente, na posição de perito. Podemos identificar a influência dessa concepção, por exemplo, na observação que a professora da classe fez sobre o modo como as crianças lidaram com os problemas de divisão apresentados na aula 19, quando avaliou a dificuldade dos alunos com a operação de divisão com base no fato de não terem reconhecido os problemas como sendo de divisão (embora tenham conseguido resolvê-los por meio de procedimentos aditivos ou multiplicativos).

Já nos referimos anteriormente à preponderância dos aspectos sintáticos no ensino de matemática, destacando a visão reducionista de aprendizagem que sustenta tal prática de ensino. Convém ressaltar, contudo, que se a aprendizagem de uma noção matemática não se reduz ao domínio de símbolos e regras, isso não quer dizer que dele possa abdicar, pois a matemática é uma linguagem e como tal, seu domínio implica o conhecimento de seus aspectos semânticos e sintáticos.

Nesse sentido é possível estabelecer relações profícuas entre o aprendizado de matemática e da língua materna, embora o domínio da primeira seja comumente considerado muito mais difícil do que o da segunda. Podemos citar, inclusive, alguns estudos importantes que tratam justamente dessa questão: Machado (2001), por exemplo, questiona essa discrepância que as pessoas costumam atribuir às dificuldades relativas à aprendizagem de matemática e da língua materna e aponta para a existência de uma impregnação mútua entre ambas, cuja compreensão por parte dos professores pode ajudar na superação das dificuldades com o ensino da primeira. Como exemplo, o autor cita o fato de se ter como certo que a fonte primária para o desenvolvimento da lógica está na matemática, ignorando-se as importantes relações entre lógica e língua materna, das quais decorrem uma diferença significativa no próprio modo como a Ciência, a Matemática e a Geometria são tratadas no oriente e no ocidente:

[...] no caso das línguas ocidentais, a estrutura sujeito-verbo-predicado das frases pode ser diretamente relacionada com a lei da identidade, o conceito de substância e a noção de causalidade, que são categorias básicas do pensamento ocidental, fundado inteiramente na lógica formal aristotélica. Já no caso da língua chinesa, em cujas frases nem mesmo o verbo é essencial, a lógica subjacente é fundada em analogias, em raciocínios relacionais que prescindem da noção de causalidade. (MACHADO, 2001, p. 16).

Gómez-Granel (1995) toma a relação entre a aprendizagem de matemática e de língua materna como referência para uma análise sobre os aspectos semânticos e sintáticos envolvidos na aquisição da linguagem matemática e Brizuela (2006), para investigar o papel das notações no desenvolvimento matemático das crianças, usa como referência os estudos sobre a psicogênese da língua escrita realizados por Ferreiro e Teberosky (1999); isso para citar apenas alguns exemplos.

O aprendizado de matemática é em geral considerado mais difícil do que aquele relativo ao da língua materna, porque esta última é mais imprecisa e de caráter polissêmico enquanto que a linguagem matemática formal se caracteriza justamente pelo seu rigor. Seu caráter universal permite a abstração do que é essencial nas relações que representa. Essa idéia é explicitada e exemplificada por Gómez-Granel (1995):

A característica dessa linguagem é tentar abstrair o essencial das relações matemáticas, eliminando qualquer referência ao contexto ou à situação, ao ponto de na linguagem algébrica - considerada como a autêntica linguagem da matemática - , os números, em si mesmos abstratos, serem substituídos por letras, que têm um caráter muito mais genérico ($a \cdot b = c$ pode referir-se a diferentes expressões numéricas: $3 \times 4 = 12$; $140 \times 7 = 980$; $345 \times 2 = 690$; etc.). (GÓMEZ-GRANEL, 1995, p. 260)

Nesse sentido, defendemos que no processo de aprendizagem de uma criança, a linguagem matemática formal só pode ser tida como ponto de chegada e não de partida. Assim, em vez de pré-requisito para resolver problemas, a linguagem matemática formal deve ser tida como um objetivo a ser alcançado por meio dessa atividade (embora não deva ser visto como o único, sob o risco de se tratar os conteúdos matemáticos como fins em si mesmos).

Dessa forma, destacamos a importância de se propiciar, nas aulas de matemática, a elaboração de procedimentos pessoais de resolução de problemas por parte dos alunos, os quais, como mostrado em numerosos exemplos colhidos nessa pesquisa são em geral intuitivos, pouco econômicos e sujeitos a erros, mas que são desenvolvidos mediante uma compreensão (pelo menos parcial) dos aspectos semânticos das noções matemáticas

envolvidas, ao mesmo tempo em que estes aspectos semânticos são também construídos na própria atividade de resolução de problemas. Convém ressaltar que essa é uma recomendação recorrente por parte dos pesquisadores que investigam como a criança constrói o significado das noções matemáticas na escola (por exemplo Kamii e Housman, 2002; Vergnaud, 1994; Brousseau, 1998; Zunino, 1995)

Nesse sentido, consideramos que a intervenção realizada contribuiu para a construção, por parte dos alunos, do significado das operações de multiplicação e de divisão. Nas soluções apresentadas aos problemas de divisão, sobretudo a partir da aula 18, foi possível observar como os procedimentos usados pelas crianças expressavam as relações matemáticas da forma como eram compreendidas por elas e como no próprio processo de solução as crianças os modificavam em função da avaliação sobre sua eficácia. Foi o caso, por exemplo, da aluna que, para descobrir o resultado de uma divisão de 100 reais entre 6 crianças, começou desenhando as 6 crianças e 100 quadradinhos. Embora tal procedimento pudesse levá-la à solução, era inadequado à situação, podia ser eficaz em outros contextos, mas não era naquele. Ela fez então ajustes no procedimento escolhido, representando o valor total (100 reais) não mais decomposto em unidades simples, mas recorrendo ao uso de unidades compostas (que no problema significavam notas de 10 reais, de 5 reais, etc).

Nesse mesmo problema, destacamos o tratamento que os alunos deram ao resto, uma vez que não se tratava de uma divisão exata. Vários deles continuaram a divisão, entrando no campo dos números racionais. Nos registros produzidos pelos alunos para resolver o problema proposto na aula 21 (sobre a quantidade de fichas de 50 centavos que seria possível comprar com 12 reais) constatamos também progressos importantes em relação aos procedimentos de cálculos usados. Vimos que enquanto algumas crianças adicionaram 50 centavos até obter 12 reais, para depois contar quantas parcelas de 50 haviam registrado (24), outras fizeram o mesmo até obter 6 reais e já anteciparam que com 12 reais poderiam comprar o dobro de fichas.

Ressaltamos, contudo, que a aquisição dos aspectos sintáticos da linguagem matemática não pode ser vista como uma consequência natural da compreensão do significado dos conceitos matemáticos. Como se trata de uma linguagem convencional, envolve um conhecimento de natureza social, ou seja, arbitrário, e nesse sentido não pode ser simplesmente inferido da compreensão do seu significado. Assim, é necessário que haja uma intencionalidade por parte do professor em relação a essa aquisição, ou seja, uma vez que a

passagem dos procedimentos próprios das crianças para aqueles próprios da matemática formal não é algo natural, precisa ser objeto de ensino na escola. Dessa forma não se trata de escolher entre um ou outro aspecto.

Os resultados que apresentamos, relativos à multiplicação, nos forneceram indícios de que o trabalho com a notação convencional das operações em questão, quando não realizado de modo precoce e impositivo, pode contribuir para a construção do significado das mesmas. Nossa suposição se baseia no uso da propriedade comutativa da multiplicação pelos sujeitos dessa pesquisa.

As crianças realizaram sistematicamente a inversão dos fatores nas notações multiplicativas (em relação às situações representadas ou em relação às notações aditivas) e isso foi destacado nos resultados porque, a princípio, nos causou estranheza: como nas atividades propostas procuramos enfatizar os aspectos semânticos da multiplicação, supúnhamos que as notações multiplicativas produzidas pelas crianças fossem revelar tais aspectos. Assim, quando se tratava, como por exemplo no jogo Mini-Yam, de 5 dados marcando cada um 3 pontos, era esperado que as crianças representassem matematicamente essa situação como 5×3 e não como 3×5 . Isso porque considerando a situação específica, a regra matemática ($5 \times 3 = 3 \times 5$) não se aplicava: 5 dados, cada um marcando 3 pontos, não é a mesma coisa que 3 dados, cada um marcando 5 pontos. Daí a insistência da pesquisadora (atuando como professora) em pontuar essa diferença com as crianças, conforme pode ser observado no item 5.1.3 (resultados). Naquele momento, a inversão dos fatores foi interpretada como um indício de falta de compreensão do significado referencial da notação simbólica convencional. Pareceu-nos que tal inversão era fruto da memorização de uma regra ensinada anteriormente.

Entretanto, numa análise posterior (depois de finalizada a intervenção), confrontando os resultados obtidos nessa pesquisa com aqueles que a literatura colocava ao nosso alcance, com destaque para dois estudos em particular - Gómez-Granell (1995) e Schliemann et al. (1998) - percebemos que era preciso realizar uma análise mais cuidadosa dos nossos resultados. Em primeiro lugar, foi necessário romper com a relação de oposição entre os aspectos semânticos e sintáticos das operações aritméticas, através da qual, ainda que de forma inconsciente, olhávamos para a questão da inversão na ordem dos fatores na multiplicação.

A comutatividade é uma propriedade da multiplicação e de fundamental importância para a construção do cálculo algébrico, conforme apontado por Caraça (1952) e já mencionado nesse trabalho. Quando se privilegia, no ensino, apenas o aspecto semântico dessa operação, as crianças tem poucas chances de abstrair essa propriedade e, conseqüentemente de usá-la como ferramenta para resolver problemas. Os resultados de uma pesquisa realizada por Schliemann et al. (1998) mostram que o contato com a notação simbólica convencional da multiplicação é fundamental para a compreensão da propriedade comutativa.

As pesquisadoras compararam o uso dessa propriedade na resolução de problemas por crianças que trabalhavam no setor informal (*vendedores de rua*), com pouca ou nenhuma escolaridade, e por crianças que freqüentavam regularmente a escola. As crianças de cada grupo eram solicitadas a resolver, individualmente, e em voz alta 4 problemas verbais apresentados em pares de modo que, pelo uso da propriedade comutativa, o resultado do segundo pudesse ser inferido do primeiro. Foram feitos dois estudos, com variação na magnitude dos números envolvidos nos problemas de cada um e também com sujeitos diferentes⁵³ e foi verificado que as crianças escolarizadas usaram mais sistematicamente a propriedade comutativa da multiplicação para antecipar os resultados, tanto no primeiro estudo quanto no segundo. Entre os vendedores de rua, o número de crianças que realizou tal antecipação foi expressivamente menor, sobretudo quando o uso da propriedade comutativa não representava uma economia significativa em termos de cálculo⁵⁴.

No referido estudo, as autoras mostraram que quando as crianças compreendem a propriedade comutativa, podem usá-la mesmo que recorram a procedimentos aditivos para resolver um problema. Se pretende-se calcular o preço de 50 chocolates cujo preço unitário é 3 reais, por exemplo, somar 50 reais três vezes, representa uma grande economia em termos de cálculo em relação à somar 3 reais cinquenta vezes. Entretanto, conforme apontado por

⁵³ Exemplo de um par de problemas do primeiro estudo: *um menino quer comprar chocolates. Cada chocolate custa 5 cruzeiros. Ele quer comprar 3 chocolates. Quanto de dinheiro ele precisa?/ Outro menino quer comprar um tipo de chocolate que custa 3 cruzeiros cada. Ele quer comprar 5 chocolates. Quanto de dinheiro ele precisa?* No segundo estudo os problemas eram similares, mas com diferença acentuada na magnitude dos números relativos ao multiplicador e ao multiplicando.

⁵⁴ Como as crianças desse grupo usam preponderantemente procedimentos aditivos essa economia era significativa para a solução dos problemas do segundo estudo.

Vergnaud (1994) essa é uma idéia difícil para as crianças, sendo que a propriedade comutativa não é, em geral, compreendida antes dos 9-10 anos.

Com base em Gómez-Granell (1995) entendemos que essa dificuldade com a comutatividade da multiplicação tem sua raiz no fato de que tal propriedade só tem sentido fora do campo semântico da multiplicação e, nesse sentido, exige um nível elevado de abstração (para uma criança da terceira série).

Dessa forma, vemos que aquilo que chamamos, nos resultados, de inversão sistemática na ordem dos fatores (tanto nas notações como em verbalizações das crianças sobre situações multiplicativas) pode ser interpretada como o uso da propriedade comutativa. Mostramos, inclusive, essa utilização em um procedimento aditivo no cálculo da pontuação de uma equipe no jogo Mini-Yam, quando para determinar quantos pontos fizeram lançando 13 dados de 3 pontos cada um, os alunos somaram $13 + 13 + 13$.

Finalmente, destacamos que se essa é uma idéia difícil para a criança, que só pode ser usada quando não se está preso ao sentido referencial dos símbolos matemáticos, os resultados em questão mostram progressos dos alunos em relação a compreensão da multiplicação. Entretanto, convém destacar que se a comutatividade da multiplicação não foi objeto de ensino em nossa intervenção, tal progresso dos alunos pode ser explicado, em grande parte, pelas experiências que já haviam tido com a notação convencional da multiplicação, principalmente no ano anterior (2ª série). Entretanto, em relação à intervenção que foi realizada nesse estudo, consideramos que o fato de termos introduzido a noção de multiplicação por meio de uma representação geométrica dessa operação, também contribuiu para tais progressos. Essa questão será retomada no próximo item de discussão.

Por ora destacamos que, em se tratando de uma linguagem, a matemática deve ser considerada, na atividade de ensino, em seus aspectos semânticos e sintáticos. Quando se privilegia acentuadamente um desses aspectos, em detrimento do outro, a aprendizagem dos alunos pode ser prejudicada. Encontrar um equilíbrio entre estes aspectos em sala de aula, talvez se constitua num dos maiores desafios que os professores enfrentam na tarefa de ensinar matemática.

6. 1. 3 A questão do ensino da tabuada na escola

A palavra tabuada vem de tábua, da qual se origina também a palavra tabela. Embora na escola seja em geral associada apenas à multiplicação, a tabuada trata-se, originalmente, da

tábua das quatro operações fundamentais (entre os números de 1 a 10). Tomando-a como uma *tabela*, fica evidenciado seu papel de registro e sua função organizadora.

Atualmente há uma grande discussão entre os professores das séries iniciais sobre a questão da memorização da tabuada⁵⁵, na qual não vamos entrar porque acreditamos já ter deixado clara nossa posição a esse respeito no item 6.1.1, quando discutimos a questão da substituição dos procedimentos de contagem unitária por procedimentos de cálculo. Reafirmamos apenas, o que já expressamos anteriormente, tanto no contexto teórico desse trabalho quanto no âmbito dessa discussão, que a memorização em si não é algo ruim, algo que não tenha valor para o sujeito. No caso da tabuada, a memorização perde seu valor quando é o objetivo principal de ensino, quando é imposta e quando não tem sentido para a criança.

