UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

FABIO ORFALI

**A conciliação das ideias do Cálculo com o
currículo da Educação Básica: o raciocínio
covariacional**

São Paulo
2017

FABIO ORFALI

**A conciliação das ideias do Cálculo com o
currículo da Educação Básica: o raciocínio
covariacional**

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São

Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nílson José Machado

São Paulo

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Catálogo na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

-
375.31
O67c | Orfali, Fabio
A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da educação básica: o raciocínio covariacional / Fabio Orfali; orientação Nílson José Machado. São Paulo: s.n., 2017.
214 p.; tabs.; anexos

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Cálculo diferencial e integral 2. Ensino e aprendizagem 3. Currículo de Ensino Médio 4. Educação escolar básica I. Machado, Nílson José, orient. |
|----------------|---|
-

Nome: ORFALI, Fabio

Título: A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional.

Tese apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Doutor em Educação.

Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em ____ / ____ / 2017

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

DEDICATÓRIA

Para minhas duas meninas, os grandes amores da minha vida, minha esposa Raquel e minha filha Laura, eternas fontes de inspiração, pelo apoio e compreensão em todos os momentos desta caminhada.

Aos meus pais, Hélio e Alba, meus grandes modelos de integridade, por todo amor e dedicação que me fizeram chegar até aqui.

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Ao meu orientador, Professor Nílson, exemplo como professor e como ser humano, capaz de agregar tantas pessoas especiais, dispostas a compartilhar experiências e saberes, pela enorme generosidade e amizade sincera que sempre tornaram o caminho bem menos árduo.

AGRADECIMENTOS

Aos membros da banca de qualificação, Professora Cristina Cerri, minha eterna orientadora, e Professor Ubiratan D'Ambrosio, modelo para qualquer educador matemático, pelas valiosíssimas contribuições para o trabalho.

Aos professores do Insper, Paulina, Luciano, Leonidas, Miranda, Hashimoto, Hage e Ayres, por dividirem seus sucessos e inquietações na busca incansável pela construção de um curso de Engenharia realmente inovador. Sua competência e amizade têm sido uma contínua fonte de inspiração.

Ao meu ex-aluno e atual colega de profissão Fábio Pelicano, professor brilhante e amigo para toda hora, cuja existência me lembra sempre de como é gratificante ser professor, por todos os projetos que já realizamos juntos.

Aos amigos do SEMA e SEED, Pastore, Ana Cláudia, Marisa, Marília, Alessandro, Márcia, Cris Bonomi, Lisbeth, João e tantos outros, pelas ricas trocas de ideias e pelos momentos tão agradáveis nas tardes de sexta-feira.

À amiga Ana Helena, pela cuidadosa leitura dos originais e pelas longas discussões sobre ensino de Cálculo.

Aos amigos Maria Kelly e Tadeu pela ajuda com a Estatística.

Ao Insper, em especial Carolina e Irineu, pela compreensão, incentivo e apoio durante a elaboração do trabalho.

Às amigas Adair e Cármen, pelo modelo como pesquisadoras e pelo companheirismo nos congressos de Educação Matemática.

A toda a minha família, Cristina e Marina, Júlia, Andrea, Ricardo e Gabriela, dona Zelma e Valéria, Marcelo e Peter, pela torcida, incentivo e por eu sempre poder contar com vocês.

E, finalmente, a todos os meus alunos, antigos, atuais e futuros, por todo o carinho e reconhecimento e, principalmente, por nunca deixarem me esquecer do que realmente importa em Educação.

Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...

Rubem Alves

RESUMO

ORFALI, F. **A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional**. Tese (Doutorado). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2017. 214 p.

A ausência do Cálculo Diferencial e Integral no currículo do Ensino Médio no Brasil, diferentemente do que acontece em outros países, constituiu-se na motivação original para este trabalho. Considerando as finalidades mais gerais da escola básica apresentadas nos documentos oficiais, mostramos o aporte que o ensino de Cálculo pode conduzir à formação de nossos jovens, favorecendo uma visão mais integrada das disciplinas e o desenvolvimento da capacidade de compreender e interpretar fenômenos. Trazer o estudo do Cálculo para a escola básica, porém, não pode significar uma antecipação do que é feito nos cursos universitários, como acontecia no Brasil há algumas décadas. Pelo contrário, a abordagem deve se basear nas ideias fundamentais do Cálculo, como variação, aproximação e proporcionalidade, que já estão presentes no programa da escola básica. Para tanto, apresentamos o raciocínio covariacional, definido como o conjunto de atividades cognitivas envolvidas na análise coordenada das variações de duas grandezas interdependentes. Construindo uma trajetória que começa nas séries iniciais, chega às grandezas proporcionais, perpassa todo o estudo das funções e se estende até o final do Ensino Médio, mostramos que o modelo representado pelo raciocínio covariacional pode nortear o processo de fortalecimento das ideias do Cálculo no currículo da escola básica. Para ter uma noção do cenário atual, avaliamos o nível de raciocínio covariacional de 66 alunos recém-formados no Ensino Médio brasileiro, aprovados em um competitivo exame seletivo para ingresso na universidade. A enorme dispersão dos resultados indicou a pouca consistência do atual programa de nossa escola básica em relação ao desenvolvimento do raciocínio covariacional. Aproveitando o estudo realizado, extrapolamos o contexto da escola básica para avaliar a relação entre o nível inicial de raciocínio covariacional dos alunos e seu desempenho na disciplina de Cálculo na universidade. Os resultados sinalizam para o efeito positivo que um trabalho mais efetivo com o raciocínio covariacional pode ter no enfrentamento das dificuldades vividas por alunos e professores nas disciplinas de Cálculo do ensino superior.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; ensino e aprendizagem; currículo de Ensino Médio; educação escolar básica; ideias fundamentais; raciocínio covariacional.

ABSTRACT

ORFALI, F. **The conciliation of Calculus ideas with the K-12 curriculum: the covariational reasoning.** Doctoral thesis. São Paulo: School of Education, University of São Paulo, 2017. 214 p.

The absence of Differential and Integral Calculus in Brazilian high school syllabus, differently from what happens in other countries, has been the main motivation to develop this thesis. Considering the most general objectives of the K-12 education presented in the official documents, we hereby demonstrate the robust contribution of teaching Calculus to the secondary school students, by offering an integrated discipline overview, and the development of the ability of understanding and interpreting phenomena. However, the introduction of the study of Calculus to secondary school should not be an anticipation of what is developed in the university courses, as it used to be some decades ago in Brazil. The approach, on the other hand, should be based on the Calculus fundamental ideas, such as: variation, approximation and proportionality, which are already present in the K-12 curriculum. Therefore, we described the covariational reasoning, which is defined as the cognitive activities involved in the coordinated analysis of two interdependent quantities' variations. We have designed a track using a covariation framework, starting in elementary school, which then achieves the study of proportionality and functions, and extends up to the end of high school, resulting in the strengthening of the Calculus ideas in the curriculum. In order to have a general view of the current scenario, we evaluated the covariational reasoning level of 66 recent graduated high school students in Brazil, who were approved in a high competitive exam in order to enter university. As a result, we detected an impressive lack of consistency regarding the development of covariational reasoning in the secondary school curriculum. Moreover, we could evaluate the relation between the initial students' covariational reasoning level and their understanding of Calculus in the university. Our results indicate that fostering covariational reasoning may effectively lead to a positive influence, when dealing with difficulties faced by students and faculty in Calculus courses at the university level.

Keywords: Differential and Integral Calculus; teaching and learning; high school curriculum; K-12 education; fundamental ideas; covariational reasoning.

RESUMEN

ORFALI, F. **La conciliación de las ideas del Cálculo con el currículo de la Educación Básica: el razonamiento covariacional**. Tesis (Doctorado). São Paulo: Facultad de Educación, Universidad de São Paulo, 2017. 214 p.

La ausencia del Cálculo Diferencial e Integral en el currículo de la enseñanza secundaria en Brasil, a diferencia de lo que sucede en otros países, se ha constituido en la motivación original para este trabajo. Considerando las finalidades más generales de la escuela básica presentadas en los documentos oficiales, mostramos el aporte que la enseñanza de Cálculo puede conducir a la formación de nuestros jóvenes, favoreciendo una visión más integrada de las disciplinas y el desarrollo de la capacidad de comprender e interpretar fenómenos. Traer el estudio del Cálculo para la escuela básica, sin embargo, no puede significar una anticipación de lo que es hecho en los cursos universitarios, como ocurría en Brasil hace algunas décadas. Por el contrario, el enfoque debe basarse en las ideas fundamentales del Cálculo, como variación, aproximación y proporcionalidad, que ya están presentes en el programa de la escuela básica. Para ello, presentamos el razonamiento covariacional, definido como el conjunto de actividades cognitivas involucradas en el análisis coordinado de las variaciones de dos magnitudes interdependientes. Construyendo una trayectoria que comienza en los cursos iniciales, llega a las magnitudes proporcionales, incluyendo todo el estudio de las funciones y se extiende hasta el final de la educación secundaria, mostramos que el modelo representado por el razonamiento covariacional puede orientar el proceso de fortalecimiento de las ideas del Cálculo en el currículo de la escuela básica. Para tener una idea del escenario actual, evaluamos el nivel de razonamiento covariacional de 66 alumnos recién graduados en la enseñanza media brasileña, aprobados en un competitivo examen selectivo de ingreso en la universidad. La enorme dispersión de los resultados indicó la poca consistencia del actual programa de nuestra escuela básica en relación al desarrollo del razonamiento covariacional. Aprovechando el estudio realizado, extrapolamos el contexto de la escuela básica para evaluar la relación entre el nivel inicial de razonamiento covariacional de los alumnos y su desempeño en la disciplina de Cálculo en la universidad. Los resultados indican un efecto positivo que un trabajo más efectivo con el razonamiento covariacional puede tener en el enfrentamiento de las dificultades vividas por alumnos y profesores en las disciplinas de Cálculo de la enseñanza superior.

Palabras clave: Cálculo Diferencial e Integral; enseñanza y aprendizaje; currículo en la educación secundaria; educación básica; ideas fundamentales; razonamiento covariacional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração da ideia de variação no contexto do Cálculo Diferencial	26
Figura 2 – Ilustração da ideia de acumulação no contexto do Cálculo Integral	27
Figura 3 – Representação do movimento de um ponto sobre uma curva na visão de Newton	40
Figura 4 – O ciclo de modelagem	44
Figura 5 – Variação anual da população mundial em função da população (1950 a 1957) ...	52
Figura 6 – A modelagem como um elo entre a compreensão de fenômenos e os conteúdos matemáticos	59
Figura 7 – Mapa conceitual: problemas centrais e conceitos fundamentais do Cálculo	74
Figura 8 – Vazão e volume de água em um tanque abastecido a vazão constante em função do tempo	78
Figura 9 – Vazão variável de água para abastecimento de um tanque	79
Figura 10 – Aproximação do caso da vazão variável por função constante em 5 subintervalos	80
Figura 11 – Aproximação do caso da vazão variável por função constante em 25 subintervalos	81
Figura 12 – Representação gráfica da posição (S) em função do tempo (t)	84
Figura 13 – Gráfico da posição (S) em função do tempo (t) em que a taxa de variação não é constante	87
Figura 14 – Aproximação de trecho do gráfico da posição (S) em função do tempo (t) por uma reta	88
Figura 15 – Aproximação do gráfico de S por uma reta em intervalos menores	88
Figura 16 – Definição de limite em livro didático da década de 1980 para o 2º grau	95
Figura 17 – Eficácia de dipirona e ibuprofeno em crianças com febre alta ao longo do tempo	98
Figura 18 – Construção do gráfico de função de 1º grau: duas abordagens	100
Figura 19 – Representações gráficas correspondentes às leis $y = ax$ e $y = ax + b$	104
Figura 20 – Representação gráfica e padrão de variação da função dada pela lei $S = \frac{1}{2}x^2$	106

Figura 21 – Representação gráfica e padrão de variação da função dada pela lei	
$S = -\frac{1}{2}x^2$	107
Figura 22 – Três modelos de crescimento: taxa constante (f), crescente (g) e	
decrecente (h)	108
Figura 23 – Gráfico típico de crescimento populacional ao longo do tempo	108
Figura 24 – Visualização gráfica de função com taxas de variação crescentes	
(concavidade para cima)	110
Figura 25 – Gráficos construídos a partir de translações do gráfico da função dada por	
$y = 2x^2$	113
Figura 26 – Gráfico de uma função dada por uma lei do tipo $y = a(x - v)^2 + q$, com	
$a > 0$, $v > 0$ e $q > 0$	113
Figura 27 – Processo de sucessivas divisões de um quadrado de lado medindo 1	117
Figura 28 – Aproximação da região delimitada pelo gráfico da função f por	
3 retângulos	121
Figura 29 – Soma das áreas de n retângulos para quatro valores distintos de n	122
Figura 30 – Evolução do entendimento do que é a matemática, segundo Devlin (1994) ...	142
Figura 31 – Exemplos de questões do ENEM 2016 envolvendo covariação	150
Figura 32 – Atividade envolvendo covariação voltada às séries iniciais do Ensino	
Fundamental	153
Figura 33 – Trilha para o desenvolvimento do raciocínio covariacional ao longo da	
escola básica	154
Figura 34 – Tarefas 1 e 2 para avaliação de raciocínio covariacional	163
Figura 35 – Tarefa 3 para avaliação de raciocínio covariacional	164
Figura 36 – Exemplo de pontuação 1 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional ..	165
Figura 37 – Exemplo de pontuação 2 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional ..	165
Figura 38 – Exemplo de pontuação 3 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional ..	166
Figura 39 – Exemplo de pontuação 4 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional ..	167
Figura 40 – Exemplo de pontuação 5 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional ..	167
Figura 41 – Distribuição das notas obtidas pelos 66 alunos na avaliação RC	172
Figura 42 – Gráfico de dispersão: raciocínio covariacional × técnicas algébricas	173
Figura 43 – Gráfico de dispersão: raciocínio covariacional × desempenho em Cálculo	174

Figura 44 – Gráfico de dispersão: técnicas algébricas × desempenho em Cálculo	175
Figura 45 – Gráfico de dispersão: notas padronizadas (RC × TA) e desempenho em Cálculo (N)	177
Figura 46 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 1 da avaliação RC	181
Figura 47 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 2 da avaliação RC	182
Figura 48 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 3 da avaliação RC	183
Figura 49 – Resposta de aluno com pontuação 2 nas tarefas 1 e 2 da avaliação RC	184
Figura 50 – Resposta de aluno com pontuação 2 na tarefa 3 da avaliação RC	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parte do conteúdo do 4º ano do Ginásio Nacional em 1895 (Carvalho, 1996)	19
Tabela 2 – Parte do programa promulgado pela reforma Capanema em 1942 (Carvalho, 1996)	20
Tabela 3 – Distribuição dos temas da Matemática B no ensino secundário português (Silva et al., 2001)	49
Tabela 4 – População mundial de 1950 a 1957. Fonte: U.S. Bureau of the Census	52
Tabela 5 – Sequência de conteúdos de Cálculo em livro para o 2º grau (1995)	61
Tabela 6 – Os quatro objetivos centrais de um curso inicial de Cálculo na visão de 24 especialistas	69
Tabela 7 – Conceitos fundamentais do Cálculo na visão de 24 especialistas	69
Tabela 8 – Posição (S) do automóvel para diferentes instantes de tempo (t)	83
Tabela 9 – Valores correspondentes de duas variáveis x e y diretamente proporcionais ...	102
Tabela 10 – Taxas unitárias da função f para seis intervalos	109
Tabela 11 – Pares $(x; y)$ pertencentes aos gráficos das funções dadas por $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 + 3$	112
Tabela 12 – Pares $(x; y)$ pertencentes aos gráficos das funções dadas por $y = 2x^2$ e $y = 2(x - 3)^2$	112
Tabela 13 – Ilustração da ideia intuitiva do limite de uma função	134
Tabela 14 – Ações mentais que caracterizam o raciocínio covariacional	137
Tabela 15 – Níveis de raciocínio covariacional	138
Tabela 16 – Habilidades da matriz de Matemática do ENEM referentes à competência de área 4	149
Tabela 17 – Programa de curso de Pré-Cálculo oferecido por universidade brasileira	159
Tabela 18 – Resultados gerais das três avaliações aplicadas (RC, TA e DC)	171
Tabela 19 – Grupos de alunos formados com base nas notas padronizadas de RC e TA	176
Tabela 20 – Médias e desvios padrões de DC nos quatro grupos de alunos	178
Tabela 21 – Resultados dos testes t para os quatro grupos de alunos comparados dois a dois	179

SUMÁRIO

Introdução	19
1. Tema	19
2. Objetivos	29
3. Metodologia	30
 Capítulo 1 – As finalidades da escola básica e o Cálculo Diferencial e Integral	 33
1.1 O Ensino Médio segundo os documentos oficiais	36
1.2 O papel integrador do Cálculo no desenvolvimento científico	39
1.3 A modelagem matemática na escola básica	42
1.4 A modelagem dos sistemas dinâmicos	50
1.4.1 Modelagem discreta	51
1.4.2 Modelagem contínua	54
1.4.3 O Cálculo na modelagem de sistemas dinâmicos	56
 Capítulo 2 – As ideias fundamentais do Cálculo e o currículo do Ensino Médio	 60
2.1 O que são ideias fundamentais?	63
2.2 As ideias fundamentais do Cálculo	67
2.2.1 A visão dos especialistas e os problemas centrais do Cálculo	68
2.2.2 Uma análise epistemológica e o par variabilidade – permanência	74
2.2.3 A noção de integral	77
2.2.4 A noção de derivada	82
2.3 Aspectos relevantes para a integração do Cálculo no programa atual do Ensino Médio	89
2.3.1 Algumas tensões ligadas ao ensino de Cálculo em nível introdutório ...	90
2.3.2 O estudo das funções	96
2.3.3 A presença do par finito – infinito na escola básica	115

2.3.4 Recursos tecnológicos	119
2.4 O Cálculo no Ensino Médio: uma síntese	124
Capítulo 3 – O raciocínio covariacional	128
3.1 O desenvolvimento do pensamento algébrico na escola básica e sua relação com o ensino de Cálculo	129
3.2 Um marco teórico para o raciocínio covariacional	134
3.3 O raciocínio covariacional na escola básica	140
3.3.1 As ideias fundamentais da matemática e o raciocínio covariacional ...	141
3.3.2 A compreensão de fenômenos e o raciocínio covariacional	145
3.3.3 O programa de matemática e o raciocínio covariacional	146
Capítulo 4 – O raciocínio covariacional dos egressos do Ensino Médio e seus efeitos sobre a disciplina de Cálculo na universidade	155
4.1 A motivação para o estudo	155
4.2 Metodologia	161
4.2.1 Avaliação do raciocínio covariacional	162
4.2.2 Avaliação de técnicas algébricas	168
4.2.3 Avaliação do aprendizado de Cálculo	168
4.3 Resultados	171
4.3.1 Resultados da avaliação do nível de raciocínio covariacional	171
4.3.2 Relações entre os resultados das três avaliações	173
4.4 Discussão	179
4.4.1 O nível de raciocínio covariacional dos egressos do Ensino Médio	179
4.4.2 Impactos do raciocínio covariacional sobre a disciplina de Cálculo na universidade	186
Considerações finais	190
1. As ideias do Cálculo e o raciocínio covariacional na escola básica	191
2. O raciocínio covariacional e a disciplina de Cálculo na universidade	200
3. Perspectivas futuras	202

Referências bibliográficas 204

Anexo A 210

Anexo B 211

INTRODUÇÃO

1. Tema

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil tem início no primeiro ano dos cursos de graduação das áreas de exatas e de alguns cursos das áreas de biológicas e humanas, como Agronomia, Ciências Econômicas e Arquitetura. Diferentemente de outros países, esse campo da matemática não faz parte do currículo praticado pelas escolas do Ensino Médio brasileiro.

Fazendo uma breve retrospectiva histórica, o Cálculo chegou a compor o currículo oficial de Matemática no Brasil em duas ocasiões. Segundo Carvalho (1996), a reforma proposta por Benjamim Constant no início da república introduziu o tema “Noções de Cálculo Diferencial e Integral” no programa do 4º ano do Colégio Pedro II, estabelecimento padrão para o ensino secundário da época, cujos programas eram obrigatórios para todo o país. O 4º ano do Ginásio Nacional, como passou a ser chamado o Colégio Pedro II depois dessa reforma, recebia alunos de 15 e 16 anos.

O detalhamento dos conteúdos que compunham esse tema revela uma abordagem bem aprofundada, comparável à disciplina atual de Cálculo I das universidades brasileiras, como pode ser visto na tabela 1.

Tabela 1 – Parte do conteúdo do 4º ano do Ginásio Nacional em 1895 (Carvalho, 1996).

