**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

CINTIA GOMES DA FONTES

O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais

São Paulo
2010

CINTIA GOMES DA FONTES

O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Maria do Carmo Santos Domite.

São Paulo
2010

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

372.6 Fontes, Cintia Gomes da
F683v O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais / Cintia Gomes da
Fontes ; orientação Maria do Carmo Santos Domite. São Paulo : s.n., 2010.
220 p. : il., tabs. grafs.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área
de Concentração : Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de
Educação da Universidade de São Paulo.

1. Educação matemática 2. Ensino fundamental 3. Ensino e aprendizagem
4. Cálculo mental 5. Ensino público – São Paulo, SP 6. Desenvolvimento
cognitivo 7. Formação de professores 8. Currículos e programas 9. Resolução
de problemas I. Domite, Maria do Carmo Santos, orient

Nome: FONTES, Cintia Gomes da

Título: O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais.

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade
de Educação da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Mestre em Educação

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. _____

Assinatura: _____ Instituição: _____

Prof. _____

Assinatura: _____ Instituição: _____

Prof. _____

Assinatura: _____ Instituição: _____

“Eterno é tudo aquilo que vive uma fração de segundo, mas com tamanha intensidade, que se petrifica e nenhuma força o resgata...”

Carlos Drummond de Andrade

Para

Pai-Lé e Mãe-Lô,

Lucas e Fernanda.

*Com amor,
por **eternizarem** momentos
tão únicos em minha vida.*

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Maria do Carmo Domite, pelo apoio e pela confiança depositada em mim. E sobretudo por seu acolhimento tão caloroso, generoso e humano.

À minha mãe Lourdes (minha querida Mãe-Lô), minha companheira e maior incentivadora. Por sua dedicação incansável e amor incondicional, por seu exemplo de fé, de perseverança e por estar sempre ao meu lado, acompanhando minha caminhada.

Ao meu pai Miguel (meu querido Pai-Lé), por sua dedicação e por seu exímio raciocínio-lógico que me despertou o interesse pela área da Matemática. Por meio da sua inteligência, humildade e acurada observação, ensinou-me a ser uma pessoa curiosa, interessada e disposta a estar sempre aprendendo.

Ao meu filho Lucas, que a partir de sua existência possibilitou-me iniciar a sublime experiência de ser mãe. Por sua ternura, carinho e sensibilidade que encanta a todos por onde passa.

À minha filha Fernanda, por sua alegria e carinho e por trazer ainda mais amor à nossa família. Por sua delicadeza e força e por sua paciência e precoce maturidade em aceitar alguns momentos de minha ausência, mesmo sendo ainda tão pequena.

Ao Marcelo, por cuidar com tanta dedicação e carinho dos nossos filhos, nossas maiores bênçãos.

Ao Rafael, meu irmãozinho, pela ajuda técnica e pelo carinho de todos esses anos.

À Erica, minha irmã de coração, por seu constante apoio e carinho dedicados não somente a mim, mas a toda nossa família.

À Adriana, minha amiga e companheira de trabalho, que com tanta paciência e inteligência proporcionou-me preciosas dicas na elaboração desta pesquisa, fica meu imenso agradecimento.

À professora Marina Célia, pelo acolhimento em momentos difíceis de transição em minha vida.

Às professoras parceiras da pesquisa, pois sem suas preciosas contribuições não poderia desenvolver esta pesquisa.

À Regina, Keli e Lilian pelo apoio fundamental que me deram no recolhimento dos dados.

À amiga Wilma, por seu carinho e por incentivar-me a entrar para o campo da pesquisa acadêmica.

À minha querida amiga Roberta, por sua confiança em mim, por seu carinho e apoio em tantos momentos alegres e difíceis vividos ao longo desses trinta anos de amizade.

À amiga Ana Francisca, por me ouvir e me incentivar sempre.

Às amigas Ana Cláudia, Danielle e Luciana, pelo apoio constante.

À Alessandra, Shirlene e Taís que muito gentilmente se dispuseram a responder os questionários iniciais e aos demais amigos e amigas do Colégio Santa Clara.

Aos professores Silvanio e Vinicio, pela leitura atenciosa e valiosas indicações bibliográficas oferecidas durante o exame de qualificação.

À equipe de Memória Técnica Documental da Secretaria de Educação de São Paulo, em especial à Sidoni e à Fátima, tão prestimosas em me ajudar na seleção dos materiais, e Sérgio e Mozart, pelas fotocópias.

Ao Leonardo e à Siderlene, por suas ajudas técnicas.

À Aracelis, que com sua sensibilidade e apoio me ajudou a continuar e a acreditar que seria possível.

Às minhas tias queridas Ana Luiza e Maria Aparecida, por estarem sempre comigo, mesmo tão distantes.

Às queridas Margarida, Maria, D. Maria Stella, D. Sumiko e Maria José (*in memoriam*), que sempre acreditaram em mim.

À tia Jô e à professora Cleusa, que foram referências de professora em minha vida, exemplos de amor e dedicação ao magistério.

À memória da minha querida tia Mii, que torceu por mim durante toda a sua vida e que ficou muito feliz de eu ter conseguido entrar no mestrado. Tenho certeza de que está orgulhosa de mim, onde quer que ela esteja.

A todos os amigos e familiares que me incentivaram e contribuíram de alguma maneira para que eu pudesse chegar até aqui.

E por fim, aos meus queridos alunos do 4º ano B e a todos aqueles alunos (em especial à Carolina) aos quais eu tive a honra de conviver e de aprender muito com eles ao longo de mais de quinze anos de magistério. Vocês representam a razão de eu me dedicar à educação e meu incentivo para continuar acreditando num futuro cada vez melhor.

*Há um tempo
em que é preciso abandonar as roupas usadas
que já têm a forma de nossos corpos
e esquecer os nossos caminhos
que nos levam sempre aos mesmos lugares.*

É o tempo da travessia.

*E, se não ousarmos fazê-la,
teremos ficado para sempre
à margem de nós mesmos.*

Fernando Pessoa

FONTES, Cintia Gomes da. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais**. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2010. (Dissertação de Mestrado)

RESUMO

A pergunta principal de nossa pesquisa é: *Qual o valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais do Ensino Fundamental?* Esta pesquisa busca identificar quais as concepções de cálculo mental e a sua importância no contexto educacional da rede municipal de São Paulo, do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Buscamos compreender tal contexto junto aos professores da rede e também junto às propostas curriculares e aos cursos de formação. Para tanto, analisamos alguns documentos da rede municipal, questionários respondidos pelos professores e uma entrevista com uma formadora da rede. Consideramos cálculo mental como um conjunto de procedimentos de cálculo que podem ser analisados e articulados diferentemente por cada indivíduo para a obtenção mais adequada de resultados exatos ou aproximados, com ou sem o uso de lápis e papel. Os procedimentos de cálculo mental se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números. O cálculo mental permite maior flexibilidade de calcular, bem como maior segurança e consciência na realização e confirmação dos resultados esperados, tornando-se relevante na capacidade de enfrentar problemas. Tal desenvolvimento de estratégias pessoais para se calcular vai ao encontro das tendências recentes da psicologia do desenvolvimento cognitivo, que nos apontam para a importância de uma aprendizagem com significado e do desenvolvimento da autonomia do aluno. Desse modo, paralelamente, outras perguntas foram sendo traçadas e surgiu a necessidade de buscarmos perceber quais as concepções de ensino-aprendizagem que estão por trás das estratégias de ensino de cálculo mental adotadas na rede. Portanto, também permeiam pela pesquisa, as discussões acerca da exploração e resolução de problemas, da relação professor-saber-aluno e da aprendizagem com compreensão, principalmente as suscitadas por Piaget, Kamii e Charnay. Percebemos que tanto por parte dos documentos quanto dos professores há o reconhecimento da importância do cálculo mental no ensino-aprendizagem de matemática, mas, na prática, é pouco usado em sala de aula e sua concepção gera diversas interpretações. Embora o cálculo mental venha recebendo destaque em diversos programas curriculares e em pesquisas acadêmicas, ainda há necessidade de se ampliar a discussão tanto em relação ao seu papel na construção dos conhecimentos matemáticos, quanto às formas ou metodologias envolvidas no seu desenvolvimento. Assim, esse trabalho procura contribuir para a reflexão da importância do cálculo mental para a construção dessa autonomia discente e traçar um olhar sobre o seu valor e papel no campo da educação matemática.

Palavras-chave: cálculo mental, aprendizagem com compreensão, resolução de problemas, educação matemática, séries iniciais do ensino fundamental.

FONTES, Cintia Gomes da. **The value and role of mental calculation in the first grades of Elementary School.** São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2010. (Master Thesis)

ABSTRACT

The main question of our research is: *What is the value and role of mental calculation in the first grades of Elementary School?* This research intends to identify what conceptions of mental calculation and its importance in the educational context of the municipal schools in São Paulo, from 2nd to 5th year of Elementary School. We wanted to understand this context with the teachers and also at the curriculum proposals and documents of courses for teachers. For this, we analyzed some of the municipal documents, questionnaires completed by teachers and an interview with a professional who provides courses to the teachers. We consider mental calculation as a group of calculation procedures that can be analyzed and articulated differently by each individual to achieve better accurate or approximate results, with or without the usage of pencil and paper. The procedures for mental calculation are based on the properties of the decimal system and the properties of operations, and put into action different types of writing numbers, as well as different relations between numbers. The mental calculation allows greater flexibility to calculate and it provides greater security and awareness in making and confirming expected results, becoming relevant in the ability to face problems. This development of personal strategies to calculate has similarities with the current trends in cognitive developmental psychology that point us to the importance of meaningful learning and the development of the learner's autonomy. In such way, other questions have been outlined and the need to understand what concepts of teaching-learning underlie teaching strategies for mental calculation adopted by the municipal schools of São Paulo. Therefore, discussions about exploring and solving problems, the relation between teacher-knowledge-student and learning with understanding permeate the research as well, mainly those one's raised by Piaget, Kamii and Charnay. We realize that both documents and teachers recognize the importance of mental calculation in mathematics teaching-learning, but it is not very used in classrooms and its concept has different interpretations. Although the mental calculation has been receiving attention from various school curricula and academic researches, there is a need to broaden the discussion both in relation to its role in the construction of mathematical knowledge and to the forms or methodologies involved in its development. Thus, this study intends to contribute with the reflection of the importance of mental calculation in the construction of student's autonomy and chart a look on its value and role in the field of mathematical education.

Keywords: mental calculation, learning with understanding, problem's solving, mathematical education, series of Elementary School.

LISTAS DE TABELAS, QUADROS, FIGURAS E GRÁFICOS

Tabela 1 - Nível de proficiência em matemática - SARESP 2009.....	24
Tabela 2 - Informações gerais sobre as professoras	141
Tabela 3 - Formação inicial e tempo de magistério das professoras	141
Tabela 4 - Formação acadêmica das professoras.....	142
Tabela 5 - Discussões sobre cálculo mental no curso de graduação das professoras.....	143
Tabela 6 - Discussão sobre cálculo mental no curso de pós-graduação da professora	144
Tabela 7 - Participação das professoras em cursos sobre cálculo mental	144
Tabela 8 – Benefícios que os cursos de formação sobre cálculo mental trouxeram às professoras.....	145
Tabela 9 – Frequência de consulta das professoras aos PCNs sobre cálculo mental	145
Tabela 10 – Frequência com que o cálculo mental é utilizado pelos alunos.....	146
Tabela 11 - Assuntos mais e menos abordados nas aulas de matemática	147
 Quadro 1 - Resoluções por algoritmo e cálculo mental (1000 – 900).....	48
Quadro 2 - Relações entre o método, o papel do professor e do aluno, segundo Ernest.....	95
Quadro 3 - Síntese da metodologia adotada	111
Quadro 4 - Critérios de avaliação de matemática para o primeiro ciclo	133
Quadro 5 - Critérios de avaliação de matemática para o segundo ciclo.....	133
Quadro 6 - Principais aspectos levantados no questionário dissertativo	161
Quadro 7 - Categorias surgidas a partir das respostas aos questionários	162
 Figura 1 - Registros de cálculo mental de 10 x 36 - Carol e Jerry	34
Figura 2 - Exemplos de algoritmo ampliado e americano, segundo Kilpatrick	37
Figura 3 - Relações entre cálculo mental e ideias associadas - NCTM.....	40
Figura 4 - Exemplos de cálculos restritos ao algoritmo, segundo Hope	49
Figura 5 -Tabela de números naturais até 100, segundo Pimentel e Vale.....	64
Figura 6 - Exemplo de cálculo por meio da reta numérica, segundo Pimentel e Vale.....	65
Figura 7 - Processo de Equilibração Majorante, segundo Piaget	77
Figura 8 - Desenvolvimento do problema: um processo	97
Figura 9 - Relações entre o professor, o saber e os alunos	100
Figura 10 - Relações entre o professor, o saber, os alunos e os contextos, segundo Kilpatrick	101

Figura 11 - Aspectos associados ao cálculo mental, segundo esta pesquisa	104
Figura 12 - Triangulação como foco e meio de análise.....	107
Figura 13 - Movimentação dos principais aspectos metodológicos envolvidos na pesquisa.	112
Figura 14 - Fatos fundamentais representados por quadrícula e lista.....	115
Figura 15 - Algumas maneiras de se obter $3 + 8 + 2 + 7$	116
Figura 16 - Sugestão de trabalho com adição – 1ª série – para introduzir a técnica operatória	116
Figura 17 - Sugestão de trabalho com adição – 2ª série – para introduzir a técnica operatória com reagrupamento	117
Figura 18 - Sugestão de trabalho com multiplicação – 3ª série – cálculo mental e algoritmo (formas longa e abreviada)	118
Figura 19 - Sugestão de trabalho com cálculo mental da divisão – 4ª série.....	119
Figura 20 - Exemplo de atividade da “Hora do cálculo” – 3ª série	122
Figura 21 - Ilustração de um momento de troca de estratégias entre os alunos	125
Figura 22 - Registro de cálculo mental.....	131
Figura 23 - Exemplo de adição por meio da decomposição e do algoritmo	132
Figura 24 - Possibilidades de adições e multiplicações que envolvem cálculo mental e propriedades das operações, sugeridos nos cursos de formação	135
Figura 25 - Exemplos de cálculos envolvendo adição e multiplicação, sugeridos nos cursos de formação	136
Figura 26 - Esquema da composição formada pelo recorte da pesquisa a partir dos dados recolhidos	171
Gráfico 1 - Tempo de magistério municipal das professoras	142
Gráfico 2 - Frequência com que os alunos utilizam o cálculo mental em sala de aula	146
Gráfico 3 - Ano de conclusão da graduação e momentos de discussão sobre o cálculo mental	157
Gráfico 4 - Participação em cursos de formação e o quanto eles ajudaram a professora.....	158
Gráfico 5 - Relação entre os momentos de discussão de cálculo mental na graduação e nos cursos de formação com a frequência deste cálculo pelos alunos.....	159
Gráfico 6 - Frequência de cálculo mental utilizado pelos alunos e tipos de cálculo mais frequentes citados pela professora.....	160

LISTA DE SIGLAS

CM	Cálculo Mental
CP	Cálculo Pensado
DEB	Departamento de Educação Básica.
ME	Ministério da Educação (de Portugal).
DOT	Departamento de Orientações Técnicas
ERMEL	Equipe de Didática da Matemática do INRP
INRP	Institut National de Recherche Pédagogique
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
ME	Ministério da Educação
NACI	Núcleo de Ação Cultural Integrada
NCSM	National Council of Supervisors of Mathematics
NCTM	National Council of Teacher of Mathematics
PCN	Parâmetros Nacionais Curriculares
SARESP	Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SE	Secretaria de Educação
SMESP	Secretaria Municipal de Educação de São Paulo
SND	Sistema de Numeração Decimal

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
CAPÍTULO 1. A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA	20
1.1. Área temática.....	20
1.2. Justificativa.....	20
1.3. Objetivos.....	25
1.4. O caminho metodológico.....	26
CAPÍTULO 2. CÁLCULO MENTAL: PAPEL, VALOR E SIGNIFICADO.....	31
2.1. Cálculo mental: a construção de um significado.....	31
2.2. Cálculo mental: valor e papel na educação matemática	50
2.3. Cálculo mental: alguns caminhos	56
2.4. O cálculo mental no percurso da educação matemática	68
CAPÍTULO 3. DA APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO	75
3.1. Piaget	75
3.2. Kamii	80
3.3. Charnay.....	86
3.3.1. Dos processos de ensino e aprendizagem.....	86
3.3.2. Os modelos didáticos de Charnay.....	88
3.3.3. Resolução de problemas	92
3.3.4. Categorias de problemas, segundo Charnay	101
CAPÍTULO 4. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO.....	105
4.1. Procedimentos metodológicos.....	105
4.2. Organização e análise dos dados	112
4.3. Documentos curriculares	112
4.3.1. Programas curriculares na rede municipal de ensino	112
4.3.2. Os PCNs.....	128
4.4. Cursos de formação	134
4.4.1. Cursos de formação na rede municipal de ensino	134
4.4.2. Entrevista com uma educadora/formadora	138
4.5. Professoras parceiras da pesquisa.....	140
4.5.1. Organização dos questionários	140
4.5.2. Análise dos questionários	156

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	171
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	178
ANEXOS.....	189
ANEXO A - Reportagem da Folha de São Paulo sobre o desempenho dos alunos no Brasil.	189
ANEXO B - Reportagem do O Globo sobre o desempenho dos alunos em SP.....	190
ANEXO C - Questionários para os professores	191
ANEXO D - Questionário para a educadora/formadora.	215
ANEXO E - Entrevista textualizada com a educadora/formadora.	216

INTRODUÇÃO

“Mas o que uma profissional da Geografia faz na área de Matemática?” Essa foi a primeira pergunta que me fizeram na minha entrevista de seleção para o mestrado. À primeira vista, causa certa estranheza, mas para justificar-me, coloco aqui um pouco de minha trajetória pessoal e profissional numa tentativa de esclarecer tal questionamento.

No curso do magistério me dedicava à todas as disciplinas, cada área de estudo me encantava, sentia-me alimentada por uma diversidade de conhecimentos ao mesmo tempo peculiares e intrínsecos. Mas uma predileção já se esboçava naquele momento: artes, biologia e ciências ligadas à natureza e ao homem. Em testes de aptidão realizados na época, fora constatado sempre o mesmo resultado: Ciências biológicas. Qual não foi meu espanto, pois não me via dissecando animais, muito menos tomando contato com pessoas sofrendo, sangue... Então, apesar de meu interesse por essa ciência, descartei a possibilidade de carreira.

Sempre gostei muito de Artes, minhas aptidões artísticas surgiram enquanto eu ainda era criança, transparecidas nos desenhos e pinturas que fazia. É preciso fazer escolhas coerentes e harmoniosas, visualizar a proporção dos objetos, estimar quantidades de material, calcular custos etc. Vislumbrei algumas carreiras nessa área, mas achei que ficaria um pouco distante do contato com as pessoas, principalmente com as crianças (faltaram-me mais informações sobre esse aspecto da carreira, naquele momento). Em situações familiares, divertia-me demais com elas, inventava novas brincadeiras, fazia encenações (talvez daí a inspiração para fazer oficinas de teatro, anos mais tarde), curti estar ao lado delas, ouvindo suas ideias e sentimentos, vendo-as mais criativas e seguras quando se sentiam apoiadas e estimuladas. Enfim, fazia-me bem vê-las felizes. Assim, optei por investir em artes por outros caminhos, fazendo artesanato, teatro, decoração, festas e todo tipo de atividade artística de cunho pessoal ou familiar.

Esse viés artístico me despertou também o interesse por mapas. Tinha fascínio por desenhá-los e saber onde estavam localizados os elementos da natureza e os mais variados grupos humanos. Interessava-me entender a lógica dessa distribuição espacial, percebi que os fenômenos naturais e humanos não estavam distribuídos aleatoriamente, mas possuíam uma organização coerente no tempo e espaço.

Desse modo, escolhi fazer o curso de Geografia, pois me imaginei trabalhando com mapas, compreendendo melhor as questões da relação natureza-humanidade e tendo a possibilidade de aprofundar-me numa área da educação ou ingressar na área técnica.

No curso de Geografia pude lidar com essas e muitas outras questões. As disciplinas de Geografia Física me despertavam especial interesse, bem como as relacionadas ao ensino dessa ciência. As primeiras fizeram-me deparar com situações de estimativa e cálculo que nunca havia vivido antes: medições aproximadas de terreno, inclinação, estimativa de espécies vegetais por área, proporção de tipos de camada por perfil de solo, distância entre pontos, escalas de mapas e outras. As segundas reforçaram meu interesse por educação, principalmente nos cursos com professores em que eu monitorava. Percebi que os professores, principalmente os provenientes do curso de Pedagogia, careciam de instrumentos para lidar com as especificidades das várias áreas do conhecimento e estimular as crianças.

Foi então que resolvi fazer um curso de pós-graduação *latu-senso* na Faculdade de Educação e me especializei em Educação Infantil. No curso da professora Marina Célia Moraes Dias, “Currículo e cognição”, foi bastante discutido a importância da pesquisa, da observação, do registro, da comparação, da organização, da reflexão, da análise e da síntese. Fui percebendo que tais habilidades permeavam todas as áreas do conhecimento humano e senti necessidade de estudar mais sobre o assunto. As questões ligadas à educação e à aprendizagem com compreensão tornaram-se cada vez mais atraentes.

Optei, então, pelo curso de Pedagogia, na qual o professor Vinício de Macedo Santos, com a disciplina “Matemática II”, propôs algumas discussões que alinhavam esses questionamentos que eu vinha elaborando acerca da importância de uma postura reflexiva e criativa do aluno diante do conhecimento, o desenvolvimento de habilidades para além da compartimentação do saber e o papel do professor diante disso. Interessava-me em pesquisar mais sobre a importância da verbalização do pensamento infantil também em relação ao conhecimento matemático e não somente às interpretações de textos e imagens que eram priorizadas nas escolas.

Busquei dar continuidade a esse interesse e assisti à palestra “Autonomia como objetivo de Educação”, ministrada pela professora Constance Kamii. Ela abordou o ensino da aritmética dentro de um contexto em que a criança seja agente da construção do seu conhecimento, autora de estratégias reflexivas de exploração de problemas, tornando-se consciente do porquê de suas escolhas.

Permeando esse percurso acadêmico estava meu interesse em resolver problemas no cotidiano doméstico e, principalmente, observar como as pessoas o faziam. Acompanhei meu pai, por exemplo, no conserto de diversos aparelhos, de liquidificador a carro. É fascinante descobrir a lógica envolvida na construção e funcionamento desses objetos, é uma das facetas

da inteligência e criatividade humana. Além disso, nessas atividades, realizava cálculos mentais com rapidez, ora calculando o valor aproximado, ora o exato. Ele sempre diz: “Você tem que observar, analisar, pensar nas possibilidades e escolher a melhor forma de solucionar o problema”. E ele não se atém somente a repetir técnicas prontas, mas ressignifica seu conhecimento em novas situações. E isso tem tudo a ver com educação e pensamento matemático! Observar meu pai nessas atividades me fez novamente pensar sobre a importância do cálculo mental na vida das pessoas. Por que alguns realizam cálculos com tanta facilidade e buscam caminhos para tal solução que outros não pensariam? Será que meu pai, que estudou entre as décadas de 40 e 60, e outros tantos têm “facilidade” ou tiveram algum professor que os estimularam a pensar assim? Seria apenas uma habilidade pessoal? Ou poderíamos desenvolver isto em sala de aula? Como possibilitar às crianças oportunidades para refletir sobre formas eficientes de se calcular e resolver problemas? Por que algumas crianças ainda perguntam se “é de mais ou é de menos” e não buscam observar e analisar as estratégias possíveis e as mais adequadas?

Hoje, como professora polivalente do 4º ano do Ensino Fundamental, busco entender como as crianças pensam, escuto suas ideias, estimulo-as a buscarem estratégias próprias, mas percebo que ainda estão muito ligadas ao modelo do algoritmo, quase sempre seu primeiro e único parâmetro de solução. Observo ainda uma certa confusão no desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos por parte dos professores, inclusive quanto à metodologia e à concepção de cálculo mental. Portanto, outro ponto de reflexão se forma com essa experiência: a da formação das professoras que cursam Pedagogia e não têm uma formação especializada em cada ciência. Não é fácil lidar com tantas variáveis, pois temos que ter um olhar amplo mas, ao mesmo tempo, nos aprofundarmos em algumas questões. Tal situação leva alguns professores à uma angústia em relação à algumas práticas em sala de aula, num anseio de mudança, ou a permanência da situação por falta de conhecimento à respeito de novas proposições educativas. Neste contexto, é que ainda destaco a importância da contínua aproximação entre pesquisa e realidade escolar.

Diante dessa trajetória, pensei que poderia fazer um mestrado na área de arte-educação, Geografia, Matemática ou educação infantil. E, relatando este breve caminho, procuro esboçar que várias áreas poderiam ter sido escolhidas, mas o mais importante foi mostrar que, acima de tudo, independente da área, eu gosto é de *descobrir*, de aprender coisas novas, de criar. E acho que o maior objetivo dos educadores deveria ser este: o de despertar nos alunos a *paixão por aprender e criar*.

Desse modo, optei por investir mais na pesquisa sobre cálculo mental porque percebi o quanto ele estava presente na minha vivência pessoal e profissional, mas era o que eu menos havia estudado. Abracei a temática do cálculo mental e tomei-a, então, como mais um desafio para ampliar as minhas descobertas. Espero, de algum modo, ter respondido à pergunta inicial e manifestar meu sentimento de alegria pela oportunidade de, com essa pesquisa, poder continuar aprendendo mais e mais.

Para a realização dessa pesquisa, quatro capítulos foram organizados.

No **capítulo 1**, um caminho de pesquisa foi sendo delineado no campo do *cálculo mental*. Em primeiro lugar, buscamos inseri-lo dentro de uma perspectiva temática, integrando-o a outros assuntos na área da educação matemática e justificando a importância de sua abordagem. Os objetivos foram definidos dentro do recorte temático que escolhemos fazer sobre esse assunto e um caminho metodológico foi traçado para fundamentar nossas observações.

O **capítulo 2** refere-se às discussões sobre as concepções mais frequentes que são relacionadas à ideia de cálculo mental, que causam várias interpretações e que esclarecerão nossa visão de cálculo mental, bem como justificar sua importância e discutir algumas maneiras de abordá-lo em sala de aula. Na última seção, procuramos contextualizar o ensino do cálculo mental na história da educação matemática no Brasil até chegar ao movimento da educação matemática.

No **capítulo 3**, contextualizamos algumas concepções do processo de ensino-aprendizagem e da relação dessas com o ensino de matemática e as concepções de cálculo mental. Tais aspectos são discutidos também em relação à resolução de problemas e ao papel do professor e do aluno na construção do conhecimento.

A caracterização dos procedimentos metodológicos adotados e do recolhimento e interpretação dos dados constituem o nosso plano em ação e estão descritas no **capítulo 4** desta pesquisa. Na última seção fazemos algumas considerações finais a respeito do cálculo mental dentro do contexto escolhido para sua discussão.

CAPÍTULO 1. A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA

No plano que traçamos nesse capítulo introdutório, contextualizamos o trabalho com cálculo mental em sala de aula dentro de uma perspectiva temática, justificando sua relevância e definindo os objetivos de pesquisa a partir do problema formulado.

1.1. Área temática

Nosso trabalho está situado, em sentido mais amplo, entre os programas curriculares e cursos de formação que discutem e orientam o valor e o papel do cálculo mental em sala de aula e a concepção e a prática de tal cálculo pelos professores das séries iniciais. E, como tal, aproxima-se de temas como a relação professor/aluno/saber, exploração e resolução de problemas, organizações curriculares oficiais e aprendizagem com compreensão.

1.2. Justificativa

Gostaríamos de discutir três aspectos fundamentais que nos levam a justificar a relevância de nossa pesquisa.

Em primeiro lugar, destacamos o *crescente investimento em pesquisas* no campo da educação matemática. Percebemos no meio acadêmico, um aumento significativo das pesquisas que discutem o processo de ensino e aprendizagem da matemática, tanto no Brasil como no exterior. Em diferentes países como os Estados Unidos, a Espanha, a Argentina e a França houve uma atenção crescente dos educadores matemáticos - sobretudo a partir da década de 1980, com o movimento da Educação Matemática – em discutir uma nova maneira de pensar as relações entre professor/aluno/saber, entendendo o aluno como ativo nesse processo, agente da sua própria construção de conhecimento. A preocupação com uma aprendizagem da matemática com compreensão ficou cada vez mais evidente e tem sido tema de discussão em vários trabalhos de pesquisas. E muitas dessas pesquisas têm o cálculo mental como objeto de seus estudos (MENDONÇA-DOMITE; LELLIS, 1989; CORREA; MOURA, 1997; BUTLEN; PEZARD, 2000; GÓMEZ ALFONSO, 2005; GUIMARÃES; FREITAS, 2007). Segundo Boulay, Le Bihan e Violas (2004, p.1), “o cálculo mental ocupa um lugar preponderante na aprendizagem da Matemática”.

Desse modo, outro aspecto a ser considerado refere-se à *importância do cálculo mental* dentro dessa perspectiva de aprendizagem com compreensão. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), por exemplo, uma das referências mundiais nas questões ligadas à educação matemática, publicou e ainda publica documentos importantes sobre o ensino de matemática, como os Yearbooks. A abordagem do NCTM é baseada em vasto acervo de pesquisas sobre aprendizagem da matemática por parte das crianças. E um dos documentos do NCTM contém a seguinte afirmação: “É claro que o cálculo com lápis e papel não pode continuar a dominar o currículo...” (julho, 1988, p. 45). John Hope publicou um texto no Yearbook de 1986 em que defende o trabalho com cálculo mental em sala de aula de forma eficiente, pois este “envolve uma forma sofisticada de pensamento matemático”. Hope (1986, p.52)¹ destaca as habilidades que uma pessoa habituada ao cálculo mental pode desenvolver:

As pessoas com habilidade de cálculo mental vão em busca do significado, analisando relações e propriedades dos números. Uma pessoa habilidosa para o cálculo mental vê o cálculo da mesma forma que um artista vê uma pintura. Ambos vêem e percebem relações que o olho não treinado não vê.

Além das crescentes pesquisas sobre o cálculo mental no contexto escolar, podemos notar a relevância de seu uso em nosso dia a dia: prever os gastos de uma compra no supermercado, avaliar a vantagem de se levar o produto por peso ou por unidade, conferir o troco de uma compra, estimar a sua parte na conta de um restaurante quando sai com os amigos, gerenciar valores numa conversa de negócios, calcular a distância e tempo de percurso no caminho de uma viagem, estimar dobros ou metades de receitas culinárias, estimar o rendimento de uma aplicação financeira e outros.

Na era da tecnologia, onde computadores e calculadoras estão cada vez mais acessíveis, alguns podem se questionar a respeito da real necessidade desse trabalho com cálculo mental. Contudo, apesar do uso da calculadora e dos computadores em nossas vidas, nos deparamos com essas e outras situações cotidianas que foram citadas, onde o cálculo mental se faz necessário e, portanto, podemos considerá-lo como necessidade inerente à própria condição de cidadania. Além disso, destacamos que o trabalho com cálculo mental permite desenvolver habilidades que vão para além da matemática.

A capacidade para desenvolver problemas, tomar decisões, trabalhar com outras pessoas, usar recursos de modo pertinente, fazem parte do perfil reclamado pela sociedade de hoje; (levando em conta que o mundo enfrenta

¹ Texto traduzido por Mendonça-Domite.

uma grave crise, entre outros aspectos, pela falta de trabalho para milhões de pessoas, as características mencionadas não parecem perder valor, mesmo vistas de uma perspectiva não-ingênua) (PARRA, 1996, p. 187).

Desta forma, tornar os alunos capazes de trabalhar em grupo, de escolher procedimentos apropriados, de buscar soluções, de fazer avaliações e rever estratégias são habilidades desenvolvidas pelo trabalho com cálculo mental, mas que não ficam restritas somente ao campo da matemática, pois são habilidades importantes à própria condição de sujeito social. Com isso, estamos desenvolvendo não apenas conhecimentos, mas atitudes e valores na formação do sujeito.

Ser sujeito nos remete também à ideia de ação, de um sujeito ativo, autônomo, capaz, por exemplo, de utilizar adequadamente estratégias pessoais na busca de soluções. E o trabalho com cálculo mental propicia o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo, ampliando as opções de solução para cada situação. As tendências recentes na psicologia do desenvolvimento cognitivo nos apontam para a importância de tal ênfase autônoma na busca de soluções pessoais por parte dos alunos, desestimulando situações que colaborem para a heteronomia dos alunos.

Constance Kamii (1990a), por exemplo, coloca o processo de ensino-aprendizagem em uma perspectiva de estímulo à autonomia, de busca de estratégias pessoais de resolução. Para ela, a autonomia significa o indivíduo ser governado por si próprio. É o contrário de heteronomia, que significa ser governado pelos outros. Para a autora, o desenvolvimento da autonomia tem grandes vantagens, tornando a relação do aluno com a matemática mais pessoal e ativa, articulando o que ele já sabe com o que deve aprender, visto que, comprovadamente, o conhecimento matemático se dá através das interações feitas pelo sujeito. A autonomia significa levar em consideração os fatores relevantes para decidir agir da melhor forma. E a ideia principal do cálculo mental é justamente esta: considerar os fatores relevantes e tomar decisões. Desse modo, cálculo mental e autonomia estão estreitamente relacionados, o que demonstra, mais uma vez, que as habilidades desenvolvidas por ele não se restringem apenas à área da matemática, mas permitem um desenvolvimento do aluno, num sentido mais amplo.

Um terceiro aspecto a ser considerado é que, apesar dessa crescente discussão sobre aprendizagem com compreensão, educação matemática e cálculo mental, ainda são publicadas notícias sobre o *baixo desempenho em matemática* dos estudantes brasileiros, de todos os níveis. Considerando alguns dos instrumentos de avaliação do nível de ensino, locais e nacionais, selecionamos duas reportagens para que possamos perceber que ainda há, segundo

tais instrumentos, defasagens dos alunos que finalizam a 4ª série/5º ano² do nível fundamental, no campo da matemática. A primeira reportagem do jornal “A Folha de São Paulo”³, datada do ano de 2006 e acessada na internet em 2008, refere-se à Prova Brasil e revela que os alunos de 4ª série do ensino municipal de São Paulo obtiveram pontos abaixo da média nacional e fizeram menos da metade da pontuação total.

Os resultados da Prova Brasil - avaliação do Ministério da Educação com todas as escolas de ensino fundamental municipais e estaduais do país com mais de 30 alunos - mostraram que os alunos de quarta série da Prefeitura de São Paulo obtiveram 166,86 pontos em matemática, de um total de 350. A média brasileira ficou em 179,98⁴.

Uma das pesquisadoras da área de matemática entrevistada na reportagem ressalta a importância das metodologias para o avanço do ensino da matemática.

Para Maria Amábile Mansutti, que coordenou os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática, é preciso adotar novas metodologias no ensino da disciplina. “Os alunos têm de entender a lógica e não achar que matemática é apenas memorização”, afirmou⁵.

O comentário de um aluno também nos leva a refletir sobre como nossas escolhas metodológicas definem o perfil da disciplina e delineiam uma concepção de educação matemática que influenciará nossos alunos e a formação matemática deles.

Renan Alves, 10, aluno da quarta série da rede municipal de São Paulo, até que vai bem na disciplina, mas diz não gostar de matemática. “A gente tem que ficar decorando muita coisa e é fácil de confundir. Prefiro artes e português”⁶.

A segunda reportagem⁷ refere-se à Prova São Paulo, outro instrumento oficial de avaliação do ensino, neste caso, específico do ensino municipal de São Paulo. A reportagem,

² As escolas brasileiras estão se organizando para se adaptar a nova lei de ampliação do Ensino Fundamental. A duração obrigatória deste nível de ensino foi ampliada de oito para nove anos pelo Projeto de Lei nº 3.675/04, passando a abranger a Classe de Alfabetização (fase anterior à 1ª série, com matrícula obrigatória aos seis anos) que, até então, não fazia parte do ciclo obrigatório e que, atualmente, passa-se a ser considerado 1º ano. Uma lei posterior (11.114/05) ainda deu prazo até 2010 para estados e municípios se adaptarem. Deste modo, durante a realização desta pesquisa, ainda existiam escolas que possuíam classes por séries e anos. Quando falamos em séries do ensino fundamental 1, portanto, estamos nos referindo também aos anos correspondentes (1ª Série – 2º ano, 2ª Série – 3º ano, 3ª Série – 4º ano, 4ª Série – 5º ano).

³ Verificar reportagem na íntegra no Anexo A.

⁴ Disponível em <<http://aprendiz.uol.com.br/content/wregojegid.mmp>>. Acesso em 17/abr/2008.

⁵ Disponível em <<http://aprendiz.uol.com.br/content/wregojegid.mmp>>. Acesso em 17/abr/2008.

⁶ Disponível em <<http://aprendiz.uol.com.br/content/wregojegid.mmp>>. Acesso em 17/abr/2008.

⁷ Verificar reportagem na íntegra no Anexo B.

do ano de 2008, mostra que 20% dos alunos obtiveram desempenho considerado insuficiente em matemática.

Dos 72,5 mil alunos de quarta série que passaram pela avaliação, cerca de 20% tiveram desempenho insuficiente. Eles tiveram nível de proficiência entre 100 e 125 numa escala que varia de 100 a 375. Outros 63% tiveram desempenho entre 150 e 200 na escala, que seria um desempenho regular. Acima disso, há apenas 16,6% dos alunos⁸.

Além disso, tomamos dados atuais do Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) como forma de analisar a situação geral de ensino de matemática de 1ª à 4ª série, pois este instrumento de avaliação, que se localiza na esfera estadual de ensino de São Paulo, permite-nos ampliar nossa visão sobre a situação do ensino de matemática nas séries iniciais.

Tabela 1 - Nível de proficiência em matemática - SARESP 2009

Distribuição Percentual dos Alunos nos Níveis de Proficiência das Redes Municipais em Matemática – SARESP 2009			
	Insuficiente	Adequado	Avançado
4ª série do fundamental	28,9%	65,3%	5,8%

Fonte: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2009>

Observando os dados da Tabela 1, verificamos que a grande maioria não desenvolveu sólidos conhecimentos na área matemática, haja vista que o item *adequado* diz respeito ao nível básico de conhecimentos, razoável, e que somados aos do nível insuficiente, resultam num percentual de 94,2%. Notamos, desse modo, que há ainda uma enorme necessidade de investimento no campo da educação matemática.

Cabe lembrar nesse momento que esta pesquisa não visa a julgar as causas dessa defasagem, nem culpar setores ou grupos por tal situação, nem tampouco considerar o trabalho com cálculo mental como a solução para todos os problemas, mas visa, antes de mais nada, apontá-lo como parte importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático nos alunos e que, conseqüentemente, poderia contribuir para a melhora dos resultados do quadro que brevemente esboçamos aqui.

⁸Disponível em <<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=79>>. Acesso em 20 abr. 2008.

A partir das considerações feitas a respeito desses três aspectos, constatamos que:

- As pesquisas acadêmicas apontam o cálculo mental como importante meio para desenvolver o pensamento matemático e a autonomia.
- Os alunos da rede municipal de São Paulo, de maneira geral, não apresentam bons resultados em matemática nas principais avaliações oficiais.

Surgem então alguns questionamentos perante tal situação: Será que o cálculo mental tem sido considerado no contexto escolar das séries iniciais da rede? Como isso tem se dado? De que maneira esse tipo de cálculo é orientado nos documentos curriculares e nos cursos de formação da rede? Como ele é considerado pelos professores? Como ele é significado e trabalhado em sala de aula?

Nesta perspectiva, esta pesquisa se propõe a traçar um olhar sobre a questão do cálculo mental no contexto da rede municipal e destacar, mais uma vez, as contribuições que esta maneira de calcular pode trazer para a construção do conhecimento. Dessa forma, pretendemos com esta pesquisa contribuir com mais uma reflexão sobre a ação pedagógica no campo da educação e da educação matemática.

E foi refletindo sobre tais considerações que delineamos então, nossa pergunta de pesquisa: Qual o valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais da rede municipal?

1.3. Objetivos

Antes de apresentarmos nossos objetivos, gostaríamos de esclarecer que responder a esta pergunta de pesquisa não significa fazer uma simples investigação quantitativa, averiguando se o tema é ou não abordado e com que frequência, mas pretende buscar indícios sobre *como* e *em que extensão* o cálculo mental tem sido compreendido e valorizado no contexto da rede municipal de São Paulo.

Dessa forma, alguns objetivos foram traçados e servirão de orientação para o desenvolvimento de toda a pesquisa, da busca de embasamento teórico ao recolhimento e interpretação dos dados.

Objetivo geral

- Compreender e caracterizar concepções, crenças, valores, atitudes e práticas a respeito do cálculo mental nas séries iniciais do Ensino Fundamental no contexto da rede municipal de São Paulo.

Objetivos específicos

- Identificar como os cursos de formação oferecidos pela rede abordam o trabalho com cálculo mental e compreender como esses cursos influenciam a prática do(a) professor(a).
- Identificar como os programas curriculares oficiais orientam e influenciam o trabalho do(a) professor(a) com cálculo mental.
- Identificar o valor e o papel do cálculo mental para os(as) professores(as) da rede municipal de São Paulo.
- Evidenciar a percepção do(a) professor(a) sobre o seu papel e o do aluno perante as situações de cálculo mental.

1.4. O caminho metodológico

O caminho metodológico, nesta pesquisa, tem o intuito de esclarecer a escolha do método de pesquisa e da fundamentação teórica. Posteriormente, no último capítulo, discorreremos sobre os procedimentos metodológicos em si, detalhando os meios para o recolhimento dos dados/fatos e interpretação dos mesmos.

Diante da pergunta de pesquisa e dos objetivos delimitados, foi necessário que se estabelecesse esse método e que se realizasse uma revisão bibliográfica que pudesse fundamentar a pesquisa na busca das respostas. Uma das finalidades da pesquisa é encaminhar respostas para questões formuladas mediante o foco de investigação do pesquisador – parte-se de um problema⁹, de uma interrogação, que podem gerar outras

⁹ O problema se refere à *pergunta de pesquisa* já definida na seção 1.2. E que, segundo Moroz (2002, p. 15), “A formulação do problema é o primeiro momento de decisão do processo de pesquisa”. E é o problema que dirige o trabalho do pesquisador.

interrogações. Para Gil (2002, p. 17), pode-se definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático de encontrar respostas. Para tal procedimento é escolhido um caminho - método - adequado e uma fundamentação teórica para que promovam uma discussão pertinente dos questionamentos levantados. Portanto, toda pesquisa baseia-se em uma teoria que serve como ponto de partida e sustentação da investigação.

Tendo em vista que a pesquisa científica é a realização de um estudo planejado, a escolha do método de abordagem do problema caracterizará os aspectos científicos da investigação, ou seja, a opção por um tipo de pesquisa determina a maneira como será feito todo o encaminhamento da pesquisa e sua interpretação. Desta forma, optamos pela *pesquisa qualitativa* e não por processos da *pesquisa quantitativa* – que se pauta na contagem de inúmeros casos, isolando algumas variáveis - procurando entender os fenômenos envolvidos na investigação de maneira a considerar a perspectiva dos participantes e da situação sócio-histórica da qual estão inseridos.

Os dados/fatos recolhidos e observados são considerados levando-se em conta o seu significado dentro de um contexto dado, e que este seja útil para os fins da pesquisa. Segundo D'Ambrosio (2006, p. 19), a pesquisa qualitativa “lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos”.

Portanto, a pesquisa qualitativa tem como objetivo principal interpretar o fenômeno em foco, por meio da observação, da descrição, da compreensão e da análise do significado das informações recolhidas. Vale aqui destacar que alguns autores não mencionam a denominação qualitativa ou quantitativa, porém classificam os tipos de pesquisa quanto aos seus objetivos ou procedimentos técnicos (GIL, 2002)¹⁰. De maneira geral, a pesquisa qualitativa busca a descrição dos dados com maior riqueza de detalhes, dando importância e valor às interpretações pessoais, carregadas de emoção e elaboração própria dos participantes da pesquisa e do pesquisador.

Posto nossa opção qualitativa de pesquisa, situaremos tais perspectivas em relação aos pressupostos teóricos elegidos como suporte da nossa pesquisa. A partir da revisão bibliográfica realizada em relação ao tema principal, cálculo mental, e de outras temáticas relacionadas a ele¹¹, foi possível a escolha de autores que embasam nossas observações.

¹⁰ Quanto aos objetivos, temos a pesquisa exploratória, a explicativa e a descritiva e quanto aos procedimentos técnicos podemos citar a pesquisa bibliográfica, a documental, a experimental, o levantamento, o estudo de campo, o estudo de caso, a pesquisa-ação. Neste caso, nossa pesquisa seria descritiva, documental e de levantamento.

¹¹ Aprendizagem com compreensão, autonomia, relação professor-aluno-saber, problemas.

Segundo Fazenda (1989), o delineamento de um método que tenha sustentação com a literatura e com a área em estudo é fundamental para se produzir, por meio da pesquisa, a ciência¹². Assim, estabelecer as relações entre os dados/fatos e a literatura pertinente contribui para a sustentação das interpretações. “É preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre um determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado sobre ele” (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

A partir da nossa revisão de literatura, pudemos perceber que, no decorrer do século 20, as discussões sobre a maneira como os alunos aprendem se intensificaram, motivadas, principalmente, pelas descobertas da psicologia do desenvolvimento e das abordagens construtivistas e socioconstrutivistas, feitas por Jean Piaget e Lev Vygotsky. Tais abordagens provocaram uma grande mudança no cenário educacional no que diz respeito às concepções de aprendizagem. Mais tarde, Constance Kamii, pautada nas concepções piagetianas, discute as abordagens construtivistas no contexto escolar, principalmente em relação ao ensino-aprendizagem de matemática e da aritmética.

Piaget e, posteriormente, Kamii reservam boa parte de suas pesquisas para discutir questões relativas à aprendizagem com compreensão e a importância do desenvolvimento da *autonomia* no aluno e consideram o conhecimento prévio, mesmo que aparentemente errôneo, como parte do processo de construção do conhecimento. Depois destas contribuições, o que antes era considerado erro do aluno ou falta de conhecimento começou a ser levado em conta como forma de raciocínio a ser estudado, um procedimento que deve ser compreendido e considerado pelo professor no planejamento das suas intervenções. Lidar com o erro, analisá-lo, rever estratégias, pensar novamente faz parte do processo de construção do conhecimento e contribui para uma aprendizagem com compreensão.

A psicologia do desenvolvimento impulsionou a demanda pela busca de novas metodologias. Surgiu a necessidade de lidar e ensinar esse aluno de novas maneiras, agora visto sob outros pontos de vista, valorizando o que ele traz de ideias. Muitos autores tiveram, a partir dessas pesquisas e teorias, principalmente por volta da década de 1980, grande influência na composição do novo perfil que se delineava no campo da educação, inclusive na área de matemática.

Em diversos países, propostas que consideravam tais abordagens em relação à construção do conhecimento começaram a ser discutidas e surgiu um novo campo de

¹² Segundo Moroz (2002, p. 14 a 18), o conhecimento científico apresenta quatro características principais: busca respostas, é fruto de um questionamento, possui procedimentos passíveis de reprodução por outra pessoa e se expõe à interlocução da comunidade de pesquisadores da área.

conhecimento, chamada pelos franceses de *Didática da Matemática*. Essas pesquisas tornaram-se cada vez mais constantes e começaram a difundir uma nova maneira de ensinar por meio das contribuições de pesquisadores como Brousseau, Vergnaud, Chevallard, Douady, Charnay e outros. Nos Estados Unidos, discussões sobre a metodologia de ensino de matemática foram abordadas por Kilpatrick, Hope, Kamii, Resnick, pelo NCTM e outros. Na Argentina, a discussão ficou representada por Zunino, Sadovsky, Saiz, Parra, Wolman, Brizuela e outros. No Brasil, ela também é conhecida como *Educação Matemática* e influenciou as pesquisas de Carraher, Schiliemann, Matos, Serrazina, dentre outros. Muitos desses pesquisadores discutiram não somente sobre o ensino de matemática, mas abordaram especificamente a questão do cálculo mental. Desse modo, pela relevância das contribuições da Didática da Matemática para a aprendizagem com compreensão, optamos por fundamentar nossa *concepção de cálculo mental*, nesta pesquisa, nos estudos realizados por esses autores e por outros ainda não citados até o momento.

Para compreendermos como o cálculo mental é concebido no ambiente educativo, foi preciso contextualizá-lo em relação às interações que ocorrem entre alunos, o professor e o saber. A abordagem construtivista também provocou discussões a esse respeito e, segundo Piaget (1973), conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real, mas em agir sobre ele e transformá-lo, entendendo a construção do conhecimento dentro de um contexto de interações. Para se compreender como essas interações ocorrem em da sala de aula, também nos apoiamos nos teóricos da Didática da Matemática, muitos deles também pautados nas teorias de Piaget. Guy Brousseau (1986), por exemplo, um dos pioneiros nessa discussão, escreveu sobre o “contrato didático”¹³ existente entre os integrantes dessa interação e elaborou a “Teoria das Situações-didáticas”¹⁴. Yves Chevallard (1991) abordou a questão da “Transposição didática”¹⁵ e Vergnaud (1990), para conhecer melhor as condições de ensino,

¹³ O conceito de *contrato didático* trata das interações entre professor e alunos nos contextos em sala de aula. Refere-se ao conjunto de cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber. As condições vivenciadas por professor e alunos são geralmente determinadas implicitamente pelas estratégias de ensino adotadas e pelos contextos vivenciados.

¹⁴ Para entender o termo “*situação didática*”, Freitas (2002, p. 67) retoma a definição elaborada por Brousseau (*apud* ARTIGUE, 1998): “Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes”.

¹⁵ “Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática*.” (CHEVALLARD, 1991, p.39).

elaborou sua “Teoria dos Campos Conceituais”¹⁶. Já Roland Charnay (1996), propôs “modelos didáticos” que consideram as relações que os professores e os alunos mantêm com o saber e, mais especificamente, do saber em relação à resolução de problemas.

Segundo Butlen e Pezard (2000, p.5), a prática constante de *cálculo mental* permite aumentar as capacidades de iniciativas dos alunos, fazendo com que estes explorem, de maneira rápida, diferentes formas de resolverem um *problema*¹⁷. Foi pensando na relação que esses e outros autores fizeram entre cálculo mental e problemas que escolhemos Charnay como uma das referências teóricas de nossa investigação.

Charnay (1996) coloca que o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seu conhecimento para resolver problemas e considera que uma das grandes dificuldades do ensino da matemática, é tornar o conteúdo carregado de significação, de modo que tenha sentido para o aluno. Charnay concebe que o sentido de um conhecimento matemático se define também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma etc. O aluno ensaia, busca, propõe soluções, confronta-as com a de seus colegas, defende-as e as discute, de forma autônoma e reflexiva. E as considerações deste autor são o âmago da ideia de cálculo mental apontada nesta pesquisa.

Escolhemos, portanto, para embasar nossa investigação, além dos outros teóricos já mencionados: Piaget, por suas contribuições na esfera do desenvolvimento cognitivo; Kamii, por suas proposições a respeito do ensino de matemática, principalmente às questões relacionadas à aritmética, e Charnay, por suas discussões sobre as relações em sala de aula e problemas. Além disso, todos eles valorizam o desenvolvimento da autonomia discente, bem como a construção de um saber significativo, com compreensão, que faça sentido para o aluno. Tais contribuições serviram de mote para nossas observações e interpretações, pois estão direta ou indiretamente relacionadas à concepção de cálculo mental apontada neste trabalho.

¹⁶ Segundo a *Teoria dos Campos Conceituais*, o conceito não deve ser estudado isoladamente e sim em situações que inter-relacionem vários conceitos. Campo conceitual é definido por Vergnaud como “um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados” (1983, p. 127). Partindo desta ideia, os professores de matemática têm o desafio de fazer com que, em sala de aula, aconteça uma melhor relação entre o conceito e a resolução de problemas, tornando-os mais interessantes e compreensíveis para os alunos.