Trabalhando com a formação de professores das séries iniciais, é possível perceber que muitos deles sentem grande insegurança em relação ao papel da tabuada na aprendizagem de aritmética e sobre o lugar que ela deve ocupar nas aulas de matemática. De uma perspectiva na qual era protagonista absoluta, sendo apresentada aos alunos como algo pronto, a ser indiscutivelmente memorizado, passou, muitas vezes, a ser relegada na escola, sob a alegação de que *o mais importante é o raciocínio da criança*. Tal justificativa, no mínimo ingênua, aponta para uma concepção equivocada que coloca o ensino da tabuada e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos em pólos opostos e incompatíveis, como se optar por um dos lados implicasse em abdicar do outro. Tal concepção, a nosso ver, se sustenta em uma visão limitada da tabuada, como se esta se tratasse de um conhecimento de natureza estritamente social desvinculado do próprio processo de construção da noção de multiplicação.

Sobre essa questão e com base nos resultados dessa pesquisa, pensamos que introduzir a noção de multiplicação por meio de situações de arranjo retangular, nas séries iniciais, pode ser um bom caminho para a superação da perspectiva dicotômica, segundo a qual o trabalho com a tabuada e o desenvolvimento do raciocínio costumam ser tratados na escola. Nosso ponto de vista se baseia na análise que fizemos sobre esse *tratamento geométrico* dispensado à multiplicação na intervenção realizada.

Ao trabalhar com a composição e a quantificação de retângulos, usando quadradinhos de EVA e papel quadriculado, os alunos tiveram que lidar não apenas com questões

⁵⁵ O uso que faremos dessa palavra nesse texto refere-se ao significado que em geral lhe é atribuído na escola, ou seja, associado somente à multiplicação.

aritméticas, mas também com questões de espaço, questões topológicas, questões de coordenações espaciais, as quais colocaram desafios importantes ao seu pensamento. Isso ficou evidenciado, por exemplo, na perturbação causada pela mudança de posição de um retângulo, quando linhas e colunas intercambiavam seus lugares.

Foi observado inicialmente uma não-conservação em relação à quantidade de quadradinhos de um retângulo mediante uma modificação de posição, reflexo do que Piaget (2003) qualificou de *pensamento intuitivo* da criança. Para conservar, era necessário coordenar as duas dimensões do retângulo, isto é, era preciso considerá-las simultaneamente para conceber que uma mudança na sua posição não alterava o número total de quadradinhos. Nesse sentido um mesmo problema se colocava para os alunos em dois domínios distintos: o geométrico e o aritmético. No primeiro tratava-se de coordenar relações espaciais (trabalhar com a bidimensionalidade) enquanto que no segundo essas questões eram numéricas: *5 colunas, cada uma com 4 quadradinhos é o mesmo que 4 colunas, cada uma com 5 quadradinhos*. Vemos que há, nesse problema, um entrelaçamento entre questões de espaço e de número, assim, resolver o problema em um dos âmbitos pode ajudar o aluno a compreender as relações envolvidas no outro.

O problema aritmético que os alunos enfrentaram nessa situação foi justamente o da comutatividade da multiplicação, sobre o qual discutimos anteriormente. Com base no que já foi exposto sobre as dificuldades das crianças para compreender essa propriedade, parece-nos bastante razoável afirmar que problemas de configuração retangular, como os que foram propostos na intervenção realizada constituem um bom contexto de ensino e de aprendizagem da propriedade em questão.

Convém ressaltar entretanto que, conforme mostrado nos resultados apresentados, essa aprendizagem se dá a longo prazo, precisando de tempo e de variadas experiências em diferentes contextos para se estabilizar. Em nosso estudo foi possível observar que as crianças enfrentaram a referida situação em dois momentos distintos: o primeiro logo no início da intervenção (aulas 2, 3 e 4) e o segundo dois meses depois (aula 15). Neste último foi observado que o problema da modificação na posição ainda não estava resolvido. Um exemplo pode ser visto no uso que uma criança (RAR) fez da multiplicação para justificar a necessidade de mostrar um retângulo com a mesma configuração em duas posições diferentes⁵⁶: “*é que esse aqui* (aponta o retângulo que desenhou: 3 linhas, cada uma com 4

⁵⁶ Refere-se a um episódio apresentado no item 5.1.1.4

quadrinhos) *é três vezes quatro e esse* (apontando o que montou sobre a carteira: 4 linhas, cada uma com 3 quadrinhos) *é quatro vezes três*".

No exemplo mostrado, a estagiária acabou apontando para a diferença de posição, quando perguntou: *"ou ele é igual, mas um está deitado e outro está de pé?"*.⁵⁷ A aluna admite a igualdade, mas não é possível afirmar que a tenha compreendido. A compreensão, nesse caso, envolve enfrentar a contradição que se coloca entre o plano espacial e o plano numérico: pela percepção os retângulos são considerados diferentes, mas se 3×4 é a mesma coisa que 4×3 , então o seu argumento aritmético não era válido.

Tais resultados corroboram com o que é apontado por Lorenzato (1995) sobre o auxílio que a geometria pode oferecer aos alunos na compreensão de propriedades aritméticas, uma vez que se constitui num âmbito favorável à pesquisa e à descoberta por parte da criança. Acrescentamos ainda o fato de que o tratamento geométrico da multiplicação pode ser favorável à aprendizagem por colocar o aluno diante de situações nas quais deve enfrentar contradições. Nesse sentido, a contribuição da geometria é bem caracterizada por Wheeler (1981), quando afirma que "melhor que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do 'espaço intelectual', já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, indo do que pode ser percebido para o que pode ser concebido". (WHEELER, 1981, p. 352).

Consideramos importante destacar essa questão, sobretudo por levar em conta a grande dificuldade que os professores das séries iniciais sentem para trabalhar com a geometria na escola, como já foi apontado por diferentes pesquisadores (por exemplo PAVANELLO, 2004; BROITMAN; ITZCOVICH, 2006) e como pode ser observado na referência que a professora da turma - na qual realizamos a pesquisa - fez ao ensino da geometria⁵⁸: *não é uma área que eu sinto segurança para trabalhar com os alunos, até porque eu na minha formação tive pouco preparo*.

Talvez, a preparação dos professores das séries iniciais para trabalhar geometria com seus alunos devesse começar pela compreensão, por parte do professor, da articulação entre geometria, aritmética e álgebra. É preciso que, no âmbito da formação docente, essas áreas sejam trabalhadas de forma entrelaçada e que também se ofereça oportunidade aos

⁵⁷ A pergunta feita pela estagiária já tinha sido usada por alguns alunos para justificar a igualdade entre dois retângulos de mesma configuração em posições diferentes.

⁵⁸ Trecho extraído da segunda entrevista realizada com a professora, em dezembro/2007 (apêndice 10).

professores de realizar experiências e fazer descobertas por meio do estudo da geometria, uma vez que, enquanto estudante da escola básica, provavelmente não lhes foram oferecidas tais oportunidades.

Para concluir, voltemos, então, à questão da tabuada pensada como uma tabela. Quando foi proposta, na aula 14, a montagem do quadro da multiplicação no quadrado de 10×10 , ao fazê-lo as crianças produziram o registro dos *atos numéricos da multiplicação* como parte do processo de construção dessa operação. Nesse sentido, a tabuada exerceu função de organização, uma vez que possibilitou às crianças, de certo modo, darem forma regular às partes de um todo com o qual estavam trabalhando. Vale ressaltar, conforme já pontuado na apresentação dos resultados, que a montagem da tabuada foi encarada como uma atividade lúdica pelas crianças e nesse sentido foi bastante favorável à descoberta e à observação de regularidades.

Numa perspectiva linear de ensino, na qual a aprendizagem é vista como um encadeamento progressivo de saberes, cuja organização se pauta estritamente na lógica do saber em questão, a tabuada é vista como um *pré-requisito* para aprender multiplicação. Como a própria aprendizagem dessa operação aritmética é confundida com o domínio de seu algoritmo convencional, a tabuada acaba se constituindo, muitas vezes, num “passo necessário para aprender a multiplicação”.

Consideramos fundamental que os professores construam um novo olhar para a tabuada, a qual tem sido, muitas vezes, tratada como objeto apenas da memória. Para além de saber recitá-la, é necessário que os alunos adquiram fluência, que tenham segurança e dominem a técnica, mas com consciência, com conhecimento das relações que a produzem e da estrutura sobre a qual se sustenta. Em outras palavras, que os alunos tenham *competência* em relação à tabuada.

6. 2 Relações sociais/morais

Um dos objetivos que tínhamos em mente ao elaborar o módulo de ensino com o qual trabalhamos nessa pesquisa, era o de promover interações entre os alunos, por considerá-las fundamentais à aprendizagem. Nesse sentido procuramos valorizar o trabalho em duplas, as atividades em grupos e as discussões coletivas. Na apresentação dos resultados mostramos indicadores da ocorrência de uma mudança nas relações que as crianças mantinham entre si em sala de aula, uma vez que passaram a interagir mais no decorrer do processo interventivo.

Embora questões relativas à interação entre pares ou ao trabalho em grupo estejam sempre presentes no discurso educacional, parece que na prática, ainda estamos muito longe de poder usufruir de fato dos benefícios que tal interação pode oferecer à educação escolar. A própria arquitetura das salas de aula não contribui para a existência de uma verdadeira interação entre os alunos: carteiras individuais e um quadro na parte frontal da sala, a qual se constitui no *espaço do professor* e para onde todas as carteiras - enfileiradas - quase que invariavelmente estão voltadas. Esse é o desenho de um espaço organizado para ouvir o professor, para tomar notas daquilo que ele diz, para se exercitar, individualmente, naquilo que foi ensinado.

Vemos aí o reflexo de uma escola que se constituiu para a transmissão dos conteúdos disciplinares. Nesse sentido, se o conteúdo é visto como fim, sua comunicação deve ser otimizada e isso implica em eliminar o que é supérfluo ou o que pode concorrer com tal objetivo. Mas, ao contrário, se o conteúdo for visto como um meio para o desenvolvimento de competências, para a formação pessoal e social, o trabalho em grupos, as discussões coletivas, enfim, as interações entre os alunos, passam a se constituir como aliados importantes ao trabalho do professor, como bem explicitado por Piaget (1936)⁵⁹:

É evidente, de facto que se o fim proposto consistir em memorizar o maior número de dados, em resolver o maximo possível de problemas, em bem preparar um exame pelo modo clássico etc., pode acontecer que o grupo constitua um obstáculo em comparação com a organização do trabalho individual em uma classe bem conduzida. Mas, na medida em que o ideal fôr a formação do pensamento e em que o trabalho verdadeiro, isto é, a pesquisa pessoal ou "activa", for posta acima das conductas meramente receptivas, então *a vida do grupo é a condição indispensavel para que a actividade individual se discipline* e escape à anarchia: o grupo é ao mesmo tempo o estimulante e o órgão de controle. (PIAGET, 1936, p. 14, grifo nosso)

Piaget (1998) defende o trabalho em grupos na escola como um *espaço genuíno de pesquisa* e fundamental para romper com o isolamento intelectual que os métodos transmissivos acabam por impor aos alunos. Conforme já mencionado no texto de fundamentação teórica deste trabalho, para o referido autor, o desenvolvimento da razão e o da cooperação estão intimamente ligados, uma vez que mediante conflito de opiniões os pontos de vista e os desejos pessoais devem ser coordenados com os dos outros, assim, de uma posição de absolutos, precisam ser relativizados.

⁵⁹ Conservamos, no trecho transcrito, a grafia original das palavras.

Destacamos, ainda, que quando trabalham juntas as crianças *pensam em voz alta* e nesse sentido objetivam seu pensamento. No exemplo da resolução de um problema em duplas que apresentamos nos resultados (5.2.1) e ao qual já nos referimos na discussão sobre os progressos da contagem para o cálculo, foi possível observar como a própria relação multiplicativa da situação em questão (a operação simultânea com unidades de ordem inferior e superior) foi explicitada pelo aluno na tentativa de se chegar a um acordo com o colega sobre qual dos resultados registrados estava incorreto.

Pensar em voz alta é explicitar o que está subjacente a um procedimento, a uma conduta, ou seja, é trabalhar no plano da *compreensão*. Nesse sentido ao pensar em voz alta ou ao explicar ao colega um procedimento usado o aluno torna-se mais consciente das relações que produzem um determinado conhecimento, ou seja, propicia-se não apenas uma maior eficácia da ação, mas o desenvolvimento de uma competência - conforme a definição de Denyer, et al. (2007) já apresentada no texto de introdução desse trabalho.

Convém ressaltar, entretanto, que não basta colocar as crianças sentadas juntas para que elas interajam entre si. Conforme apontado em nossos resultados, em variadas situações as crianças foram colocadas em duplas sem que tenham de fato trabalhado juntas. Decorrem daí duas questões importantes para discussão: a primeira refere-se às características das atividades propostas e a segunda remete à idéia de que o trabalho com o outro exige também um aprendizado.

Sobre a primeira questão, já mencionamos anteriormente que algumas das atividades propostas pela pesquisadora provocaram maior interação entre as crianças do que outras. Os jogos, por exemplo, situam-se no primeiro caso, uma vez que tal interação era condição de sua realização. O jogo se constitui, então, num excelente contexto de interações sociais, uma vez que o jogador deve ajustar suas jogadas em função das jogadas do outro. Conforme apontado por Macedo (2009), o jogo consiste numa experiência que só se efetiva num contexto de trocas: “do sujeito com os objetos, as regras e as outras pessoas que fazem parte desse sistema lúdico [...] sem a ação de um jogador é impossível ou sem sentido a do outro.” (MACEDO, 2009, p. 46).

Observamos em diversas ocasiões que as crianças realizavam sua jogadas ajudando-se mutuamente, como por exemplo para distribuir os feijões nos pratinhos no Jogo dos Restos, ou para determinar o número total de grãos nesse mesmo jogo. Quando tentavam se ajudar na quantificação, freqüentemente entraram em atritos, enfrentaram conflitos, pois ao perceber

um erro na distribuição, cada um tentava arrumá-lo sem levar em conta a ação do outro, o que acabava por gerar novos erros. Nessas situações precisaram rever suas ações, coordená-las com as dos colegas para efetuar as correções necessárias.

Também observamos que os problemas elaborados a partir dos jogos geraram mais trocas quando envolveram registros produzidos pelas próprias crianças. O mesmo foi verificado em relação às situações que representavam um desafio maior aos alunos, como por exemplo, calcular a pontuação obtida pela equipe no jogo Mini-Yam.

Verificamos, ainda, que as crianças interagiram muito mais entre si quando, em se tratando de atividades propostas por escrito, cada dupla recebia apenas uma folha com os enunciados e na qual deveriam registrar as soluções. Pensamos então que ao propor uma atividade para ser realizada em duplas ou em grupos é importante que as crianças possam chegar a um produto final construído e apresentado coletivamente. Ou seja, se queremos que um problema seja resolvido por duas ou mais crianças, é mais interessante que, no caso de se pedir uma solução por escrito, o resultado seja registrado em uma única folha, pois se houver divergências de opinião, em vez de cada um fazer o seu, é necessário entrar num acordo.

Em relação à segunda questão, temos observado - no trabalho com a formação docente- que as atividades em grupo são pouco exploradas nas aulas de matemática sob a alegação de que os alunos não sabem trabalhar juntos. Conforme apontado por alguns professores tais atividades geram *bagunça*, os alunos se dispersam, gasta-se muito tempo para organizar os grupos e não sobra tempo para trabalhar o conteúdo em si. Enfim, há várias dificuldades que podem ser enumeradas, e todas elas são legítimas, pois os alunos de fato não chegam à escola sabendo trabalhar em grupo. Nesse sentido esse tipo de atividade não pode ser visto na escola apenas como um meio através do qual os alunos podem aprender conteúdos escolares - embora consideremos que seja um bom meio para isso - mas também como um objeto de aprendizagem em si.