Cálculo infinitesimal	
53. Da variável e da função	67. Teoria dos diâmetros nas curvas planas.
54. Dos infinitamente pequenos. Limite. Objeto e divisão do cálculo infinitesimal.	68. Pontos singulares.
55. Derivadas e diferenciais. Interpretação geométrica.	69. Noções sobre contato, osculação e curvatura das linhas planas.
56. Derivadas e diferenciais das funções explícitas.	70. Princípios fundamentais de integração.
57. Derivadas e diferenciais das funções implícitas.	71. Métodos de integração.
58. Derivadas e diferenciais sucessivas.	72. Integração das frações racionais.
59. Desenvolvimento das funções em séries.	73. Integração das funções irracionais.
60. Fórmula de Taylor. Série de MacLaurin; aplicações.	74. Integração de algumas funções circulares.
61. Aplicações das expressões aparentemente indeterminadas.	75. Integração das funções exponenciais e logaritmas.
62. Teoria dos máximos e mínimos.	76. Integração definida.
63. Teoria das tangentes. Normais.	77. Quadratura das curvas planas.
64. Teoria das assíntotas.	78. Retificação das curvas planas.
65. Convexidade e concavidade das curvas.	79. Estudo minucioso de uma ou mais curvas planas, à escolha do professor, aplicando os recursos de análise estudados durante o ano letivo.
66. Teoria dos centros nas curvas planas.	

Relatos da época revelam que os novos programas de Matemática introduzidos pela reforma Benjamim Constant causaram muita polêmica. Assim, a parte “Noções de Cálculo Diferencial e Integral” permaneceu nos programas oficiais do Colégio Pedro II apenas de 1891 a 1900, não havendo, nas três décadas seguintes, qualquer menção ao estudo das funções e do cálculo.

De acordo com Carvalho (1996), o período entre o fim da década de 1920 e o início da década de 1940 foi de intensos debates sobre o ensino de matemática, no contexto de discussões mais amplas sobre toda a educação e o papel da escola no Brasil. Influenciadas pelas fartas trocas de ideias sobre o assunto, duas reformas reestruturaram o ensino secundário: a reforma Campos, de 1931, e a reforma Capanema, em 1942. Esta última procurou conciliar as diferentes correntes de pensamento, dando fim a mais de uma década de discussões sobre o ensino de matemática na escola secundária.

Em relação ao ensino de Cálculo, prevaleceu o ponto de vista de Euclides Roxo, que foi diretor do Colégio Pedro II de 1925 a 1935. Defensor das ideias do matemático alemão Felix Klein, Roxo argumentava ser necessário organizar o ensino de matemática em torno do conceito de função. Com isso, trazia o Cálculo para uma posição privilegiada dentro do currículo. Como resultado, o programa de Matemática promulgado pelo ministro Capanema em 1942 trazia, divididos entre as três séries do Curso Científico, temas relacionados às funções, limites e continuidade e derivadas, como mostrado na tabela 2.

Tabela 2 – Parte do programa promulgado pela reforma Capanema em 1942 (Carvalho, 1996).

Programa de Matemática do Curso Científico	
1ª série	3ª série
Álgebra	Álgebra
Unidade IV – Os polinômios (...)	Unidade II – Funções
2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do segundo grau; representação gráfica.	1. Noção de função de variável real.
3. Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.	2. Representação cartesiana.
2ª série	3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.
Álgebra	Unidade III – Derivadas
Unidade I – A função exponencial (...)	1. Definição; interpretação geométrica e cinemática.
2. Noção de função exponencial e de sua função inversa.	2. Cálculo das derivadas.
	3. Derivação das funções elementares.
	4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

O programa estabelecido para todo o país pela reforma Capanema vigorou até 1961 sem grandes alterações em relação ao Cálculo. Segundo Carvalho (1996),

A partir de 1961, o ensino de matemática sofre modificações devidas em parte à descentralização permitida pela Lei de Diretrizes e Bases. Com isso, desaparece o ensino de cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje. (p. 78)

Não foi apenas o abandono da ideia de um currículo nacional unificado representado pela descentralização promovida pela Lei de Diretrizes e Bases que levou ao desaparecimento do ensino do Cálculo na escola secundária. Busse e Soares (2007) apontam também a influência do movimento da Matemática Moderna sobre o ensino de matemática no Brasil e no resto do mundo nas décadas de 1960 e 1970, privilegiando novos assuntos como a teoria dos conjuntos e levando à exclusão de outros, como o Cálculo. Sobre essa influência, Ávila (1991) escreveu:

(...) no final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma mudança significativa no ensino da Matemática no Brasil (em consequência do que então acontecia no exterior, diga-se de passagem). O nome do movimento era Matemática Moderna, pois, como propalavam seus defensores, era preciso modernizar esse ensino. A tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo. (p. 1)

Como dito antes, mesmo não fazendo mais parte do currículo oficial a partir de 1961, o Cálculo continuou sendo ensinado, de forma isolada, em algumas escolas no Brasil. Para entender esse fenômeno, é importante ressaltar a diferença entre as instituições públicas e privadas no âmbito do Ensino Médio. Como destacado por Cerqueira (2012), os professores das escolas privadas sofrem uma grande pressão para cumprir todo o programa dos principais exames vestibulares, que dão acesso às instituições de ensino superior. Já nas escolas públicas, predomina o direcionamento dado pelas propostas curriculares oficiais dos estados e municípios que, na sua grande maioria, não preveem o ensino do Cálculo.

Ocorre que, mesmo depois de 1961, a maioria dos concursos vestibulares manteve o Cálculo como um dos tópicos de seus programas. Assim, é natural que o ensino desse assunto tenha sobrevivido nas escolas privadas nas décadas seguintes, especialmente naquelas que têm como proposta principal a preparação de seus alunos para o ingresso nas universidades mais concorridas.

Durante a década de 1990, a maioria dos exames vestibulares retirou o Cálculo de seus programas de Matemática. Por exemplo, no maior exame vestibular em número de candidatos da época, a Fuvest, que selecionava alunos para a Universidade de São Paulo, ele deixou de constar do programa oficial em 1992. Com isso, o ensino de Cálculo praticamente desapareceu das escolas de Ensino Médio. Atualmente, muitos livros didáticos voltaram a incluir uma introdução ao Cálculo nos últimos capítulos do volume dedicado à 3ª série. Entretanto, a maior parte dos egressos do Ensino Médio continua chegando ao Ensino Superior sem ter estudado Cálculo, o que indica que tais capítulos não têm sido trabalhados pelos professores do segmento.

A opção brasileira de não incluir o Cálculo no currículo do Ensino Médio faz com que uma grande parcela de nossos jovens termine seus estudos, mesmo em nível superior, sem conhecer sequer os princípios mais básicos dessa disciplina. Tal decisão contrasta com a realidade de diversos países. Costa (2011) comparou os currículos de Matemática desse segmento em seis lugares: Brasil, Portugal, Espanha, França, Inglaterra e Estados Unidos. Em relação ao Cálculo, existem diferentes modelos contemplados.

Em Portugal, por exemplo, o ensino secundário (10º a 12º ano), etapa equivalente ao Ensino Médio brasileiro, apresenta várias modalidades distintas, que contemplam “a existência de cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos, designados de cursos *científico-humanísticos*, e cursos predominantemente orientados para a vida ativa, ou *cursos tecnológicos*” (O Sistema Educativo em Portugal, 2007, p. 118).

Existe um currículo nacional cujo controle é de responsabilidade do Ministério da Educação, cabendo aos professores fazer as adaptações necessárias conforme o projeto educacional de cada escola. Segundo esse currículo, há dois modelos distintos para a disciplina de Matemática. A Matemática A, que tem uma abordagem mais acadêmica, trata do Cálculo no 11º ano (sequências de números reais, introdução aos limites e taxas de variação) e no 12º ano (teoria de limites e continuidade, cálculo diferencial e problemas de otimização). A Matemática B, com uma abordagem mais aplicada, trabalha o Cálculo no 11º ano (variação de funções e taxas de variação) e no 12º ano (problemas de otimização).

A Matemática A é exigida para os cursos científico-humanísticos de Ciências e Tecnologia e de Ciências Socioeconômicas. Já a Matemática B compõe o currículo do curso científico-humanístico de Artes Visuais e dos cursos tecnológicos de Construção Civil,

Eletrotécnica e Eletrônica, Informática, Mecânica, Química e Controle Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Administração, Técnicas Comerciais, Serviços Jurídicos e Desporto. Dessa forma, mesmo contemplando os diferentes interesses que os jovens de 15 a 18 anos podem manifestar, o currículo português não abre mão do estudo do Cálculo, adequando o nível de profundidade desse estudo às várias modalidades oferecidas.

Em outros países, como na França e nos Estados Unidos, esse assunto é visto apenas nas últimas séries do segmento, com uma abordagem que se aproxima de uma introdução ao Cálculo em nível universitário. Apesar das diferenças, destaca-se o fato de que, com exceção do Brasil, o Cálculo é visto com maior ou menor profundidade, ainda no nível secundário, em todos os países pesquisados.

Tal constatação, por si só, já merece uma reflexão mais cuidadosa sobre as finalidades da escola básica no nosso país e as eventuais contribuições que o Cálculo poderia trazer para a formação dos alunos, o que pretendemos fazer ao longo desse trabalho. Além disso, a condição singular do Brasil em relação aos demais países citados motiva examinar com mais detalhes as razões que fazem com que o Cálculo continue ausente das propostas curriculares oficiais dos estados e municípios e dos principais exames vestibulares. No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por exemplo, que seleciona os ingressantes para as universidades federais de todo o país, não aparecem questões envolvendo esse assunto.

Uma dessas razões, sem dúvida, é a dificuldade dos professores de cumprir todo o programa de Matemática do Ensino Médio. No Brasil, não existe um currículo nacional rígido, prescrito a todas as escolas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN e PCN+), junto com algumas diretrizes curriculares nacionais, fornecem orientações gerais, como o papel da Matemática no Ensino Médio, os grandes eixos estruturadores que devem ser desenvolvidos ao longo das três séries do segmento (álgebra: números e funções; geometria e medidas; análise de dados) e os critérios que devem ser usados para selecionar os conteúdos a serem trabalhados.

No entanto, acabou se estabelecendo um programa padrão, relativamente rígido, praticado pela maioria das escolas. Esse programa foi sendo moldado pelos livros didáticos mais adotados pelos professores em todo o país. Em entrevista transcrita por Cerqueira (2012), o professor Ruy Cesar Pietropaolo, que compôs a equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, afirma que:

(...) Na verdade, o grande currículo, o currículo nacional de matemática, são os livros didáticos. Parece-me que os livros didáticos acabam fazendo o papel desses currículos dentro das escolas. Apesar de ter esses currículos¹ aqui e ali, são os livros didáticos que estão verdadeiramente no Brasil inteiro, são vendidos em São Paulo, são vendidos no Amazonas, em outros lugares... (...) Na hora de elaborar o plano de aula, o professor vai olhar para o livro didático, entendeu? Então, por um lado o currículo tenta implementar, tenta fazer suas ações seja de formação contínua, tentando seguir o currículo, por outro lado, o professor na sala de aula, só sua, lá no âmbito dele, tentando fazer sua aula com sua turma, ele se baseia fundamentalmente no livro didático (p. 180 e 181)

Vale ressaltar ainda, como foi dito anteriormente, que existe uma diferença entre a realidade das escolas públicas, que se pautam pelas propostas curriculares oficiais dos estados e municípios, e das escolas privadas, mais orientadas pelos programas dos principais exames vestibulares. Mesmo assim, pela influência dos livros didáticos, podemos falar em um programa padrão² de Matemática praticado no Ensino Médio brasileiro.

E cumprir esse programa trata-se, de fato, de uma tarefa complexa, levando em conta a fragmentação curricular que caracteriza o segmento. O Ensino Médio atual mantém a tradição da antiga escola secundária, ainda se constituindo, predominantemente, de uma etapa da escolarização voltada para o acesso ao Ensino Superior. A escolha dos temas e as práticas pedagógicas nesse segmento acabam tendo como referencial a preparação para o vestibular e os conteúdos das disciplinas dos primeiros anos dos cursos superiores. Com isso, observa-se um excesso de disciplinas, cada uma isolada em suas próprias questões e, dentro de cada disciplina, uma lista interminável de conteúdos pouco articulados entre si.

Especificamente sobre o programa de Matemática, Ávila (1991) faz uma análise que, mesmo 20 anos depois, ainda nos parece bastante pertinente:

A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. A reforma dos anos 60 introduziu nos programas um pesado e excessivo formalismo. Não obstante as modificações que têm sido feitas nos últimos dez ou quinze anos, num esforço de melhoria do ensino, muito desse formalismo persiste em muitos livros e é responsável pelo inchaço desnecessário dos programas. (p. 6)

¹ O professor se refere aos currículos das secretarias municipais e estaduais de educação.

² Neste trabalho, sempre que citarmos o programa ou o currículo do Ensino Médio, estaremos nos referindo a esse programa padrão.

Além disso, a escola começou a receber novas demandas por parte da sociedade. A necessidade de conectar o conteúdo escolar com os problemas contemporâneos levou muitas escolas a incluírem em seu currículo temas que não costumavam ser discutidos, como meio ambiente, noções de ética e cidadania, saúde e tecnologia. O estudo da estatística tornou-se cada vez mais importante para a compreensão de um mundo em que a quantidade de dados com que lidamos diariamente é cada vez maior, levando à inclusão de uma introdução à estatística descritiva no currículo do Ensino Médio.

Demandas como essas, de forma geral, são legítimas e tiveram impactos positivos sobre a escola. Ao mesmo tempo, deixaram mais evidente a dificuldade de cumprir um programa tão extenso e desarticulado. Como consequência, muitas escolas foram abandonando determinados conteúdos que tinham pouca ou nenhuma incidência nos exames vestibulares, dentre os quais podemos citar a introdução ao Cálculo, o estudo das cônicas feito em Geometria Analítica e o trabalho com os números complexos na forma trigonométrica.

Outro aspecto que pode contribuir para que não se reintroduza o Cálculo no programa de Matemática é a impressão de que se trata de assunto demasiadamente complexo, mais adequado de ser abordado no Ensino Superior. Favorece essa impressão, mais uma vez, a visão do Ensino Médio meramente como uma etapa de preparação para a universidade. Uma breve análise do conteúdo de Cálculo da maioria dos livros didáticos editados até a década de 1990 revela que a prática mais comum consistia em antecipar para a 3ª série do Ensino Médio a abordagem que era feita nos livros universitários, tanto no que diz respeito à sequência de conteúdos escolhida quanto à formalidade com que eles eram apresentados.

Sobre essa questão, Ávila (1991) introduz outro elemento que pode desfavorecer a volta do Cálculo para o programa. A excessiva preocupação com o rigor e o formalismo matemáticos introduzidos com o movimento da Matemática Moderna, que ainda se identifica em muitos livros didáticos, exigiria um estudo minucioso dos números reais antes da introdução ao Cálculo, tornando seu estudo muito difícil e árido para o Ensino Médio.

Apesar dessa justificativa, a conclusão de que o Cálculo é um tema complicado demais para a escola básica não deixa de ser surpreendente. Afinal, a essência dessa disciplina pode ser sintetizada em duas ideias relativamente simples.

De forma bem resumida, o Cálculo Diferencial trata de **variação**, mais especificamente da “rapidez” com que uma quantidade varia. O caso mais simples corresponde às situações em que essa variação ocorre de maneira uniforme, isto é, a quantidade varia sempre com a mesma “rapidez”. Por exemplo, na figura 1a, em que é mostrado o comportamento de uma quantidade A ao longo do tempo, percebe-se que A varia sempre k unidades por minuto. Como consequência, o gráfico de A em função do tempo é uma linha reta.

Figura 1 – Ilustração da ideia de variação no contexto do Cálculo Diferencial

Nem sempre, porém, a variação se dá de forma uniforme. Nesses casos, a ideia é aproximar a nova situação com base na anterior. Para isso, considera-se que, em determinado intervalo, a quantidade estudada varia de maneira aproximadamente constante. Essa estratégia, ilustrada na figura 1b, permite estimar que, no instante t , a quantidade B está variando aproximadamente k unidades por minuto.

Já o Cálculo Integral pode ser identificado com o cálculo da área de uma região delimitada por uma curva (de forma mais geral, trata-se da resolução de problemas ligados à soma ou **acumulação** de uma quantidade variável). Se a quantidade envolvida é constante, tem-se simplesmente o cálculo da área de um retângulo, como mostrado na figura 2a. Para uma quantidade variável, a estratégia, ilustrada na figura 2b, também envolve aproximações a partir do caso mais simples: no intervalo considerado, a curva foi dividida em cinco trechos e, em cada trecho, ela foi aproximada por uma linha reta horizontal vermelha. Dessa forma, a área da região sombreada é aproximadamente igual à soma das áreas dos cinco retângulos com hachuras.

Figura 2 – Ilustração da ideia de acumulação no contexto do Cálculo Integral

Nos dois casos, a compreensão das ideias depende da capacidade de analisar, de maneira coordenada, as mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes. O conjunto de atividades cognitivas envolvidas nessa análise recebe o nome de **raciocínio covariacional**. Ao longo do trabalho, vamos explorar o raciocínio covariacional e sua relação com o aprendizado do Cálculo.

Evidentemente, as duas ideias básicas podem ser continuamente refinadas de modo que possam ser aplicadas a contextos cada vez mais diversos. Dependendo da intenção, pode-se ainda aumentar o formalismo matemático ou focar nas técnicas de cálculo a elas associadas, o que vai aumentando a complexidade do assunto. Ao se pensar no Cálculo na escola básica, porém, não se deve deixar levar pelo formalismo ou pelas técnicas e perder de vista a simplicidade das duas ideias originais.

Até aqui, fizemos uma descrição do histórico do ensino de Cálculo nas escolas de nível secundário no Brasil, confrontando a opção brasileira com as de outros países e relatando as razões que explicam essa escolha. Para que se tenha um panorama mais amplo dos problemas que vamos analisar neste trabalho, porém, é necessário situar brevemente as características do ensino de Cálculo que se pratica nas universidades brasileiras.

Muitos pesquisadores têm se dedicado a estudar as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino e aprendizagem de Cálculo no Brasil (Bonomi, 1999; Rêgo, 2000; Reis, 2001; Rezende, 2003; Beltrão, 2009; Campos, 2012; Lima, 2015). Em todos esses trabalhos, são feitas referências aos altos índices de reprovação observados na disciplina introdutória de Cálculo Diferencial e Integral, em diferentes universidades. Rezende (2003)

relata índices de reprovação alarmantes, que variam entre 45% e 95% em diferentes cursos da Universidade Federal Fluminense. Já Campos (2012), que pesquisou dados sobre a Universidade Federal de Minas Gerais, afirma que “a alta reprovação que sempre ocorre em Cálculo Diferencial e Integral (...) torna o Cálculo um gargalo nos cursos de Ciências Exatas”.

O péssimo desempenho dos alunos na disciplina inicial de Cálculo, evidenciado pelos dados apresentados sobre a reprovação, contribui para os altos índices de evasão observados em cursos como Engenharia. A evasão tem consequências extremamente danosas para o sistema universitário. Segundo Silva Filho et al. (2007), “a perda de estudantes que iniciam mas não terminam seus cursos [tanto no setor público quanto no privado] é uma fonte de ociosidade de professores, funcionários, equipamentos e espaço físico”.

Dessa forma, existe um grande interesse na investigação das razões para o fraco desempenho dos alunos universitários brasileiros na disciplina introdutória de Cálculo e na proposição de modelos que possam contribuir para a melhora desse desempenho. Uma questão que interessa particularmente a esta pesquisa foi levantada por Bonomi (1999). Segundo a pesquisadora,

Considerando que, no curso secundário, a maioria dos alunos não trabalhou com nenhuma das noções do Cálculo, e que os novos conceitos lhe são apresentados segundo uma abordagem que está muito pouco relacionada com a maneira pela qual o Cálculo foi sendo historicamente estruturado, surge uma primeira questão fundamental. Para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente, na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo. (p. 5)

O distanciamento entre o enfoque dado ao Cálculo na universidade e o conhecimento matemático da maioria dos alunos egressos do Ensino Médio provoca um grande choque em muitos dos estudantes, que passam a ter sérias dificuldades para criar significado em torno dos novos conceitos apresentados.

Muitos professores atribuem as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo a uma formação matemática deficiente no Ensino Médio. De fato, essa falta de base pode ser um fator importante para a dificuldade de um grupo de alunos. Porém, os problemas de altos índices de reprovação em Cálculo ocorrem também nas universidades mais concorridas, que recebem os mais bem preparados alunos egressos do Ensino Médio. Assim,

é fundamental que se examine com mais cuidado a transição entre os ensinos secundário e universitário no que diz respeito à aprendizagem das noções centrais do Cálculo. Pretende-se realizar tal análise no presente trabalho, conforme será descrito com mais detalhes na próxima seção.

2. Objetivos

A maioria das pesquisas sobre as dificuldades enfrentadas no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil refere-se ao contexto universitário, refletindo a escolha brasileira de trabalhar esse assunto apenas no ensino superior. Esse quadro é justificável, considerando os problemas apresentados pela disciplina de Cálculo em diferentes universidades, que foram descritos na seção anterior. No entanto, o universo de alunos que têm a oportunidade de aprender Cálculo no Brasil é muito menor do que o conjunto de alunos que concluem o Ensino Médio, restringindo-se aos que ingressam na universidade e optam por cursos da área de exatas ou alguns poucos cursos das áreas de humanas e biológicas.

Dessa forma, uma das questões que pretendemos investigar nesse trabalho diz respeito às contribuições que o ensino de Cálculo ainda na escola básica poderia trazer à formação de nossos jovens, levando em conta as finalidades gerais do Ensino Médio que constam dos documentos oficiais.