¹⁷ Grifos nossos.

CAPÍTULO 2. CÁLCULO MENTAL: PAPEL, VALOR E SIGNIFICADO

O trecho a seguir, retirado de uma entrevista com Susana Wolman e Maria Emilia Quaranta¹⁸, retrata a importância que tem o cálculo mental no desenvolvimento do pensamento matemático e que discutiremos melhor no presente capítulo.

O cálculo mental desenvolve o pensamento flexível, promove o sentido do número e encoraja a criatividade e um trabalho eficiente com números, e reciprocamente, um sentido do número mais apurado conduz por sua vez ao desenvolvimento de outras estratégias de cálculo mental.

Antes, porém, consideramos valioso discutir as *diferentes interpretações* relacionadas ao assunto, o que, de algum modo, pode esclarecer mais a nossa visão sobre cálculo mental. Procuramos aqui também discutir alguns modos de se trabalhar com o assunto em sala de aula e contextualizar o ensino do cálculo mental na história da educação matemática no Brasil.

2.1. Cálculo mental: a construção de um significado

“Cálculo mental” é uma expressão que pode ter muitos significados, dividindo opiniões, provocando dúvidas e expectativas” (PARRA, 1996, p. 186). Muitas pessoas a relacionam a situações cotidianas onde não necessitamos de fazer *cálculo exato*, apenas aproximado, é o que consideram cálculo “de cabeça”. Nesse caso, estaríamos associando a ideia de cálculo mental com cálculo não-exato. Embora o cálculo mental realmente esteja presente em muitas situações do dia-a-dia, podemos utilizá-lo para realizar *cálculos aproximados* e também exatos. São aquelas situações em que, por exemplo, a pessoa está na dúvida se compra uma caixa com três pacotes de biscoito por R\$ 3,20 ou compra os pacotes individualmente por R\$ 1,60. Fazendo um cálculo aproximado, cada pacote da caixa sai por 1 real e “*pouquinho*”, menos do que R\$1,60 e, então, é mais barato comprar o pacote do que comprar individualmente. Neste caso, a ideia de cálculo mental também é confundida com estimativa e casualidade: o utilizo em situações corriqueiras e sem necessidade de precisão.

Outra confusão gerada pela expressão está em relação ao tempo de execução. Assim como no exemplo anterior, muitos acabam achando que o cálculo mental tem sua utilidade

¹⁸Disponível em: <antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0200/.../wolman_quaranta.doc>. Acesso em: 13 jan. 2010, s.d.

para resolver cálculos rapidamente. Ser bom de cálculo, para muitos, é ser bom de contas, fazer contas¹⁹ rápidas. Faz-se então, com frequência, a associação entre cálculo mental e *cálculo rápido*, visão desconsiderada por nossa concepção adotada, pois ele pode ser o caminho mais rápido ou não de resolução, o mais importante é a segurança com que o indivíduo resolve esse cálculo, o controle que ele tem sobre o processo da resolução, propiciando-lhe maior autonomia e validação dos resultados. Mas lembramos que a própria autonomia e segurança acabam por propiciar um aumento da rapidez nos cálculos, de maneira indireta, sem ser o principal objetivo do trabalho com cálculo mental.

Parra relata que, na perspectiva que adota,

a rapidez não é nem uma característica nem um valor, ainda que possa ser uma ferramenta em situações didáticas nas quais, por exemplo, permita aos alunos distinguir os cálculos que dispõem os resultados na memória dos que não dispõem (1996, p. 189).

Douady (1994) também salienta que, no âmbito de suas pesquisas, a prática regular do cálculo mental desenvolve em quase todos os alunos uma grande rapidez de cálculo.

Para alguns ainda, a expressão está associada a qualquer cálculo que possa ser feito sem “lápiz e papel”, ou seja, a oposição entre cálculo mental e *cálculo escrito*. Isto impediria a criança de, por exemplo, num âmbito escolar, registrar as etapas de raciocínio na busca do resultado e conferir/rever os resultados parciais de maneira a garantir o controle e validação referidos anteriormente. Anotar um resultado parcial pode ser importante para facilitar a estratégia seguinte na busca do resultado final. Com o apoio do “lápiz e papel”, cada vez mais a criança poderá elaborar estratégias observáveis e passíveis de conferência, para torná-la cada vez mais independente desses objetos e aproximando-se cada vez mais do cálculo sem tais recursos concretos. Escrever/registrar o cálculo mental não significa também torná-lo uma técnica operatória assim como o algoritmo, mas registrar as etapas de pensamento de um modo de calcular. Se uma criança quiser calcular $138 - 49$, ela pode, por exemplo, fazer:

¹⁹ “‘Contas’ era antigamente o nome da aritmética rudimentar. Alguns ainda a chamam de ‘cálculo’, dando-lhe duas designações: de contas (ou cálculo), para os rudimentos da aritmética do curso primário, e de Aritmética, para a ciência, propriamente dita, estudada nos cursos secundários. Havia a vantagem de fixar com bastante nitidez a linha de demarcação da didática primária e da didática secundária dessa disciplina. E o que ainda se dá hoje em dia na língua alemã: Rechenunterricht, que se traduz ao pé da letra por ensino de contas, e o vocábulo que designa o estudo da Aritmética no curso primário” (Backheuser, 1946, p. 17).

(Tiro 40 do 138 e, depois, 9)

$$138 - 40 = ? \text{ (não sei, mas sei que } 40 = 30 + 10 \text{)}$$

$$138 - 30 = 108 \text{ (tiro, então, primeiro o 30)}$$

$$108 - 10 = 98 \text{ (e depois tiro o 10)}$$

$$98 - 9 = ? \text{ (agora não sei, mas sei quanto é } 98 - 10 \text{)}$$

$$98 - 10 = 88$$

Então $98 - 9 = 89$ (coloco + 1 ao resultado de $98 - 10$, pois era para tirar só 9 e tirei 10 para facilitar o cálculo)

As situações entre parênteses representam pensamentos possíveis da criança e não seriam, neste caso, registrados, o que nos restaria, possivelmente, alguns registros do tipo:

$138 - 49 =$	
$138 - 40 =$	
$138 - 30 = 108$	
$108 - 10 = 98$	
$98 - 9 =$	
$98 - 10 = 88$	
$98 - 9 = 89$	

$$\begin{array}{r}
 30 \quad 10 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 138 - 49 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 138 - 30 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 108 - 10 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 98 - 9 = 89
 \end{array}$$

Em outra situação, o aluno poderia registrar sim, por escrito, com palavras, como pensou para resolver tal cálculo. Por exemplo:

Eu pensei assim: eu posso arredondar o 138 para 140 e tirar o 40 do 140, que dá 100. Do 100, eu tiro o 9 e dá 91. Mas como eu coloquei 2 para arredondar o 138, agora eu tiro o 2 e dá 89.

Notemos que, em ambos os casos, a criança considerou o valor posicional dos algarismos, onde 4 é 40 e não 4 dezenas. Ela considerou sempre o valor posicional usando 30 (e não 3), 100 (e não 1), ao contrário do que ocorre na realização do algoritmo, que utiliza apenas algarismos. Considerar o valor posicional permite à criança compreender melhor o nosso sistema de numeração. Para Carraher (1988), o cálculo mental deve ser enfatizado, pois esta atividade matemática tem sólidas bases na compreensão do número e do sistema decimal, habilidades que devem ser utilizadas, e não desprezadas, pela escola. Além disso, as situações

anteriormente citadas servem como etapas para que um dia, possam realizar estes cálculos sem o registro, realmente mental, ou que, em outras situações, ainda necessitem do papel. A criança de nosso exemplo poderia usar os fatos que dispõe de memória e registrar as etapas para formular o processo de resolução. Por enquanto, para aquela criança, registrar (com números ou palavras) é importante para organizar o processo do cálculo e mostrar/trocar as estratégias desse processo com os colegas.

Kamii (1994, p. 121) também defende a discussão de diferentes registros pelas crianças, inclusive das etapas de resolução do cálculo mental. Cita o exemplo de duas crianças que resolvem 10×36 de duas maneiras diferentes. Carol já sabe que $10 \times 30 = 300$, então ela acrescenta os 6 como se vê na Figura 1 e anuncia que a resposta é 360. Já Jerry, escreveu 10 vezes o 36 e foi fazendo os cálculos de maneira radial.

Figura 1 - Registros de cálculo mental de 10×36 - Carol e Jerry

Apesar de podermos escrever o cálculo mental, o cálculo escrito está constantemente relacionado ao algoritmo. Gonçalves e Freitas (2008), citando Guimarães e Freitas (2007, p.1), observa que “[...] as escolas brasileiras, em sua maioria, se limitam em utilizar o cálculo escrito e o exato.” Para os autores, na visão de Correa e Moura (1996), o que predomina são algoritmos escritos.

Cabe aqui esclarecer também a nossa concepção de algoritmo e que vai ao encontro ao caracterizado por Gómez Alfonso. Segundo o autor (1993, p. 106), os algoritmos de lápis e papel se caracterizam por serem²⁰:

1. **Escritos**, no sentido de que permanecem sobre o papel e podem ser corrigidos.
2. **Regulares ou padronizados**. Todo mundo os faz igual.
3. **Abreviados**. Resumem várias linhas de equação ocultando passos que têm a ver com as propriedades associativa, comutativa e distributiva.
4. **Automáticos**. Não é necessário pensar, nem refletir. Nem sequer precisam ser compreendidos para poderem ser executados.
5. **Simbólicos**. Trata-se de manipular símbolos sem referência alguma ao mundo real.
6. **Gerais**, no sentido de que funcionam com qualquer número.
7. **Analíticos**. Os números são considerados separadamente, quebrados. Os algarismos são manipulados separadamente.
8. **Tradicionais**. São “aqueles de toda vida”.
9. **De confiança**. Porque funcionam sempre.
10. **Familiares**. São os mesmos dos nossos pais e avós.

Dessa forma, os algoritmos possuem também as suas vantagens, pois se seguidas as suas regras de maneira precisa, obteremos sempre resultados corretos. Mas destacamos que seguir essas regras sem a compreensão de seu significado traz pouco benefício à criança.

O que Guimarães e Freitas quiseram dizer com o uso intenso de cálculo escrito e exato é em relação ao uso do algoritmo, que sempre exige a sua forma escrita e ainda é prioridade em muitas escolas brasileiras. As crianças, nos exemplos anteriores (Figura 1), tiveram processos de solução diferentes, maneiras diferentes de explicar esses processos, de considerar os valores posicionais, de se trabalhar com um sistema compreensivo a respeito das relações numéricas. Crianças acostumadas a realizar o algoritmo sem pensar compreensivamente sobre essas relações apresentam resultados sem avaliar sua real possibilidade. Em uma de nossas aulas como professora, em uma situação-problema sobre futebol, por exemplo, surgiu a informação de que a Liga Inglesa de futebol foi criada em 1863. As crianças começaram a calcular há quantos anos ela foi criada e uma criança apresentou a seguinte situação:

²⁰ Tradução e grifos nossos.

$\begin{array}{r} - 1863 \\ 2010 \\ \hline 1853 \end{array}$	<p>A aluna respondeu ainda, por escrito: A Liga Inglesa de Futebol foi criada há 1853 anos. Ela achou que deveria fazer uma operação de subtração, pois deve estar acostumada a atentar para as expressões no enunciado que indicam se “é de mais ou de menos”. Armou sem prestar atenção que no algoritmo convencional devemos colocar o maior número em cima. E realizou as subtrações da maneira mais confortável, tirando o número menor do maior (na maioria das vezes, o de cima menos o debaixo: $3 - 0 = 3$, $6 - 1 = 5$, $8 - 0 = 8$ e ainda, na última ordem, fez ao contrário, o debaixo menos o de cima, $2 - 1 = 1$. Além da falta de segurança nas regras do algoritmo e de sua compreensão, a criança demonstrou não perceber as relações numéricas envolvidas na situação, pois se a Liga foi criada em 1863, não poderia fazer 1853 anos que ela foi criada.</p>
--	---

Dessa maneira, ao ensinar algoritmos precipitadamente, corremos o risco de causar o seu uso sem compreensão, realizando-o mecanicamente e aceitando seus resultados sem questionamento. O fato de os alunos, logo no início da educação fundamental, serem colocados em contato com os algoritmos das operações, sem o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo mental, pode diminuir a compreensão real das relações numéricas. Pois quando se “atropela” a aprendizagem com o ensino dos algoritmos antes do domínio do cálculo, não se trabalha sua lógica, somente sua sequência e regras e, por se tratar de um conhecimento não questionado, apenas memorizado, unilateral, pode bloquear o raciocínio, não permitindo que se realize o estabelecimento de relações, a principal característica do cálculo mental.

Por isso, Kamii (1994, p. 90) esclarece que as concepções a respeito do construtivismo seguem em direção oposta às de ensinar tais algoritmos precocemente e usar materiais concretos que artificializam a compreensão dos números e operações. “Minha posição, resumidamente, é que o construtivismo sugere a convivência de encorajar as crianças a inventarem seus próprios procedimentos em vez de ensinar algoritmos e explicá-los com materiais concretos”. Além disso, como o objetivo do algoritmo é a rapidez e não a compreensão (ERMEL, 1995) ele deve ser o último passo do processo de evolução dos procedimentos de cálculo, para que caso ocorra algum problema, o aluno tenha a alternativa de utilizar os cálculos pensados como recurso de conferência na avaliação dos resultados.

Portanto, do nosso ponto de vista, o maior valor, em termos cognitivos, está no fato de que o trabalho com o cálculo mental permite que o aluno se utilize de seus princípios para pensar no algoritmo²¹. A criança pode utilizar um algoritmo ampliado²², por exemplo, que é

²¹ O tipo de algoritmo mais utilizado no Brasil é o algoritmo americano.

²² Traduzido pela pesquisadora do original em inglês *Expand Algorithm*.

anterior ao algoritmo americano comum²³, que demonstra um entendimento maior das partes a serem seguidas no algoritmo. Tomemos um exemplo mostrado por Kilpatrick (2001, p. 207 e 209) na Figura 2, que demonstra o uso do cálculo mental no algoritmo ampliado (que demonstra, com mais consciência, as várias etapas do processo) e, depois, o algoritmo americano comum, onde se espera que a criança, a partir dessa e outras vivências anteriores, o realize com mais compreensão.

Algoritmo ampliado	Algoritmo americano comum
$ \begin{array}{r} 46 = 40 + 6 \\ \times 68 = 60 + 8 \\ \hline 2400 = 60 \times 40 \\ 360 = 60 \times 6 \\ 320 = 8 \times 40 \\ \underline{48} = 8 \times 6 \\ 3128 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ \\ 46 \\ \times 68 \\ \hline 1368 \\ 276 \\ \hline 3128 \end{array} $

Figura 2 - Exemplos de algoritmo ampliado e americano, segundo Kilpatrick

Há ideias também que consideram como cálculo mental todo *cálculo de memória*. Decorar tabuadas, nesse caso, seria considerado cálculo mental. O cálculo visto como processo descarta essa possibilidade de relacioná-lo à simples memorização, visto que ela é fim e não processo. É certo que a memorização de certos fatos fundamentais das operações auxiliam na resolução do cálculo e devem ser considerados em atividades que ampliem o repertório de memória para facilitar o próprio cálculo mental. Mas esse não deve ser um fim em si próprio, o que não nos permite relacionar direta e unicamente memória a cálculo.

Saber que $2 + 4 = 6$ não é fazer um cálculo e sim saber um resultado de memória. Contudo, se uma criança, perante uma situação-problema que envolva o cálculo de $23 + 6$, registra $23 + 2 + 4 = 29$, ela mostra que, já sabendo que $2 + 4 = 6$, poderia usar essa memorização do resultado para agrupar mais confortavelmente os elementos requisitados na operação. Isto é processo. Também poderia pensar em $24 + 6$. Pois pode saber que $4 + 6$ dá 10, então seria $20 + 10 = 30$, e tiraria o 1 que acrescentou, resultando no 29. Poderia haver outros jeitos, mas essa criança optou por esse caminho, outras poderiam optar por outros diferentes processos. E assim, o cálculo mental permite liberdade e flexibilidade na escolha do processo de resolução, atribuindo-lhe maior segurança e controle.

²³ Tradução nossa do original em inglês *A Common U. S. Algorithm*.

Desse modo, Parra (1996, p. 201) ressalta que “quanto à resolução de problemas, diversos estudos formulam que, devido a que a memória de trabalho seja limitada, o fato de que os alunos possam apelar ao cálculo automático libera espaço mental para que se centrem nos aspectos mais complexos (e provavelmente mais importantes) do problema a ser tratado”. Assim, saber alguns cálculos básicos de memória (cálculos automáticos) ajuda a realizar cálculos mentais e resolver problemas que os incluem.

Uma última reflexão que se faz necessária nesta discussão é a de que o uso da *calculadora* é contrário à ideia de cálculo mental. Muitos acham que não é possível o trabalho com cálculo mental na escola ser realizado com a calculadora ou computador. Novamente estaremos na contramão da construção de nossa concepção de cálculo mental, pois há inúmeras atividades que podem ser feitas para desenvolvermos cálculos eficientes, fazendo uso da calculadora, haja vista que o resultado não é o mais importante e sim a construção do percurso para obtê-lo. Segundo Andrade (1998), as calculadoras e os computadores desempenham essa tarefa com muito mais eficácia mas, a *compreensão crítica daquilo que se está fazendo é muito importante* ²⁴. O indivíduo tem que ter noção dos cálculos para acompanhar seus resultados. A calculadora, em sala de aula, tem que ser pensada como uma ferramenta auxiliar, mediadora, de um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão crítica e o fazer matemático como um todo. De que forma devo agir, qual deve ser o procedimento mais adequado para garantir a chegada ao resultado estimado? Que tentativas ou testes posso fazer com a calculadora que ajudem a pensar em uma solução? Na escola, a calculadora não precisa ser usada para obter resultados, mas para auxiliar o aluno a ampliar seu repertório de estratégias de cálculo, inclusive com números maiores. Segundo Albergaria e Ponte (2008, p. 102), “o uso da calculadora permite trabalhar na sala de aula com números grandes e com muitas casas decimais, levando os alunos a explorar mais profundamente o seu conhecimento dos números”. Por exemplo, poderíamos sugerir uma situação tal como: “Anote o 23400 na calculadora, utilizando somente os algarismos 1 e 0 e o sinal +”. Várias poderiam ser as estratégias de resolução: desde $10000 + 10000 + 100 + 100 + 100 + 100$ até somar de 100 em 100, dentre outras. O importante é a criança discutir com outras crianças as estratégias, testando suas hipóteses na calculadora e justificando a escolha por um ou outro caminho. Além disso, pode-se deixar que pensem sobre outras questões: Qual o jeito mais fácil de se resolver esta situação? Qual o mais curto? E qual o mais longo? Temos aqui questão gerando outras questões e outras discussões.

²⁴ Grifos do autor.

Podemos citar um outro exemplo: “Coloque um número na calculadora de modo tal que, ao multiplicá-lo por $10 \times 10 \times 10$, se obtenha um número de 4 algarismos.” Que números permitem resolver esse problema? O aluno tem que por em jogo seu conhecimento sobre o sistema de numeração e sua regularidade, a base 10, além de estimativas. Dessa forma, o uso da calculadora em sala de aula permite desenvolver atividades de contagem, reconhecer padrões e regularidades em contagens e em cálculos, desenvolver capacidades de estimativa, promovendo habilidades de cálculo mental e auxiliando-o a utilizar com compreensão essa ferramenta tão atual. “Temos que ser homens do nosso tempo. A calculadora, nesse trabalho, é usada como um elemento mediador no processo” (ANDRADE, 1998, p.23).

Para Albergaria e Ponte (2008, p. 102):

Este instrumento dá a todos os alunos a oportunidade de desenvolver o seu raciocínio matemático na identificação de propriedades numéricas, estabelecimento de generalizações e determinação de padrões numéricos. A atenção dos alunos foca-se na tarefa, na situação apresentada e não no procedimento de cálculo. Favorece assim a interpretação dos dados dos problemas e dos resultados obtidos bem como da sua plausibilidade.

Neste sentido, parece que o aspecto central do cálculo mental pode ser compreendido pela sua importância na produção e utilização de *procedimentos confiáveis* e não na rapidez. Podemos desenvolver agilidade no cálculo mental, mas o conhecimento de suas variadas estratégias e sua rapidez dependerão da idade do aluno e da qualidade das experiências matemáticas vivenciadas ao longo de seu processo de aprendizagem. As noções de cálculo desenvolvidas pelo cálculo mental ajudam o indivíduo inclusive nos momentos em que usa a calculadora. Se calculo, por exemplo, 12×39 e digito, sem querer, o 6 no lugar do 3 (pois as teclas são próximas) e obtenho 828. Uma pessoa habituada a estimar cálculos, irá duvidar desse resultado, pois deveria dar algo em torno de 400 (pois $10 \times 40 = 400$). Dessa maneira, tanto o cálculo mental quanto a calculadora são procedimentos de cálculo importantes, um não exclui o outro e ambos devem ser considerados na escola.

Para Cebolo (2006), existem algumas razões para a utilização da calculadora:

- A calculadora permite libertar o ensino e a aprendizagem da matemática do excessivo peso do cálculo.
- A calculadora permite estimular diversas formas de raciocínio.
- A calculadora permite encarar novas dimensões na resolução de problemas.
- A calculadora permite estimular a atividade matemática de investigação.

- A calculadora permite que o aluno seja mais autônomo.
- A calculadora permite criticar os resultados que a máquina fornece e de avaliar a sua razoabilidade.
- A calculadora permite trabalhar com dados reais.
- A calculadora aumenta a auto-estima dos alunos.

Podemos notar muitas semelhanças entre as habilidades que o uso da calculadora permite desenvolver e o trabalho com cálculo mental. Ambos são de fundamental importância para desenvolver habilidades matemáticas nos alunos, no âmbito da sala de aula, e são ferramentas importantes e que estarão sempre presentes na vida do indivíduo, no âmbito extra-escolar. O que procuraremos mostrar aqui é que a relevância do trabalho com cálculo mental (e com outros tipos de cálculo) é muito mais ampla do que obter resultados; está ligado, inclusive, à necessidade social de se enfrentar um mundo que cada vez mais exige criatividade, autonomia e segurança para realizar atividades diversas. Para Parra (1996) “responder à necessidade social indica uma aproximação com o cálculo que torne os alunos capazes de escolher os procedimentos apropriados, encontrar resultados e julgar a validade das respostas”.

O NCTM (1996, p. 5) cita um esquema dessas reflexões preliminares que fizemos até o momento sobre as ideias relacionadas ao cálculo mental (Figura 3).

Figura 3 - Relações entre cálculo mental e ideias associadas - NCTM

Analisando o esquema podemos observar que o cálculo mental é central nessa relação e tem como ponto de partida um *problema*²⁵. Para Charnay (1996, p. 187), o centro do ensino de matemática é a resolução de problemas e “a capacidade progressiva de resolução de problemas demanda um domínio crescente de recursos de cálculo”. Ou seja, são necessárias atividades que ampliem tais recursos ou estratégias de cálculo, mas são nos contextos do problema, tanto escolares como cotidianos, que eles demonstram sua maior relevância. Há momentos em que a solução ou resposta é suficiente, mas há muitas outras situações em que temos que ir além.

A partir do problema o indivíduo vai mobilizar seus conhecimentos para avaliar a necessidade que a situação requer: se é preciso realizar um cálculo *exato* ou *aproximado*. Nem sempre o cálculo exato é o mais importante, muitas vezes, o aproximado é o mais adequado. Se estou numa fila do cinema e preciso saber se com meus R\$ 40,00 posso comprar dois ingressos de R\$ 13,50 e ainda sobrar dinheiro para a pipoca de R\$ 8,00, posso fazer, por exemplo, um arredondamento para estimar essa possibilidade ($13 + 13 + 10 = 36$). Além disso, poderia ser verificado o valor exato e o que poderia fazer com o restante do troco: guardar, tomar um café etc. Desse modo, o problema não fica limitado a uma solução, mas faz parte de uma situação mais ampla.

Escolhido o tipo de resposta de que necessito (exata ou aproximada), posso optar, para uma *resposta exata*, pela utilização da calculadora, do computador, do algoritmo ou do cálculo mental. Numa viagem, por exemplo, estou me aproximando do guichê e quero conferir o troco. Obviamente não farei uso da calculadora, nem do computador e nem retirarei um papel do bolso para efetuar um algoritmo. O cálculo mental, nesse caso, é a opção mais adequada. Se preciso saber qual o valor de cada prestação para realizar o financiamento de um imóvel, considerando meu rendimento mensal, os juros e correção, as intermediárias etc, é mais adequado fazer uso da calculadora ou do computador. Num jogo entre amigos, por exemplo, em que cada um marca sua pontuação, ao final podem optar por fazer cálculo mental, usar algoritmo ou calculadora, dependendo do tipo de cálculo. Usarei o procedimento que julgar mais adequado e confortável em cada situação para obter a resposta exata com mais segurança.

Se a situação requerer uma *resposta aproximada*, posso fazer uso do cálculo mental com *estimativa*. Um dos primeiros passos para o desenvolvimento do cálculo mental será o exercício da estimativa. O aluno deve desenvolver a sua capacidade de inferir o resultado

²⁵ Podemos também considerar como situação-problema.

possível para determinado cálculo. Só com o exercício continuado de estimativas o aluno ganhará capacidade de avaliar os resultados que obtém. A estimativa pode e deve ser usada junto com outros procedimentos, de maneira a antecipar, controlar, julgar a confiabilidade dos resultados. Assim, cálculo mental e estimativa possuem significados muito próximos. A relação entre eles está no fato do cálculo mental poder ser feito a partir de estimativa (cálculo aproximado mais geral) e estimamos a partir de um cálculo mental. Se tenho a ideia de quanto mede um metro posso, por exemplo, estimar a altura de um prédio, a largura de um jardim, posso estimar quantos metros de tecido usarei para fazer uma cortina. Se sei que com duas colheres de sopa de chocolate posso fazer um bolo, posso estimar para quantos bolos um pacote de chocolate deve render.

É importante expor e confrontar os alunos com as suas próprias análises e melhorar o sentido do número com a ajuda da estimativa, pois considera-se que este proporciona uma aprendizagem mais eficaz e compreensão mais profundas (GÓMEZ ALFONSO, 1995). E a estimativa pode estar atrelada ao cálculo mental em várias situações de cálculo aproximado. Se uma cozinheira coloca 18 biscoitinhos por assadeira e leva cerca de 10 minutos para assá-los, deve estimar/calcular que, para cumprir sua encomenda de 1000 biscoitos, ela deve demorar cerca de 500 minutos, pois 18 é aproximadamente 20 e 1000 é 50 vezes mais que 20. Então vou levar 50 vezes mais de tempo: $50 \times 10 = 500$ minutos ou um pouco mais de 8 horas.

Burkert (2000) explicita que ao praticar o cálculo estimativo, os alunos podem, em geral, explorar diversas outras habilidades matemáticas e preparam-se produtiva e animadamente para problemas da vida real. O exercício da estimativa resulta na formação de alunos ativamente envolvidos com os processos de resolução de problemas e com a construção do próprio conhecimento. E completa mais adiante, citando Segovia et al (1987, p. 21), “uma das características da estimativa é que o valor encontrado não tem que ser exato, mas sim adequado para se tomar decisões”. Para Hope (1986), o relacionamento íntimo entre estimativa e cálculo mental implica em que nenhum programa de instrução que ensine habilidades de estimativa pode deixar de lado o ensino de cálculo mental. Estimativa, em cálculo, é nada mais nada menos que um cálculo mental menos preciso.

O *Institut National de Recherche Pédagogique* - INRP (1991)²⁶, sublinha algumas vantagens no trato com cálculo mental e estimativa. Uma delas, essencial, é que a criança tome realmente consciência do novo poder que os números lhe conferem para agir sobre o

²⁶ (INRP-ERMEL), em seu livro “À descoberta dos números: contar, cantar e calcular”.

real e, em particular, para resolver problemas em que se trata de *antecipar o resultado* de uma ação ainda não realizada. Segundo Gómez Alfonso (2005), para trabalharmos com cálculos aproximados, é interessante fazermos uso dos arredondamentos que facilitam esse tipo de cálculo e permitem aproveitar as vantagens de se operar com números terminados em zero, em nosso sistema de numeração. Podemos arredondar os números envolvidos no cálculo para a dezena ou centena ou milhar mais próximo – o que for mais adequado à situação e ao objetivo – para chegar-se ao resultado aproximado de forma mais eficiente.

Podemos perceber que o *cálculo mental* é a única estratégia que permite realizar cálculos *aproximados* e *exatos*. É claro que ele não deve ser o único procedimento, como já comentando anteriormente, mas o cálculo mental tem importante papel nesse percurso de opções de resolução do problema, aliás, tem papel bem centralizado, merecendo atenção relevante nas escolhas curriculares e metodológicas. Parra (1996) o define como um conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, esses são articulados para permitir a escolha da melhor estratégia, obtendo resultados exatos ou aproximados, dependendo dos objetivos e da situação apresentada.

O cálculo mental permite essa variedade de escolhas, flexibilizando a capacidade de raciocinar do aluno. E esse aluno fora do ambiente escolar, pelo resto de sua vida, irá defrontar-se, principalmente, com situações que requerem o cálculo mental e o uso de calculadora ou computador. Segundo Gómez Alfonso (1993), o indivíduo deve escolher a maneira mais adequada para resolver seu problema, porém, na escola nos é ensinado como calcular de uma certa maneira, mas não como fazer para calcular da melhor maneira. Então, por que investir tanto tempo no treino do algoritmo? Não estamos aqui querendo descartá-lo do contexto escolar, mas questionar o seu intenso trabalho e a sua precocidade. Por que trabalhar o algoritmo logo nos primeiros anos do ensino fundamental e mais, na educação infantil?

Matos e Serrazina (1996, p. 259) apresentam uma concepção de cálculo mental que vai ao encontro à adotada nesta pesquisa. Segundo os autores, as características dos procedimentos de cálculo mental são:

- São variáveis, isto é, as crianças utilizam diferentes estratégias para calcular o mesmo resultado;
- São flexíveis e podem ser adaptados aos números em causa;
- São ativos, isto é, permitem a cada um escolher o próprio método de forma consciente ou não;

- São holísticos no sentido em que lidam com os números como um todo e não com dígitos individuais;
- São afirmativos, isto é, começam muitas vezes com o primeiro número, por exemplo, $47 + 28$ é 47, 57, 67, 77, 75;
- Exigem a compreensão e só podem ser usados se forem compreendidos;
- Dão uma aproximação inicial da resposta porque os dígitos da esquerda são calculados primeiro.

A concepção de cálculo mental adotada aqui se refere a *cálculo pensado*, como define Parra (1996, p. 201):

O cálculo pensado é eminentemente particularizante: cada problema é novo e a aprendizagem vai consistir essencialmente em compreender que para uma mesma operação determinados cálculos são mais simples que outros, e que pode ser útil escolher um caminho aparentemente mais longo, porém menos difícil.

A autora, citando ERMEL (1981, p. 201), ainda completa: “Este modo engenhoso de tatear, errático, heurístico, parece ser antípoda da conduta matemática garantida, ‘direta ao objetivo’, elegante, simples”.

Como afirma Kamii (1995), o cálculo mental ou cálculo pensado também fortalece a aprendizagem das convenções, da linguagem específica e do conhecimento matemático propriamente dito porque, ao lidar com as quantidades como um todo, os alunos apuram seu senso numérico e ampliam suas ideias sobre valor posicional, diferentemente do que ocorre no trabalho com algoritmos, quando tendem a considerar cada ordem com um algarismo.

No cálculo pensado, o aluno tem que selecionar, em função dos números envolvidos e da operação formulada, um procedimento adequado, de que tenha conhecimento, para solucionar e validar seu resultado. Para Parra (1996), os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números.

O cálculo mental/pensado exige que o educando tenha legítimas experiências matemáticas, isto é, que participe da construção de conceitos matemáticos, compreendendo as possibilidades implicadas em cada operação.

Já o *cálculo automático* ou *mecânico*, definido por esta autora, faz referência àquele que utiliza o algoritmo ou material (ábaco, régua de cálculo, calculadora, tabelas etc)

Cálculo automático ou mecânico ► utilização sistemática e única de um algoritmo ou material (ábaco, calculadora...)

Cálculo pensado e refletido ► em relação ao cálculo mental ► analisar dados e articulá-los de diversas maneiras sem algoritmo pré-estabelecido.

Para Carraher e Schliemann (1983), este tipo de procedimento mecânico leva a criança a focalizar sua atenção nos símbolos escritos, perdendo, assim, tanto o significado das transações que estão quantificadas como o significado dos algarismos dentro do sistema de quantificação. Esta perda de significado parece explicar a facilidade com que a criança aceita resultados absurdos. É importante que o procedimento de cálculo mental seja pensado e validado pelo sujeito que propõe o processo, o contrário do que acontece com relação aos tradicionais *algoritmos* que foram apenas apresentados aos alunos. Segundo Mendonça-Domite (1996), um algoritmo é uma sequência de passos pré-estabelecidos que, se seguidos, devem levar ao sucesso de uma tarefa. Isto é, se executarmos, numa sequência, os passos elaborados para realizar um algoritmo de uma operação matemática, estes certamente nos levarão a um resultado correto. Embora o termo tenha um significado mais amplo, algoritmo também aparece, nos programas escolares, com o nome de técnica operatória.

Relembremos que há benefícios no algoritmo, este tipo de cálculo também tem sua utilidade, não sendo dispensável de forma alguma. Há apenas que se tomar o cuidado para que o ensino precoce do algoritmo não atrapalhe etapas tão importantes de compreensão do Sistema de Numeração Decimal (SND) e das propriedades das operações, que podem ser desenvolvidas de maneira significativa pelo trabalho com cálculo mental. Parra (1996) cita que os algoritmos têm a vantagem de poder aplicar-se mecanicamente sem refletir a cada passo. Por outro lado, podem ser muito difíceis (ou complicados) de serem utilizados em algumas situações, sendo conveniente que os alunos saibam usar outros recursos, como as calculadoras ou computadores.

O *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001) de Portugal é destacado por Albergaria e Ponte (2008, p. 102) e indica a importância de se desenvolver no aluno a

capacidade de discernir e escolher qual a melhor maneira de se resolver um problema. Os autores apontam que

a competência matemática é fundamental a todos os cidadãos e deve ser desenvolvida pelos alunos na escola. Esta competência inclui aptidões, capacidades, predisposições e tendências entre as quais “a aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos”. Segundo este documento, que sugere a utilização de recursos diversificados, incluindo a calculadora elementar, trata-se de “promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes” e não no treino de técnicas de cálculo de forma isolada e descontextualizada.

O *Diseño Curricular Base Educación Primaria* da Espanha, citado por Parra (1996, p. 202), determina:

A construção progressiva do conhecimento matemático tráfegará por via indutiva, tomando como dado primordial a própria atividade do aluno e utilizando suas intuições, tentativas e aproximações heurísticas – estratégias pessoais elaboradas pelos alunos para enfrentar as tarefas e situações formuladas – como ponto de partida para uma reflexão que conduza, de maneira progressiva, a formulações mais formais e dedutivas.

Assim, a autora destaca o trabalho com cálculo mental como *prioritário*, de modo a ampliar e aprofundar estratégias pessoais de cálculo e formalizar os conhecimentos matemáticos acerca do nosso sistema de numeração e das propriedades das operações. O cálculo mental permite à criança ter experiências que, mais tarde, a ajudarão a compreender a formalização das propriedades (nomear e saber as características associativa, comutativa etc, por exemplo). O trabalho com cálculo mental também permite à criança compreender a base decimal do nosso sistema de numeração, lidando com sua regra de diferentes maneiras. Desse modo, o próprio domínio do algoritmo é tanto mais fácil quanto maior for a capacidade de cálculo mental. A excessiva preocupação pela representação formal na matemática, destituída de sua relação com o cotidiano, leva à manipulação mecânica dos algoritmos, fazendo com que o aluno repita procedimentos iguais e mecânicos, sem a compreensão real de base do SND e das propriedades das operações, ambas fundamentais à construção dos conceitos matemáticos. É preciso construir uma noção de número e operação com sentido.

Vale destacar, no caso das séries iniciais, que o trabalho com cálculo mental se vale da utilização do valor posicional dos algarismos do número, aspecto fundamental para a compreensão do nosso SND e é oposto à técnica mecânica do “vai um”, apregoada por muitos

através do algoritmo. Muitas vezes, a criança não vê sentido nessa técnica, ou a realiza mecanicamente, seguindo regras e nem questiona um resultado que, para quem pensa sobre o sentido do número, pode parecer absurdo. Então o indivíduo pode perceber que atitudes mecânicas pouco instrumentalizam o indivíduo. Nesse sentido, diz Piaget (1978b, p.60), “não é o conhecimento do teorema de Pitágoras que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração”.

Corroboram para essa perspectiva as ideias de Douady (1994, p. 34), acerca das noções de ensinar e aprender em matemática, nas relações professor-saber-aluno:

Ensinar, para um professor, é criar as condições que levarão conhecimento aos alunos. *Aprender*, para um aluno, é envolver-se em uma atividade intelectual cuja consequência final seja a disponibilidade de um saber com seu duplo papel de ferramenta e objeto. Para que haja ensino e aprendizagem, é preciso, portanto, que o conhecimento seja um objeto importante, e mesmo essencial, de troca entre o professor e seus alunos, que o saber seja uma finalidade importante da escola.

O professor, enquanto criador de condições, de mediador do processo de proposição de problemas deve ficar atento sobre os caminhos que os alunos apresentam durante essa proposição. Não deve adiantar soluções e nem deixar o aluno entregue a si mesmo, mas, sim, a partir de seus pequenos avanços, levá-lo a observar, analisar, estabelecer relações, fazer conjecturas e comprovações, orientando-o, assim, para chegar à descoberta dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades propostas. Ao aluno cabe perguntar, dialogar, analisar, levantar hipóteses, propor soluções, expor seus raciocínios, observar os raciocínios dos outros, compará-los, sintetizar e recontextualizar os conhecimentos construídos. Então, outra questão que expomos também é: por que existem professores que *evitam* o trabalho com cálculo mental? Para Gómez Alfonso (1993), o que ocorre é que muitos professores não têm confiança dos processos que aplicam quando calculam mentalmente e nunca pararam para organizá-los num papel com a finalidade de ensiná-los a seus alunos. Os próprios professores aprenderam o algoritmo como cálculo principal. A maioria inclusive, nunca aprendeu cálculo mental na escola.

Parra (1996) afirma que uma aprendizagem muito tardia do cálculo mental faz perdurar procedimentos onerosos e inoportunos e por esta razão recomenda a inclusão da aprendizagem de procedimentos de cálculo mental na escola.

Perante tais apontamentos, se faz necessário uma última distinção: entre cálculo mental e “*fazer contas de cabeça*”. Ora, se o cálculo mental nos permite tanta flexibilidade de

resolução, permitindo ao aluno optar pelas vias que lhe são mais confortáveis, dando à criança a liberdade de efetuar caminhos pessoais de resolução, não podemos aceitar que “armar a conta na cabeça”, seguir os passos de uma resolução convencional, imaginando o algoritmo mentalmente, seja considerado cálculo mental. É como se executássemos o próprio ato de escrever e efetuar o algoritmo, só que o imaginando, o que torna a tarefa ainda mais árdua. Cadeia, Oliveira e Carvalho (2006) dizem que muitas vezes os alunos com boa destreza no cálculo escrito tendem a calcular mentalmente utilizando as técnicas dos algoritmos escritos, o que representa uma dificuldade acrescida: o formato escrito exato é demasiado difícil para fazer mentalmente.

Alguns podem dizer: mas eu posso fazer o algoritmo “de cabeça”. Muitas crianças então o fazem fechando os olhos e mexendo os dedinhos, imaginando a “conta armada no papel” na cabeça e então tentam calcular. Com operações como $46 - 32$ é possível se imaginar “esse papel” mentalmente, mas no caso de $1000 - 990$ (Quadro 1), por exemplo, as crianças que estão habituadas apenas ao algoritmo não conseguem calcular mentalmente e, se o fazem no papel, demoram um tempo demasiado e desnecessário, demonstrando pouco conhecimento do sistema de numeração.

Resolução por algoritmo	Resoluções por cálculo mental
$ \begin{array}{r} 9 \\ 0 \text{ } 10 \\ 1000 \\ - 990 \\ \hline 0010 \end{array} $	<ul style="list-style-type: none"> • 990 para 1000 é 10 • $1000 - 900 = 100$ $100 - 90 = \mathbf{10}$ • $1000 - \mathbf{10} = 990$

Quadro 1 - Resoluções por algoritmo e cálculo mental ($1000 - 900$)

Outra situação semelhante podemos observar a partir de Hope (1996) que afirma que essa busca de calcular eficientemente é penosa porque uma confiança exagerada no método “lápiz e papel” pode levar a um comportamento inflexível que pode ser descrito como “*monomania de cálculo*” – a tendência de ignorar as relações numéricas úteis para cálculo e, ao invés disso, recorrer a técnicas inapropriadas. É o que Kilpatrick avalia também quando se refere ao hábito quase que exclusivo que as crianças têm de usar o algoritmo. “Se elas não forem encorajadas a continuarem desenvolvendo procedimentos de cálculo mental, a maioria

estará inclinada a ver os algoritmos como preferidos, possivelmente únicos métodos para calcular e vão parar de usar procedimentos mentais mesmo quando forem fáceis”²⁷ (2001, p. 121).

Os cálculos seguintes (Figura 4) são algumas observações que podemos fazer sobre o cálculo restrito a regras, segundo exemplos de Hope (1986, p. 50):

1	5	999	
14	360	100.00	125
- 6	-359	-99.95	x 1000
-----	-----	-----	-----
08	001	000.05	000
			000
			000
			125

			125.000

Figura 4 - Exemplos de cálculos restritos ao algoritmo, segundo Hope

Embora cada um desses cálculos tenha sido resolvido com exatidão, o algoritmo convencional de lápis e papel não seria o mais apropriado para resolvê-los. Percebemos que a criança não soube perceber que, neste caso, o uso do algoritmo não era o mais adequado, nem a calculadora. O que o mais seria adequado seria o uso do cálculo mental. E é isso que fazem as propostas que valorizam em demasia ou precocemente o algoritmo, habitua a criança a calcular apenas por meio dessa técnica, sem avaliar outras possibilidades.

O *Dessarolo Curricular* (1996) da Secretaria de Educação de Buenos Aires considera que um objetivo fundamental do primeiro e segundo ano é o desenvolvimento do cálculo mental e nos reforça a ideia de que o desenvolvimento do trabalho com cálculo mental deve ser prioridade nas duas primeiras séries do ensino fundamental. Após as crianças terem tido a oportunidade de trabalhar com os números de forma íntegra e sob vários pontos de vista, é que poderemos introduzir o trabalho com algoritmo. E, mesmo assim, o trabalho com cálculo mental não deve parar, é preciso que ele continue avançando, paralelamente ao trabalho com o algoritmo.

²⁷ Tradução nossa do original em inglês “If they are not encouraged to continue developing mental computation procedures, most will be inclined to view the new algorithms as the preferred, possibly the only, methods for computing and will discontinue use of mental procedures even when they are easier”.

Assim, de acordo com Albergaria e Ponte (2008), devemos nos perguntar, enquanto educadores matemáticos, se o ensino de algoritmos escritos deverá ser o ponto fulcral do ensino-aprendizagem, ou deverá privilegiar-se outra abordagem ao desenvolvimento da capacidade de cálculo, nomeadamente valorizando o sentido de número e o recurso a estratégias de cálculo mental.

2.2. Cálculo mental: valor e papel na educação matemática

A partir das considerações a respeito da concepção de cálculo mental discutidas anteriormente, que apontam para a importância do cálculo mental e da autonomia na sociedade atual, e da citação a seguir, de Burkert, pensamos nos motivos que nos levam a justificar o trabalho com cálculo mental em sala de aula, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesta perspectiva, podemos dizer que o cálculo mental e o cálculo estimativo em situações cotidianas são essencialmente heurísticos²⁸, ou seja, são encaminhamentos frequentemente úteis e, algumas vezes, poderosos para resolver problemas ou cálculos (BURKERT, 2000).

E a aproximação do que se ensina na escola com o mundo cotidiano deve ser considerado no momento do planejamento escolar. As escolhas curriculares que fazemos são carregadas de aspectos sociais, culturais, políticos e estruturais, mas um aspecto importante no momento da seleção de conteúdos é considerar a sua relevância social. Embora saibamos que este aspecto não pode determinar todas as escolhas, ele é elemento essencial para o aluno-cidadão que se forma.

O currículo pode ser avaliado de várias maneiras. Um método popular tem sido determinar a utilidade social do seu conteúdo. De acordo com esse ponto de vista, um bom currículo deve estar baseado na habilidade necessária para solucionar os problemas encontrados nas atividades do dia a dia (HOPE, 1986, p. 46).

Apoiando-nos em pressupostos de Piaget sobre a construção do conhecimento, a utilização do cálculo mental em sala de aula seria de extrema importância na construção dele, pois as crianças põem em jogo os esquemas anteriores, no confronto com ideias novas, para

²⁸ Definimos *procedimento heurístico* como um método de aproximação das soluções dos problemas, que não segue um percurso claro mas se baseia na intuição e nas circunstâncias a fim de gerar conhecimento novo. É o oposto do *procedimento algorítmico*.

modificá-los e assimilá-los, num movimento de acomodação. O sujeito utiliza suas estruturas cognitivas na relação ativa com o objeto para adquirir conhecimento. Segundo Parra (1996, p. 198-199),

os alunos devem buscar os procedimentos que lhes pareçam mais úteis, discutir suas escolhas e analisar sua pertinência e sua validade; acreditamos que, através disso, inserimos no âmbito do cálculo o que constitui o desafio central de toda didática: que os alunos possam articular o que sabem com o que têm que aprender.

Dessa forma, além da característica heurística, o ensino²⁹ de cálculo mental contribui para o desenvolvimento de aspectos relacionados à própria construção do conhecimento matemático.

Parra (1996) define quatro hipóteses didáticas principais para justificar o ensino de cálculo mental com crianças. A primeira hipótese é que:

- As aprendizagens no campo do cálculo mental influem na capacidade de resolver³⁰ problemas

A autora (1996, p. 196) destaca que “as relações numéricas que os alunos são capazes de estabelecer atuam, sem dúvida, no tratamento dos dados do problema e comprometem o significado das situações”. E acrescenta “que se pode propor aos alunos ‘raciocinar’ acerca dos cálculos, e que isto influi sobre sua capacidade para resolver problemas, além de permitir-lhes avançar em direção a aprendizagens matemáticas mais complexas [...]”.

A resolução de problemas pode contribuir para que o aluno desenvolva uma visão crítica da realidade em que vive, que lhe permita manipular uma variedade de informações, sabendo selecioná-las, organizá-las, relacioná-las e compreender as relevantes. Nesse sentido, a escola e o professor são cada vez mais imprescindíveis, na importante tarefa de preparar o aluno de forma a desenvolver habilidades que o tornarão capaz de responder à demanda do mundo globalizado. O cálculo mental também possui essas características de trato pertinente da informação, argumentação, escolhas adequadas e criticidade.

Consideramos que o trabalho com cálculo mental nos problemas é de extrema importância para a construção da autonomia da criança, pois permite gerar formas de proceder

²⁹ Ensino visto como processo, pautado em escolhas metodológicas feitas pelo professor a curto, médio e longo prazo. Baseado nas observações das crianças acerca de suas hipóteses e estratégias, em momentos de discussões, apoiadas na condução de aula do professor, na maneira como ele coloca as situações e as mantém em processo de “devolução”. Situação que se faz como via de aproximação dos conceitos matemáticos convencionais.

³⁰ Incluindo a ideia de exploração do problema.

próprias de um sujeito autônomo, com flexibilidade, criatividade, capacidade de argumentação etc. Além disso, o cálculo mental pode ser abordado, segundo Gonçalves e Freitas (2008), como ferramenta, quando o interesse é focalizado sobre seu uso para resolver um problema ou como objeto, no sentido de que será dada uma atenção à compreensão dos procedimentos de cálculos empregados pelos alunos durante a resolução dos problemas. O cálculo mental é uma via de acesso ao algoritmo e ao mesmo tempo sua ferramenta de controle.

O próprio cálculo mental é um problema a ser resolvido. Se não sabemos quanto é $400:25$, temos um problema a ser pensado, testado e validado na busca de uma solução. Pensamos em alguns caminhos para resolver essa situação, podendo, por exemplo, pensar em $400:100 = 4$ e multiplicar por 4, obtendo 16, ou ainda utilizar outras estratégias.

Já a segunda hipótese, para Parra (1996), é que o cálculo mental:

- Aumenta o conhecimento no campo numérico

Hope (1986, p. 49) acredita que:

O desenvolvimento da matemática nas crianças deveria envolver muito mais do que simplesmente fornecer a elas um conjunto de técnicas e processos idealizados para a resolução de problemas. O estudo da aritmética deveria ajudar as crianças a desenvolver algum modo de pensamento quantitativo, uma forma de pensar e raciocinar com números.

Ou seja, contribui para o desenvolvimento da compreensão de como os números e as operações funcionam, desenvolvendo o sentido de número.

Para Parra (1996), as noções matemáticas (números e operações) devem atuar, em princípio, como ferramentas úteis para resolver problemas. Só então elas poderão ser estudadas em si, tomadas como objetivo. O cálculo mental serve como aproximação da linguagem matemática convencional e também da análise, posterior, dos seus conceitos, propriedades e relações. O cálculo mental permite a discussão, por exemplo, das propriedades das operações e do Sistema de Numeração Decimal (SND), mas sem nomear ou ter consciência de tais características. Uma das preciosidades no trabalho com o cálculo mental é que ele permite o trato com o *valor posicional*, ideia fundamental do nosso Sistema de Numeração e que não está claro no algoritmo. Aliás, a maior característica desse sistema é o valor que cada algarismo possui no número e não o agrupamento de dez em dez (base do algoritmo). Compreender quais são os valores presentes naquele número e suas relações

internas permite um maior conhecimento no campo numérico. É a oportunidade de conhecer o número integralmente. É comum, em sala de aula, o professor estimular o aluno a olhar o número 4583, por exemplo, e dizer que ele tem três unidades, oito dezenas, cinco centenas e quatro unidades de milhar, fazendo com que se encaixe esse número no Quadro de Valor e Lugar (QVL), dividindo-o em ordens e classes. Mas na verdade há inúmeras outras relações; podemos ver 458 dezenas, 45 centenas, $4000 + 500 + 40 + 40 + 3$, $10 \times 400 + 583$... Depende do uso que vou fazer desse número. É preciso enxergar o número sob vários aspectos, assim como o nosso sistema de numeração e as relações entre números e operações possibilitam.

Albergaria e Ponte (2008, p. 101) citam Sowder (1989) que, levantando as vantagens do uso do cálculo mental, reforçam a ideia de que o trabalho com esse tipo de cálculo amplia o conhecimento numérico da criança.

A autora refere ainda a um conjunto de características das estratégias de cálculo mental, que vem reforçar esta ideia: (i) São variáveis, o que permite que cada pessoa escolha a sua estratégia pessoal; (ii) São flexíveis, adaptando-se aos números utilizados; (iii) São holísticas, no sentido em que se lida com o número na sua globalidade, e não algarismo a algarismo; (iv) Requerem a compreensão de todo o processo de cálculo, forçando o aluno a focar a sua atenção no problema apresentado; e (v) Permitem a obtenção de resultados mais aproximados, uma vez que frequentemente se trabalha da esquerda para a direita com os números. Contudo, o cálculo mental é uma estratégia pertinente quando se trabalha com números de uma certa ordem de grandeza (Sowder, 1989). Fora desse quadro, é necessário recorrer a outros processos de cálculo, incluindo a calculadora.

Zunino e Sadovsky (1996) sugerem um trabalho que leve as crianças a real compreensão das relações numéricas e do sistema de numeração, quando dizem que é fundamental que as crianças entendam o valor posicional do sistema, mas não tomando como ponto de partida a revelação da verdade, isto é, o docente ensinar dezenas e centenas, e pedir que façam agrupamentos explicando que o valor relativo dos números tem a ver com o lugar que ocupam, mas tomando como ponto de partida as concepções das crianças, gerando situações didáticas que tornem possível a interação com o sistema, a produção e interpretação de números, o vínculo entre o sistema de numeração e as operações matemáticas.