O que acontece, entretanto, é que o trabalho em grupos tem sido visto como algo que compete com o programa curricular, uma vez que na atividade individual, mediante a aula expositiva, há uma ilusão de melhor aproveitamento do tempo, de uma produção maior do aluno. Assim, mediante algumas tentativas mal sucedidas de se empreender um trabalho desse tipo, acaba-se desistindo de um tipo de aprendizagem (conteúdo atitudinal) em favor de outra

(conteúdo conceitual)⁶⁰, como se não houvesse uma estreita ligação entre ambas, conforme apontado no excerto do texto de Piaget que foi apresentado anteriormente.

Promover interações significa romper com a relação de subordinação que se institui, muitas vezes, na escola, entre professor e alunos. Nesse tipo de relação, os conflitos são encobertos, o que prejudica a tomada de consciência por parte dos sujeitos envolvidos e, conseqüentemente, prejudica também a aprendizagem. Por isso Piaget defende que a relação de cooperação é fundamental para o progresso intelectual⁶¹:

“é pelo attricto incessante com outrem, pela opposição das vontades e das opiniões, pela permuta de idéias e pela discussão, pelos conflitos e pela compreensão mútua que todos nós aprendemos a nos conhecer a nós próprios. A formação da personalidade, no duplo sentido de uma tomada de consciência do ‘eu’ e de um esforço para situar esse ‘eu’ no conjuncto das outras perspectivas, é, pois o primeiro effeito da cooperação. [...] a própria reflexão é uma discussão interior, uma applicação a si mesmo das conductas aprendidas em função dos outros. Do ponto de vista da educação intelectual, isso significa, pois, que a tomada de consciência do pensamento próprio, com tudo que isso implica do ponto de vista do contrôlle de si, é estimulado pela cooperação, enquanto a simples relação entre o egocentrismo mental do alumno e a autoridade do mestre não basta para conduzir o indivíduo à actividade pessoal.” (PIAGET, 1936, p. 8).

Dessa forma, se os alunos não sabem trabalhar juntos, precisam aprender, e não importa em que fase da escolaridade - claro que quanto mais cedo, melhor. Mas não é evitando situações que geram *bagunça* que a escola pode promover tal aprendizado. Na própria origem da palavra *disciplina* podemos observar a relação que Piaget estabelece entre cooperação e progresso intelectual. Etimologicamente, *disciplina* se refere à própria *ação de se instruir*, relaciona-se ainda com: educação, ciência, ordem, sistema e *princípios de moral*. Vemos então que disciplina, como um comportamento, como uma atitude, é algo que se constrói, em estreita relação com a construção do conhecimento, tornando-se mesmo indispensável para o progresso intelectual.

Na primeira entrevista com a professora da turma ela apontou para a dificuldade de se trabalhar com jogos devido ao grande número de alunos na sala e demonstrou uma grande expectativa em relação ao trabalho que seria desenvolvido com as crianças nesse sentido. Nos relatórios que produziu ao longo do semestre foi possível observar como ela foi modificando a sua concepção acerca do trabalho em grupos: no dia 21/03, na primeira aula em que foi proposto um jogo, ela apontou o *barulho* gerado pela atividade como a causa dos erros de

⁶⁰ Os conteúdos curriculares, conforme apontado por Coll (1987), podem ser: fatos discretos, *conceitos*, princípios, procedimentos, valores, normas e *atitudes*.

⁶¹ Conservamos, no trecho transcrito, a grafia original das palavras.

contagem das crianças; em 30/05 ela destacou as dificuldades dos alunos para trabalhar *com* o outro, mencionando que a interação entre as duplas ocorreu mais *após a solução* do problema, na comparação dos resultados obtidos individualmente; no dia 12/06 ela se refere novamente à dificuldade de *pensar junto com o outro* e menciona que isso gera tumulto, mas admite tratar-se de um aprendizado importante e aponta para progressos nesse sentido, em relação ao início do processo interventivo; por fim, na entrevista realizada em dezembro, ela aponta a mudança de atitude das crianças em relação ao trabalho em grupo como uma das contribuições da intervenção: *“também melhoraram na hora de trabalhar em equipes, com menos algazarra e mais respeito pelo colega.”* (ENTREVISTA, dez.2007)

Vemos então, que a intervenção realizada promoveu um aprendizado em relação ao trabalho em grupos, ao mesmo tempo em que o desenvolvimento da disciplina para esse tipo de trabalho contribuiu para os progressos na esfera intelectual aos quais já nos referimos anteriormente nessa discussão.

Em nossos resultados apontamos ainda para mudanças de atitudes dos alunos no que se refere às seguintes questões: envolvimento nas atividades propostas, relação com a matemática, forma de tratar os problemas apresentados, tratamento dispensado ao erro e capacidade de comunicação e expressão. Nesse sentido temos fortes indícios de que a intervenção realizada teve um efeito de aperfeiçoamento sobre as crianças, também no que se refere às relações sociais/morais. Um exemplo é a menção que a professora fez, ainda na aula 1, sobre um aluno com muita dificuldade em matemática (LUJ), demonstrando ter se surpreendido com a participação dele na atividade proposta: *“...respondeu aos questionamentos (fato raro ele é muito apático). Desenvolveu uma linha de raciocínio, pediu para ir ao quadro e mesmo não acertando, não demonstrou vergonha.”* (REPROF, 07/03, grifo nosso).

Consideramos muito significativas as mudanças de atitude de LUJ (mencionadas pela professora) uma vez que, conforme exposto anteriormente, aprendizagem exige *ação* por parte de quem aprende. Isso nos leva a pensar que um aluno apático tem poucas chances de efetuar aprendizagens na escola. Essas mudanças também sinalizam para uma relação muito diferente com o saber matemático, como algo a ser construído e não a ser reproduzido. Se o professor ensina primeiro, mostrando como se faz, o erro é um desvio de conduta (daí a vergonha de cometê-lo). Numa perspectiva de *equilíbrio majorante* (PIAGET, 1976) o erro adquire outro sentido, uma vez que, conforme apontado por Macedo (1994, p. 64) “no

processo de desenvolvimento, o que interessa é uma revisão constante de nossas teorias, idéias, pensamentos ou ações, porque erro e acerto são sempre relativos a um problema ou sistema”. Nesse sentido, perder a vergonha de errar parece ser um passo essencial para que o aluno adquira competências matemáticas e não apenas reproduza procedimentos ensinados.

A professora fez menção mais de uma vez ao fato de estar se surpreendendo com a atitude e mesmo com o desempenho dos alunos considerados “fracos” em matemática. Num dos relatórios, referiu-se da seguinte forma a um de seus alunos, que segundo ela, havia sido diagnosticado como hiperativo (em uma avaliação psicopedagógica): *“na atividade de encontrar representações matemáticas, chamou minha atenção que GAE, apesar de dispersivo o tempo todo, percebeu que todas as operações do grupo davam o mesmo resultado”* (REPROF, 21/03).

Trabalhar com as diferenças em sala de aula é um desafio genuíno à tarefa de ensino e é preciso organizar atividades que incentivem a participação de todos, inclusive daqueles considerados fracos, mal adaptados, enfim os “maus alunos”. Conforme destacado em diferentes episódios já apresentados na parte dos resultados, as interações provocadas pela intervenção realizada foram favoráveis à inclusão desses alunos, que passaram a se sentir valorizados, a ter mais confiança em si mesmos, favorecendo, inclusive, um desempenho melhor nas atividades propostas. Um exemplo foi o caso de SAB que, de acordo com a professora, nem participava das aulas de matemática junto com os demais alunos (antes de nossa inserção ali).

Segundo Piaget (1936) a autoconfiança é essencial ao desempenho acadêmico. Ele lembra que grande parte dos alunos que não se saem bem na escola sofrem de inaptações sociais, de uma falta de confiança em si mesmos que acaba sendo reforçada na escola. Em relação à matemática, essa questão é bem explicitada por Bkouche et al.⁶² (1991, apud PARRA, 2006, p. 14):

O que é importante para o aluno não é conhecer a solução, é ser capaz de encontrá-la ele mesmo e de construir assim, por meio de sua atividade matemática, uma auto imagem positiva, que o valoriza, diante da matemática. A recompensa do problema resolvido não é a solução do problema, é o sucesso daquele que o resolveu com os seus próprios meios, é a imagem que pode ter de si mesmo como alguém capaz de resolver problemas, de fazer matemática, de aprender.

Reforçamos aqui, pois já foi mencionado anteriormente, a estreita relação entre os progressos na esfera social e as conquistas no âmbito intelectual. Um aluno que se sente mais

⁶² BKOUCHE, B. et al. *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin, 1991. 255p.

confiante, que vê sentido naquilo que faz na escola, que se sente valorizado pelo professor e perante os colegas não sente necessidade de “agradar ao professor” agindo conforme supõe que é esperado por ele, em outras palavras, segundo a lógica do contrato didático (BROUSSEAU, 2008). Nesse sentido a autoconfiança é fundamental para o desenvolvimento da *intenção racional* (REY, 2002).

A assunção de uma atitude mais investigativa na resolução de problemas e a participação cada vez mais expressiva dos alunos nas atividades em grupo e nas discussões coletivas constituem indícios de que as interações desencadeadas pela intervenção realizada promoveram tal desenvolvimento. Vale lembrar o comentário feito pela professora sobre as contribuições da intervenção: “... ‘*pegaram mania*’ [os alunos] *de querer explicar como realizavam as atividades.*” (ENTREVISTA, dez.2007).

Explicar é, nesse sentido, argumentar. Vemos que os alunos passaram a ter necessidade de uma explicação racional. Já não bastava mais conseguir um resultado, chegar a uma resposta, era preciso explicitar como se chegou até ali para argumentar sobre a sua validade.

Para concluir esse capítulo vamos abordar a questão das discussões coletivas, por considerarmos que tiveram um papel importante para o desenvolvimento da capacidade de expressão das crianças. Conforme apontado por Machado (2009), o desenvolvimento dessa capacidade é uma meta a ser alcançada por todas as disciplinas escolares. O autor lembra, ainda, que ela compõe uma das cinco competências propostas pelo referencial do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)⁶³.

A professora da turma fez várias menções a essa questão em seus relatórios, sendo que num deles ela afirmou ter sido através da discussão sobre as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos que ela passou a olhar de uma forma diferente para alguns deles: “*pude observar a linha de raciocínio usada e me surpreendi com aqueles alunos já considerados “fracos” [...] nestas discussões eles estão mais soltos, sem vergonha de exporem suas opiniões, mais desenvoltos na oralidade.*” (REPROF, 06/07). Na entrevista final ela também destacou que *as crianças melhoraram na forma de se expressar oralmente.*

A partir do exposto podemos concluir que o módulo de ensino proposto, da forma como foi desenvolvido, propiciou o desenvolvimento da capacidade de expressão dos alunos, tanto a expressão oral, quanto a escrita (conforme pode ser inferido dos vários registros de

⁶³ Competência I - capacidade de **expressão** em diferentes linguagens (língua materna, matemática, expressão corporal, artística etc.). (MACHADO, 2009, p. 50, grifo nosso)

solução elaborados pelos alunos e apresentados na parte dos resultados). Quaranta e Wolman (2006), no texto que discorrem sobre a importância das discussões nas aulas de matemática, mostram que essas discussões, relacionadas a um conteúdo específico da matemática, podem propiciar o desenvolvimento de competências que extrapolam o âmbito dessa disciplina:

A interação grupal, o modo de participar nos intercâmbios - aprender a respeitar o trabalho próprio e dos outros os outros, escutar sem interromper, respeitar a vez, poder revisar a própria posição, etc. - é também um propósito mais geral da escola, que *não pode desenvolver-se no vazio, mas relacionado com os conteúdos de ensino*. (QUARANTA; WOLMAN, 2006, p. 135, grifo nosso).

Vemos assim um exemplo, ainda que modesto, de uma ponte entre conteúdo e competências, ou seja, de como ocorre essa “passagem” na escola: o professor ensina conteúdos, próprios da sua disciplina, e os alunos desenvolvem competências (tanto aquelas ligadas imediatamente ao conteúdo em questão, quanto outras, que extrapolam o âmbito de uma disciplina). No caso da “*mania de querer explicar como realizavam as atividades*”, à qual a professora se referiu, podemos identificar a idéia de *intenção*, como um *exercício cognitivo do querer* (REY, 2002). Conforme apontado pelo referido autor, não basta ter uma determinada capacidade, mas é necessário querer, ter a intenção de usá-la. Assim, vemos que as discussões nas aulas de matemática podem contribuir para o desenvolvimento das duas intenções cognitivas destacadas pelo autor e apresentadas no texto de fundamentação teórica: *a intenção racional e a intenção escritural*.

6. 3 Relações didáticas

Na análise das relações didáticas, destacamos três elementos principais: o tratamento dispensado ao erro, a função reguladora da avaliação e as limitações do processo interventivo.

O *erro* é freqüentemente tratado, na escola, como algo a ser evitado ou até mesmo eliminado. Esse tipo de tratamento advém de uma visão imediatista de aprendizagem: acredita-se que uma boa explicação por parte do professor, seguida da aplicação nos exercícios pode garantir a aprendizagem, sem levar em conta que esta trata-se, na realidade, de um processo de construção complexo que está sujeito a rupturas e reestruturações. Numa análise sobre a visão construtivista do erro, Macedo (1994, p. 76) ressalta que “a exigência de se entender na primeira vez é fruto de uma mentalidade baseada simultaneamente na idéia de revelação (da relação direta e imediata entre sujeito e objeto) e de transmissão (da exigência e da arte de transmitir bem, sem erros)”.

Se a escola ensina as respostas antes de apresentar as perguntas, se ensina os algoritmos e fórmulas matemáticas antes de apresentar problemas, certamente não tem uma postura de abertura para o erro, pois já estabeleceu a priori o limite entre certo e errado. Uma escola aberta em relação ao erro, não procura evitá-lo, mas procura transformá-lo em situação de aprendizagem, problematizando-o, porque considera que aprender é reformular idéias, é modificar concepções. Foi isso que tentamos fazer em sala de aula durante o processo interventivo.

Essa forma de tratar o erro parece ter contribuído para mudanças de atitude dos alunos, sobre as quais discorremos anteriormente, dado que a professora mencionou várias vezes o fato de que as crianças não estavam demonstrando mais *medo* ou *vergonha* de errar. Se as crianças percebem que, para o professor, mais importante do que chegar a uma resposta correta é saber explicar *como se chegou* até ela, se têm oportunidade de interagir com o objeto de conhecimento a partir de suas próprias idéias - em situações *adidáticas* (BROUSSEAU, 2008) - e não com base no que já foi *explicado* pelo professor, elas não buscarão o acerto “a qualquer preço”. Essa questão pode ser exemplificada pelo seguinte comentário registrado pela professora: “*chamou minha atenção como as crianças procuraram estratégias próprias para execução das atividades. Estando certos ou não, cada um desenvolveu o seu raciocínio sem espaço para a ‘cópia’ do colega, trocaram muito entre eles, expressando suas opiniões*” (REPROF, 09/03, grifo nosso).