A introdução do Cálculo no currículo do Ensino Médio, porém, não é uma questão trivial, como atesta o histórico de inclusões e retiradas desse assunto das aulas de Matemática das escolas brasileiras. Considerando a fragmentação que caracteriza o currículo atual do Ensino Médio, com um excessivo número de disciplinas desarticuladas entre si e com conteúdos pouco integrados dentro de uma mesma disciplina, a proposta de acrescentar um novo tópico pode parecer inviável.

Assim, uma questão fundamental dessa discussão, que devemos pesquisar em nosso trabalho, consiste em evidenciar a presença das ideias centrais do Cálculo em vários temas que já são tradicionalmente discutidos nas aulas de Matemática, permitindo uma compatibilização que não represente um fardo a mais para professores e alunos. Alguns

tópicos exaustivamente trabalhados nesse segmento, como funções e geometria analítica, parecem fontes promissoras nesse sentido.

As ideias centrais do Cálculo giram em torno dos processos de covariação – aqueles cuja interpretação depende da análise coordenada das variações de duas quantidades interdependentes. O desenvolvimento do raciocínio covariacional dos jovens, de forma análoga à formação do pensamento algébrico, parece ser um processo gradual, que se inicia bem antes da introdução formal de conceitos como proporcionalidade e função.

Segundo essa óptica, o entendimento das principais noções do Cálculo, ainda que de forma intuitiva, está associado aos níveis mais refinados do raciocínio covariacional. É como se fosse o ápice do desenvolvimento de uma forma de pensar muito característica, que vai sendo construída ao longo de vários anos de escolarização.

Considerando esse caminho formativo representado pelo raciocínio covariacional, pretendemos investigar em que medida o programa de Matemática praticado pela maioria das escolas brasileiras oferece, de maneira intencional e planejada, oportunidades para o desenvolvimento dessa habilidade ao longo da escola básica.

Ao nos preocuparmos com o desenvolvimento dos alunos em relação ao raciocínio covariacional no final do Ensino Médio, acabamos nos deparando com o momento de transição entre a escola básica e o Ensino Superior. Ainda que a maioria dos jovens brasileiros não prossiga seus estudos na universidade, essa transição apresenta alguns pontos críticos, como descrevemos na apresentação do tema deste trabalho. Dada a relevância dessa questão, faremos uma pequena ampliação do escopo de nossa pesquisa, procurando relacionar o nível de raciocínio covariacional dos alunos egressos do Ensino Médio com a situação da disciplina inicial de Cálculo nas universidades.

3. Metodologia

Os objetivos deste trabalho, explicitados nas três questões elaboradas na seção anterior, referem-se ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral na escola básica no contexto do desenvolvimento do raciocínio covariacional. Apresentaremos a metodologia utilizada em duas partes, que refletem a forma como foi construído o trabalho.

Uma vez que o currículo atual do Ensino Médio não inclui formalmente o Cálculo, optamos por construir nossa argumentação em relação a esse segmento por meio de uma pesquisa bibliográfica, ou seja, feita preferencialmente sobre documentação escrita. Dentre os vários tipos de pesquisa bibliográfica, esta parte do trabalho aproxima-se mais de uma meta-análise. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), esse tipo de estudo pode ser definido como “uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma revisão crítica delas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos”.

Para traçar um quadro das finalidades mais gerais do Ensino Médio, foram analisados quatro documentos oficiais brasileiros referentes a esse segmento (Lei 9394 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais, Novas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica e Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio).

Já para estabelecer relações entre o Cálculo e o currículo do Ensino Médio, foram revisadas pesquisas sobre a epistemologia do Cálculo, o uso da modelagem nas aulas de Matemática e o desenvolvimento dos diversos tipos de raciocínio matemático na escola básica. Além disso, foram analisados alguns livros didáticos de Ensino Médio para estabelecer um panorama do currículo que é praticado nas escolas.

Para investigar a situação dos egressos do Ensino Médio no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio covariacional, olhando para a sua formação na escola básica e para os efeitos que podem ser gerados sobre o ensino de Cálculo nas universidades, optamos por uma pesquisa experimental. Certamente, a decisão foi bastante influenciada pela nossa experiência como docente de Cálculo em turmas do primeiro semestre de diferentes cursos universitários. O trabalho com alunos egressos do Ensino Médio iniciando sua trajetória no Ensino Superior proporcionou algumas percepções sobre sua formação matemática prévia e as dificuldades encontradas por muitos deles na disciplina inicial de Cálculo, sendo fundamental testar tais percepções de maneira mais sistemática.

Assim, decidimos mensurar, no início das aulas, duas dimensões do conhecimento prévio desses alunos, verificando se elas estavam correlacionadas entre si e também com o seu desempenho na disciplina de Cálculo 1. Cada dimensão foi medida por meio de uma avaliação aplicada a um grupo de 66 alunos matriculados em Cálculo 1, uma delas elaborada

com essa finalidade e a outra aplicada pelos professores da disciplina para fazer um diagnóstico inicial da turma.

Todo o detalhamento da metodologia utilizada nesta pesquisa experimental é feito no Capítulo 4.

CAPÍTULO 1 – As finalidades da escola básica e o Cálculo Diferencial e Integral

A questão das finalidades da escola básica no Brasil tem ocupado um espaço relevante nos debates sobre educação nos últimos 20 anos. As motivações de tais discussões, porém, não se encontram em eventuais discordâncias sobre quais devem ser essas finalidades. Existe um consenso de que o objetivo primordial da educação é a formação de pessoas, sua preparação para os desafios da vida em sociedade e para o ingresso no mundo do trabalho.

O que está no centro das discussões é a constatação de que nossa escola tem falhado – ou, numa perspectiva mais otimista, tem feito muito menos do que poderia – na consecução desse objetivo. Na busca das razões para esse insucesso, um dos aspectos que mais tem aflorado é a fragmentação disciplinar.

A organização da escola é disciplinar. No caso do Ensino Médio, o cotidiano dos alunos gira em torno do estudo de disciplinas como Física, História, Biologia, Matemática. E não há qualquer inconveniente nesse tipo de estruturação. Concordamos com Machado (2016), que aponta que “para trazer o conhecimento em sentido amplo para a sala de aula, parece imprescindível ordená-lo, discipliná-lo, estruturá-lo em um conjunto de matérias”.

Por outro lado, não se pode perder de vista que as disciplinas devem estar a serviço da formação das pessoas, jamais se constituindo em uma finalidade em si mesmas. Porém, quando se examinam os índices dos livros didáticos voltados para o Ensino Médio ou os programas dos exames vestibulares – que pretendem avaliar o conteúdo desenvolvido nessa etapa da escolarização – tem-se a nítida impressão do contrário. As diferentes disciplinas são apresentadas em um alto nível de detalhamento, com destaque para aspectos técnicos que muito se afastam das ideias mais gerais daquele campo de conhecimento. Além disso, cada uma evidencia um enfoque desarticulado das demais, dificultando a percepção de um projeto conjunto voltado para a formação geral dos estudantes.

Quando se examina mais de perto o que acontece nas salas de aula, o panorama não é muito diferente. Influenciados pelos materiais didáticos disponíveis, pressionados, no caso

das escolas privadas, pela necessidade de bons resultados nos exames vestibulares e, muitas vezes, acomodados em torno de práticas tradicionais, os professores acabam reproduzindo esse modelo que coloca as particularidades de cada disciplina como protagonistas, de modo que as grandes finalidades da educação acabam se perdendo em meio a tantos detalhes. Wiggins e McTighe (2005) descrevem essa inversão tão frequente no planejamento de um conjunto de aulas ou mesmo de todo um curso.

Somente depois de ter especificado os resultados desejados podemos nos concentrar nos conteúdos, métodos e atividades que farão mais provável atingir-se tais resultados. No entanto, muitos professores começam [seu planejamento] e permanecem restritos aos livros didáticos, às lições recomendadas e às atividades consagradas – as variáveis de entrada – em vez de escolher esses meios a partir do que se deseja como resultado – a variável de saída.³ (p. 15)

Para o professor especialista, sua disciplina representa, muitas vezes, um “porto seguro”, um espaço extremamente familiar no qual as relações com os alunos se estabelecem sob seu total controle. Buscar elementos externos a ela, em outras disciplinas do currículo ou em aspectos do cotidiano, pode representar uma grande ameaça a esse domínio. Como consequência, os conteúdos escolares afastam-se cada vez mais dos interesses dos alunos e cada disciplina parece ter o seu próprio projeto, independente dos demais, dificultando a criação de significado em relação àquilo que se estuda.

Em relação ao espaço das disciplinas e da forma de atuação dos professores diante desse panorama, Machado (2016) faz uma síntese bastante representativa:

A organização da escola é, e continuará a ser, até onde a entendemos, marcadamente disciplinar. Os professores são, e continuarão a ser, professores de disciplinas, de matérias, não havendo qualquer sentido na caracterização de um professor de “competências”. Urge, no entanto, uma reorganização do trabalho escolar, que reconfigure seus tempos e seus espaços, que revitalize os significados dos currículos como mapas do conhecimento que se busca, e da formação pessoal como a constituição de um amplo espectro de competências. (p. 93)

Diante do quadro exposto, muitos documentos têm sido elaborados no Brasil com o intuito de reforçar as finalidades gerais da escola básica em cada um dos seus diferentes níveis, indicando caminhos para que as redes de ensino possam implantar seus projetos político-pedagógicos de maneira alinhada com tais objetivos. Dentre eles, podemos citar a

³ Only by having specified the desired results can we focus on the content, methods, and activities most likely to achieve those results. But many teachers begin with and remain focused on textbooks, favored lessons, and time-honored activities—the inputs—rather than deriving those means from what is implied in the desired results—the output.

Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais (de 1997 a 2002) e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica para o Ensino Fundamental (2010) e também para o Ensino Médio (2012).

A preocupação com a fragmentação curricular aqui citada, especialmente no Ensino Médio, fica evidente em tais documentos, como se pode identificar nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

Ou seja, o que se está defendendo é como inserir no currículo [do Ensino Médio], o diálogo entre os saberes. (...) Mais do que o acúmulo de informações e conhecimentos, há que se incluir no currículo um conjunto de conceitos e categorias básicas. Não se pretende, então, oferecer ao estudante um currículo enciclopédico, repleto de informações e de conhecimentos, formado por disciplinas isoladas, com fronteiras demarcadas e preservadas, sem relações entre si. A preferência, ao contrário, é que se estabeleça um conjunto necessário de saberes integrados e significativos para o prosseguimento dos estudos, para o entendimento e ação crítica acerca do mundo.

Associado à integração de saberes significativos, há que se evitar a prática, ainda frequente, de um número excessivo de componentes em cada tempo de organização do curso, gerando não só fragmentação como o seu congestionamento. (BRASIL, 2012, p. 181)

Apesar do esforço que se percebe ao examinar os documentos citados, as práticas escolares tradicionais encontram-se, muitas vezes, tão cristalizadas entre professores e gestores que não são geradas mudanças significativas no cotidiano da sala de aula, o que é ainda mais forte no Ensino Médio. Podem acontecer alguns ajustes pontuais no currículo, com a alteração de um ou outro conteúdo, e nos materiais didáticos, mas a filosofia de uma formação voltada para os exames vestibulares, as estratégias de ensino e a dinâmica de aula permanecem praticamente as mesmas.

Por isso, é importante destacar que a reflexão proposta neste trabalho, embora esteja relacionada ao ensino de Cálculo no Ensino Médio, não pode se limitar à questão de incluir ou não um novo conteúdo no currículo de Matemática. Ela deve ser mais ampla, considerando as finalidades mais gerais da educação básica e as contribuições que o Cálculo pode trazer para a formação dos alunos, na perspectiva de um currículo integrado.

Dessa forma, iniciamos este capítulo trazendo alguns aspectos dos documentos oficiais, especialmente em relação às finalidades da escola básica, que serão importantes para discutir o papel que o Cálculo pode desempenhar em um currículo de Matemática para

o nível secundário. Trazendo elementos para essa discussão, fazemos um rápido apanhado histórico do caráter integrador que o Cálculo foi adquirindo com o desenvolvimento dos métodos científicos a partir do século XVII. Em seguida, discorremos sobre o uso da modelagem matemática na escola básica e seu alinhamento com as finalidades do Ensino Médio destacadas nos documentos oficiais. E, finalmente, mostramos como o Cálculo está diretamente ligado a um grande número de situações que envolvem modelagem e podem ser aplicadas nas aulas de Matemática desse segmento.

1.1 O Ensino Médio segundo os documentos oficiais

A promulgação da Lei 9394 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), em 20 de dezembro de 1996, trouxe importantes mudanças em relação à anterior, representando uma atualização das finalidades da educação básica no Brasil. Tais mudanças refletiram anseios de diferentes segmentos da sociedade, que já vinham questionando o papel da escola no país.

Uma alteração relevante refere-se à inclusão do Ensino Médio como uma etapa da educação básica. No artigo 21, a LDB/96 estabelece que a educação básica é “formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio”. Em 2013, a Lei 12796 atualizou a LDB/96, deixando mais explícita a obrigação do Estado em relação ao Ensino Médio, como se pode constatar no artigo 4º:

Art. 4º O dever do Estado com educação escolar pública será efetivado mediante a garantia de:

I - educação básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade, organizada da seguinte forma:

- a) pré-escola;
- b) ensino fundamental;
- c) ensino médio;

Ao definir o Ensino Médio como a última etapa da escolarização básica, a LDB/96 procurou romper com uma tendência histórica desse segmento. Durante muito tempo, o antigo ensino secundário atendeu apenas a uma pequena parcela da população, que iria continuar seus estudos em nível superior, adquirindo um caráter propedêutico, de preparação para a universidade, e não de um segmento que poderia ter uma finalidade em

si próprio. É importante destacar que essa característica, em muitos aspectos, persiste até hoje.

No artigo 35, a LDB/96 estabelece as finalidades formativas do Ensino Médio, mais tarde reiteradas pelas novas diretrizes curriculares para o Ensino Médio – DCNEM (BRASIL, 2012):

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Ainda que bastante gerais, os quatro itens apresentados no artigo 35 permitem vislumbrar um quadro bem claro do que se pretende com a formação dos jovens no Ensino Médio. O prosseguimento dos estudos está contemplado no item I, mas os itens II e III mostram que o Ensino Médio também deve caracterizar-se como uma etapa independente da seguinte, preparando os jovens para o trabalho e para o pleno exercício da cidadania, além de garantir o aprimoramento de sua formação humana.

Interessa-nos analisar com mais detalhes o item IV, que cita a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos. Isto está diretamente ligado ao entendimento de fenômenos em geral e, mais especificamente, de fenômenos naturais.

A capacidade de compreender fenômenos é uma competência fundamental para a formação de um indivíduo, uma vez que propicia a ele realizar a leitura do mundo que o cerca, condição necessária para que se possa interagir socialmente. De forma complementar à capacidade de expressão como marca de personalidade, Machado (2016) coloca que “é preciso descentrar-se, assumir outras perspectivas e lograr a compreensão do outro, do que não sou eu, (...) o que pode significar compreender um texto que se lê, um gráfico que se examina, um fenômeno natural, histórico, social, entre outros, que nos convida à reflexão”.

A preocupação com a compreensão do mundo que nos cerca está presente também no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), mais especificamente num dos seus cinco eixos cognitivos, comum a todas as áreas de conhecimento:

II. **Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

Na descrição do eixo cognitivo ligado à compreensão de fenômenos feita nos documentos do ENEM, destaca-se a questão da construção e aplicação de conceitos. Em outras palavras, os conteúdos escolares devem estar a serviço da construção de uma competência mais ampla, que auxilie o desenvolvimento dos jovens no que diz respeito ao estabelecimento de relações pessoais, participação na vida social e preparação para o mundo do trabalho.

Tais preocupações ficam ainda mais explícitas no artigo 5º das DCNEM (BRASIL, 2012), quando se afirma que “o Ensino Médio, em todas as suas formas de oferta e organização, baseia-se em integração entre educação e as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como base da proposta e do desenvolvimento curricular”.

Fazendo uma síntese, os documentos oficiais, ao incluir o Ensino Médio como uma parte da educação básica cuja oferta deve ser garantida pelo Estado, deixam claro que esta etapa da escolarização não deve ser vista como uma mera preparação para o ensino superior, voltada apenas a uma minoria. Além disso, ressaltam que os conceitos devem estar integrados com a prática, a serviço da compreensão de fenômenos ligados ao mundo do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura.

Diante desse quadro, é mais do que necessário que se questione o programa de Matemática praticado na maioria das salas de aula do Ensino Médio. As listas de conteúdo e, principalmente, o enfoque dado a esses conteúdos não podem ser justificados pela necessidade de preparar os alunos para os exames vestibulares, uma vez que as finalidades do Ensino Médio são muito mais amplas do que isso. Até que ponto as aulas de Matemática têm contribuído para o desenvolvimento da capacidade dos alunos de compreender fenômenos?

Muitas pesquisas no campo da Educação Matemática têm procurado fornecer respostas e apontar caminhos que permitam conciliar o currículo do Ensino Médio com as

suas finalidades mais gerais, descritas nos documentos oficiais. Nas próximas seções, vamos mostrar diferentes aspectos do Cálculo que podem contribuir com essa busca.

1.2 O papel integrador do Cálculo no desenvolvimento científico

No início deste capítulo, discorreremos sobre a excessiva fragmentação curricular observada no Ensino Médio brasileiro e o desenvolvimento da capacidade de compreender fenômenos como uma das principais finalidades dessa etapa de escolarização. Ao pensar nesses dois aspectos, no âmbito do nosso trabalho, torna-se quase obrigatório tratar do caráter integrador que o Cálculo desempenhou no desenvolvimento científico e tecnológico.

Mais especificamente, a escolha de temas que facilitem a integração entre diferentes disciplinas na composição dos programas pode ser uma estratégia valiosa para combater a indesejada fragmentação. Sobre essa possibilidade, Ávila (1991) mostra um caso específico em que a opção de não trabalhar as ideias do Cálculo na escola básica acaba contribuindo para essa fragmentação:

É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (p. 5)

Essa característica interdisciplinar do Cálculo confunde-se com sua própria origem. Como veremos com mais detalhes no Capítulo 2, Newton é considerado, juntamente com Leibniz, um dos inventores do Cálculo. Ao desenvolver a ideia de derivada em seu *cálculo fluxional*, no final do século XVII, Newton considerou o movimento de uma partícula sobre uma curva, decompondo-o em suas componentes horizontal e vertical. Em cada instante, a velocidade da partícula é tangente à curva. Chamando de $\dot{x}$ e $\dot{y}$ as velocidades da partícula nas direções horizontal e vertical, respectivamente, e sendo $f(x, y) = 0$ a equação da curva, temos a representação do movimento na figura 3.

Figura 3 – Representação do movimento de um ponto sobre uma curva na visão de Newton

A equação $f(x, y) = 0$ define, implicitamente, uma função $y = y(x)$. Como se observa na figura 3, o coeficiente angular da reta tangente em cada ponto do gráfico dessa função, que é igual à sua derivada, pode ser visto como o quociente entre as duas velocidades, ou seja, $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

A descrição acima mostra que o Cálculo e a Cinemática, no contexto do cálculo fluxional de Newton, podem ser considerados praticamente indissociáveis. Nesse contexto, a ideia de derivada nasce do estudo do movimento, revelando-se uma ferramenta extremamente útil para descrever um fenômeno físico.

Mas não foi apenas em sua origem, na segunda metade do século XVII, que o Cálculo se mostrou um recurso valioso para a descrição de fenômenos em geral. E essa contribuição também não ficou restrita à Cinemática. Sobre o papel do Cálculo no desenvolvimento científico a partir do século XVII, Kleiner (2012) faz uma descrição bastante representativa:

A invenção (descoberta?) do cálculo é uma das grandes realizações intelectuais da civilização. Por três séculos, o cálculo tem servido como a principal ferramenta quantitativa para a investigação de problemas científicos. Ele permitiu expressar de forma precisa (matemática) conceitos fundamentais como movimento, continuidade, variabilidade, e o infinito (em alguns de seus aspectos) – noções que foram base para muitas especulações científicas e filosóficas desde os tempos antigos. A física e a tecnologia moderna seriam impossíveis sem o cálculo. As equações mais importantes da mecânica, da astronomia e das ciências físicas em

geral são equações diferenciais ou integrais – produtos do cálculo do século XVII.⁴
(p. 67)

Há inúmeros exemplos, a partir do século XVII, em que a compreensão geral de um fenômeno e sua descrição formal só foram possíveis graças ao auxílio das ferramentas do Cálculo. Um caso clássico é dado pelas equações de Maxwell do eletromagnetismo. Em 1864, o físico escocês James Clerk Maxwell (1831 – 1879) apresentou um conjunto de equações que articulava diversos resultados teóricos e experimentais anteriores, promovendo a unificação da eletricidade, do magnetismo e da óptica. Segundo Moreira (2014), essas equações “constituem um belo e impressionante conjunto de equações diferenciais parciais que sintetizam [toda] a teoria eletromagnética”. Tais equações utilizavam as ideias e notações do Cálculo desenvolvidas no início do século XIX, especialmente na teoria de campos com os teoremas de Gauss, Green e Stokes.