Por sua vez, a terceira hipótese, segundo a autora, é que o cálculo mental:

- Favorece melhor relação do aluno com a matemática

É notória a quantidade de alunos que dizem “não saber matemática”. Engessados por uma técnica algorítmica sem compreensão, é compreensível constatar tal afirmação em

sala de aula. O aluno fica preso a parcas saídas e seu raciocínio não é valorizado de forma ampla. Quando uma criança diz que não gosta de matemática porque é muito difícil e que não consegue aprender, estamos diante de um dos mais importantes dilemas do ensino da matemática: fazer com que as crianças sintam-se à vontade para pensar matematicamente, que se sintam ao mesmo tempo seguras e desafiadas.

O aluno adquire maior segurança na construção do conhecimento matemático quando há um trabalho efetivo com cálculo mental. Para que os alunos possam ter confiança em seus procedimentos, é preciso que haja situações propostas para desenvolvê-los, em que os alunos sejam convidados a contrapor a nova situação aos conhecimentos que já possuem. Além de gerar segurança, estimula-se a constituição de sua autonomia, visto que as estratégias de cálculo são formadas, basicamente, de escolhas pessoais, o que não nos define nenhum jeito único e fechado de resolução. Se a criança é treinada a chegar a um resultado, sempre da mesma maneira, não coloca em jogo a sua flexibilidade de raciocínio e toma o erro como fim e não como parte do caminho. Para a criança com dificuldade, isso é ainda mais frustrante.

Diante de um problema, espera-se que o cálculo mental possibilite aos alunos serem capazes de estabelecer relações entre os dados, antecipar seu comportamento e controlar o sentido do que obtém. Tendo a situação mais sob controle, a criança lidará melhor com as proposições da disciplina, que apresentará conceitos cada vez mais complexos, porém com compreensão. “Em particular, as crianças deveriam desenvolver uma visão de que a aritmética é rica em significado” (HOPE, 1986, p. 49).

Kamii cita uma experiência pessoal que mostra como as crianças podem perder a segurança em resolver cálculos e problemas, simplesmente por que não confiam em si mesmas, não têm o controle da situação. Ela diz que ao andar pela classe, enquanto as crianças faziam exercícios, ela parou e perguntou a uma criança como conseguiu uma determinada resposta. Ela imediatamente pegou a borracha e começou a apagar, mesmo a resposta estando certa, “eles perderam a confiança em sua própria capacidade de raciocinar. Crianças que tenham perdido esta confiança não desenvolverão sua capacidade de pensar” (1990b, p. 62).

A quarta e última hipótese de Parra (1996) é que o cálculo mental:

- É uma via de acesso para a compreensão, construção e controle dos algoritmos.

Para Parra (1996), o cálculo mental é uma via de acesso para a compreensão e construção de algoritmos. Nesse sentido, novamente lembramos que o ensino precoce do

algoritmo pode atrapalhar etapas tão importantes de compreensão SND e das propriedades das operações, tão bem representadas pelo trabalho com cálculo mental. O aluno pode entender, por exemplo, que 354 é formado por $300 + 50 + 2$, que $300 = 100 + 100 + 100$, e assim por diante, ajudando-o a raciocinar matematicamente e a entender o sentido da conta armada. A criança vai construir, mais tarde, o significado do ‘vai 1’ ou o ‘vai 2’ do algoritmo.

Além da compreensão, o aluno pode controlar os resultados do cálculo, pois se a técnica algorítmica falhar, ele tem como estimar que algo está errado. Por exemplo, um aluno que faz 325×12 numa operação armada por algoritmo, e obtém o resultado 650 (por alguma falha durante os passos de resolução), pode detectar que algo não deu certo, pois sabe que só pelo fato de 10×300 resultar em 3000, algo precisa ser revisto.

Além dos aspectos de construção de conteúdos conceituais, percebemos que o trabalho efetivo com cálculo mental permite o desenvolvimento de conteúdos atitudinais e procedimentais, pois permitem ao aluno: articular “o que sabem” com “o que têm que aprender” (estímulo à autonomia); trocar ideias entre os colegas (coordenar diferentes pontos de vista, aceitar a opinião dos outros, respeitar o grupo); construir diferentes maneiras de resolução (gerar segurança e criatividade); contribuir com o outro (ser solidário, saber ouvir e expressar-se com clareza); entender que a resposta não está pronta (a vida é uma construção, há que se ter paciência e dedicação para alcançar objetivos, desenvolve a perseverança).

Se a criança não seguir as regras do algoritmo corretamente, poderá obter resultados errôneos e se ela não souber avaliar esse resultado, não perceberá que algo no passo a passo da aplicação da regra não deu certo. A criança pode refazer o algoritmo e perceber o erro na aplicação da regra, mas também pode cometer o mesmo erro e continuar sem saber que errou. Saber desenvolver um bom cálculo mental permite ao indivíduo sentir certa estranheza diante de um resultado, pois de antemão, com o cálculo mental, poderemos estimar aproximadamente o seu resultado e duvidar. Duas crianças, por exemplo, que aplicam as regras do algoritmo, mas que não entenderam o seu fundamento por completo, podem dividir 480 por 4 e obter os seguintes resultados:

$$\begin{array}{r} \widehat{480} \quad | \quad 4 \\ - 36 \quad 93 \\ \hline - 12 \\ \hline - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \widehat{480} \quad | \quad 4 \\ - 36 \quad 930 \\ \hline - 120 \\ \hline 0 \end{array}$$

Uma criança que tenha bons conhecimentos no campo numérico há de achar estranho que, no primeiro caso, o resultado seja menos de 100, pois se fosse 400 dividido por 4, já daria 100 e é mais de 400. O que é de se esperar é que o resultado seja um pouco maior que 100. No segundo caso, a criança não soube o que fazer com o zero restante e o colocou no quociente. Não percebeu que algo em torno de 500 não poderia ser dividido por 4 e se obter um número maior.

2.3. Cálculo mental: alguns caminhos

A pergunta que se coloca, então, é *como* o professor pode organizar o ensino, visto a tamanha relevância do trato com o cálculo mental na sala de aula e na vida? Não pretendemos responder a essa pergunta, mas apenas esboçar algumas considerações, tomando-a como uma forma de refletir sobre nossa ação pedagógica.

Se dedicarmos um pouquinho de tempo de cada aula ao cálculo mental e trabalharmos o assunto ao longo do ano letivo, nossos alunos serão capazes de progressos notáveis. No entanto, o sucesso dos alunos dependerá bastante de nossas atitudes, como já observamos uma vez. Avaliar cuidadosamente os desafios adequados à classe, ouvir e estimular a participação dos alunos são requisitos fundamentais. Só assim o cálculo mental deixa de ser uma simples técnica para se converter em um instrumento que desenvolve o raciocínio dos alunos (MENDONÇA; LELLIS, 1989, p. 53).

Para o INRP (1991), “o CP³¹ constitui uma primeiríssima etapa para o domínio do cálculo habitual³². Os objetivos neste domínio devem, pois, permanecer modestos:

- Compreender a necessidade de dispor de um repertório estruturado (de um “reservatório”) de resultados e de memorizar uma parte deles;
- saber tirar partido deste repertório para resolver problemas;
- saber encontrar resultados desconhecidos a partir de resultados conhecidos quer mentalmente, quer por escrito, e para isso ser capaz de utilizar o repertório disponível (saber, por exemplo, calcular $30 + 40$ conhecendo $3 + 4$);
- começar a pôr em prática uma técnica escrita da adição (em relação com os conhecimentos sobre a escrita cifrada dos números);
- saber que a calculadora permite obter resultados “difíceis” de calcular, com a condição de a utilizar de maneira refletida (ela não é mágica!).”

³¹ CP - Primeiro ciclo (crianças de 5 a 7 anos).

³² Referindo-se ao cálculo mental.

Para Parra (1996, p. 222-223), o cálculo mental pode ser trabalhado, basicamente, com dois tipos de atividades:

- Um trabalho de memorização de repertórios e regras, à medida que é construído³³, e
- um trabalho coletivo, lento e detalhado, de aprendizagem do cálculo mental pensado, que se apóia na comparação de diversos procedimentos utilizados por diferentes alunos para tratar o mesmo problema.

Cadeia, Oliveira e Carvalho (2006) dizem que quando se pensa no ensino da prática do cálculo mental, o primeiro problema que surge é determinar quais são os métodos com interesse educativo e decidir quais os que se devem transmitir de modo a assegurar a apropriação da capacidade de cálculo mental.

Além disso, o *quando* introduzir o trabalho com cálculo mental e com algoritmo gera bastante discussão. O que os pesquisadores têm mostrado, e que já mencionamos, é que o algoritmo precoce prejudica a aprendizagem das operações com compreensão, como podemos perceber pela citação de Wolman e Quaranta (s.d.):

O ensino usual do sistema de numeração e dos algoritmos convencionais correspondentes às operações aritméticas nos primeiros anos não facilita que os alunos compreendam as razões dos passos que se seguem para obter o resultado. Os erros que as crianças cometem ao resolver algoritmos ou as explicações dadas sobre os procedimentos utilizados, inclusive quando obtêm o resultado correto – fundamentalmente nas famosas contas de “vai um ou pedir emprestado” – testemunham a dificuldade dos alunos em compreender que tais regras estão intimamente relacionadas com os princípios do nosso sistema de numeração.

E ainda acrescenta que, do ponto de vista do ensino,

não introduzir no início da escolaridade os algoritmos canônicos facilita que as crianças elaborem outros procedimentos para resolver e representar operações, mesmo que estas funcionem frequentemente de maneira implícita. Os procedimentos numéricos que as crianças utilizam para resolvê-las põem em jogo o conhecimento que estão construindo sobre o *sistema de numeração*, facilitando desta forma o estabelecimento das relações que existem entre o *sistema de numeração* e seus procedimentos de resolução. Os procedimentos que os alunos utilizam diferem dos procedimentos convencionais. A organização da numeração escrita e as operações, guardam estreitas inter-relações. Isso significa que os aprendizados sobre o sistema de numeração e sobre as operações se influenciam reciprocamente.

³³ Grifo nosso.

Segundo o *Desarrollo Curricular* – Secretaria de Educação (SE) de Buenos Aires (1996), a criança escolher um procedimento, uma estratégia, é fundamental, porém, o maior desafio é fazer com que os alunos evoluam no nível de estratégias que utilizam. É promover nos alunos oportunidades de enfrentar os problemas com seus recursos, de buscar um caminho pessoal até a solução, mas é necessário que os alunos avancem em seus procedimentos.

O Plano Plurianual da SE de Buenos Aires (2006, p. 14)³⁴, também aponta que os alunos devam ter alguns resultados de memória para facilitar o cálculo mental.

No cálculo mental, os números são tratados de maneira global, sem considerar seus algarismos isolados, como ocorre nos algoritmos convencionais. Isto, somado ao fato de ter que por em jogo estratégias específicas em função dos números que se trabalha, permite um maior controle das propriedades que validam a estratégia que se desenvolveu. Por outro lado, como se verá ao longo desse documento, para que os alunos produzam estratégias de cálculo mental cada vez mais elaboradas, têm que se apoiar tanto no conhecimento das propriedades das operações do sistema de numeração, como nos resultados que deverão ter disponíveis em sua memória³⁵.

A atividade de cálculo mental está diretamente relacionada à *exploração de problemas aritméticos*, que envolvem tais atividades. Vários foram os estudos que avaliaram como as crianças procedem para realizar ações de cálculo aritmético. E em algumas delas, podemos observar como as crianças desenvolvem *estratégias* de uso de cálculo mental, independente de se lhe é permitido ou não tal ação. Para aquelas crianças que foram estimuladas a buscar caminhos próprios, o desenvolvimento de estratégias mostra-se maior e mais eficiente. Correa e Moura (1996) citam Reed e Lave (1981) que classificaram as estratégias usadas na solução de problemas aritméticos em dois tipos: aquelas em que predomina a *manipulação de quantidades* como nas estratégias informais de cálculo e aquelas em que o processo dominante é a *manipulação simbólica*, como no uso de algoritmos escritos. Os dois são jeitos de “fazer matemática”, pois articulam conhecimentos disponíveis com a representação que fazem do problema, mas em níveis diferentes.

Correa e Moura (1996) relatam que as estratégias infantis para a solução de problemas de adição e subtração foram investigadas também por Carpenter e Moser (1984) com crianças do 1º ao 3º ano escolar. Foram descritas as seguintes estratégias de resolução dos problemas:

- a) estratégias baseadas na manipulação de dedos, objetos etc para resolver o problema;

³⁴ Coordenado por Wolman.

³⁵ Tradução nossa, do espanhol para o português.

- b) estratégias em que foi usada a contagem numa sequência numérica;
- c) estratégias em se utilizavam os fatos numéricos.

As crianças mais novas tendiam a resolver os problemas pela manipulação direta dos objetos concretos. Aos poucos, estas estratégias eram gradualmente substituídas por formas sofisticadas de estratégias de contagem e de uso dos símbolos numéricos. Tanto o cálculo mental quanto o algoritmo contemplam essa representação simbólica caracterizada pelos números.

Dando essa liberdade da criança experimentar, pôr em jogo seus conhecimentos em busca de soluções adequadas, a aproximamos da construção formal do conhecimento matemático, mas com compreensão. Segundo Parra (1996, p. 219),

uma exigência precoce de formalização de soluções (reconhecimento do cálculo a ser efetuado e produção da escrita matemática correspondente) pode ser uma fonte de obstáculos para muitos alunos que vão tentar produzir a escrita matemática diretamente a partir do enunciado, apoiando-se em palavras chaves [...] sem envolver-se na fase essencial de tentar compreender a situação proposta.

É isso que as crianças costumam fazer: apóiam-se na estruturação semântica do problema, olham os dados, os números citados e perguntam se é “de mais ou de menos”.

Siegler e Crowley (1991) apud Correa e Moura (1996), discutem um experimento realizado por Siegler e Jenkins (1989) e apontam, também, para a diversidade dessas estratégias intuitivas usadas pela criança para resolver problemas de adições e subtrações. Os resultados do experimento mostraram que as crianças manipulam diferentes estratégias de cálculo, usando-as em diferentes contextos. Foram identificadas, neste estudo, para problemas de adição e subtração, as seguintes estratégias de cálculo: soma, recuperação de fatos numéricos memorizados previamente, soma abreviada, contagem pelos dedos, contagem a partir do valor da primeira parcela e estimativa.

No Brasil, Carraher e Schliemann (1983) estudaram as estratégias utilizadas por crianças de primeira série de escolas públicas e particulares de Recife na solução de adições e subtrações. Foi observado o uso predominante da contagem e, em relação aos algoritmos, seu uso foi observado em pequena quantidade e apresentando muitas soluções equivocadas. Os autores, trabalhando com crianças mais velhas (8 a 13 anos) que cursavam a 3ª série de duas escolas públicas do Recife, identificaram duas estratégias principais de uso do cálculo informal: a decomposição e o agrupamento repetido, ambos permitindo a manipulação de

quantidades iniciais e a obtenção de subtotaís que serão somados da maneira mais conveniente e confortável. Parra (1996) comenta sobre essa flexibilidade do cálculo mental ao possibilitar o manejo dos resultados parciais de cálculo (cálculos intermediários) da maneira mais adequada (e portanto, pessoal) na obtenção do resultado final. A autora cita que o enfrentamento das relações numéricas através do cálculo mental facilita para os alunos, frente a uma situação, serem capazes de moldá-la por reflexão.

Entender o número de diferentes maneiras, olhá-lo sob diferentes enfoques, é fundamental para a compreensão das relações numéricas envolvidas e compreender as diferentes *formas de decomposição* dos números auxilia a ampliar essa maneira de “ver” os números. Quanto à estratégia da decomposição, usaremos um exemplo mostrado por Parra (1996) e que ilustra bem a profundidade e amplitude de conhecimentos acerca do número que o cálculo mental suscita, permitindo à criança olhar o “número” sob diversos ângulos. “Pensar” um número a partir de diferentes decomposições, por exemplo, gera o enriquecimento das noções de relações numéricas. Parra nos convida a pensar o número 24, por exemplo, não somente como 2 dezenas e 4 unidades, como indica o uso do algoritmo, mas a observá-lo de diferentes formas para usá-lo de acordo com o que a situação exige.

Podemos pensá-lo como:

- $20 + 4$, se temos que dividi-lo por 4, por 10 ou por 10;
- $12 + 12$, se se quer a metade;
- $25 - 1$, se se quer multiplicar por 4;
- $21 + 3$, se se quer saber que dia da semana será 24 dias mais tarde;
- Próximo a 25%, se se quer fazer uma estimativa em um problema de porcentagem;
- 6×4 , se se quer prever quantos pacotes de seis sabonetes podem ser feitos etc.

Podemos perceber que as crianças utilizam-se desses procedimentos de cálculo mental, construídos de maneira paralela ou independente das tentativas de ensino sistemático de algoritmos pela escola. Dessa forma, nos anos iniciais, deveriam ser privilegiadas as estratégias de cálculo mental e, aos poucos, ir introduzindo o uso dos algoritmos com compreensão e continuar avançando nas estratégias desse tipo de cálculo³⁶, paralelamente aos

³⁶ Pode haver trabalhos com cálculo mental de frações, números decimais, porcentagem, raízes, etc.

algoritmos pois, segundo Boulay, Le Bihan e Violas (2004, p. 2), “o cálculo mental ocupa um lugar preponderante na aprendizagem da Matemática.”

Não podemos deixar que se pense que essas estratégias de cálculo mental em nada colaboram para o desenvolvimento da linguagem matemática formal. Pelo contrário, aprendendo verdadeiramente a lógica do sistema de numeração e das operações e otimizando o seu uso, desenvolveremos consistentes noções matemáticas, fortalecendo a aprendizagem das representações convencionais.

Como afirma Kamii (1995), o cálculo mental também fortalece a aprendizagem das convenções, da linguagem específica e do conhecimento matemático propriamente dito, porque, ao lidar com as quantidades como um todo, os alunos apuram seu senso numérico e ampliam suas ideias sobre valor posicional, diferentemente do que ocorre no trabalho com algoritmos, quando tendem a considerar cada ordem com a unidade.

Numa situação de algoritmo, um aluno poderia calcular 5×99 da maneira a seguir, criando-se o hábito de colocar o menor número embaixo, o que não faz sentido na propriedade de comutatividade da multiplicação:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 99 \\ \times 5 \\ \hline 494 \end{array}$$

Ao passo que um aluno acostumado ao cálculo mental poderia pensar em:

$$5 \times 100 = 500$$

$$500 - 5 = 495$$

O aluno usaria a *compensação* (arredondar para 500 e depois tirar o 5, de 1×5), mas não teria a consciência de tal e nem é esperado que a tenha. Em relação à aritmética, é preciso criar tempo e espaço na sala de aula para se pensar sobre as relações numéricas. Nesse sentido, não há como criar um efeito positivo para o aluno construir seu conhecimento com compreensão, de forma autônoma, se trabalharmos com as noções matemáticas formais preestabelecidas, nomeando propriedades, mostrando-lhes apenas os passos e as regras necessárias à realização do cálculo ou do problema. As propriedades e regras do SND permanecem, no começo, implícitas e mais tarde serão reconhecidas e formuladas.

Retomando a questão da memória iniciada nessa seção, vamos esclarecer em que sentido ela foi abordada. Referimo-nos ao domínio de um repertório básico que sirva de referência à criança para apoiar-se no que sabem e resolver outros cálculos mais complexos.

Em primeiro lugar, a necessidade de avançar na *contagem*, tanto nas situações-problema, quanto nos procedimentos orais³⁷, pois “no âmbito das pesquisas provenientes da psicologia e da didática, se tem revalorizado o papel da contagem nas aprendizagens numéricas” (PARRA, 1996). Para Fayol, uma tarefa importante do professor ao ensinar cálculo é a de ajudar os alunos na passagem do cálculo *reconstrutivo* (contagem um a um) para o *reprodutivo* (apoiado na memória). As crianças precisam utilizar certos fatos de memória para enfrentarem com mais autonomia e segurança as situações-problema encontradas. Podemos chamar esses fatos de memória de *fatos fundamentais*, termo também utilizado nos documentos oficiais nacionais e da rede municipal de São Paulo.

Mas como memorizá-los? Não de maneira mecânica e repetitiva, sem a compreensão de cada um, mas construindo as listas de fatos fundamentais ao longo das séries, discutindo suas relações e contextualizando-os em problemas. Wolman (2006) cita que é importante propor várias situações-problema em que seja necessário ou importante contar para resolver problemas. E, nesse processo, Parra (1996) sugere a memorização de cálculos simples e a resolução de cálculos utilizando outros mais simples.

Kamii (1990b) exemplifica algumas atividades que permitem a memorização de cálculos simples, onde a , b ou c em $a + b = c$, quando $a < 10$ e $b < 10$. Para Parra, “esta é a base do cálculo, seja escrito ou mental”. Então, as atividades podem ser: adição de parcelas até 4, adição de parcelas até 6; adição de dobros e combinações de acréscimo do 1.

A partir dessas simples memorizações, podemos usar suas variadas combinações para resolver cálculos ou problemas. Por exemplo, para fazer $7 + 8$, e a criança não tem esse fato de memória, pode pensar em estratégias mais confortáveis de resolução. Podemos ter algumas opções³⁸:

- $(7 + 7) + 1$ (reagrupamento em torno de um dobro)
- $(7 + 3) + 5$ (reagrupamento em torno de 10)
- $(8 + 2) + 5$ (reagrupamento em torno de 10)
- $(5 + 5) + 2 + 3$ (reagrupamento em torno de 5)

Kamii (1994, p. 94) afirma que inicialmente, “sete” é apenas um conceito³⁹ numérico que a criança tem, relacionando com as ideias de “um”, “dois”, “três”, “quatro” e assim por

³⁷ Segundo Parra (1996), esses procedimentos referem-se a dizer o número seguinte e anterior; continuar a série numérica a partir de um número; contar de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10 etc.

³⁸ Exemplo extraído de Parra (1996, p. 215).

³⁹ Cabe aqui um pequeno esclarecimento quanto ao uso do termo “conceito” utilizado por Kamii e “fato” empregado por nós ou por outros autores. Kamii (1994, p. 89) estabelece que não existe algo como um “fato

diante. Quando a criança opera com esses números, ela começa a reconhecer o “sete” em diferentes caminhos, pois construiu uma espécie de rede em sua mente que a permite usá-la para trocar, por exemplo, $7 + 8$ por $(7 + 7) + 1$ ou por $(8 + 2) + 5$. Uma rede de relações numéricas serve à criança, ao longo da vida, em todas as operações matemáticas.

Assim, discutir procedimentos de como resolver $7 + 8$ pode ser importante a princípio, e, mais tarde, já o tendo memorizado (liberado espaço mental), servirá para resolver problemas mais complexos que envolva tal fato. “Liberar espaço mental” é um benefício sim, mas de valor secundário. Caso contrário, seria somente decorar inúmeras tabelas e automatizar algoritmos.

Sanches et al⁴⁰ ressaltam que é preciso que o aluno construa autonomia intelectual para decidir a estratégia mais conveniente de resolver cálculos, mesmo os mais simples, e sugerem outras estratégias para memorização e utilização desses cálculos de 1 a 100:

- Adicionar zero;
- contar de um em um e subtrair do mesmo modo;
- decompor números de diferentes maneiras (até 10);
- descobrir as somas que resultam em 10, ou o que falta para termos 10;
- dobro dos números até 5;
- dobros + 1, + 2, - 1 e -2;
- adições usando o 9 e acrescentar 1, resultando em uma dezena e subtrair 1 da outra parcela. Ex: $9 + 7 =$ podemos pensar em $10 + 6$;
- usar a propriedade comutativa da adição. Ex: $2 + 7 =$ pensar em $7 + 2$ (resultado de memória) que está mais próximo de $7 + 3 = 10$.
- completar dezenas;
- compensar e conservar;

Pimentel e Vale (2009, p. 4) observaram que muitas crianças de 3^{os} e 4^{os} anos precisam contar nos dedos para calcular $16 + 10$. Para discutir e problematizar tais situações e outras que envolvam cálculo, sugerem também o trabalho com *tabelas* (Figura 5) e *retas*

numérico” do ponto de vista da teoria de Piaget, pois um fato é observável, mas um número não é. Conceitos numéricos são relações construídas pelas crianças individualmente através da abstração construtiva. Segue-se daí que $6 + 2 = 8$ não é um fato, mas uma relação construída pela criança sobre outras que ela construiu anteriormente. É essencial que os educadores compreendam a verdadeira natureza do conhecimento lógico-matemático, porque aqueles que acreditam que esse conhecimento é constituído por fatos apresentarão às crianças “fatos” ou facilitarão para elas a observação de “fatos” em vez de se preocuparem com o raciocínio. Dessa forma, em nossa pesquisa, usamos o termo “fato fundamental” por ser a mais utilizada no ambiente escolar e em muitos documentos, mas ao usarmos tal nomenclatura, estamos nos referindo a ideia de conceito de número. Não acreditamos que o professor deva apresentar listas dos fatos prontos para serem decorados, mas que as construa a partir das descobertas dos alunos, como forma de representação do conceito construído por todos.

⁴⁰ Sem data de publicação. Acesso no site em jun/2008.

numéricas (Figura 6) para estimular a descoberta de padrões numéricos e desenvolver habilidades de cálculo mental. Para as autoras, os professores devem começar por conhecer e aplicar estratégias básicas de cálculo mental e a tabela dos 100 é claramente um bom recurso para fazê-lo. Uma tabela de números naturais até 100, em linhas (10 em cada linha), é proposta e as crianças fazem observações e relatam descobertas iniciais. A partir daí, podem ser feitas diversas explorações matemáticas que envolvam as descobertas e conclusões das crianças. Esta e outras tabelas (até 1000, por exemplo) podem ser fixadas na classe e tais descobertas são desenvolvidas ao longo das séries. Além disso, situar o cálculo na tabela permite à criança compreender melhor o próprio sistema de numeração decimal.

Figura 5 -Tabela de números naturais até 100, segundo Pimentel e Vale

Para o trabalho com reta numérica, é necessário que os alunos já tenham estabelecido algumas relações, como, por exemplo, apoiando-se no que já sabem sobre alguns outros

cálculos. Ainda segundo as autoras, fica difícil calcular $85 - 58$, por exemplo, se os alunos não conseguirem calcular mentalmente $58 + 20$. Mas, se já o fazem, podem ir acrescentando números para realizar esta subtração.

Figura 6 - Exemplo de cálculo por meio da reta numérica, segundo Pimentel e Vale

Além disso, podem até realizar outros acréscimos intermediários se não souberem quanto é 78 para 85, mas já sabem que $78 + 2 = 80$. Por exemplo: $58 + 20 = 78$; $78 + 2 = 80$; $80 + 5 = 85$. Teremos $20 + 2 + 5 = 27$, ou seja, $85 - 58 = 27$.

As autoras defendem a sistematização constante e contínua das tabelas e retas e de outras estratégias/recursos de cálculo quando afirmam que “é necessária uma certa prática de rotina para melhor interiorização destas estratégias. Sugerimos assim que os professores gastem dez minutos no princípio de cada aula de matemática com este trabalho” (PIMENTEL; VALE, 2009, p. 4).

E as próprias crianças devem fazer as descobertas desses cálculos simples, escritos ou orais, ao longo das atividades e na interação com os colegas. “O cálculo mental é um assunto de trabalho (saber e treinamento), de memória e, sobretudo, de confiança em si mesmo” (ERMEL apud PARRA, 1996). Portanto, o erro é inerente às atividades com cálculo mental, mas saber lidar com ele garante o desenvolvimento da autonomia com maior segurança. A criança deve sentir-se à vontade para que, perante o erro, retome o percurso, analise-o e reavalie novas possibilidades. Dessa maneira, para Tahan (1998), o aluno ocupa um lugar de destaque; o que ele pensa é valorizado e seu ‘erro’ é na verdade um registro de sua construção, e não um registro de seu desconhecimento.

Além disso, Parra destaca também a importância da *avaliação* do professor em relação aos avanços dos procedimentos de cálculo dos alunos como via para fazer o planejamento das atividades futuras e ampliar o repertório da turma.

Nosso posicionamento é que a memorização de fatos numéricos, se bem que não constitua jamais a via de ingresso a uma operação, aparece como produto necessário, a determinada altura da aprendizagem e, devido ao fato

de que este processo não se cumpre da mesma maneira nem no mesmo ritmo em todos os alunos, consideramos que deverá fazer parte da atividade de aula o diagnóstico do nível de procedimentos que os alunos estão empregando, procurando que tenham consciência de qual é o nível de cálculo disponível e formulando, a partir disso, atividades que busquem avanços nestas questões (PARRA, 1996, p. 200).

Para Parra (1996, p. 223), pensando em todo o processo do trabalho com cálculo mental, o professor deve propor atividades, inclusive de jogos, que permitam aos alunos:

- tomar consciência do que sabem;
- reconhecer a utilidade (economia, segurança) de utilizar determinados recursos (resultados memorizados, certos procedimentos etc);
- ter uma representação do que se deve conseguir, e do que precisa saber;
- “medir” seu progresso;
- escolher, entre diferentes recursos, os mais pertinentes;
- serem capazes de fundamentar suas opções, suas decisões.

Para desenvolver algumas estratégias de cálculo nas crianças, não são necessárias listas enormes de exercícios, memorizações infinitas ou exemplos de estratégias ‘ensinadas’ pelo professor. A própria conversa em sala de aula, os questionamentos do professor e a troca de ideias entre os colegas permitirão o maior aprofundamento no conhecimento das relações numéricas e conduzirão a criança a ampliar seu repertório. É importante o professor criar momentos de reflexão e comparação das diferentes estratégias da classe, onde cada um possa expor a sua, argumentando a favor dela.

Não se trata, sem dúvida, de “ensinar” estas diferentes alternativas, nem que cada aluno deva “conhecer” cada uma delas. Trata-se de que cada aluno encontre suas maneiras preferidas, valendo-se do grupo de colegas para ter oportunidade de aderir às soluções propostas pelos outros. O recurso da imitação é inteligente na medida em que supõe o reconhecimento do valor do proposto por outro colega (PARRA, 1996, p. 215)⁴¹.

Assim, tanto “imitar” estratégias quanto criar e comunicar as suas próprias, permite a ampliação das estratégias do grupo todo. Nesse sentido, anexamos algumas possíveis estratégias e que são usualmente formuladas pelas crianças, para que possamos ter uma ideia dessa amplitude de possibilidades.

⁴¹ Grifo nosso.

Diante do discutido até o momento, procuramos, de algum modo, sintetizar o que consideramos como cálculo mental, nesta pesquisa. *Cálculo mental* – dentro do universo do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental I – é o conjunto de procedimentos de cálculo oral (mental) e/ou escrito (quando houver a necessidade de se escrever os resultados intermediários da resolução de um problema), envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais e que podem culminar em resultados aproximados ou exatos. Para tanto, os procedimentos de cálculo mental se apóiam no conhecimento implícito (sem ser nomeado e classificado) das características do *sistema de numeração decimal* - que é pautado na base dez e no valor posicional relativo – e das propriedades das *operações* (comutativa, distributiva e associativa).

Tais resultados são obtidos por procedimentos pessoais, variando de acordo com os indivíduos, o momento e o contexto onde o cálculo é proposto. Além disso, tal cálculo pode ser considerado em momentos de levantamento de hipóteses, de comparação com os procedimentos de outros alunos e de validação (usar argumentação para aceitar o resultado ou contra-argumentos para rejeitar), apoiando-se em cálculos pequenos já memorizados e compreendidos. Neste sentido, o cálculo mental representa “aspectos fundamentais da actividade matemática: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas, raciocinar logicamente” (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 33).

Reforçamos a ideia de que a criança precisa criar suas próprias estratégias, ter liberdade para calcular mentalmente e de registrar e comunicar suas ideias antes da formalização de um algoritmo. Para Kamii (1995, p. 54),

os algoritmos atuais são fruto de séculos de construção por matemáticos adultos. Ao tentarmos simplesmente transmitir o resultado de tão longo tempo de reflexão adulta aos alunos, estamos privando-os da oportunidade de elaborar seu próprio raciocínio. As crianças de hoje inventam os mesmos tipos de procedimentos que nossos antepassados e para que possam compreender nossos algoritmos devem passar por um processo semelhante de construção.

Reforçamos também a ideia de que é preciso se conhecer procedimentos variados de cálculo mental, além dos algoritmos e dos instrumentos tecnológicos (calculadora/computador). O aluno deve saber quando é apropriado usar cada um deles e ser competente ao fazê-lo, ou seja, explorar as situações problemáticas, utilizando um ou mais procedimentos, procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas, formulando generalizações, pensando de maneira lógica e consciente.

2.4. O cálculo mental no percurso da educação matemática

Segundo Valente (1999), no início da colonização, os conteúdos de Matemática ministrados nos colégios jesuítas (por volta de 1600) estavam atrelados aos de Física, seguindo uma tradição europeia de ensino que tinha como base as humanidades clássico-literárias.

Com a estruturação das primeiras escolas primárias, por volta 1824, a elaboração do currículo da disciplina dá ênfase a conteúdos matemáticos relacionados, principalmente, ao sistema de numeração e à aritmética.

O Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, dirigido por Euclides Roxo, foi o primeiro colégio de instrução secundária oficial do Brasil. A dissertação de Beltrame (2000) aponta, nos programas de Matemática do Colégio Pedro II, a primeira aparição do cálculo mental em 1881, época também de uma reforma curricular. “Nesse ano, no programa de ensino de Aritmética Prática para o primeiro dos sete anos do curso oferecido pelo colégio, encontramos menção explícita a “exercícios de cálculo mental” (BELTRAME, 2000, p. 174). Entretanto, já em 1882, após nova reforma curricular, o programa de ensino não contém qualquer registro sobre o cálculo mental na relação de conteúdos de aritmética.

Beltrame (2000) também aponta que não há nenhuma referência ao cálculo mental nos programas até 1898. Contudo, no programa proposto para os anos de 1899 a 1901, o termo volta a aparecer:

O programa, além de se conservar nos convenientes limites, atenderá acuradamente ao lado prático, de maneira que o ensino se torne utilitário por numerosos exercícios de aplicação e por judiciosa escolha de problemas graduados da vida comum. De acordo com tais preceitos, o respectivo docente fará, no primeiro ano, o estudo da aritmética abranger o sistema decimal de numeração, as operações sobre números inteiros e frações, as transformações que estas comportam, até as dízimas periódicas, fazendo durante o curso uso habitual do cálculo mental e do método de redução à unidade (BELTRAME, 2000, p. 196)⁴².

O trecho atesta a preocupação, baseada na utilidade prática, em relação à presença do cálculo mental no primeiro ano de estudos secundários no Colégio Pedro II, de 1899 a 1906. O cálculo mental deixa, porém, de ser mencionado nos programas de aritmética dos anos de 1912, 1915, 1919 e 1923 (BELTRAME, 2000), e somente vamos encontrá-lo novamente no Programa de Ensino de Matemática do ano de 1926, onde ainda existiam as disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria-Trigonometria, como ocorreu até 1929 no colégio, e até

⁴² Grifos nossos.

1931 nas demais escolas do Brasil. Segundo Miorim (1998), em 1931 foi promulgada a Reforma Francisco Campos, primeira organização nacional do ensino no Brasil, onde essas disciplinas foram reunidas na disciplina Matemática.

Sobre as atividades propostas por Roxo (1929), Alvarez e Pires ⁴³ observam que o autor:

[...] possui uma linguagem clara e de fácil compreensão. É bastante visível o emprego de um método heurístico, pois o aluno é requisitado a participar do estudo constantemente, através dos diversos exercícios numéricos e problemas verbais propostos ao longo de todo o capítulo, e esta era a intenção de Roxo, uma vez que deixou explícito, em suas orientações, a postura ativa do aluno, que deveria deixar de ser um simples receptor passivo de conhecimentos.

Vemos, então, já esboçadas a preocupação com a formação participativa do aluno, onde a criança é levada a pensar por si própria, não se esquecendo da característica escolanovista de Roxo.

Segundo Di Giorgi (1989), a *Escola Nova* tem como proposta nuclear descentrar o ensino do professor para centrá-lo no aluno. A importância central está na atividade da criança, nas suas necessidades e, principalmente, nos seus interesses, pois todo aprendizado deve partir do interesse da criança. O foco está no aluno e as atividades merecem destaque em atividades concretas, práticas, e o cálculo mental era visto com esse caráter utilitário, devendo ser aplicado em exercícios constantes e repetitivos. Nesse contexto, o cálculo mental aparece em ligação direta com as duas finalidades apresentadas.

Segundo Gomes (2007), nos documentos curriculares do período escolanovista de Roxo, o trabalho com cálculo mental é citado como cálculo oral, ou escrito e deveria ser trabalhado em constantes exercícios, nos quais deveria sobressair, por sua importância, a prática do cálculo mental. Gomes cita que a preocupação com o cálculo mental no ensino da aritmética também aparece nas propostas de ensino primário, como demonstra Backheuser (1933)⁴⁴. Este último indica que a partir da década de 1930 aumentou a polêmica em torno do método de ensino da aritmética do curso primário. Criticando a vertente norteamericana da escola nova, ele advoga a favor do ensino intuitivo, um ensino da aritmética por meio de jogos coletivos, de problemas resolvidos em cooperação, seguindo uma concepção contrária às ideias, que o próprio Backheuser julga excessivamente utilitaristas, de John Dewey. Backheuser sugere que o excessivo espontaneísmo norteado pelo interesse dos alunos

⁴³ Sem data de publicação. Acesso no site em ago. 2009, p. 8.

⁴⁴ Em seu livro *A aritmética na "Escola Nova"* (*A nova didática da Aritmética*).

impediria uma educação de forma integral. Defendia o uso de cálculo mental, da rapidez e exatidão dos cálculos e a repetição moderada dos exercícios.

Na tentativa de intervir na tradição aritmética, demasiadamente enciclopédica e utilitarista apontadas por Backheuser, já havia sido apresentada por Rui Barbosa na Câmara dos Deputados, em 1883, uma nova programação para o curso primário. A proposta de Rui Barbosa foi mal compreendida na época e não obteve aprovação da Câmara. A aritmética da escola primária, nesse período, seguiu sua linha positivista.

Backheuser, contra o ensino *espontaneísta*, valorizava a exercitação e, apesar de ser também contra o caráter *utilitarista* da aritmética, estimulava o seu ensino baseado em atividades práticas.

É preciso que uma soma ou um produto saltem prontos, rápidos, sem demora, logo que enunciados as parcelas ou os fatores, ou que o troco (subtração) seja achado desde que entregue a cédula para o pagamento da despesa (BACKHEUSER, 1933, p. 94).

Na citação anterior, podemos perceber o destaque e valor à memorização de cálculos básicos e da importância desses cálculos para a vida cotidiana, também uma forma utilitarista. Defende que as crianças se habituem a realizar os cálculos mentais de memória, valorizando a rapidez e a utilidade prática em busca de soluções únicas, apontando-nos para uma concepção tradicional de ensino. Backheuser também defende a proposição de “exercícios” mais centrados no raciocínio do que na dificuldade da operação aritmética; apresentar problemas sobre assuntos de interesse direto da criança; dar tempo para que ela os compreenda e apresente sua solução; fazer com que a classe formule seus próprios problemas.

À princípio, características semelhantes à concepção de cálculo mental que enfocamos nesta pesquisa. O que não fica tão esclarecido tange à questão do contexto como tais “exercícios” foram desenvolvidos. Destacamos então, a importância da forma para além do conteúdo. Não bastam reformas de programas listarem conteúdos antes não abrangidos; é preciso se levar em conta como tais serão abordados, pois para Risopatron (1997) forma é conteúdo.

Em 1942, foi oficializada a Reforma Gustavo Capanema (1942–1961), que reformulou a organização da educação brasileira e promoveu um movimento contra os pressupostos da proposta de Euclides Roxo. Entretanto, como indica Pitombeira (2004), os principais pontos de vista de Roxo foram preservados no programa de 1942. O cálculo mental foi mantido na lista de conteúdos da Aritmética Prática do primeiro ano do curso ginásial.

Pires (2000) compara os currículos nas reformas Campos e Capanema da seguinte forma: se na Reforma Francisco Campos, a concepção de currículo foi ampliada para além da mera listagem de conteúdos a serem ensinados, incluindo uma discussão de orientações didáticas, na reforma seguinte, de 1942, essas inovações não se mantiveram, o que revela que as decisões curriculares, no Brasil, foram historicamente, marcadas por procedimentos bastante questionáveis, influenciados por questões políticas ou influências de poder de alguns grupos ou mesmo de pessoas.

A partir da década de 1960, marcada pela crescente urbanização, a escola primária tende a abrir-se para um contingente maior de alunos: todos deveriam ser escolarizados e o acesso ao ginásio começa a democratizar-se no Brasil. A partir dessa década, há grandes mudanças na educação matemática brasileira, inclusive a promulgação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB – lei 4.024), de 1961.

Apontamos, aqui, o segundo movimento internacional de modernização do ensino da matemática, depois do movimento escolanovista. Era o início do movimento da *Matemática Moderna* que surgia na Europa e nos Estados Unidos. Os principais aspectos abordados nas propostas para o ensino primário e secundário são a linguagem dos conjuntos, as estruturas matemáticas e a lógica matemática; a aritmética passa a ser parte do estudo dos campos numéricos (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1992).

De acordo com os PCNs “A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente por se considerar que, juntamente com a área de Ciências naturais, ela constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico” (BRASIL, 1997, p. 20). E como toda mudança, alguns problemas foram enfrentados a partir das ideias desse movimento, e tais dificuldades, obviamente, deixaram suas marcas dentro da sala de aula. O ensino ficou voltado mais para questões teóricas ligadas à própria Matemática do que à prática.

Gomes (2007) finaliza que:

É mais importante “saber justificar” as operações aritméticas com base nas propriedades estruturais dos conjuntos numéricos do que “saber fazer”, como assinala Miorim (1998). Parece natural que nesse contexto não exista espaço para valorizar o cálculo mental, e, de fato, constataremos a ausência de referências a ele nos livros didáticos de Matemática produzidos no Brasil nas décadas de 1960 a 1990, uma vez que o movimento da Matemática Moderna, mesmo em declínio depois da segunda década dos anos 1970, deixou marcas resistentes nessas obras.

Zunino (1996) refere-se à reforma trazida por essa matemática como responsável pelo esquecimento, a desconsideração pelo cálculo mental. Isto pode ter-se devido, como o formula a equipe ERMEL, ao fato de noções novas (conjuntos, relações,...) ocuparem tempo e exigirem importância nas aulas; porém também pode ser devido a uma insuficiência de reflexão que não permitiu explicitar outros objetivos, mais que o simples domínio de regras.

Assim, o cálculo mental novamente desaparece dos programas relativos ao período da Matemática Moderna, mas volta a integrá-los com o surgimento do Movimento da Didática da Matemática, entre os anos 1970 e 1980. Com esse movimento, a pesquisa didática se aprofundou na relação específica entre conteúdos de ensino, a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e os métodos.

Na difusão das ideias do movimento da Didática da Matemática⁴⁵, a NCTM teve papel importante. Essas ideias foram descritas nos chamados *Curriculum Standards* do NCTM e em seu documento “Agenda para Ação” (1983) há recomendações sobre o ensino de Matemática com destaque para a resolução de problemas. No início, foram restritas ao ensino norte-americano, mas, aos poucos, essas ideias “influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentam pontos de convergência [...]” (BRASIL, 1997, p. 20). Portanto, podemos perceber sua influência nos Parâmetros Curriculares do Ministério da Educação e Cultura brasileiro. Hope escreve sobre cálculo mental e as pesquisas em Didática da Matemática no Yearbook da NCTM de 1986. Tais pesquisas vêm alertar para a necessidade de defendermos o ensino do cálculo mental na escola, não somente para responder a uma demanda social, mas também porque “a proficiência no cálculo mental envolve uma forma de pensar que não será substituída facilmente pelos avanços da tecnologia”.

Da Europa também vieram ideias a respeito desse novo campo do conhecimento e que também foram importantes para a elaboração dos programas curriculares brasileiros dos PCNs. As concepções de Vergnaud (1983), por exemplo, um dos representantes franceses da

⁴⁵ Cabe uma breve distinção entre Matemática e Didática da Matemática/Educação Matemática, esboçada por Kilpatrick (1995, p. 13) “Os matemáticos e os educadores matemáticos têm essencialmente orientações diferentes para pesquisa e academicismo. Pesquisa em Matemática envolve abstrações e generalizações que podem ser tratadas por meios de dedução. Embora casos específicos sejam frequentemente estudados indutivamente como meios para apoiar conjecturas e sugerir linhas de investigação, o maquinário de prova dedutiva é usado para sancionar reivindicações e assegurar validade. Pesquisa em Educação Matemática é outro assunto, como a discussão de critérios para qualidade de pesquisa na primeira parte desse artigo pretendia mostrar. Até onde a Educação Matemática é uma ciência, ela é uma ciência humana. Se ela for vista como um campo acadêmico mais do que uma disciplina, é um campo que repousa em uma variedade de outras disciplinas, a maioria das quais são Ciências Sociais”.

Didática da Matemática, apontam para a importância de se compreender a forma como os alunos aprendem para depois poder ser possível ensinar.

O Brasil da década de 1980 foi marcado politicamente pelo processo chamado de abertura democrática, que pôs fim ao período ditatorial presente desde os anos 1960. Dentro deste novo contexto político e social houve um intenso movimento de reformas curriculares brasileiras, inclusive no tocante ao ensino de matemática, que se inspiraram nas tendências democráticas que surgiam. Até os mestrados em Educação Matemática foram criados nessa época. Os encontros nacionais de professores de Matemática voltaram a acontecer em 1987 e uma nova instituição foi criada em 1988, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, a SBEM.

Para Nacarato (2009):

Na década de 1980, a maioria dos estados brasileiros elaborou suas propostas curriculares tanto no sentido de atender a uma necessidade interna do País – fim de um período de ditadura militar e reabertura democrática – quanto com vistas a acompanhar o movimento mundial de reformas educacionais.

No caso dos currículos de Matemática, Pires (s.d., p. 6)⁴⁶ aponta que

os debates travados em torno do Movimento Matemática Moderna, as discussões motivadas por concepções e distorções que ficavam cada vez mais evidentes, impulsionaram Secretarias Estaduais e Municipais de Educação a elaborarem novas propostas curriculares para o ensino de Matemática.

Na década de 1980, entre 1982 e 1988, o município de São Paulo, através de sua Secretaria de Educação, elaborou Programas Curriculares que indicavam não somente os conteúdos a serem ensinados na rede, mas também indicava alguns procedimentos metodológicos para cada um dos itens relacionados, com sugestões de atividades, inclusive de cálculo mental.

Pires (s.d., p. 7)⁴⁷ ainda ressalta que:

Outros documentos curriculares importantes foram elaborados nesse período. A Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, capital, desencadeou no período de 89 a 92, o “Movimento de Reorientação Curricular” e escolheu a interdisciplinaridade como o principal eixo do projeto curricular para a ação pedagógica da escola.

⁴⁶ Disponível em <http://www3.fe.usp.br/secoes/ebook/mat_pol/cont/2.swf>. Acesso em 18 out. 2009.

⁴⁷ Disponível em <http://www3.fe.usp.br/secoes/ebook/mat_pol/cont/2.swf>. Acesso em 18 out. 2009.

Sobre as propostas curriculares desse período, a autora nos diz que essas foram influenciadas pelos resultados de estudos na área de Educação Matemática:

As discussões sobre “resolução de problemas”, como eixo metodológico, a construção de conceitos e procedimentos de forma a explicar o que estava envolvido (em contraposição à mecanização de procedimentos, sem compreensão), o equilíbrio e a articulação entre temas aritméticos, algébricos, métricos tinham apoio de estudos na área da Educação/Didática da Matemática.

Diante desse panorama que se traçava mundialmente em relação às inovações curriculares da área de matemática e que influenciaram as concepções brasileiras sobre educação matemática, é que baseamos a análise de nossa pesquisa, observando alguns documentos curriculares da rede municipal de ensino a partir da década de 1980, época das grandes renovações curriculares, até 2007.

CAPÍTULO 3. DA APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO

A partir da discussão a respeito das concepções de “cálculo mental” delimitadas nesta pesquisa, faz-se necessário a contextualização de algumas concepções de construção do conhecimento e da relação dessas com o processo de ensino-aprendizagem, principalmente o da matemática.

3.1. Piaget

Tendo como maior objetivo procurar entender como o conhecimento é construído, Piaget (1932, 1950, 1973) estabelece a diferença entre três tipos de conhecimento: físico ou empírico, lógico-matemático e social:

- *Conhecimento físico* - é o conhecimento dos objetos da realidade externa. Identificar a cor e o peso são exemplos de propriedades físicas que estão nos objetos da realidade externa e podem ser conhecidas pela observação (a fonte do conhecimento é parcialmente externa ao indivíduo).
- *Conhecimento lógico-matemático* – consiste nas relações entre os objetos criadas mentalmente por cada indivíduo. Quando vemos um objeto vermelho e um azul e pensamos que são diferentes, essa diferença é um exemplo de conhecimento lógico-matemático. O sujeito tem que colocar os objetos numa relação para criar mentalmente essa diferença (fonte do conhecimento lógico-matemático é interna).
- *Conhecimento social* - possui natureza amplamente arbitrária, ou seja, não existe uma relação lógica ou física entre o objeto e o conhecimento deste objeto (fonte do conhecimento parcialmente externa ao indivíduo). É construído no meio social que a criança vive.

E é levando em conta as características do conhecimento lógico-matemático piagetiano que faremos nossas considerações entre a *construção do conhecimento* e nosso objeto de pesquisa.

O construtivismo de Piaget considera o conhecimento como uma construção a partir da ação do sujeito, na interação com o objeto do conhecimento. Percebemos a importância da interação, na teoria de Piaget, não apenas para a construção do conhecimento, mas também para a própria constituição e construção do sujeito. O autor mostra que o sujeito humano

estabelece desde o nascimento uma relação de interação com o meio em que vive. Assim, a inteligência vai-se aprimorando na medida em que a criança estabelece contato com o mundo, experimentando-o ativamente.

Através do método clínico, Piaget buscou conhecer o desenvolvimento das formas de interação do sujeito com a realidade (DELVAL, 2000), e a construção do conhecimento delas decorrente. A criança é concebida como um ser dinâmico, que a todo momento interage com a realidade, operando ativamente com objetos e pessoas, gerando autonomia. Kamii (1990b), baseada em Piaget, afirma que autonomia é a capacidade de tomar decisões em dois campos. No campo moral, refere-se a decidir entre o que é certo e o que é errado. No campo intelectual, é decidir o que é verdadeiro e o que não é verdadeiro, levando em consideração fatos relevantes, independentemente de recompensa e punição.

Essa interação com o ambiente faz com que o indivíduo construa estruturas mentais e adquira maneiras de fazê-las funcionar. A questão central é a interação organismo-meio e essa interação acontece através de dois processos simultâneos: a organização interna e a adaptação ao meio, funções exercidas pelo organismo ao longo da vida.

Para existir um novo conhecimento, o organismo tem que ter um conhecimento anterior para poder assimilá-lo e transformá-lo, o que implica os dois pólos da atividade inteligente: *assimilação* e a *acomodação*. Assim como o próprio desenvolvimento da inteligência, a adaptação ocorre através desses dois processos. Para Piaget (1969), os esquemas de assimilação vão se modificando, caracterizando os estágios⁴⁸ de desenvolvimento. A adaptação e a organização são as características fundamentais de qualquer ser vivo, mas a inteligência vai além dessa adaptação.

O organismo adapta-se construindo materialmente novas formas para inseri-las nas do universo, ao passo que a inteligência prolonga tal criação construindo, mentalmente, as estruturas suscetíveis de aplicarem-se às do meio (PIAGET, 1970b, p. 15).