É muito comum que o aluno, ao concluir uma atividade, resolver um problema ou efetuar um cálculo busque a validação do professor para sua resposta. Os alunos sujeitos de nossa pesquisa fizeram isso sistematicamente, mas o retorno foi sempre a solicitação de uma explicação. Essa postura do professor, mediante a busca de aprovação por parte dos alunos, é fundamental para o desenvolvimento da autonomia intelectual (KAMII; HOUSMAN, 2002). Num dos relatórios a professora fez o seguinte comentário sobre essa atitude: “*a intervenção feita pela pesquisadora levou os alunos a explicarem como haviam realizado os cálculos sem dizer que a forma feita estava correta ou não. Acho isso bem interessante porque nesse momento é uma ‘descoberta’ para mim. Várias vezes já me surpreendi com a linha de raciocínio usada pelos alunos [...]*” (REPROF, 04/07 grifo nosso).

Por meio desse depoimento chamamos a atenção para a importância de se construir um olhar diferente para o erro em sala de aula, sugerindo que na ação didática se desloque a ênfase freqüentemente colocada no acerto, para a *compreensão*. Acertar sem entender o

porquê, num espaço em que aprendizagem deve ser de orientação racional - como é o caso da escola - não nos parece ser muito mais produtor do que errar. É preciso que os alunos compreendam as causas, tanto dos sucessos quanto dos fracassos.

Problematizar o erro é fazer dele uma estratégia didática, como defende Pinto (2000) num estudo sobre o erro produzido pelo aluno no processo de aprendizagem da matemática escolar. A autora argumenta apontando para as contribuições que essa estratégia pode oferecer ao processo de ensino e ao próprio processo de formação do professor:

Partimos da premissa que o erro, concebido numa dimensão construtivista, configura-se como uma oportunidade didática para o professor. Em primeiro lugar, por ser um guia para um planejamento de ensino mais eficaz, oferecendo indícios importantes para a identificação dos processos subjacentes à construção conceitual - condição relevante na organização do ensino. Em segundo lugar, porque, se observado com maior rigor, poderá oferecer novos elementos para o professor refletir sobre suas ações didáticas e, com isso, imprimir novos direcionamentos a suas práticas pedagógicas - o que certamente incidirá sobre seu desenvolvimento profissional. (PINTO, 2000, p. 139)

Diante do exposto, vemos que tratar o erro da forma como é proposta pela referida autora é condição para que o aluno não se constitua no elemento excluído do que Meirieu (1998, p. 80) denomina como “triângulo pedagógico” (educando - saber - educador). Para esse autor, cada elemento do triângulo constitui um pólo distinto que deve ser levado em conta na atividade pedagógica, buscando-se um equilíbrio entre eles. Sabemos que determinados pólos são muitas vezes privilegiados em função da concepção epistemológica sobre os quais se estrutura esse triângulo. Entretanto, para além dos pólos (ou ângulos) há que se considerar ainda os seus lados, que segundo Meirieu (1998) correspondem a eixos ou dimensões interdependentes nessa relação. Assim quando se opera em uma das dimensões deve-se estar atento para que a terceira não seja excluída.

Quando o professor não vê os erros do aluno como *indícios importantes para a identificação dos processos subjacentes à construção conceitual*, conforme apontado por Pinto (2000, p. 139), o aluno acaba ficando excluído da dimensão *educador-saber*, uma vez que o professor dá seqüência às atividades planejadas, avançando no conteúdo curricular, sem perceber que o aluno já não o acompanha mais.

Isso nos leva à questão da avaliação e à discussão sobre o seu papel interventivo em nossa pesquisa. Conforme já mencionado anteriormente⁶⁴, a análise dos dados não teve início

⁶⁴ Isso foi explicitado no texto sobre os procedimentos de análise dos dados coletados em campo (4.2.6).

somente após o término da intervenção pedagógica, mas começou no primeiro dia de inserção em sala de aula .

Apresentamos, em nossos resultados, vários episódios que mostram o papel exercido pela avaliação no processo de ensino, sendo que a partir da aula 6, o planejamento inicial passou a ser usado apenas como uma referência uma vez que as *atividades dos* alunos passaram a ser o elemento mais importante na elaboração das *atividades para* os alunos.

O Jogo Batalha dos Números, por exemplo, não constava no planejamento inicial, tendo sido introduzido como uma variação didática aos problemas de quantificação já explorados. Nesse jogo as crianças não dispunham de elementos de contagem como os feijões ou os quadradinho dos retângulos, assim queríamos observar se ainda usariam a contagem unitária ou se desenvolveriam outras estratégias. As restrições colocadas pelo jogo e, sobretudo os problemas propostos e as discussões realizadas, se mostraram de grande importância para os progressos da contagem ao cálculo.

Avaliar as produções dos alunos é essencial para planejar e para que, ao fazer isso, o professor não ignore aquilo que a interação em sala de aula apresenta como novidade. Macedo (2005), ao tratar da avaliação como um processo de regulação, esclarece nosso ponto de vista:

Ela informa e permite corrigir, antecipar e confirmar o que está acontecendo no processo de aprendizagem na direção pretendida. Nesse sentido, ela diminui o risco de surpresas desagradáveis, calibra, ajuda em um momento em que as coisas ainda não ganharam uma proporção às vezes insuperável, para que se possa conviver, renegociar, melhorar ou corrigir. A avaliação como regulação ajuda a rever metas, verificando se foram muito pretenciosas. Ela dá esperança porque permite intervir positivamente em favor daquilo que se deseja alcançar. (MACEDO, 2005, p. 112)

A avaliação é, nesse sentido, também um instrumento muito importante de formação docente uma vez que torna possível, ao professor, aprender *com* e *a partir* da experiência vivida. Foi justamente a avaliação, como regulação, que fez dessa pesquisa uma oportunidade ímpar de aprendizado para a pesquisadora.

Ao nosso ver, avaliar é refletir, no sentido etimológico da palavra: *recurvar*, *dobrar*, *ajoelhar*. Conforme apontado por Macedo (2005, p. 32) “reflexão, significa envergar-se de novo, em outro espaço, em outro tempo, talvez em outro nível. Para isso, o que acontece no domínio da experiência, por exemplo, necessita ser mais bem observado, recortado, destacado e projetado em outro plano.”

Foi isso que procuramos fazer nessa pesquisa. Refletir sobre uma experiência de ensino, para aprender com ela. Nesse sentido, destacamos o papel essencial exercido pela *escrita*, uma vez que, neste estudo, casamos duas questões bastante complexas: ensino e aprendizagem no contexto da sala de aula, e a pesquisa acadêmica. O registro, tal qual o fizemos, foi essencial para conciliar duas práticas que se caracterizam por objetivos tão diferentes, mas que, ao nosso ver, deveriam ser tratadas de forma indissociável na escola: *ensino e pesquisa*.

Escrever sobre as aulas nos permitiu retomá-las em outro plano, olhar para elas de fora, afastados no tempo e no espaço. Em geral o professor escreve sobre o que pretende fazer (planejamento), mas poucas vezes tem oportunidade de escrever sobre o que foi feito. Pensamos que a disciplina do registro é essencial à formação docente e, nesse sentido, a metodologia da nossa pesquisa pode ser ilustrativa de um *modelo de formação de professores*.

É claro que não estamos sugerindo que seja possível a um professor, no cotidiano da sala de aula, fazer o que foi feito aqui, no espaço privilegiado de uma formação acadêmica como o doutorado. Mas pensamos que o raciocínio da pesquisa pode ser uma boa alternativa ou mesmo uma complementaridade ao modelo de *formação pelo exemplo*, quando se ensina ao professor como deve proceder em sala de aula, mostrando aquilo que outros já fizeram e que, naquela experiência específica, deu certo.

Neste trabalho nos referimos repetidas vezes - no contexto de aprendizagem dos alunos - ao *fazer* e ao *compreender* (PIAGET, 1978) e à idéia de *competência* - como *inteligência da ação* (DENYER, et al., 2007). Retomamos agora estes conceitos no contexto de aprendizagem do professor uma vez que, nessa pesquisa, trabalhamos no âmbito desses dois sistemas (*fazer e compreender*), estabelecendo assim uma interlocução permanente entre teoria e prática. Nesse sentido podemos dizer que escrever sobre as aulas, da forma como o fizemos nessa pesquisa, propiciou a *tomada de consciência* (PIAGET, 1977). Daí a possibilidade de criticar, de rever a prática e de tentar melhorá-la.

Procuramos então deixar transparecer nessa tese o processo de aprendizagem da pesquisadora, sem tentar eliminar o que não deu certo na experiência, sem omitir equívocos cometidos no processo interventivo, os quais foram expostos na apresentação dos resultados, como os *limites da intervenção*. Pensamos que eliminar os erros, omitir o que não deu certo, seria incoerente com uma visão construtivista de conhecimento. Além disso, somente

expondo os erros é que foi possível pensar sobre eles, ou seja, *refletir* - acreditando que essa reflexão trará benefícios para a ação - no sentido explicitado por Macedo (2005):

[...] trata-se de organizar o que foi destacado, de acrescentar novas perspectivas, de mudar o olhar, de se descentrar. [...] refletir é ajoelhar-se diante de uma prática, escolher coisas que julgamos significativas e reorganizá-las em outro plano para, quem sabe, assim podermos confirmar, corrigir, compensar, substituir, melhorar, antecipar, enriquecer, atribuir sentido ao que foi realizado. (MACEDO, 2005, p. 32)

O desenvolvimento da competência docente passa necessariamente pela reflexão, uma vez que, em sala de aula, na relação aluno-professor-saber, as interações que estão em jogo sempre trazem algo de novo. Assim como num jogo, onde cada partida é única e nenhuma pode ser vencida na véspera, cada aula coloca ao professor novos desafios, cujo enfrentamento pode ser facilitado por saberes, por experiências anteriores, por bons métodos, por exemplos de outros professores, mas nada substitui a *competência do professor*, ou seja, a possibilidade de *mobilizar* o que já sabe para enfrentar o desconhecido.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos últimos quatro anos debruçamo-nos sobre o tema dessa pesquisa, um tema que não é nosso, mas que pertence a um âmbito do qual fazemos parte, não por contingência, mas por escolha própria: o âmbito da *educação*.

Todas as atividades realizadas no tempo e no espaço desse doutorado foram orientadas pelo desejo de conhecer mais sobre a complexidade do ensino e da aprendizagem de matemática na escola. Desejo este que teve sua origem tanto em interesses pessoais quanto no compromisso social que assumimos ao optar pela educação como área de atuação profissional.

Ao finalizar a pesquisa estamos - de certa forma - enviando de volta à educação o tema do qual nos apropriamos nesses últimos anos. Mas não o entregamos igual ao que era quando foi tomado por nós, uma vez que, ao dirigir-lhe o nosso olhar, o modificamos, colocamos sobre ele a nossa própria marca. Assim, como parte do compromisso assumido com a educação, cumpre-nos finalizar esse trabalho explicitando suas contribuições em dois sentidos: o primeiro é aquele *do tema para a pesquisadora*, ou seja, daquilo que foi possível aprender com esse estudo; o segundo é o *da pesquisadora para o tema*, ou seja, daquilo que a presente pesquisa pode oferecer para enriquecê-lo, para melhorá-lo.

Versar sobre o primeiro sem incorrer no risco de ser redundante não é tarefa fácil, uma vez que o presente trabalho constitui-se, ele mesmo, num verdadeiro depoimento sobre o processo de aprendizagem da pesquisadora. No entanto há algo ainda por dizer, e agora o faço na primeira pessoa: ao finalizar esse trabalho sinto-me como se finalmente estivesse pronta, e só agora, para *começá-lo*. Mas isso é, sem dúvida, coerente com a visão construtivista de conhecimento, uma vez que aprender *é sempre questão de fazer uma coisa que não se sabe fazer para aprender a fazê-la*.⁶⁵ Ou, como diria meu querido orientador, *a gente aprende mesmo é no caminho... quando aprende e se aprende*.⁶⁶

Decorre daí o novo olhar que esse estudo permitiu construir sobre a minha atuação no âmbito da formação docente, levando-me a assumir uma postura menos prescritiva e mais reflexiva.

⁶⁵ Meirieu (2005, p. 76)

⁶⁶ Lino de Macedo, 2009, durante uma reunião de orientação.

A metodologia de ensino que aqui propomos não é um algoritmo, algo que, se rigorosamente seguido, garantirá a aprendizagem dos alunos. É apenas uma proposta, uma sugestão a ser assimilada e, nesse sentido, transformada, modificada, reestruturada, e enriquecida por aqueles que enxergarem nela um bom caminho para ensinar matemática nos anos iniciais da escolaridade. Daqueles que compartilham dos valores sobre os quais tal metodologia se sustenta.

Dessa forma, nossa proposta de ensino - justamente por seu caráter de *incompletude* - constitui-se na contribuição desse estudo ao ensino e à aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

- ABREU, M. G. S. **Uma investigação sobre a própria prática pedagógica**: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática. 2008. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos: São Carlos, 2008.
- ARANHA, M. L. DE A. **Filosofia da educação**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 1996. 254p.
- AZANHA, J. M. P. **Uma idéia de pesquisa educacional**. São Paulo: EDUSP, 1992. 201p.
- BARRETO, I. M. A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional**: a diversidade de procedimentos de resolução. 2001, 123f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2001.
- BERTINI, L. de F. **Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais**: uma professora no contexto de tarefas investigativas. 2009, 135f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Carlos: São Carlos, 2009.
- BONANNO, A. de L. **Um estudo sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental**. 2007, 130f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2007.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000. 142p.
- BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança**: explorando notações. Porto Alegre: Artmed, 2006. 136p.
- BROITMAN, C. El tratamiento didáctico de problemas multiplicativos desde el inicio de la escolaridad básica. **Projeto - Revista de Educação**. Porto Alegre: Projeto, v.2, n.3, 2000. julho/dezembro. p. 38-43.
- BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H. Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: problemas de seu ensino, problemas para seu ensino. PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 169-188.
- BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques**. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble, vol. 7, n° 2, p. 33-115, 1986.
- _____. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 48-72.
- _____. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La Pensée sauvage éditions, 1998. 395p.

_____. **Introdução ao estudo das situações Didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

CANÔAS, S. S. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva dos professores das séries iniciais** (1ª a 4ª séries). 1997, 209f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 1997.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952. 318p.

CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995. 182p.

CARRAHER, T. N. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1998. 161 p.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**. 2004, 197f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2004.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 36-47.

CIRIGLIANO, G. F. G. **Fenomenologia da Educação**. 2. ed. São Paulo: Vozes, 1972. 233p.

COLL, C. **Psicologia e currículo:** uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. São Paulo: Ática, 1987. 200p.

DEMO, P. **Pesquisa qualitativa:** busca de equilíbrio entre forma e equilíbrio. Rev.Latino-am.enfermagem, Ribeirão Preto, v. 6, n. 2, p. 89-104, abril, 1998.

DENYER, M. et. al. **Las competencias en la educación**. Un balance. México: FCE, 2007. 201p.

DEVELAY, M. Prefácio. In: REY, B. **As competências transversais em questão**. Porto Alegre: Artmed, 2002. 232p.

ENCHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.) **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. 177p.

ERMEL - INRP. **À descoberta dos números:** contar, cantar e calcular. Porto: Edições Asa, 1991. 365p. (Coleção Perspectivas Actuais/Educação).