Além de servir como uma ferramenta matemática para descrever várias teorias científicas, o Cálculo facilitou a generalização e a identificação de analogias entre diferentes fenômenos. No próprio caso das equações de Maxwell, o físico escocês utilizou o movimento de um fluido incompressível através de um meio poroso como analogia para pensar nos sistemas eletromagnéticos. E os comportamentos comuns nos dois casos podem ser explicados pelas semelhanças entre as equações de Maxwell e as de Navier-Stokes, que regem o escoamento de fluidos.

O espaço ocupado pelo Cálculo na expressão matemática de tantas descobertas científicas e inovações tecnológicas nos últimos três séculos, em diferentes áreas como a Física, a Química e a Economia, mostra seu papel integrador dentro das ciências exatas. Mais do que isso, o Cálculo representa uma parte significativa do próprio desenvolvimento do método científico moderno.

Por esse motivo, quando pensamos na “compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática” como uma das quatro finalidades do Ensino Médio no Brasil, parece-nos contraditória a opção de deixar o Cálculo de fora do programa desse segmento. Diante do papel do Cálculo na descrição de

⁴ The invention (discovery?) of calculus is one of the great intellectual achievements of civilization. Calculus has served for three centuries as the principal quantitative tool for the investigation of scientific problems. It has given precise (mathematical) expression to such fundamental concepts as motion, continuity, variability, and the infinite (in some of its aspects) – notions that have formed the basis for much scientific and philosophical speculation since ancient times. Physics and modern technology would be impossible without calculus. The most important equations of mechanics, astronomy, and the physical sciences in general are differential and integral equations – outgrowths of the calculus of the seventeenth century.

fenômenos científico-tecnológicos, trabalhar suas principais noções, mesmo em um nível bastante introdutório, contribuiria muito para a compreensão desses fundamentos.

Nas próximas seções, vamos tratar das propostas de utilização da modelagem matemática na escola básica, que representam um caminho promissor para trazer as ideias do Cálculo integradas à compreensão de fenômenos científico-tecnológicos.

1.3 A modelagem matemática na escola básica

A partir da década de 1980, começou a surgir, dentro da comunidade internacional de pesquisadores em Educação Matemática, o interesse pela investigação dos processos de ensino e aprendizagem envolvendo modelagem. O crescente interesse deu origem a uma nova área dentro desse campo de pesquisa, que ficou conhecida como Modelagem Matemática. No Brasil, em 2001, o interesse motivou a criação de um grupo de trabalho (GT - 10) pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), que tem por finalidade promover o debate e a colaboração entre os pesquisadores dessa área.

No que diz respeito à conceituação da Modelagem Matemática como área de pesquisa no contexto educacional, concordamos com Almeida, Silva e Vertuan (2013) ao se referirem a ela como a área que “se debruça sobre o ensino e a aprendizagem mediados por problemas que têm sua origem, de modo geral, fora da Matemática”.

Mais especificamente, esses pesquisadores descrevem uma atividade de Modelagem Matemática em termos de uma situação inicial proveniente de outro campo de conhecimento (situação-problema), de uma situação final desejada (solução obtida a partir de uma representação matemática da situação inicial, chamada de modelo matemático) e de um conjunto de procedimentos e conceitos matemáticos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Dessa forma, as relações entre a realidade (situação-problema) e a Matemática (área em que os conceitos e procedimentos estão ancorados)

propiciam que conhecimentos matemáticos e não-matemáticos sejam mobilizados, construídos e integrados⁵.

Tendo em mente o desenvolvimento da capacidade de compreender fenômenos, que está diretamente ligada a uma das finalidades do Ensino Médio definida nos documentos oficiais, a Modelagem Matemática é uma estratégia pedagógica valiosa. Para destacar a contribuição que ela pode oferecer às aulas de Matemática, vamos descrever as suas diferentes etapas.

Como já foi dito, uma atividade de Modelagem Matemática é desencadeada a partir de uma situação-problema de fora da Matemática. Genericamente, vamos chamar o ambiente em que se origina essa situação-problema de **sistema físico**. Uma primeira etapa, que denominaremos **abstração**, consiste em identificar as variáveis relevantes e definir as simplificações que serão assumidas para representar o sistema que se deseja estudar. Trata-se de um processo em que é necessário formular hipóteses, cuja adequação pode ser testada posteriormente na fase de validação. A etapa de abstração culmina com a seleção das ferramentas matemáticas que serão utilizadas para construir essa representação, chegando-se ao **modelo matemático**. A construção do modelo matemático, portanto, exige uma transformação de linguagens, passando-se a formulação do problema da linguagem corrente para a linguagem matemática.

O modelo matemático pode ser constituído de uma ou mais equações, funções, diagramas, matrizes e assim por diante. Dessa forma, uma etapa de **resolução** segue-se naturalmente à abstração. Essa etapa pode envolver a resolução de uma equação ou de um sistema de equações, a construção do gráfico de uma função, a realização de operações entre matrizes, a aplicação de uma propriedade geométrica, entre outras ações. Além disso, a resolução pode ser feita analítica ou numericamente, neste último caso utilizando, preferencialmente, ferramentas computacionais. A resolução do modelo obtido permite que se façam **previsões** sobre o sistema estudado, explicando seu comportamento e propiciando que sejam feitas intervenções sobre ele.

⁵ Alguns pesquisadores estudam de forma mais detalhada as questões aqui colocadas, levando em conta os diferentes significados da palavra modelo (por exemplo, um modelo como aquilo que serve de exemplo). Esses pesquisadores podem atribuir diferentes significados aos termos modelagem e modelação, por exemplo.

No contexto deste trabalho, porém, consideramos um modelo apenas como uma representação simplificada da realidade, utilizando as palavras modelagem e modelação como sinônimos.

As previsões geradas pelo modelo devem ser confrontadas com os dados reais coletados no sistema, em uma etapa chamada de **validação**. A validação proporciona um exercício de crítica sobre as hipóteses adotadas e o modelo construído, podendo levar a um aprimoramento do modelo. A etapa de coleta de dados reais no sistema é denominada **experimentação**. Vale ressaltar que, em alguns casos, também é possível validar um experimento a partir dos resultados de um modelo matemático.

A figura 4 mostra um esquema das diferentes etapas descritas acima, que se constituem no chamado **ciclo de modelagem**.

Figura 4 – O ciclo de modelagem

As diferentes etapas do processo de modelagem mostram que os conceitos e procedimentos matemáticos podem ser colocados a serviço da compreensão de um fenômeno, aqui entendido como o sistema físico que se pretende estudar. Dessa forma, as aulas de Matemática podem proporcionar uma grande contribuição para a “compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos”, uma das grandes finalidades do Ensino Médio definida nos documentos oficiais.

Não é incomum, porém, escutar o argumento de que, com tantos conteúdos matemáticos que precisam ser ensinados no Ensino Médio, seria inviável trabalhar sob a

perspectiva da modelagem. Assim, além da contribuição que este enfoque pode fornecer para o desenvolvimento da competência de compreender fenômenos, é preciso investigar de que forma ele poderia impactar na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Em outras palavras, vamos discutir brevemente a pergunta “por que utilizar a modelagem nas aulas de Matemática” sob o ponto de vista do ensino e aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

As discussões sobre o uso de atividades de modelagem nas aulas de Matemática têm levantado diferentes argumentos entre pesquisadores e professores a favor dessa incorporação. Um dos principais diz respeito à motivação dos alunos com relação ao aprendizado de conceitos matemáticos e seu engajamento nas atividades propostas durante as aulas.

Nesse sentido, a aplicação de problemas reais, que podem ter sua origem em aspectos da vida cotidiana, situações do mundo do trabalho ou da tecnologia, entre outros, tem um grande potencial para despertar o interesse dos alunos. Para muitos estudantes, é difícil enxergar sentido em aprender conceitos e procedimentos matemáticos quando estes parecem não ter qualquer aplicação prática ou relação com seus interesses mais imediatos. Não se trata de transmitir uma visão utilitarista da Matemática, mas sim de despertar uma motivação inicial que pode proporcionar uma mudança de olhar, por parte dos alunos, em relação a essa disciplina.

Outro aspecto que pode favorecer a motivação dos alunos é o caráter mais aberto dos problemas que são discutidos em atividades de modelagem. Lidar com uma situação-problema nos moldes definidos anteriormente (a situação inicial do processo de modelagem) requer que algumas hipóteses sejam assumidas e que sejam feitas simplificações, que acabam delimitando o problema a ser resolvido. Tais hipóteses e simplificações, porém, não são únicas para uma mesma situação-problema, podendo conduzir o processo de modelagem por diferentes caminhos. Esse aumento da autonomia dos alunos no que se refere à formulação dos problemas a serem resolvidos pode proporcionar um sentimento de propriedade que está diretamente ligado à motivação para a construção de conhecimento matemático.

Uma perspectiva interessante do trabalho com modelagem diz respeito à contextualização. A capacidade de mobilizar conhecimento em diferentes contextos para

resolver problemas é uma competência muito importante para a formação dos jovens na educação básica. Essa competência se traduz num dos cinco eixos cognitivos do ENEM:

III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Nas atividades com modelagem, os alunos aplicam e constroem conhecimentos matemáticos em contextos não matemáticos, transformando informações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa. Essa prática facilita a criação de significado em torno dos conceitos e procedimentos matemáticos, contribuindo para uma aprendizagem significativa, que não seja meramente mecânica.

Existem ainda outros aspectos da modelagem citados na literatura que favorecem o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Entre eles, podemos citar a possibilidade dos alunos trabalharem cooperativamente e o favorecimento de um enfoque interdisciplinar, com a integração do conhecimento matemático com os de outras disciplinas.

Apesar de seu alinhamento com as finalidades mais gerais da educação básica, de seu caráter integrador de diferentes disciplinas e de seu potencial para atribuir significado ao aprendizado de conceitos matemáticos, a modelagem encontra alguns obstáculos para chegar às salas de aula. Dentre eles, o principal está ligado à dificuldade enfrentada pelos professores para fazer a transição de um modelo de ensino em que as aulas expositivas são preponderantes e que os problemas e soluções já estão delimitados a priori para situações que envolvam modelagem. Almeida, Silva e Vertuan (2013) descrevem alguns aspectos dessa dificuldade:

Nesse sentido, pesquisas revelam que muitos professores ainda se mantêm numa “zona de conforto”, preferindo situações em que quase tudo é conhecido ou previsível e há pouco espaço para a “imprevisibilidade” associada às atividades de Modelagem Matemática. Para outros, ainda que anunciem um discurso manifestando desejo de ingressar em ambiente desconhecido, suas práticas não revelam essa intenção de mudança. Por fim, há os professores que mergulham no “risco” e encontram, tanto no êxito das situações favoráveis quanto na superação das situações adversas, subsídios para a elaboração de uma nova e própria “zona de conforto”. (p. 24)

Podemos acrescentar à descrição acima a dificuldade que pode representar para um professor de Matemática trabalhar com conceitos de outras áreas como Física, Química ou Geografia, uma vez que as situações-problema que caracterizam as atividades de modelagem têm origem em outros campos de conhecimento.

Além disso, a adaptação dos alunos às atividades de modelagem pode não ser automática. Pelo contrário, constatamos em nossa experiência como docente que, em um primeiro momento, muitos deles sentem dificuldade e insegurança com a autonomia que lhes é conferida ao longo do processo de modelagem, tendendo a reivindicar ao professor o uso de problemas mais bem definidos e um direcionamento maior na etapa de pesquisa de dados sobre o sistema estudado.

Para finalizar esta seção, faremos uma breve descrição da maneira como Portugal incorpora a modelagem ao currículo oficial do ensino secundário. Como já dissemos, há dois programas distintos para a Matemática naquele país – a Matemática A e a Matemática B. A Matemática A é voltada aos alunos que pretendem prosseguir seus estudos em nível universitário, em áreas que utilizem diretamente o conhecimento matemático. Como estamos interessados em analisar a modelagem na escola básica, independentemente da intenção do aluno de cursar ou não a universidade, vamos nos concentrar no programa da Matemática B.

O tema central da Matemática B para os três anos do secundário é “aplicações e modelação matemática”. Já os conteúdos abordados são agrupados em quatro grandes temas: números e geometria (incluindo trigonometria); funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades; matemática discreta. A relação entre o tema central e os quatro grandes temas é descrita por Silva et al. (2001) no programa oficial de Matemática B para o 10º ano, editado pelo Ministério da Educação de Portugal:

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em atividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais. (p. 2)

Mais adiante, os mesmos autores detalham o papel do tema central no desenvolvimento do programa das três séries:

A modelação e os problemas relacionados com as diferentes áreas tecnológicas constituem tanto a metodologia de trabalho privilegiada na construção dos conceitos matemáticos como uma competência a desenvolver que é imprescindível para estudantes que vão enfrentar no seu trabalho profissional problemas concretos muito variados e terão de saber selecionar as ferramentas matemáticas relevantes para cada situação. (p. 16)

A escolha da modelagem como tema central da Matemática é coerente com as finalidades definidas para a disciplina no ensino secundário. Dentre essas finalidades, destacamos duas (Silva et al., 2001): “desenvolver a capacidade de usar a matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real” e “desenvolver a capacidade de selecionar a matemática relevante para cada problema da realidade”.

A seleção dos conteúdos a serem trabalhados em cada ano, resumidos na tabela 3, também se mostra alinhada com a escolha do tema central.

Comparando os temas tratados em Portugal com o programa praticado pela maioria das escolas brasileiras no Ensino Médio, percebe-se a ausência de tópicos como matrizes, determinantes e números complexos. Por outro lado, a Estatística parece ser mais aprofundada, além de serem incluídos elementos de Cálculo e Programação Linear.

O documento orienta ainda que conteúdos como lógica formal e teoria dos conjuntos, embora não apareçam no corpo do programa, podem ser trabalhados no ensino da matemática no nível secundário, conforme seja requerido pelos problemas abordados. No entanto, não devem aparecer como conteúdos em si mesmos.

Tabela 3 – Distribuição dos temas da Matemática B no ensino secundário português (Silva et al., 2001).

10º ano	11º ano	12º ano
Tema central: Aplicações e Modelação Matemática		
Geometria no plano e no espaço <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. • O método das coordenadas para estudar geometria no plano e no espaço. Funções e gráficos <ul style="list-style-type: none"> • Função, gráfico e representação gráfica. • Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos. Estatística <ul style="list-style-type: none"> • Estatística – generalidades. • Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). • Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva). 	Movimentos periódicos <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de trigonometria básica e sua generalização. • Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos. Movimentos não lineares <ul style="list-style-type: none"> • Investigação das características das funções racionais. • Modelação de situações envolvendo fenómenos não periódicos. • Modelação de situações envolvendo variações de uma função; taxa de variação. 	Modelos de probabilidades Modelos discretos <ul style="list-style-type: none"> • As sucessões. Modelos contínuos não lineares <ul style="list-style-type: none"> • As exponenciais e as logarítmicas. • As logísticas. Problemas de otimização <ul style="list-style-type: none"> • Aplicações da taxa de variação. • Programação linear.

Embora tenhamos descrito apenas o programa de Matemática B, podemos considerar que as observações sobre modelagem valem para todo o currículo do ensino secundário em Portugal. Isso porque, no programa de Matemática A, que conta com uma carga horária maior, “aplicações e modelação matemática” também é um dos temas que orientam a seleção de conteúdos. Mais especificamente, são definidos outros temas como “lógica e raciocínio matemático” e “comunicação matemática” na orientação do currículo, considerando o prosseguimento dos estudos em nível universitário, mas a parte de modelagem continua fazendo parte da metodologia de trabalho.

A descrição que fizemos aqui mostra um exemplo significativo de como a modelagem pode estabelecer o elo entre as finalidades mais gerais da escola básica e os conteúdos que, de fato, serão trabalhados nas aulas de Matemática. O Cálculo já apareceu nessa descrição como um elemento importante para um currículo construído sob essa perspectiva. Na próxima seção, vamos aprofundar essa análise, estabelecendo relações mais explícitas entre as atividades de modelagem e as noções do Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, será abordada a modelagem de sistemas dinâmicos, isto é, o estudo do comportamento, ao longo do tempo, das principais variáveis que descrevem um sistema.

1.4 A modelagem dos sistemas dinâmicos

O estudo dos sistemas dinâmicos constitui-se um campo de pesquisa interdisciplinar, que tem atraído pesquisadores de diferentes áreas como Engenharia, Matemática, Física, Biologia e Economia. O avanço da modelagem de sistemas dinâmicos sempre esteve associado à evolução dos computadores. De acordo com Morrison (2008), “o estudo de sistemas dinâmicos data de tempos antigos, mas antes de 1957 o assunto era uma especialidade misteriosa conhecida principalmente por astrônomos e físicos”⁶. Com o desenvolvimento exponencial que a computação experimentou nos últimos 60 anos, o enfoque dos sistemas dinâmicos começou a ser aplicado a problemas cada vez mais complexos, despertando o interesse de muitas áreas.

Antes de abordar as possibilidades de aplicação da modelagem dinâmica na escola básica, é importante trazer algumas definições básicas adotadas pelos estudiosos dessa área. Meadows (2008) define **sistema** como “um conjunto de elementos ou partes coerentemente organizado e interconectado em um padrão ou estrutura que produz um conjunto de comportamentos característicos, muitas vezes classificado como sua ‘função’ ou ‘finalidade’”⁷. E coloca ainda que **dinâmica** refere-se ao “comportamento, ao longo do tempo, de um sistema ou qualquer um de seus componentes”⁸.

Um exemplo da aplicação da teoria dos sistemas dinâmicos é o estudo da evolução de uma determinada população ao longo do tempo. Depois de se delimitar o sistema que se pretende estudar (por exemplo, a população de uma determinada espécie em um parque de preservação ambiental), passa-se a identificar as relações existentes entre os seus diferentes componentes (as relações entre os indivíduos daquela espécie e com as outras espécies encontradas no parque, sua interação com os recursos naturais daquela região, possíveis agentes patogênicos, oscilações nas condições climáticas, e assim por diante). Representando essas relações por meio de ferramentas matemáticas, procura-se prever como será o comportamento das principais variáveis do sistema ao longo do tempo (no nosso exemplo, o número de indivíduos daquela espécie que habitarão o parque nos próximos anos).

⁶ The study of dynamic systems dates to ancient times, but before 1957 the subject was an arcane specialty known mostly to astronomers and physicists.

⁷ A set of elements or parts that is coherently organized and interconnected in a pattern or structure that produces a characteristic set of behaviors, often classified as its “function” or “purpose”.

⁸ The behavior over time of a system or any of its components.

Assim, entenderemos neste trabalho que a modelagem de sistemas dinâmicos corresponde a prever, por meio de um modelo matemático, o comportamento de um sistema que se modifica ao longo do tempo. Além do estudo da dinâmica populacional de uma espécie, a determinação, ao longo do tempo, da posição de um corpo em movimento por meio de uma equação horária é outro exemplo de modelagem de um sistema dinâmico.

O comportamento do sistema é descrito por uma ou mais variáveis quantitativas, cujos valores se modificam ao longo do tempo. O modelo matemático construído para descrever esse sistema depende da opção de determinar os valores dessas variáveis apenas em um conjunto finito de instantes de tempo ou em todos os instantes de um período de tempo identificado por um intervalo real. No primeiro caso, temos um **modelo discreto** e, no segundo, um **modelo contínuo**. A seguir, vamos apresentar as principais ferramentas matemáticas utilizadas em cada tipo de modelagem.

1.4.1 Modelagem discreta

Na modelagem discreta, procura-se prever o valor de cada variável v em $n + 1$ instantes de tempo. Assim, a resolução do modelo matemático é dada por uma sequência de valores $(v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ assumidos pela variável v em cada um desses instantes de tempo. Na maioria das vezes, o intervalo entre dois instantes de tempo consecutivos é constante, sendo chamado de **passo** da modelagem. O passo mais conveniente para fazer uma modelagem depende do tipo de sistema que se deseja estudar, podendo ser de um ano, um mês, 10 minutos, e assim por diante. Neste trabalho, vamos sempre considerar um passo constante para as modelagens discretas. Assim, os instantes de tempo, medidos na unidade de tempo definida pelo passo da modelagem, serão representados pela sequência $(0, 1, 2, 3, \dots, n)$.

Para identificar o tipo de comportamento da variável v ao longo do tempo, é comum investigar a existência de algum padrão na forma como ela varia. No caso dos modelos discretos, utiliza-se a variação $(\Delta v)_i$, correspondente ao instante de tempo i , que é dada por:

$$(\Delta v)_i = v_{i+1} - v_i \quad (1.1)$$

Para ilustrar melhor como o estudo da variação de uma variável pode auxiliar o processo de modelagem discreta, vamos considerar a população mundial de 1950 a 1957 e calcular a sua variação em cada ano desse período, tomando como passo da modelagem o período de um ano. Os dados encontram-se na tabela 4.

Tabela 4 – População mundial de 1950 a 1957. Fonte: U.S. Bureau of the Census⁹.

Ano	Passo i (anos)	População P_i no passo i (em bilhões de habitantes)	Variação $(\Delta P)_i = P_{i+1} - P_i$
1950	0	2,558	0,037
1951	1	2,595	0,042
1952	2	2,637	0,045
1953	3	2,682	0,048
1954	4	2,730	0,052
1955	5	2,782	0,053
1956	6	2,835	0,056
1957	7	2,891	----

Para investigar a existência de um padrão de comportamento para a população mundial no período considerado, construímos o gráfico das variações $(\Delta P)_i$ em função das populações P_i , mostrado na figura 5.