Ainda sobre a inteligência, Piaget aponta que “afirmar que a inteligência é um caso particular da adaptação biológica equivale, portanto, a supor que ela é, essencialmente,

⁴⁸Piaget impulsionou a Teoria Cognitiva, onde propõe a existência de quatro estágios de desenvolvimento cognitivo no ser humano: sensório-motor, pré-operacional (pré-operatório), operatório concreto e operatório formal. Cada uma dessas fases é caracterizada por formas diferentes de organização mental que possibilitam as diferentes maneiras do indivíduo relacionar-se com a realidade que o rodeia. De uma maneira geral, todos os indivíduos vivenciam essas fases na mesma sequência, porém o início e o término de cada uma delas pode sofrer variações em função das características da estrutura biológica de cada indivíduo e da riqueza (ou não) dos estímulos proporcionados pelo meio ambiente em que ele estiver inserido. Segundo Piaget (1971), a estrutura cognitiva é construída em etapas e cada etapa incorpora as anteriores, dando-se a construção do conhecimento pela ação recíproca e interativa do sujeito com os objetos (meio).

uma organização e que sua função consiste em estruturar o universo tal como o organismo estrutura o meio imediato” (PIAGET, 1970b, p. 10).

Piaget considera, ainda, o desenvolvimento em etapas, assim pressupõe que os seres humanos passam por uma série de mudanças ordenadas e previsíveis, e é influenciado por fatores como: maturação (crescimento biológico dos órgãos), exercitação (funcionamento dos esquemas e órgãos que implica na formação de hábitos), aprendizagem social (aquisição de valores, linguagem, costumes e padrões culturais e sociais) e equilibração (processo de autorregulação interna do organismo, que se constitui na busca sucessiva de reequilíbrio após cada desequilíbrio sofrido).

Segundo Piaget (1973), quando os esquemas não estão de acordo uns com os outros, quando o equilíbrio entre a assimilação e a acomodação está desorganizado, é provável que ocorra o processo cognitivo. Refletindo sobre esse pensamento, pensamos na importância da escola propor atividades desafiadoras que provocam desequilíbrios e re-equilibrações sucessivas, promovendo a descoberta e a construção do conhecimento.

Para Piaget todo organismo vivo procura manter um estado de equilíbrio ou de adaptação com seu meio, agindo de forma a superar perturbações na relação que ele estabelece com o meio, ou seja, a noção de *equilíbrio* é o alicerce da teoria de Piaget. Esse processo, representado na Figura 7, dinâmico e constante do organismo de buscar um novo e superior estado de equilíbrio é chamado de processo de *equilibração majorante*. Para Piaget (1969, p. 45), definimos o processo da equilibração como o resultado da construção de estruturas sucessivas, de complexidade crescente.

Figura 7 - Processo de Equilibração Majorante, segundo Piaget

Esse desenvolvimento cognitivo, que ocorre através de constantes desequilíbrios e equilibrações, provoca mudanças que, mesmo pequenas, promovem a ruptura do estado de repouso, da harmonia entre organismo e meio, causando um desequilíbrio.

Com base nesses pressupostos, a educação deve possibilitar à criança um desenvolvimento amplo e dinâmico, que permita essas re-equilibrações, desde o período sensório-motor até o operatório formal.

Para Piaget (1973), a natureza de todo conhecimento está na constituição da relação entre o sujeito e o objeto:

[...] o conhecimento repousa em todos os níveis sobre a interação entre o sujeito e os objetos, [...] mesmo quando o conhecimento toma o sujeito como objeto, há construções de interações entre o sujeito-que-conhece e o sujeito-conhecido (p. 590).

A escola deve partir dos esquemas de assimilação da criança, propondo atividades desafiadoras que provoquem desequilíbrios e re-equilibrações sucessivas, promovendo a descoberta e a construção do conhecimento. Para construir esse conhecimento, as ideias infantis devem combinar-se às informações presentes no meio, na medida em que o conhecimento não é descoberto espontaneamente pela criança, nem transmitido de forma mecânica pelo meio exterior ou pelos adultos, mas, como é resultado de uma interação, na qual o sujeito é sempre ativo, procura dinamicamente compreender o mundo que o cerca, e busca resolver as interrogações que esse mundo propõe. Observa-se então que, para Piaget (1969), o sujeito é um organismo que possui estruturas e que, ao receber os estímulos do meio, dá uma resposta em função destas estruturas.

O *sujeito ativo* é aquele que aprende por meio de suas próprias ações sobre os objetos do mundo, e que constrói suas próprias categorias de pensamento ao mesmo tempo em que organiza seu mundo, que incorpora aquele novo conhecimento, tornando-o em algo com significado, não esperando que o conhecimento chegue até ele de forma pronta, transmitida externamente. A *significação* é o resultado da possibilidade de assimilação, num processo de relação. O conhecimento implica sistemas de significação.

E a partir daquilo que incorpora, o sujeito se reorganiza de modo a se incorporar ao objeto:

A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar os novos elementos nos esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Mas, inversamente, as coisas nunca são conhecidas em si mesmas, porquanto

esse trabalho de acomodação só é possível em função do processo inverso de assimilação (PIAGET, 1970b, p.18).

Faz-se necessário ressaltar que nenhum esquema ou operação intelectual está desconectado de todos os outros. Para Piaget (1970b), todo e qualquer ato de inteligência supõe um sistema de implicações mútuas e de significações solidárias. A partir disso, verificamos que o conhecimento significa necessariamente relação, tanto do sujeito com o mundo, como entre os esquemas e as estruturas próprias do sujeito, o sujeito do conhecimento.

O sujeito do conhecimento, para Piaget (1971), é o '*sujeito epistêmico*', ou seja, o sujeito da epistemologia. A criança constrói sua realidade de certa maneira como a construção do pensamento científico, expressando níveis diferentes da capacidade humana de conhecer. Piaget com sua 'epistemologia', a sua teoria do conhecimento, explica da mesma forma como é possível o conhecimento, em termos gerais, e como é possível o conhecimento científico.

A criança, ao nascer, age por reflexos, construindo o que Piaget chama de esquema motor. O autor considera que a adaptação do ser humano ao meio se dá através da ação, que acontece graças à construção que a criança faz de esquemas motores, que são a condição da ação do indivíduo no meio chegando ao significado e, dessa forma, a criança organiza ou estrutura sua experiência. Por essa atividade motora, a criança age 'no mundo', organizando este mundo e estruturando-o; concomitantemente, se dá a construção (interna) das estruturas mentais.

Pode-se definir a constituição do sujeito a partir da *interação*. Interação esta que se dá através da ação (assimilação e acomodação) e permite que tanto um quanto o outro passem a ser conhecidos, não simplesmente por suas próprias características, mas sim pelas características da relação estabelecida entre elas:

A inteligência não principia, pois, pelo conhecimento do eu nem pelo das coisas como tais, mas pelo da sua interação; e é orientando-se simultaneamente para os dois pólos dessa interação que a inteligência organiza o mundo, organizando a si própria (PIAGET, 1970a, p. 330).

Através desse duplo processo de adaptação e organização e, conseqüentemente, da assimilação e da acomodação, há uma relação permanente entre estrutura e gênese, pois são esses processos que permitem a construção das estruturas, que são construídas ao longo do tempo através de um processo dialético do sujeito ativo, dentro de um sistema de interações. O sujeito ativo é aquele que observa, reorganiza, exclui, classifica, ordena, reformula, compara, insere, formula hipóteses etc em uma ação interiorizada (pensamento) ou em ação

efetiva. Alguém que esteja realizando algo materialmente, agindo na prática, mas seguindo um modelo dado por outro a ser copiado, não é, o que consideramos nesse caso, um sujeito intelectualmente ativo. E as interações – no caso específico da sala de aula – ocorrem na relação entre o professor, o aluno, o saber, os outros alunos na dinâmica e contexto de seu meio. Interações que culminam no desenvolvimento da *autonomia* no aluno. Autonomia é autogoverno, é “a submissão do indivíduo a uma disciplina que ele próprio escolhe e a constituição da qual ele elabora com sua personalidade” (PIAGET, 1998, p. 154). Além disso, Piaget trata do desenvolvimento moral e mostra que a criança passa por duas fases, a anomia e a heteronomia - que são superadas conforme vão ficando mais velhas e evoluindo em suas relações - até conquistar a autonomia.

Vale ainda lembrar de que Piaget não formulou métodos de ensino, nem aponta respostas sobre o que e como ensinar, mas fornece um referencial para a observação das possibilidades e limitações de crianças e adolescentes no seu modo de pensar e aprender. Destaca, implicitamente, a importância da formação de pessoas criativas e descobridoras, críticas e ativas, na busca constante da construção da autonomia. E tais características e habilidades são muito encontradas nas situações envolvendo o cálculo mental, pois proporcionam maior liberdade de escolha, estimulam o espírito crítico e geram autonomia para além da ação do professor.

Para Piaget (1998), a educação, quando autoritária, reforça a heteronomia da criança e dificulta a formação de pessoas livres, pois é livre o indivíduo que sabe julgar, e cujo espírito crítico, sentido da experiência e necessidade de coerência lógica se colocam ao serviço de uma razão autônoma, comum a todos os indivíduos e que não depende de nenhuma autoridade externa.

3.2. Kamii

As investigações de Jean Piaget sobre a natureza e a origem do conhecimento incentivaram muitos especialistas a estudarem suas teorias no âmbito escolar. Constance Kamii, cujas experiências caminham à luz das teorias de Piaget, principalmente em relação ao conhecimento lógico-matemático, também trata bastante da questão da *autonomia* e a coloca em uma perspectiva de vida em grupo. Este estudo também se fundamenta nas teorias da autora citada, que trabalhou com estudantes das séries iniciais em escolas americanas e, juntamente com colaboradores, escreveu vários livros propondo atividades no campo do ensino-aprendizagem de matemática. Ela e seus colaboradores (DECLARK, 1990; JOSEPH,

1994; LIVINGSTON, 1995) estimulam a prática da *aritmética* por meio de situações diárias em sala de aula e jogos em grupo, dando grande valor à temática da construção do número e ao cálculo mental. Kamii, (1990a) concebe a construção do número como o principal objetivo para a aritmética das crianças escolarizadas de 4 a 6 anos, dentro do contexto da autonomia como finalidade ampla da educação.

Para ela, a autonomia significa o indivíduo ser governado por si próprio e deveria ser a finalidade máxima da educação. Ela dá ênfase à ideia de que a forma correta de educar uma criança é estimulando sua autonomia, sua capacidade de tomar suas próprias decisões.

A essência da autonomia é que as crianças se tornam capazes de tomar decisões por elas mesmas. Autonomia não é a mesma coisa que liberdade completa. Autonomia significa ser capaz de considerar os fatores relevantes para decidir qual deve ser o melhor caminho da ação. Não pode haver moralidade quando alguém considera somente o seu ponto de vista. Se também consideramos o ponto de vista das outras pessoas, veremos que não somos livres para mentir, quebrar promessas ou agir irrefletidamente (KAMII, 1990a, p. 97).

A autonomia significa levar em consideração os fatores importantes para decidir agir da melhor forma, considerando variados pontos de vista. É o contrário de heteronomia, que significa ser governado pelos outros. O trabalho com cálculo mental lida constantemente com pontos de vista diferentes, pois observando estratégias alheias, podemos analisá-las, verificar a sua eficácia e assimilá-las ao nosso repertório.

Quando Piaget discutiu a importância da coordenação de pontos de vista, ele não falava sobre coordenações observáveis externamente. A confrontação de pontos de vista é importante para o desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático porque coloca a criança em um contexto social que a incentiva pensar sobre outros pontos de vista em relação ao seu próprio (KAMII, 1990b, p. 59).

As experiências realizadas por Kamii demonstram que é na relação com o outro que a organização do pensamento vai se constituindo. As ações que permitem que isso aconteça estruturam o pensamento da criança. O trabalho com cálculo mental na sala de aula necessariamente permite e requer a coordenação de pontos de vista e a troca de experiências para que a análise do problema tenha mais chances de se tornar uma rica discussão de alternativas cabíveis em busca da(s) solução(ões) mais adequada(s). Dessa forma, o desenvolvimento infantil se dá a partir das relações que as crianças estabelecem com o mundo, sendo que o observar, comparar, perguntar, o interpretar, o interagir e o registrar

conclusões são inerentes ao conhecimento matemático, sendo o cálculo mental central para o desenrolar de tais habilidades. Para Piaget (apud Kamii, 1990a), a criança procura evitar contradizer-se em presença de outras pessoas, o desejo de ‘fazer sentido’ e de trocar pontos de vista com outras pessoas é o que auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico da criança.

Assim, consideramos que um dos principais objetivos, na educação matemática, seja estimular a criança para que tenha confiança em suas próprias estratégias, em sua capacidade para lidar com situações matemáticas novas e utilizar seus conhecimentos prévios, bem como dar à criança a oportunidade de observar os fatos, em especial, quando estes são contrários aos previstos por ela. Em grupos em que esse estímulo não ocorreu, Kamii (1990b) nos diz que crianças que tenham perdido a confiança não desenvolverão sua capacidade de pensar. Para se desenvolver essa capacidade de pensar na criança, é preciso que se estimule a sua *responsabilidade na construção do seu conhecimento*, que cada vez mais deixe de ser dependente do adulto ou de outros colegas para realizar suas próprias conclusões.

Segundo Freire (2000) é com a autonomia, penosamente construindo-se, que a liberdade vai preenchendo o espaço antes habitado por sua dependência. Sua autonomia que se funda na responsabilidade que vai sendo assumida.

Muitas vezes, a situação de cálculo mental põe a criança num embate entre suas ideias e a alternativa cabível, fazendo-a rever suas conclusões, refazer seu percurso de pensamento e buscar nova solução. Por essa razão, é necessário saber como a criança constrói os conhecimentos matemáticos. Segundo Kamii (1990a), a construção do conceito de número mostra que este é construído pela criança a partir de todos os tipos de *relações* que ela cria entre os objetos. Dessa maneira, a ideia de número é uma construção realizada pelo sujeito, e ocorre a partir das inúmeras relações que ele estabelece na sua leitura de mundo. Quanto mais diversificadas as experiências, melhores são as possibilidades de compreensão deste. Assim como a construção do conceito do número, o trato com o cálculo mental também é elaborado de maneira interna e individual, construído na relação com os outros e seu meio. Segundo Kamii (2005, p.11), “de acordo com o empirismo e o senso comum, os seres humanos adquirem o conhecimento pela internalização que dele fazem a partir do ambiente (ou seja, de fora para dentro)”. As pesquisas de Kamii apontam para a evidência de que esse ambiente pode agilizar ou retardar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático (KAMII, 1990a).

A ação do professor é fundamental para oferecer condições para que a criança possa construir seu próprio conhecimento, ou seja, o professor pode criar um ambiente no qual a criança desempenhe um papel importante e tenha a possibilidade de decidir por si mesma como desempenhar. Para Kamii (1990a), dizer que a criança deve construir seu próprio conhecimento não implica em que o professor fique sentado, omita-se e deixe a criança inteiramente só.

Kamii ainda ressalta que esse tipo de conhecimento refletido e autônomo é estimulado pelo meio social e que desenvolver situações para que as crianças apenas memorizarem fatos, relacionem nome ao símbolo, saibam escrever e quantificar figuras por meio de numerais, não dará condições para que entendam os conceitos básicos do conhecimento matemático.

Kamii (1990a) afirma que o número é alguma coisa que cada ser humano constrói através da criação e coordenação das relações. Esta afirmação permite percebermos que os alunos necessitam é de flexibilidade operatória de seus esquemas de assimilação e não tanto de respostas aprendidas e de memorização. O mesmo deve acontecer com situações de cálculo mental, ou seja, embora a memorização de alguns fatos seja necessária para facilitar o cálculo, em sua essência, o mais importante é ter flexibilidade no conhecimento do sistema de numeração, coordenando tal conhecimento de maneira particularmente lógica, na busca de soluções mais eficazes. Se a criança construir a sua própria estrutura lógica de pensamentos, pode tornar-se capaz de raciocinar logicamente em uma ampla variedade de tarefas. Contudo, se ela for induzida a dar respostas corretas, não podemos esperar que prossiga em direção a raciocínios matemáticos mais complexos. O professor poderá contribuir significativamente para essa compreensão criando situações para que a criança possa desenvolver suas habilidades.

A criança que pensa ativamente na vida diária pensa sobre muitas coisas simultaneamente. (...) As relações são criadas pelas crianças a partir de seu interior e não lhe são ensinadas por outrem. No entanto, o professor tem papel crucial na criação de um ambiente material e social que encoraje a autonomia e o pensamento (KAMII, 1990a, p. 45).

Nas situações de cálculo mental, o professor também tem o papel de propor desafios, mas que seja adequado, devendo conter obstáculos possíveis de serem transpostos, que exijam esforço e dedicação, mas que sejam passíveis de reflexão e criação.

Kamii afirma que o conceito de número na criança é construído de "dentro para fora", num processo de reinvenção da matemática. Isso porque a aritmética está inserida no conhecimento social, ou seja, é uma convenção histórico-culturalmente construída e que diz

respeito à abrangência do raciocínio lógico-matemático. O professor deve aproveitar os conhecimentos que a criança traz de seu meio social e a partir deles explorar suas concepções de mundo, tornando-a consciente de seus atos e do motivo das coisas se constituírem como são, mas acima de tudo utilizar esses conhecimentos cotidianos como uma forma de progresso, propiciando que estes evoluam para o saber socialmente construído, ao nível dos conceitos científicos. As crianças não vão à escola aprender os conceitos numéricos porque os descobrem naturalmente, pressupondo-se que o raciocínio lógico-matemático é um conhecimento natural. Kamii sugere, então, que as regras da aritmética não precisam ser internalizadas, pois as crianças já as têm, não de modo científico, mas espontâneo. O ensino da aritmética deve é estimular o desenvolvimento do raciocínio da criança para que ela possa construir em si mesma a aprendizagem da aritmética por meio da transposição do saber científico para o saber escolar⁴⁹:

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática* (CHEVALLARD; BOSH; GASCÓN, 1991, p.39)

E esse saber também deve considerar as ações de erro. O “errar” é parte integrante dessa internalização, pois é observando seus caminhos que se opta por outros e se avança, sendo que o professor tem importante papel de mediador e estimulador de discussões em busca de construções e/ou soluções por parte das crianças.

Para Kamii (1990b, p. 64),

ideias erradas devem ser modificadas pela criança. Elas não podem ser eliminadas pelo professor. Além disso, a natureza do conhecimento lógico matemático é tal que o professor pode estar seguro de que as crianças chegarão a respostas corretas, se discutirem o suficiente entre elas.

A discussão é momento primordial na construção do conhecimento matemático, revelando-se como parte de um processo fundamental para a aprendizagem com

⁴⁹Cabe aqui uma consideração acerca da passagem do conhecimento científico para o escolar, baseado na teoria da Transposição Didática. Essa teoria teve origem na Didática das Matemáticas, através, principalmente, do trabalho de Yves Chevallard (1991). Chevallard examina que o saber não chega à sala de aula tal qual ele foi produzido no contexto científico. Ele passa por um processo de transformação, que implica em lhe dar uma “roupagem didática” para que ele possa ser ensinado. Isso acontece porque o objetivo da comunidade científica e da escola é diferente. À Ciência cabe o papel de responder as perguntas que são formuladas e necessárias de serem respondidas em um determinado contexto histórico e social. Por outro lado, esses novos saberes precisam ser comunicados à comunidade científica, em um primeiro plano, e à própria sociedade, em um segundo plano. Nesse processo de comunicação dos saberes, existem também aqueles que são selecionados como saberes que devem ser ensinados, que devem adentrar a sala de aula e serem socializados naquela instituição. Estes têm por objetivo, como diz Brousseau (1986), fazer com que os alunos se apropriem de saberes constituídos ou em vias de constituição. É então que entra em cena a Transposição Didática.

compreensão. Desse modo, o conhecimento lógico-matemático da área aritmética não deve ser colocado de uma só vez, pois a criança tem formas e momentos próprios de adquirir esse conhecimento. O cerne da crítica de Kamii ao ensino tradicional da aritmética é o uso excessivo dos *algoritmos* que embota a capacidade de refletir, pensar e flexibilizar estratégias.

Segundo Kamii e Dominick (1998), os algoritmos são prejudiciais porque encorajam as crianças a desistir do seu próprio pensamento, isto é, utilizam um procedimento rotineiro que parece impedi-los de pensar. Também as fazem esquecer o que já sabem sobre o valor de posição na escrita dos números, impedindo o desenvolvimento do sentido do número (compreensão global do número e das operações). Kamii e Dominick também indicam que quando as crianças inventam os seus próprios procedimentos fazem-no indo da esquerda para a direita, ao passo que nos algoritmos têm de o fazer ao contrário.

Kamii (1994, p.7) também critica o uso indiscriminado do algoritmo – regra imposta pelos adultos - quando demonstra contrariedade à formação de alunos que

já tenham sido transformados em máquinas de pensar como resultado de uma instrução tradicional – crianças que podiam apenas contar, arquivar na memória, rememorar e, mecanicamente, seguir regras chamadas algoritmos. Uma vez que as crianças se tornem seguidoras de regras, tais como a de somar colunas da direita para a esquerda, é muito difícil conseguir que elas desenvolvam seu próprio raciocínio.

Kamii considera, desse modo, que para a construção do conhecimento lógico-matemático, é necessário o respeito ao indivíduo, ao seu pensamento e à sua criação. E afirma que tal conhecimento deve ser baseado na capacidade natural de pensar das crianças. Portanto, na construção do conhecimento aritmético, é importante promover situações que façam as crianças colocarem em jogo suas ideias, compará-las aos de outros colegas e avançar em sua aprendizagem e não priorizar a técnica operatória do algoritmo que limita a expressão de criatividade do aluno. Kamii (1994, p. 96) sugere a reinvenção da aritmética pelas crianças:

Que as crianças inventem seus próprios procedimentos para somar números de dois algarismos e aprendam o valor posicional durante o processo [...] As crianças pequenas compreendem os procedimentos que elas próprias inventam, mas não os algoritmos que elas memorizam no ensino tradicional. Elas também *recordam* mais facilmente os procedimentos inventados por elas, tornando desnecessárias as revisões repetidas. Além disso, os procedimentos que elas inventam estão profundamente enraizados na intuição, desenvolvendo o “senso numérico” e a habilidade para efetuar estimativas de maneira lógica.

Além disso, a autora (1994, p. 94) considera que as crianças devem aprender matemática operando diretamente com os números, “que as crianças ajam sobre os números

aditivamente e construam uma rede de relações numéricas”. Pensando dessa forma, Kamii discute também o uso indiscriminado de *materiais concretos* e de *caixas de valor e lugar* em sala de aula, alegando a falta de necessidade dos mesmos na compreensão dos sistemas aditivos de nosso sistema de numeração. Crianças que são estimuladas a inventar seus próprios procedimentos “pensam naturalmente em dezenas e concebem como o valor posicional ‘funciona’ sem uma única lição envolvendo feixes de varetas, material base ou caixas de valor posicional” (KAMII, 1994, p. 97).

Por outro lado, Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) apontam para duas vantagens essenciais no uso dos algoritmos: a generalidade – o algoritmo pode ser usado com quaisquer números; e a eficácia – um algoritmo conduz sempre a uma resposta certa, ou seja, desde que se usem bem as regras, temos a certeza de chegar a um resultado correto.

Desse modo, não podemos restringir as ideias dos alunos a uma única técnica, mas, sim, devemos flexibilizar seu raciocínio, ampliar suas formas de pensar e agir matematicamente, de administrar ideias diferentes, de julgar validades. E isso é bastante otimizado nas situações que envolvem cálculo mental, já que “no domínio lógico-matemático, a confrontação de pontos de vista serve para aumentar a capacidade de raciocinar das crianças a um nível sempre mais e mais elevado. A interação com os colegas deve ser, pois, maximizada” (KAMII, 1990b).

3.3. Charnay

As situações de ensino-aprendizagem são processos que ocorrem entre aluno, professor e saber, foco principal da Didática da Matemática e dos estudos do pesquisador Roland Charnay. Assim, esta pesquisa está fundamentada, ainda, nos estudos desse autor, que define modelos didáticos para analisar o papel de cada um nesse processo, propondo uma classificação de problemas relacionados a tais modelos.

3.3.1. Dos processos de ensino e aprendizagem

O movimento da Didática da Matemática apontou a necessidade de algumas mudanças, dentre elas a mudança no foco principal do processo ensino-aprendizagem: é a alteração de “como ensinar” para “como os alunos aprendem”. O aluno está no centro do processo de aprendizagem e o docente é o mediador, que o ajuda a construir os conceitos e a tomar consciência das decisões que toma.

Charnay (1996, p. 43) faz algumas considerações sobre esse processo de aprendizagem. Segundo o autor, “Os conhecimentos não se empilham, não se acumulam, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrio, no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados.” Assim como Piaget, o autor defende que os conhecimentos novos surgem para contestar os antigos, provocando uma reorganização dos conhecimentos. Charnay e Piaget, ao longo de suas obras, destacam o papel relevante da *ação* na construção dos conhecimentos. Os autores mencionados - e também Kamii - lembram que agir não necessariamente tem a ver com manipulação de objetos concretos, mas agir com intenção, problematizando as ações, buscando estratégias adequadas, estimando, prevendo resultados.

Outra questão importante para Charnay (1996, p. 43) é que “só existe aprendizagem quando o aluno percebe que existe um problema para resolver.” O *problema* tem de ser desafiador o bastante para o aluno perceber os limites de seu conhecimento anterior e elaborar novas estratégias de pensar sobre o desenvolvimento do problema, mas, por outro lado, tem de estar acessível e ser passível de análise.

Em relação aos erros cometidos pelo aluno, o autor os vê como indícios de como a criança pensa sobre aquela situação, são indicadores de seu “estágio de conhecimento”. Assim, os erros não correspondem a ausência do saber, mas a uma maneira de conhecer (que por vezes serviu em outros contextos) contra a qual o aluno deverá construir o novo conhecimento.

Charnay destaca ainda que os conceitos matemáticos não estão isolados, mas formam uma rede entre si e que permitem ao aluno fazer relações e construir seu conhecimento de forma não linear, mas ampla e relacional. Para isso, a *interação* social é de extrema importância, na relação professor-aluno, mas principalmente na relação entre os colegas, onde se pode gerar conflitos sócio-cognitivos entre iguais. Para o autor, o professor deve propor e organizar uma série de situações com diferentes obstáculos e organizar as diferentes fases - investigação, formulação, validação e institucionalização.

Roland Charnay (1996) discute essa relação aluno-professor-conhecimento por meio dos modelos didáticos que propõe para analisar essas variáveis na sala de aula. Charnay leva em consideração o triângulo fundamental que configura as relações entre os três pólos da realidade em sala de aula: os alunos (A), o professor (P) e o objeto de conhecimento - o saber (S).

O objeto de conhecimento está relacionado ao saber, ao conteúdo, e o professor, às ações que realiza para criar interações entre o aluno e o objeto de conhecimento. E o aluno não deve ser mero repetidor, mas deve pensar sobre suas ações. Para Charnay (1996), o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar diante de novas situações, adaptando e transferindo seus conhecimentos para resolver desafios.

Gómez-Granell (2006, p. 274), também expõe que: saber matemática implica em dominar os símbolos formais independentemente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações problemas que assim o requeiram. O autor afirma ainda que “um dos objetivos essenciais (e ao mesmo tempo uma das dificuldades principais) do ensino da matemática é precisamente que o que se ensine esteja carregado de *significado*⁵⁰, tenha sentido para o aluno.” O desafio docente está na competência de propor aos seus alunos um aprendizado significativo, pois é função de quem se propõe a esta tarefa preparar seus educandos para tomar decisões em qualquer situação de sua vida. Cabe ao professor instigar e orientar o aluno a participar ativamente das aulas de matemática, de forma autônoma, fazendo descobertas e generalizações.

Charnay (1996) - por meio do que denomina de modelos didáticos - faz algumas considerações sobre esses papéis do professor e do aluno em relação ao saber construído em sala de aula.

3.3.2. Os modelos didáticos de Charnay

O primeiro modelo é o chamado modelo *normativo*, “Trata-se de transmitir, de comunicar um saber aos alunos. A Pedagogia é então a arte de comunicar, de ‘fazer passar’ um saber” (CHARNAY, 1996, p. 39). O modelo é centrado no conteúdo, onde a função do professor é mostrar as noções, apresentá-las, dar exemplos sobre o que está ensinando, enquanto a função do aluno é, basicamente, aprender escutando as explicações do professor,

⁵⁰ Grifo nosso.

ficar muito atento e, em seguida, repetir os procedimentos que o professor ensinou para resolver os problemas daquela mesma maneira, exercitar e aplicar àquilo que aprendeu.⁵¹

Ponto de ligação mais forte centrada no professor e no saber, que vêm de cima. Aluno participa dessa ligação de forma perpendicular e pouco ativa⁵².

Segundo Charnay (1996, p. 39), “Aí reconhecem os métodos às vezes chamados de dogmáticos (da regra às aplicações) ou maiêuticos (perguntas/respostas).” A concepção do saber vigente nesse modelo é a de um saber que está pronto, construído, onde o professor atua simplesmente como aquele que passa para as crianças esse saber já elaborado e acabado.⁵³

Modelo normativo⁵⁴

P: exposição do conteúdo com modelos e exercícios

A: exercita aplicando o modelo

O segundo modelo é o que ele chama de *incitativo*. Esse modelo está centrado no aluno. Mas de que forma o aluno participa? Para começar, o professor escuta o aluno sobre seus interesses, suas necessidades, desperta sua curiosidade e o ajuda a utilizar fontes de informação. O aluno procura, organiza a informação que vai encontrando, estuda, aprende e o professor responde a suas demandas, pois é o aluno que escolhe o que quer aprender.

⁵¹ Temos aqui a *abordagem tradicional* de ensino, segundo Mizukami (1986) e a *concepção bancária de educação*, segundo Freire (2000).

⁵² O sentido de perpendicular e pouco ativa está em relação a ter papel coadjuvante, auxiliar.

⁵³ Concepção absolutista de conhecimento matemático.

⁵⁴ P: professor e A: aluno.

Ponto de ligação mais forte centrado no professor e no aluno. O saber social e científico toca essa ligação de forma perpendicular e pouco ativa, pois o aluno é que dá relevância aos assuntos que quer conhecer.

O saber está ligado às necessidades da vida e “à estrutura própria deste saber passa para segundo plano”. As características e interesses do aluno levam o professor a tomar decisões sobre o que e como se ensina. O importante é que a situação de ensino-aprendizagem se torne interessante para o aluno, responda às suas necessidades e interesses. Então, nesse modelo, as preocupações não estão voltadas para que o aluno reconstrua o saber social e cientificamente constituído⁵⁵.

Modelo Incitativo

P: escuta os interesses do aluno e o auxilia na busca de informações

A: busca, organiza e estuda o que acha interessante.

O terceiro modelo é caracterizado por Charnay como *apropriativo*⁵⁶, pois permite que o aluno, na situação didática, chegue a reconstruir o saber socialmente constituído mediante aproximações sucessivas, não imediatamente, mas interagindo com o conteúdo de diferentes maneiras, e isso lhe permitirá confrontar ideias antigas e novas e construir esquemas mais elaborados.

Nesse modelo, “centrado na construção do saber pelo aluno”, propõe-se partir de concepções pré-existentes no aluno, “e ‘coloca-as à prova’ para melhorá-las, modificá-las ou construir novas.” Não se trata simplesmente de saber quais são os interesses e as necessidades do aluno, como no segundo modelo, mas o professor precisa saber intervir na situação

⁵⁵ Charnay reconhece aqui “as diferentes tendências chamadas ‘métodos ativos’.” e poderíamos relacioná-los com o que caracterizou a Escola Nova.

⁵⁶ Também conhecido como modelo apropriativo-aproximativo.

didática para que o aluno pense dinamicamente a respeito desses conteúdos que precisa comunicar, os conceitos, as hipóteses e fazendo-as participarem como sujeitos cognitivos que são.

Ponto de ligação mais forte centrado no aluno e na reconstrução do saber social e científico (base). O professor toca essa ligação de forma pouco invasiva, mas ativa.

Modelo apropriativo

P: Precisa saber intervir na situação didática para que o aluno pense dinamicamente.

A: Reconstruir o saber socialmente construído por meio da reflexão e ação, em aproximações sucessivas.

O modelo apropriativo de Charnay vai ao encontro do que Mendonça-Domite (1999, p. 16) relata sobre este tipo de interação, em que

o aluno é um ser mais livre para **governar** o próprio raciocínio e para tomar decisões. O professor de matemática não tem mais **nas mãos as rédeas** de todo o processo – deve passar a ser um orientador, um regente do processo intelectual do aluno⁵⁷.

Na perspectiva desse modelo apropriativo, o professor propõe e organiza sequências de situações didáticas que apresentam obstáculos, questionam as concepções prévias das crianças, de tal maneira que se torne possível que essas concepções se aproximem progressivamente da natureza do saber científico ou do saber socialmente constituído, propondo no momento adequado os elementos convencionais do saber. Nesse modelo, a origem e a organização do saber em si tem uma importância fundamental. O professor estimula o debate entre colegas, a defesa de pontos de vista com argumentos, permite o questionamento dos pontos de vista de outros, ou até mesmo os próprios, aqueles que ele havia defendido antes. O docente se encarrega de pensar e propor situações que promovam desequilíbrios e a necessidade de novas adaptações, “encarregando-se dos esquemas de

⁵⁷ Grifo da autora.

assimilação originais das crianças e do estabelecimento de conflitos, de contra-exemplos e de problemas que obriguem o aluno a construir conhecimentos que o aproximem do saber” (ZUNINO, informação verbal, s.d.).⁵⁸

O aluno pode experimentar, escolher, mas vai fazê-lo – principalmente - no âmbito de situações didáticas especialmente propostas pelo professor para que sejam colocadas em jogo suas concepções e para que os alunos se defrontem com obstáculos que os obriguem a avançar.

Charnay (1996, p. 40), no entanto, chama a atenção

que nenhum professor utiliza exclusivamente um dos modelos; que o ato pedagógico em toda sua complexidade utiliza elementos de cada um deles [...], porém, apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não e de maneira privilegiada, de um deles.

Charnay (1996) destaca ainda que três elementos da atividade pedagógica permitem a maior diferenciação entre os modelos caracterizados: o comportamento do professor diante dos *erros* de seus alunos, as práticas de utilização da *avaliação* e o papel e o lugar que o professor dá à atividade de *resolução de problemas*. Sobre esse último tema é que vamos nos deter, a seguir, pois ele servirá de apoio para nossas observações e considerações.

3.3.3. Resolução de problemas

Antes de falarmos a respeito das considerações de Charnay sobre a utilização de problemas dentro da perspectiva dos modelos didáticos descritos na seção anterior, faz-se necessário uma breve consideração a respeito de algumas concepções de *problemas*, assunto relevante a ser considerado em nossa pesquisa, pois, segundo Gonçalves e Freitas (s.d., acessado da internet, p. 1), “algumas pesquisas apontam uma relação positiva entre o cálculo mental e a resolução de problemas”. No relato de suas experiências, Butlen e Pezard (2000, p.5) afirmam que a prática constante de cálculo mental permite aumentar as capacidades de iniciativas dos alunos, fazendo com que eles explorem, de maneira rápida, diferentes formas de resolverem um problema. E por que ensinar matemática por meio de resolução de problemas? Para Moreno (2006), porque é a busca das soluções para os problemas e as reflexões sobre eles que geram conhecimentos. E o que se entende por problemas dentro da Didática da Matemática? Moreno (2006, p. 51) afirma que:

⁵⁸ Informação fornecida por Délia Lerner Zunino na conferência que proferiu no 6º Encontro nacional de Intercâmbio e Atualização Educacional – Argentina.

A didática da matemática define os problemas como aquelas situações que criam um obstáculo a vencer, que promovem a busca dentro de tudo o que se sabe para decidir em cada caso aquilo que é mais pertinente, forçando, assim, a utilização dos conhecimentos anteriores e mostrando-os ao mesmo tempo insuficientes e muito difíceis. Rejeitar os não-pertinentes e empenhar-se na busca de novos modos de resolução é o que produz o processo nos conhecimentos.

São muitas as expressões que costumam ser relacionadas ao termo “problema”: resolução de problemas, solução de problema, formulação de problemas, proposição de problema, exploração de problema, colocação de problemas, situações-problema, problematização, investigação e outros. Dessa forma, gostaríamos de esclarecer, também, em qual sentido o termo “problema” é utilizado nesta pesquisa.

Muitas pesquisas têm sido realizadas em relação a esse assunto, e dentre os muitos pesquisadores encontramos Polya (1978, 1981), Schoenfeld (1987), Vergnaud (1988), Butlen e Pezard (2000). A resolução de problemas, segundo Andrade (1998), por exemplo, deve ser assumida como uma atividade multicontextual. O problema, no contexto desse trabalho do autor, é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; c) Introduz-se ou leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo. O autor diferencia “exploração e resolução de problemas” de “resolução de problemas”. A exploração e resolução de problemas pode ser desenvolvido a partir da relação

Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS). Os alunos realizaram um trabalho sobre ele. Juntos, professor e alunos discutiram o trabalho feito num processo de reflexões e síntese. Chegando, assim, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses. Nesse processo, o trabalho de **exploração de problemas** é inacabado, vai além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir da relação P-T-RS. No trabalho de **exploração de problemas**, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe [...] ⁵⁹(ANDRADE, 1998, p. 24).

E a resolução de problemas está relacionada a uma experiência que compreende a relação *Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Solução*, baseada num processo com codificação e decodificação e que envolve uma análise crítica.

⁵⁹ Grifo do autor.

Quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de decodificação e de codificação. Este trabalho ajuda o aluno a explorar e a resolver esse problema (ANDRADE, 1998, p. 25).

O problema, segundo Mason (1996), não precisa vir necessariamente da experiência do aluno sempre, pois problemas em situações cotidianas podem deixar os estudantes “estimulados ou aborrecidos. As condições que suportam estas reações têm muito a ver com atitudes e a atmosfera criada pelo professor”. O autor também debate sobre três tipos de problemas: a) *fechados*, onde a tarefa do estudante é encontrar uma resposta certa, de forma acertada; b) *abertos*, que podem partir de qualquer situação vivenciada e inesperada e provocar novas questões que os alunos mesmos elaboram; c) *exploratórios*, que podem ter mais de uma resposta, mas são encaminhados pelo professor.

Paul Ernest também realiza pesquisas sobre a questão da resolução de problemas e defende uma *abordagem investigativa* do mesmo, de inquirição, indicando que a formulação de problemas precede a sua resolução e que ambas devem ser a essência da matemática escolar. A formulação do problema ou o processo de resolução teria papel primordial. Esse processo de resolução de problemas aparece em termos de se encontrar um caminho para a solução; a prioridade é explorar o caminho e não o resultado em si e que, muitas vezes, não nos levam a uma resposta única, mas geram outros questionamentos e à busca de novas formulações. O professor pode propor problemas de diversas maneiras e conduzir o seu desenrolar também de diferentes maneiras, dependendo de seus objetivos, crenças, valores e de suas concepções. Este, portanto, irá escolher métodos condizentes, em sua maior parte, com esse conjunto de valores e concepções. Ernest (1996, p. 32) sugere que um dos modos de constatar métodos de inquirição é distinguir os papéis do professor e do aluno. O autor distingue três tipos de métodos que podem ser melhor observados no Quadro 2.

Método	Papel do professor	Papel do aluno
Descoberta guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objectivo em mente	Segue a orientação
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem Investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno)	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo caminho próprio.

Quadro 2 - Relações entre o método, o papel do professor e do aluno, segundo Ernest

Ernest aponta que uma das consequências da distinção anterior são as várias interpretações que podem ser dadas aos problemas e às investigações, e ao seu papel no ensino da matemática. Lembra, assim, que sua proposta é rejeitada por aqueles que acreditam que os problemas e as investigações não são apropriados para a matemática escolar, pois não são orientadas pelos conteúdos e nem têm como função principal ensinar técnicas matemáticas básicas. “A perda de poder sobre os alunos e o encorajamento de estratégias emancipadoras são anátemas para esta perspectiva” (ERNEST, 1996, p.32).

Podemos perceber semelhanças entre alguns pontos das proposições de Charnay e Ernest quando identificamos a postura ativa do aluno e o papel mediador do professor tanto no modelo apropriativo, do primeiro, quanto na abordagem investigativa, do segundo. Podemos perceber, nessa última abordagem, o papel ativo do aluno, que age com autonomia. Ernest (1996, p. 31) defende a superação da ideia de que o professor é o detentor do saber, superação que

envolve também uma mudança no poder do professor que deixa de ter o controlo sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos e sobre a escolha dos conteúdos de cada aula. Os alunos ganham controlo sobre os métodos de solução que aplicam, e finalmente sobre o próprio conteúdo. A mudança para uma abordagem mais orientada mais para a inquirição envolve uma maior autonomia e auto-regulação do aluno e se pretende que o clima da aula seja consciente, é necessário um maior poder do aluno sobre a dinâmica da aula, a interação e o acesso a recursos.

Mendonça-Domite (1999, p. 18) defende a prioridade da *formulação de problemas* como modo de desenvolver o potencial heurístico do aluno e também defende o papel inquiridor do mesmo pois “perguntar é fundamental para conseguir experiências positivas no processo ensino-aprendizagem”.⁶⁰ Além disso, defende a necessidade do aluno compreender uma situação de sua realidade social, problematizando-a. “A tarefa do professor/a seria, então, a de preparar um ambiente que possa oferecer ao grupo de alunos/as condições para problematizar tais situações, incentivando-os a formular problemas” (p. 18).

Do ponto de vista da autora, tem-se pensado resolução de problemas de três maneiras diferentes: **a) objetivo** – se ensina Matemática para resolver problemas do tipo expor a teoria e aplicá-la a problemas semelhantes; **b) processo** – significa olhar para o desempenho/transformação dos alunos como resolvidores, trabalhar estratégias pessoais de solução, problemas propostos para desenvolver o potencial heurístico ou **c) ponto de partida** – considerado como um recurso pedagógico apresentado no início do processo da aprendizagem. A autora destaca a importância de se valorizar o problema como *processo* quando diz que a resolução de problemas pede uma *re-formulação*, ou seja, que um problema deve permitir a discussão de dúvidas, a geração de outros problemas, outras reflexões e que leve em conta questões emocionais/afetivas/culturais/sociais do resolvidor.

Desse modo, o termo “problema”, para nossa pesquisa, está relacionado a um *problema* enquanto *processo* e, por isso, apesar de usarmos o termo “resolução de problema”⁶¹, estamos nos referindo a um *desenvolvimento de problema*. Esse processo envolve três etapas principais, que podem ser visualizadas na Figura 8. O problema pode surgir de uma situação inesperada, por um questionamento, gerada por um aluno ou alunos ou qualquer situação, ou por uma situação programada pelo professor. O desenvolvimento refere-se ao processo de análise, de busca por caminhos adequados e de reflexão, que conduz à síntese – solução do problema, geração de novos conteúdos ou novos problemas, novas reflexões e outros.

⁶⁰ Mendonça-Domite propõe também, nesta conferência, assim como Lerman (1996), uma mudança no foco da discussão sobre a *resolução de problemas* para a *colocação de problema*.

⁶¹ Ou situação-problema.

Figura 8 - Desenvolvimento do problema: um processo

Dentro desta perspectiva, em nossa pesquisa, resolver um *cálculo mental* pode ser considerado um *problema* em *si mesmo*, pois gera um desenvolvimento (analisar, pensar em estratégias pessoais) e produz uma síntese (nesse caso, solução aproximada ou exata). Além disso, o termo “problema”, nessa pesquisa, não se refere somente à situação do tipo enunciado-resposta, mas caracteriza-se pela relação aluno, situação e o meio (organização da aula, encaminhamentos etc).

Para Charnay, só há problema se o aluno percebe uma dificuldade, tem um obstáculo a ser superado. Para Pais (1999, p. 29), o aluno deve cultivar o gosto pela resolução de problemas, desenvolver a análise investigativa.

O aluno deve ser sempre estimulado a realizar um trabalho na direção de uma iniciação à ‘investigação científica’... . Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação. Esse é um dos objetivos maiores da educação matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito permanente de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas. Não se trata evidentemente de problemas que exigem o simples exercício da repetição e do automatismo. É preciso sempre buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais.

O aluno deve sentir-se seguro na exploração ou resolução do problema e o professor deve ajudá-lo nesse percurso. “Quando a confiança reside na sua percepção matemática, na intuição e consciência dos processos básicos de raciocínio matemático, é mais fácil seguir o

que os estudantes estão a fazer, pressioná-los a encontrar uma suposição, ajudá-los a especializar e a generalizar” (MASON, 1996, p. 84).

E faz parte dessa “ajuda” do professor saber *como* encaminhar a atividade de resolução do problema. Uma questão interessante para Charnay nesse processo é a *devolução*⁶² do problema para o aluno. O problema é o ponto inicial para a construção de um novo conhecimento. Segundo Zunino (informação verbal, s.d.), podemos estimular situações do tipo “aproximativas”⁶³, mas ainda estamos muito presos, por razões diversas, aos preceitos do modelo “normativo”, onde o professor propõe, permite a discussão, mas ele mesmo determina as respostas. Ou seja, a concepção tradicional de ensino-aprendizagem de matemática, ainda bastante arraigada, passa a ser um obstáculo a uma concepção inovadora. Elaborar um problema, fazer a correção na lousa do mesmo de uma única maneira, dizendo se está certo ou errado, é muito mais fácil e rápido do que administrar diferentes pontos de vista, estimular discussões, não dar a resposta, retornar com outras questões e fazer com que o próprio aluno valide sua resposta.

Segundo a autora:

Antes, acreditávamos que era suficiente elaborar um bom problema, que fosse significativo para as crianças, onde pudessem aplicar seus conhecimentos prévios e, ao mesmo tempo, que representasse um desafio para obrigá-los a construir um novo conhecimento. Isso continua sendo assim, mas o que hoje está muito claro é que tomar como ponto de partida a proposição de um problema está longe de ser fácil em situação de sala de aula, porque em nossas salas de aula, de alguma maneira, continua funcionando o contrato didático que funciona nas escolas em geral, segundo o qual é o professor que deve transmitir o conhecimento e a criança deve escutar e aprender (modelo normativo); ou segundo o qual a produção do conhecimento não é responsabilidade da criança, mas algo que surgirá graças à comunicação que o professor fará. Então, o trabalho concreto em sala de aula vai mostrando que, na realidade, é muito mais fácil revelar logo a verdade, dizer-lhes como é o conhecimento já socialmente constituído do que tentar que os alunos o construam a partir da resolução de problemas.

Brousseau, diz que uma das funções básicas do professor é a de “devolução” do problema, mas de maneira consciente e organizada. Se ao comunicarmos o problema ao aluno formos capazes de provocar uma motivação para que o aluno o aceite como sendo seu e queira resolvê-lo, estaremos realizando uma *devolução* (BROUSSEAU, 2007). O aluno não fica à mercê de suas vontades e interesses. Aluno e professor têm papéis ativos e claros, onde a criança possa desenvolver ferramentas e tempo suficiente para construir um conhecimento

⁶² Termo bastante utilizado por Brousseau.

⁶³ Estamos usando o termo apropriativa.

significativo e, o professor, poder auxiliá-la, orientá-la e “continuar devolvendo o problema da situação didática e não somente na proposta inicial da situação.”

Para Chevallard, Bosh e Gascón (2001, p. 213),

saber matemática’ não é somente saber definições e teoremas para reconhecer o momento de utilizá-los e aplicá-los, é ‘dedicar-se aos problemas’ em um sentido amplo, que inclui encontrar boas perguntas assim como encontrar soluções.

A *devolução* deve ocorrer por meio da formulação de uma nova pergunta pelo professor. Zunino (informação verbal, s.d.) comenta que, nos NTCM de 1994 “é sugerido que o professor coloque questões e atividades que desafiem o pensamento dos alunos. Acrescenta-se ainda, que a seguir a um comentário do aluno, o professor deve regularmente perguntar ‘por quê?’ ou pedir para se explicar.” E completa, ainda, que “O tipo de perguntas colocado pelo professor determina, em grande parte, o grau de criatividade e a capacidade de expressão dos alunos”. Para Andrade (1998, p.), “nesse caminhar, não há um ponto fixo de chegada. A missão do professor é levar o aluno e a classe até o ponto em que eles possam ir”. E no NCTM (1994, p. 38) é indicado que “questões bem colocadas podem simultaneamente elucidar sobre o pensamento dos alunos e ampliá-lo. É crucial a habilidade do professor na formulação de questões que dirijam o discurso oral e escrito na direcção do raciocínio matemático”.

Para Zunino (informação verbal, s.d.), essa tarefa de devolução não é fácil e requer que o professor conceda essa responsabilidade para a criança.

Devemos trabalhar muito para chegar a instaurar um clima no qual as crianças aceitem que, durante um certo tempo, serão elas as responsáveis pela construção, claro que com a ajuda e o apoio permanente do professor. E chegará outro momento (isso também é função essencial do docente) no qual o professor ratificará essa construção, completará, ajudará a estabelecer aquilo que as crianças não tenham podido estabelecer por si mesmas.

Ainda segundo a autora,

o fato de gerar situações onde as próprias crianças possam ver se o que estão fazendo está certo ou não é crucial para conseguir devolver o problema. Se toda atividade das crianças depende sempre de que seja o professor que avalie o que está certo ou errado, perde-se completamente a possibilidade de que sejam as crianças as responsáveis pelo problema.

É interessante então pensarmos a devolução do problema sendo feita também pelos colegas, dessa forma, colocamos outra variável nessa relação entre o professor, o aluno e o conhecimento: as ideias dos outros alunos (Figura 9).

Figura 9 - Relações entre o professor, o saber e os alunos

Trocar ideias entre os colegas, confrontar hipóteses, questionar a ação do outro, analisar possibilidades e repensar a sua própria é de suma importância para a construção do conhecimento. E na troca de ideias, há que se incluam as experiências de vida de cada criança, sua vivência é fundamental na resolução de problemas dentro e fora da sala de aula. Segundo Mendonça-Domite (1999, p. 18), o problema deve ir além, deve haver uma *problematização*, onde o aluno não mobilize apenas a sua vivência cognitiva no levantamento de suas questões, mas também de sua vivência emocional e social.

[...] todos os questionamentos e dúvidas são produtos da ação mental **ativa e autônoma** do indivíduo, na interação com coisas e pessoas que o despertam para o conhecimento e isto determina a sua **visão de mundo**. [...] Assim, veremos que a **problematização** é resultante de um trabalho com todos esses problemas, o afetivo, o social, o emocional, o cognitivo, entre outros [...]⁶⁴

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p. 28) também destacam a importância de se valorizar o processo do problema, levando-se em conta os diversos aspectos envolvidos.

Todos estes aspectos – cognitivos, afetivos, do domínio das concepções – estão estreitamente ligados ao ambiente de aprendizagem que se vive no interior das aulas. Se a “norma” é valorizar o envolvimento em processos de pensamento, assim como o raciocínio e a argumentação lógica, pode criar-se uma “cultura da aula de Matemática” muito diferente daquela que valoriza as respostas rápidas e certas.

Kilpatrick (2001) elabora um esquema⁶⁵ (Figura 10) que também traduz essa perspectiva da relação professor-alunos e alunos-alunos em relação ao conhecimento matemático dentro do contexto vivido. As experiências e meio em que vivem os alunos são importantes nessa relação. E, segundo o autor, é sobre essa relação que se constrói um ensino eficiente de matemática.

⁶⁴ Grifo da autora.

⁶⁵ Tradução nossa da p. 9 do seu livro *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (2001).

Figura 10 - Relações entre o professor, o saber, os alunos e os contextos, segundo Kilpatrick

E tal perspectiva de Kilpatrick deve ser considerada em relação ao trabalho com cálculo mental e resolução de problemas em sala de aula: pensar numa criança ativa e autônoma, que traz suas experiências e emoções para construir seu saber matemático. Para Carraher, Carraher e Schliemann (1988), muitas vezes, dentre os alunos que não aprendem na aula estão alunos que usam a matemática na vida diária, vendendo em feiras ou calculando lucros.