EWBANK, M. S. A. **O ensino da multiplicação para crianças e adultos**: conceitos, princípios e metodologia. 2002, 256f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2004.

FERREIRO, E.; TEBEROSKY, A. **Psicogênese da língua escrita**. Edição comemorativa dos 20 anos de publicação. Porto Alegre: Artes médicas Sul, 1999. 300 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores associados, 2006. 224 p. (Coleção formação de professores).

FRANCHI, A. **Compreensão das situações multiplicativas elementares**. 1995. 203f. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 1995.

FREINET, C. **Pedagogia do bom senso**. 2 ed. Rio de Janeiro: Martim Fontes. 128p.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 65-87. (Série Trilhas).

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996a. p. 26-35.

_____. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b. p. 236-258.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (org.) **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. 4. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 257-282

GUIMARÃES, K. P. **Processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas multiplicativas**. 2004, 213f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2004.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 3 ed. São Paulo: Globo, 1989. 367p.

IMENES, L. M. **Os números na história da civilização**. São Paulo: Scipione, 1989. 48p. (coleção vivendo a matemática).

KAMII, C. **A criança e o número**. 22. ed. Campinas: Papirus, 1996. 124p.

_____. ; DEVRIES, R. **Jogos em Grupo na Educação Infantil**: implicações da teoria de Piaget. São Paulo: trajetória Cultural, 1991. 355p.

_____. ; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 3. ed. Campinas: Papirus, 1995. 299p.

KAMII, C.; HOUSMAN, L. B. **Crianças pequenas reinventam a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002. 277p.

KISHIMOTO, T. M. O jogo e a educação infantil. In: _____. M.(org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2005. 13-43.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

LIBERMANN, M. P.; WEY, R. L. da M. **Fazendo e compreendendo matemática**. São Paulo: Solução, 1988. (coleção didática em 4 volumes).

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**. Blumenau, vol.3, n.4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 99p. (Temas básicos de educação e ensino).

MACEDO, L. **Ensaios construtivistas**. 4. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994. 170p.

_____. Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar. In: PERRENOUD, P. et. al. **As competências para ensinar no século XXI**: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002. 113-135.

_____. **Ensaios pedagógicos**: como construir uma escola para todos? Porto Alegre: Artmed, 2005. 167p.

_____. Teoria da equilíbrio e jogo. In: _____. (org). **Jogos, psicologia e educação**: teoria e pesquisas. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2009. p. 45-66. (Coleção psicologia e educação).

_____. ; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: Artmed, 2000. 116p.

_____. **4 cores, senha e dominó**: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997. 167p. (Coleção psicologia e educação).

MACHADO, N. J. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Cortez, 1992. 120p. (questões da nossa época: 2)

_____. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001. 169p.

_____. **Educação:** projetos e valores. 5. ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2004. 153p. (Coleção ensaios transversais).

_____. **Educação:** competência e qualidade. São Paulo: Escrituras Editora, 2009. 203p. (Coleção ensaios transversais).

MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. 208p. (Série Trilhas).

MARTINS, H. H. T. S. Metodologia qualitativa em pesquisa. **Educação e Pesquisa.** São Paulo, v. 30, n.2, p. 289-300. Maio/ago 2004. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n2/v30n2a07/pdf>. Acesso em 12/11/2009.

MEIRIEU, P. **Aprender... Sim, mas como?** 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. 193p.

_____. O cotidiano da Escola e da sala de aula: o fazer e o compreender. Porto Alegre: Artmed, 2005. 221p.

MICOTTI, M. C. De O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 153-168 (Seminários & Debates)

MONTAGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a inteligência em evolução.** Porto Alegre: Artmed Editora, 1998. 242p.

MORENO, B. R. de. O ensino do número e o sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais:** análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 43-76.

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997, 244p.

OLIVEIRA, C. A. V. de. **Relações lógicas estabelecidas pelos alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental.** 2004, 93f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2004.

PAIS, L. Introdução. In: MACHADO, S. D. A et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. 208 p. (Série Trilhas)

_____. **C. Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 2 ed. 128 p. (Coleção Tendências em Educação matemática).

_____. **Ensinar e aprender matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 152p.

PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, 188p.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. _____.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

_____. Prólogo. PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, p.9-15.

_____.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. 258p.

PAVANELLO, R. M. A geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: contribuições da pesquisa para o trabalho escolar. In: _____. (org.) **Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental**: a pesquisa em sala de aula. São Paulo: Biblioteca do Educador matemático, 2004. (Coleção SBEM, vol. 2) p. 130-143.

PIAGET, J. O trabalho por “équipes” na escola: notas psicológicas. **Revista de Educação**. Diretoria do Ensino do Estado de São Paulo. São Paulo, v. XV e XVI, n. 15 e 16. Setembro/dezembro, 1936.

_____. **Development and learning**. Journal of Research in Science Teaching. vol. XI, nº 3, 1964, p. 176-186.

_____. **Psicologia e Pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense, 1970. 182p.

_____. **A equilibração das estruturas cognitivas**: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. 175p.

_____. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977. 212p.

_____. Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico. In: MÁSSIMO, P. P. (Org.) **Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem**. O debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky. São Paulo: Coltrix/Edusp, 1983. p. 39-49.

_____. Observações psicológicas sobre o self-government. In: PARRAT, S.; TRYPHON, A. **Jean Piaget - Sobre a Pedagogia - textos inéditos**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998a. p. 113-129.

_____. Observações psicológicas sobre o trabalho em grupo. In: PARRAT, S.; TRYPHON, A. **Jean Piaget - Sobre a Pedagogia - textos inéditos**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998b p. 137-151.

_____. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP, 1978. 186p.

_____. **Seis estudos de psicologia**. 24. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003. 136p.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A Gênese do número na criança**. de Janeiro: Zahar. Brasília: INL. 2 ed., 1975. 331p.

PIAGET, J. et al. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Medicas, 1995. 292p.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000. 182p. (Série Prática Pedagógica).

POZO, J. I. **Aquisição de conhecimento**: quando a carne se faz verbo. Porto Alegre: Artmed, 2004. 239p.

QUARANTA, M. E.; WOLMAN, S. Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. In: PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 111-142

REES, D. K. Algumas considerações sobre a pesquisa qualitativa. **Signótica**, v. 20, n. 2, p. 253-274, jul./dez. 2008. Disponível em www.revistas.ufg.br/index.php/sig/article/viewFile/6095/4788. Acesso em 12/11/2009.

REY, B. **As competências transversais em questão**. Porto Alegre: Artmed, 2002. 232p.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 156-185.

SCHLIEMANN, A. D. et. al. **Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers**. Journal for Research in Mathematics Education. 1998, vol. 29, n.4, p. 422-435.

SILVA, B. A. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64 (Série Trilhas).

SPINILLO, A. G. ; MAGINA, S. Alguns 'mitos' sobre a Educação Matemática e suas consequências para o Ensino Fundamental. In: PAVANELLO, R. M. (org.) **Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental**: a pesquisa em sala de aula. São Paulo: Biblioteca do Educador matemático, 2004. (Coleção SBEM, vol. 2) p. 7-35.

STAREPRAVO, A. R. **Tempo de construir matemática**. Curitiba: Renascer, 1996. (Coleção em 4 volumes).

_____. **Matemática**. 4 volumes. São Paulo: Saraiva. 2003. (Coleção Curumim - 4 volumes).

_____. **A resolução de problemas de estrutura multiplicativa por crianças da 3ª série do ensino fundamental**. 2001. 187f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

_____. **Jogos para ensinar e aprender matemática**. Curitiba: Coração Brasil, 2006. 192p.

_____. ; MORO, M. L. F. As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. (orgs.). **Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola**. Curitiba: Editora da UFPR, 2005. p. 107-143.

TAXA, F. de O. S. **Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais**. 1996. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 1996.

_____. **Problemas multiplicativos e processo de abstração em crianças na 3ª série do Ensino Fundamental**. 2001. 220f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2002.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 15. ed. São Paulo: Cortez, 2007. 132 p. (Coleção temas básicos de pesquisa-ação)

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: RESH, R. e LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-74.

_____. **L'enfant, la mathématique, et la réalité: problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire**. 5e édition. Paris: Peter Lang, 1994. 218p

_____. **Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education**. ICME VI, Budapest, 1998. p. 2 -21.

VILA, A. ; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212p.

VILLAS BÔAS, M. C. **Construção da noção de número na Educação Infantil: Jogos como recurso metodológico**. 2007. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 2007.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 212p.

WHELLER, D. Imagem e pensamento geométrico. CIAEM - **Comptes Rendus de la 33e. Rencontre Internationale**. Pallanza, 1981. p. 351-353.

ZUNINO, D. L. **A matemática na escola: aqui e agora**. 2 ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 191p.

APÊNDICE 1

ENTREVISTA COM A PROFESSORA RESPONSÁVEL PELA TURMA

01/03/2007

Pergunta: Em linhas gerais como você trabalha com multiplicação e divisão com seus alunos de terceira série?

Resposta: Primeiro retomo as operações com um algarismo, de modo concreto por meio do material dourado. Então, mais tarde por Abril/Maio, eu passo para as operações com dois algarismos, também utilizando o material dourado, seguido de registros e técnicas, com o método longo.

Pergunta: Você sente que a turma esta preparada para trabalhar com dois ou mais algarismos nesta época?

Resposta: Varia conforme a turma. Sinto a dificuldade da turma no início, pois muitos alunos não chegam nulos, mas apenas com uma base, assim quando não estão preparados para este trabalho, estendo para frente. Retomo conceitos iniciais para então seguir com o trabalho de operações.

Pergunta: Qual sua expectativa em relação ao trabalho que será realizado em sua classe?

Resposta: São as melhores possíveis. A proposta apresentada é muito interessante, ainda mais diante a dificuldade de trabalhar em sala com jogos, devido ao número de alunos dentro de sala, da atenção que cada aluno requer. Muitos alunos chegam nulos, apresentando maior dificuldade, assim necessitam de maior atenção em seu desenvolvimento.

APÊNDICE 2

TERMO de CONSENTIMENTO para PARTICIPAÇÃO em PESQUISA (professora)

Prezada professora (nome da professora)

Terceira série A

(nome da escola)

Curitiba/PR

Conforme entendimentos verbais, e com a anuência da direção, formalizamos seu consentimento para a coleta de dados da pesquisa de doutorado - *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino* -, a ser realizada por Ana Ruth Starepravo, do Programa de Educação, Área Temática Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Educação da USP, sob a orientação de Lino de Macedo. A coleta de dados será realizada com a turma da terceira série A, ao longo do primeiro semestre deste ano, nas quartas e sextas-feiras, das 7h45min às 9h45min.

O objetivo da pesquisa consiste em investigar sobre o ensino e a aprendizagem das operações aritméticas de multiplicação e de divisão.

O consentimento para participação na pesquisa implica, ainda, nos seguintes compromissos:

- Permitir a realização das atividades propostas pela pesquisadora nos horários previstos;
- Estar presente na sala de aula durante as intervenções;
- Escrever um diário de observação das intervenções, conforme orientações dadas pela pesquisadora;
- Permitir que suas falas, suas manifestações e o conteúdo do diário que irá produzir nas intervenções sejam utilizados para os fins da pesquisa;
- Comunicar, com antecedência, a ocorrência de qualquer imprevisto, que impossibilite a realização da intervenção nas datas previstas.

Em contrapartida, nos comprometemos com:

- Apresentar a proposta de intervenção, bem como os objetivos da pesquisa, antes de iniciar a coleta de dados em sala de aula;
- Estar à disposição para esclarecimentos sobre o andamento da pesquisa, dados coletados e aspectos metodológicos da intervenção proposta;
- Comunicar, com antecedência, a ocorrência de qualquer imprevisto que impossibilite a presença da pesquisadora nas datas combinadas;
- Fornecer cópia das atividades propostas aos alunos;
- Fornecer uma declaração de participação na pesquisa bem como, ao término da mesma, um exemplar da tese correspondente para a escola;

Este “Termo de Consentimento” é lavrado em três vias: uma para a Escola, outra para a professora e uma terceira para a pesquisadora.

Curitiba, 07 de março de 2007.

Lino de Macedo
Orientador

Ana Ruth Starepravo
Pesquisadora

Diretora da escola

Professora da terceira série A

APÊNDICE 3

TERMO de CONSENTIMENTO para PARTICIPAÇÃO em PESQUISA (alunos)

Senhores pais,

No decorrer do primeiro semestre deste ano, a turma de terceira série A, na qual seu filho(a) está matriculado será submetida a um trabalho com a professora Ana Ruth Starepravo na área de matemática. Ela fará uma intervenção didática para o ensino de multiplicação, divisão e construção da tabuada, atuando com a turma todas as quartas e sextas das 7h45min às 9h45min. Esta intervenção, realizada com o consentimento da direção e coordenação pedagógica da escola será acompanhada pela professora regente da turma e contemplará os conteúdos previstos para a série.

A professora Ana Ruth Starepravo é Pedagoga e Mestre em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR) e está cursando o Doutorado em Educação na Universidade de São Paulo (USP). Trabalha com a formação de professores na área de matemática, tendo desenvolvido, nos últimos anos, vários cursos e oficinas para os professores da rede Municipal de Ensino de Curitiba. É também autora de livros didáticos de matemática.

Sua intervenção tem como objetivo promover a aprendizagem das operações de multiplicação e divisão, bem como da tabuada partindo das idéias que as próprias crianças já possuem a respeito destas operações. Nestas aulas os alunos trabalharão com desafios e jogos pedagógicos envolvendo multiplicação e divisão, farão os registros dos seus procedimentos de solução e discutirão sobre diferentes formas de se realizar cálculos e resolver problemas.

Durante esta intervenção, será realizada a coleta de dados para a pesquisa de Doutorado da professora Ana Ruth, intitulada: *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino* - sob a Orientação do Professor Doutor Lino de Macedo, do Instituto de Psicologia da USP. O objetivo consiste em estudar uma proposta de ensino de matemática.

O consentimento para participação na pesquisa significa que os alunos participantes e seus pais (ou responsáveis) permitem, através deste documento, que suas falas, suas manifestações e os materiais que venham a produzir nas aulas sejam utilizados para os fins da pesquisa. Acrescentamos, ainda, que todas as intervenções serão filmadas.

Nós, pesquisadores, comprometemo-nos com os seguintes cuidados éticos:

- Não serão divulgados nomes ou outras informações que permitam identificar os participantes;
- A participação na pesquisa é voluntária e, caso não deseje a participação, nenhum dado referente ao seu filho será utilizado;
- Os participantes, quando solicitarem, serão informados do andamento da pesquisa e dos seus resultados (telefone da Secretaria da escola: 3356-2859 ou da residência da pesquisadora 3362 3370);
- As filmagens serão utilizadas somente para a produção de relatórios escritos sobre o desenvolvimento das aulas e em contextos de divulgação da pesquisa;
- Após concluída a pesquisa, será doado um exemplar da tese correspondente para a escola, que ficará à disposição dos participantes e da comunidade escolar.

Este “Termo de Consentimento” possui três vias: uma para a Escola, outra para cada aluno e seu responsável e uma terceira para a pesquisadora.

Diante do exposto, e afirmando que estamos esclarecidos sobre o conteúdo deste documento, confirmamos a nossa participação na pesquisa descrita acima.

Curitiba, 01 de março de 2007.