Figura 5 – Variação anual da população mundial em função da população (1950 a 1957)

⁹ Disponível em: <https://www.census.gov/population/international/data/worldpop/table_population.php>. Acesso em 23.02.16.

Uma rápida análise visual sugere que os pontos do gráfico podem ser bem aproximados por uma reta. Em outras palavras, um modelo matemático que retrata, de maneira aproximada, o comportamento da população mundial no período de 1950 a 1957 é dado pela equação:

$$(\Delta P)_i = a \cdot P_i + b, \quad (1.2)$$

em que a e b são constantes que podem ser determinadas usando métodos estatísticos¹⁰. Lembrando da definição de variação dada pela equação (1.1), $(\Delta P)_i = P_{i+1} - P_i$, vemos que a equação (1.2) permite calcular o valor aproximado da população em um determinado ano a partir da população do ano anterior. Assim, o modelo matemático fica bem determinado conhecendo-se a equação que relaciona $(\Delta P)_i$ com P_i e a população no ano zero. Matematicamente, temos:

$$\begin{cases} P_0 = 2,558 \\ P_{i+1} - P_i = a \cdot P_i + b \end{cases} \quad (1.3)$$

O modelo matemático representado pela equação (1.3), além de aproximar os valores da população mundial para o período de 1950 a 1957, permite que se façam projeções dessa população para os anos seguintes. Comparando essas projeções com os dados reais, pode-se fazer a validação do modelo e aprimorá-lo, caso seja necessário.

A equação (1.3) é um exemplo de uma **equação a diferenças**. As equações a diferenças representam uma ferramenta matemática bastante adequada para a modelagem discreta. Além disso, a resolução dessas equações pode ser feita de maneira relativamente simples com a utilização do computador. Como se trata de uma fórmula de recorrência, o uso de uma planilha eletrônica permite obter rapidamente a sequência de valores de cada variável envolvida na modelagem.

De maneira geral, a modelagem discreta de muitos sistemas dinâmicos pode ser feita a partir de uma equação a diferenças do tipo:

$$\begin{cases} v_0 = k \\ v_{i+1} - v_i = f(v_i, i) \end{cases} \quad (1.4)$$

A função f que aparece na equação (1.4) representa o padrão de variação da variável v . Pode-se determinar a lei dessa função de diversas maneiras: utilizando dados

¹⁰ Uma maneira de obter valores para as constantes a e b consiste em aplicar o método dos mínimos quadrados, o que pode ser feito utilizando uma planilha como o Excel. O detalhamento desses cálculos, porém, foge do escopo deste trabalho.

experimentais (como feito no exemplo da população mundial), a partir da lei física de determinado fenômeno ou admitindo certas hipóteses baseadas no conhecimento que se tem do sistema a ser estudado.

Por exemplo, na modelagem do crescimento de uma população, pode-se considerar que a variação da população é proporcional ao tamanho dessa população. Nesse caso, teríamos $f(v_i, i) = k \cdot v_i$. Se quisermos aprimorar esse modelo, podemos considerar que a variação da população é proporcional ao seu tamanho e, também, à diferença entre a capacidade suporte S que o ambiente oferece para aquela população e a própria população. Agora, a lei de f seria dada por $f(v_i, i) = k \cdot v_i \cdot (S - v_i)$.

A equação (1.4) pode ser adaptada para representar interações entre duas ou mais variáveis envolvidas na modelagem do sistema estudado. Pode-se considerar, também, que o valor da variável no próximo passo (v_{i+1}) depende do seu valor nos dois passos anteriores (v_i e v_{i-1}). O detalhamento desses cálculos, porém, foge do escopo desse trabalho, podendo ser visto em Bassanezi (2015).

1.4.2 Modelagem contínua

Como dissemos anteriormente, na modelagem discreta, opta-se por um modelo matemático construído para descrever o sistema estudado apenas em um conjunto finito de instantes de tempo. Há várias razões que podem influenciar essa opção, ligadas, principalmente, às características do sistema e à complexidade do modelo que se pretende obter. No caso da análise que fizemos da população mundial, por exemplo, é razoável considerar apenas as variações anuais, uma vez que as oscilações da população ao longo de um ano devido a nascimentos e mortes não impactam de maneira significativa nas taxas de natalidade e mortalidade.

Em outras situações, porém, pode ser necessário considerar intervalos de tempo menores ou até mesmo a utilização de taxas de variação instantâneas. É o caso, por exemplo, de muitas situações de modelagem envolvendo transferência de calor, como a simulação do tempo que uma xícara de café quente deixada sobre uma mesa leva para atingir a temperatura ambiente. Neste caso, utiliza-se a lei de resfriamento de Newton, enunciada em termos da taxa instantânea de perda de calor dessa xícara.

Quando se trabalha com taxas de variação instantâneas, a dinâmica do fenômeno modelado é considerada a cada instante de um intervalo de tempo. Assim, a resolução do modelo matemático é dada por uma função v cujo domínio é um intervalo real e cuja imagem corresponde a todos os valores $v(t)$ assumidos por essa função nos instantes de tempo desse intervalo. Em outras palavras, a função v é tal que:

$$\begin{aligned} v: [a, b] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto v(t) \end{aligned}$$

Nestes casos, temos uma **modelagem contínua**, sendo a taxa de variação instantânea em um instante qualquer do intervalo $[a, b]$ a **derivada** da função v nesse ponto.

A estratégia da modelagem contínua de sistemas dinâmicos é a mesma já mostrada para os modelos discretos: o sistema é descrito a partir do padrão de variação da variável v . A diferença consiste no fato de que, sendo usadas taxas de variação instantâneas, são obtidas **equações diferenciais** que, de maneira análoga à equação (1.4), podem ter a seguinte forma¹¹:

$$\begin{cases} v(0) = k \\ \frac{dv}{dt} = f(v, t) \end{cases} \quad (1.5)$$

A resolução de equações diferenciais, seja por métodos analíticos ou numéricos, constitui-se num campo bastante vasto da matemática. Não pretendemos, neste trabalho, abordar técnicas de resolução dessas equações. Nosso objetivo é apenas mostrar o enfoque comum das modelagens discreta e contínua de sistemas dinâmicos, por meio da determinação do padrão de variação das variáveis envolvidas, e as ferramentas matemáticas decorrentes de cada abordagem.

Antes de passar ao próximo tópico, vale a pena destacar que as equações a diferenças e as equações diferenciais, utilizadas na construção de modelos discretos e contínuos de sistemas dinâmicos, respectivamente, permitem a exploração de assuntos bem variados, com grande potencial para despertar o interesse dos alunos. Bassanezi (2015) relata situações de modelagem aplicadas em cursos de especialização para professores em

¹¹ A equação (1.5) é uma equação diferencial de 1ª ordem, pois só envolve a função v e sua derivada primeira. Em certas situações de modelagem, podem ser obtidas equações diferenciais de 2ª ordem e/ou sistemas de equações diferenciais.

que os temas escolhidos pelos participantes relacionavam-se a diferentes áreas do conhecimento. O autor descreve, por exemplo, um trabalho em que foram construídos dois modelos – um discreto e outro contínuo – para a propagação de uma doença em maçãs armazenadas em grandes caixas de madeira. Outros trabalhos exploraram a evolução dos tempos registrados nos recordes da corrida de 100 metros rasos, o estudo das variações dos índices de criminalidade em municípios da Grande São Paulo ao longo dos anos e a dinâmica de crescimento de microrganismos na fabricação de papel.

A possibilidade de explorar temas tão variados permite que se conciliem interesses diferentes que naturalmente existem em uma sala de aula. Além disso, a escolha desses assuntos pelos alunos traz uma vantagem adicional. De acordo com Bassanezi (2015), “é muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos que, desta forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva”.

1.4.3 O Cálculo na modelagem de sistemas dinâmicos

Ao longo das descrições que fizemos dos processos de modelagem de sistemas dinâmicos, surgiram, naturalmente, relações entre as ferramentas usadas e alguns conceitos importantes do Cálculo. Vamos finalizar este capítulo procurando evidenciar tais relações, que servirão como subsídio para as análises que serão feitas nos próximos capítulos.

Tanto no caso discreto quanto no contínuo, destacamos que a estratégia de modelagem adotada consiste em identificar algum padrão de variação em uma ou mais variáveis que se modificam ao longo do tempo. Por outro lado, a ideia de descrever quantitativamente a variação de uma variável dependente em relação a uma variável independente está na raiz do conceito de derivada, um dos pilares do Cálculo. Nas palavras de Rezende (2003),

o que interessa para o Cálculo é, essencialmente, essa relação de interdependência entre as quantidades variáveis. É exatamente a partir dela que resolveremos o problema da variabilidade, isto é, da “medida” da taxa de variação de uma das variáveis em relação à outra. (p. 342 e 343)

Dessa forma, identificamos, no contexto da modelagem de sistemas dinâmicos, um ecossistema extremamente favorável para que sejam desenvolvidos os conceitos centrais do Cálculo.

Na modelagem discreta, trabalhamos com a variação $(\Delta v)_i$ de uma variável em um intervalo de tempo dado pelo passo da modelagem. A variação assim definida, mais do que uma variação absoluta, corresponde a uma taxa de variação média no intervalo determinado pelos instantes i e $i + 1$. De fato, a taxa de variação média é dada por:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{(i+1) - i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{1} = v_{i+1} - v_i = (\Delta v)_i \quad (1.6)$$

Uma vez que o intervalo de tempo neste caso é unitário ($\Delta t = 1$), essa variação é chamada de *taxa unitária*. A taxa unitária será mais explorada no Capítulo 2.

Por exemplo, no caso da modelagem da população mundial, em que adotamos um passo de um ano, cada variação $(\Delta v)_i$ é dada em habitantes por ano, representando, portanto, a taxa de variação média no período de um ano ou, simplesmente, a taxa unitária anual.

A passagem para a modelagem contínua, do ponto de vista do ferramental matemático exigido, corresponde à transição entre a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea, sendo necessária a introdução da operação de limite. Essa transição, que será realizada de maneira detalhada na seção 2.2.4, corresponde à introdução da utilização da derivada da função v no instante t , definida como:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (1.7)$$

Ao estabelecer relações entre a função v e sua derivada, da forma descrita pela equação (1.5), obtemos uma equação diferencial, cuja resolução pode envolver o Teorema Fundamental do Cálculo e o conceito de integral. Com isso, a modelagem de sistemas dinâmicos acaba envolvendo todos os principais conceitos do Cálculo: derivadas, integrais e limites.

Fazendo uma síntese do que vimos até aqui, a utilização de atividades envolvendo modelagem pode aproximar as aulas de Matemática das finalidades mais gerais da escola básica, descritas nos documentos oficiais, especialmente em relação à compreensão de fenômenos. Ao mesmo tempo, trata-se de uma estratégia pedagógica com muito potencial para atrair o interesse dos jovens para o estudo da matemática, além de contribuir com a integração entre diferentes disciplinas.

Diante da possibilidade de incorporar a modelagem como um tema transversal dentro do programa de Matemática do Ensino Médio, seria necessário repensar, dentro dos assuntos que são tradicionalmente abordados nesse segmento, os enfoques e as ênfases a serem dados em cada tema.

Retomando a representação do ciclo de modelagem mostrada na figura 4, vimos a importância do Cálculo para a etapa de abstração, uma vez que suas ferramentas permitem identificar e representar matematicamente os diferentes padrões de variação.

Na etapa de validação do modelo, em que os resultados obtidos são comparados com os dados reais, a Estatística desempenha um papel fundamental, facilitando o tratamento das informações extraídas do sistema físico e avaliando a existência de correlações entre as variáveis desse sistema.

No nosso entendimento, porém, o enfoque do ensino de Estatística na escola básica deveria ser diferente para que esse tipo de análise pudesse ser feito no Ensino Médio. Para não desviar do foco de nosso trabalho, não entraremos em detalhes sobre essa questão, apenas deixando três referências que tratam da relevância, das finalidades e das diferentes concepções do ensino de Estatística na escola básica: Shaughnessy (2007), Lopes (2008) e Ponte e Fonseca (2001).

Além de propiciar um ambiente favorável para a criação de significado em torno das ideias básicas do Cálculo e da Estatística, as atividades de modelagem podem fortalecer a noção de aproximação dentro das aulas de Matemática. De fato, trabalhando com problemas reais, é necessário que sejam feitas simplificações durante a etapa de abstração, de modo que o modelo construído representa apenas uma aproximação do sistema físico estudado.

Além disso, como detalharemos no Capítulo 2, a ideia de aproximação é central para o desenvolvimento das noções fundamentais do Cálculo. Também as ferramentas estatísticas levam em consideração as incertezas e os resultados aproximados. Finalmente, o trabalho com métodos numéricos, com auxílio do computador, baseia-se na obtenção de soluções aproximadas, que podem ser refinadas ao longo de um conjunto de iterações.

O trabalho com aproximações na escola básica é muito saudável, ajudando a romper com a impressão de que, na matemática, só são aceitos resultados exatos. A aproximação é

uma ideia fundamental dentro da matemática e uma condição fundamental para que ela possa ser aplicada a problemas reais.

A relação estabelecida entre a modelagem como um recurso didático, as finalidades gerais do Ensino Médio e as principais ideias matemáticas envolvidas no ciclo de modelagem estão sintetizadas na figura 6.

Figura 6 – A modelagem como um elo entre a compreensão de fenômenos e os conteúdos matemáticos

Muitos podem argumentar não ser viável trabalhar o Cálculo (e a Estatística) em atividades de modelagem como as descritas aqui, por considerarem se tratar de assunto muito complexo para ser visto no Ensino Médio. Ou ainda por temerem não haver tempo para ensinar o Cálculo na escola básica de modo que ele possa ser aplicado nas atividades de modelagem. No próximo capítulo, vamos tratar dessas questões, buscando um caminho que permita compatibilizar o currículo do Ensino Médio com uma abordagem que traga a modelagem e o Cálculo para as aulas de Matemática desse segmento, sem que isso represente um aumento da carga de conteúdo atualmente vista nas escolas.

CAPÍTULO 2 – As ideias fundamentais do Cálculo e o currículo do Ensino Médio

É muito difícil propor uma alteração no currículo de Matemática do Ensino Médio no Brasil, principalmente se ela envolver a inclusão de um conteúdo que tradicionalmente não seja visto na maioria das escolas. Antes que se possa terminar a primeira frase, muitas vezes se levantam argumentando que o programa já é muito extenso, quase não havendo tempo para tratar de todos os assuntos previstos. E que os professores, no caso das escolas particulares, são muito pressionados pelas cobranças relativas à preparação para os exames vestibulares e aos resultados dos alunos no ENEM, de modo que o novo conteúdo, se não fizer parte do programa dessas provas, acaba sendo ignorado pela maioria dos docentes.

Se o conteúdo a ser incluído é o Cálculo, as reações tendem a ser ainda mais fortes, devido à identificação automática que se faz com as últimas experiências ligadas ao ensino de Cálculo nas escolas de Ensino Médio do Brasil. Como descrevemos no início do trabalho, esse conteúdo fazia parte do programa de muitos exames vestibulares até a década de 1990, ainda que fosse cobrado de maneira bem esporádica. Com isso, a maioria dos livros didáticos trazia alguns capítulos sobre Cálculo e muitas escolas particulares faziam o possível para abordar esse conteúdo, ainda que de modo não muito profundo. Uma análise rápida da forma como esse conteúdo era tratado nesses materiais didáticos pode colocar um pouco de luz à resistência que muitos manifestam sobre o retorno do Cálculo ao Ensino Médio.

Em praticamente todos os livros que abordavam o Cálculo Diferencial e Integral, o assunto aparecia apenas no final do último volume, dedicado à 3ª série. O Cálculo não era tratado de forma integrada a outros conteúdos como Funções, Sequências ou Geometria Analítica, formando um conjunto de capítulos desvinculado do restante da obra. Essa opção dos autores acabava reforçando a ideia de que o Cálculo era mais um tópico da lista de conteúdos, e não um assunto que pudesse conferir maior significado para a aprendizagem de outros conceitos.

Um problema ainda maior do que o isolamento do Cálculo em relação ao restante do programa, porém, era a sequência de tópicos adotada. Reproduzindo o modelo de ensino

dessa disciplina nos cursos universitários, os livros do antigo 2º grau privilegiavam a construção lógico-dedutiva do Cálculo, em lugar de focar a discussão nos seus conceitos mais centrais. A título de ilustração, a tabela 5 mostra a organização dos conteúdos de Cálculo em um livro de 1995¹² voltado para o 3º ano do antigo 2º grau.

Tabela 5 – Sequência de conteúdos de Cálculo em livro para o 2º grau (1995).

Capítulo	Assunto
23	Limite de uma função
24	Continuidade de funções e propriedades dos limites
25	Limites e continuidade laterais
26	Limites infinitos
27	Cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$
28	Cálculo de limites de funções trigonométricas
29	Cálculo de limites de funções exponenciais e logarítmicas
30	Limite de uma função real de variável inteira n , para $n \rightarrow +\infty$ ou $n \rightarrow -\infty$
31	Derivada de uma função em um ponto
32	Derivadas fundamentais e regras de derivação
33	Derivadas de funções inversas e derivação implícita
34	Estudo da variação de uma função através de sua derivada
35	Construção de gráficos e aplicação de derivadas ao estudo do movimento retilíneo

Chama a atenção o fato de que, dos 13 capítulos da obra dedicados ao Cálculo, oito tratavam de limites e cinco de derivadas, sem que o conceito de integral fosse abordado. O conceito de limite é, sem dúvida, muito importante para a estruturação lógica do Cálculo, mas está longe de representar suas ideias mais fundamentais. Foi por meio dos conceitos de derivada e integral que o Cálculo surgiu, no século XVII, unificando uma série de problemas que, antes, eram resolvidos separadamente. O conceito de limite, por sua vez, só começou a aparecer na segunda metade do século XVIII.

Sobre essa forma de apresentar o Cálculo na escola básica, concordamos com Ávila (2006), que aponta:

É gratificante constatar que alguns autores já estão incluindo a derivada em seus livros para o ensino médio, de maneira sensata, breve e equilibrada; mas,

¹² *Matemática: Ensino de 2º Grau - Volume 3*. São Paulo: Moderna, 1995.

infelizmente, ainda na terceira série, já no final do curso, quando pouco se pode aproveitar desse estudo. Há também uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o ensino médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário. (p. 37)

Mais do que um hábito, a insistência com o “pesado capítulo sobre limites” revela uma concepção sobre o ensino de Cálculo, numa discussão que se estende também para os cursos universitários. Diversos pesquisadores brasileiros (Bonomi, 1999; Rezende, 2003; Lima, 2015) têm sinalizado para o caráter de Análise que predomina nos cursos introdutórios de Cálculo, quando o formalismo, o rigor e as técnicas de cálculo acabam se sobrepondo à discussão das ideias mais básicas da disciplina.

Dessa forma, é preciso deixar claro, mais uma vez, que não se pretende propor uma volta do Cálculo aos currículos do Ensino Médio nos mesmos moldes em que ele foi trabalhado até a década de 1990, ou seja, como uma antecipação de um curso de Análise. Pelo contrário, considerando as finalidades mais gerais da escola básica, acreditamos que a discussão das ideias mais fundamentais do Cálculo, sem tanta preocupação com as técnicas, pode trazer uma contribuição importante para a formação dos jovens nesse segmento, como detalhado no primeiro capítulo deste trabalho.

Além disso, ao trabalhar com as ideias fundamentais do Cálculo, acreditamos que podemos promover uma integração com outros conceitos tradicionalmente estudados no Ensino Médio, dando mais subsídios aos alunos no processo de criação de significado em torno desses conceitos. O uso de atividades envolvendo modelagem de sistemas dinâmicos descrito anteriormente é um exemplo do potencial que o Cálculo possui para integrar diferentes áreas do conhecimento e diferentes conceitos matemáticos.

Assim, vamos procurar construir, ao longo deste capítulo, uma ponte entre as ideias fundamentais do Cálculo e o currículo atual do Ensino Médio. Para isso, é importante começarmos delimitando melhor o que entendemos por ideias fundamentais de uma maneira geral, para depois nos debruçarmos sobre o Cálculo.

2.1 O que são ideias fundamentais?

Os currículos não podem ser elementos imutáveis da estrutura escolar. Pelo contrário, eles devem ser constantemente revisitados e revistos, de modo que possam refletir as demandas sociais de cada época, além de incorporar os avanços produzidos pelas pesquisas na área de Educação.

De tempos em tempos, porém, a combinação de diferentes fatores pode levar a uma discussão mais profunda a respeito do que se ensina nas escolas, e com quais finalidades. Tais momentos oferecem uma oportunidade bastante rica para que se faça uma reflexão sobre os grandes temas, as linhas mais gerais dos currículos, afastando-se por um instante dos pormenores, dos detalhes mais técnicos que compõem as diferentes disciplinas.

A Conferência de Woods Hole, realizada em 1959 nos Estados Unidos, foi um desses momentos. Os novos desafios enfrentados pela sociedade moderna no período do pós-guerra e os rápidos avanços científicos vividos nos anos anteriores impulsionaram o surgimento de vários grupos de pesquisa com o objetivo de discutir melhorias para o ensino de ciências e matemática nas escolas primárias e secundárias. Motivados por essas discussões, 35 acadêmicos, entre cientistas, educadores e psicólogos, reuniram-se em Woods Hole para analisar a natureza dos processos ligados à aquisição do conhecimento científico.