3.3.4. Categorias de problemas, segundo Charnay

Charnay (1996) propõe um esquema que resume as diversas posições a respeito da utilização da resolução de problemas em relação aos três modelos de aprendizagem propostos por ele. São elas:

1) O problema como **critério de aprendizagem**

No *modelo normativo*, entende-se o “ensino” como a transmissão do conhecimento pronto. Os problemas servem basicamente para aplicar o que o aluno aprendeu porque o professor já ensinou; os alunos vão “aplicar” os conhecimentos previamente ensinados.

O aluno observa o problema e repara se já fez algum desse “tipo” anteriormente, para depois, então, repetir os mesmos procedimentos. O professor oferece exercícios que vão do mais simples ao mais complexo, supondo que toda aprendizagem deva ir do concreto ao abstrato.

O problema como critério de aprendizagem (“modelo normativo”)	
Aluno	Escuta, presta atenção, imita, treina, aplica regras em outros problemas semelhantes
Saber	Sequências de lições e exercícios pré-estabelecidos do mais simples ao mais complexo
Professor	Mostra as noções e dá exemplos de resolução (regras). Diz o que está certo ou errado

2) O problema como **motor da aprendizagem**

No *modelo incitativo* não se leva em conta a organização do saber social e/ou escolar, já que é a criança que dá indícios ao professor de quais problemas gostaria de resolver, quais temas lhe chamam mais atenção. Tudo de maneira “natural”, pois o aluno deve ser um pesquisador ativo, motivado por seus próprios interesses. O professor está ali para selecionar problemas de interesse do aluno e fornecer exercícios. O aluno fica sozinho com o problema de como fazer para incorporar os conhecimentos que ele precisa aprender. A criança tem que organizar seu próprio caminho de estudo, de maneira particular. Assim, o aluno fica refém dessas situações espontâneas e perde-se na construção de seu conhecimento, pois os problemas incitam perguntas, mas são utilizados em situações de pouca conexão entre eles, dificultando a aproximação da criança com o saber organizado socialmente.

O problema como motor de aprendizagem (“modelo incitativo”)	
Aluno	Busca, organiza e estuda a partir de sua vivência e desejo
Saber	Problemas e exercícios baseados no interesse do aluno
Professor	Motiva, ajuda o aluno a estudar assuntos de seu interesse

3) O problema como **recurso da aprendizagem**

No *modelo apropriativo*, a situação-problema possibilita que os alunos construam um conhecimento, que o ressignifique. Não é o lugar da aplicação de algo previamente ensinado, mas da análise da situação que requer a elaboração de um conhecimento do qual o aluno não dispunha previamente. O professor interage e intervém desde o início da aprendizagem, parte das concepções prévias do aluno, escolhe a sequência de problemas ou o momento que gera um problema e auxilia o aluno na construção de seu saber, na interação com outros alunos.

O aluno é estimulado a formular hipóteses, confrontar suas idéias com as dos colegas, testar ideias e novos procedimentos. Também é estimulado a aproximar-se da linguagem convencional, expondo suas idéias e escolhas, justificando-as e avaliando-as.

O problema como recurso da aprendizagem (“modelo apropriativo”)	
Aluno	Busca um procedimento de resolução, formula hipóteses, testa e avalia
Saber	Contestado, testado, ressignificado em novas situações
Professor	Seleciona as atividades (com obstáculos) e coloca as concepções dos alunos à prova para que possam melhorá-las ou construir novas

O problema como recurso da aprendizagem está inserido numa perspectiva na qual a aprendizagem é um processo de construção de significados por parte dos alunos e, então, a comunicação e a negociação desempenham um papel central na sala de aula (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 29). Na perspectiva de nossa concepção de cálculo mental, o problema deve ser considerado como *recurso da aprendizagem*, pois o aluno, a partir da proposição do cálculo ou problema, levanta possibilidades, realiza sua análise, testa e valida suas ideias, estando, de algum modo, ressignificando seu conhecimento em novas situações.

Além disso, podemos esboçar - de forma esquemática, na Figura 11 - alguns aspectos que foram sendo relacionados - direta ou indiretamente - ao desenvolvimento do cálculo mental nas salas de aula das séries iniciais, ao longo de nossas discussões até aqui.

Figura 11 - Aspectos associados ao cálculo mental, segundo esta pesquisa

Tais considerações sobre as concepções de cálculo mental, aprendizagem com compreensão e os modelos didáticos de Charnay nos serviram de fundamento para nossa pesquisa e nos ajudaram a observar como esse tipo de cálculo e os problemas são propostos na rede de ensino municipal, revelando, de certo modo, uma aproximação maior com um ou mais desses modelos didáticos e algumas dessas concepções de cálculo e aprendizagem.

CAPÍTULO 4. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO

Colocar o plano em ação significa escolher os procedimentos metodológicos adequados para se alcançar os objetivos propostos para realizar a investigação do fenômeno. A maneira de coletar e interpretar as informações deve conduzir ao esclarecimento do problema de pesquisa.

4.1. Procedimentos metodológicos

A partir da pergunta de pesquisa formulada e do referencial teórico adotado, iniciamos a coleta e análise dos dados necessários para atingir os objetivos esperados. Para tal, os procedimentos técnicos utilizados foram os de pesquisa documental e levantamento, segundo Gil (2002, p. 87 e 111). Ainda baseado nas definições do autor, a pesquisa é descritiva, pois procura levantar a opinião, ideias e atitudes de uma população. A população, ou objeto de estudo escolhido, refere-se ao contexto da rede municipal de ensino de São Paulo. O contexto a que nos referimos engloba, nesta pesquisa, os principais elementos estruturadores de concepções e metodologias no conjunto da rede de ensino, ou seja, os programas curriculares, os cursos de formação e os professores. Segundo Luna (2002, p. 51), essas fontes de informação referem-se a documentos diretos (programas curriculares e documentos de cursos), relatos verbais diretos orais (entrevista) e relatos verbais diretos escritos (questionário). Tais fontes foram pensadas como via de se compreender o fenômeno que se queria investigar: o valor e o papel do cálculo mental na rede municipal de ensino de São Paulo.

Foram delimitados, então, o período e o nível de observação dessa realidade: o nível refere-se ao ensino de 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental I e o período refere-se aos anos iniciais da década de 1980 até os dias atuais.

A escolha desse nível justifica-se por representar o ambiente inicial onde são geradas as primeiras descobertas sobre números feitas pelas crianças. É nesse contexto que surgem as primeiras manifestações acerca do conhecimento matemático e que darão suporte ao desenvolvimento das discussões sobre cálculo mental. Compreender como as crianças iniciam suas construções sobre as relações numéricas é importante fonte de investigação para se entender como ocorre o desenvolvimento do conhecimento matemático.

A escolha do período justifica-se por ter se iniciado, na década de 1980, os primeiros movimentos de discussão sobre ensino-aprendizagem baseados nas descobertas da psicologia do desenvolvimento e que deram aportes para novas orientações e organizações curriculares. O início de tal período também coincide com o surgimento do movimento da Didática da Matemática, que propõe, dentre outros, um novo olhar sobre a relação do professor e do aluno e da construção do seu conhecimento, fornecendo enormes contribuições para o campo da educação matemática.

Para que se pudesse obter um entendimento mais acurado do tema, que é complexo, foi necessária uma busca em fontes variadas. Sendo assim, acreditamos ser importante para esta pesquisa, abarcar fontes de naturezas diversas e, em razão disso, chegar a um conhecimento mais abrangente do objeto pesquisado. Desse modo, as *fontes de informação* escolhidas foram: documentos, entrevista e questionário, que formam uma *triangulação*.

Essa triangulação permite estabelecer ligações entre descobertas obtidas por essas diferentes fontes, ilustrá-las e torná-las mais compreensíveis. Portanto, representa uma forma de aumentar a credibilidade de uma pesquisa como a nossa que adota uma abordagem qualitativa. Para Borba e Araújo (2004), a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. A triangulação formada nesta pesquisa pode ser entendida como foco e meio de análise e pode ser observada na Figura 12.

A triangulação enquanto *foco de análise*, refere-se ao próprio objeto de estudo da pesquisa, sendo eles os documentos curriculares, os cursos de formação e os professores, que pertencem ao contexto da rede. A triangulação enquanto *meio de análise*, refere-se aos instrumentos de análise utilizados para a coleta dos dados e investigação do fenômeno, ou seja, os documentos curriculares e dos cursos, a entrevista e os questionários.

Figura 12 - Triangulação como foco e meio de análise

Para a coleta de dados por meio dos *documentos curriculares*, foram escolhidos os programas do período escolhido e que estavam disponíveis, no momento da busca, no Departamento de Orientações Técnicas (DOT) da Secretaria Municipal de São Paulo, na seção de Memória Técnica Documental.

- Programa de 1º grau (1985)
- Programa de primeiro grau – ensino regular (1988)
- Movimento de Reorientação Curricular – documento 5 (1992)
- Currículos e Programas – organizadores de área (1995 e 1996)
- Orientações Curriculares – Proposição de expectativas de aprendizagem (2007)
- PCNs – Matemática – volume 3

A *organização e análise* dos dados se deu de maneira a identificar as ocorrências do termo “cálculo mental” e analisar qual a importância dada a ele, observando os textos introdutórios, o sumário e os comentários intercalados. Também observamos as sugestões de uso e proposição do assunto ao longo dos documentos, de forma a entender como era a metodologia sugerida para o desenvolvimento do mesmo, incluindo as explicações e ilustrações. Fizemos descrições das informações constatadas a respeito de tais aspectos e comentários a respeito dessas observações e de algumas inferências que puderam ser feitas nos documentos em que aparecia pouco ou muito pouco o termo “cálculo mental”. Para esses casos, tentamos analisar o contexto em que estava inserido o termo, compreendendo a concepção de ensino em que o mesmo estava inserido para poder ampliar a sua compreensão. Além disso, observar o contexto de inserção de outros termos correlatos também foi

importante para que pudéssemos fazer uma interpretação mais adequada. Os termos correlatos referem-se à concepção de aprendizagem, aos demais tipos de cálculo que eram citados, ao papel do professor e do aluno, à resolução de problemas e aos conteúdos matemáticos elencados para cada período.

Obtivemos as informações a respeito dos *cursos de formação* oferecidos pela rede no mesmo departamento da Secretaria Municipal onde conseguimos os documentos:

- Projeto de Capacitação de recursos humanos através de treinamento em serviço – Ensino de 1º e 2º graus – Treinamento em serviço de Matemática para professores de 1ª a 4ª série do 1º grau (1983)
- Curso: Caminhos – da qualidade em Educação ao Ensino – APOIO (1993)

Tais documentos foram escolhidos por se referirem aos anos iniciais e intermediários do período escolhido para esta pesquisa (1983 e 1993). Para completar a outra parte do período (1994–2007), optamos por realizar uma entrevista com uma formadora integrante desses cursos, desde o período inicial até o final, com vistas a ampliar a discussão sobre como se deram tais cursos ao longo de 1983 a 1993 e também contribuir com informações dos cursos atuais, pois a formadora entrevistada atuou nesse período e ainda atua em tais cursos. Além disso, a formadora fez parte da elaboração de documentos curriculares da década de 1980, permitindo a ela estabelecer relações entre currículos, cursos e práticas pedagógicas dos professores.

O Projeto de Capacitação tinha por objetivo oferecer cursos aos professores e promover informações de natureza teórica e metodológica, principalmente sobre o conteúdo “Conjunto dos Números Naturais”, fundamentando teoricamente alguns conceitos referentes ao tema “Campos Numéricos”. O curso foi dividido em 3 módulos (Introdução, Número e Numeração e Números Naturais).

Em 1993, a Secretaria de Educação Municipal de São Paulo, cria o APOIO, que tem por finalidade organizar e documentar o material utilizado em cursos promovidos pela Diretoria de Orientação Técnica (DOT 1, 2 e 3), Educação Especial, Núcleo de Ação Cultural Integrada (NACI) e Multimeios. A apostila do APOIO contém informações, textos e materiais diversos para subsídio dos trabalhos nos cursos, compondo-se de forma a facilitar sua utilização. No curso “Caminhos: da qualidade na Educação ao Ensino”, que faz parte do APOIO, é apresentada uma proposta de capacitação para professores e coordenadores da rede, que pretendeu provocar uma reflexão sobre currículo e planejamento, para além dos conteúdos.

O cálculo mental, em tais documentos de cursos e/ou capacitação, foi identificado e analisado seguindo as mesmas observações realizadas na análise dos documentos curriculares mencionados anteriormente.

Para a coleta de dados por meio da *entrevista*, optamos pelo questionário semi-aberto, pois permite a liberdade de expressão das ideias por parte do entrevistado e garante os objetivos do pesquisador. As perguntas foram pré-estabelecidas por nós, com vistas a compreender como os cursos de formação oferecidos pela rede, ao longo do período selecionado, trataram o assunto “cálculo mental em sala de aula”. Para atingir tal objetivo, entrevistamos uma das coordenadoras da área de Matemática do curso de formação “Caminhos: da qualidade na Educação ao Ensino”, de 1993, a professora Regina Célia Santiago do Amaral Carvalho, que continua atuando atualmente na formação continuada dos professores da rede. Nós expusemos o objetivo do nosso trabalho e esclarecemos que se tratava de uma entrevista com perguntas pré-estabelecidas⁶⁶, porém, a entrevistada teria a liberdade de falar de outros assuntos relacionados, direta ou indiretamente, que achasse necessário. Nós, enquanto entrevistadores, ficamos à disposição para ouvir, sem interrupções bruscas, apenas conduzindo a conversa de modo a contemplar os objetivos da entrevista. Dessa forma, outros questionamentos foram surgindo ao longo da entrevista e os pré-estabelecidos foram sendo abordados de maneira direta ou indireta.

Fizemos a transcrição e textualização⁶⁷ da entrevista e, desta última, fizemos a análise dos pontos mais relevantes e que apontavam na direção do objetivo principal da entrevista. Elaboramos, então, comentários sobre algumas falas da entrevistada, que consideramos mais relevantes para corroborar com tal objetivo.

De posse dos dados relativos aos documentos e entrevista e suas respectivas análises, partimos para o terceiro e último foco de pesquisa da nossa triangulação: *os professores da rede*. Para que os objetivos da pesquisa fossem alcançados, elaboramos um *questionário* a ser respondido por professores do 2º ao 5º ano do ensino fundamental I e que tivessem mais de 10 anos de magistério municipal. A experiência na rede foi pré-requisito para essa seleção, pois intencionávamos entender as concepções de cálculo mental do professor que pudesse ter sido exposto às influências de tais documentos e cursos, ao longo de, se não todo, parte do período

⁶⁶ Ver Anexo D.

⁶⁷ Ver Anexo E. Segundo Garnica (2006, p. 95 e 96) “A textualização começa quando o texto já está transcrito. Uma primeira textualização consiste em livrar a transcrição daqueles elementos próprios à fala, evitando as repetições desnecessárias – mas comuns aos discursos falados – e os vícios de linguagem. Num segundo momento, as perguntas são fundidas às respostas, constituindo um texto escrito mais homogêneo, cuja leitura pode ser feita de modo mais fluente”.

delimitado. O objetivo era investigar as concepções dos professores na relação com as concepções propostas nos demais lados da triangulação: documentos e cursos.

Para que isto ocorresse, elaboramos um *questionário fechado*⁶⁸, composto por uma parte *enumerativa* e outra *dissertativa*. A primeira parte refere-se a questões de ordem mais pontual, quantitativa, como formação, número de vezes que participou de cursos de formação, momentos da graduação que foram reservados à discussão do cálculo mental, quantidade de vezes que os alunos utilizam cálculo mental e frequência com que consulta os PCNs. Não procuramos investigar o uso dos documentos oficiais curriculares municipais, pois é de se subentender que os professores tenham que ter tido contato com os mesmos para dar continuidade efetiva ao seu trabalho na escola e na classe, elaborando planos anuais e semanais. Buscamos perceber com que frequência os PCNs foram utilizados, pois como são referenciais nacionais e orientam os próprios documentos municipais, poderiam ter sido menos consultados pelas professoras ou não. A segunda parte refere-se às questões em que o professor poderia dissertar sobre a questão, escrever livremente sobre os conceitos que tem de cálculo mental e outros tipos de cálculo, as dificuldades em abordá-lo, o papel do professor e do aluno e as relações com resolução de problemas. A última questão ficou reservada para o professor demonstrar como a maioria dos alunos resolveria alguns cálculos.

Optamos por coletar dados por amostragem aleatória, por isso foram distribuídos 16 questionários em quatro escolas diferentes, localizadas uma em cada região do município de São Paulo - norte, sul, leste e oeste. As regiões foram escolhidas com a intenção de abarcar diferentes realidades do município, mas as escolas foram escolhidas de forma aleatória. Também foi aleatória a escolha das séries em que lecionavam os professores. Foi pedido à coordenadora ou diretora que encaminhasse os questionários de forma aleatória, na medida das possibilidades e disponibilidade de cada professora, independente da série ou da experiência com cálculo mental. Dos 16 questionários entregues (quatro em cada escola), 8 foram devolvidos: um da escola da zona norte, um da sul, três da norte e três da oeste. As séries em que as professoras lecionavam também variaram: sendo duas de 2º ano, três do 3º ano, uma do 4º ano, uma do 5º ano e uma não mencionou.

Quanto à análise dos dados dos questionários, a parte *objetiva/enumerativa* foi organizada em tabelas e fizemos comentários descritivos das ocorrências. Algumas dessas tabelas foram transformadas em gráficos para melhor visualização das informações.

⁶⁸ Ver questionário em Anexo C, nas fotocópias de todos os questionários respondidos pelas professoras.

A parte *dissertativa* foi organizada em quadros. Para cada pergunta elaboramos um quadro que continha a pergunta e as respostas das oito professoras para tal questão⁶⁹. Desse modo, cada quadro possui as respostas de P1, P2, P3, P4 P5, P6, P7 e P8, códigos dados às professoras, pois a identidade de seu nome e da escola em que trabalha foi preservada. Ao final de cada quadro correspondente à questão dissertativa, destacamos as *manifestações* mais relevantes ao longo das oito respostas, aquelas que se sobressaíram de alguma maneira.

Depois, fizemos a *análise das questões enumerativas* e elaboramos alguns gráficos comparativos entre alguns dos elementos observados, constatando informações concorrentes e/ou divergentes. Para a *análise das questões dissertativas*, agrupamos as manifestações relevantes dos quadros de todas as questões dissertativas e as organizamos em categorias, comparando-as com as considerações que fizemos na fundamentação. E por fim, nas considerações finais, relacionamos as análises dos questionários com as dos documentos e cursos. Além disso, fizemos mais algumas considerações a respeito de outros aspectos relevantes em relação ao cálculo mental e sua contextualização na rede.

A seguir, no Quadro 3, podemos observar os principais aspectos metodológicos envolvidos nesta pesquisa e, na Figura 13, visualizamos a movimentação de tais aspectos na direção de busca por respostas e da compreensão da realidade questionada.

Procedimentos técnicos de coleta: pesquisa documental e levantamento
Coleta - documentos curriculares: direta
Coleta - cursos de formação: entrevista por questionário semiaberto
Coleta - professores: aleatória e indireta por questionário fechado (objetivo e dissertativo)
Análise - documentos curriculares: identificação de quanto e como aparece o cálculo mental
Análise - cursos de formação: identificação de quanto e como aparece o cálculo mental
Análise - professores: organização por tabelas, quadros e categorias
Análise das tabelas e categorias
Considerações finais: cálculo mental na relação dos documentos, cursos e professores

Quadro 3 - Síntese da metodologia adotada

⁶⁹Quase todas as respostas foram reescritas na íntegra original, apenas algumas foram recortadas (e indicadas entre parênteses), pois destacavam a ideia principal da resposta.

Figura 13 - Movimentação dos principais aspectos metodológicos envolvidos na pesquisa

4.2. Organização e análise dos dados

Com vistas a identificarmos o papel e o valor do cálculo mental no contexto da rede municipal de São Paulo, segue a organização e análise das informações recolhidas a partir dos documentos curriculares, dos cursos de formação, da entrevista e dos questionários.

4.3. Documentos curriculares

4.3.1. Programas curriculares na rede municipal de ensino

O programa de estruturação curricular do ensino fundamental chamado de *Programa de 1º grau* (1985) foi organizado em quatro cadernos de 1ª a 4ª séries e apontava que o conhecimento matemático, no programa de 1º grau, deveria cumprir duas funções:

- Desenvolver habilidades de contagem, cálculo e medidas com o objetivo de instrumentalizar os alunos para resolverem problemas da vida prática;

- Desenvolver as estruturas lógicas do pensamento, através do conteúdo propriamente dito, com o objetivo de instrumentalizar os alunos para adquirirem novos conhecimentos.

O programa dava ênfase à metodologia, mostrando que essa desempenha um papel fundamental no sentido de garantir que o conhecimento matemático seja realmente adquirido pelos alunos. Demonstra, também, sua preocupação com o uso habitual dos cálculos mecânicos ao destacar que, às vezes, no intuito de transmitir muitas informações, desenvolve-se um processo de aprendizagem mecânico, ensinando-se apenas técnicas de cálculo e respostas certas para perguntas padronizadas. O documento alega, ainda, que o resultado de tal aprendizagem é um treino e não a compreensão.

O caminho sugerido pelo programa é o de que a apropriação do conhecimento implica em construção, em processo. Esse processo torna-se significativo para o aluno na medida em que ele é capaz de justificar, oralmente, o caminho que percorre para obter a solução. O documento ressalta, ainda, que é comparando seus procedimentos com os dos colegas que ele chega a produzir uma análise crítica que na realidade representa a capacidade de raciocinar.

O modelo do programa é apresentado em duas colunas: a primeira onde são descritos os conteúdos e, a segunda, onde são descritos alguns procedimentos metodológicos. As informações da segunda coluna sugerem uma sequência de etapas a serem seguidas para ensinar um determinado conteúdo ou, então, referem-se a alguns esclarecimentos teóricos.

O programa os conteúdos não estão divididos por tema, como no programa de 1981 (Relações e funções, campos numéricos, equações e inequações e geometria), mas sim reunidos por assuntos: Conceito de número, sistema de numeração decimal, operações com números naturais, noção de número racional, figuras no espaço, figuras no plano e medidas.

Um dos objetivos principais era o de garantir o real domínio das operações até a 4ª série, propondo um trabalho contínuo com o sistema de numeração decimal e a redistribuição do estudo das operações. Assim, ao invés de apresentar as técnicas do cálculo de todas as operações simultaneamente, as técnicas foram apresentadas por série. O documento sugere um *trabalho sistemático com o cálculo mental* (no qual o chamam também de cálculo oral), com o objetivo de ampliar os recursos de cálculo dos alunos e desenvolver a prática de estimativas.

O programa organizou os conteúdos matemáticos por série:

1ª série		2ª série	
1.	Número natural	1.	Sistema de numeração decimal
2.	Sistema de numeração decimal	2.	Operações com números naturais
3.	Operações com números naturais <i>Cálculo mental</i>		<i>Cálculo mental</i>
4.	Figuras geométricas	3.	Sistema monetário
5.	Situação-problema	4.	Figuras geométricas
		5.	Medidas
		6.	Situação-problema
3ª série		4ª série	
1.	Sistema de numeração decimal	1.	Números naturais
2.	Operações com números naturais <i>Cálculo mental</i>	2.	Operações com números naturais <i>Cálculo mental</i>
3.	Número racional	3.	Número racional
4.	Sólidos e figuras planas	4.	Figuras planas
5.	Medidas	5.	Medidas
6.	Sistema monetário	6.	Sistema monetário
7.	Situação-problema	7.	Situação-problema

A palavra *cálculo mental* aparece apenas no assunto “Operações com números naturais”. Não há menção⁷⁰ a esses termos em outros assuntos em que ele também se faz necessário, como em geometria, sistema monetário, números racionais e medidas. Podemos perceber que o trabalho com cálculo mental tem especial destaque em relação aos demais assuntos, foi dedicada uma extensa e detalhada parte do programa para orientar sobre esse assunto, então, é possível que ele não tenha sido citado nos demais assuntos por conta de não se tornar repetitivo, mas essa intenção esboçada por nós não fica clara no documento.

Para a 1ª série há a orientação de se construírem os fatos fundamentais⁷¹ com materiais concretos e compreendidos pelos alunos. Depois, registrados no papel quadriculado e, posteriormente, em listas de contas (p. 48), como podemos observar na Figura 14. Os fatos fundamentais da multiplicação⁷² e da subtração devem ser também construídos com material concreto, desenhos e listas, a partir dos fatos fundamentais da adição⁷³.

⁷⁰ Há apenas uma menção: na p. 82 do volume 4, onde há citação de cálculo mental da adição e subtração com números decimais, utilizando figuras quadriculadas.

⁷¹ Fatos fundamentais da adição, segundo o documento, são somas entre duas parcelas formadas por números menores do que dez (0 a 9), atingindo de 1 a 18.

⁷² Até a 1ª série serão construídos os fatos resultantes até 10x9.

⁷³ O documento destaca que se deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que na subtração não aparecem as mesmas regularidades da adição. Por exemplo: 5 menos 3 é diferente de 3 menos 5.

Representação em papel quadriculado	Representação em lista
	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> $0 + 6 = 6$ $1 + 5 = 6$ $2 + 4 = 6$ $3 + 3 = 6$ $4 + 2 = 6$ $5 + 1 = 6$ $6 + 0 = 6$ </div>

Figura 14 - Fatos fundamentais representados por quadrícula e lista

É sugerida a repetição da atividade anterior, encontrando os pares cuja soma é igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18.

O documento cita que, depois, é importante os alunos memorizarem tais fatos e compreenderem o processo de compor e decompor para desenvolverem habilidades em cálculo. O início do cálculo mental deve ser dado explorando-se os números de 1 a 9, cuja soma é 10. Posteriormente, é sugerido que se trabalhe com números que sejam decompostos em dezenas exatas e unidades.

O documento cita que os alunos devem efetuar cálculos recorrendo a diferentes procedimentos que não ao da técnica operatória e que tais procedimentos devem ser explorados oralmente, pois variam de aluno para aluno. Quando o aluno é capaz de explicar, através da fala, como chegou ao resultado e quando entende as diferentes maneiras como seus colegas atingiram o mesmo resultado, ele está organizando seu pensamento e desenvolvendo o raciocínio. O programa propõe iniciar o trabalho com cálculo mental propondo situações-problema (orais) em quantidades pequenas, cujos resultados podem ser aproximados ⁷⁴ ou exatos. O texto destaca que as atividades de cálculo mental devem ser exploradas, principalmente, por meio da linguagem oral, mas é importante que, em alguns momentos, os alunos descubram maneiras de registrar seus procedimentos através da linguagem matemática. E ainda ressalta que os processos de cálculo mental só deverão ser registrados na lousa, quando forem descobertos pelo aluno e não apresentados como modelos de solução (Figura 15, citada na p. 50).

⁷⁴Sugere que a busca de resultados aproximados leva à prática de estimativas, habilidade muito útil na vida diária.

Figura 15 - Algumas maneiras de se obter $3 + 8 + 2 + 7$

Para a introdução da *técnica operatória* é sugerido que ela seja apresentada partindo-se da construção dos números com material concreto ou da representação desse material no papel e, depois, passando-se ao registro numérico na tabela valor do lugar. Tais sugestões podem ser observadas na Figura 16 e na Figura 17 (p. 52 e 49 dos respectivos documentos – 1ª e 2ª série).

Figura 16 - Sugestão de trabalho com adição – 1ª série – para introduzir a técnica operatória

A partir de situações-problema e operações:

- Trabalhar com as diversas estratégias de cálculo mental

• Calcular $78 + 46$

Com material concreto

Trocar por uma dezena

Trocar por uma centena

Registro numérico na forma decomposta

$$\begin{array}{r} 70 + 8 \\ 40 + 6 \\ \hline 110 + 14 \\ 100 + 10 + 10 + 4 \\ 120 + 4 \\ 124 \end{array}$$

Registro na tabela valor do lugar

c	d	u
1	7	8
	4	6 +
1	2	4

Figura 17 - Sugestão de trabalho com adição – 2ª série – para introduzir a técnica operatória com reagrupamento

Nos dois primeiros volumes os exemplos se seguem com a apresentação do *material concreto*, da *representação gráfica*, do *cálculo mental*, do *registro na forma decomposta* e da *técnica operatória* na tabela valor de lugar. Depois, a partir da 3ª série, a ênfase está em exercitar o cálculo mental e a técnica operatória de números maiores que 1000. A técnica operatória da forma “longa” e “abreviada” é explicada em detalhes no programa e visa fazer com que o aluno compreenda melhor a relação numérica envolvida na forma “abreviada”, como podemos observar na Figura 18 (p. 59, 60 e 62).

A partir de situações-problema e operações:

- Trabalhar com as diversas estratégias de cálculo mental

Ex. 7×39

Figura 18 - Sugestão de trabalho com multiplicação – 3ª série – cálculo mental e algoritmo (formas longa e abreviada)

É somente a partir da 3ª série é que é proposto o registro matemático da divisão. O documento do programa cita que na 1ª e 2ª série já devem ter surgido situações-problemas envolvendo essa noção, embora os alunos não tivessem o conhecimento do respectivo registro. Orienta-se o trabalho com o conceito de divisão associado a duas situações: distribuição equitativa (“ideia de repartir”) e formação de grupos (“ideia de medir”). Na 3ª série é que o trabalho com divisão é sugerido de forma sistemática, iniciando pela exploração dessas situações às quais os alunos deverão associar um único registro numérico. Os alunos deverão perceber a relação que existe entre divisão e multiplicação e daí partir para a construção dos fatos fundamentais da divisão, embora percebendo que nela não existam as regularidades que existem na multiplicação. Orienta-se o trabalho com diversas estratégias de cálculo mental da divisão, partindo de situações-problema e operações, além de registros gráficos (desenhos) e, depois, ensina-se a técnica operatória, pelos processos “longo”, “breve” e “americano”. O documento ensina como trabalhar cada um dos processos, mas não indica

qual deles deve ser adotado, sugerindo que cada equipe/escola discuta qual o melhor encaminhamento. Na Figura 19, podemos perceber que variadas formas de se efetuar um cálculo mental de divisão eram sugeridas (p. 62, 63 e 63).

A partir de situações-problema e operações:

- Trabalhar com as diversas estratégias de cálculo mental.

$6482 : 2$
 $6000 : 2 = 3000$
 $400 : 2 = 200$
 $80 : 2 = 40$
 $2 : 2 = 1$
 $\rightarrow 3241$

$4800 : 20$
 $4800 : 2 = 2400$
 $2400 : 10 = 240$

$120 : 24$
 $24 \text{ é o mesmo que } 2 \times 12$
 $\text{então, } 120 : 12 = 10$
 $10 : 2 = 5$
 $\text{logo, } 120 : 24 = 5$

$24 \text{ é o mesmo que } 4 \times 6$
 $\text{então, } 120 : 4 = 30$
 $30 : 6 = 5$
 $\text{logo, } 120 : 24 = 5$

- Técnica operatória pelo processo “longo”, “breve” ou “americano” a escolha da escola.

Figura 19 - Sugestão de trabalho com cálculo mental da divisão – 4ª série

Interessante notar que as atividades de cálculo mental são indicadas para serem realizadas antes da técnica operatória, porém a mesma é apresentada já na 1ª série. Dessa maneira, cálculo mental e técnica são trabalhados concomitantemente, porém sob aspectos diferentes, por exemplo, através do cálculo mental, o aluno de 1ª série pode realizar adições que pela técnica operatória só serão trabalhadas na 2ª série (com reagrupamento na dezena), por que envolvem o transporte da unidade para a dezena, ou seja, o “vai um”, mas esse tipo de cálculo já é feito com cálculo mental na 1ª série⁷⁵. Dessa maneira, propõe que as diversas atividades com cálculo mental devam continuar sendo exercitadas mesmo depois que a técnica for introduzida.

Outro item que merece atenção para a nossa pesquisa está em relação às considerações acerca do trabalho com *problemas*. Apesar do termo “problema” não aparecer explicitamente em nenhum momento no sumário dos quatro volumes, percebemos um concepção de

⁷⁵ Ex. $16 + 18$ pode ser calculado mentalmente na 1ª série, mas com a técnica operatória, só na 2ª série.

resolução de problemas que valoriza a análise, as diferentes interpretações e representações, a troca entre os colegas, a argumentação e a validação das respostas.

Nas sugestões metodológicas há, muitas vezes, sugestões para a proposição de problemas numa postura de busca única de solução, como podemos perceber pela consigna: “Encontrar a resposta para estas situações”. A orientação é de na primeira série, as situações-problemas devam ser apresentadas de forma oral e, posteriormente, por escrito. Para todas as demais séries, lembra que o aluno não deve recorrer somente à memória para encontrar uma solução, mas precisa elaborar um plano para descobrir a resposta. Esse plano constitui-se em: interpretar a situação, através da verbalização ou dramatização; representar sua interpretação, através de desenhos ou escrita simbólica (a partir da 2ª série também por tabelas e diagramas) e justificar oralmente o seu processo de solução. Destaca, desse modo, a importância da etapa de exploração oral das estratégias, justificando que esta permite uma troca de experiências muito ricas entre as crianças e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Sugere também que o professor deva enfatizar mais o *processo* do que a solução em si mesma, justificando que é no processo que os alunos desenvolvem o raciocínio, trocas experiências entre eles, descobrindo diferentes estratégias para chegar a uma mesma conclusão. O documento também orienta que o professor considere como problemas não só as situações apresentadas através de um enunciado escrito e vinculadas a uma situação numérica, mas também toda atividade que leve o aluno a se organizar mentalmente para chegar a um resultado. Vemos aí uma valorização do processo em detrimento da resposta e também de se propor situações ao mesmo tempo desafiantes, porém, acessíveis, mas ainda muito marcado pela busca do resultado único. Somente no volume da 4ª série é que há um adendo explicando que uma situação-problema do tipo “busca e organização de dados” não intenciona a busca de uma resposta única. A argumentação é de que isso desmistifica a solução fechada e a resposta única, quebrando a ideia de que o problema só pode ser resolvido de uma maneira por todos os alunos. Antes de pensar na solução, é necessário buscar algumas informações e tomar decisões. Um exemplo citado: Uma pessoa toma duas conduções para ir de casa ao trabalho. Descubra qual a maneira mais econômica para ela ir e voltar do trabalho durante uma semana.

Delimita também os diferentes objetivos que o professor deve ter em mente ao propor situações-problemas. Segundo a orientação do documento, um problema pode ser proposto para: aplicar conhecimentos, introduzir assuntos novos ou buscar e organizar dados (problemas abertos), mas sempre abordando situações próximas aos alunos. E sugere que os próprios alunos criem situações-problema relacionadas à sua vida.

O *Programa de primeiro grau – ensino regular* (1988), referente ao ensino de matemática, foi publicado no Diário Oficial do Município de São Paulo numa edição especial⁷⁶. Apresentava características e conteúdos muito semelhantes aos do período anterior, mas possui mais exemplos de atividades que podem ser aplicadas, com detalhes de encaminhamento em sala de aula. Contém também pequenos textos com informações teóricas que demonstrem a concepção de cada assunto/tema e uma indicação bibliográfica mais extensa que a do período anterior. Ressalta que na sua elaboração houve a preocupação de indicar alternativas de ação ao professor em sala de aula e, ao mesmo tempo, mostrar as sequências a serem seguidas de um modo a garantir um processo de aprendizagem com compreensão.

1ª série		2ª série	
1.	Noção de número natural	1.	Sistema de numeração decimal
2.	Sistema de numeração decimal	2.	Operações com números naturais
3.	Operações com números naturais <i>Cálculo mental</i>	3.	Geometria
4.	Geometria	4.	Medidas
5.	Situação-problema	5.	Situação-problema
3ª série		4ª série	
1.	Classificação, comparação, sequência, ordenação e seriação	1.	Classificação, comparação, sequência, ordenação e seriação
2.	Sistema de numeração decimal	2.	Operações com números naturais
3.	Operações com números naturais <i>Cálculo mental</i>	3.	Números racionais
4.	Números racionais	4.	Geometria
5.	Geometria e medidas	5.	Medidas
6.	Sistema monetário nacional	6.	Sistema monetário nacional

No sumário, o cálculo mental aparece no item “Operações com números naturais” e aparece em cada subitem (cada operação), juntamente com os fatos fundamentais e a técnica operatória. Percebemos também que, assim como nos programas do período anterior, o trabalho com cálculo mental ocorre paralelamente ao da técnica operatória, desde a 1ª série. Nessa série, são trabalhadas apenas as operações de adição, multiplicação e subtração, sob a ótica dos fatos, cálculo mental e técnica, com exceção do item multiplicação, em que não é sugerido o trabalho com a técnica operatória. Tal orientação também aparece nos documentos do programa anterior. Na multiplicação, há a orientação de se trabalhar com material

⁷⁶ Datada de 11 de junho de 1988, mas a 1ª publicação foi em 30 de abril de 1987.

concreto, papel quadriculado, depois com a representação simbólica na tabela de valor e lugar, com a representação da fase intermediária (chamada de técnica pelo processo longo) e fase automática (chamada de técnica operatória pelo processo breve).

Há uma valorização do cálculo mental que percebemos tanto pela proposição de atividades, quanto pela concepção exposta nos pequenos textos que justificam a escolha metodológica. Sugere que o professor incentive as crianças a verbalizarem o cálculo mental que fizeram e, em alguns momentos, registrem os fatos, se necessário, quando forem descobertos novos caminhos pelo aluno. A orientação é de que sejam descobertos “caminhos” pelos alunos, somente a título de exemplificação, nunca como modelo de resolução, esclarecendo sempre que cada aluno deve buscar sua própria solução.

Podemos verificar a importância do cálculo mental em muitos momentos, como em: “Sempre, através de situações-problema criadas pelo professor ou mesmo pelos alunos, o estímulo ao cálculo mental é indispensável” (SÃO PAULO, 1988, p. 18)⁷⁷. Valoriza, inclusive, o uso de cálculos aproximados, justificando que tanto os cálculos exatos como os aproximados são de grande utilidade, pois estes levam à prática de estimativas. O programa pontua a necessidade do trabalho com cálculo mental ao longo dos oito anos escolares e propõe também que as atividades com cálculo mental devam ser trabalhadas em todas as ocasiões propícias, mas também devem ser reservados momentos específicos para esse trabalho, que foram chamados de “Hora do cálculo” (p. 12), que pode ser visto na Figura 20. E nesses momentos, os alunos devem compartilhar as variadas maneiras de solução.

Figura 20 - Exemplo de atividade da “Hora do cálculo” – 3ª série

⁷⁷ Programa de 1º grau – Ensino Regular - 1ª série (1988). Grifo nosso.

Quanto à resolução de problemas, há um item esclarecendo essa concepção e a sugestão prática de alguns exemplos, muito parecida com a do período anterior. Fica nítida a ênfase ao processo de resolução, que podemos notar em “O professor deve enfatizar o processo de resolução mais do que a solução da situação-problema em si, pois é através do processo que o aluno desenvolve o raciocínio” (SÃO PAULO, 1988, p. 19)⁷⁸. Contudo, notamos que o item “situação-problema” não aparece no sumário do programa de 3ª e de 4ª série, mas é citado em alguns momentos do documento como base para se propor atividades de cálculo mental, de construção dos fatos fundamentais, de técnica operatória, geometria e números racionais.

A partir de 1989, a Secretaria Municipal de Educação de São Paulo propôs o *Movimento de Reorientação Curricular* às escolas da rede e não apresentou listas de atividades sugeridas, nem a separação por série e por assunto. Analisamos o Documento 5 (1992) desse Movimento, que apoiava-se em princípios básicos como a autonomia, o resgate de práticas avançadas, a discussão coletiva e a unidade ação-reflexão-ação. Veio organizado em três momentos: problematização, organização dos dados problematizados e devolução das informações às escolas. Foram promovidas várias discussões entre educadores da rede e assessores das universidades para realizar essas problematizações, organizar os dados e encaminhá-los de volta às escolas. No que diz respeito à área de Matemática, foi produzido um documento preliminar com a visão de área e passou por seguidas discussões com os educadores da rede. O objetivo era de que se ampliasse a discussão sobre o ensino de matemática nas nossas escolas e se propusesse parâmetros para a construção de programas pelos educadores.

O movimento assume apoiar-se nas contribuições da Psicologia Cognitiva de Piaget, que aponta para uma aprendizagem com compreensão, que é proveniente da ação e reflexão do próprio aluno. Sugerem alguns métodos que favorecem essa ação-reflexão: resolução de problemas, modelagem, jogos matemáticos e computadores⁷⁹.

Destaca que esta nova perspectiva de ensino baseia-se também em pesquisas que apontam para uma educação matemática preocupada com aspectos sociais e emocionais, destacando a etnomatemática. É também aqui que aparece pela primeira vez a expressão *educação matemática*, salientando a compreensão da Matemática como atividade humana, na qual o aluno também poderá participar e criar.

⁷⁸ Programa de 1º grau – Ensino Regular - 1ª série (1988). Grifo do próprio documento.

⁷⁹ Pela primeira vez em documentos oficiais curriculares, aparece o estímulo ao uso de computadores e calculadoras.

Aliás, a própria bibliografia sugerida mostra essa mudança na concepção de ensino de matemática. A bibliografia consultada e indicada é extensa e variada, aparecendo os documentos do NCTM como um dos embaixadores desta perspectiva de ensino, além de autores consagrados na área de Humanidades, como Marx, Piaget, Vygotsky, Freire, entre outros, e da etnomatemática, como D'Ambrosio.

Nessa perspectiva, o objetivo do ensino da Matemática é promover o desenvolvimento físico, afetivo e intelectual do educando e aguçar seu espírito crítico de modo a torná-lo mais capaz de contribuir para a construção de uma sociedade democrática.

Assim, os objetivos de ensino apontaram para novas posturas de ensino com dois fatores determinantes: o trabalho do professor e as estratégias para o ensino e aprendizagem da Matemática.

O professor deve estimular o *diálogo*, incentivar a *autonomia* e considerar as *experiências prévias* e a *cultura* de cada aluno. Também se destaca a importância da *pesquisa* no papel do professor-pesquisador, que se aprimora para estimular um aprendizado mais significativo.

Para promover o ensino e aprendizagem de Matemática, o documento do Movimento sugere quatro estratégias fundamentais:

- o uso da resolução de problemas;
- o estímulo à comunicação matemática;
- o estabelecimento de conexões;
- o desenvolvimento de formas de pensar.

O documento frisa que resolução de problemas não é lista de problemas a serem resolvidos, mas sim problemas que envolvam discussão, soluções, análise das situações que conduzem a esses problemas, propiciando a formulação de conjecturas e de novos problemas, favorecendo a reflexão e o questionamento. As situações-problema podem vir do aluno ou do professor, que as cria quando propõe um jogo, lança um desafio matemático ou problematiza fatos do contexto de vida do educando⁸⁰. Os educandos são estimulados a trabalhar em grupos regularmente, para desenvolver a comunicação oral entre eles e a elaboração de pequenos textos onde explicitem suas concepções matemáticas. Ao verbalizarem o pensamento, há uma reorganização deste pensamento. Uma situação de cálculo mental é ilustrada no documento e

⁸⁰ A expressão *educando* é usada neste documento, no lugar de *aluno* dos documentos anteriores.

expressa o valor dado pelo documento à diversidade de estratégias e a troca entre os colegas, como pode ser visto na Figura 21.

Figura 21 - Ilustração de um momento de troca de estratégias entre os alunos

O documento indica que na Matemática destacam-se certas formas de pensar: *compor e decompor, fazer combinações, pensar em transformações, estabelecer relações, abstrair, procurar regularidades, generalizar e deduzir*. E tais formas estão diretamente relacionadas ao trabalho com cálculo mental.

Assim, embora a expressão “cálculo mental” só apareça uma vez no documento, percebemos suas características ao longo de todo o texto, como pudemos notar a partir das considerações aqui colocadas.

Já o documento 6 do Movimento traz relatos de professores e objetiva a troca de experiência entre os educadores, resgatando a prática de tais profissionais que atuaram de acordo com a reorientação curricular proposta no documento 5. E, em um dos relatos, uma professora expõe a sua experiência com cálculo mental na educação de jovens e adultos. Ela questiona o uso excessivo dos *algoritmos*, pois na vida e, principalmente, na vida do aluno-trabalhador, pouco os utilizamos, pelo contrário, a “conta de cabeça” ou cálculo mental (exato ou aproximado) e a calculadora são os meios mais usados no cotidiano.

O documento *Currículos e Programas* (1995 e 1996) produzido pela Diretoria de Orientação Técnica da Superintendência Municipal de Educação, apresenta semelhanças com os documentos do período anterior e, inclusive, recomenda a consulta do documento 5 (1992), do material de Implementação de Matemática (1988) e do Programa de 1º grau (1985),

ressaltando que é imprescindível que o estudo do material esteja acompanhado desses documentos.

Novamente destaca-se a Matemática como atividade humana e que o conhecimento matemático é atividade mental. Muitos termos do período anterior são citados: diálogo, autonomia, pesquisa, comunicação matemática, conexões e resolução de problemas com problematização. Aparece o termo “Linguagem Logo”, entendida como resolução de problemas numa linguagem de programação de computador para construir conceitos matemáticos e fazer investigações na geometria e nos cálculos. Às formas de pensar a matemática do período anterior são acrescidos os termos *observar, organizar, analisar e relações simétricas*.

Outra diferença em relação aos documentos anteriores está na inserção das habilidades e/ou formas de pensar no processo de construção do pensamento matemático: probabilística, proporcional e geométrica/algébrica.

Logo após as considerações iniciais, o documento apresenta os objetivos e propostas metodológicas divididos em ciclos (*inicial* – 1ª a 4ª série; *intermediário* – 5ª a 8ª série e *final* – colegial). Cada ciclo está organizado num quadro, de um lado sob o título “Princípios norteadores e/ou Organizadores da Área”, e de outro por “Proposta de trabalho”.

Os registros espontâneos do educando são citados como essenciais para a construção do conhecimento matemático. A resolução de problemas é vista como ponto de partida para a construção desse conhecimento e como meio para desenvolver a autonomia. Cita também a história da matemática e a literatura infantil como parte integrante do desenvolvimento do raciocínio lógico, propondo situações *aritmizáveis*⁸¹, motivadas por histórias que sejam problematizadoras.

Em ambos os documentos não tem exemplos práticos de como se trabalhar cada tema, mas o termo “cálculo mental” aparece como parte dos princípios norteadores/organizadores de área no documento de 1995 e, no documento de 1996, o termo aparece com destaque, citado como: “Ênfase ao cálculo mental” nos princípios norteadores/eixos temáticos. Quanto à sua concepção, os documentos apresentam os mesmos textos dizendo que é extremamente prejudicial

o treino das técnicas operatórias convencionais ou cálculos com lápis e papel das operações de forma mecânica, carregada de artifícios sem significado. O professor se “afoba” para ensinar as técnicas convencionais e acaba treinando os alunos para realizar os passos de uma técnica e valorizam pouco

⁸¹Termo citado no documento.

os procedimentos próprios. É importante que o educador valorize os procedimentos criados pelo educando, não só no cálculo com lápis e papel, como também no cálculo mental. Através deste, é possível analisar os diferentes aspectos explicitados para a construção das propriedades operatórias implícitas no processo de resolução mental do educando. [...] Os educandos só podem desenvolver o cálculo mental se forem estimulados a “calcular mentalmente” (SÃO PAULO, 1995, p. 41; SÃO PAULO, 1996, p. 29).

Vimos aqui que a concepção de cálculo mental é oposta à de cálculo com lápis e papel, sendo este último associado à técnica operatória/algoritmo.

O cálculo mental é valorizado no documento, tanto que o único exemplo de atividade do documento (ciclo inicial) é em relação à importância do cálculo mental na escola.

Ex.: $54 + 27$, decompondo os números e somando as ordens iguais ($50 + 20 = 70$, $4 + 7 = 10 + 1 = 11$, $11 + 70 = 81$ ou $54 + 20 = 74$, $74 + 6 + 1 = 80 + 1 = 81$). Utilizando o princípio aditivo e o princípio posicional (sem conhecer a nomenclatura deste, mas exercendo atividade mental na resolução) o aluno avança na compreensão das regras do nosso sistema de numeração, exercita seu raciocínio para efetuar o cálculo, ao invés de apoiar-se em fatos memorizados e, portanto, pode aumentar sua auto-confiança e gosto pela Matemática ao sentir que inventou um procedimento próprio como “Matemático”, e foi bem sucedido (SÃO PAULO, 1996, p. 30).

Aqui também vemos a oposição que o documento faz entre cálculo mental e fatos memorizados. Não há explicitação do termo “fatos memorizados”, mas os dois primeiros documentos aqui analisados citam a memorização dos fatos como importantes e fundamentais para o desenvolvimento do cálculo mental.

O documento *Orientações Curriculares – Proposição de Expectativas de Aprendizagem* (2007) para o ciclo I divide suas considerações em três partes principais: introdução, quadro de expectativas de aprendizagem e concepções de ensino/aprendizagem de matemática. Os quadros listam as habilidades/capacidades esperadas pelo estudante em cada ano escolar⁸² divididas de acordo com os PCNs⁸³. Podemos perceber os primeiros indícios do trabalho com cálculo mental já no primeiro ano, quando é determinado para esse ano o desenvolvimento de habilidades como compor/juntar elementos de uma coleção, indicar o número que será obtido, se forem acrescentados ou retirados objetos, e acrescentar tantos objetos a uma coleção para que fique com a mesma quantidade de outra, além de realizar estimativas que envolvam medidas. Para o segundo ano, é sugerida a construção dos fatos fundamentais da adição e da subtração e não há a indicação do trabalho com algoritmo. No terceiro ano, se inicia o

⁸² Baseado na lei 11.274 que institui o Ensino Fundamental de nove anos com a inclusão das crianças de 6 anos de idade.

⁸³ Números, operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação.

trabalho com algoritmo da adição e da subtração e a construção dos fatos fundamentais até 5. No quarto ano, são construídos os fatos fundamentais da multiplicação até 9 e os fatos básicos da divisão. Somente no quinto ano deve haver o trabalho com o algoritmo da multiplicação e da divisão. Desde o segundo ano aparecem os termos “cálculo” e “estratégias pessoais de cálculo”, mas somente a partir do quarto ano é que surge o termo “cálculo mental”. A partir do segundo ano, há muitas referências ao trabalho com cálculo, com resolução de problemas e *a construção significativa* das operações e técnica convencionais. A partir do terceiro ano, aparecem termos como “analisar e validar” e, no quarto ano, aparece “utilizar *estratégias de verificação* e controle de resultados pelo uso de cálculo mental e *calculadora*” (SÃO PAULO, 2007, p. 73 e 74)⁸⁴. O cálculo, por meio de estratégias pessoais, aparece inclusive em relação à adição e subtração de números racionais na forma decimal. Aparece, também, nas questões de natureza metodológica e didática, a convergência de ideias entre o documento e a Teoria dos Campos Conceituais. Em relação ao cálculo mental, há inclusive a indicação do esquema apresentado no NCTM de 1989 e que faz as relações entre problema, cálculo mental, exato, aproximado, escrito, algoritmo, estimativa, calculadora e computador, já indicado nesta pesquisa.

Percebemos um grande investimento na questão do cálculo mental dentro da proposta do documento.

4.3.2. Os PCNs

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs - 1997) pretendem ser instrumento útil no apoio às discussões pedagógicas nas escolas, na elaboração de projetos educativos, no planejamento das aulas, na reflexão sobre a prática educativa e na análise do material didático. Em seu volume 3, referente ao ensino de Matemática, o documento traz uma caracterização geral da área, com objetivos e blocos de conteúdos (números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação). Além disso, discute as relações professor-aluno e aluno-aluno e suas relações respectivas com o saber. Vemos presente o destaque para a resolução de problemas, a história da Matemática e o uso de tecnologias de informação e jogos.