Prof^a Ana Ruth Starepravo
Pesquisadora

Prof. Dr. Lino de Macedo
Orientador

(nome)
Diretora da Escola

Nome do aluno: _____

Nome do Responsável: _____

Assinatura do responsável: _____

APÊNDICE 4

DISCUSSÃO SOBRE O SIGNIFICADO DA PALAVRA RESTO

AULA 4 (21/03)

Registro o nome do jogo na lousa (JOGO DOS RESTOS), pergunto se alguém sabe o que significa a palavra resto. Várias crianças pedem para falar e escolho o JOV. Ele diz que é **“quando sobra um pinguinho”**. Peço que explique melhor ou que nos dê um exemplo, **“pinguinho de que”**? Ele não responde, faço a pergunta para a turma toda.

MED: **podia assim... eu podia ter... eu ia no mercado, comprava...** OUTRA CRIANÇA: **feijão**
 MED: **só o feijão... daí sobrava resto... sobrava 50 reais... sobrava resto!** (algumas crianças estavam conversando então peço que ele repita o que disse e que os demais ouçam a idéia dele)
 MED: **é que é tipo assim, eu vou lá no mercado e compro um feijão, daí sobra 5 reais, sobra 10...**
 P: **ele ta falando de sobrar o que gente?** CRIANÇAS: **dinheiro** P: **eu posso ir comprar alguma coisa no mercado e sobrar dinheiro?** CRIANÇAS: **pode** P: **então fico com o resto do dinheiro**
 GAE: **se alguma coisa custa um real e você dá 50...** P: **vai sobrar o resto** GAE: **quarenta e nove.**

Peço ao PEP que fale (estava com o dedo levantado desde que propus a pergunta sobre resto). Explica com outro exemplo de mercado – tendo 100 reais e a compra custando 50, paga e fica com o resto do dinheiro. Pergunto novamente sobre a idéia do JOV. Algumas crianças falam que pode sobrar um pingo de “refri”. Exploro a idéia. SAB ainda mantém a mão levantada e diz que quando comemos pode sobrar resto no prato (comida).

Durante esta discussão PEP diz que na divisão sobra resto, nem todos ouvem, pergunto o que ele havia dito, mas ele não lembra. Pergunto qual a conta que a gente faz que às vezes sobra resto. Algumas crianças dizem **“divisão”**. Registro na lousa a palavra DIVISÃO enquanto falo: **“hoje nós vamos trabalhar com a... adição, com a multiplicação, mas nós vamos trabalhar também com a divisão”**. Retomo com as crianças os nomes das operações perguntando:

P: **quando usamos esse sinal de mais (aponto na lousa) qual é o nome da operação que fazemos?**
 CRIANÇAS: **adição** P: **quando a gente usa vezes? (aponto o sinal de vezes registrado na lousa)**
 CRIANÇAS: **vezes** P: **quem sabe como é o nome da conta de vezes? Vou por aqui (começo registrar MUL)** CRIANÇAS: **multiplicação...**

Mostro os materiais que serão usados no jogo e explico as regras. Começo explicando que devem abrir o saquinho de feijão e colocá-los no pote. Digo que devem colocar os 6 pratinhos no centro da mesa (ressaltando que os pratinhos não devem ser distribuídos entre os jogadores). Explico que todos devem pegar um punhado de feijão e depois que decidirem quem será o primeiro jogador este jogará o dado para ver em quantos pratinhos vai distribuir seus feijões. Lanço o dado sobre uma mesa e pego os pratinhos correspondentes (5). Pego um punhadinho de feijão e digo que vou distribuí-los nos 5 pratinhos. Ressalto que todos os pratinhos devem ter a mesma quantidade de feijões. Começo colocando 2 em cada um e digo que sobraram muitos feijões. Pergunto o que faço com eles e uma aluna diz: **“continua dividindo”**. Digo que vou continuar e pergunto se eles sabem por que coloquei de 2 em 2 e não de 1 em 1. As crianças disseram que ia mais rápido. Falo que vou, para ir mais rápido ainda, colocar de 3 em 3. Faço isso e digo que sobrou só um pouquinho e as crianças sugerem que coloque de 2 em 2 novamente. Faço isso e digo que sobraram 2 feijões na minha mão. Pergunto se posso distribuí-los e as crianças dizem que não. PEP diz: **“esse vai ser o resto”**.

APÊNDICE 5

TERMO de COMPROMISSO para PARTICIPAÇÃO em PESQUISA (estagiárias)

Juliane Diniz Modesto Fontes
 Manoella Mazeto De Mello
 Giovana Teixeira Ribinski
 Alunas do Curso de Pedagogia do Centro Universitário Positivo

Conforme entendimentos verbais, e com a anuência da coordenadora de estágios, Rossana Ghilardi Cardoso, formalizamos o compromisso para a participação na pesquisa de doutorado - *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino* - a ser realizada por Ana Ruth Starepravo, do Programa de Educação, Área Temática Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Educação da USP, sob a orientação de Lino de Macedo. No cumprimento do estágio obrigatório do 4º ano do curso de Pedagogia, as referidas alunas participarão - na qualidade de assistentes de pesquisa - da coleta de dados que se realizará ao longo do primeiro semestre deste ano, as quartas e sextas-feiras, das 7h45min às 9h45min.

A participação na pesquisa implica nos seguintes compromissos por parte das estagiárias:

- Presença na escola nos horários previstos;
- Realização das filmagens de cada sessão
- Produção de um relatório de observação de cada sessão;
- Transcrição do vídeo de cada sessão;
- A comunicação, com antecedência, da ocorrência de qualquer imprevisto, que impossibilite a presença de uma ou de todas as estagiárias nas datas previstas;

Em contrapartida, nos comprometemos com:

- Fornecimento do roteiro de filmagem para cada sessão;
- Fornecimento de uma cópia do projeto de pesquisa, bem como das atividades a ser trabalhadas em cada sessão;
- A realização de orientações para a elaboração dos relatórios e para as transcrições de vídeo;
- Fornecimento de uma declaração de participação na pesquisa;
- Fornecimento, ao término da pesquisa, de um exemplar da tese correspondente para a faculdade;
- Orientação, se isso for do interesse das estagiárias, na elaboração de artigos sobre a pesquisa.

Este “Termo de Compromisso” é lavrado em três vias: uma para a Faculdade, outra para as estagiárias e uma terceira para a pesquisadora.

Curitiba, 07 de março de 2007.

Ana Ruth Starepravo
 Pesquisadora

Lino de Macedo
 Orientador

Rossana Ghilardi Cardoso
 Professora coordenadora de estágio
 Pedagogia - UnicenP

Giovana Teixeira Ribinski
 Aluna do curso de Pedagogia
 UnicenP

Juliane Diniz Modesto Fontes
 Aluna do curso de Pedagogia
 UnicenP

Manoella Mazeto De Mello
 Aluna do curso de Pedagogia
 UnicenP

APÊNDICE 6
ROTEIRO DE FILMAGEM

AULA 15

30 /05/11

COMPOSIÇÃO DE RETÂNGULOS FAZENDO AGRUPAMENTOS REPETIDOS COM DETERMINADOS NÚMEROS TOTAIS DE QUADRADINHOS E POSTERIOR REGISTRO NO PAPEL QUADRICULADO

Filmar as duplas montando os retângulos. Procurar captar as conversas.

Filmar algumas duplas fazendo os registros das multiplicações e divisões correspondentes aos retângulos.

Filmar algumas duplas comparando seus registros (captar o que falam) –pelo menos uma dupla diferente para cada problema.

Filmar as crianças que forem à lousa mostrar os registros correspondentes aos retângulos formados.

APÊNDICE 7**ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO PARA ESTAGIÁRIA**

AULA 15

30 /05/11

COMPOSIÇÃO DE RETÂNGULOS FAZENDO AGRUPAMENTOS REPETIDOS COM DETERMINADOS NÚMEROS TOTAIS DE QUADRADINHOS E POSTERIOR REGISTRO NO PAPEL QUADRICULADO

1. Como as crianças fazem os agrupamentos dos 12 quadradinhos? As duplas conseguem formar mais de um retângulo com os 12 quadradinhos? Que tipo de estratégias usam?
2. As duplas comparam os registros dos retângulos com aqueles feitos pelas outras duplas? Como fazem essa comparação?
3. Como é a participação das crianças nas discussões sobre os diferentes retângulos formados com 12 quadradinhos? Elas identificam as multiplicações correspondentes? Que idéias levantam sobre a divisão?
4. Essa discussão ajuda as duplas na montagem dos retângulos com outras quantidades de quadradinhos?
5. As crianças conseguem encontrar os quadrados dentro da tabela da tabuada?
6. Após a discussão coletiva sobre as representações matemáticas dos retângulos formados (multiplicação e divisão), as crianças fazem estes registros para os novos retângulos formados?

APÊNDICE 8

DIÁRIO DA PESQUISADORA 6

30/03/2007

Problemas a partir do Jogo dos Restos

Sala de aula

Número de alunos: 28

Espaço físico: Carteiras em U

1ª PARTE: Resolver os problemas apresentados na folha: PENSANDO SOBRE O JOGO DOS RESTOS.

Início a sessão falando sobre a estratégia de contagem usada pelas crianças no jogo dos Restos (realizado na aula anterior). Registro na lousa o desenho de uma jogada (4 pratinhos com 6 feijões em cada e 4 feijões fora dos pratinhos) e mostro a contagem um a um, afirmando que foi usada por quase todos os alunos durante toda a partida. Afirmando que é possível contar desta forma, mas que existem modos mais rápidos de contagem.

PEP sugere que os feijões sejam contados de 6 em 6. Uma aluna sugere que sejam contados de 2 em 2. Pergunto quem sugeriu esta forma de contagem e GAE diz que foi ele. Faço a contagem de 2 em 2 no desenho da lousa, digo que vai mais rápido, mais alguns alunos falam para contar de 6 em 6. Digo que de 6 em 6 seria ainda mais rápido.

Passo a palavra para MED, que já estava há bastante tempo com a mão levantada. Ele aponta o registro na lousa e diz: **dava para colocar mais um feijão em cada pratinho**. Outras crianças concordam. Percebo que o resto por mim desenhado não seria permitido no jogo e apago um dos feijões, dizendo que eles estavam certos, que não poderiam sobrar 4 feijões. Pergunto aos demais alunos por que não poderiam sobrar 4 feijões e PEP responde: **é porque só tem 4 pratinhos**. Me dirijo diretamente a JOV e peço que ele explique o que PEP disse. Apago um dos feijões, deixando 3 fora dos pratinhos.

Passo a palavra novamente para o PEP que estava com a mão levantada há bastante tempo. Ele diz para olhar quanto tem no primeiro pratinho e contar de 6 em 6. Diz: **“faz 6 mais 6, mais 6...”**

Comento sobre a distribuição, dizendo que algumas crianças não colocaram o mesmo tanto de feijões em cada pratinho e que nesse caso não seria possível contar um a um só os feijões do primeiro pratinho. Digo que se a distribuição foi feita corretamente é possível então contar só os feijões do primeiro pratinho, então conto os feijões do primeiro pratinho (um a um) e pergunto às crianças quantos feijões têm no segundo (respondem 6) no terceiro (respondem 6) e no quarto (respondem 6). A cada resposta dos alunos registro um número 6 abaixo do desenho dos pratinhos. Pergunto quantos sobraram e as crianças respondem 3 (registro o número 3 abaixo do resto). Digo que agora não preciso mais contar os feijões um a um porque posso olhar para os números. Pergunto quem tem uma idéia de como fazer essa contagem a partir dos números registrados. Vários alunos estão com as mãos levantadas. Passo a palavra para SAB e ela sugere: **“contar de pratinho em pratinho... dois pratinhos juntos, depois dois pratinhos...”**

Mostro a idéia da SAB na lousa fazendo duas linhas ligando os dois primeiros números 6 (registrados abaixo dos dois primeiros pratinhos) e outras linhas juntando os outros dois números 6.

Passo a palavra para GAE e ele diz que é para explicar melhor porque BRA (aluna nova) não estava presente no dia do jogo. Ele diz que ela não estava entendendo. Concorro, agradeço e digo que lhe explicarei em seguida.

Passo a palavra para a LEA (estava com a mão levantada desde o início da discussão) ela diz: **“dava para fazer 4 vezes 6”**. Repito a idéia da LEA registrando na lousa: **4 vezes 6 feijões**. Pergunto aos alunos porque é possível fazer isso. PEP diz: **“porque tem 4... e 6 em cada pratinho”**. Repito: **“porque tem 4 pratinhos** (aponto no desenho) **cada um com 6** (aponto no desenho), **olha, tem um 6, outro 6, outro 6...** (aponto os registros) **quantas vezes a gente repetiu o número 6?”** Vários alunos respondem: **“quatro”**. Aponto o registro da frase “4 vezes 6 feijões” e pergunto qual o outro jeito de escrever (leio o registro circulando a palavra **vezes**). A LEA fala **“xis”** fazendo o formato de um “x” com os dedos. Varias crianças também falam **“xis”**. Faço o registro na lousa: **4 x 6** dizendo: **“então eu vou tirar esta palavra VEZES e no lugar colocar um x”**.

Digo que entregarei uma folha e aviso que leremos juntos o que há nela. Explico que preparei 5 questões sobre o jogo, dizendo que pensar agora sobre o jogo pode nos ajudar a jogar melhor da próxima vez. Digo que jogamos apenas duas vezes e que da primeira vez muitos alunos não estavam jogando corretamente, pois não estavam considerando o resto na contagem total dos feijões.

Peço aos alunos que leiam em voz alta o título (PENSANDO SOBRE O JOGO DOS RESTOS). Digo que iremos pensar sobre o jogo, discutir algumas questões sobre o jogo para depois (outro dia) jogar novamente e tentar jogar melhor. Peço ao AND que leia a primeira questão e que os demais acompanhem com os olhos. Depois que ele lê a primeira parte (*observe como LUJ colocou seus feijões nos pratinhos*). Peço para VAM continuar a leitura e ela coloca as mãos sobre o rosto dizendo: **“ai, ai, ai...”** Peço que os demais acompanhem com os olhos. Ela apresenta dificuldade para ler (dificuldade na decodificação). Os demais alunos acompanham sussurrando e o fazem num ritmo mais rápido. Digo que há vários alunos lendo em voz baixa e que atrapalha a leitura da VAM, então sugiro que façamos uma leitura coletiva, todos em voz alta, acompanhando a colega. Nessa leitura, alguns alunos mexem a boca sem acompanhar o texto.

Peço às crianças que expliquem o que acabaram de ler, que expliquem o que foi pedido nesta questão. Algumas crianças levantam as mãos. Passo a palavra para a LEA e peço que os demais ouçam o que ela vai falar. Ela diz: **“ele tá perguntando como é que pode contar essa conta...”** (aponta o desenho na folha)

Fazemos novamente a leitura da segunda parte do enunciado (**para descobrir o total de grãos ele contou os feijões de cada pratinho, um a um. Amanda que estava jogando com ele, só contava um a um os feijões do primeiro pratinho**). Peço que as crianças parem aí. Durante esta leitura AMA estava com a folha virada (de lado) sobre a carteira e não acompanhava a leitura coletiva, vejo e peço que ela vire a folha para acompanhar os colegas. Ela vira a folha, deixando o verso para cima e fica mexendo a boca (como se estivesse lendo).