No ano seguinte, Jerome Bruner, presidente da conferência, produziu um relatório (Bruner, 1973) onde registrou as principais conclusões do encontro, que usaremos como ponto de partida para a discussão sobre ideias fundamentais e sua importância para a elaboração de um currículo.

Ao longo do processo de escolarização, vivenciamos diferentes situações de aprendizagem. Algumas delas são mais específicas, contribuindo para o aprimoramento da habilidade de realizar tarefas de natureza semelhante à da primeira. Por exemplo, quando um estudante aprende os procedimentos necessários para traçar um ângulo de 60° com régua e compasso, sem maiores preocupações com as justificativas envolvidas naquela construção, irá, provavelmente, melhorar sua habilidade para realizar outras construções geométricas de mesma natureza, como a de um hexágono regular ou de um triângulo equilátero. No entanto, tal aprendizado dificilmente contribuirá para que ele resolva

problemas ou compreenda fenômenos de outras áreas do conhecimento, como Física ou Química.

Por outro lado, há situações de aprendizagem que nos confrontam com ideias mais gerais, cuja aplicação não se limita a um conjunto restrito de tarefas. Tais situações, que contribuem para o desenvolvimento da capacidade de transferir um conhecimento para diferentes contextos, muitas vezes interdisciplinares, objetivam a compreensão da **estrutura** de uma determinada matéria de estudo. De acordo com Bruner (1973),

Captar a estrutura da matéria em estudo é compreendê-la de modo que permita relacionar, de maneira significativa, muitas outras coisas com ela. Aprender estrutura, em suma, é aprender como as coisas se relacionam. (p. 7)

O que permite, por exemplo, relacionar as propriedades de duas figuras semelhantes com a estequiometria, da Química? Nos dois casos, o conceito de proporcionalidade fornece as bases para o entendimento dos cálculos que são realizados para resolver os problemas propostos. Quando duplicamos o diâmetro de uma circunferência, seu comprimento também é duplicado. Da mesma forma, quando duplicamos as massas dos reagentes em uma reação química, as massas dos produtos obtidos também se duplicam. Ao identificar uma relação entre os dois fatos, um aluno está começando a compreender a estrutura da matéria que está sendo estudada.

A chave para a compreensão da estrutura de uma matéria está nas ideias fundamentais que a suportam, e não nos detalhes técnicos que utilizamos para resolver muitos problemas. Entretanto, a abordagem do nosso currículo, muitas vezes, não favorece essa visão integradora propiciada pelas ideias fundamentais. No caso da proporcionalidade, muitos alunos só reconhecem esse conceito em problemas clássicos de regra de três, não sendo capazes de identificá-lo em um gráfico de uma função do 1º grau. Trata-se de uma visão compartimentada do conhecimento, fragmentado nos “feudos” que caracterizam as listas de conteúdos. Essa visão ainda predomina nos currículos e em muitas práticas pedagógicas voltadas para o Ensino Médio.

Dada a importância das ideias fundamentais para a compreensão da estrutura da matéria e como potenciais integradoras dos currículos, é interessante que tenhamos alguns critérios claros que permitam identificá-las. Machado (Machado, D’Ambrosio, Arantes, 2014)

aponta três características notáveis das ideias fundamentais, que permitem distingui-las de outras menos relevantes.

Em primeiro lugar, toda ideia fundamental pode ser enunciada em linguagem comum, sem a necessidade de recorrer a vocabulário técnico, específico de uma área do conhecimento. Evidentemente, isso não exclui a possibilidade de que ela seja descrita de maneira mais formal, quando contextualizada em uma área específica. Mas a sua essência, que transcende aquela área, sempre pode ser expressa em linguagem cotidiana.

Uma segunda característica está ligada ao seu potencial integrador dos assuntos de uma determinada disciplina. As ideias fundamentais aparecem em diferentes ramos de um campo de conhecimento, articulando-os de modo natural e criando uma identidade para a própria disciplina.

Finalmente, as ideias fundamentais nunca estão contidas em uma única disciplina. É o caso, por exemplo, da noção de energia, que ocupa um papel extremamente relevante em diferentes matérias, como Física, Geografia, Química e Biologia. Devido ao seu caráter geral, mesmo podendo ter origem em uma área específica, ideias fundamentais acabam transbordando, ultrapassando os limites daquela área e se revelando em conceitos que não pertencem ao campo de conhecimento original. Essa característica favorece abordagens pedagógicas interdisciplinares, que tanto têm sido buscadas na escola básica nos últimos anos.

Para exemplificar a identificação dessas três características, vamos retomar a ideia de **proporcionalidade**, presente em diferentes contextos, matemáticos ou não. Recorrendo ao dicionário¹³, encontramos os seguintes significados para a palavra *proporção*: relação entre coisas; comparação. As imagens de relação e comparação, de fato, são essenciais para a formação da ideia de proporcionalidade. Mesmo em contextos não matemáticos, podemos identificá-las em relações de analogia do tipo: “a novela está para o Brasil assim como o cinema está para os Estados Unidos”.

Já no contexto matemático, a proporcionalidade surge a partir da comparação de duas quantidades que variam (duas grandezas), quando se observa uma relação específica entre as variações dessas grandezas. Ainda que se possa utilizar uma nomenclatura mais

¹³ Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa – Aurélio Buarque de Holanda Ferreira – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1988.

formal para definir essa relação, também é possível fazer isso em linguagem cotidiana. Nesta linha, podemos dizer que duas grandezas mantêm uma relação de proporcionalidade quando a razão entre suas variações é constante.

Em relação ao segundo aspecto, a busca de relações entre grandezas é uma demanda frequente em diferentes campos da Matemática, fazendo com que a proporcionalidade esteja presente em tópicos aparentemente bem distantes. Na geometria, a ideia de proporção é fundamental para o desenvolvimento da teoria de semelhança. Neste caso, buscam-se relações entre comprimentos correspondentes em duas figuras geométricas. As proporções aparecem ainda no estudo das frações, quando são investigadas as relações existentes entre frações equivalentes. As funções também representam um campo muito fértil para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade, uma vez que são estudadas relações entre duas variáveis. Por exemplo, um aspecto fundamental das funções polinomiais de 1º grau é o fato de que, neste tipo de função, as variações das variáveis x e y (Δx e Δy) são sempre proporcionais, ou seja, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não se altera. Este enfoque pode ainda ser aplicado a outros tipos de função: no estudo da função polinomial do 2º grau, pode-se partir de uma relação de proporcionalidade entre y e o quadrado de x ($y = kx^2$) e, na função exponencial, tem-se que a taxa de variação é proporcional ao valor da função.

A capilaridade da noção de proporção, porém, não ocorre somente na Matemática. Em Química, diversos temas como o cálculo estequiométrico, as transformações gasosas e o conceito de mol estão apoiados no estabelecimento de relações de proporcionalidade. A observação de proporcionalidade entre grandezas também é fundamental na Física, para o estabelecimento de diversas leis, como no caso da gravitação e da eletrostática. Mesmo em Geografia, as representações em escala feitas nos mapas dependem fundamentalmente das proporções.

Podemos dizer, portanto, que a proporcionalidade é uma ideia fundamental que perpassa o currículo de Matemática do Ensino Médio, contribuindo com a articulação de seus diferentes tópicos e, também, com a integração com outras disciplinas. Podemos acrescentar a ela outras ideias bem poderosas, como variação, equivalência, medida, aleatoriedade, entre outras, e teremos uma rede que entrelaça toda a Matemática da escola básica.

Tal constatação pode sugerir a necessidade de estabelecer uma lista universal com as ideias fundamentais da Matemática, que oriente a elaboração de todos os currículos dessa disciplina. A questão, porém, não é tão simples. Muitas das ideias fundamentais estão intimamente ligadas, de modo que qualquer uma delas poderia ser utilizada para integrar diferentes assuntos do currículo. É o caso, por exemplo, das ideias de proporcionalidade e linearidade.

Assim, quando se planeja o ensino de uma disciplina, ou mesmo de um assunto, deve-se partir da identificação das ideias fundamentais que se pretende explorar, levando em conta os objetivos estabelecidos, o nível de escolaridade, as particularidades do grupo específico de alunos com o qual se vai trabalhar, e assim por diante. Com isso, o conjunto de ideias fundamentais pode ser diferente, cumprindo, da mesma maneira, seu papel integrador e evitando que o foco acabe sendo colocado em pormenores técnicos de menor relevância. Seguindo essa linha de raciocínio, Machado (Machado, D'Ambrosio, Arantes, 2014) resume muito bem o papel das ideias fundamentais.

Em cada conteúdo, devem ser identificadas as ideias fundamentais a ser exploradas. Tais ideias constituem a razão do estudo das diversas disciplinas: é possível estudar muitos conteúdos sem dar atenção adequada às ideias fundamentais envolvidas, como também o é amplificar tais ideias tendo por base a exploração de alguns poucos conteúdos. A lista do que deve ser estudado costuma ser extensa, sendo às vezes artificialmente ampliada por meio de uma fragmentação minuciosa em tópicos nem sempre significativos; a lista de ideias fundamentais a ser exploradas, no entanto, não é tão extensa, uma vez que justamente o fato de serem fundamentais conduz a uma reiteração delas no estudo de uma grande diversidade de assuntos. (p. 54 e 55)

Diante do exposto, é natural que, ao propor o ensino de Cálculo na escola básica, comecemos pela discussão sobre o conjunto de ideias fundamentais relacionadas a esse assunto que poderia ser utilizado para ancorar tal estudo. É o que faremos na próxima seção.

2.2 As ideias fundamentais do Cálculo

A tarefa de mapear as ideias fundamentais de uma área como o Cálculo é bastante complexa e pode conduzir a diferentes resultados dependendo da perspectiva sob a qual ela

é feita. Para realizá-la de maneira adequada, acreditamos ser importante levar em consideração o desenvolvimento histórico do Cálculo, aspectos epistemológicos desse campo da Matemática e informações provenientes das salas de aula, obtidas pelo contato com diferentes profissionais envolvidos no ensino dessa disciplina.

Diante da amplitude de uma análise dessas proporções, que certamente ultrapassaria o escopo deste trabalho, vamos nos apoiar, principalmente, em duas pesquisas que trataram do tema de maneira complementar, além da nossa própria experiência como docente de Cálculo.

2.2.1 A visão dos especialistas e os problemas centrais do Cálculo

No primeiro trabalho, Sofronas et al. (2011) entrevistaram 24 especialistas ligados ao ensino de Cálculo, entre autores de livros didáticos, professores com mais de 20 anos de experiência nessa disciplina e membros de comitês nacionais para o ensino de Cálculo. Embora os autores não tenham informado diretamente, fica implícito no contexto da pesquisa que todos os especialistas atuam nos Estados Unidos. Partindo da pergunta “O que significa dizer que um aluno compreendeu o Cálculo do primeiro ano?”, foi pedido aos especialistas que apontassem os objetivos de aprendizagem mais gerais de um curso inicial de Cálculo.

É importante destacar que a pesquisa se referia a um curso de Cálculo para o nível universitário. Embora este capítulo trate do ensino do Cálculo no contexto do Ensino Médio, consideramos que a visão desses especialistas contribui para a formação de um quadro geral representativo das ideias fundamentais do Cálculo.

Apesar de os especialistas revelarem pontos de vista bem diversos, os autores puderam identificar importantes pontos de convergência, de modo que emergiram dos dados quatro objetivos centrais para um curso inicial de Cálculo. A tabela 6 mostra esses objetivos e o percentual de especialistas que citaram cada um deles.

Tabela 6 – Os quatro objetivos centrais de um curso inicial de Cálculo na visão de 24 especialistas.

(a) Domínio pleno dos conceitos ¹⁴ fundamentais do Cálculo.	100%
(b) Construção de conexões e inter-relações entre esses conceitos.	83%
(c) Habilidade de aplicar as ideias do Cálculo na resolução de problemas e na modelagem de fenômenos.	63%
(d) Conhecimento do contexto e da finalidade do Cálculo.	42%

(Sofronas et al., 2011).

Chama a atenção nas informações da tabela 6 o fato de que apenas 63% dos especialistas citaram o objetivo (c), enquanto que 100% se referiram ao objetivo (a), sugerindo que mais de um terço do grupo pesquisado desvincula a aplicação das ideias do Cálculo do domínio de seus conceitos fundamentais, mesmo no contexto de um curso inicial dessa disciplina. Esse dado, porém, não é tão surpreendente quando se considera o conjunto dos professores universitários de Cálculo.

Aprofundando a análise, os autores afirmam que os objetivos centrais permeiam todo o curso, ligando-se a metas mais específicas. Assim, a transcrição das entrevistas também permitiu elencar as principais metas específicas relacionadas a cada objetivo central. Interessa-nos, particularmente, observar os desdobramentos do objetivo (a), que se refere aos conceitos fundamentais do Cálculo. Eles estão mostrados na tabela 7, juntamente com o percentual de especialistas que citou cada um.

Tabela 7 – Conceitos fundamentais do Cálculo na visão de 24 especialistas.

Derivadas	100%
Integrais	96%
Limites	71%
Sequências e séries	38%
Aproximação	33%

(Sofronas et al., 2011).

Praticamente todos os especialistas entrevistados apontaram a derivada e a integral como conceitos fundamentais do Cálculo. Em relação aos limites, porém, apenas 71%

¹⁴ Mantivemos a expressão “conceitos fundamentais” conforme o artigo original. No entanto, entendemos o sentido utilizado aqui pelos especialistas muito mais como “ideias” ou “noções” fundamentais do Cálculo, uma vez que a formalização dos conceitos seria mais apropriada ao contexto de um curso de Análise.

fizeram essa mesma avaliação. Esses dados motivam a retomada da discussão iniciada no princípio deste capítulo sobre o papel dos conceitos de derivada, integral e limite na construção do Cálculo. Para isso, é importante resgatar alguns aspectos históricos.

Embora muitos outros matemáticos tenham contribuído para o desenvolvimento das ideias do Cálculo, atribui-se a Newton (1642 – 1727) e a Leibniz (1646 – 1716) a “invenção” do Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com Rezende (2003),

a razão [para isso] deve-se principalmente ao fato de que ambos desenvolveram procedimentos algorítmicos que deram origem posteriormente aos conceitos de derivada e integral, além, é claro, de usarem com regularidade o fato dessas operações serem inversas uma da outra para estabelecer os seus cálculos. (p. 187)

A motivação para o surgimento do Cálculo está ligada à resolução de problemas como a determinação da reta tangente a uma curva e o cálculo da área de regiões planas. Os caminhos utilizados pelos matemáticos do século XVII e seus antecessores para resolver tais problemas, embora envolvessem ideias intuitivas de limites, apoiavam-se, de forma primordial, nos conceitos de derivada e integral. Daí a justificativa para os historiadores da matemática considerarem Newton e Leibniz como os “inventores” do Cálculo: ao criar algoritmos que unificavam diferentes métodos de resolução e relacionar os conceitos de derivada e integral, eles apresentaram ao mundo o coração do Cálculo como campo de conhecimento, ainda que não tivessem estabelecido o conceito de limite. Nesse sentido, o Teorema Fundamental do Cálculo tem um papel central na formação desse campo de conhecimento, ao mostrar que a derivada e a integral podem ser vistas de maneira única, representando as duas faces de uma mesma moeda.

Além das razões citadas acima, Kleiner (2012) acrescenta duas outras contribuições de Newton e Leibniz: as notações criadas por eles e a ampliação do espectro de aplicação do Cálculo, que antes se concentrava nos polinômios e, depois, passou a abranger praticamente todos os tipos de funções, algébricas e transcendentais.

Sobre os dados apresentados por Sofronas et al. (2011), vale ainda destacar que 33% dos especialistas citaram “aproximação” como um conceito fundamental do Cálculo. De certa maneira, as contribuições dos conceitos de limite e sequência para a construção do Cálculo podem ser reunidas na ideia de aproximação, que é mais ampla. De fato, baseando-se na ideia de aproximação, os limites e sequências permitem definir, com mais precisão,

noções intuitivas como “infinitamente próximo” e “infinitamente grande”. No entanto, considerando a metodologia do estudo, em que os termos não foram apresentados aos especialistas, mas emergiram de suas falas, os três conceitos acabaram subsistindo.

Ainda em relação a esse tópico, a caracterização feita por um dos especialistas, reproduzida a seguir, pareceu-nos bem pertinente, devendo ser enfatizada em um curso inicial de Cálculo.

Aproximar a solução, melhorar a aproximação, torná-la exata. Inicialmente, eu não posso resolver o problema, mas posso aproximar a sua solução. Particionar um intervalo ou olhar para uma soma parcial de uma sequência (...) e dizer: esta é uma aproximação do problema que estou tentando resolver. Em seguida, você pode melhorar a aproximação? Sim, posso fazer isso, tomando mais termos da série ou fazendo h menor na definição de limite da derivada – ou seja lá qual for o contexto. Terceiro, você pode tornar a solução precisa? O que significa, (...) esse limite existe?¹⁵ (p. 141)

Mais a frente, retomaremos essa interpretação da ideia de aproximação, que está intimamente ligada aos conceitos de derivada e integral e pode ser explorada em um curso de Cálculo de nível compatível com o Ensino Médio.

Também merece menção o fato de que metade dos entrevistados defendeu a importância de que o conceito de derivada esteja relacionado às ideias de taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Consideramos essa associação fundamental para o real entendimento de derivada, de modo que seu estudo não seja uma mera memorização de técnicas de cálculo das derivadas das principais funções.

A análise feita até aqui permite formular aqueles que, na nossa visão, constituem os dois problemas centrais do Cálculo. Tais problemas, que estão relacionados, respectivamente, aos conceitos de derivada e integral, são enunciados a seguir.

(P1) A partir do conhecimento de uma variável, estudar o comportamento da sua taxa de variação instantânea.

(P2) A partir do conhecimento da taxa de variação instantânea de uma variável, estudar o comportamento da variável acumulada num dado intervalo.

¹⁵ Approximate the solution, improve the approximation, make it exact. Just say, I can't solve that problem, but I can approximate the solution. Partition an interval or look at a partial sum of a sequence (...) and say: this is an approximation to the problem I'm trying to solve. Next, Can you make it better? The answer is, I can make it better by taking more terms of the series or by making h smaller in the limit definition of the derivative – or whatever. Third, Can you make it precise? That means, (...) does that limit exist?

O problema (P1), que pode ser traduzido como o cálculo e o estudo da derivada de uma função, permite, entre outras coisas, calcular retas tangentes, resolver problemas de otimização (cálculo de pontos de máximo e mínimo de funções) e determinar o comportamento gráfico de uma função.

Já o problema (P2), que pode ser visto como o estudo das integrais definida e indefinida, leva ao cálculo de áreas, resolução de equações diferenciais e resolução de problemas de acumulação em geral.

Os dois problemas descritos acima conectam-se pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que explicita o fato de que a derivação e a integração são operações inversas, caracterizando as duas faces de uma mesma disciplina.

Newton, em sua obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, de 1671, faz uma descrição interessante desses dois problemas em um contexto mecânico, considerando a posição e a velocidade, ambas vistas ao longo do tempo, como variável e taxa de variação, respectivamente.

Mas sobretudo eu observaria que as dificuldades dessa espécie podem ser todas reduzidas a somente dois problemas que proporei com vista ao espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado:

1. Dado o comprimento do espaço percorrido continuamente (quer dizer, em cada [instante de] tempo), ache a velocidade do movimento num instante qualquer.
2. Dada continuamente a velocidade do movimento, ache o comprimento do espaço percorrido num instante qualquer.

(*apud* Baron; Bos – v.3, p. 26-27)

Diante do enfoque que apresentamos sobre o Cálculo a partir dos seus dois problemas centrais, é importante indicar qual o lugar dos limites na rede de conceitos e relações que constituem essa disciplina. Mais uma vez, vamos recorrer à evolução histórica dessa área para construir uma resposta a essa pergunta.

Ainda no final do século XVII e ao longo do século XVIII, surgiram vários questionamentos sobre a teoria de Newton e Leibniz. A maior parte deles dizia respeito à falta de uma formalização matemática do que seriam as quantidades infinitamente pequenas – as quantidades evanescentes de Newton e os infinitésimos de Leibniz. Estudiosos como o holandês Nieuwentijdt e o inglês Berkeley criticavam o fato de que os infinitésimos ora eram diferentes de zero, de modo que podiam representar o denominador

de uma fração, ora eram iguais a zero, quando eram desprezados em determinadas somas (Rezende, 2003). Claramente, tal questionamento revelava a não compreensão do conceito de limite.

Podemos identificar, nesta altura, uma teoria em que as ideias fundamentais já estavam presentes e cujos resultados permitiam resolver diversos problemas que motivaram a sua criação. No entanto, do ponto de vista do formalismo matemático, ela não estava completa: o processo lógico-dedutivo de sua construção falhava pelo fato de que as quantidades infinitamente pequenas não estavam bem definidas.