O documento aponta para a necessidade da construção dos fatos básicos das operações como um repertório que dá suporte ao cálculo mental e escrito. O termo “cálculo mental”

⁸⁴ Grifos nossos.

aparece pela primeira vez (e somente uma vez) no assunto “Operações com números naturais” do Ciclo I (1ª e 2ª séries) e aponta também a importância da utilização de estimativas e da realização de cálculos por meio de estratégias pessoais. Para o Ciclo II (3ª e 4ª séries) o cálculo mental é citado mais vezes e a justificativa é de que “Os recursos de cálculo são ampliados neste ciclo pelo fato de o aluno ter uma compreensão mais ampla do sistema de numeração decimal, além de uma flexibilidade de pensamento para a construção do seu cálculo mental” (p. 83). Segundo o mesmo documento, diante deste maior conhecimento matemático, é possível ao aluno, portanto, desenvolver estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e/ou calculadora. Além disso, faz parte da habilidade do aluno fazer algumas escolhas, tomar decisões sobre a adequação do uso do cálculo mental – aproximado ou exato – ou da técnica operatória ou calculadora, em função das operações envolvidas ou do problema enfrentado.

No item “Orientações didáticas” é que aparecem as concepções a respeito de cálculo mental. Para o desenvolvimento do cálculo é indicada a necessidade primeira de dominar a contagem e as combinações aritméticas básicas, como as tabuadas e listas de fatos fundamentais, construídos com compreensão e não simplesmente com memorização.

Evidentemente, a aprendizagem de um repertório básico de cálculo não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como consequência, a memorização compreensiva desses fatos (BRASIL, 1997, p. 113).

Ao construir e organizarem um repertório básico, os alunos começam a perceber, intuitivamente, algumas *regularidades* das operações bem como suas *propriedades*. Quando uma criança precisa calcular $4 + 7$, por exemplo, e opta por calcular $7 + 4$ (partir do número maior para realizar o cálculo) está se apropriando da propriedade comutativa da adição. O documento deixa claro que

o foco do trabalho de construção de um repertório básico para o desenvolvimento do cálculo consiste em identificar as estratégias pessoais utilizadas pelos alunos e fazer com que eles evidenciem sua compreensão por meio de análises e comparações, explicitando-as oralmente. Já a organização desse repertório dá-se por meio da exploração das escritas numéricas e apóia-se na contagem, no uso de materiais didáticos e da reta numérica (BRASIL, 1997, p. 115).

O documento cita doze exemplos de atividades que os alunos costumam utilizar na construção e organização desse repertório. Citamos algumas dessas sugestões (p. 113):

- contar de dois em dois, três em três para construir as multiplicações por 2, por 3...;
- usar resultados de adições de números iguais, como $4 + 4$, $7 + 7$ para cálculos com números maiores como $40 + 40$, $700 + 700$, etc.;
- “dobrar e adicionar um” para se chegar ao resultado de $5 + 6$ como sendo $5 + 5 + 1$;
- adicionar pares de números iguais, como, por exemplo, $8 + 8$, para calcular $7 + 9$;
- adicionar 10 e subtrair 1 para somar 9;
- aplicar as adições que resultam 10 em situações como $7 + 4$, calculando $(7 + 3) + 1$ (um dos números é decomposto de maneira a completar um outro para formar dez).

O documento define sua *concepção de cálculo mental* quando assinala que “de forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos” (p.117).

Apesar de parecer haver uma oposição entre cálculo mental e escrito, o documento aponta que há sim a necessidade de registros escritos durante o cálculo, pois as estratégias de cálculo, por sua própria natureza, são limitadas. “É bastante difícil, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito” (p.116).

Há um registro de cálculo mental (p. 115) em que se evidencia o registro dos resultados parciais por escrito e que podemos observar na Figura 22. Nele podemos constatar a presença da autonomia na resolução do cálculo e a importância da criança explicar seu pensamento, esclarecendo cada etapa do processo.

Handwritten mental calculation records:

Subtraction:

$$32 - 18 = 14$$

Eu pensei assim:

$$30 - 10 = 20$$

$$2 - 8 = -6$$

$$20 - 6 = 14 \text{ e foi assim}$$

Addition:

$$27 + 38 = 65$$

Eu pensei assim:

$$20 + 30 = 50$$

$$7 + 8 = 15$$

$$15 + 50 = 65$$

Figura 22 - Registro de cálculo mental

O documento indica que nos dois primeiros ciclos, o objetivo principal do trabalho com o cálculo consiste em fazer com que os alunos construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações nela envolvidos. O aluno deve saber avaliar se há necessidade de se usar cálculo aproximado ou exato. De acordo com o documento,

o cálculo mental apóia-se no fato de que existem diferentes maneiras de calcular e pode-se escolher a que melhor se adapta a uma determinada situação, em função dos números e das operações envolvidas. Assim, cada situação de cálculo constitui-se um problema aberto que pode ser solucionado de diferentes maneiras, recorrendo-se a procedimentos originais para chegar ao resultado (BRASIL, 1997, p. 117).

O documento também explicita que, como no cálculo mental a reflexão se encontra no significado dos cálculos intermediários, isso facilita a compreensão das etapas do algoritmo, levando o aluno a utilizar o cálculo mental também como estratégia de controle do cálculo escrito (referindo-se à técnica operatória).

Quanto à *estimativa*, o documento justifica o seu estímulo dizendo que nas situações práticas, frequentemente, não dispomos de lápis e papel e nem é necessário uma resposta exata, basta uma aproximação. E, assim, os alunos necessitam desenvolver e sistematizar procedimentos de cálculo por estimativa e estratégias de verificação e controle de resultados. Para tal, é preciso que os alunos aprendam a reconhecer se certos resultados relacionados a

contagens, medidas, operações são ou não razoáveis em determinadas situações. “A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da *capacidade de tomar decisões*” (p.118)⁸⁵.

Os procedimentos de cálculo por estimativa devem levar o aluno a perceber o *significado* de um valor aproximado e decidir quando é conveniente usá-lo ou a necessidade de buscar um valor exato. Os procedimentos de cálculo por estimativa desenvolvem-se concomitantemente aos processos de cálculo mental: pelo reconhecimento da grandeza numérica, por meio da decomposição dos números, pelo estabelecimento de relações de dobro e metade, entre outros.

O documento sinaliza que os registros numéricos⁸⁶ para expressar procedimentos de cálculo mental revela o domínio de conhecimentos matemáticos do aluno e são a base para o cálculo escrito⁸⁷. Além disso, cita alguns recursos que podem auxiliar na compreensão das técnicas operatórias, como a *escrita decomposta* dos números nas operações.

O exemplo de 355 -168 é citado na página 121 e visto na Figura 23. Com a decomposição, o aluno é capaz de compreender melhor o “empréstimo” da técnica operatória, no caso da subtração, à ordem imediatamente superior. Ao lado desta decomposição, representamos o algoritmo.

200	140	15	
300	50	5	
-100	60	8	
100	+80	+7	

2 14
— 3 5 15
1 6 8
1 8 7

Figura 23 - Exemplo de adição por meio da decomposição e do algoritmo

Também mostra sugestões de uso da calculadora como importante recurso para a criança ser estimulada a explicitar, verbalmente ou por escrito, os procedimentos que utiliza. O documento expõe, ainda, *critérios de avaliação* de matemática para o segundo ciclo (p.93). Os critérios indicados servem para apontar aspectos essenciais em relação às competências que se espera que um aluno desenvolva até o final do ciclo. Para o primeiro ciclo foram estabelecidos cinco critérios (Quadro 4) e para o segundo ciclo (Quadro 5), sete. As ideias relativas ao cálculo mental estão presentes logo no primeiro item de cada listagem. Embora a

⁸⁵ Grifos nossos.

⁸⁶ Referindo-se aos registros intermediários de cálculo mental.

⁸⁷ Referindo-se aos algoritmos.

palavra “cálculo mental” não esteja explícita, podemos percebê-lo através das expressões que fazem referência à importância de se dar significado ao cálculo e da busca pessoal de estratégias de resolução, valorizando o processo.

• Resolver situações-problema que envolvam contagem e medida, significados das operações e seleção de procedimentos de cálculo

Espera-se que o aluno resolva problemas expressos por situações orais, textos ou representações matemáticas e utilize conhecimentos relacionados aos números, às medidas, aos significados das operações, selecionando um procedimento de cálculo pessoal ou convencional e produzindo sua expressão gráfica. Ao finalizar este ciclo, os diferentes significados das operações não estão consolidados; por isso, os problemas devem abordar os significados que já foram apropriados pelos alunos, priorizando as situações de adição e subtração.

Quadro 4 - Critérios de avaliação de matemática para o primeiro ciclo

• Resolver situações-problema que envolvam contagem, medidas, os significados das operações, utilizando estratégias pessoais de resolução e selecionando procedimentos de cálculo

Espera-se que o aluno resolva problemas utilizando conhecimentos relacionados aos números naturais e racionais (na forma fracionária e decimal), às medidas e aos significados das operações, produzindo estratégias pessoais de solução, selecionando procedimentos de cálculo, justificando tanto os processos de solução quanto os procedimentos de cálculo em função da situação proposta.

Quadro 5 - Critérios de avaliação de matemática para o segundo ciclo

Assim, o documento mostra que é recomendável que a organização do estudo do cálculo privilegie um trabalho que explore procedimentos de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles, aperfeiçoando, assim, seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos e mais próximos das técnicas usuais.

4.4. Cursos de formação

4.4.1. Cursos de formação na rede municipal de ensino

No *Projeto de Capacitação de Recursos Humanos* através de treinamento em serviço – Ensino de 1º e 2º graus (Treinamento em Serviço de Matemática para Professores de 1ª a 4ª série do 1º grau), o termo “cálculo mental” aparece no Módulo 3 “Números naturais”. Neste módulo, aparecem sugestões de atividades separadas em três itens: conceitos: adição, subtração, multiplicação e divisão; cálculo mental; algoritmos (técnica operatória). O documento conceitua as quatro operações, citando um ou dois exemplos e também sinalizam a necessidade de familiarizar-se com os termos das operações.

O documento cita que

após a identificação de cada conceito, várias atividades deverão ser efetuadas para memorização dos fatos fundamentais. Para tanto, sugerimos elaboração de listas, pelos alunos, com a escrita dos fatos fundamentais da adição e subtração – para serem afixados na classe. [...] No caso dos fatos fundamentais da multiplicação, é interessante construí-los com material Cuisenaire e, posteriormente, na tábua de Pitágoras com papel quadriculado (p. 11 e 12).

O texto do curso encaminha o trabalho separado em relação às propriedades das operações e sugere atividades para trabalhar a comutatividade e a associatividade na adição e na multiplicação. É por meio do trabalho com a associatividade que são elaborados os fatos fundamentais da adição. Desta forma, na Figura 24, podemos observar as propriedades sendo trabalhadas em “exercícios que envolvam sequências de adições ou multiplicações, nos quais os alunos poderão praticar o cálculo mental efetuando somas ou multiplicações entre dois números, até terminar a sequência” (p. 13). Vemos, portanto, que há a orientação para iniciar-se o trabalho com cálculo mental a partir da construção dos fatos fundamentais, mas não fica claro, no texto, como se dá esta construção, quais as discussões envolvidas, as observações e análises que podem ser feitas neste processo (busca de regularidades etc).

Figura 24 - Possibilidades de adições e multiplicações que envolvem cálculo mental e propriedades das operações, sugeridos nos cursos de formação

No item “Cálculo mental e algoritmos (Técnica operatória)”, o texto explicita que “O exercício de cálculo mental deve ser interpretado pelo professor como um *problema aberto*, diferente a cada vez, no qual o aluno tem o direito de investir seus conhecimentos” (p.16). O texto também se refere ao trabalho com resultados aproximados e o justifica dizendo que desenvolve grande segurança no cálculo escrito exato, pois permite a antecipação de resultados (estimativa). “Não se trata de privilegiar o cálculo mental em detrimento do cálculo escrito, mas sim de verificar, antes do cálculo escrito, se não existe uma maneira de descobri-lo pelo cálculo mental” (p.16).

O texto do curso sugere desenvolver no aluno uma multiplicidade de abordagens em relação à mesma operação e exemplifica, como produto de 24 por 4, algumas situações que podem ser geradas a partir de diferentes procedimentos de cálculo mental:

$$24 \times 4 = 25 - 1 \times 4 = 100 - 4 = 96$$

$$24 \times 4 = 3 \times 8 \times 4 = 3 \times 32 = 96$$

$$24 \times 4 = (12 + 12) \times 4 = 48 + 48 = 96$$

$$24 \times 4 = (4 \times 20) + (4 \times 4) = 80 + 16 = 96$$

Nas sugestões de registro escrito e algoritmo, o texto apresenta sugestões do tipo: uso de material concreto, registro na forma decomposta e registro na tabela valor e lugar. Seguem dois exemplos: um de situação aditiva (p. 19) e outro de situação multiplicativa (p. 20), que podemos ver na Figura 25. Notemos como no final da proposição das formas decompostas, aparece um registro representativo de cálculo mental.

b) quando a soma dos algarismos de cada ordem ultrapassa 9.

Ex.1: $63 + 29 = \dots$

$$\begin{array}{r} 60 + 3 \\ 20 + 9 \\ \hline 80 + 12 \\ 80 + 10 + 2 \\ \hline 90 + 2 \\ \hline 92 \end{array}$$

c	d	u
	6	3
	2	9
	9	2

Ex.2: $56 + 71 = \dots$

Ex.1: com três reagrupamentos $29 \times 76 =$

$$\begin{array}{r} 70 + 6 \\ \times 20 + 9 \\ \hline 630 + 54 \\ 1400 + 120 \\ \hline 1400 + 750 + 54 \\ 1000 + 400 + 700 + 50 + 50 + 4 \\ 1000 + 1100 + 100 + 4 \\ 2100 + 104 \\ \hline 2.204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 29 \\ \hline 684 \\ 152 \\ \hline 2204 \end{array}$$

Figura 25 - Exemplos de cálculos envolvendo adição e multiplicação, sugeridos nos cursos de formação

O curso “Caminhos: da qualidade na Educação ao Ensino”, que faz parte do APOIO, foi dividido em 8 módulos e propõe textos sobre *aprendizagem significativa*, sobre a importância do aprender a pensar, sobre propostas curriculares, sobre a democratização do ensino e alguns textos na área de Matemática: de Imenes, um texto reflexivo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática, um relato sobre um dos dias de cursos e um texto sobre a matemática para o século XXI, da *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM). No texto de Imenes, a proposta é discutir como certas abordagens metodológicas da Matemática podem levar o aluno a uma sensação de fracasso diante do autoritarismo e dogmatismo de alguns professores, causando insegurança, gerando frustrações e memorizações sem sentido. O relato discorre sobre uma experiência interdisciplinar que envolvia as áreas de Geografia, Ciências e Matemática e envolvia questões do universo social de uma escola próxima à Guarapiranga, em relação às taxas de água. Os textos propõem

discussões ao grupo de professores no sentido de se repensar a Matemática, seu papel no ensino e aprendizagem e a importância do papel do aluno nesse processo.

Já no texto que discute a questão da Matemática para o século XXI, as *competências matemáticas* têm especial destaque para a discussão entre os professores do curso. Aparecem questões mais específicas em relação ao cálculo mental e à resolução de problemas. Além disso, suscita discussões sobre o papel da matemática na vida dos alunos, haja vista que “os indivíduos irão necessitar de capacidades básicas que lhes permitam aplicar os seus conhecimentos a novas situações e controlar a própria aprendizagem ao longo da vida” (p. 83), devendo enfrentar problemas matemáticos com confiança. Para isto, o texto valoriza o uso de calculadoras e computadores, bem como a resolução criativa de problemas e explicita doze competências matemáticas que se inter-relacionam.

É enfatizada a *resolução de problemas* como a razão principal para estudar matemática e é indicado que os alunos devem “ver resoluções alternativas para os problemas e devem ter experiência na resolução de problemas com mais do que uma solução” (p. 84). O cálculo mental e estimativo devem ser usados para efetuar cálculos aproximados e, em um problema, a “estimação pode ser usada para verificar a razoabilidade da solução, para examinar uma conjectura ou tomar uma decisão” (p. 85).

Os alunos devem efetuar com facilidade as operações básicas, incluindo números inteiros e decimais, além de saber usar a calculadora e os computadores. “Aprendendo a aplicar o cálculo, os alunos devem praticar a escolha do método mais apropriado: cálculo mental, algoritmo ou a utilização da calculadora”, além de serem “capazes de determinar se os resultados obtidos pelas calculadoras e computadores são razoáveis” (p. 87).

A comunicação das ideias matemáticas também é importante, bem como o envolvimento ativo dos alunos nas discussões e formulações matemáticas. “A aprendizagem em grupo permite aos alunos trabalhar em conjunto em situações de resolução de problemas, colocar questões, analisar situações, tentar estratégias alternativas e verificar a razoabilidade dos resultados” (p. 87).

O curso, portanto, dá subsídios à discussão sobre a flexibilidade na tomada de decisões por parte dos alunos. O professor deve incentivar e proporcionar momentos para que o aluno tenha contato tanto com cálculo mental, algoritmos e calculadora e tenha destreza com todos eles, usando-os com consciência e compreensão. É o aluno que vai “decidir se os cálculos devem ser feitos mentalmente, com papel e lápis ou com instrumentos de cálculo” (p. 88).

4.4.2. Entrevista com uma educadora/formadora

A entrevista, baseada nas perguntas já esclarecidas na seção 4.1., nos deram mais alguns indícios de como o cálculo mental foi sendo discutido ao longo dos últimos 25 anos na rede municipal de São Paulo.

A educadora/formadora Regina nos relata que ao longo desses anos houve muitos cursos de formação de professores oferecidos pela rede municipal de São Paulo e que abordaram a questão do cálculo mental em sala de aula. Os cursos recebiam profissionais que se interessavam pelo assunto e outros que conheciam o tema apenas de nome, mas nunca havia pensado e estudado sobre ele. Além dos cursos, Regina nos diz que eram produzidos documentos escritos com textos teóricos que embasavam as discussões dos cursos e eram produzidos documentos de registro sobre os debates surgidos durante eles, com sugestões e avaliações dos participantes, além de possíveis encaminhamentos para a prática em sala de aula. Segundo Regina,

“Sempre houve cursos e nos documentos escritos desses cursos, que foram organizadores de área, falava-se do cálculo mental e se falava também nas propostas de aplicação do conhecimento com tema-geradores. Eu tive experiências em que eu dei muitos cursos para os grupos da prefeitura durante o tempo em que eu coordenava o grupo em DOT”.

E os participantes dos cursos eram tanto professores quanto gestores, que queriam esclarecer ou aprofundar o assunto. Regina afirma que muitos cursos procuraram dar relevância ao cálculo mental, esclarecendo aos professores a sua conceituação, importância e modos de discussão, pois ainda havia muitas dúvidas e confusões quanto ao seu trabalho. “E nesse momento da época de 1995/1996 tinham vários cursos, a gente percorria as regionais e também eles faziam cursos na própria secretaria e nós dávamos ênfase em cálculo mental, mas sempre houve alguns momentos em que o pessoal tinha confusão também com cálculo mental”.

A confusão com relação ao cálculo mental era de natureza diversa, uns o associavam à ideia de cálculo rápido, outros que só era válido se fosse de cabeça, nunca escrito, e outros, ainda, que o relacionavam ao cálculo de memória. Para a educadora,

“Os professores faziam um pouco essa leitura de que cálculo mental é responder as coisas rápidas, não no sentido da articulação do pensamento, das estratégias, de estabelecer relações e de busca de processos. E o cálculo mental pode ser até escrito, ele pode ter elaborações de registros diferenciados, não é? Mas ele articula um movimento diferenciado, a proposta é que ele permita um movimento de pensar da criança”.

E Regina buscava trazer para seus cursos esta discussão que considera que “Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números” (PARRA, 1996, p. 189) e a importância do registro escrito de cálculo mental pelas crianças, que Kamii (1994) também defende quando diz que o professor deve impulsionar o estímulo a diferentes registros pelas crianças, inclusive das etapas de resolução do cálculo mental.

Apesar dessa discussão ao longo dos anos, Regina ainda percebe pouco uso do cálculo mental em sala de aula, mas bastante uso do algoritmo. Situações em que se debatem as ideias das crianças ainda são bem menores do que as situações em que o professor mostra e demonstra o algoritmo. Tal situação pode ser notada, segundo ela, pois além dos cursos que oferece, ela participa de algumas aulas, acompanhando os professores e conversando com as crianças. “Mas do ponto de vista do professor, ainda é muito forte ele trazer a convencionalidade que ele tem sobre as questões da matemática e repassar para as crianças. O algoritmo ainda é muito forte”, afirma a educadora.

E acrescenta que o professor é grande influenciador no modo como as crianças pensam sobre os números e como desenvolvem seu conhecimento matemático. Regina destaca que as crianças precisam ser ouvidas e encorajadas a expor suas ideias e trocar com os colegas, para que se sintam mais confiante e livre para escolher e argumentar.

“Se o professor não está articulando bem isso do cálculo mental, vai aparecer nas ideias das crianças, na maneira como estão pensando e buscando resolver suas questões. A criança até tem e traz essa necessidade do cálculo mental, mas o professor tem que saber articular muito isso, tem que saber ouvir o que as crianças têm a dizer, prestar atenção ao conhecimento que trazem, às relações que estabelecem e trocar isso com o grupo. A criança, então, às vezes, tem medo de seguir isso se o professor não tem um projeto voltado a isso”.

Regina acha que os cursos são muito importantes para o professor trazer suas ideias, angústias, debater com outros colegas, quebrar paradigmas e avançar em seu conhecimento. “Pessoas que não participaram muito de cursos tem essa visão de que o modelo tem que ser escrito e único, num padrão de escrita, ainda falando em um número embaixo do outro, o vai um, se é de mais ou é de menos”. E completa:

“Numa divisão por algoritmo convencional, por exemplo, as crianças repetem oralmente os passos da resolução, mas não conseguem explicar claramente o porquê de cada etapa. É importante a criança dizer como pensa, deixá-la refletir, ver as contradições, analisar, comparar, para ter um conhecimento com compreensão dos números, do sistema de numeração e das operações”.

Ela também salienta que, atualmente, apesar de ainda de modo insuficiente, o trabalho com cálculo mental está mais presente em sala de aula, mas ressalta que isso vem de todas as discussões anteriores que se fizeram até o momento. “O cálculo mental está mais difundido, as pessoas estão mais voltadas a ele e que não vem de um fruto de agora, mas que vem de outros caminhos, de histórias atrás, vem de coordenadores, um fazendo essa articulação com o outro e isso aí se tornou um pouco mais significativo”. E essa busca do professor pelo assunto pode ser advinda da crescente discussão sobre cálculo mental nos últimos anos. Ponte, Matos e Abrantes (1998) também consideram que o professor elabora e reelabora constantemente o seu conhecimento, em função do seu contexto de trabalho e das necessidades decorrentes das situações que vem enfrentando.

Outro tema bastante discutido ao longo dos cursos é sobre a relação do cálculo mental e o algoritmo. “No algoritmo a criança teria que fazer trocas e seguir a regra. E pode não perceber que o resultado não está correto, pois não desenvolveu, antes, habilidades de cálculo mental e estimativa”. E cita um exemplo onde a criança poderia realizar o cálculo por cálculo mental, mas fica presa às regras do algoritmo.

“Por exemplo: se eu pego um milhar, tenho que somar 1240 com 300, ela pode elaborar um cálculo mental e saber que 1200 com 300 igual a 1500, e com 40 dá 1540, só que como ela necessita da escrita, esse 300, ela acaba organizando na sua escrita um 300 embaixo do 1000 e realizando a adição de cada algarismo numa conta armada”.

E um outro item a ser destacado na entrevista é a importância de se pensar sobre as opções metodológicas e como isso influencia a aprendizagem do aluno. Segundo Regina, “as escolhas *do que* ensinar e *como* ensinar influenciam o nível de conhecimento matemático das crianças”. “É preciso ouvir as crianças!”.

4.5. Professoras parceiras da pesquisa

4.5.1. Organização dos questionários

Após as considerações feitas sobre o cálculo mental nos programas curriculares da rede e de seus respectivos cursos de formação, partimos para a organização das informações obtidas, nos questionários, sobre as concepções dos professores a respeito de cálculo mental e de outros assuntos correlatos.

4.5.1.1. Questões enumerativas

Tabela 2 - Informações gerais sobre as professoras

	Idade	Sexo	Série/<u>ano</u>	Número de alunos na classe	Região da escola onde atua
P1	46	F	3º	36	Sul
P2	66	F	3º	34	Oeste
P3	51	F	*	30	Oeste
P4	48	F	3º	34	Oeste
P5	53	F	2º	31	Norte
P6	29	F	4º	34	Norte
P7	33	F	2º	26	Norte
P8	42	F	5º	33	Leste

*Não há registro sobre este item

De acordo com a Tabela 2, as professoras atuam em classes do 2º ao 5º ano do Fundamental II, sendo duas de 2º ano (P5 e P7), três do 3º ano (P1, P2 e P4), uma do 4º ano (P6) e uma do 5º ano (P8), como podemos perceber na Tabela 2. A maioria das escolas em que atuam fica na zona oeste (P2, P3 e P4) e norte (P5, P6 e P7) e apenas uma na zona leste (P8) e uma na sul (P1). Todas possuem mais de trinta alunos por classe, exceto a professora do 2º ano (P7), com 26 alunos.

Tabela 3 - Formação inicial e tempo de magistério das professoras

	Tempo de magistério	Tempo de magistério municipal	Curso de magistério	Tipo de Instituição	Ano de conclusão
P1	18	18	sim	Privada	1983
P2	28	19	sim	Pública	1965
P3	*	13	sim	Privada	1980
P4	29	29	sim	Pública	1980
P5	*	19	não	-	-
P6	10	7	sim	Pública	1999
P7	14	10	sim	Pública	1995
P8	25	23	sim	Privada	1985

*Não há registro sobre este item

De acordo com a Tabela 3 e o Gráfico 1, percebemos que todas as professoras possuem 10 anos ou mais de magistério e 10 anos ou mais de magistério municipal, exceto a professora P6. A professora com menos tempo de magistério municipal (P6) possui 7 anos de atuação na rede e, a com mais tempo (P4), possui 29 anos de experiência. A maioria (P1, P3, P4 e P8) formou-se no magistério nos anos 1980 (62,5%), duas (P6 e P7) na década de 1990 (25 %) e uma (P2) na década de 1960 (12,5%).

Gráfico 1 - Tempo de magistério municipal das professoras

Tabela 4 - Formação acadêmica das professoras

	Graduação	Tipo de instituição	Curso	Ano de conclusão	Pós-graduação	Área/tema
P1	sim	Privada	Pedagogia	2004	*	*
P2	sim	Privada	Serviço Social	1973	Especialização	Administração Hospitalar
P3	sim	Privada	*	1981	não	-
P4	sim	Privada	Pedagogia	1985	não	-
P5	sim	Privada	Pedagogia	1983		
P6	sim	Privada	Pedagogia	2002	não	-
P7	sim	Privada	Pedagogia	2001	Especialização	Psicopedagogia
P8	sim	Privada	Pedagogia	1985	não	-

*Não há registro sobre este item

De acordo com a Tabela 4, quase todas as professoras fizeram Pedagogia (P1, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), exceto uma (P2), que fez Serviço Social. A maioria (P2, P3, P4, P5 e P8) concluiu sua graduação entre as décadas de 1970 e 1980 (ou seja, 62,5 % até a década de 80) e três (P1, P6 e P7) entre 2000 e 2004.

Tabela 5 - Discussões sobre cálculo mental no curso de graduação das professoras

Quantos momentos em seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?						
	Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais
P1					x	
P2	x					
P3	x					
P4						x
P5						x
P6	x					
P7	x					
P8				x		

Metade (50 %) dos cursos de graduação feitos pelas professoras (P2, P3, P6 e P7), segundo a Tabela 5, nunca reservou momentos de discussão sobre cálculo mental em sala de aula. À outra metade, foram reservados três ou mais momentos de discussão (P1, P4, P5 e P8). Observamos que dos cursos de graduação com mais momentos de discussão sobre cálculo mental, a maioria (P1, P4, P5 e P8) refere-se à conclusão dos cursos na década de 1980 e apenas um em 2004. Os dois cursos concluídos pelas professoras (P6 e P7) em 2000 e 2001 não reservaram nenhum momento de discussão sobre cálculo mental.

Tabela 6 - Discussão sobre cálculo mental no curso de pós-graduação da professora

Quantos momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?						
	Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais
P7		x				

A única professora (P7) que fez pós-graduação na área de Educação teve **um** momento do curso reservado à discussão ao cálculo mental, segundo a Tabela 6.

Tabela 7 - Participação das professoras em cursos sobre cálculo mental

Participação em cursos de formação que abordaram o assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)		Quantos deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?
P1	3	3
P2	1	1
P3	Nenhum	-
P4	5 ou mais	5 ou mais
P5	1	3
P6	Nenhum	Nenhum
P7	1	1
P8	3	3

Observamos na Tabela 7 que a maioria das professoras (P1, P2, P4, P5, P7 e P8 - 75 %) participou de *pelo menos um* curso de formação que abordasse o assunto cálculo mental em sala de aula, nos últimos 15 anos. Dessas professoras, três (P1, P4 e P8 - 37,5 %) participaram de *três ou mais* cursos sobre o assunto e apenas duas (P3 e P6 - 25%) *nunca* participaram de cursos sobre cálculo mental. Todos os cursos em que participaram foram oferecidos pela rede municipal de São Paulo.

Tabela 8 – Benefícios que os cursos de formação sobre cálculo mental trouxeram às professoras

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?			
	Bastante	Pouco	Muito pouco
P1	x		
P2	x		
P3*			
P4	x		
P5		x	
P6*			
P7		x	
P8	x		

*Não há registro sobre este item

A maioria das professoras que participaram de cursos de formação (P1, P2, P4 e P8 - 67%) acha que esses cursos as ajudaram *bastante* a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula, segundo a Tabela 8. Duas (P5 e P7) acham que ajudou *pouco*. Ninguém relatou que os cursos ajudaram *muito pouco*.

Tabela 9 – Frequência de consulta das professoras aos PCNs sobre cálculo mental

Com que frequência consulta(ou) os PCNs a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)			
	Bastante	Pouca	Muito pouca
P1	x		
P2			x
P3			x
P4		x	
P5		x	
P6			x
P7		x	
P8		x	

Pela Tabela 9, a maioria das professoras (P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8 - 87,5%) consulta *pouco* ou *muito pouco* os PCNs a respeito de cálculo mental. Apenas uma professora (P1) os consulta *bastante*.

Tabela 10 – Frequência com que o cálculo mental é utilizado pelos alunos

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?				
	Bastante	Pouco	Muito Pouco	Nunca
P1	x			
P2	x			
P3			x	
P4		x		
P5	x			
P6	x			
P7	x			
P8		x		

Pela tabela 10 e pelo Gráfico 2, a maioria dos alunos utiliza *bastante* o cálculo mental em sala de aula (P1, P2, P5, P6 e P7). Duas professoras (P4 e P8) dizem que os alunos utilizam *pouco* e uma professora (P3) diz que utilizam *muito pouco*. Nenhuma professora diz que a maioria *nunca* utiliza cálculo mental.

Gráfico 2 - Frequência com que os alunos utilizam o cálculo mental em sala de aula

Tabela 11 - Assuntos mais e menos abordados nas aulas de matemática

	Assuntos mais abordados	Assuntos menos abordados
P1	Operações básicas	Geometria
P2	Situação-problema	Tabelas e gráficos
P3	Composição e decomposição de numerais	Quatro operações
P4	Tabuada	Problemas
P5	Sequência numérica	Problemas
P6	Números	Tratamento da informação
P7	Sequências numéricas	*
P8	Problemas	Jogos

*Não há registro sobre este item

Segundo a Tabela 11, os assuntos mais abordados pelas professoras em sala de aula referem-se a números e operações (P1, P3, P5, P7). Duas professoras relatam que abordam mais problemas (P2 e P8), uma (P4) relata que a tabuada é o assunto mais abordado e outra (P6) apenas cita o termo “números”. Problema é o assunto menos abordado para duas professoras (P4 e P5). Geometria e tratamento da informação são os assuntos menos abordados para P1, P2 e P6.

4.5.1.2. Questões dissertativas

Os quadros a seguir foram organizados a partir das questões dissertativas propostas às professoras. Cada quadro engloba a pergunta e as respectivas respostas de cada uma das professoras. E, logo após cada quadro, foram evidenciadas as duas principais ideias que surgiram em relação à questão formulada.

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental?
P1. *
P2. Os alunos estão acostumados a montar as contas e fazê-lo. Torna-se mais difícil eles entenderem que, muitas vezes podem fazer o cálculo mental sem a montagem ou contando com palitos.
P3. - Necessidade de representação no concreto.

<ul style="list-style-type: none"> - Na relação do concreto com a prática diária. - Capacidade de concentração. - Organização do raciocínio lógico.
P4. Os alunos não têm o hábito de trabalhar com situações de cálculo mental, pois apresentam muita dificuldade para compreender diversas situações que envolvam raciocínio.
P5. Basicamente que todos os alunos se envolvam com a atividade e coloquem em ação o que sabem. Criar estratégias que auxiliem os alunos com dificuldades e que dispõem de muito poucos recursos a avançar em seus procedimentos.
P6. - Grande número de alunos na sala; - Falta de tempo para eu estudar e me aprofundar em temas pertinentes (acúmulo de cargo); - Indisciplina e grandes dificuldades dos alunos.
P7. (1) A maior dificuldade é fazer com que os alunos “pensem”, pois grande parte apenas repete o que alguns colegas responderam. (2)...os alunos ainda estão incorporando os números e a capacidade para cálculos mentais é com quantidades pequenas.
P8. Nem todos os professores trabalham com cálculo mental, chegam com “vícios”... Estão acostumados à conta armada. Não enxergam o número de outro jeito. É difícil compartilhar estratégias, pois não foram estimulados a trocar ideias, ficam presos ao comando do professor ou olham o do colega...

*Não há registro sobre este item

Diante das respostas à questão 1, ficou mais evidente dois tipos de manifestação com relação às dificuldades em sala de aula:

- Alunos estão *acostumados a armar as operações*, usam muito o algoritmo e veem pouco o número de outra maneira.
- Os alunos têm *dificuldades de compreensão* e repetem muito as respostas dos outros sem pensar nelas, não buscam respostas próprias.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?
P1. (...) É muito interessante que enquanto a resolução algorítmica tradicional emprega sempre a mesma técnica para solucionar problemas o cálculo mental propõe diferentes

maneiras de pensar e também ajuda os alunos a compreender o sistema de numeração e as propriedades das operações. Enfim, além de um procedimento ágil, ele permite à criança ser ativa e criativa na escolha dos caminhos para chegar ao valor final.
P2. Desenvolvimento do raciocínio.
<p>P3. - Desenvolvimentos do raciocínio lógico</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estímulo à resolução de situações-problema. - Organização de memória. - Capacidade de concentração: ler/ouvir → compreender.
P4. Os alunos deverão utilizar estratégias pessoais e socializá-las em diferentes procedimentos. Então os alunos poderão compreender que não existe apenas uma maneira de resolver uma questão.
P5. As aprendizagens do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas, levam os alunos a estabelecer relações e tirar conclusões a partir dessas relações, amplia a compreensão dos conceitos numéricos e desenvolvem estratégias pessoais na resolução de problemas.
P6. Percebo que o trabalho com cálculo mental propicia a compreensão da criança no que diz respeito a utilização de métodos mais adequados na resolução de diferentes situações propostas, aperfeiçoando seus métodos pessoais e ajudando a entender usos formais de regras.
P7. É muito importante, pois desenvolve raciocínio, em outras matérias os alunos desenvolvem mais rapidez de pensamento.
P8. É fundamental,..., desenvolve a autonomia,...a criança se sente mais segura e encontra mais possibilidades de solução, raciocina melhor e entende o que está fazendo, sabe argumentar. (...) troca ideia com o outro, amplia o repertório. Na vida usamos muito mais o cálculo mental e a calculadora (...).

Pelo relatado nas respostas da questão 2, dois aspectos sobre a importância do cálculo mental têm maior destaque:

- O cálculo mental estimula *diferentes maneiras de pensar* e de *resolver problemas*, tornado a criança ativa e criativa.
- O cálculo mental *desenvolve o raciocínio* e amplia o conhecimento matemático.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?
<p>P1. Favorecer o raciocínio operatório das crianças e as resoluções por diferentes registros. Compreender o sistema de numeração e as propriedades das operações. Através da resolução de problemas proporcionar um contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas deixando de ser somente uma atividade paralela ou como aplicação da aprendizagem.</p> <p>Estimular o aluno a questionar sua resposta ou o problema proposto, a transformar um problema numa fonte de novos problemas, a formular hipóteses a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos, etc..</p> <p>Proporcionar momentos nos quais os alunos sejam estimulados a explicar seus procedimentos de realização das tarefas, confrontando com o dos seus colegas, justificando a aceitação ou a reputação dos diferentes pontos de vista, bem como justificando suas próprias opiniões.</p>
P2. Para a prática na vida diária como pequenas compras e troca.
<p>P3. Indução à solução de situações/problema, desenvolvendo critérios coerentes, método, sequência.</p> <p>Organização de critérios p/ resolução de problemas.</p> <p>Capacidade de</p>
<p>P4. A discussão de procedimentos para a resolução de problemas, desde a leitura e análise da situação que envolvam simulações, tentativas, hipóteses, é fundamental, quando professor proporciona situações em que os alunos devem comparar resultados e validar seus procedimentos.</p> <p>A valorização do processo de resolução e da construção de argumentos matemáticos pelos alunos.</p>
P5. Com o objetivo de utilizar o cálculo mental como função social, onde fora da escola o aluno possa estabelecer relação com o que foi aprendido dentro da escola e resolver as situações cotidianas.
<p>P6. Ampliar o repertório básico das operações</p> <p>Decidir sobre estratégias de resolução e verificação de situações propostas</p> <p>Identificar regras matemáticas</p>
<p>P7. Objetivos para cálculo mental:</p> <p>Desenvolver o raciocínio, a compreensão das grandezas (quanto junto: aumento, etc)</p>

Objetivos para resolução de problemas: Desenvolver o raciocínio Compreender grandezas (mais, menos, maior, menor, juntar)
P8. Em quase todos os problemas há algum tipo de cálculo ou estimativa. (...) busco resolver problemas primeiro pelo cálculo mental e fazer com que os alunos troquem e justifiquem as estratégias. Também proponho situações específicas para trabalhar o cálculo mental.

Analisando a questão 3, dois aspectos emergem quanto aos objetivos de se propor cálculo mental e resolução de problemas:

- *Favorecer o raciocínio* e o conhecimento matemático.
- *A valorização do processo* de resolução e da *construção de argumentos* matemáticos pelos alunos, criando hipóteses, comparando, justificando e validando possíveis respostas.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.
P1. Muda-se na realidade não apenas a metodologia, mas a concepção de ensino e aprendizagem, avaliação, o aluno como sujeito do seu conhecimento, o professor mediador, sendo aquele que faz intervenções com a atividade desafiadora que façam o aluno avançar e continuar aprendendo. O erro passa a ser construtivo, as trocas e interações, o conhecimento prévio, etc. Quebra-se paradigmas alcança-se objetivos de um ensino de matemática onde o aluno resolva problemas enfrentados no dia-a-dia, sabendo usar o conhecimento matemático como instrumento de leitura, interpretação e melhoria das relações do mundo no qual se vive, desempenhando, portanto um papel fundamental na formação de cidadãos.
P2. *
P3. Professor: - Auxiliar na organização dos critérios para resolução dos problemas Aluno: - Concentração/ler/ouvir - Compreensão dos problemas apresentados
P4. Papel do professor:

Proporcionar situações cotidianas aos alunos, para que desenvolvam estratégias de resolução de situações problemas, pois estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses.

Além disso, possibilita trabalhar com valores da vida cotidiana em que cálculos são mais complexos.

Papel do aluno:

O aluno deve interpretar o enunciado da questão proposta, estruturar a situação apresentada, encontrar a solução e verificar se ela é adequada ou correta. Deverá desenvolver habilidades que permitam comparar diferentes caminhos para obter a solução questionar a própria resposta, questionar o problema, formular outros com base em determinadas informações.

P5. O professor deve ser o mediador na resolução de cálculo mental e de resolução de problemas, levando o aluno a refletir e buscar soluções, valorizando as estratégias pessoais elaboradas pelos alunos para enfrentar as situações formuladas. Não deve adiantar soluções e nem deixar o aluno entregue a si mesmo, e sim a partir de seus pequenos avanços, levá-lo a observar, analisar, estabelecer relações, orientando-o, assim, para chegar à descoberta dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades propostas. Os alunos devem participar indagando, dialogando, observando, analisando, expondo seus raciocínios e compará-los concluindo sobre os mesmo.

P6. O professor como mediador e orientador do processo educacional deve propor atividades em que os alunos coloquem em jogo tudo o que sabem e aprimorem seus conceitos. No caso de matemática, as atividades devem procurar estimular os alunos a aperfeiçoarem ideias e procedimentos conhecidos para contar, comparar, estimar, ordenar, descobrir regularidades, propriedades e padrões que ajudem na ampliação dos conceitos propostos para a série.

P7. Papel do professor é organizar situações, atividade, em que o aluno possa desenvolver o seu raciocínio lógico – matemático de forma a ajudá-lo nas situações cotidianas. Fazer a ligação do aprendizado escolar com as exigências do dia-a-dia. O papel do aluno é buscar soluções para resolver as situações problemas propostas pelo professor.

P8. É mais difícil o professor trabalhar com resolução de problemas e cálculo mental porque “dá trabalho”. Ouvir os alunos, fazer perguntas em cima da fala deles, ouvir os outros alunos, comparar, levantar possibilidades, etc, é muito trabalhoso. Colocar a conta

armada na lousa é muito mais fácil (...).(...) ele é um mero repetidor, não está realmente pensando.

Quanto ao papel do professor e do aluno, na questão 4, algumas opiniões foram ficando mais evidentes:

- Papel do professor: *mediador e organizador*, que propõe situações que levem o aluno a refletir e buscar soluções. O professor faz intervenções e propicia o avanço na aprendizagem do aluno, por meio de atividades desafiadoras. Considera os *conhecimentos prévios* e *estimula a troca e as interações* entre os alunos.

- Papel do aluno: sujeito do seu conhecimento. Deve *participar ativamente*, indagando, dialogando, observando, analisando, expondo suas ideias, comparando-as com as dos colegas e validando as mesmas ou não e *encontrando soluções*.

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

P1. Nesta proposta de ensinar matemática valoriza-se o raciocínio e a compreensão do que se aprende e não mais a memorização e a repetição. As crianças não precisam decorar regras, aprender como papagaios, ao contrário, o professor proporciona oportunidades para o raciocínio e descoberta (problematizações). Enfim, dentro dessa perspectiva, os conteúdos citados acima são momentos de raciocínio e descobertas. A calculadora, por exemplo, pode ser usada para investigação, raciocínio autônomo...

Nos cálculos escritos devemos ter uma postura problematizadora, ou seja, não somente fazê-los compreender como se calcula, mas lhes proporcionar a compreensão lógica dos porquês envolvidos nas técnicas operatórias. O cálculo mental, nem se fala além de útil do ponto de vista prático, contribui para desenvolver o raciocínio, perceber padrões numéricos, fazer estimativas, etc.

P2. Desenvolver a capacidade de concentração

Organizar o raciocínio lógico

Organizar a memória e induzir ao raciocínio

Criar hábitos de organização de memória

Desenvolver critérios coerentes

P3. Não sei como responder por não visualizar a situação
<p>P4. Funcionam como ferramentas de visualização que por si mesmas possibilitam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades gráficas. No caso da calculadora, o aluno poderá seleccionar a operação adequada, validar o resultado ou propor situações em que estimem o resultado de uma operação e verificar na calculadora se a antecipação estava correta ou não.</p> <p>Os alunos devem ser incentivados a usar estratégias pessoais e compreendam que não existe apenas uma maneira de resolver o problema.</p> <p>O trabalho com cálculo mental, estimativas, arredondamentos, colabora para o melhor entendimento das propriedades dos números e das operações e para o entendimento do algoritmo convencional.</p> <p>Nas situações do cotidiano, às vezes não precisamos saber o resultado exato, mas estimar valores.</p>
<p>P5. Cálculo mental => amplia o conceito de algoritmo, desenvolve a formulação de hipóteses para os problemas do dia-a-dia.</p> <p>Cálculo aproximado antecipa e controla os resultados dos cálculos exatos, se inter-relacionam.</p> <p>Cálculo escrito => desenvolve o cálculo mental em outra linguagem</p> <p>Uso da calculadora => facilita as operações matemáticas.</p>
<p>P6. O estudo do cálculo pode ser abordado de diferentes maneiras como: cálculo mental, cálculo exato (utilizando operações formais), cálculo aproximado e escrito para se chegar a uma ordenação e sistematização para resolver determinado problema. O uso da calculadora se dá como um recurso didático para que seja possível produzir escritas numéricas que auxiliam no estabelecimento de regras.</p>
<p>P7. O cálculo mental pode apresentar um resultado exato ou aproximado. O domínio do algoritmo diminui a possibilidade do erro, principalmente se o aluno desenvolver bem o cálculo mental (que também agiliza a resolução).</p> <p>Aprender a usar a calculadora é essencial nos dias de hoje. É mais um recurso, que na sala de aula pode ajudar na correção de cálculos ou para resolver uma situação problema, de acordo com o objetivo proposto.</p> <p>Podemos então dizer que o aluno deve aprender a calcular de diversas maneiras e usar a mais adequada no momento de sua precisão. Um tipo de cálculo não é mais importante que o outro, eles se interagem e se completam.</p>

P8. O cálculo mental pode ser exato ou aproximado, dependendo da situação que encontramos. Se for exato também podemos usar a calculadora e o algoritmo, que é o cálculo escrito. Mas também podemos escrever o cálculo mental para ajudar a rever como pensamos e mostrar aos outros.

Sobre os tipos de cálculo da questão 5, as professoras expuseram suas concepções, das quais as ideias que ficam mais evidentes são:

- Cálculo mental: *uso prático, desenvolve raciocínio e estimativa*, colabora para entender propriedades das operações e algoritmo. P2, P3 e P6 não definiram. Somente P7 e P8 o relacionaram aos cálculos exato e aproximado.

- Cálculo exato: relacionado às *técnicas operatórias*. P2, P3 e P4 não citaram o termo.

- Cálculo aproximado: relacionado à *estimativas*, antecipação e controle de resultados (P5). P1, P2, P3 não citaram. P6 não definiu. P4, P7 e P8 relacionam ao cálculo mental.

- Cálculo escrito: relacionado à *técnica operatória* por P1 e P6. P2, P3, P4, P5, P6 e P7 não citaram ou não definiram. Somente P8 também o relacionou ao cálculo mental.

- Algoritmo: ideias nos textos levam a entendê-lo como *técnica operatória*. Não citado por P1, P2, P3 e P6.

- Calculadora: relacionada à *confirmação de resultados*. Somente P6 aponta como uso de escritas numéricas e estabelecimento de regras. P2 e P3 não citaram esse item.

6. Como a maioria de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir? ⁸⁸			
	<div>16 + 8</div> <div>14 + 5 + 6</div> <div>20 – 8</div> <div>34 – 2</div>	<div>13 X 9</div> <div>48 : 4</div> <div>180 + 43 + 20</div> <div>135 + 27</div>	<div>48 X 25</div> <div>610 – 254</div> <div>12 X 39</div> <div>480 : 24</div>
P1	Com estratégias de cálculo mental, usando decomposição, associatividade, comutatividade, estimativa e algoritmo.		
P2	Algoritmos		
P3	Algoritmos		
P4	Algoritmos (não fez as três últimas)		

⁸⁸ As respostas foram transformadas em comentários da pesquisadora a partir das observações dos registros das professoras (ver Anexo C).

P5	Com palitos. A partir de 48:4 a professora diz que não fariam
P6	Contando nos dedos, algoritmos e desenhos. Não fariam os três últimos (iriam exigir explicações para poderem realizar ⁸⁹).
P7	Com tracinhos e palitos nas duas primeiras. A partir de 20 – 8 não sabe se os alunos são capazes de fazer.
P8	Com estratégias de cálculo mental, usando decomposição, associatividade, comutatividade, estimativa e algoritmo (para multiplicação, divisão e subtrações com centena).(Alguns conseguem se soltar, outros não ⁹⁰)

Das informações observadas na questão 6, podemos identificar algumas predominâncias na maneira de solucionar operações, pela maioria dos alunos dessas professoras:

- Uso exclusivo de *algoritmos* (P2, P3 e P4)
- Algoritmos e cálculo mental (P1 e P8)
- Algoritmo e contagem nos dedos (P6)
- Uso de material concreto e/ou representação gráfica (P5 e P7)

4.5.2. Análise dos questionários

4.5.2.1. Questões enumerativas

Analisando os *questionários enumerativos* podemos perceber que a maioria das professoras entrevistadas formou-se na década de 1980 e possui tempo de magistério superior a 10 anos, cinco dela, inclusive, possuem mais de 15 anos de experiência, segundo o Gráfico 1⁹¹. Pelo tempo de magistério municipal, podemos inferir que a maioria (P1, P2, P3, P4, P5 e P8) entrou na rede municipal entre a década de 1980 e 1990 e apenas duas (P6 e P7) entraram entre 2000 e 2003. A partir desses dados podemos supor que as professoras estiveram sujeitas aos estímulos dados no contexto da rede municipal de São Paulo dos últimos vinte anos, em média, algumas mais, outras menos. Pelos dados podemos identificar que participaram de

⁸⁹ Entre parênteses é frase da professora.

⁹⁰ Entre parênteses é frase da professora.

⁹¹ Gostaríamos de explicar como elaboramos os gráficos que virão a seguir nesta seção. No eixo y, colocamos as informações relatadas por P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8. As ideias relativas à bastante, pouco e muito pouco constantes nos gráficos 4, 5 e 6 foram quantificadas (equiparadas a números) para que pudéssemos organizá-las no gráfico, pois este representa quantidades. Desse modo, *bastante* é representado por 5, *pouco* é representado por 3, *muito pouco* é representado por 1 e *nunca* é representado por 0.

curso de formação oferecidos pela rede nos últimos 15 anos; apenas P3 e P6 não participaram de nenhum curso. É possível supor também que tiveram contato com os programas curriculares oficiais ao longo do período de 25 anos e sete gestões de governo municipal analisadas nesta pesquisa. Tal contato pode ter se dado em maior ou menor grau, mas pelo menos deve ter sido consultado para organização do plano anual da escola e para efetivar o planejamento por períodos e semanas. Isto nos leva a concluir que as professoras tiveram sim contato com o assunto de cálculo mental desenvolvidos por esses programas curriculares e cursos de formação e estiveram expostas, em diferentes graus, dependendo da trajetória de cada uma, às concepções e valores vinculados por eles.

Quanto aos cursos de graduação, percebemos pelo Gráfico 3 que entre as professoras que concluíram a faculdade de Pedagogia, o assunto cálculo mental foi abordado independentemente da época de conclusão de curso, ou seja, a maioria das professoras (P4, P5 e P8) formadas próximo da década de 1980 tiveram momentos de debate ao cálculo mental e uma não. Já quanto às formadas mais recentemente, uma (P1) teve, na graduação, momentos reservados a esse debate e duas não (P6 e P7). Isso nos faz concluir que a exposição ao debate sobre o cálculo mental em sala de aula não é recente e que os cursos de graduação, atualmente, nem sempre abordam esse assunto.

Gráfico 3 - Ano de conclusão da graduação e momentos de discussão sobre o cálculo mental

No Gráfico 4 podemos observar que os cursos de formação tiveram significativa influência para ajudar os professores no trabalho com cálculo mental. Das seis professoras (P1, P2, P4, P5, P7 e P8) que participaram de cursos, quatro (P1, P2, P4 e P8) relatam que os cursos ajudaram bastante e outras duas, que ajudou pouco.