Sugiro que façamos a leitura da questão **B**, para que possam responder o primeiro problema. Peço ao RIS que faça a leitura em voz alta e sugiro que as crianças marquem com o dedo o que está sendo lido para acompanhar com os olhos. Ele lê bem baixo, repito em voz alta e pergunto ao GAE o que estava sendo perguntado nesta questão. Ele olha para a folha e diz: **“tá perguntando... quantos feijões...é...”** olha para o colega ao lado, que ri e balança a cabeça. Pergunto à classe toda: **“tá perguntando quantos feijões?”** Algumas crianças dizem **não**. Sugiro ao GAE que leia de novo. Ele parece não saber onde está a pergunta na folha. Digo que é a letra **B**. FRA, que está ao seu lado, aponta a pergunta na folha do colega. Ele lê baixo, olha para mim e diz: **“porque ela...”**

porque ela não tinha...” FRA coloca as mãos no rosto, ri e balança a cabeça. Digo que não quero a resposta, só que ele explique aos colegas a pergunta. Ele não responde, refaço a pergunta à classe toda. O GAE fala alto: **“tá perguntando se ela distribuiu os feijões em cada pratinho...”**. Pergunto aos demais se é mesmo isso que está perguntando. Algumas crianças respondem que não. Digo: **“está perguntando por que ela não...”** (LEA diz **“distribuiu”**) continuo: **“colocou todos os feijões nos pratinhos”**.

Digo que devem responder as duas perguntas do primeiro problema, ressaltando que se não entenderam devem ler novamente. Várias crianças me chamam para perguntar o que é para fazer e várias crianças só começam a responder depois da intervenção individual. Algumas crianças ficam olhando para a folha, para os colegas e não respondem às questões, AMA é uma dessas crianças, parece que ela não tem a mínima idéia do que é para ser feito. FAB e AALU também não fazem, ficam conversando. Ando entre as carteiras, sugiro que leiam novamente as questões e faço perguntas sobre o que acabaram de ler. Por exemplo, depois que VAM lê a introdução e a questão a:

P: como o LUJ contou?

VAM: ele contou em um em um

P: ele contou de um em um, todos. E a AMA?

VAM: ela contou o primeiro pratinho.

P: só o primeiro. Então está perguntando como ela vai descobrir o total se ela contou só o primeiro.

VAM: seis.

P: o que ela pode fazer se ela sabe que aqui tem 6?

VAM: seis em seis.

P: isso, então explica isso aqui. Ela já sabe que cada um tem 6 então explica o que ela tem que fazer.

MEB me chama até sua carteira para mostrar a resposta da questão a. Ela escreveu: *“fazendo conta”*. Pergunto se poderia ser qualquer conta, se qualquer uma poderia ajudar. Aponto o desenho do primeiro pratinho e pergunto quantos feijões tem ali. Ela diz que tem 6. Pergunto então quantas vezes está repetindo 6. Ela diz que são 5 vezes o 6. Pergunto se é só isso ou se tem mais alguma coisa para contar. Ela aponta os feijões fora dos pratinhos (resto). Digo que ela tem que explicar o que vai fazer depois da conta de vezes. Este mesmo tipo de intervenção é feita individualmente com vários alunos.

RESPOSTAS PROBLEMA 1 – questão a.

CONTEÚDO DA RESPOSTA	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Referindo-se à realização de uma contagem de 6 em 6.	GAG, BRA, FAB, MED, VAM, DES, AND, JUB, FLE, LEI.	MED mencionou também a possibilidade da contagem de 2 em 2
“Somar o número de feijões vezes o número de pratinhos”	EAS	
“AMA contou só o primeiro pratinho para saber quantos grãos tinha em cada pratinho para somar todos”	PEP	
“juntar os 5 pratinhos e descobrir que tem 6 feijões em cada pratinho e juntar mais os feijões que sobraram”.	LOS	
Contagem só do primeiro porque sabe que nos outros tem a mesma quantidade	LUJ, FRA e GAF.	FRA menciona a quantidade de feijões de um prato (6), mas nenhum deles escreveu como ela poderia proceder para descobrir o total.

Contagem de 6 em 6 com o registro da respectiva adição: $6+6+6+6+6$ (sem resultado e sem menção ao resto)	AMA, CAS, RAR	RAR registra um 6 a menos e acrescenta também um registro de multiplicação: 4 vezes 6.
Contagem de 6 em 6 com o registro da respectiva adição: $6+6+6+6+6 = 24$ e sobra 3 (com resultado e com menção ao resto)	RIS	
“porque cada um tem o mesmo tanto. 5×6 ”.	GAE	
Menção ao uso da multiplicação com registro da sentença (com uso da palavra “vezes” ou do sinal $\times$)	SAB, LEA, HEI, ANC, MEB.	<p>SAB escreve: “ela pode contar em 5 vezes 6.” LEA escreve: “ela pode montar uma conta de vezes assim 5×6.” HEI escreve: “ela pode fazer uma conta de vezes que fica mais melhor fazer de 0 e 6 repetido de 5 vezes.”</p> <p>Somente ANC e MEB mencionaram a contagem do resto. Ambas também registraram duas multiplicações, mas a Ana considera 4 pratinhos.</p> <p>MEB escreve: “fazendo conta de vezes. Ex: 5×6, 6×5 e depois contar o resto”</p> <p>ANC: “AMA poderia contar 4×6 ou 6×4 então ela contaria o grão que sobraram junto com os grãos dos pratinhos”</p>

Observei em várias situações que as crianças que já sugerem o uso da multiplicação não diferenciam 5×6 de 6×5 , ainda que no desenho a configuração seja 5×6 . É até mais comum que sugiram o registro de 6×5 . (destacar quando isso ocorre mediante outros problemas e discutir sobre esta questão com o LINO)

RESPOSTAS PROBLEMA 2 – questão b

A maioria das crianças só respondeu a questão b depois que eu explicava individualmente o que era pedido. LUJ me chama e pergunta o que é para fazer na letra **B**. Respondo com outra pergunta:

P: **o que tá perguntando aí LUJ?**

LUJ: (Lê a pergunta para mim) **de acordo com as regras do jogo, explique porque ele não distribuiu todos os feijões nos pratinhos.**

P: **porque ele não distribuiu todos os feijões nos pratinhos?** (LUJ aponta no desenho os feijões que ficaram fora dos pratinhos) **Olha lá por que que tem aqueles lá sobrando? Por que ele não distribuiu isso também?**

LUJ: **porque não dava.**

P: **e não dava por que?**

LUJ: **porque ó...** (aponta cada pratinho, contando-os) **tem 6 pratos.**

P: **e quantos feijões?**

LUJ: **três.**

P: **então explica isso.**

CONTEÚDO DA RESPOSTA	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Mencionando que haviam 5 pratinhos 3 feijões	JOV, LEI, AND, LOS, CAS, RAR, SAB, FAB e VAM.	LOS não escreve feijões. Registra: “porque tem três e cicos pratinhos”. FAB e VAM: Por que ele não colocou os feijões nos pratinhos por que os feijões so não tinham cinco pratinhos so tinham três feijões”
Mencionando que havia 5 pratinhos 3 feijões e que não era possível dividir ou realizar a distribuição novamente.	ALU, LUJ, GAG, DES, JUB, HEI.	
Mencionando somente a quantidade de feijões que sobraram (3) e a impossibilidade de fazer uma nova distribuição.	LEA	
Mencionando a impossibilidade de colocar mais um feijão nos pratinhos, sem mencionar o número de feijões que sobraram ou a quantidade de pratinhos.	GAF, AMA, MED.	GAF escreve que “não cabia mais um feijão em cada pratinho.” AMA escreveu apenas “não deu pracoloca no pratinho”. MED escreveu que “não dava para distribuir mais feijões em cada pratinho”
Referindo-se apenas à quantidade de pratinhos	FLE	“porque ele sotem sinco pratinhos”
Mencionando que seria contra as regras do jogo, sem explicar porque.	BRA	
Mencionando a necessidade de ter a mesma quantidade de feijões nos pratinhos	PEP e EAS	PEP: “não, porque tinha que ter a mesma contidade em cada pratinho” EAS: “não por que tem que ter o mesmo número igual de resto de pratinhos”.
Respostas de conteúdo muito confuso, formulação escrita comprometendo o significado	FAB e VAM.	
Mencionando que poderiam faltar ou sobrar feijões	ANC	“porque poderia tanto sobrar como faltar feijões nos pratinhos.”

Depois de aproximadamente 13 minutos circulando entre os alunos e fazendo intervenções individuais, peço a atenção de todos para pensarmos juntos sobre a questão **B**. Minha intenção é chamar a atenção das crianças para a coerência da resposta em relação à pergunta. Na discussão oral, várias crianças explicam que ele tinha 3 feijões e 5 pratinhos e que não daria para colocar mais um feijão em cada pratinho, mas têm dificuldade de registrar isso. Perguntam para mim o que é para escrever na folha.

Problema 2: muitas crianças começaram a fazer sem que tivéssemos lido juntos. Não leram o enunciado e já foram pintando o que achavam que deveria ser pintado. Alguns pintaram todos os retângulos, outros pintaram os três últimos. É possível perceber que a maioria não conseguiu relacionar a distribuição mostrada no desenho com as sentenças matemáticas correspondentes. Sugiro que façamos uma leitura coletiva do enunciado. Lemos a primeira parte (*Na sua vez de jogar, MEB colocou seus feijões nos pratinhos e não sobrou nenhum*). Pergunto se

isso aconteceu com algum aluno durante o jogo (de não ficar com resto). Algumas crianças levantam as mãos, LOS afirma que isso ocorreu duas vezes com ela.

Digo para as crianças que a distribuição feita por MEB foi mostrada primeiro por meio de desenho (aponto na lousa o desenho – o mesmo que as crianças têm em suas folhas). Depois aponto os retângulos com as sentenças matemáticas e pergunto se aquilo também são desenhos. As crianças dizem que não. Dirijo a mesma pergunta à DES e ela diz que é **“uma continha”**. Digo às crianças que quando registramos uma continha estamos usando linguagem matemática.

Percebe-se que as crianças não estavam seguras quanto às representações dos desenhos por meio de adições e multiplicações.

Chamo a atenção das crianças para as operações matemáticas apresentadas nos retângulos, perguntando quais são elas. As crianças falam que são de mais e de vezes (digo adição e multiplicação). Registro na lousa o sinal de divisão e pergunto se as crianças sabem de que operação é aquele sinal. Respondem em coro **“dividido”**. Pergunto como poderíamos fazer um registro de divisão para a distribuição dos feijões nos pratinhos mostrada no desenho. PEP diz: **“divididos por 4”**. Pergunto o que foi dividido por quatro. Ele responde que foram os pratinhos. Pergunto se foram os pratinhos que dividimos por quatro, se alguém tem outra idéia. MED diz que foram os feijões. Digo então que poderíamos fazer uma sentença de divisão com os feijões. Explico que para fazer um registro de divisão teríamos que pensar em quantos feijões tínhamos ao todo. Pergunto quantos feijões tinha ao todo, quantos foram pegos pelo jogador. Ninguém responde, peço que olhem na lousa para dizer quantos feijões tinha ao todo. CAS diz: **“vinte e quatro”**. Repito o que ela disse. Pergunto para a turma toda quantos eram. Uma criança diz **vinte e sete** e outra diz **vinte e seis**. Pergunto para a FAB como ela contou e ela diz: **eu contei de dois em dois**. Pergunto se realmente vai dar 26. Aponto o primeiro pratinho e pergunto quantos têm ali. Eles respondem **quatro**. Aponto o segundo pratinho dizendo: **“mais esses aqui...”** as crianças respondem **“oito”**. Aponto o terceiro pratinho e algumas crianças dizem **“doze”**. Uma criança diz **“quatorze”**. Aponto o pratinho seguinte e alguns dizem 16, depois o seguinte 20 e o último 24. Digo então que ela tinha 24 feijões. Pergunto ao LUJ o que MEB fez com os 24 feijões que ela tinha. Ele fica olhando para o desenho na lousa, coça a cabeça e não responde. Pergunto se ela ficou com todos os feijões nas mãos. LUJ faz um sinal de negação com o dedo. FAB diz: **“dividiu”** depois complementa **“de um em um”**. Pergunto: **“mas ela dividiu aonde... ela colocou aonde?”**. Algumas crianças respondem: **“nos pratinhos”**. Pergunto: **“em quantos pratinhos ela dividiu?”** As crianças respondem em coro: **“seis”**. Eu digo: **“então da prá gente fazer aqui 24 (registro o número na lousa) divididos (registro o sinal de divisão) por quanto?”** As crianças respondem: **“seis”**. Coloco o sinal de igualdade e pergunto: **“quando ela fez 24 dividido por 6, ficou quanto em cada pratinho?”** Algumas crianças respondem **quatro** (alguém fala **três**). Pergunto se são 4 ou 3 e registro o resultado 4.

É possível perceber que durante toda esta discussão as crianças estão um pouco dispersas, algumas parecem cansadas, mexem-se bastante nas carteiras e conversam bastante entre si. Quando termino de colocar o registro da divisão na lousa VAM pergunta se é para pintar o último retângulo ($4+4+4+4+4+4$). Pergunto para ela quantos 4 há naquele retângulo. Ela conta e diz 6. Pergunto se tem a mesma coisa que no desenho e ela diz que não. Pergunto quantos quatros tem em cima (no desenho) ela diz 6. Pergunto o que ela acha, se deve pintar ou não. Ela diz que sim. Pergunto por que e ela diz que é a mesma coisa.

Peço que as crianças virem a folha para resolver o próximo número 3. Quando viram, GAE fala que tem um erro na folha. Ele diz que depois do número 3 veio o 5 e o 6, que estava faltando o número 4. Peço que as crianças façam a correção da numeração.

Problema 3: ninguém conseguiu fazer antes da leitura coletiva. Depois dessa leitura perguntei se alguém sabia o que era uma sentença matemática. LEA disse: **“conta”**. Registrei na lousa o desenho apresentado no problema 3, dizendo: **“nós temos aqui 3 pratinhos, cada pratinho tem quantos feijões?”** As crianças responderam em coro: **“cinco”**. Disse então que eles iam escrever as contas que mostravam a arrumação daqueles feijões. Disse que poderia ser de mais, de vezes e perguntei qual mais (outra conta) dava para fazer. MEB disse: **“de dividir”**. Eu disse às crianças que poderiam fazer em duplas para que um ajudasse o outro.

As crianças tiveram muita dificuldade para fazer as representações pedidas. Algumas queriam fazer contas de menos (mas não sabiam explicar porque). Fiz várias intervenções individuais, perguntando às crianças quantos feijões havia em cada pratinho (apontando cada um) e perguntando que número poderia ser registrado para

indicar a quantidade de cada um. Depois perguntava que operação poderia ser feita com aqueles números para descobrir a quantidade total de feijões. Depois que registravam a adição ($5+5+5$) perguntava quantos grupo de 5 havia ali, questionando-as sobre a possibilidade de fazer um registro de multiplicação.