Segundo Kleiner (2012), o primeiro passo no sentido de resolver esta questão foi dado por Euler (1707 – 1783), que passou a tratar o Cálculo no contexto das funções, em lugar de uma abordagem puramente geométrica. Seguiu-se a ele a importante contribuição de D'Alembert (1717 – 1783), que, pela primeira vez, utilizou explicitamente o conceito de limite para definir a derivada: “a derivada de uma equação consiste simplesmente em achar o limite da razão entre as variações das duas quantidades contidas na equação”¹⁶ (*apud* Kleiner, 2012, p. 84).

No entanto, foi apenas no século XIX que a formalização do Cálculo é concluída, com os trabalhos de Bolzano (1781 – 1845), Cauchy (1789 – 1857), Dedekind (1831 – 1916) e Weierstrass (1815 – 1897).

A abordagem que resolveu definitivamente a questão dos limites acabou se afastando tanto das ideias originais do Cálculo que deu origem a um novo campo de conhecimento, chamado até hoje de **Análise**. Sobre essa transição, Rezende (2003) escreve que

paralelamente à evolução do Cálculo, o conceito de função foi se desenvolvendo e a passagem do Cálculo em variáveis para o Cálculo de funções foi se efetivando gradativamente, até que, por volta de 1800, todas as disciplinas da matemática que tratavam de processos infinitos (limites, séries, diferenciação e integração) fossem reunidas sob o nome de Análise. (p. 239)

A perspectiva histórica reforça a posição de que o Cálculo, sob o ponto de vista de uma ferramenta para a resolução de problemas, tem como conceitos centrais a derivada e a integral. Já sob o ponto de vista de uma construção matemática formal, o limite passa a se

¹⁶ The differentiation of equations consists merely in finding the limit of the ratio of the finite differences of the two quantities contained in the equation.

juntar aos outros dois conceitos para formar a sua base, movendo-se para o domínio da Análise. A figura 7 traz um mapa conceitual que resume essas ideias.

Figura 7 – Mapa conceitual: problemas centrais e conceitos fundamentais do Cálculo

2.2.2 Uma análise epistemológica e o par variabilidade – permanência

Uma vez que definimos os dois problemas centrais do Cálculo, relacionados às noções de derivada e integral, respectivamente, vamos procurar estabelecer as ideias fundamentais que orbitam em torno dessas duas noções. Para isso, vamos nos apoiar no trabalho de Rezende (2003), que elaborou um levantamento das principais dificuldades de natureza epistemológica relacionadas ao desenvolvimento do Cálculo e sua ligação com o ensino dessa disciplina.

Fazendo uso de cinco dualidades do Cálculo, ou seja, pares de ideias que guardam entre si uma relação de oposição, foram determinados cinco macro-espacos de natureza epistemológica onde residem as principais dificuldades dos alunos em um curso dessa disciplina. O processo de evolução histórica do Cálculo auxiliou bastante a identificação dos macro-espacos. Segundo o autor,

o confronto das dificuldades de aprendizagem dos estudantes com os obstáculos epistemológicos que os matemáticos tiveram que superar para efetivarem a construção dos conceitos básicos do Cálculo foi, por exemplo, um recurso muito

utilizado por nós para refletirmos e compreendermos algumas destas dificuldades.
(p. 324)

Tal abordagem será bastante conveniente para a nossa análise, uma vez que estamos considerando o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Médio, quando é possível trabalhar alguns desses obstáculos de maneira mais intuitiva, sem a preocupação da formalização, que pode ser feita em uma etapa posterior.

As cinco dualidades que embasaram a definição dos macro-espacos por Rezende (2003) são:

- **discreto – contínuo;**
- **finito – infinito;**
- **variabilidade – permanência;**
- **local – global;**
- **sistematização – construção.**

A dualidade sistematização – construção não é específica do Cálculo e, por isso, não será tratada aqui. Das outras quatro, interessa-nos principalmente a questão da variabilidade – permanência, que, na nossa abordagem, estará fortemente relacionada com as duas primeiras (discreto – contínuo e finito – infinito).

Inicialmente, vamos resgatar alguns aspectos históricos do desenvolvimento das ideias ligadas à dualidade variabilidade – permanência. A discussão da oposição existente nesse par é bastante antiga, tendo suas raízes na filosofia grega, mais especificamente nas ideias de Heráclito e Parmênides. Por um lado, para Heráclito, não existem seres estáticos, todas as coisas estão em permanente mudança: “nunca nos banhamos no mesmo rio” – cada vez que retornamos, ele já se transformou. E podemos acrescentar que, nós mesmos, já não somos a mesma pessoa que mergulhou da primeira vez. É a essência da ideia de **variabilidade**. Já Parmênides defende o princípio da imobilidade do ser, e afirma que só é possível conhecer aquilo que permanece invariável, compondo o chamado mundo inteligível. Seu pensamento representa a **permanência**.

As duas vertentes filosóficas, embora representem posições opostas, terminam por apresentar visões complementares, que nos auxiliam a compreender diferentes fenômenos, ora focando no que se mantém constante, ora analisando os aspectos que se alteram. Esse

enfoque será fundamental para o desenvolvimento das noções de derivada e integral, como veremos mais adiante.

No campo da matemática, o estudo mais quantitativo da variabilidade teve início no século XIV, com o trabalho dos escolásticos, tendo a cinemática como principal motivadora. Ao desenvolver a teoria das latitudes das formas, os escolásticos criaram uma ideia embrionária de derivada.

A teoria dos escolásticos, aliada ao desenvolvimento da álgebra nos séculos XVI e XVII, em que se destacam os trabalhos de Viète, Descartes e Fermat, forneceram os subsídios para que Newton e Leibniz, cada qual com sua própria abordagem, resolvessem o problema da variabilidade no contexto do Cálculo.

Sobre a abordagem de Newton, é interessante notar como a questão da variabilidade, na concepção de Heráclito, revela-se em seu *cálculo fluxional*. Para descrever os movimentos, Newton elaborou a ideia de que quantidades como distâncias, comprimentos, áreas e volumes estão *fluindo* ao longo do tempo, ou seja, elas variam continuamente. Tais quantidades variáveis foram chamadas de *fluente*s. A quantidade que flui por unidade de tempo, isto é, a taxa de variação de um fluente, recebia o nome de *fluxo* (ou *fluxão*). Por exemplo, para calcular a taxa de variação da ordenada de um ponto em relação à sua abscissa, que modernamente representamos por $\frac{dy}{dx}$, Newton recorria a uma razão entre fluxos. Na sua notação, em que o fluxo de um fluente y era representado por $\dot{y}$, essa taxa era dada por $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Em outras palavras, toda variação era vista, a princípio, como uma variação ao longo do tempo.

Depois de Newton e Leibniz, foram necessários ainda mais alguns anos e o desenvolvimento de outros conceitos para que se chegasse às formulações mais modernas do conceito de derivada. Como já foi dito, Euler teve uma grande contribuição no amadurecimento do conceito de derivada ao introduzir a ideia de função no contexto do Cálculo. Isso foi possível graças ao avanço da noção de variável, que permitiu abordar os processos do Cálculo desenvolvidos por Newton e Leibniz a partir da relação de interdependência entre duas variáveis. Finalmente, já no século XIX, Cauchy finaliza a definição formal de derivada incluindo o conceito de limite.

O breve resumo da evolução histórica das ideias em torno do par variabilidade – permanência que acabamos de fazer mostra a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e dos conceitos de variável e função nesse processo. Tendo isso em mente, passaremos a trabalhar as noções de integral e derivada sob a perspectiva desse par.

É importante frisar que a análise feita nas duas próximas seções não tem a intenção de representar uma construção feita com todo o rigor matemático. Pelo contrário, o objetivo é carregá-la de intuição, para que as ideias mais fundamentais possam aparecer com bastante clareza. Muitas vezes, a formalização de uma ideia relativamente simples acaba escondendo a sua essência.

Além disso, buscou-se uma apresentação até certo ponto ingênua, usando exemplos numéricos, muitos recursos gráficos e explicações mais detalhadas. A razão disso é facilitar a conexão das ideias do Cálculo com o currículo do Ensino Médio, um dos propósitos centrais desse trabalho.

2.2.3 A noção de integral

Vamos retomar o enunciado de um dos dois problemas que indicamos anteriormente como central para o Cálculo: (P2) a partir do conhecimento da taxa de variação instantânea de uma variável, estudar o comportamento da variável acumulada num dado intervalo. Será feita agora uma análise mais detalhada desse problema, inicialmente abordando um caso particular para, depois, procurar uma generalização.

Consideremos um tanque, inicialmente vazio, que passa a receber água a uma vazão constante de 10 litros por minuto. Queremos analisar o comportamento da variável V , volume de água no tanque, em litros, em função da variável t , tempo decorrido desde o início do abastecimento do tanque, em minutos.

É importante destacar que a vazão representa a **taxa de variação** do volume de água no tanque em relação ao tempo. Assim, na linguagem usada para enunciar o problema (P2), a situação consiste em, dada a taxa, obter a variável acumulada V em um certo intervalo da variável t .

Nesse caso, a resolução é bastante trivial. Como a vazão é constante, basta multiplicar seu valor pelo tempo decorrido para obter o volume de água em um dado instante. Por exemplo, decorridos 5 minutos, podemos calcular:

$$V = 10 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times 5 \text{ minutos} = 50 \text{ litros}$$

Vamos representar graficamente esse raciocínio. O gráfico da vazão em função do tempo é constante e o volume calculado acima corresponde à área do retângulo delimitado pelo gráfico e pelo eixo das abscissas, no intervalo de tempo que vai de 0 a 5 minutos. Por outro lado, o volume V , ao longo do tempo, cresce com taxa constante de 10 litros por minuto, tendo como gráfico uma reta. A figura 8 mostra os dois gráficos.

Figura 8 – Vazão e volume de água em um tanque abastecido a vazão constante em função do tempo

A formulação do problema apresentada acima, bastante simplificada por tratar de uma vazão constante, é bem conveniente para mostrar a associação entre o estudo da variável acumulada e o cálculo da área da região delimitada pelo gráfico da taxa de variação num dado intervalo.

Além disso, ela permite visualizar, de maneira simples, os dois problemas centrais do Cálculo. No primeiro gráfico da figura 8 (à esquerda), identificamos o problema (P2) e a questão do cálculo da área. Já no segundo gráfico (à direita), é possível visualizar a taxa de variação graficamente (a cada 1 minuto, o volume aumenta 10 litros), caracterizando o

problema (P1). Dessa forma, a área calculada no primeiro gráfico (50 litros) corresponde ao volume indicado no segundo e a taxa de variação obtida no segundo gráfico (10 litros por minuto) corresponde à vazão indicada no primeiro.

Consideremos agora uma situação similar, em que a água que abastece o tanque provém da descarga de um segundo tanque. À medida em que o nível no segundo tanque diminui, a vazão de descarga também cai. Assim, a vazão de água que abastece o tanque não é mais constante, sendo sua variação ao longo do tempo dada pelo gráfico da figura 9.

Figura 9 – Vazão variável de água para abastecimento de um tanque

Novamente, vamos tentar calcular o volume de água acumulado no tanque em 5 minutos.

Como dissemos anteriormente, utilizaremos a ideia de aproximação como descrito em Sofronas et al. (2011). Assim, o primeiro passo consiste em **aproximar a solução**. Uma vez que o problema acima já foi resolvido para o caso em que a taxa de variação é constante, vamos aproximar o gráfico da figura 9 pelo gráfico de uma função que seja constante em subintervalos do intervalo $[0; 5]$ da variável t . Considerando essa aproximação, é possível determinar o volume acumulado de água no tanque, em cada subintervalo de tempo, calculando a área do retângulo correspondente. A figura 10 ilustra essa estratégia para a divisão do intervalo $[0; 5]$ em cinco subintervalos de mesmo comprimento.

Figura 10 – Aproximação do caso da vazão variável por função constante em 5 subintervalos

Então, o volume aproximado pode ser obtido pela soma das áreas dos cinco retângulos da figura 10.

$$V = 8,5 \times 1 + 7,5 \times 1 + 7,0 \times 1 + 6,5 \times 1 + 6,2 \times 1 = 35,7 \text{ litros}$$

Obtida uma primeira aproximação da solução, o passo seguinte consiste em **melhorar a solução**. Este é um recurso explorado com frequência em Cálculo: na resolução de problemas, utilizar aproximações que possam ser melhoradas em novas iterações.

Na primeira aproximação que fizemos, consideramos que a vazão permanecia constante no intervalo de 0 a 1 minuto, escolhendo o valor no instante $t = 0,5$ para representar essa vazão constante. Uma análise visual do gráfico da figura 10 revela que tal aproximação não parece tão razoável, uma vez que a vazão tem uma variação acentuada no intervalo de 0 a 1 minuto. Podemos, então, subdividir cada subintervalo do intervalo $[0; 5]$ em subintervalos ainda menores, como ilustrado na figura 11, levando a uma aproximação claramente melhor do que a feita anteriormente.

Figura 11 – Aproximação do caso da vazão variável por função constante em 25 subintervalos

Dessa forma, o cálculo aproximado do volume acumulado no intervalo de 0 a 5 minutos poderia ser repetido com base na nova divisão em subintervalos, obtendo-se um resultado mais preciso.

A última etapa do processo de aproximação da solução de um problema segundo a perspectiva que estamos adotando consiste em **torná-la exata**. Antes de discutir como fazer isso no nosso exemplo, cabe uma observação sobre a expressão “tornar a solução exata”. Como se trata de um processo de aproximação, podemos entendê-la como chegar tão próximo da solução do problema quanto se queira. Em outras palavras, pode-se aumentar a precisão da aproximação a cada nova iteração realizada, de modo que, no limite desse processo, as aproximações tendam para a solução exata.

No nosso caso, o aumento na quantidade de subintervalos mostrou-se um meio de conseguir aproximações cada vez melhores e, nesta última etapa, ele gera alguns questionamentos bem interessantes: pode-se sempre dividir o intervalo original em subintervalos cada vez menores ou há alguma restrição para esse processo? O método proposto permite chegar a uma solução exata ou teremos sempre aproximações?

As respostas a essas perguntas passam necessariamente pela ideia de limite: para se chegar à solução exata, deve-se fazer com que a quantidade de subintervalos tenda para

infinito. Ao fazer isso, completa-se a construção do conceito de integral de Riemann, que resolve o problema (P2).

Vamos agora relacionar a construção que fizemos com as dualidades que havíamos citado na seção anterior. A abordagem escolhida para resolver o problema (P2) partiu da dualidade variabilidade – permanência e chegou a outras duas: finito – infinito e discreto – contínuo.

De fato, a parte central da estratégia consistiu em aproximar uma função que variava por outra que fosse constante em subintervalos de seu domínio, explorando a oposição entre variabilidade e permanência. Esta estratégia permitiu construir uma solução aproximada e refinar essa solução tomando subintervalos cada vez menores. Ao procurar a solução exata do problema, deparou-se com a necessidade de prosseguir indefinidamente com essa divisão do intervalo original, caracterizando a transição de uma situação em que se trabalhava com uma quantidade finita de subintervalos para outra em que o número de subintervalos deveria tender para infinito. Nesta parte do processo, o par finito – infinito passou a ser fundamental para a discussão.

Ao mesmo tempo, quando se tinha um número finito de subintervalos, foi preciso avaliar o valor da função original em um conjunto discreto de valores do domínio. No entanto, quando se fez o número de subintervalos tender para infinito, a função original passou a ser avaliada em um conjunto contínuo, sendo essa transição marcada pela oposição discreto – contínuo.

A relação feita aqui entre o conceito de integral e os pares variabilidade – permanência, finito – infinito e discreto – contínuo irão facilitar a conexão entre as ideias fundamentais do Cálculo e o currículo do Ensino Médio. Na próxima seção, vamos fazer uma análise semelhante para a noção de derivada.

2.2.4 A noção de derivada

Nesta seção, retomaremos o enunciado do outro problema que indicamos como central para o Cálculo: (P1) a partir do conhecimento de uma variável, estudar o comportamento da sua taxa de variação instantânea.

O cálculo da taxa de variação, seja a taxa média ou a taxa instantânea, dá um passo além na exploração da dualidade variabilidade – permanência iniciada na seção anterior. Não se trata mais de apenas definir se uma grandeza varia ou permanece constante, mas sim de caracterizar e quantificar essa variação. Para abordar esse problema, mais uma vez, partiremos de uma situação prática para posteriormente chegar a uma solução geral.

Nesta construção, vamos considerar inicialmente o caso em que a taxa de variação é constante e, gradualmente, avançar para a situação em que a taxa varia.

- Taxa de variação constante

Vamos considerar um automóvel que, partindo do quilômetro 50 de uma estrada, viaja com velocidade constante de 80 quilômetros por hora, no sentido crescente dos marcos de quilometragem. Utilizando essas informações, podemos construir uma tabela que informa a posição do carro (S) em diferentes instantes de tempo (t).

Tabela 8 – Posição (S) do automóvel para diferentes instantes de tempo (t).

Tempo (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Posição (km)	50	90	130	170	210	250	290	330

Os dados da Tabela 8 mostram que a variação de S é proporcional à variação de t , como esperado pelo fato de que o carro viaja com velocidade constante: a cada intervalo de 0,5 hora, a posição aumenta 40 km, ou ainda, S aumenta 80 quilômetros a cada aumento de 1 hora em t . É importante ressaltar que a proporcionalidade não se verifica entre as variáveis S e t , mas sim entre suas respectivas variações, ΔS e Δt . Podemos verificar isso para dois instantes de tempo quaisquer t_1 e t_2 , sendo S_1 e S_2 as respectivas posições do automóvel nesses instantes:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{(50 + 80t_2) - (50 + 80t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{80(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 80,$$

ou seja, como verificamos na tabela, a posição do carro aumenta 80 quilômetros a cada hora, que é a taxa de variação da posição em relação ao tempo.

Como consequência da proporcionalidade demonstrada acima, o gráfico de S em função de t é uma reta, como mostrado na figura 12. Destacamos, na figura, a representação gráfica da taxa de variação que acabamos de calcular.

Figura 12 – Representação gráfica da posição (S) em função do tempo (t)

No exemplo analisado, a posição do automóvel cresce a uma taxa constante, de modo que o gráfico de S em função de t é uma reta. Com isso, o cálculo da velocidade em um dado instante é trivial: basta determinar a taxa de variação média em um intervalo qualquer. Este padrão de variação caracterizado por uma taxa de variação constante está diretamente ligado à ideia de proporcionalidade e será fundamental para analisar o caso geral, quando a taxa de variação não é necessariamente constante.

Vale destacar que, sob o enfoque da taxa de variação, voltamos à forma original da dualidade variabilidade – permanência: o confronto se dá entre os casos com taxa de variação variável e constante.

- A taxa unitária ($\Delta t = 1$)

Para fazer a transição do caso em que a taxa de variação é constante para o de taxa variável, uma estratégia interessante é utilizar a **taxa unitária**, que corresponde à taxa de

variação média para um intervalo de comprimento 1. Mais especificamente, a taxa unitária $u(t)$ da variável S no instante t é dada por:

$$u(t) = \frac{S(t+1) - S(t)}{1} = S(t+1) - S(t)$$

Vamos dar um exemplo para ilustrar o uso da taxa unitária na referida transição. Suponhamos que, às 3h00, um carro se encontre no quilômetro 220 de uma rodovia e que, às 4h00, ele esteja no quilômetro 320. Considerando o início da contagem de tempo ao meio-dia, a taxa unitária de sua posição no instante $t = 3$ é:

$$u(3) = S(3+1) - S(3) = 320 - 220 = 100$$

Assim, pode-se dizer que uma aproximação, ainda que grosseira, para a velocidade do carro às 3h00 é dada por 100 km/h (a partir desse instante, o carro percorreu 100 quilômetros em uma hora). A estimativa é grosseira porque estamos admitindo que a velocidade do carro (ou a taxa de variação da posição em relação ao tempo) manteve-se constante ao longo de uma hora. No entanto, é possível que o carro estivesse mais rápido no início do trajeto, percorrendo, por exemplo, 60 quilômetros na primeira meia hora e os outros 40 na segunda meia hora.

Vale destacar a semelhança entre a estratégia aqui descrita, que utiliza a taxa unitária, e a modelagem discreta de sistemas dinâmicos, apresentada na seção 1.4.1. O intervalo de comprimento 1 usado para calcular a taxa unitária corresponde ao passo da modelagem discreta.

Para refinar a estimativa anterior, podemos observar a posição do carro em dois instantes de tempo mais próximos. De fato, para um período mais curto, a hipótese de que a velocidade se mantém constante torna-se mais razoável.

Uma maneira de fazer isso é utilizar outra unidade para medir o tempo. Por exemplo, observando a posição do carro de minuto em minuto teremos uma ideia melhor do que aconteceu com ele ao longo do percurso. Neste caso, o instante $t = 3$ horas corresponderia a $t = 180$ minutos. Assim, imaginando que, às 3h01, o carro esteja no quilômetro 222, temos, para um período de 1 minuto:

$$u(180) = S(180+1) - S(180) = 222 - 220 = 2$$

A nova aproximação indica que o carro percorreu 2 quilômetros em um minuto, ou seja, sua velocidade às 3h00 era de cerca de 2 km/min. Para comparar com a estimativa anterior, basta fazer uma projeção: andando 2 quilômetros a cada minuto, o carro percorrerá, em 1 hora, 2×60 , ou seja, 120 quilômetros. Logo, sua velocidade era de aproximadamente 120 km/h.