Gráfico 4 - Participação em cursos de formação e o quanto eles ajudaram a professora

No entanto, quando analisamos o Gráfico 5 e colocamos em comparação os momentos de discussão do cálculo mental na graduação, o quanto os cursos de formação ajudaram o professor e a frequência de utilização desse cálculo pelos alunos, percebemos algumas situações que merecem atenção. Para algumas professoras (P1, P2, P5 e P8) há relação entre ter tido discussão de cálculo mental na graduação e/ou nos cursos de formação e os alunos utilizarem bastante o cálculo mental. Há também relação quando P3 relata não ter feito nenhum curso sobre o assunto e ter tido debate na graduação e os alunos utilizarem muito pouco do cálculo mental em sala de aula. Chama-nos atenção que P5, apesar de ter tido vários momentos de discussão na graduação e achar que os cursos de formação a ajudaram bastante a trabalhar o tema, relata que poucos alunos utilizam o cálculo mental. Outra situação que nos chama atenção é o caso de P6 e P7 não terem tido momentos de discussão sobre o cálculo na graduação, não ter feito curso (P6) ou pouco aproveitamento (P7) e relatarem que os alunos utilizam bastante o cálculo mental em sala de aula.

Gráfico 5 - Relação entre os momentos de discussão de cálculo mental na graduação e nos cursos de formação com a frequência deste cálculo pelos alunos

Outra comparação se faz importante nesse momento. Se observarmos as respostas⁹² referentes à questão 6 e o Gráfico 6, podemos perceber que dos professores que relatam que seus alunos usam bastante o cálculo mental (P1, P2, P5 e P8), somente dois (P1 e P8) mostram que a maioria dos alunos faz uso desse cálculo nas representações da questão 6. P2 mostra somente o uso do algoritmo na questão 6 e P5 mostra que a maioria usa material concreto para calcular. Já P6 e P7, que discutiram pouco o cálculo mental e dizem que os alunos utilizam bastante o cálculo mental, mostram, na questão 6, que a maioria dos alunos usa algoritmos, material concreto, contagem nos dedos e representações gráficas. Gostaríamos de acrescentar que apenas P8 demonstra uma razão para essa contradição observada no Gráfico 6 (alunos usam pouco cálculo mental, mas apareceu bastante na questão 6). No final da questão 6, ela escreve que: “Estou trabalhando cálculo mental, apesar da dificuldade da classe”, além disso ela diz na questão 1: “Acho que nem todos os professores trabalham com cálculo mental, então, quando chegam à 4ª série já estão cheios de ‘vícios’”.

⁹² Ver a fotocópia das respostas no Anexo C.

Gráfico 6 - Frequência de cálculo mental utilizado pelos alunos e tipos de cálculo mais frequentes citados pela professora

+CM: uso de cálculo mental na maioria dos exemplos; A: algoritmo; MC: uso de material concreto; Des.: Representação gráfica/desenhos; Cont.: contagem nos dedos.

Quanto à consulta aos PCNs, verificamos que foram pouco ou muito pouco consultados pela maioria das professoras (P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8) a respeito de cálculo mental.

Quanto aos assuntos de matemática mais e menos abordados em sala de aula, notemos que ninguém citou o cálculo mental, contradizendo o que, dizem mais tarde, na questão 2 do *questionário dissertativo*, sobre a importância fundamental do cálculo mental para desenvolver o raciocínio, para resolver problemas, para compreender as operações e relações numéricas, para controlar os resultados dos algoritmos, para a criança ser ativa e criativa. Diante da tamanha importância do cálculo mental considerada pelas professoras, o termo não teria que aparecer em primeiro lugar pelo menos em um dos oito questionários? Apenas P2, P3 e P4 citam o cálculo mental, mas o colocam em 3º ou 4º lugar entre os assuntos mais abordados; os demais nem o citam. Além disso, P2 coloca o assunto cálculo mental separado de problemas, P3 coloca cálculo mental separado de operações, sequência numérica e problemas e P4 coloca cálculo mental separado das operações e nem cita problemas. Quanto à resolução de problemas, o assunto foi o mais abordado para duas professoras (P2 e P8) e o menos abordado para outras duas (P4 e P5).

4.5.2.2. Questões dissertativas

A partir do observado nas questões dissertativas da seção 4.5.1.2 e das duas manifestações que foram ressaltadas em cada uma, selecionamos as expressões/frases em destaque (em *itálico*) nessas manifestações (que pontuam seus *aspectos* principais, ou seja, que representam as ideias que mais tiveram destaque ao longo dos questionamentos) e elaboramos o Quadro 6.

Questão 1	Acostumados a armar Dificuldades de compreensão
Questão 2	Diferentes maneiras de pensar e resolver problemas Desenvolve o raciocínio
Questão 3	Favorecer o raciocínio Valorização do processo de resolução e construção de argumentos
Questão 4	<i>Professor:</i> mediador e organizador, considera conhecimentos prévios e estimula a troca e interação entre os alunos <i>Aluno:</i> participar ativamente e encontrar soluções
Questão 5	<i>Cálculo mental</i> = prático, desenvolve o raciocínio e estimativa (cálculo aproximado) <i>Cálculo exato</i> = algoritmo = técnicas operatórias <i>Calculadora</i> = conferir resultados
Questão 6	Algoritmo

Quadro 6 - Principais aspectos levantados no questionário dissertativo

No Quadro 7 podemos observar como organizamos, em *categorias*, os aspectos citados no Quadro 6, para que pudéssemos fazer a continuidade de nossa análise e relacioná-la ao discutido na fundamentação dos capítulos 2 e 3.

Categoria 1 - Processo de ensino-aprendizagem	Categoria 2 - Relação professor-aluno	Categoria 3 - Cálculo mental: conceito e importância
<ul style="list-style-type: none"> • Acostumados a armar • Dificuldades de compreensão • Favorecer o raciocínio • Valorização do processo de resolução e construção de argumentos 	<ul style="list-style-type: none"> • Professor: mediador e organizador, considera os conhecimentos prévios e estimula a troca e interação entre os alunos • Aluno: participar ativamente e encontrar soluções 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo mental = prático, desenvolve o raciocínio e estimativa (cálculo aproximado) • Cálculo exato = algoritmo = técnicas operatórias • Calculadora = conferir resultados • Diferentes maneiras de pensar e resolver problemas • Desenvolve o raciocínio

Quadro 7 - Categorias surgidas a partir das respostas aos questionários

Categoria 1 - Processo de ensino-aprendizagem
<p>Acostumados a armar</p> <p>Dificuldades de compreensão</p> <p>Favorecer o raciocínio</p> <p>Valorização do processo de resolução e construção de argumentos</p>

Das evidências que levaram à configuração da *categoria 1*, podemos, de alguma maneira, compreender que o professor confere ao cálculo mental um relevante papel no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Muitas professoras dão valor ao processo de resolução, enfatizando que o aluno tem que ser capaz de interpretar a situação, levantar hipóteses, testar, compará-las com as de outros colegas, analisar, confrontar ideias, aceitar argumentos e justificativas dos colegas ou rejeitá-las, porém, sempre argumentando, expressando oralmente ou por escrito as suas ideias. Essa preocupação com a *valorização do processo de resolução e construção de argumentos* vai de encontro ao que discutimos sobre

aprendizagem com compreensão e colaboram para o desenvolvimento da autonomia, pois diante de uma situação em que se sintam desafiados, que provoque desequilíbrios e reequilibrações sucessivas, pode se promover a descoberta e a construção do conhecimento. Segundo Piaget (1973), quando os esquemas não estão de acordo uns com os outros, quando o equilíbrio entre a assimilação e a acomodação está desorganizado, é provável que ocorra o processo cognitivo. Embora esse termo “autonomia” tenha aparecido somente com P8, “É fundamental,..., desenvolve a autonomia,... a criança se sente mais segura e encontra mais possibilidades de solução, raciocina melhor e entende o que está fazendo, sabe argumentar. (...) troca ideia com o outro, amplia o repertório”, podemos inferi-lo em muitos outros questionários quando a maioria das professoras relata que os alunos precisam enfrentar desafios, desenvolver estratégias pessoais de resolução e que ele tem que ser sujeito do seu conhecimento. Está aí a ideia de que o sujeito vai buscando na interação com o meio, novas reequilibrações. Para Piaget (1973, p.37),

equilíbrio constitui um processo muito geral, que, em grandes linhas, vem a opor compensações ativas às perturbações exteriores; compensações que variam, sem dúvida, segundo os níveis e os esquemas do sujeito, mas consistem sempre em reagir às perturbações sofridas ou antecipadas.

Tal ideia vai ao encontro de Charnay (1996), que relata que os conhecimentos não se empilham, não se acumulam, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrio, no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados.

Também percebemos aspectos da autonomia quando uma professora relata que o cálculo mental permite maneiras diferentes de pensar, articulando diversos pontos de vista e que a criança precisa ter segurança, ser ativa e criativa. A autonomia significa levar em consideração os fatores importantes para decidir agir da melhor forma, considerando variados pontos de vista. A essência da autonomia é que as crianças se tornam capazes de tomar decisões por elas mesmas (Kamii, 1990a). O sujeito ativo, segundo as considerações de Piaget, é aquele que observa, que reorganiza, exclui, classifica, ordena, reformula, compara, insere, formula hipóteses etc em uma ação interiorizada (pensamento) ou em ação efetiva. Piaget e Charnay lembram que agir não necessariamente tem a ver com manipulação de objetos concretos, mas agir com intenção, problematizando as ações, buscando estratégias adequadas, estimando, prevendo resultados. Os comentários das professoras sobre a importância dos alunos colocarem em jogo o que sabem, ativarem conhecimentos prévios para agir e colocarem em ação esses conhecimentos também demonstram uma concepção de aprendizagem com compreensão e que pressupõe o desenvolvimento da autonomia dos

alunos. E esta ideia vai ao encontro ao que Piaget assinala, pois, segundo o autor, para existir um novo conhecimento, o organismo tem que ter um conhecimento anterior para poder assimilá-lo e transformá-lo. A maioria das professoras, em suas respostas, demonstra preocupação com o processo de *valorizar o raciocínio*, mas todas citam a *busca de soluções* como um grande objetivo, tanto em relação ao cálculo como em relação aos problemas. Algumas professoras citam a necessidade de aproximação das situações da sala de aula com a vida real, a necessidade de tornar o aluno cidadão. Por outro lado, indicar que os alunos têm dificuldade de compreensão e que estão acostumados a armar contas, denota que a maioria está exposta ao estímulo do algoritmo, se não pela própria professora, mas pelo contexto escolar ao longo de sua escolaridade. Para P7, “A maior dificuldade é fazer com que os alunos “pensem”, pois grande parte apenas repete o que alguns colegas responderam”. Para se desenvolver essa capacidade de pensar na criança, é preciso que se estimule a sua responsabilidade na construção do seu conhecimento, que cada vez mais deixe de ser dependente do adulto ou de outros colegas para realizar suas próprias conclusões. Relembramos aqui o que Kamii (1990b) nos relatou, que as crianças podem perder a confiança em sua própria capacidade de raciocinar. Crianças que tenham perdido esta confiança não desenvolverão sua capacidade de pensar. As relações que a criança constrói na interação com os outros e o tipo de experiência vivenciada por ela é fundamental, levando-se em conta que o meio ambiente pode agilizar ou retardar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático (Kamii,1990a). Dessa maneira, o raciocínio lógico está pautado numa construção realizada pelo sujeito, e ocorre a partir das inúmeras relações que ele estabelece na sua leitura de mundo. E ter contato com respostas errôneas não retarda sua construção se conhecimento, mas devem fazer parte de um contexto de aprendizagem. Segundo Kamii (1994, p. 65),

essas crianças foram confrontadas com respostas que contradiziam as delas mesmas, ainda que no mesmo nível cognitivo. Assim, quando elas tentavam conciliar as contradições, acabavam por coordenar os diferentes pontos de vista e construir uma relação num nível mais elevado incluindo os pontos de vista opostos.

Quanto mais diversificadas e desafiadoras as experiências, melhores são as possibilidades de se haver uma aprendizagem com compreensão. E quanto a questão do erro, nada foi citado nos questionários, mas a maioria relata que os alunos devem por em ação o que sabem (com em P5).

Categoria 2 - Relação professor-aluno
<p><i>Professor:</i> mediador e organizador, considera conhecimentos prévios e estimula a troca e interação entre os alunos</p> <p><i>Aluno:</i> participar ativamente e encontrar soluções</p>

A partir da relevância de algumas manifestações – resultando na composição da *categoria 2* - podemos entender melhor as concepções dos professores sobre o *papel do professor* e *do aluno* nos processos de aprendizagem. Das respostas às perguntas do questionário, o professor é considerado um *mediador* na construção do conhecimento do aluno. Muitas desenvolveram a ideia de que o professor é aquele que faz intervenções com atividades desafiadoras, que façam o aluno avançar e continuar aprendendo e uma delas (P5) ainda ressalta que o professor “não deve adiantar soluções e nem deixar o aluno entregue a si mesmo, e sim a partir de seus pequenos avanços, levá-lo a observar, analisar, estabelecer relações, orientando-o...”; relatam que o professor deve propor atividades que considerem **os conhecimentos prévios** dos alunos, em que esses coloquem em jogo tudo o que sabem e aprimorem suas ideias. Para P6, o professor deve propor atividades para “estimular os alunos a aperfeiçoarem ideias e procedimentos conhecidos para contar, comparar, estimar, ordenar, descobrir regularidades, propriedades,...” Dessa forma, ao professor também cabe o papel de *organizador*, não mero auxiliador como no modelo incitativo de Charnay e nem o detentor de conhecimento, que mostra para ser copiado, como no modelo normativo. Percebemos, então, que a maioria das professoras demonstra indícios de concordância com as ideias acerca do *modelo apropriativo* de Charnay que se centra na construção do saber pelo aluno, que se propõe partir de concepções pré-existentes no aluno e coloca-as à prova para melhorá-las, modificá-las ou construir novas. Outra manifestação que fica evidente na resposta das professoras é que o professor deve *estimular a troca e a interação entre os alunos*. Para P8, por exemplo, “se cada um troca ideia com o outro, todo mundo sai ganhando, pois amplia o repertório”. Para Kamii (1990b) “A confrontação de pontos de vista é importante para o desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático porque coloca a criança em um contexto social que a incentiva pensar sobre outros pontos de vista em relação ao seu próprio”. Vemos aqui uma situação onde o problema é visto como *recurso da aprendizagem*, na qual o aluno busca um procedimento de resolução, formula hipóteses, testa e avalia. Neste sentido, lembramos que o cálculo mental também pode ser visto como recurso da

aprendizagem, pois é um caminho de cálculo onde a criança coloca em jogo seus conhecimentos, compara, analisa e valida suas respostas, tendo o professor como mediador.

Por outro lado, P3 resume o papel do professor como o de “auxiliar na organização dos critérios para resolução dos problemas” e ainda diz que propõe situações de cálculo mental e de problemas com o objetivo de “indução à solução de situações/problemas, desenvolvendo critérios coerentes, método, sequência” e que o assunto mais trabalhado nas suas salas é a “tabuada”. Características de treino, de sequência rígida, de valor ao acerto são elucidadas por meio desse relato. Percebemos que o professor “induz” a busca de solução. E esse é o papel do professor no *modelo normativo*, onde o problema é visto como *critério de aprendizagem*: o professor mostra as noções e dá exemplos de resolução (regras), diz o que está certo ou errado e apresenta sequências de lições e exercícios pré-estabelecidos do mais simples ao mais complexo. P2 deixou em branco a questão referente a esse assunto. Segundo o modelo normativo de Charnay, a concepção do saber vigente nesse modelo é a de um saber que está pronto, construído, onde o professor atua simplesmente como aquele que passa para as crianças esse saber já elaborado e acabado.

Quanto ao papel do aluno, a ideia que mais é destacada nos questionários refere-se à importância do aluno em *participar ativamente*. P5 acha importante “basicamente que todos os alunos se envolvam com a atividade e coloquem em ação o que sabem”. A maioria relata a importância do aluno não aceitar tudo pronto, mas de questionar, de duvidar, de avaliar, comparar e julgar, aceitando ideias e expondo as próprias, como podemos perceber quando P1 relata que o professor deve “estimular o aluno a questionar sua própria resposta ou o problema proposto [...]”. Segundo Piaget, ser um sujeito ativo é pensar e questionar o tempo todo, é buscar compreender e não somente copiar. Decorar simplesmente os fatos fundamentais da adição, por exemplo, não garante que o aluno vá conseguir realizar cálculos com segurança; é preciso que a memorização desses fatos seja fruto de uma construção anterior, onde a criança tenha tido a oportunidade de construir a noção de número em outras situações em que ele tenha que ter pensado, tido dúvidas, repensado e observado em outros contextos. Ou seja, todo conhecimento está, em todos os níveis, ligado à ação. Piaget (1973) afirma que conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real, mas em agir sobre ele e transformá-lo.

Outra questão que se destaca nos relatos é a ideia de que o aluno deva encontrar *soluções*. A grande maioria das professoras dá indícios de ideias que concordam com o relatado por P7: “O papel do aluno é buscar soluções para resolver as situações problemas propostas pelo professor”. Em determinadas situações o aluno precisa encontrar soluções,

checar uma conclusão ou resposta, mas o destaque à chegada de uma solução aparece com muita frequência nos relatos. Apenas uma professora relata a ideia de que um problema pode ter como objetivo ir além de buscar uma resposta, mas de gerar outros questionamentos. Para P1, os alunos podem deparar com problemas que suscitam outros, eles devem ser capazes de “(...) transformar um problema numa fonte de novos problemas, a formular hipóteses a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos, etc” e vai ao encontro da ideia do problema como *recurso da aprendizagem*, de Charnay. Apesar disso, há ainda relatos que julgam que o papel do aluno é o estar atento, de prestar atenção ao que o professor diz e propõe. Para P3, por exemplo, “o papel do aluno é “concentração/ler/ouvir e compreensão dos problemas apresentados”. Aliás, o termo “concentração” aparece citado três vezes ao longo desse questionário. Sabemos que o aluno tem que ter concentração para realizar as atividades, mas o relato destacado aqui se refere ao papel principal do aluno. Não foi citado a importância de se debater ideias, de se discutir o problema, mas valorizou-se a “compreensão” dos problemas “apresentados” e a “concentração” para repeti-los. É a ideia de que o professor mostra, apresenta e os alunos compreendem. Trata-se de transmitir, de comunicar um saber aos alunos. A Pedagogia é então a arte de comunicar, de ‘fazer passar’ um saber, segundo Charnay (1996). Vemos, nessa situação, o problema como *critério de aprendizagem*, na qual o aluno escuta, presta atenção, imita, treina, aplica regras em outros problemas semelhantes.

Categoria 3 - Cálculo mental: conceito e importância
<p>Cálculo mental = prático, desenvolve o raciocínio e estimativa (cálculo aproximado)</p> <p>Cálculo exato = algoritmo = técnicas operatórias</p> <p>Calculadora = conferir resultados</p> <p>Diferentes maneiras de pensar e resolver problemas</p> <p>Desenvolve o raciocínio</p>

Por meio das evidências que configuram a *categoria 3*, podemos, de algum modo, entender quais as concepções das professoras sobre cálculo mental assim como a importância deste procedimento de cálculo. Em seus relatos, todas defendem a importância fundamental do cálculo mental para o *desenvolvimento do raciocínio* e relatam que o mesmo proporciona *diferentes maneiras de pensar*. Para P5, “as aprendizagens do cálculo mental influem na

capacidade de resolver problemas, levam os alunos a estabelecer relações e tirar conclusões a partir dessas relações, amplia a compreensão dos conceitos numéricos e desenvolvem estratégias pessoais na resolução de problemas”. A ação do aluno é valorizada e impulsionada pelas características reflexivas e ativas do cálculo mental. Além disso, para P5, o professor “não deve adiantar soluções e nem deixar o aluno entregue a si mesmo, e sim a partir de seus pequenos avanços, levá-lo a observar, analisar, estabelecer relações, orientando-o [...]” e P8 relata a importância de se “ouvir os alunos, fazer perguntas em cima da fala deles, ouvir os outros alunos, comparar, levantar possibilidades etc”. A questão da *devolução* de Charnay está presente aqui, pois quando o professor estimula esse tipo de atitude, de troca entre os colegas e do professor saber devolver uma pergunta de maneira a instigar ainda mais o raciocínio é a devolução a que se refere Charnay. “Questões bem colocadas podem simultaneamente elucidar sobre o pensamento dos alunos e ampliá-lo (NCTM, 1994, p. 38). As demais professoras não indicam nenhum aspecto em relação à devolução de perguntas pelo professor.

A flexibilidade em resolver problemas por meio do cálculo mental também aparece em diversos momentos dos relatos. A ideia de que o cálculo mental amplia o conhecimento matemático também está presente nos relatos, como podemos perceber, por exemplo, em P1:

“É muito interessante que enquanto a resolução algorítmica tradicional emprega sempre a mesma técnica para solucionar problemas o cálculo mental propõe diferentes maneiras de pensar e também ajuda os alunos a compreender o sistema de numeração e as propriedades das operações”.

Tal ideia vai ao encontro ao que Parra (1996) propõe, quando afirma que os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números. A professora ainda faz uma contraposição com algoritmo, relevando a importância do cálculo mental em detrimento ao outro. O cálculo mental também é citado como importante fonte de compreensão dos sistemas e regras envolvidos no conhecimento matemático. P6 relata que o cálculo mental propicia à criança escolher métodos mais adequados, “aperfeiçoando seus métodos pessoais e ajudando a entender usos formais de regras”. Além disso, P5 destaca “o objetivo de utilizar o cálculo mental como função social, onde fora da escola o aluno possa estabelecer relação com o que foi aprendido dentro da escola e resolver as situações cotidianas”. Outro destaque nos relatos quanto à importância do cálculo mental está em relação à capacidade de *resolver problemas*.

De maneira geral, as ideias a esse respeito vão ao encontro ao que P6 afirma sobre o cálculo mental permitir “decidir sobre estratégias de resolução e verificação de situações propostas”. Somente P1 abarcou a ideia de que resolver problemas pode gerar outros problemas, quando diz que o aluno pode “transformar um problema numa fonte de novos problemas, a formular hipóteses a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos, etc” para P7, por exemplo, tanto o cálculo mental, quanto os problemas servem para “desenvolver o raciocínio” e compreender “grandezas (quanto junto, aumento etc)”. P3 também relata que o professor deve induzir a busca de solução. Segundo Charnay (1996, p. 39), “aí reconhecem os métodos às vezes chamados de dogmáticos (da regra às aplicações) ou maiêuticos (perguntas/respostas).”

Quanto ao conceito de cálculos, a maioria relata que o cálculo mental está associado ao uso prático e que ele desenvolve o raciocínio. Também podemos notar que o cálculo mental é considerado *estimativa* ou que esse leva à estimativa. “Cálculo mental e estimativa colaboram para entender propriedades e algoritmos” (P4). “Cálculo mental (...) contribui para (...) fazer estimativas” (P1). Além disso, quase todas as professoras não relacionam o cálculo mental com o escrito, pelo menos, não citam e suas ideias não suscitam isso. Apenas P8 refere-se ao cálculo mental como também podendo ser escrito. Algumas professoras relatam que o cálculo mental pode ser exato ou aproximado, como podemos perceber em P7 e P8.

Há ainda algumas contradições na concepção do cálculo mental, de acordo com os relatos. P2, por exemplo, fala que o cálculo mental serve para organizar o raciocínio lógico, mas também indica que ele serve para organizar a memória e induzir ao raciocínio, além de criar hábitos de organização de memória. P3 disse que não sabe como responder “por não visualizar a situação”. P4 relata uma visão pouco esclarecedora de sua concepção a respeito dos tipos de cálculo mencionados na questão 6: “Funcionam como ferramentas de visualização que por si mesmas possibilitam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades gráficas.” Por outro lado, a mesma P4 indica o cálculo mental em relação a um cálculo pensado, assim como Parra (1996) que afirma que o trabalho com cálculo mental, estimativas, arredondamentos, colabora para o melhor entendimento das propriedades dos números e das operações e para o entendimento do algoritmo convencional. E para Carraher, Carraher e Schliemann (1988), o cálculo mental deve ser enfatizado, pois esta atividade matemática tem sólidas bases na compreensão do número e do sistema decimal, habilidades que devem ser utilizadas, e não desprezadas, pela escola. A escola deve partir dos esquemas

de assimilação da criança, propondo atividades desafiadoras que provoquem desequilíbrios e re-equilibrações sucessivas, promovendo a descoberta e a construção do conhecimento.

Para a grande maioria das professoras desta pesquisa, o *cálculo exato* está sempre associado à ideia de *algoritmo* e *técnica operatória*. Para P1, “Nos cálculos escritos devemos ter uma postura problematizadora, ou seja, não somente fazê-los compreender como se calcula, mas lhes proporcionar a compreensão lógica dos porquês envolvidos nas técnicas operatórias”. A professora valoriza a compreensão das regras do algoritmo, mas não podemos inferir como ela supõe que isso aconteça. P5 aponta que o cálculo mental “amplia o conceito de algoritmo”, mas não podemos inferir o que isso significa. Da maneira como foi colocada, parece que o cálculo mental vem depois do ensino do algoritmo, como uma ferramenta que ajuda a compreender melhor o algoritmo. Outras colocações sobre o cálculo mental ficam em aberto quanto ao seu entendimento, como em: “Cálculo escrito => desenvolve o cálculo mental em outra linguagem” (P5). “Desenvolver critérios coerentes” (P2). “O domínio do algoritmo diminui a possibilidade do erro, principalmente se o aluno desenvolver bem o cálculo mental (que também agiliza a resolução)” (P7). Além disso, relembramos o Gráfico 6, em que podemos notar algumas outras convergências e divergências em relação ao cálculo mental. Apenas P7 e P8 associam o cálculo mental à ideia de cálculo exato.

Quanto ao uso da *calculadora*, esta aparece, em sua grande maioria, associada à ideia de conferir resultados. Outras, porém, relatam que “a calculadora, por exemplo, pode ser usada para investigação, raciocínio autônomo (...)” (P1). Além dessa visão, temos P4, indicando também a função de conhecer os números, analisar o sistema de numeração, pensar sobre as propriedades e as convenções, quando relata que “o uso da calculadora se dá como um recurso didático para que seja possível produzir escritas numéricas que auxiliam no estabelecimento de regras”. Segundo Albergaria e Ponte (2008), o uso da calculadora pode levar os alunos a explorar mais profundamente o seu conhecimento dos números. Ninguém associou o uso da calculadora com o trabalho de cálculo mental em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fazemos aqui mais algumas considerações sobre a análise desses documentos, cursos e questionários, bem como tecer, ainda, algumas considerações sobre outras questões que merecem ser comentadas.

Diante das análises dos documentos curriculares, dos cursos de formação e dos questionários dos professores, foi possível traçar um esboço de como é pensado e trabalhado o cálculo mental nas séries iniciais do ensino fundamental, entender qual o valor e o papel do cálculo mental no contexto da rede municipal de São Paulo ao longo dos últimos anos, desde as grandes mudanças curriculares da década de 1980 até os dias atuais. Na Figura 26, podemos visualizar como foram sendo esboçadas as linhas de análise que nos conduziram a compreender o cálculo mental a partir do nosso recorte.

Figura 26 - Esquema da composição formada pelo recorte da pesquisa a partir dos dados recolhidos

A grande forma oval representa o contexto da rede - que engloba as concepções de cálculo mental nos documentos curriculares, nos cursos de formação e nos professores - e que traduz uma ideia de cálculo mental. Tal ideia de cálculo perpassa a concepção de ensino-aprendizagem, a relação professor-aluno e a relação com outros tipos de cálculo (as três categorias que foram surgindo). E, por meio dessa permeação, há a culminância do valor e do papel do cálculo mental em sala de aula. CM – Cálculo Mental.

Todos os *documentos curriculares* propostos pela rede municipal de São Paulo que foram analisados nesta pesquisa indicam a importância do cálculo mental para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Todos destacam o seu papel de formação de um pensamento flexível, de caráter investigativo e articulador, pautado numa aprendizagem com compreensão. Alguns documentos apresentam claramente o termo “cálculo mental em seu sumário”, outros o destacam ao longo do texto documental. Todos justificam sua relevância no sentido de instigar um ser pensante, seguro, contestador e criativo. Os documentos apontam para um trabalho com cálculo mental que estimule a criança a desenvolver estratégias pessoais de cálculo, de enxergar o número e as relações numéricas de maneira holística, de descobrir e compreender as propriedades do sistema de numeração decimal e as propriedades das operações, de perceber e entender as regularidades, de inferir convenções e de usar todo esse conhecimento de modo compreensivo. Vemos que os documentos sugerem um fazer com compreensão, consciente, para que garanta o sucesso do aluno. É o que Piaget (1978a), chama de “êxitos sucessivos”, as soluções que exigem a compreensão (tomada de consciência) para que se possa alcançar os objetivos.

Quanto à sua concepção e metodologia de ensino há variações. Alguns documentos explicitam a necessidade de um trabalho sistemático com cálculo mental, apresentando sugestões práticas, delineadas passo a passo, com sugestões indicadas por série/faixa etária e que mostram uma evolução na maneira de abordá-lo. Sugerem a construção e memorização de fatos fundamentais, da necessidade de se construir estratégias diferentes e pessoais, de registros escritos variados e da importância da troca entre as crianças. Piaget (1969) destaca que a interação social é fundamental para que a criança desenvolva uma lógica e seja coerente em suas argumentações. Alguns documentos sugerem o trabalho com material concreto, outros dão ênfase à construção a partir do que o aluno já sabe sobre os números e focam o trabalho com as representações simbólicas. Todos indicam o uso primordial do cálculo mental em relação aos algoritmos e sugerem ainda o uso de outros tipos de cálculos (aproximado, estimativa e usando a calculadora). Muitos documentos empregam essa relevância do cálculo mental, mas não descartam os outros meios de se calcular e destacam que é importante conhecer todos esses “meios” para saber usá-los de forma adequada, dependendo do que a situação assim o exigir. Alguns documentos apenas orientam o uso do cálculo mental, de maneira geral, e convidam à participação do professor na elaboração de caminhos para abordá-lo em sala de aula. Há os que citam alguns embasamentos teóricos sobre cálculo mental e outros que apenas fazem pequenos comentários. Muitos documentos sugerem

também que o professor deva enfatizar mais o processo do que a solução em si mesma, justificando que é no processo que os alunos desenvolvem o raciocínio, trocam experiências e descobrem diferentes estratégias para chegar a uma mesma conclusão. A ideia de que todos devam chegar a mesma conclusão é forte em quase todos os documentos. Apenas nos documentos de 1989 e de 1995 é que se vislumbra o problema como fonte de outros questionamentos, de problematização, numa perspectiva de função social do conhecimento matemático. Alguns assumem abertamente em quais concepções se apóiam, como o caso do Movimento de Reorientação Curricular de 1989, que declaram apoiar-se nas contribuições da Psicologia Cognitiva de Piaget, aparecendo também o termo etnomatemática. E a Teoria dos Campos Conceituais aparece nos documentos das Orientações Curriculares, de 2007, além da citação do NCTM, de 1989 e a referência a outros documentos como os PCNs, de 1997. Quanto aos tipos de cálculo e suas nomenclaturas (mental, aproximado, exato, escrito, convencional, com calculadora) alguns documentos fazem uma distinção mais clara, outros somente discutem o cálculo mental de uma maneira mais geral. Na maioria das propostas há uma aproximação maior com o modelo apropriativo de Charnay, principalmente naquelas em que se considera as ideias dos professores na elaboração dos programas e dos alunos na construção dos cálculos mentais e nas trocas de estratégias.

Na análise dos dois documentos referentes aos *cursos de formação* e da entrevista com a formadora, percebemos que tais questões presentes nos documentos oficiais foram também abordadas paralelamente nos cursos, ao longo desses anos. Os cursos propuseram discussões teóricas sobre a conceituação e importância do cálculo mental, troca de experiência entre os professores e gestores participantes, além de discussões práticas sobre o encaminhamento do trabalho com cálculo mental em sala de aula. Os cursos têm como principal objetivo propor debates sobre o pensar da criança e como o professor pode permitir que as crianças exponham e reflitam sobre o que pensam, como elas podem agir e desenvolver sua lógica na busca de re-equilibrações. E Piaget persegue a gênese do desenvolvimento do pensamento, encontrando a "equilíbrio" como princípio oriundo das ações e daí advindo "os princípios lógicos". Também percebemos uma maior aproximação do modelo apropriativo de Charnay nas propostas dos cursos, pois as crianças são chamadas a participar ativamente da elaboração dos cálculos e o professor também tem papel ativo, criando momentos de discussão e também aproveitando os que surgem espontaneamente.

Quanto à análise dos *questionários dos professores* , percebemos um movimento de valorização do cálculo mental. Todas as professoras citaram o cálculo mental como

fundamental para desenvolver o raciocínio matemático, além de proporcionar um pensamento flexível e uma aprendizagem com compreensão. Algumas deixam isso mais claro, detalhando seu papel relevante, outras são mais sucintas. No entanto, deparamo-nos com duas situações em que aparecem algumas divergências entre os relatos: as relacionadas à conceitualização e ao trabalho com cálculo mental em sala de aula. Os conceitos relativos aos tipos de cálculo relatados não são explicitados claramente, na maioria dos casos. Alguns termos foram explicados de maneira confusa e outros, ainda, nem foram citados. O que entendemos é que, de modo geral, as professoras associam o cálculo mental ao cálculo aproximado e à estimativa, sendo ele basicamente verbalizado oralmente. Somente duas professoras o consideram passível de ser escrito. E quase todas o citam como facilitador na compreensão dos algoritmos. Também é destaque o modo reflexivo como as professoras consideram que deva ser o trabalho com cálculo mental, destacando o papel ativo da criança na construção do conhecimento matemático, a importância da interação com o outro e com o saber para a construção de seu próprio conhecimento. Alguns professores relacionaram o cálculo mental à memorização e indução ao pensamento. Há ainda discordâncias entre alguns depoimentos que sugerem dar bastante valor ao cálculo mental, mas que, na maioria das vezes, os alunos apresentam cálculos algoritmos como solução. Em relação aos cursos, notamos uma significativa contribuição desses para com a prática dos professores em sala de aula, e também identificamos a pouca consulta aos PCNs. Assim, percebemos um valor dado ao trabalho com cálculo mental por parte das professoras nesta pesquisa, mas também confusões e contradições no que se refere à sua conceitualização e metodologia. Destacamos o seu papel primordial para a construção do conhecimento matemático dos alunos, pois a partir de suas reflexões podem ser mobilizadas ações mentais da criança, permitindo-a ser atuante, crítica e criativa. Dessa forma, nos colocamos em direção à Kamii (2005, p. 41) que afirma que

o conhecimento lógico-matemático tem sua fonte no interior de cada criança e é elaborado por meio das ações mentais de cada uma delas. No campo lógico-matemático, portanto, as outras pessoas são importantes porque propiciam o surgimento de ocasiões para que as crianças pensem criticamente sobre suas próprias ideias em relação às ideias dos outros.

Um dos aspectos a ser considerados ainda e que vão além dos documentos, cursos e questionários foi lembrado pela educadora/formadora Regina em sua entrevista e está relacionado à *formação dos professores*. Os professores que tratam do cálculo mental nas séries iniciais não têm uma formação específica de Matemática. É preciso se levar este fato em consideração, pois a não especialização pode gerar ou não essas concepções variadas

acerca do cálculo mental e seu trabalho em sala de aula. Disso pode decorrer a variação de interpretações sobre o assunto e gerar dúvidas e contradições. Além disso, quase todas as professoras não tiveram oportunidade de calcular mentalmente quando eram crianças, ou seja, não trazem consigo uma experiência de vida pautada neste tipo de cálculo, pelo contrário, tiveram o algoritmo como forma principal de se calcular. Mas, como declara Regina, isso não acontece somente com os formados em Pedagogia, mas pode acontecer também com os licenciados em Matemática. “Isso também tem a ver com formação. Eu não diria nem que é só com formação matemática, porque eu trabalho também com fundamental 2 e isto também aparece. Alguns trabalham com cálculo mental e outros não. O trabalho com cálculo mental para o professor é a sensação de solto, dele não poder controlar e daí a insegurança”. Dentre outras questões a respeito da formação acadêmica dos professores dos anos iniciais, Curi (2005, p. 69) declara que “é possível considerar que os futuros professores concluem cursos de formação sem conhecimentos de conteúdos matemáticos com os quais irão trabalhar, tanto no que concerne a conceitos quanto a procedimentos, como também da própria linguagem matemática que utilizarão em sua prática docente”. E Palhares e Gomes (2006) destacam a importância de o professor conhecer os conteúdos a ensinar e a maneira mais eficiente de fazê-lo, além de o professor compreender o modo como as crianças pensam. Para os autores, os professores devem aprender a colocar questões, a avaliar e modificar os livros de texto, enfim, usar o seu conhecimento no contexto da sala de aula.

Destacamos também a importância *da aproximação da pesquisa com a prática educativa*, pois, segundo Freire (2000), é pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática. O próprio discurso teórico, necessário à reflexão crítica, tem de ser de tal modo concreto que quase se confunda com a prática. É necessário, portanto, motivar um compartilhar contínuo de valores, teorias, práticas e construções de modo a firmar a pesquisa e o cotidiano escolar em torno de um mesmo objetivo: o das inovações no âmbito da educação matemática.

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses que-fazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo, educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (FREIRE, 2000, p.16).

Há ainda que se considerar questões relativas a outras instâncias e que contribuem para entender a situação analisada nesta pesquisa, questões relativas ao valor das práticas

educativas em sala de aula sob a influência de *sistemas sócio-político-educativos* num sentido mais amplo. Wolman (s.d.) toca nessa questão quando contextualiza as práticas educativas numa esfera mais ampla, para além da condição da própria escola, porém ainda dando relevância às relações dentro da sala de aula, mediadas pelo professor, assim:

Sabemos que essas condições dependem de muitas questões (políticas do sistema educativo em geral, jurisdicionais, institucionais etc.), mas parte dessas questões é didática, isto é, relativa às relações entre o professor, os alunos e o saber dentro da classe (p.4).

Na verdade, essa situação não é exclusiva do Brasil. Gómez Alfonso (2005, p. 28) comenta o fato de os professores na Espanha não assumirem o ensino do cálculo mental, apesar da importância que se tem conferido a ele em associação com os demais tipos de cálculo, como no Brasil. Esse autor elenca algumas razões para o fato, que enumeramos a seguir por considerar que conhecê-las pode contribuir para uma melhor compreensão do que ocorre na realidade das nossas escolas. São elas:

- a) a existência de crenças inapropriadas de que o cálculo mental demanda boa memória e é um obstáculo à aprendizagem de métodos gerais, ao mesmo tempo em que representa uma perda de tempo, já que a calculadora pode substituí-lo;
- b) a presença de sentimentos negativos do professor, os quais envolvem suas próprias dificuldades e temor de fracassar diante dos alunos;
- c) a influência de teorias obsoletas, como a que liga o cálculo mental à inteligência, ou a que identifica estudantes rápidos como brilhantes e lentos como pouco capazes;
- d) a vinculação do cálculo mental a profissões pouco valorizadas socialmente;
- e) a falta de êxito com e dos estudantes: desânimo, falta de interesse e concentração;
- f) as pressões do planejamento curricular e do cumprimento dos programas; pouco tempo para a aula de Matemática; tratamento do cálculo mental de forma isolada nos livros didáticos;
- g) a permanência de algumas práticas em sala de aula, do tipo “vamos ver o que você fez”, ou “vamos ver quem responde primeiro”; a ênfase no cálculo convencional que não deixa espaço para a intervenção livre;
- h) a supervalorização equivocada do êxito e da rapidez;
- i) a carência de sugestões e materiais didáticos bem fundamentados e atualizados.

Pode-se perceber que o autor levanta muitos fatores variados e bastante complexos, os quais também podem ser reconhecidos na educação brasileira; o que nos chama mais a

atenção é que, na relação anterior, são explicitados diversos elementos integrantes da cultura escolar e, mais especificamente, da cultura matemática escolar. Como no decorrer dos anos, em diferentes contextos da história da matemática escolar no Brasil, as recomendações curriculares sobre a importância do cálculo mental e as tentativas de estimular sua prática não parecem ter surtido o efeito esperado, acreditamos que a ocorrência de mudanças nesse quadro demandará esforços, sobretudo, por parte dos professores e dos formadores, para os quais a conscientização e a discussão dos fatores apontados por Gómez Alfonso podem oferecer uma real contribuição.

Por fim, gostaríamos de destacar que estamos convencidos de que o cálculo mental contribui, e muito, para o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão, questão central desta pesquisa. Wolman e Quaranta (s.d.), por exemplo, concordam com Sadovisky quando relatam que estão pensando num aluno que esteja convencido de que, de alguma maneira, pode se defrontar com situações complexas, no sentido de que pode começar a tentar se introduzir nos problemas que lhe são colocados, “arregaçar as mangas”, experimentar com o que se sabe, tomar decisões, respeitar e considerar a produção dos outros, introduzir-se nela para compreendê-la, discuti-la, assumi-la etc. E é nisso que acreditamos, num aluno pensante, reflexivo, seguro, flexível, autônomo, agregador e criativo. As crianças têm direito a isso! E para potencializar tais habilidades, faz-se necessário um contínuo e crescente trabalho com cálculo mental em sala de aula, tomando-o de forma cada vez mais efetiva e consciente.

Desse modo, para encerrar nossa breve incursão pelos caminhos do cálculo mental, gostaria de citar o trecho de encerramento do NCTM, escrito por Hope (1996, p. 54), e que traduz, por meio de uma bela metáfora, o que consideramos ser o maior objetivo do trabalho com cálculo mental.

Uma resposta correta pode ser o destino de um cálculo mental, mas é o caminho seguido, mais do que o destino, que revela a compreensão do viajante. Uma pessoa que sabe calcular mentalmente tem mais possibilidade de viajar por outros caminhos do que a pessoa que não tem essa habilidade.

E parafraseando Hope, gostaríamos que as ideias sobre cálculo mental discutidas nesta pesquisa possam ajudar os educadores na abertura de *mais caminhos para mais crianças*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica, 1999.

ALBERGARIA, I. S.; PONTE, J. P. Cálculo mental e calculadora. In: CANAVARRO, A. P.; MOREIRA, D.; ROCHA, M. I. (Eds.). **Tecnologias e educação matemática**. Lisboa: SEM-SPCE, p. 98-109, 2008.

ALVAREZ, T. G.; PIRES, I. M. **Uma nova didática para o ensino de matemática: o Método Heurístico e a reforma Francisco Campos**. GT: Educação Matemática /n.19. Disponível em <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes.d.ocs_26/didatica.pdf>. Acesso em: 2 ago. 09.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998.

BACKHEUSER, E. **A aritmética na “Escola Nova”** (A nova didática da Aritmética). Rio de Janeiro: Livraria Católica, 1933.

BELTRAME, J. **Os programas de matemática do Colégio Pedro II: 1837-1932**. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2000.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BOULAY, S.; LE BIHAN, M.; VIOLAS, S. **Le calcul mental**. Mathématiques, 2004. Disponível em: < http://jclebreton.ouvaton.org/IMG/doc/Le_calcul_mental.doc>. Acesso em: 4 jan. 2008.

BRASIL. MEC - Ministério da Educação e do Desporto, SEF Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. V. 3, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.

BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; KRAEMER, J. M. Algoritmos e sentido do número. In: **Educação e Matemática**, nº 75, p. 11-15, 2003.

BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. Buenos Aires: Libros Del Zorzal, 2007.

BURKERT, C. A. V. **Processos estimativos em sala de aula**. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: São Paulo, 2000.

BUTLEN, D.; PEZARD, M. et al. **Calcul mental et resolution de problèmes numériques au début du college**, Repères-IREM, n. 41, Metz: Topiques Editions, p. 5-24, 2000.

CADEIA, C.; OLIVEIRA, M.; CARVALHO, P. Cálculo mental. In: PALHARES, P.; GOMES, A. **MAT 1C – desafios para um novo rumo** – Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo do Ensino Básico. Braga, p. 71 – 76, 2005-2006.

CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. **Journal for Research in Mathematics Education**, 15, p. 179-202, 1984.

CARRAHER, T. N.; SCHLIEMANN, A.D. A adição e a subtração na escola: algoritmos ensinados e estratégias aprendidas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, 64, p. 234-242, 1983.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CEBOLO, V. Atividades com a calculadora. In: PALHARES, P.; GOMES, A. **MAT 1C – desafios para um novo rumo** – Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo do Ensino Básico. Braga, p. 234-245, 2006.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, p.36-47, 1996.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aiqué, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

CORREA, J.; MOURA, M. L. S. A solução de problemas de adição e subtração por cálculo mental. Porto Alegre: **Revista Psicologia: Reflexão e Crítica**, vol. 10, n.1, 1997.
 CURI, E. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa, 2005.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DELVAL, J. Hoje todos são Construtivistas. In: ASSIS, M. C.; ASSIS, O. Z. M. (Orgs.). **Construtivismo e Prática Pedagógica**. Campinas: UNICAMP-FE-LPG, p. 25-34, 2000.

DI GIORGI, C. **Escola Nova**. São Paulo: Ática, 1989.
 Disponível: <<http://www.spce.org.pt/sem/96menezes%20.pdf>> Acesso em: 5 set. 2008.

DOUDAY, R. Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, p.33-42, abr./jun., 1994.

ERMEL. **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, 1^aa 5^a série**, Haïter, França, 1981.

_____. **Apprentissages numériques ET résolution de problèmes**, C. P., Haïter, França, 1991.

_____. **Apprentissages numériques ET résolution de problèmes**, C. P., Haïter, França, 1995.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, P. et alii. **Investigar para aprender matemática: textos selecionados**. Associação dos professores de Matemática. Lisboa, p. 25-48, 1996.

FAZENDA, I. (Org.) **Metodologia da Pesquisa Educacional**. São Paulo: Cortez, 1989.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, vol. 3, n. 1 (7), p. 39-54, mar.1992.

FRANCHI, A. et al. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002.
 FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 15^a ed. São Paulo: Paz e Terra, 2000.

FREITAS, J. L. M.. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. A.(Org). **Educação Matemática: uma nova introdução**. 3ª ed. São Paulo: Ed. PUC, p.77-111, 2008.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, p. 79 a 100, 2006.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, M. L. M. **O cálculo mental na história da Matemática escolar brasileira**, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicação Científica/Trabalhos/CC27901025620T.doc>. Acesso em: 10 jun. 2009.

GÓMEZ ALFONSO, B. **Numeracion y calculo**. Madrid: Sintesis, p. 65-139, 1993.

_____. Os tipos de erros de cálculo mental no contexto educacional. **Ensino de Ciências**, vol. 3, n. 13, p. 313-325, 1995.

_____. La enseñanza del cálculo mental. **Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 4, p. 17-29, dez 2005. Disponível em < http://www.fisem.org/descargas/4/Union_004_005.pdf >. Acesso em: 20 fev. 2007.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKI, A.; TOLCHINSKY, L. (Orgs.). **Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática**. São Paulo: Ática, p. 257-295, 2006.

GONÇALVES, H. **Educação matemática e cálculo mental: uma análise de Invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais De Gérard Vergnaud**. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2008.

GONÇALVES, M. J. S. V.; FREITAS, J. L. M. **O Cálculo Mental como Ferramenta e Objeto durante o Estudo de Proporcionalidade por Alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental**. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/279-2-A-gt8_goncalves_ta.pdf>. Acesso em: 30 jul. 09.

GUIMARÃES, S. D.; FREITAS, J. L. M. **Um olhar sobre o papel do cálculo mental para a aprendizagem de conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicação Científica/Trabalhos/CC79180990100T.rtf>. Acesso em 23 ago. 2008.

HOPE, J. A. Mental Calculation: anachronismo or basic skill? In: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Estimation and Mental Computation**. (Trad. Mendonça-Domite, M. C.). HAROLD, L. S. (Ed.). Reston: NCTM, p. 45 – 54, 1986.

IMENES, L. M. P. Um estudo sobre o fracasso do ensino e da Aprendizagem de Matemática. In: BOLEMA, n. 6. In: **APOIO**. Apostila de curso – Caminhos – da qualidade em Educação ao Ensino. São Paulo, p. 70-73, 1993.

INRP – ERMEL. **À descoberta dos números: contar, cantar e calcular**. (Tradução de Mário Pinto) Coleção Perspectivas Actuais – Educação. Paris: Asa, p. 115-209, 1991.

KAMII, C. **A criança e o número**. Campinas: Papirus, 1990a.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética: Implicações da Teoria de Piaget**. Campinas: Papirus, 1990b.

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In: L. J. Morrow e M. J. Kenney (Eds.), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética: Novas perspectivas – implicações da Teoria de Piaget**. Campinas: Papirus, 1994.

_____. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2005.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a Aritmética – Implicações da Teoria de Jean Piaget**. Campinas: Papirus, 1995.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional científico. In: ZETETIKÉ/UNICAMP, Faculdade de Educação. **Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática**. V.4, N°.5, p. 99-120, jan./jun 1996.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, B.; FINDELL, B. (Eds.). **Adding it up: helping children learn Mathematics**. Mathematics Learning Study Committee, National Research Council. (PDF). Disponível em <<http://www.nap.edu/catalog/9822.html>>. Acesso em 10 jun. 2009.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LUNA, S. V. **Planejamento de Pesquisa: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002.

MORENO, B. R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: PANIZZA, M. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análises e propostas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

MASON, J. Resolução de Problemas Matemáticos no Reino Unido: Problemas Abertos, Fechados e Exploratórios. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Grafis, Coop. De Artes Gráficas, CRL, p. 74 a 87, 1996.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta. Cap.7. Recursos na aula de Matemática, 1996.

MENDONÇA-DOMITE, M. C. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórico-estrutural ou uma opção valiosa? In: **ZETETIKÉ**, V.4, n.5. Campinas: Faculdade de Educação/CEMPEM/Unicamp, p.. 55-76, jan.-jun./1996.

_____. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P. et al (Orgs.). **Investigações matemáticas na sala de aula e no currículo**. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática-APM, p.15-34, 1999.

MENDONÇA-DOMITE, M. C.; LELLIS, M. Cálculo Mental. In: **Revista de Ensino de Ciências**, nº 22, FUNBEC, p. 50-57, jul/1989.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

MOROZ, M.; GIANFALDONI, M. H. T. A. **O processo de pesquisa: iniciação**. Série Pesquisa em Educação. Brasília: Plano, 2002.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standarts of school mathematics**. Reston: NCTM, 1988.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Mathematics: making a living, making a life**. Reston: NCTM. 1996.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas Profissionais para o Ensino da Matemática**. Lisboa: APM, 1994.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of de 1980's**. Reston: NCTM, 1983.

PAIS, L. C.. Transposição didática. In MACHADO, S. D. A. et. al. **Educação matemática**. São Paulo: EDUC, 1999.

PALHARES, P.; GOMES, A. A Formação em Matemática para professores do 1º ciclo – Em que bases nos podemos apoiar? In: PALHARES, P.; GOMES, A. **MAT 1C – desafios para um novo rumo** – Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo do Ensino Básico. Braga, p. 9-17, 2005-2006.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, p.186-235, 1996.

PIAGET, J. (1937). **A Construção do Real na Criança**. (Trad. Cabral, A.). Rio de Janeiro: Zahar, 1970a.

_____. (1967). **Biologia e Conhecimento**. (Trad. Guimarães, F.M.). Petrópolis: Vozes, 1973.

_____. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978a.

_____. (1936). **O Nascimento da Inteligência na Criança**. (Trad. Cabral, A.). Rio de Janeiro: Zahar, 1970b.

_____. **Para onde vai a Educação?** 6ª. ed. Rio de Janeiro: José Olímpio Editora, 1978b.

_____. **Sobre a pedagogia**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

_____. **A epistemologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1971.

_____. **Seis estudos de psicologia**. Rio de Janeiro: Forense, 1969.

PIMENTEL, T.; VALE, I. A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1.º ciclo [CD-ROM]. In COSTA, C.; MAMEDE, E.; GUIMARÃES, F. (Orgs.). **Números e Estatística: Reflectindo o presente, perspectivando o futuro**. XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática. Vila Real, p. 16-17, maio/2009.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

_____. **Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil**. Disponível em <http://www3.fe.usp.br/secoes/ebook/mat_pol/cont/2.swf>. Acesso em 18 out. 2009, s.d.

PITOMBEIRA, J. B. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Brasília: Editora UnB, p. 85-149, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P. (1998). **Investigação em educação matemática: Implicações curriculares**. Lisboa: IIE.