TIPO DE REPRESENTAÇÃO	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Deixaram em branco	GAE e RIS.	
Registro do número de feijões de cada pratinho e total (sem indicar operação feita)		
Adição $5 + 5 + 5 = 15$ (sem armar a conta)	FRA, ANC, HEI, ALU, LEA, BRA, MEB, GAG., EAS e DES.	HEI e LEA colocaram o sinal de =, mas não registraram o resultado. Eduardo não colocou sinal = nem o resultado.
Adição $5 + 5 + 5$ (em conta armada com o resultado)	LUJ, RAR, CAS, AMA e LOS.	
Multiplicação $3 \times 5 = 15$ (sem armar a conta)	LUJ, RAR, ANC, HEI, LEA, MEB, GAG, JOV, CAS, FLE, JUB, PEP, EAS e DES.	HEI, LEA, PEP, EAS e JOV colocaram o sinal de =, mas não registraram o resultado
Multiplicação $5 \times 3 = 15$ (sem armar a conta)	FRA, GAF, AMA e MED.	
$5 \times 5 \times 5 = 15$	JUB.	
Multiplicação $5 \times 3 = 15$ (em "conta armada")	FLE, LEI, AND, VAM.	
Divisão $15 : 3 = 5$	FRA, ANC, HEI, LEA e MEB.	HEI e LEA colocaram o sinal de =, mas não registraram o resultado
Divisão $5 : 3 = 1$ resto 2 (em "conta armada")	FAB, LEI., AND, VAM e LOS.	
Divisão $5 : 3 = 3$ resto 15 (em "conta armada")	AMA	
Divisão $3 : 5 = 15$ resto 2 (em "conta armada")	RAR, CAS	
Registro da quantidade de feijões em cada pratinho, sem indicação de nenhuma operação	SAB	Colocou 5 abaixo de cada pratinho e 15 (total) ao lado.

Problema 4:

Como os problemas foram apresentados todos de uma vez (na mesma folha), enquanto algumas crianças ainda estavam resolvendo o problema 3, outras já começaram a resolver o problema 4 e levantava-se do lugar para perguntar o que era para fazer. Expliquei que no problema 3 eu apresentei um desenho e eles tinham que registrar as sentenças matemáticas correspondentes e que no problema 4 era o contrário, eu apresentava a sentença matemática (adição e multiplicação) que correspondia a uma distribuição de feijões nos pratinhos e eles deveriam mostrar estas distribuições por meio de desenhos. Enquanto estavam resolvendo este problema circulei entre os alunos fazendo intervenções individuais, perguntando o que significavam os números e os sinais matemáticos (+ ou x) em relação ao jogo. Algumas crianças perguntaram se era para colocar o resultado das contas.

Somente duas crianças não fizeram essa questão. Nas tabelas vemos as diferentes respostas apresentadas pelos alunos para as questões A e B:

QUESTÃO A: 3 + 3 + 3 + 3 + 3

TIPO DE REPRESENTAÇÃO	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Deixaram em branco	GAF e GAG.	
Desenho de 6 pratinhos, cada um com 3 feijões	FLE, MEB, LOS, AMA, SAB, ALU, FAB, LEI, VAM, AND, JUB, JOV, LUJ, LEA, HEI, MED, CAS, RAR, ANC, GAE, FRA.	GAE tinha feito 14 pratinhos com 3 feijões em cada. Apagou deixando só 6 (intervenção da profª ?).
Desenho de 3 pratinhos, cada um com 6 feijões	EAS, PEP, DES.	
Desenho de 4 pratinhos, cada um com 6 feijões	RIS	
Desenho de 5 pratinhos, cada um com 6 feijões	BRA	Aluna nova, não participou do jogo. Ao lado do desenho registrou a adição correspondente e apagou: $6+6+6+6+6=$

QUESTÃO B: 4 x 5

TIPO DE REPRESENTAÇÃO	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Deixaram em branco	GAF, GAE, FLE, MEB, LOS, SAB, ALU.	
Desenho de 4 pratinhos, cada um com 5 feijões	FAB, JUB, JOV, LUJ, LEA, HEI, CAS, RAR, ANC, RAR, GAE, FRA, EAS, DES, PEP, RIS, BRA.	FAB tinha apenas registrado a resposta: “ela tinha 40 grãos”. Quando me mostrou perguntei como ela descobriu que eram 40. Disse que ela precisava mostrar como descobriu. Ela apagou a resposta, fez o desenho e registrou nova resposta: “Julia tinha ao todo 43 feijões”.
Desenho de 5 pratinhos, cada um com 4 feijões	AND, VAM, MED, LEI	
Desenho de 5 pratinhos vazios	AMA	

Problema 5:

Não fizemos a leitura coletiva deste problema. Somente algumas crianças resolveram este problema. Algumas perguntaram se era para somar tudo.

Em uma de suas jogadas, JUB usou 5 pratinhos, colocou 8 grãos em cada um e sobraram 3 grãos. Quantos grãos ela tinha ao todo?

TIPO DE SOLUÇÃO	ALUNOS	OBSERVAÇÕES
Deixaram em branco	MEB, LOS, SAB, ALU, BRA, RAR, ANC, HEI, AMA, CAS e FLE	CAS fez o desenho de 5 pratinhos e depois apagou. FLE fez um registro (5x10) e depois apagou.

Desenho de 5 pratinhos com 8 feijões cada.	VAM, AND, FAB, LEI.	Nenhum deles registrou uma resposta.
Desenho de 5 pratinhos com 8 feijões cada e de 3 feijões fora dos pratinhos	RIS	Não registrou resposta.
Adição $8+8$	LUJ	Esse foi seu primeiro registro. Depois apagou e registrou $8 - 3 = 5$ (em conta armada) e escreveu como resposta: “ela tem ao todo 7 grãos”. Me mostrou perguntando se estava certo. Perguntei como havia feito e disse que fez de menos. Pedi que lesse novamente o enunciado. Ele leu e disse que a resposta era 11. Perguntei quantos pratinhos ela tinha e ele respondeu 5. Pedi que desenhasse os pratinhos. Depois que desenhou perguntei quantos feijões tinham em cada pratinho e ele disse 8. Pedi que registrasse isso nos pratinhos. Ele começou desenhando os feijões no primeiro pratinho e eu perguntei se não dava para fazer com números. Ele apagou os desenhos e colocou um número 8 dentro de cada pratinho. Depois perguntei se eram só esses feijões ou se havia mais. Ele disse que era só. Pedi que lesse novamente o enunciado. Ele leu e disse que tinha sobrado 3. Pedi que mostrasse no papel esses feijões e ele desenhou os feijões.
Adição $8+8+8+8+8+8+8+8+8+8$	GAE.	Fez a soma de cada par de 8 (21) depois de cada par de 21 (41) depois de cada par de 41 (81) depois de cada par de 81 (162). Ficou com $162+162$, mas registrou 162 como resultado Final. Depois desenhou 5 pratinhos, cada um com 8 feijões, e os 3 que sobraram (fora dos pratinhos). (intervenção da profª ?).
Adição (feijões de cada pratinho) $8+8+8+8+8$	FRA	Registrou a resposta 43 como resultado da adição (cuja resposta seria 40). Tinha registrado: Resto 3 e apagou. Também tinha registrado +3 junto com a adição de 8, mas apagou.
Combinação de multiplicação e adição: $8 \times 5 = 40$ e $40 + 3 = 43$	JOV, JUB, DES, EAS e PEP.	Todos fizeram as contas “armadas”.

Pedi às crianças que entregassem suas folhas mesmo sem que todos tivessem terminado de resolver todos os problemas porque achei que o trabalho não estava sendo produtivo. Muitas crianças estavam levantando para perguntar o que era para fazer e as crianças pareciam cansadas e se mostraram muito dispersas. Inicialmente pensei em chamá-las para uma intervenção individual em outra sala após o recreio. Combinei isso com a professora, recolhi as folhas para analisar os registros feitos e decidir quais crianças deveriam ser chamadas e em que ordem.

Fiquei muito frustrada neste dia, saí da sala de aula achando que “deu tudo errado”, que as crianças não entenderam nada e que não tinham condições de resolver os problemas propostos. Discuti sobre a aula com as estagiárias e elas mencionaram a grande dificuldade de leitura das crianças. Parecia que as crianças queriam “adivinhar” o que era para fazer, não usando a leitura como comando do trabalho a ser realizado. Mesmo depois da leitura coletiva e discussão sobre o que era pedido nas questões apresentadas, levantavam para perguntar o que era para fazer.

Discutimos sobre a idéia de chamar as crianças para intervenções individuais e chegamos à conclusão de que isso fugiria à idéia inicial da pesquisa de manter o contexto da sala de aula, pois a professora, numa situação

como esta, não teria condições de trabalhar desta forma, chamando as crianças individualmente. Além disso, as dificuldades eram generalizadas. Resolvemos que eu faria uma análise mais cuidadosa dos registros, acompanhando a filmagem para fazer uma avaliação das dificuldades das crianças, bem como da intervenção realizada naquele dia.

A análise possibilitou chegar a algumas conclusões:

- Não foi uma boa estratégia apresentar todos os problemas ao mesmo tempo (na mesma folha). Seria mais adequado apresentá-los em filipetas de papel, um a um para que todas as crianças pudessem trabalhar com o mesmo problema ao mesmo tempo. Além disso só passariam para o problema seguinte depois que tivéssemos discutido sobre as possíveis soluções.
- A introdução das sentenças matemáticas foi muito precoce, sobretudo da divisão. As crianças fizeram registros matemáticos para atender à minha solicitação, mas a maioria não compreendia o significado de tais registros (eu estava ansiosa para ensinar o conteúdo escolar. O Lino me alertou para o fato de que meu objetivo não era ensinar as crianças, mas aprender com elas).
- Observando as soluções das crianças na perspectiva do que eu poderia aprender com elas, não me pareceu mais que “tudo deu errado”, pois mostraram indícios importantes sobre a compreensão das estruturas multiplicativas nas situações propostas bem como da linguagem matemática correspondente.
- As crianças têm dificuldades com a leitura, por isso lemos para elas e explicamos o que é para ser feito, tirando a necessidade de ler. Isso não contribui para a superação das dificuldades.
- Os problemas apresentados não “envolveram” as crianças. Não estavam motivadas a resolvê-los. Tratavam-se de atividades escolares que precisavam ser resolvidas para ganhar nota (talvez porque foram apresentados 5 ao mesmo tempo todos na mesma folha e as crianças queriam logo se livrar da tarefa).
- Eu estava muito preocupada com o conteúdo escolar, com a opinião da professora sobre o meu trabalho, uma vez que de acordo com o conteúdo previsto para a série, estávamos “atrasados”. Quando fiz a entrevista inicial com a professora, ela disse que em abril introduziria a multiplicação com multiplicando composto de dois algarismos. Achei que precisava “acelerar” um pouco o trabalho.

Depois de discutir com o Lino sobre o que havia acontecido, ficou decidido que era necessário conversar novamente com a professora, fora da escola, numa situação mais informal para saber sobre as expectativas que ela tinha em relação ao meu trabalho e esclarecer os meus objetivos de pesquisa.

APÊNDICE 9

ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO PARA A PROFESSORA DA CLASSE

AULA 15

30/05

COMPOSIÇÃO DE RETÂNGULOS FAZENDO AGRUPAMENTOS REPETIDOS COM DETERMINADOS NÚMEROS TOTAIS DE QUADRADINHOS E POSTERIOR REGISTRO NO PAPEL QUADRICULADO

1. Quais os conhecimentos matemáticos mobilizados pelas crianças para resolver os problemas propostos nessa sessão?
2. As crianças foram solicitadas a formar todos os retângulos possíveis com diferentes quantidades de quadradinhos. Antes de cada solicitação, a pesquisadora promoveu uma discussão coletiva sobre a solução encontrada pelas crianças. Na sua opinião, essas discussões contribuíram para a composição dos retângulos com as outras quantidades de quadradinhos? Como?
3. As crianças foram organizadas em duplas para resolver os problemas propostos. Elas interagiram entre si e com as outras duplas? Que elementos te permitiram chegar a esta conclusão?
4. A pesquisadora pediu que as crianças usassem registros de multiplicação para representar os retângulos formados e propôs uma discussão sobre a possibilidade de representar os retângulos também por meio da divisão. Como você avalia a compreensão das crianças sobre os registros de divisão na situação proposta?
5. Que tipo de contribuições os problemas propostos hoje trouxeram para a aprendizagem da multiplicação e da divisão?

APÊNDICE 10

ENTREVISTA COM A PROFESSORA RESPONSÁVEL PELA CLASSE

Dezembro/2007

A relação de conteúdos de cada trimestre é bastante “genérica”, isto é, só aponta noções matemáticas a serem trabalhadas. Você se apóia em algum outro material para planejar suas aulas de matemática ?

➡ *O planejamento das aulas de matemática é feito com apoio de diversos materiais: livro didático, apostilas de cursos, pesquisas da Internet.*

Da forma como os conteúdos são relacionados, certamente se repetem em diferentes ciclos ou mesmo nas diferentes etapas de um mesmo ciclo. Como vocês tratam isso, quer dizer, como definem o que é próprio de cada série, por exemplo em relação às operações de multiplicação e de divisão?

➡ *Na 2ª etapa do 1º ciclo, é trabalhado a multiplicação e divisão de maneira bastante lúdica, com material concreto e jogos. Somente depois de construído os conceitos é que é iniciado o registro das operações. No início da 3ª série é revisado este trabalho, mas é dado mais ênfase a técnica operatória das operações.*

Da relação de conteúdos de cada trimestre (da folha que você me entregou), há algum (ou mais de um) que você normalmente não consegue explorar na terceira série? Qual ou quais e por quê?

➡ *Apesar da geometria ser um conteúdo sempre presente, eu dificilmente consigo fazer um trabalho mais específico, pois não é uma área que eu sinto segurança para trabalhar com os alunos, até porque eu na minha formação tive pouco preparo.*

Durante o período de realização da pesquisa (1º semestre de 2007), você trabalhou algum conteúdo de matemática com seus alunos? Caso afirmativo, qual ou quais? Como era o seu trabalho com a matemática durante aquele período?

➡ *Sim, todos os conteúdos previstos para o semestre foram trabalhados. Aproveitei algumas atividades que você havia feito e adaptei com o conteúdo que eu queria trabalhar. Os alunos também fizeram sugestões de atividades das suas aulas para a situação que estávamos trabalhando.*

Descreva brevemente (pode ser em tópicos) como você conduzia o trabalho com multiplicação/divisão nos anos anteriores (quando você trabalhou com a terceira série).

➡ *Sempre inicio o trabalho utilizando jogos e atividades com material concreto. Depois reviso as operações de multiplicação e divisão que foram trabalhadas na 2ª série, mais ou menos no 2º trimestre inicio a multiplicação e divisão com dois algarismos (operações e situações - problema).*

PERGUNTA: Faça uma avaliação geral da intervenção realizada por mim com a sua turma (pontos positivos e negativos). Lembre que se trata de uma pesquisa acadêmica e não de uma avaliação pessoal da pesquisadora (você deve escrever o que realmente pensa sem preocupação de “me agradar”).

➡ *Achei a pesquisa realizada muito proveitosa. Percebi que os alunos gostaram, participaram e melhoraram na forma de se expressar oralmente, eles “pegaram a mania” de querer explicar como realizavam a atividade. Também melhoraram na hora de trabalhar em equipe, com menos algazarra e mais respeito com o colega. O único ponto negativo que achei foram os intervalos longos de uma sessão para outra. Muitas vezes, os alunos estavam empolgadíssimos para refazer, comentar, ou dar prosseguimento da aula anterior e acontecia “a quebra” e eles acabavam dando uma desanimada.*