REED, H.; LAVE, J. Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition. In: CASSON, R. W. (Ed.). **Language, Culture and Cognition**. New York: McMillan, 1981.

RISOPATRON, A. V. E. **Sujeitos no Universo da Escola**. São Paulo: Ática, 1997.

SANCHES, P.; BAPTISTA, M.; MARZOLA, R. **Novas perspectivas para o trabalho com cálculo mental em salas de 2º e 3º ano**. Disponível em <www.vila.com.br/refle_pedag/renata%20patricia%20marilza.pdf>. Acesso em: 14 jun. 08.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **APOIO. Apostila do curso – Caminhos – da qualidade em Educação ao Ensino**. São Paulo: SME/DOT, p. 4-90, 1993.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Orientações Curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem do Ensino Fundamental - Ciclo I.** São Paulo: SME/DOT, p.68-155, 2007.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Currículos e Programas – Organizadores de áreas/ciclos.** São Paulo: SME/DOT, p.22-32, 1995.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Currículos e Programas – Organizadores de Área Ensino Fundamental.** São Paulo: SME/DOT, 1996. P. 37- 47.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Currículos e Programas – Formando leitores e escritores – Reflexão: Linguagem matemática.** São Paulo: SME/DOT, p. 1-72, 1995.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Movimento de Reorientação Curricular – Matemática – Relatos de práticas 4/8- Documento 6.** São Paulo: SME/DOT, 1992.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Movimento de Reorientação Curricular – Matemática – Documento 5.** São Paulo: SME/DOT, p. 1-42, 1992.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Projeto de capacitação de recursos humanos através de treinamento em serviço – ensino de 1º e 2º graus: treinamento em serviço de matemática para professores de 1ª a 4ª série do 1º grau.** Módulos 1 e 3. São Paulo, 1993.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – 2ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 39-72, 1985.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – 1ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 35-59, 1985.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – 3ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 47- 94, 1985.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – 4ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 51 a 104, 1985.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – Ensino Regular - 1ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 2-19, 1988.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – Ensino Regular - 2ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 2-22, 1988.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – Ensino Regular - 3ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 2-30, 1988.

_____. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Diretoria de Orientação Técnica. **Programa de 1º grau – Ensino Regular - 4ª série.** São Paulo: SME/DOT, p. 2-21, 1988.

SCHOENFELD, A. **Mathematical Problem Solving.** New York: Academic Press, 1985.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN Y CULTURA DE BUENOS AIRES. **Los niños, los maestros y los números.** Desarrollo Curricular. Buenos Aires: Dirección de Currícula - MCBA, 1996.

SEGOVIA, I. et al. **Estimación em cálculo y medida.** Madrid: Editorial Sintesis, 1989.

SIEGLER, R.S.; JENKINS, E. **How Children Discover New Strategies.** Hillsdale, New York: Erlbaum, 1989.

SIEGLER, R.S.; CROWLEY, K. **The microgenetic method: a direct means for studying cognitive development.** American Psychologist, 46, p. 606-620, 1991.

SOWDER, J. Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds). **Number concepts and operations in the middle grades.** Reston, VA: Lawrence Erlbaum. p. 182-197, 1988.

TAHAN, S. P. A vida numérica na sala de aula. In: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação à distância. **Cadernos da TV Escola – PCN na escola.** Matemática 1, Brasília, 1998.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática escolar no Brasil (1730-1930).** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc., p. 127-174, 1983.

WOLMAN, S. (Coord.) Cálculo mental con números naturales : apuntes para la enseñanza. In: **Plan plurianual para el mejoramiento de La enseñanza 2004-2007**. Buenos Aires: Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006.

WOLMAN, S.; QUARANTA, M. E. **Sistema de numeração decimal**. Entrevista com Regina Scarpa, consultora pedagógica da Fundação Victor Civita (Trad. Débora Donofrio). Disponível em: <antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0200/.../wolman_quaranta.doc>. Acesso em: 13 jan. 2010, s.d.

ZUNINO, D. L. **A aprendizagem e o ensino de matemática, abordagens atuais**. Conferência proferida no 6º Encontro Nacional de Intercâmbio e Atualização Educacional, organizado por “Novedades Educativas” – Argentina, s.d.

ZUNINO, D. L. **A matemática na escola: aqui e agora**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

ZUNINO, D. L.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 73 - 155, 1996.

ANEXOS

ANEXO A - Reportagem da Folha de São Paulo sobre o desempenho dos alunos no Brasil.

Alunos de 1ª e 4ª séries terão reforço de matemática em SP

12 de Julho de 2006

Portal Aprendiz baseado na reportagem da Folha de S. Paulo

A partir do ano que vem, os alunos de primeira e quarta séries das escolas da Prefeitura de São Paulo terão aulas de reforço de matemática. O secretário municipal da Educação, Alexandre Schneider, afirmou à Folha que estenderá o programa Ler e Escrever, no qual os estudantes das duas séries têm aulas extras de português, para a disciplina porque a rede não está indo bem com as contas.

Os resultados da Prova Brasil -avaliação do Ministério da Educação com todas as escolas de ensino fundamental municipais e estaduais do país com mais de 30 alunos- mostraram que os alunos de quarta série da Prefeitura de São Paulo obtiveram 166,86 pontos em matemática, de um total de 350. A média brasileira ficou em 179,98.

Apesar de a pontuação ter sido maior do que a de português (160,42 pontos), o resultado deixou a cidade na 450ª colocação no ranking das mais de 600 prefeituras do Estado de São Paulo. Português ficou em 448º lugar.

"Começamos o Ler e Escrever com português porque o estudante precisa entender o enunciado de um problema para saber o que está sendo pedido", diz Schneider. "Mas vamos ampliar o projeto no ano que vem." Ainda não há nome para o novo programa.

O programa Ler e Escrever foi lançado oficialmente pelo ex-prefeito José Serra (PSDB) em fevereiro e funciona com professores recrutados entre alunos de faculdades de pedagogia e letras, que recebem R\$ 400 por 20 horas semanais e comprovante de estágio.

De acordo com o secretário, ele já está presente em 85% das classes de primeira série. Reportagem da Folha de 24 de junho, no entanto, mostra que o programa só havia começado em 44% das classes.

Outro objetivo é ampliar o projeto para o segundo ciclo do ensino fundamental (de quinta a oitava séries) e envolver mais disciplinas.

Para Maria Amábele Mansutti, que coordenou os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática, é preciso adotar novas metodologias no ensino da disciplina. "Os alunos têm de entender a lógica e não achar que matemática é apenas memorização", afirmou.

Renan Alves, 10, aluno da quarta série da rede municipal de São Paulo, até que vai bem na disciplina, mas diz não gostar de matemática. "A gente tem que ficar decorando muita coisa e é fácil de confundir. Prefiro artes e português."

Leônidas de Oliveira Brandão, do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo, diz que é preciso usar diferentes recursos, como o computador, e formar melhor os professores da disciplina. "Se olharmos os dados dos provões do Ministério da Educação que analisaram os cursos de licenciatura em matemática, nota-se que a formação está aquém da necessária."

<http://aprendiz.uol.com.br/content/wregojegid.mmp>

ANEXO B - Reportagem do O Globo sobre o desempenho dos alunos em SP.

Prova SP mostra que 15% das crianças terminam a 2ª série do Fundamental analfabetas e 20% com desempenho considerado insuficiente em Matemática

01/02/2008 , às 14h40

Fonte: Globo OnLine

A Prova São Paulo foi aplicada nos dias 6 e 8 de novembro, com avaliação de português e matemática. Dos 267 mil alunos das escolas municipais, 244 mil fizeram a prova de português e 241 a de matemática.

Nada menos do que 15% dos 70 mil alunos que estavam na segunda série do Ensino Fundamental em 2007 eram ainda analfabetos. Entre os 72 mil que cursavam a quarta série ainda estavam 2.880 analfabetos. Ou seja: 4% passaram de ano durante quatro anos letivos sem saber ler e escrever.

O lado bom da Prova São Paulo é que ele será usado para que a Prefeitura de São Paulo organize um esforço para superar o problema. Todos os alunos deverão receber reforço e as escolas terão o desempenho individual de cada aluno.

Para Claudio Fonseca, presidente do Sindicato dos Profissionais de Educação do Município de São Paulo, o resultado sofrível dos alunos é reflexo da falta de uma política pública de Educação.

- "O fracasso dos alunos é resultado do descaso de várias gestões. Em geral, os governantes constroem escolas, que são necessárias, mas não pensam na qualidade do ensino: em planejar, em investir na atualização dos profissionais" - afirma Fonseca.

Matemática

Além do fraco desempenho em Língua Portuguesa, os alunos da rede municipal da capital também não foram bem em matemática. Ninguém alcançou os pontos máximos da Prova São Paulo, realizada em novembro do ano passado, na rede municipal para avaliar a qualidade do ensino na cidade. Dos 72,5 mil alunos de quarta série que passaram pela avaliação, cerca de 20% tiveram desempenho insuficiente. Eles tiveram nível de proficiência entre 100 e 125 numa escala que varia de 100 a 375. Outros 63% tiveram desempenho entre 150 e 200 na escala, que seria um desempenho regular. Acima disso, há apenas 16,6% dos alunos.

No sexto ano do ensino fundamental, dos 58,7 mil alunos que fizeram a prova de matemática, 42,8% ficam com um nível de proficiência entre 125 e 200, entre insuficiente e regular. Outros 42,2% ficam com índice entre 225 e 275, entre regular bom. Os que obtêm um bom desempenho são apenas 5%. Na oitava série do ensino fundamental, dos 46,1 mil alunos que fizeram a prova, 13,5% ficam com proficiência entre 175 e 200, mostrando que têm noção das operações básicas. Outros 75,3% conseguiram uma classificação entre 225 e 275, entre regular e bom. Outros 11,1% conseguiram uma boa nota, entre 300 e 350.

Site original da notícia de O Globo:

http://oglobo.globo.com/educacao/mat/2008/02/01/prova_sp_mostra_que_15_das_crianças_terminam_2_serie_do_fundamental_analfabetas-383426941.asp

Mas saiu no portal dia-a-dia educação do link

<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=79>

ANEXO C - Questionários para os professores

Nome	P1
E-mail	

Idade	46	Sexo	Feminino ☒ Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	---	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão	
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒			1983

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	Pedagogia	12604	

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☒ Cinco ou mais ☐

Pós-graduação	Tipo	Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☐	Área/Tema			

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Tempo de magistério (em anos)	18	Tempo de magistério municipal (em anos)	18
-------------------------------	----	---	----

Escola em que trabalha		Série/Ano
Bairro	Imirim	3º
Há quanto tempo?	5 anos	Número de alunos por classe
		36

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☐ Vespertino ☒ Noturno ☐
--	---

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☒ Quatro ☐ Cinco ou mais ☐	

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☒ Quatro ☐ Cinco ou mais ☐	

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?		
Bastante ☒	Pouco ☐	Muito Pouco ☐

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)		
Bastante ☒	Pouco ☐	Muito Pouco ☐

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado) * trabalho com os 5 eixos de forma integrada	
1- Números	
2- Operações	
3- Espaço e Forma	
4- Grandezas e medidas	
5- Tratamento da Informação	

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?			
Bastante ☒	Pouco ☐	Muito pouco ☐	Nunca ☐

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

A partir do curso de formação de matemática e a apropriação do material fornecido como subsídios os planejamentos tenho melhorado a cada ano o trabalho com cálculo mental. Este ano tenho visto grandes avanços no trabalho com cálculo mental pois os alunos estão envolvidos nesta proposta desde 2009. Operar das dificuldades pessoais de cada professor da escola em participar dos cursos de formação nas avaliações externas "drugam" a todos o trabalharem os conteúdos e a "metodologia" - proposta pelo governo municipal.

nao tem
nada de
prof em
curso

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Este trabalho com cálculo mental tem proporcionado aos alunos dispor de variados recursos e aprenderem a selecionar a modalidade de resolução que lhes pareça mais adequada para cada caso. É muito interessante que enquanto a resolução algorítmica tradicional emprega sempre a mesma técnica para solucionar problemas o cálculo mental propõe diferentes maneiras de pensar e, assim, ajuda os alunos a compreender o sistema de numeração e as propriedades das operações.

Então, além de ser um procedimento ágil, ele permite à criança ser ativa e criativa na escolha dos caminhos para chegar ao valor final.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

• Fornecer o raciocínio operatório das crianças e as resoluções por diferentes registros;
• Compreender o sistema de numeração e as propriedades das operações;
• Através da resolução de problemas proporcionar um contexto em que se podem aprender com certos procedimentos e atitudes matemáticas dessem de se ser somente uma atividade paralela ou como aplicação da aprendizagem.

Estimular o aluno a questionar sua resposta ou o problema proposto, a transformar um problema numa fonte de novos problemas, a formular hipóteses a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos, etc.
• Proporcionar momentos nos quais os alunos sejam

estimulados a explicar seus procedimentos de realização das tarefas, confrontando com o dos seus colegas justificando a aceitação ou a rejeição dos diferentes pontos de vista, bem como justificando suas próprias opiniões.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

Muda-se na realidade não apenas a metodologia, mas a concepção de ensino e aprendizagem, avaliação, o aluno como sujeito do seu conhecimento, o professor mediador, sendo aquele que faz intervenções com atividades desafiadoras que façam o aluno avançar e continuar aprendendo.

O erro passa ser construtivo, as trocas e interações, o conhecimento prévio, etc.

Quilbra-se paradigmas alcança-se o ápice de um ensino de matemática onde o aluno resolve problemas enfrentados no dia-a-dia sabendo usar o conhecimento matemático como instrumento de leitura, interpretação e melhoria das relações do mundo no qual se vive, desempenhando, portanto, um papel fundamental na formação de cidadãos.

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

Nesta proposta de ensinar matemática, valoriza-se o raciocínio e a compreensão do que se aprende e não mais a memorização e a repetição. As crianças não precisam decorar regras, aprender como papagaios, ao contrário, o professor proporciona oportunidades para o raciocínio e descoberta (problematização). Enfim, dentro dessa perspectiva, os conteúdos citados acima são momentos de raciocínio e descoberta. A calculadora por exemplo, pode ser usada para investigação, raciocínio autônomo... Nos cálculos escritos devemos ter uma postura problematizadora, ou seja, não somente fazê-los compreendendo como se calcula, mas lhes proporcionar a compreensão lógica dos porquês envolvidos nas técnicas operatórias. O cálculo mental, nem se fala, além de útil do ponto de vista prático, contribui para desenvolver o raciocínio, perceber padrões numéricos, fazer estimativas, etc.

6. Como a maioria de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir?

$\begin{array}{c} 16 + 8 \\ 10 + 6 + 4 + 4 \\ \hline 24 \end{array}$	$14 + 5 + 6$	$20 - 8$ $\begin{array}{r} 20 - 10 + 10 \\ 8 - 8 + 4 \\ \hline 6 + 6 = 12 \end{array}$
$\begin{array}{r} 34 - 22 \\ du \\ 34 \\ - 22 \\ \hline 12 \end{array}$	13×9 $10 + 3 \times 9$ $90 + 27 = 117$	$48 : 4$ $\begin{array}{r} 48 \\ 10 \quad 10 \quad 10 \quad 8 \\ \hline 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ \hline 12 \end{array}$
$180 + 43 + 20$	$135 + 270$ $100 + 30 + 5 + 200 + 50 + 20$ $300 + 100 + 5$ 405 $ed m$ 135 $+ 270$ 405	$610 - 254$
48×25	12×39	$480 : 24$

* Estamos trabalhando com estes alunos há 2 anos, a partir do curso de formação. Os saberes são "misturados".

Nome	P2
E-mail	

Idade	66	Sexo	Feminino ☒ Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	---	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição	Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☒ Privada ☐	1965

Graduação	Tipo de Instituição	Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	Serviço Social	1973

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	☒	Um	Dois	Três	Quatro

Pós-graduação	Tipo	Especialização ☒	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☒	Área/Tema	Administração Hospitalar		

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	☒	Um	Dois	Três	Quatro

Tempo de magistério (em anos)	28	Tempo de magistério municipal (em anos)	19
-------------------------------	----	---	----

Escola em que trabalha			
Bairro	Il. Montalena	Série/Ano	3º
Há quanto tempo?	4 meses	Número de alunos por classe	34

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino	Vespertino ☒	Noturno
--	----------	--	---------

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)					
Nenhum	Um	☒	Dois	Três	Quatro

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?					
Nenhum	Um	☒	Dois	Três	Quatro

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?			
Bastante	☒	Pouco	Muito Pouco

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)			
Bastante	Pouco	Muito Pouco	☒

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)	
1-	sequência numérica
2-	maior / menor - antecessor / sucessor
3-	adição / subtração / multiplicação /
4-	" " em "cálculo mental"
5-	Problemas envolvendo adição / subtração / multiplicação em compras, usando troco / dívida.

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?			
Bastante	☒	Pouco	Muito pouco

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Os alunos estão acostumados a "montar as contas e fazer" - lo. Torna-se mais difícil eles entenderem que, muitas vezes podemos fazer o cálculo mental sem a montagem ou contando com palitos.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Desenvolvimento do raciocínio.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

Para a prática na vida diária
como pequenas compras e trocas.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

Desenvolver a capacidade de concentração
 Organizar o raciocínio lógico
 Organizar a memória e induzir ao raciocínio
 Criar hábitos de organização de memória
 Desenvolver critérios coerentes

6. Como a maioria de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir?

$16 + 8 = 24$ $\begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ \hline 24 \end{array}$	$14 + 5 + 6 = 25$ $\begin{array}{r} 14 \\ + 5 \\ + 6 \\ \hline 25 \end{array}$	$20 - 8 = 12$ $\begin{array}{r} 20 \\ - 8 \\ \hline 12 \end{array}$
$34 - 22$ $\begin{array}{r} 34 \\ - 22 \\ \hline 12 \end{array}$	13×9 $\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline 117 \end{array}$	$48 : 4$ $\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 48} \\ \underline{08} \\ 0 \end{array}$
$180 + 43 + 20$ $\begin{array}{r} 180 \\ + 43 \\ + 20 \\ \hline 243 \end{array}$	$135 + 270$ $\begin{array}{r} 270 \\ + 135 \\ \hline 405 \end{array}$	$610 - 254$ $\begin{array}{r} 610 \\ - 254 \\ \hline 356 \end{array}$
48×25 $\begin{array}{r} 48 \\ \times 25 \\ \hline 240 \\ 96 \\ \hline 1200 \end{array}$	12×39 $\begin{array}{r} 39 \\ \times 12 \\ \hline 78 \\ 39 \\ \hline 468 \end{array}$	$480 : 24$ $\begin{array}{r} 20 \\ 24 \overline{) 480} \\ \underline{000} \end{array}$

Nome	P3
E-mail	

Idade	51	Sexo	Feminino ☒ Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	---	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão	
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	1980		

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	1981		

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Pós-graduação	Tipo	Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☒	Área/Tema			

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Tempo de magistério (em anos)	Tempo de magistério municipal (em anos)	13
-------------------------------	---	----

Escola em que trabalha	
Bairro	V. MADALENA
Série/Ano	
Há quanto tempo?	7 meses
Número de alunos por classe	~30

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☐ Vespertino ☒ Noturno ☐
--	---

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?			
Bastante ☐	Pouco ☐	Muito Pouco ☐	

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)			
Bastante ☐	Pouco ☐	Muito Pouco ☒	

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)	
1-	Tabuada
2-	Operações
3-	Cálculo mental
4-	Sequências Numéricas
5-	Problemas

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?			
Bastante ☐	Pouco ☐	Muito pouco ☒	Nunca ☐

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?
- ✓ Necessidade de representações no concreto.
 - ✓ Na relação do abstrato com a prática diária.
 - ✓ Capacidade de concentração.
 - ✓ Organização do raciocínio lógico.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

- Desenvolvimento do raciocínio lógico
- Estimulo a resolução de situações-problema
- Organização de memória
- Capacidade de concentração:
ler/ouvir $\rightarrow$ compreender.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

- Indução à solução de situações-problema, desenvolvendo estratégias coerentes, unidas, sequenciais.
- Organização de estratégias p/ resolução de problemas.
- Capacidade de

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

Professor:

- Auxiliar na organização dos conteúdos para resolução dos problemas

Aluno:

- Concentração / ler / ouvir
- Compreensão do problema antes de resolver

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

Nas três primeiras respostas, para não
visualizar a situação.

6. Como **a maioria** de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir?

$16 + 8$ $\begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ \hline 24 \end{array}$	$14 + 5 + 6$ $\begin{array}{r} 14 \\ + 5 \\ + 6 \\ \hline 25 \end{array}$	$20 - 8$ $\begin{array}{r} 20 \\ - 8 \\ \hline 12 \end{array}$
$34 - 22$ $\begin{array}{r} 34 \\ - 22 \\ \hline 12 \end{array}$	13×9 $\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline 117 \end{array}$	$48 : 4$ $\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 48} \\ \underline{08} \\ 0 \end{array}$
$180 + 43 + 20$ $\begin{array}{r} 180 \\ + 43 \\ + 20 \\ \hline 243 \end{array}$	$135 + 270$ $\begin{array}{r} 135 \\ + 270 \\ \hline 405 \end{array}$	$610 - 254$ $\begin{array}{r} 610 \\ - 254 \\ \hline 356 \end{array}$
48×25 $\begin{array}{r} 48 \\ \times 25 \\ \hline 1240 \\ 96 \\ \hline 1200 \end{array}$	12×39 $\begin{array}{r} 12 \\ \times 39 \\ \hline 108 \\ 36 \\ \hline 468 \end{array}$	$480 : 24$ $\begin{array}{r} 20 \\ 24 \overline{) 480} \\ \underline{480} \\ 00 \end{array}$

Nome	P4				
E-mail					

Idade	48	Sexo	Feminino ☒	Masculino		Estado de origem	SP
-------	----	------	--	-----------	--	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão	
Sim ☒ Não	Pública ☒ Privada			1980

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não	Pública	Privada ☒	Pedagogia	1985

Quantos momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais ☒

Pós-graduação	Tipo	Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim	Não ☒	Área/Tema		

Quantos momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

Tempo de magistério (em anos)	29	Tempo de magistério municipal (em anos)	29
-------------------------------	----	---	----

Escola em que trabalha			
Bairro	P. Madalena	Série/Ano	3º
Há quanto tempo?	29	Número de alunos por classe	34

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino	Vespertino ☒	Noturno
--	----------	--	---------

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)					
Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais ☒

Quantos deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?					
Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais ☒

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Bastante ☒ Pouco ☐ Muito Pouco ☐

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)

Bastante ☐ Pouco ☒ Muito Pouco ☐

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)

- 1- Composição e decomposição de números
- 2- Sequência numérica
- 3- Valor absoluto e relativo
- 4- Cálculo mental
- 5- 4 operações

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?

Bastante ☐ Pouco ☒ Muito pouco ☐ Nunca ☐

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Os alunos não têm o hábito de trabalhar com situações de cálculo mental, pois apresentam muita dificuldade para compreender diversas situações que envolvam raciocínio.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Os alunos deverão utilizar estratégias pessoais e socializá-las em diferentes procedimentos. Então os alunos poderão compreender que não existe apenas uma maneira de resolver uma questão.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

A discussão de procedimentos para a resolução de problemas, desde a leitura e análise da situação até a elaboração de procedimentos de resolução que envolvam simulações, tentativas, hipóteses, é fundamental quando o professor propõe situações em que os alunos devem apresentar resultados e validar seus procedimentos.

A valorização do processo de resolução, da construção de argumentos matemáticos pelos alunos.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

Papel do professor:

Proporcionar situações estudiais aos alunos para que desenvolvam estratégias de resolução de situações-problema pois estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses.

Além disso possibilita trabalhar com valores da vida cotidiana em que cálculos são mais complexos.

Papel do aluno

O aluno deve interpretar o enunciado da questão proposta, estruturar a situação apresentada, encontrar a solução e verificar se ela é adequada ou correta. Deverá desenvolver habilidades que permitam comparar diferentes caminhos para obter a solução, questionar a própria resposta, questionar o problema, formular outros com base em determinadas informações.

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

Funcionam como ferramentas de visualização que por si mesmas possibilitam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades gráficas.

No caso da calculadora, o aluno poderá selecionar a operação adequada, validar o resultado ou propor situações em que estimem o resultado de uma operação e verifiquem na calculadora se a antecipação estava correta ou não.

Os alunos devem ser incentivados a usar estratégias pessoais e compreenderem que não existe apenas uma maneira de resolver o problema.

O trabalho com cálculo mental, estimativas e procedimentos, colabora para o melhor entendimento das propriedades dos números e das operações e para o entendimento do algoritmo convencional.

Nas situações do cotidiano, as vezes não precisamos saber o resultado exato, mas estimar valores.

6. Como a maioria de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir?

$16 + 8$ $\begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ \hline 24 \end{array}$	$14 + 5 + 6$ $\begin{array}{r} 14 \\ + 5 \\ + 6 \\ \hline 25 \end{array}$	$20 - 8$ $\begin{array}{r} 20 \\ - 8 \\ \hline 12 \end{array}$
$34 - 22$ $\begin{array}{r} 34 \\ - 22 \\ \hline 12 \end{array}$	13×9 $\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ dificuldade na multiplicação (tabuada)	$48 : 4$
$180 + 43 + 20$ $\begin{array}{r} 180 \\ + 43 \\ + 20 \\ \hline 243 \end{array}$	$135 + 270$ $\begin{array}{r} 135 \\ + 270 \\ \hline 405 \end{array}$	$610 - 254$ $\begin{array}{r} 610 \\ - 254 \\ \hline 356 \end{array}$ dificuldade na DEZENA
48×25	12×39	$480 : 24$

Nome	P5	
E-mail		

Idade	53	Sexo	Feminino ☒	Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	--	------------------------------------	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição			
Sim ☐ Não ☒	Pública ☐	Privada ☐	Ano de conclusão	

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	PEDAGOGIA
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐	Privada ☒	Ano de conclusão	1983

Quantos momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?

Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐	Cinco ou mais ☒
--	-----------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---------------------------------	---

Pós-graduação	Tipo	Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☐	Área/Tema			

Quantos momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?

Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐	Cinco ou mais ☐
---------------------------------	-----------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---------------------------------	--

Tempo de magistério (em anos)	Tempo de magistério municipal (em anos)	19
-------------------------------	---	----

Escola em que trabalha			
Bairro	JARAGUÁ	Série/Ano	2º
Há quanto tempo?	13 ANOS	Número de alunos por classe	31

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☒	Vespertino ☐	Noturno ☐
--	--	-------------------------------------	----------------------------------

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)

Nenhum ☐	Um ☒	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐	Cinco ou mais ☐
---------------------------------	--	-------------------------------	-------------------------------	---------------------------------	--

Quantos deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?

Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☒	Quatro ☐	Cinco ou mais ☐
---------------------------------	-----------------------------	-------------------------------	--	---------------------------------	--

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Bastante ☐	Pouco ☒	Muito Pouco ☐
-----------------------------------	---	--------------------------------------

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)

Bastante ☐	Pouco ☒	Muito Pouco ☐
-----------------------------------	---	--------------------------------------

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)

- 1- SITUAÇÃO PROBLEMA
- 2- COMPARAÇÃO ENTRE QUANTIDADES
- 3- MATERIAL DOURADO
- 4- SEQUENCIA NUMÉRICA
- 5- TABELA E GRÁFICOS

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?

Bastante ☒	Pouco ☐	Muito pouco ☐	Nunca ☐
--	--------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Bastante que todos os alunos se envolvam com a atividade e alguns em casa o que sabem. Usar estratégias que auxiliem os alunos com dificuldades e que dispõem de muito poucos recursos a avançar em seus procedimentos.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

As aprendizagens do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas, levam os alunos a estabelecer relações e tirar conclusões a partir dessas relações, amplia a compreensão dos conceitos numéricos e desenvolvem estratégias pessoais na resolução de problemas.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

Com o objetivo de utilizar o cálculo mental como função social, onde fora da escola o aluno possa estabelecer relações com o que foi aprendido dentro da escola e resolver as situações cotidianas.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

O professor deve ser o mediador na resolução de cálculo mental e de resolução de problemas, levando o aluno a refletir e buscar soluções, valorizando as estratégias pessoais elaboradas pelos alunos para enfrentar as situações formuladas. Não deve adiantar soluções e nem deixar o aluno entregue a si mesmo, e sim a partir de seus pequenos avanços levá-lo a observar, analisar, estabelecer relações, orientando-o, assim, para chegar à descoberta dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades propostas.

Os alunos devem participar indagando, dialogando, observando, analisando, expondo seus raciocínios e compará-los concluindo sobre os mesmos.

Nome	P6
E-mail	

Idade	29	Sexo	Feminino ☒ Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	---	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão	
Sim ☒ Não ☐	Pública ☒ Privada ☐	1999		

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	Pedagogia	2002	

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Pós-graduação	Tipo	Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☒	Área/Tema			

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?				
Nenhum ☐	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Tempo de magistério (em anos)	10	Tempo de magistério municipal (em anos)	7
-------------------------------	----	---	---

Escola em que trabalha			
Bairro	Frágua	Série/Ano	3 ^a
Há quanto tempo?	6 anos	Número de alunos por classe	34

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☒ Vespertino ☐ Noturno ☐
--	---

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?				
Nenhum ☒	Um ☐	Dois ☐	Três ☐	Quatro ☐ Cinco ou mais ☐

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Bastante ☐	Pouco ☐	Muito Pouco ☐
-----------------------------------	--------------------------------	--------------------------------------

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)

Bastante ☐	Pouco ☐	Muito Pouco ☒
-----------------------------------	--------------------------------	---

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)

1- operações básicas
2- situações-problema
3- sistema monetário
4- tratamento da informação
5- geometria

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?

Bastante ☒	Pouco ☐	Muito pouco ☐	Nunca ☐
--	--------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

De maneira geral os professores encontram diversos obstáculos para que suas aulas sejam dadas com qualidade.

No meu caso e especificamente com o assunto cálculo mental, destaco:

- grande número de alunos na sala;
- falta de tempo para eu estudar e me aprofundar em temas pertinentes (acúmulo de cargo);
- indisciplina e grandes dificuldades dos alunos.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Penso que o trabalho com cálculo mental propicia a compreensão da criança no que diz respeito a utilização de métodos mais adequados na resolução de diferentes situações propostas, aperfeiçoando seus métodos pessoais e ajudando a entender as formas de regras.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

- ampliar o repertório básico das operações
- decidir sobre estratégias de resolução e verificação de situações propostas
- identificar regras matemáticas

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

O professor como mediador e orientador do processo educacional deve propor atividades em que os alunos coloquem em jogo tudo o que sabem e aprimorem seus conceitos.

No caso de matemática, as atividades devem procurar estimular os alunos a aperfeiçoarem ideias e procedimentos conhecidos para contar, comparar, estimar, ordenar, descobrir regularidades, propriedades e padrões que ajudem na ampliação dos conceitos propostos para a série.

Nome	P7				
E-mail					

Idade	33	Sexo	Feminino ☒	Masculino	Estado de origem	SP
-------	----	------	--	-----------	------------------	----

CEFRAN

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão		
Sim ☒ Não	Pública ☒	Privada	1995		

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não	Pública	Privada ☒	Pedagogia	2001

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?						
Nenhum	☒	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

Pós-graduação	Tipo	Especialização ☒	Mestrado	Doutorado
Sim ☒ Não	Área/Tema	Pós-graduação em Matemática		

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?						
Nenhum	Um	☒	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

Tempo de magistério (em anos)	14	Tempo de magistério municipal (em anos)	10
-------------------------------	----	---	----

Escola em que trabalha	Bairro		Série/Ano
	Paraguá		2º
Há quanto tempo?	8 anos	Número de alunos por classe	26

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☒	Vespertino	Noturno
--	--	------------	---------

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)						
Nenhum	Um	☒	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

Não o curso todo

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?						
Nenhum	Um	☒	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Bastante	Pouco	☒	Muito Pouco
----------	-------	-------------------------------------	-------------

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)

Bastante	Pouco	☒	Muito Pouco
----------	-------	-------------------------------------	-------------

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)

- 1- Sequências numéricas
- 2- Cálculo (adição)
- 3- Situações problemas
- 4-
- 5-

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?

Bastante	☒	Pouco	Muito pouco	Nunca
----------	-------------------------------------	-------	-------------	-------

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

No começo de 1º ano, os alunos ainda estão incorporando os números e a capacidade para cálculos mentais é com quantidades pequenas. Diariamente coloco questões como: - Se ontem foi dia 20, hoje é? (domar 1), - Quantos dias vamos ficar em casa? (sábado, domingo, ou se tem feriado ou reunião). - Resolver primeiro mentalmente adições para depois usar o material concreto. A maior dificuldade é fazer com que todos os alunos "pensem", pois grande parte apenas repete o que alguns colegas responderam.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

É muito importante, pois desenvolve o raciocínio, em outras matérias os alunos desenvolvem mais rapidez de pensamento.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

Objetivos para cálculo mental:
- Desenvolver o raciocínio, a compreensão das grandezas (quanto junto: aumento, etc)

Objetivos para resolução de problemas:
- Desenvolver o raciocínio
- Compreender grandezas (mais, menos, maior, menor, juntar)

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

O papel do professor é organizar situações, atividades, em que o aluno possa desenvolver o seu raciocínio lógico-matemático de forma a ajudá-lo nas situações cotidianas. Fazer a ligação do aprendizado escolar com as exigências do dia-a-dia.

O papel do aluno é buscar soluções para resolver as situações problemas propostas pelo professor

5. Quais as relações que você estabelece entre os itens abaixo?

Cálculo mental	Cálculo exato	Cálculo aproximado	Cálculo escrito	Algoritmo	Uso da calculadora
----------------	---------------	--------------------	-----------------	-----------	--------------------

O cálculo mental pode apresentar um resultado exato ou aproximado.

O domínio do Algoritmo diminui a possibilidade do erro, principalmente se o aluno desenvolveu bem o cálculo mental (que também agiliza a resolução).

Aprender a usar a calculadora é essencial nos dias de hoje. É mais um recurso, que na sala de aula pode ajudar na correção de cálculos ou para resolver uma situação problema, de acordo com o objetivo proposto.

Podemos então dizer que o aluno deve aprender a calcular de diversas maneiras e usar a mais adequada no momento de sua precisão. Um tipo de cálculo não é mais importante que o outro, eles se interagem e se completam.

6. Como a maioria de seus alunos resolveria cada uma das situações a seguir?

16 + 8 Com tracinhos ou palitos.	14 + 5 + 6 Com tracinhos ou palitos	20 - 8 Com tracinhos ou palitos
34 - 22 "	13 X 9	48 : 4
180 + 43 + 20	135 + 270	610 - 254
48 X 25	12 X 39	480 : 24

Nome	P8		
E-mail			

Idade	43	Sexo	Feminino ☒ Masculino ☐	Estado de origem	SP
-------	----	------	---	------------------	----

Curso de magistério	Tipo de Instituição		Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	1985	

Graduação	Tipo de Instituição		Curso	Ano de conclusão
Sim ☒ Não ☐	Pública ☐ Privada ☒	pedagogia	1989	

Quanto momentos do seu curso de graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	Um	Dois	Três ☒	Quatro	Cinco ou mais

Pós-graduação	Tipo		Especialização	Mestrado	Doutorado
Sim ☐ Não ☒	Área/Tema				

Quanto momentos do seu curso de pós-graduação foram reservados à discussão sobre cálculo mental em sala de aula?					
Nenhum	Um	Dois	Três	Quatro	Cinco ou mais

Tempo de magistério (em anos)	25	Tempo de magistério municipal (em anos)	23
-------------------------------	----	---	----

Escola em que trabalha			
Bairro	Jardim Matern	Série/Ano	4 ^a
Há quanto tempo?	13 anos	Número de alunos por classe	33

Período(s) de trabalho como professor(a)	Matutino ☒ Vespertino ☐ Noturno ☐
--	---

Participação em cursos de formação que trataram do assunto cálculo mental em sala de aula (últimos 15 anos)					
Nenhum	Um	Dois	Três ☒	Quatro	Cinco ou mais

Quanto deles foram oferecidos pela Rede Municipal de Educação?					
Nenhum	Um	Dois	Três ☒	Quatro	Cinco ou mais

O quanto esses cursos de formação o(a) ajudaram a desenvolver o trabalho com cálculo mental em sala de aula?			
Bastante ☒	Pouco ☐	Muito Pouco ☐	

Com que frequência consulta(ou) os PCN's a respeito de cálculo mental? (últimos 15 anos)			
Bastante ☐	Pouco ☒	Muito Pouco ☐	

Escreva os cinco assuntos mais abordados em suas aulas de matemática (do mais abordado para o menos abordado)			
1-	álgebra		
2-	geometria		
3-	frações		
4-	percentagem		
5-	geometria		

Em sala de aula, com que frequência o cálculo mental é utilizado por seus alunos?			
Bastante ☐	Pouco ☒	Muito pouco ☐	Nunca ☐

1. Quais as dificuldades que você tem enfrentado no trabalho com cálculo mental em sala de aula?

Acho que não tenho as melhores condições para trabalhar com cálculo mental, então quando chego à 4^a ou 5^a série, chego de "novo". Eu sou muito acostumado a ser a porta-voz da turma, não consigo os números de muito jeito e depois compartilhar estratégias, pois não consigo estimular a pensar de outras maneiras, de fazer ideias, para por em somando de preferir eu abordo o conteúdo para confirmar o resultado.

2. Em sua opinião, qual a importância do trabalho com cálculo mental em sala de aula?

É fundamental o trabalho com cálculo mental, pois desenvolve a autonomia no aluno. O aluno se sente mais seguro e encontra mais possibilidades de resolver, raciocina melhor e entende melhor o que está fazendo, não apenas decorar. Se cada um explica para quem de perto, troca ideias com o outro, todos aprendem mais rapidamente, pois ampliam o seu repertório. Não vale apenas muito o cálculo mental, a calculadora e pensar a conta armada.

3. Com quais objetivos você propõe situações de cálculo mental e de resolução de problemas?

Em quase todos os momentos há alguma tipo de cálculo ou estimativa. Então, propõe problemas que desenvolvam o raciocínio lógico e quando surge uma oportunidade de cálculo, busco primeiro resolver pelo cálculo mental e fazer com que os alunos troquem e justifiquem as estratégias. Também proponho situações específicas para trabalhar estratégias de cálculo mental. Entre de 20 em 20, de 50 em 50, decompor números, somar os números que somam 10, 100, 1000, etc.

4. Comente sobre o papel do professor e do aluno nas situações de cálculo mental e de resolução de problemas.

É mais difícil o professor trabalhar com situações de problemas e cálculo mental porque "dá mais trabalho". Ou seja, o aluno faz perguntas em sala de aula, o professor ouve e tenta ajudar de novo, comparar, levantar possibilidades, etc., e muito trabalho. Mas a conta armada na lousa é muito mais fácil. É só o professor mostrar a única resposta e todos copiam, não acho que isso ajude o aprendizado. O aluno fica empurrado, ele é um mero copista e repetidor, não está realmente pensando: analisando, comparando, justificando, melhorando por meio permanente de estratégias. O professor tem de saber ouvir, dar chance para os alunos falarem, acompanhar suas ideias e deixá-los resolver.

ANEXO D - Questionário para a educadora/formadora.

Questões para entrevista

Fale um pouco do seu trabalho na rede municipal de São Paulo, tanto em sala de aula como nos órgãos centrais. Se possível, mais dirigido para Educação matemática.

A minha pergunta de pesquisa refere-se ao valor e o papel dado ao cálculo mental no processo de ensino-aprendizagem de matemática nas séries iniciais na rede municipal de São Paulo.

1. Como esse assunto surgiu na sua vida profissional?
2. O cálculo mental como trabalho em sala de aula enfrentou e tem enfrentado algumas dificuldades e limitações. Fale um pouco sobre isso.
3. Você fez parte das organizações curriculares. Em que época e de que modo o cálculo mental foi discutido?
4. Você percebeu que, após os cursos de formação, os professores ficavam mais motivados a trabalhar o cálculo mental? Atualmente, como eles lidam com este assunto junto aos alunos?
5. Que outros aspectos você destacaria a respeito da importância do cálculo mental na aprendizagem da matemática?

ANEXO E - Entrevista textualizada com a educadora/formadora.

Transcrição da entrevista - Textualização

Entrevistada: Regina Célia Santiago do Amaral Carvalho

Assunto: Cálculo mental nos cursos de formação da rede municipal

Eu sou formada em matemática na década de 70, fiz pedagogia, psicopedagogia. O movimento desse olhar para Matemática, dessas possibilidades de cálculo mental e para essas possibilidades de ter outras referências de cálculo vem de um olhar de 1975 quando eu resolvi olhar pessoas analfabetas. Eu tive oportunidade de trabalhar com adultos e eles faziam muito bem os cálculos e o cálculo que eles faziam não tinha nenhum número que subia nem descia. O cálculo deles é mental e muito bem estruturado, foi aí que me encantou para a busca disso. Eu trabalhei desde 1970 na Prefeitura, me aposentei em 98 e continuo como assessora pedagógica na Prefeitura. Trabalhei como professora e coordenadora em escola particular, dei cursos em escolas alemãs, fui professora de faculdade. Eu também trabalhei pro Covas. Comecei em 1992, tinha uma discussão por conta do tema gerador, que é a da administração do Paulo Freire, mas o cálculo mental já era sugerido em administrações anteriores. E posteriormente a discussão continuou na gestão Erundina e Maluf do Pitta, mas que o grupo que trabalhava em DOT (Departamento de Orientação Técnica) se preocupava bastante com essa questão do cálculo mental. Fui coordenadora da área de matemática em 1993, na época do Maluf.

Sempre houve cursos e nos documentos escritos desses cursos, que foram organizadores de área, falava-se do cálculo mental e se falava também nas propostas de aplicação do conhecimento com tema-geradores. Eu tive experiências em que eu dei muitos cursos para os grupos da prefeitura durante o tempo em que eu coordenava o grupo em DOT. DOT que na época chamava-se CONAE e se chamou DEPLAN (Departamento de Planejamento e Orientação) depois Coordenadoria dos NAES (Núcleo de Ação Educativa) e voltou novamente a se chamar DOT (Departamento de Orientação Técnica). Existem atualmente os DOTzinhos, os DOT's que funcionam nas regionais, que são treze. E nesse momento da época de 1995/1996 tinham vários cursos, a gente percorria as regionais e também eles faziam cursos na própria secretaria e nós dávamos ênfase em cálculo mental, mas sempre houve alguns momentos em que o pessoal tinha confusão também com cálculo mental. Os professores faziam um pouco essa leitura de que cálculo mental é responder as coisas rápidas,

não no sentido da articulação do pensamento, das estratégias, de estabelecer relações e de busca de processos. E o cálculo mental pode ser até escrito, ele pode ter elaborações de registros diferenciados, não é? Mas ele articula um movimento diferenciado, a proposta é que ele permita um movimento de pensar da criança. Mas os professores tinham um certo medo, mas agora melhorou muito porque a própria formação deles não é dessa, é de técnicas. Mais recentemente, de uns anos pra cá, tem se articulado bastante isso e até porque têm-se pesquisas voltadas para a questão da escrita de números, das relações numéricas e isto tem, de uma certa forma, cutucado e incentivado a procura do professor pelo cálculo mental. Ele fica com uma certa curiosidade, se ele tem uma questão que acha que a criança não vai aprender, ele acha que precisa ensinar e ele também acha que o cálculo mental tem que ficar ensinando. O cálculo mental... claro, como tudo você pode estar ensinando, mas é um ensinar onde você articula com a hipótese do outro e com as intervenções, com as intervenções você vai ampliando, as intervenções é que fazem o encaminhamento, inclusive de situações mais convencionais. Mas do ponto de vista do professor, ainda é muito forte ele trazer a convencionalidade que ele tem sobre as questões da matemática e repassar para as crianças. O algoritmo ainda é muito forte. O algoritmo convencional, por que quando eu estou falando em algoritmo eu posso estar pensando em algoritmo não convencional. É que a Kamii coloca o algoritmo como uma coisa convencional e outros teóricos você até faz essa pontuação. E a gente tem colocado na prefeitura, convencional e não convencional. E para trabalhar a questão do não convencional, tem que trabalhar a questão dos erros tal, que é muito significativo. As próprias avaliações têm questões que nos permitem perceber quais as crianças que realizam cálculos pelo algoritmo ou pelo cálculo mental. Na Prova Brasil a gente vê muito essa relação até do medo da criança usando seu cálculo mental, mas como ele se preocupa com determinada escrita acaba entrando nos distratores. Os distratores, na Prova Brasil, são as questões que não são as adequadas, elas são inadequadas, mas ela tem uma proximidade com a questão que seria correta. E a intenção da prova é colocar essa proximidade pra perceber, quando você faz esse diagnóstico, o caminho da criança, perceber nas questões que são de cálculo se a criança está indo mais pro cálculo mental ou pra convencionalidade de escrita. E percebemos que a criança tenta fazer cálculo mental, mas volta pro algoritmo aí você vê que ela acaba errando por conta de estar presa à convencionalidade. É preciso ouvir as crianças! Por exemplo: se eu pego um milhar, tenho que somar 1240 com 300, ela pode elaborar um cálculo mental e saber que 1200 com 300 igual a 1500, e com 40 dá 1540, só que como ela necessita da escrita, esse 300, ela acaba organizando na sua escrita um 300 embaixo do 1000 e

realizando a adição de cada algarismo numa conta armada. E aí você percebe como as crianças pensam ou são conduzidas a pensar, existe uma leitura que você pode fazer da sala de aula. Se o professor não está articulando bem isso do cálculo mental, vai aparecer nas ideias das crianças, na maneira como estão pensando e buscando resolver suas questões. A criança até tem e traz essa necessidade do cálculo mental, mas o professor tem que saber articular muito isso, tem que saber ouvir o que as crianças têm a dizer, prestar atenção ao conhecimento que trazem, às relações que estabelecem e trocar isso com o grupo. A criança, então, às vezes, tem medo de seguir isso se o professor não tem um projeto voltado a isso.

O cálculo mental está mais difundido, as pessoas estão mais voltadas a ele e que não vem de um fruto de agora, mas que vem de outros caminhos, de histórias atrás, vem de coordenadores, um fazendo essa articulação com o outro e isso aí se tornou um pouco mais significativo.

Atualmente tem cursos de formações optativos, são aqueles onde as pessoas têm pontuação e os cursos de pólos. Eu faço os cursos de pólos, você atende na hora de JEI, jornada integral, e você atende coordenadores e professores e também dá um olhadinha nas salas de aula. Eu sou muito favorável a isso e estou com um grupo esse ano e dá pra fazer uma leitura boa e até um relato. Converso com o grupo sobre os avanços e a maioria relata a dificuldade nessa permissão do professor para o cálculo mental, de usar estratégias diferenciadas. Os cursos são uma forma de acompanhamento, onde ele tem alguém para dialogar e relatar suas angústias.

Pessoas que não participaram muito de cursos tem essa visão de que o modelo tem que ser escrito e único, num padrão de escrita, ainda falando em um número embaixo do outro, o vai um, se é de mais ou é de menos. Para quem tem feito curso isso tem melhorado bastante, se articulado de maneira diferenciada porque está participando de outras falas de outras nomenclaturas, de outros procedimentos. Então tem ampliado seu vocabulário e percebendo essas questões, mas ainda é forte. Num curso que eu dei, de 15, 7 se aproximaram de operações e começaram a conversar e eu perguntei: mas o que é operações? Vocês põem continha na lousa? *É, a gente põe.* Vocês discutem? *É, a gente discute quem acertou e quem errou.* Então é forte ainda isso. *Às vezes, a gente pergunta quem fez diferente.* E vocês têm medo desse diferente, né? *É, temos.*

Isso também tem a ver com formação. Eu não diria nem que é só com formação matemática, porque eu trabalho também com fundamental 2 e isto também aparece. Alguns trabalham com cálculo mental e outros não. O trabalho com cálculo mental para o professor é a sensação de solto, dele não poder controlar e daí a insegurança. Ele pensa: eu vou saber fazer as operações

de cálculo se tiver colocado numa norma cultural escrita convencional e mesmo as resoluções de problema. A partir de 2005, aqui na prefeitura, tem se trabalhado as questões dos campos conceituais do Vergnaud. Eu diria que a Kamii tem uma questão interessante pro cálculo mental, acho que ela é atualizada, por mais que ela tenha feito suas proposições há muitos anos atrás. Quem foi a primeira autora a trabalhar cálculo mental foi a Maria do Carmo com Imenes e Jacubo na revista de ciências. A Maria do Carmo foi uma das pioneiras no cálculo mental.

Os professores ficam mais motivados quando tem mais clareza do que seja cálculo mental e de como trabalhar com ele. Eles têm clareza quando as crianças curtem. Quando eles percebem que as crianças trazem e pedem mais, aí eles começam a ficar motivadíssimos. Na verdade é o professor que motiva quando a criança começa a curtir, quando a aula fica pedindo aquela ação. Esse é um motor de mudança do professor. É importante que o professor leve e traga as angústias nos cursos, porque ele vai mudando pelas atitudes da prática. A prática faz você ter articulações de mudança.

Pela fala do próprio número podemos perceber que, por exemplo, ao pensar no 24×16 , o 24 é 20 e 4 e o 16 é 10 e 6. Se um 10 é 120, dois 10 é 140 (ela mostrou quadro de números sobrepostos). E dez 24? É 240. O caminho é composição. A decomposição e a composição favorecem a compreensão dos números e realizar cálculos. A criança se apóia no modo de falar dos números para pensar sobre eles. E também se baseiam nos números que são conhecidos, que são do universo da criança. Escrever 2010 é mais fácil que escrever 35. É mais familiar. A aproximação no cálculo é muito importante. Não permitir que a criança pequena trabalhe com números maiores é não permitir que ela trabalhe com cálculo mental. As escolhas *do que* ensinar e *como* ensinar influenciam o nível de conhecimento matemático das crianças. Eu tenho percorrido o Brasil inteiro e visto grandes mudanças aqui na Prefeitura ao longo dos anos. Mas nas particulares, de maneira geral, ainda há ênfase na conta armada. Exemplo: $9999 + 999 + 9$. É um exemplo da prova Brasil, a criança poderia fazer $10000 + 998 + 9$, por exemplo, mas muitos armaram para resolver. As crianças não precisam pensar em cálculo mental somente de cabeça, podem escrever as etapas do cálculo mental para registrar as etapas do seu pensamento, podem voltar e conferir como pensaram e mostrar esse caminho aos outros colegas. O cálculo mental permite o próprio controle dos resultados do algoritmo. Numa divisão por algoritmo convencional, por exemplo, as crianças repetem oralmente os passos da resolução, mas não conseguem explicar claramente o porquê de cada etapa. É importante a criança dizer como pensa, deixá-la refletir, ver as contradições, analisar,

comparar, para ter um conhecimento com compreensão dos números, do sistema de numeração e das operações.

Eu tenho uma ideia boa de como o cálculo mental é trabalhado atualmente. O cálculo mental é usado pouco ainda sim e a estrutura é porque tem que mexer com o educador. O educador tem que ser sensibilizado a isso e ao mesmo tempo na sua sensibilização ele levar para o aluno e o aluno vai trazer esse gosto e aí ele acaba se transformando e modificando. O professor precisa perceber que o cálculo mental é importante primeiro para ele ser cidadão. O que é esse 24×16 ? Ele pode ser 16 prestações de alguma coisa. Eu dei aula na faculdade para Pedagogia e as professoras morriam de medo de lidar com cálculo mental. Eu falava que era para gente vivenciar primeiro para nós. Professores que propõem problemas somente de adição e depois somente de subtração, está muito atrelado ao formato de uma técnica operatória. Está inserido em uma situação de técnica e não de uma articulação do conceito. Esse movimento conceitual, esse movimento da ideia que transita pelas relações operatórias que é a parte-todo. A relação soma-subtração é a parte-todo. No cálculo mental eu tenho que ler e interpretar esse código de escrita com a relação numérica. É mais fácil pensar no $27 - 19$ como: 19 para 20 é 1 e 20 para 27 é 7, então 19 para 27 é 8. No algoritmo a criança teria que fazer trocas e seguir a regra. E pode não perceber que o resultado não está correto pois não desenvolveu, antes, habilidades de cálculo mental e estimativa.