A segunda estimativa da velocidade, feita com base em um período de 1 minuto, é mais precisa do que a primeira, feita em um período de 1 hora. Tomando períodos ainda menores, poderíamos melhorar cada vez mais a aproximação. A mudança de unidade que foi feita torna essa ideia mais evidente: observações realizadas a cada minuto trazem um quadro mais preciso do fenômeno estudado do que observações tomadas a cada hora. Porém, podemos fazer esse raciocínio mantendo sempre a mesma unidade.

Com efeito, um período de um minuto corresponde a $\frac{1}{60}$ de uma hora. Dessa forma, a segunda estimativa pode ser obtida pela expressão $\left[S\left(3 + \frac{1}{60}\right) - S(3) \right] \times 60$. Em palavras, calculamos a taxa unitária em um período correspondente a uma fração da hora, projetando em seguida o valor obtido para um período de uma hora.

De maneira geral, dividindo uma hora em n períodos iguais, podemos estimar a velocidade do carro em um instante t , em quilômetros por hora, por meio da expressão:

$$\left[S\left(t + \frac{1}{n}\right) - S(t) \right] \cdot n.$$

Mais uma vez, a estimativa pode ser melhorada tomando intervalos de tempo cada vez menores, o que equivale a escolher valores cada vez maiores de n .

Vamos comparar a expressão acima, obtida a partir da ideia de taxa unitária, com a expressão da derivada da função S no ponto t , ou seja,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Observe que, fazendo $\Delta t = \frac{1}{n}$ e tomando o limite com n tendendo ao infinito, as expressões são equivalentes, exceto pelo fato de que $\frac{1}{n}$, para n inteiro, só pode assumir valores racionais. Isso mostra que a taxa unitária permite explorar a ideia de derivada de uma maneira bem intuitiva, podendo ser usada para introduzir o problema do cálculo da

taxa de variação instantânea de modo a facilitar a criação de significado pelos alunos. No próximo passo, vamos calcular a taxa de variação instantânea sem utilizar a taxa unitária.

- Taxa de variação variável

Vamos retomar a situação analisada para a taxa de variação constante, considerando, agora, que a posição S do automóvel, em quilômetros, em função do tempo t , em horas, seja dada pelo gráfico da figura 13a. Para que o contexto seja mais realista, tomaremos um intervalo de tempo menor, correspondente, por exemplo, a um trecho da rodovia em subida.

Figura 13 – Gráfico da posição (S) em função do tempo (t) em que a taxa de variação não é constante

Na figura 13b, estão destacados três intervalos de tempo de 0,01 hora e as correspondentes variações na posição do automóvel, que mostram que a taxa de variação é decrescente ao longo do tempo.

Para calcular a velocidade do automóvel no instante $t = 0,05$, por exemplo, vamos adotar a mesma estratégia de aproximação usada no cálculo da integral. Assim, na primeira etapa, vamos **aproximar a solução**: de maneira análoga ao que foi feito para a taxa unitária, consideramos que a taxa de variação no intervalo $[0; 0,05]$ mantém-se constante. Em outras palavras, vamos aproximar o gráfico da posição por uma reta no intervalo considerado, como indicado na figura 14.

Figura 14 – Aproximação de trecho do gráfico da posição (S) em função do tempo (t) por uma reta

Dessa forma, a velocidade no instante $t = 0,05$ vale aproximadamente:

$$\frac{4,0 - 0}{0,05 - 0} = 80 \text{ km/h}$$

Na etapa seguinte, é preciso **melhorar a solução**. Aproximando o gráfico de S por uma reta em um intervalo menor do que o anterior, obtemos um modelo mais próximo do comportamento real. Mais uma vez, o processo, que pode ser visto na figura 15, é análogo ao que foi feito para a taxa unitária.

(a)

(b)

Figura 15 – Aproximação do gráfico de S por uma reta em intervalos menores

As aproximações da velocidade feitas a partir das figuras 15a e 15b valem, respectivamente, 72 km/h e 64 km/h. Claramente, tais aproximações ainda podem ser refinadas, tomando-se intervalos cada vez menores. Tal procedimento sugere a passagem para a última etapa do processo, que corresponde a **tornar a solução exata**.

Como no caso do conceito de integral, este último passo necessita da ideia de limite. O valor exato da velocidade no instante $t = 0,05$ será obtido quando o comprimento do intervalo no qual se faz a aproximação tender a zero, chegando ao conceito de derivada, que resolve o problema (P1). Mais uma vez, a dualidade finito – infinito mistura-se com a oposição variabilidade – permanência no final do processo, dessa vez caracterizando-se pela ideia de “infinitamente pequeno”.

Na apresentação feita aqui, ideias fundamentais como variabilidade, aproximação e proporcionalidade pavimentam o caminho sobre o qual vão sendo construídos os conceitos de derivada e integral. Trabalhar tais ideias no Ensino Médio não só é possível, como altamente desejável quando se pensa no desenvolvimento da capacidade dos alunos de compreender fenômenos. Na próxima seção, apontaremos algumas direções que podem ser seguidas com esse objetivo.

2.3 Aspectos relevantes para a integração do Cálculo no programa atual do Ensino Médio

Ao longo deste trabalho, temos defendido que não faria sentido incluir o Cálculo no currículo do Ensino Médio de maneira isolada, sem que ele estivesse integrado com outros assuntos que já são desenvolvidos neste segmento. Durante a reflexão feita nas seções anteriores, emergiram algumas ideias fundamentais, como variabilidade, aproximação e proporcionalidade, que facilitarão muito essa integração.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar concretamente uma forma de promover tal integração. Para isso, vamos começar levantando algumas fontes de tensão que costumam surgir quando se discute o ensino de Cálculo em nível introdutório, independentemente do segmento. Depois, analisaremos dois aspectos do programa em que a conexão com as ideias do Cálculo pode ocorrer de maneira natural, o estudo das funções e as questões

relacionadas ao infinito. Finalmente, faremos uma breve discussão sobre o papel que as calculadoras científicas e os computadores poderiam desempenhar em um eventual trabalho com as noções de Cálculo na escola básica.

2.3.1 Algumas tensões ligadas ao ensino de Cálculo em nível introdutório

Como mostramos na introdução deste trabalho, muitos pesquisadores têm se dedicado a estudar os problemas enfrentados por alunos e professores nas disciplinas introdutórias de Cálculo nas universidades brasileiras. Esse interesse é natural, refletindo a opção do país de começar o estudo do Cálculo apenas no ensino superior.

Embora estejamos analisando, até o momento, a possibilidade de desenvolver as ideias básicas do Cálculo no contexto da escola básica, muitos resultados dessas pesquisas podem fornecer informações e indicar caminhos no sentido de evitar alguns erros que têm sido cometidos em salas de aula de Cálculo dos primeiros anos de muitos cursos universitários. Em especial, estamos interessados em algumas tensões que costumam estar presentes em cursos iniciais de Cálculo.

A primeira delas consiste na tensão entre **ideias** e **técnica**. Como descreveu Kleiner (2012), o Cálculo inclui três elementos principais: um conjunto de técnicas ou algoritmos, uma teoria que explica porque esses algoritmos funcionam e diversas aplicações dos dois primeiros elementos em problemas fundamentais da ciência.

No ensino de Cálculo, o balanceamento adequado entre esses três elementos, especialmente os dois primeiros, é fonte de muita preocupação tanto de professores quanto de pesquisadores da área de Educação. White e Mitchelmore (1996) resumem o tom dessas preocupações:

Os avanços tecnológicos, a qualificação dos professores e a competência matemática dos alunos levaram muitos a questionar o papel dos cursos tradicionais de cálculo no currículo. Há, em particular, muita preocupação com o aprendizado mecânico e manipulativo observado em grande número de alunos que cursam cálculo.¹⁷ (p. 79)

¹⁷ Changes in technology, the qualifications of teachers, and the mathematical competence of students have led many to question the role of traditional calculus courses in the curriculum. There is, in particular, much concern about the large numbers of students taking calculus and the rote, manipulative learning that takes place.

Vamos tomar o caso da derivada como exemplo. De um lado, temos a construção da noção de derivada, que envolve a compreensão do significado da taxa de variação média, da ideia de que trechos de uma curva podem ser aproximados por uma reta e dos processos de limite que permitem que tal aproximação seja refinada tanto quanto se queira. Por outro lado, existem as técnicas, que são usadas, por exemplo, para calcular o valor exato da derivada da função dada pela lei $f(x) = x \cos x^2$ no ponto $x = \pi$.

Na verdade, ideias e técnica são duas dimensões que se complementam, de modo que uma alimenta o interesse pela outra. É difícil imaginar um curso de Cálculo em que a noção de derivada fosse discutida exclusivamente do ponto de vista teórico. Tomar uma função particular, analisar o seu gráfico para compreender a forma como ela varia, calcular taxas de variação médias em diferentes intervalos e manipular expressões algébricas que conduzam ao cálculo de sua derivada são ações que trazem elementos importantes para o processo de criação de significado em torno da ideia de derivada. Por outro lado, um curso que se dedicasse exclusivamente às técnicas de cálculo seria tão insípido quanto inútil.

Dessa forma, quando se planeja um curso de Cálculo, em qualquer nível de escolaridade, é fundamental que se pense no balanço entre ideias e técnica, de forma que as duas dimensões possam, de fato, subsidiar um processo de aprendizagem significativa.

Quando falamos da tensão entre ideias e técnica, estamos nos referindo àquelas situações em que este balanceamento encontra-se prejudicado, havendo um claro viés para um ou outro lado. E, no caso específico de Cálculo, como resumido na fala de White e Mitchelmore (1996), esse viés ocorre com muito mais frequência para o lado da técnica. Um exercício interessante que costumamos realizar em nossa prática como docente de Cálculo consiste em perguntar aos novos alunos se eles já tiveram alguma experiência prévia com os assuntos da disciplina. É comum encontrar estudantes que, nas aulas de Física da escola, aprenderam a derivar funções polinomiais usando, em suas próprias palavras, a “regra do tombo”. O conhecimento da regra permite a eles encontrar a equação da velocidade do movimento uniformemente variado a partir da derivação da equação horária, ou seja, $v(t) = \frac{d}{dt} \left(S_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \right) = v_o + at$. No entanto, quando se pergunta sobre o significado dessa operação, ou mesmo sobre o que é medido pela derivada, os alunos, em geral, não sabem responder.

O exemplo acima revela uma situação extrema, em que a técnica é ensinada desprovida de qualquer discussão conceitual, caracterizando-se muito mais como um “truque de mágica” do que como um conhecimento matemático provido de significado lógico. Dentro de um contínuo representado pelas ideias em um extremo e a técnica em outro, há que se buscar um equilíbrio que deve levar em conta diferentes aspectos. E tal equilíbrio não pode ser estático: pelo contrário, ele deve levar em conta a realidade de cada época.

Por exemplo, o nível tecnológico atual faz com que esse balanceamento, nos dias de hoje, não seja necessariamente o mesmo de um curso de Cálculo ministrado há 40 anos. Uma vez que os recursos computacionais fornecem apoio em uma série de operações técnicas, sua utilização pode trazer novas perspectivas para o ensino dessa disciplina.

Outro aspecto fundamental na busca pelo equilíbrio entre ideias e técnica refere-se ao nível de escolaridade para o qual o curso é planejado. É preciso lembrar que, neste trabalho, estamos considerando predominantemente o contexto da escola básica, mais especificamente o Ensino Médio. Tomando a realidade brasileira, a maioria dos alunos desse segmento não prossegue seus estudos em nível universitário: de acordo com o IBGE, em 2014, apenas 18% da população entre 18 e 24 anos no país estava matriculada no ensino superior. Mesmo dentre os que ingressam na universidade, muitos escolhem carreiras com pouca afinidade com a matemática, como Direito ou Medicina, em que o Cálculo não faz parte do currículo.

Assim, quando se planeja a abordagem de um eventual ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil, não se pode utilizar como direcionamento a continuidade desse estudo na universidade. Pelo contrário, deve-se pensar na formação dos jovens que concluem essa etapa da escolarização, na sua preparação para o trabalho e para a cidadania. Nesse sentido, o modelo da disciplina de Cálculo adotado em cursos superiores de Engenharia, Economia ou Arquitetura não pode servir como base para uma proposta voltada à escola básica.

Dessa forma, considerando as finalidades do Ensino Médio que discutimos ao longo do Capítulo 1, não parece razoável que a maior parte das discussões sobre Cálculo durante as aulas desse segmento recaiam sobre procedimentos técnicos. Na escola básica, o foco do ensino deve ser a discussão dos problemas centrais do Cálculo, de suas ideias fundamentais, que pode fornecer importantes ferramentas aos jovens para compreender muitos dos

fenômenos que os rodeiam. A técnica deve estar presente como um elemento que contribui para a compreensão dessas ideias. A formação técnica mais completa, no que se refere ao domínio de diferentes procedimentos de cálculo, faz sentido para aqueles alunos que ingressam no Ensino Superior, na medida da necessidade de cada curso.

A segunda tensão que vamos analisar refere-se ao par **intuição** e **rigor**. Reis (2001) faz uma detalhada reflexão sobre esse conflito e suas consequências para as disciplinas de Cálculo e Análise de diferentes cursos superiores, apresentando a visão de quatro destacados professores universitários brasileiros desta área. De forma geral, a percepção de rigor revelada pelos especialistas está associada às definições formais e às demonstrações de teoremas, contrapondo-se aos exemplos práticos, que possibilitam uma abordagem intuitiva dos conceitos.

Nesse sentido, vale destacar a ideia da existência de diferentes níveis de rigor. Por exemplo, justificar um resultado matemático por meio de uma explicação gráfica pode ser considerado aceitável, ainda que não se apresente uma demonstração rigorosa do ponto de vista da lógica? A respeito disso, o professor Elon Lages de Lima, na entrevista concedida ao pesquisador, afirma que “você não deve ir além do que os seus alunos necessitam, se eles estão satisfeitos com a sua explicação, (...) desde que não seja uma mentira”. Ainda sobre essa questão, no mesmo trabalho, é relatada a fala do professor Roberto Ribeiro Baldino, que “questiona a necessidade de se demonstrar resultados que os alunos conseguem compreender e aceitar intuitivamente, argumentando que isto pode gerar uma problemática que não faz sentido para os mesmos”.

O princípio da existência de diferentes níveis de rigor aparece também em Moles (1981), ao discutir aspectos psicológicos relativos ao papel das demonstrações nas ciências. De acordo com o autor, “demonstrar um fato é construir um sentimento de evidência deste em um indivíduo receptor, comunicando-lhe uma mensagem cujos elementos formam uma série de evidências elementares”.

As evidências elementares referem-se ao repertório de conhecimentos comuns – saberes já conhecidos previamente pelo transmissor e pelo receptor. Então, o processo de demonstração pode ser entendido como uma construção desenvolvida pelo entrelaçamento, segundo um sistema lógico, desses diferentes elementos de evidência. Assim, o valor de uma demonstração, que se revela na convicção do fato a ser demonstrado

realizada no espírito do receptor, depende não só da qualidade dos elementos de evidência utilizados, mas também da solidez da construção feita. Moles (1981) afirma ainda que “psicologicamente, [essa solidez] reside menos no rigor do processo (...) do que na evidência da estrutura apresentada em seu conjunto”.

Dessa forma, a estrutura de uma demonstração depende, prioritariamente, do repertório de conhecimentos do receptor e do transmissor. Uma vez que este varia de indivíduo para indivíduo, não se pode falar de uma demonstração adequada a todos os contextos. Percebendo esse fato, alguns livros didáticos brasileiros voltados para o nível superior tentaram abordagens diferentes da tradicional para o ensino do Cálculo. No prefácio de seu livro de Cálculo e introdução à Análise, D’Ambrosio (1975) faz a seguinte consideração sobre a relação entre intuição e rigor em um primeiro contato de um estudante com determinado assunto matemático:

O tratamento é rigoroso até o ponto em que preocupações de rigor não interfiram com as bases intuitivas do Cálculo. Entendemos que sensibilidade para rigor matemático é algo que se adquire, que se sente após alguma vivência com matemática, e que surge naturalmente com o desenvolvimento de uma certa “intuição para rigor”. Deste modo, tratar os diversos assuntos que aparecem no início de um curso de Cálculo com o “devido rigor” pode neutralizar o que nos parece a função essencial de um primeiro curso em qualquer assunto: despertar no leitor uma certa curiosidade e espírito inquisitivo que, aliado a algum gosto pelo assunto, o estimulará a procurar um tratamento mais rigoroso e profundo. Naturalmente, este tratamento, que de nenhum modo pode ser considerado “não rigoroso”, é em vários pontos dirigido a estimular o leitor a questionar sobre sua validade, sobre o seu grau de generalidade e sobre o potencial para aplicações e generalizações. (p. IX)

Por isso, ao pensar o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Médio, devemos nos livrar das amarras representadas pelo enfoque tradicional dos cursos universitários dessa disciplina, que, ao organizar o conteúdo com base na sua construção lógico-dedutiva, ignoram o repertório de conhecimentos dos alunos e, muitas vezes, neutralizam o potencial de despertar o seu interesse para aquele assunto.

Ao discutir as ideias fundamentais do Cálculo, os conceitos de derivada e integral emergiram como os centrais dessa disciplina. Do ponto de vista do formalismo lógico, porém, tais conceitos não podem ser construídos sem que se tenha uma sólida base do conceito de limite. Ao compreender esse formalismo lógico como o único rigor aceitável em

uma aula de Matemática, muitos autores de livros didáticos voltados para o antigo 2º grau trouxeram para esse segmento abordagens totalmente incompatíveis com a maturidade intelectual dos alunos. A figura 16 mostra a definição de limite que consta em um desses livros¹⁸, editado na década de 1980.

24. Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real a . Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é L e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.
Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

Figura 16 – Definição de limite em livro didático da década de 1980 para o 2º grau

Reis (2001) relata que, referindo-se a cursos introdutórios de Cálculo em nível universitário, o professor Baldino afirma que: “Não tem sentido algum você fazer num curso de Cálculo um capítulo sobre teoria de Weierstrass, sobre épsilons e deltas, percebe? Aquilo ali, primeiro tem que acontecer, para depois se justificar, (...) numa outra instância, se [o aluno] quiser retomar aquilo em termos de verificar até que ponto aquela ferramenta que ele está usando vale.” A fala do professor evidencia a inadequação de uma abordagem do conceito de limite para o Ensino Médio como a mostrada na figura 16.

Ao conceber a existência de diferentes níveis de rigor, que devem ser considerados nas distintas etapas da escolarização, torna-se totalmente razoável a discussão dos conceitos de derivada e integral baseada em ideias mais intuitivas de limite. Sobre essa possibilidade, Azcárate e Deulofeu (1996) descrevem a existência de duas correntes principais entre os livros didáticos dos países em que se introduz o conceito de derivada no ensino secundário. Se, por um lado, em países como França, Espanha e Itália, a derivada é definida como uma aplicação do conceito de limite de uma função, previamente estudado, há o caso da Inglaterra, em que o conceito de derivada é apresentado como uma primeira introdução ao conceito de limite.

Tendo em mente a busca de um equilíbrio entre os pares conceito – técnica e intuição – rigor, compatível com a maturidade intelectual dos alunos e as finalidades básicas

¹⁸ *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 8*. São Paulo: Atual, 1977 – 1983.

do Ensino Médio, passaremos a apresentar algumas possibilidades práticas de conexão entre as ideias fundamentais do Cálculo e o currículo desse segmento.

2.3.2 O estudo das funções

Ao longo deste capítulo, temos mostrado como a noção de variação (ou variabilidade) caracteriza-se como uma ideia fundamental da matemática, além de estar diretamente relacionada às noções de derivada e integral, centrais para o Cálculo. Quando se pensa no currículo do Ensino Médio, a ideia de variação, embora também esteja presente em outros tópicos, aparece mais fortemente durante o estudo das funções.

Historicamente, a noção de variável foi fundamental para a formação do conceito de função. No século XVII, o trabalho de Descartes na geometria analítica contribuiu decisivamente com esse processo, ao interpretar curvas e superfícies por meio de equações. Na sua obra *La Géométrie*, aparece pela primeira vez o fato de que uma equação em x e y é uma forma de expressar a dependência entre duas quantidades variáveis.

Outra evidência da importância da ideia de variação para a construção do conceito de função pode ser vista na evolução das definições de função nos dois séculos que se seguiram a Descartes. Nesse sentido, vale destacar o trabalho de Dirichlet, discípulo de Fourier, no século XIX. Segundo Azcárate e Deulofeu (1996), ele propôs, em 1837, uma definição bem geral de função, nos seguintes termos: “se uma variável y está relacionada a outra variável x de tal forma que sempre que se atribui um valor numérico a x existe uma regra segundo a qual fica determinado um único valor para y , então se diz que y é uma **função** da variável independente x ”.

Dessa forma, a ideia de que se pode relacionar duas quantidades de modo que, à medida em que uma delas varia, a variação da outra fica determinada, está na gênese do conceito de função. No entanto, a definição moderna de função, construída durante o século XX, não contempla de maneira explícita essa ideia de variação. Para que se tornasse o mais geral possível, ela foi revista com base na teoria dos conjuntos. Sobre essa formulação do conceito de função, Azcárate e Deulofeu (1996) ressaltam que

trata-se de uma última generalização do conceito e, como tal, perde muitos dos atributos que tinham as definições clássicas, como a ideia de variação, continuidade, variável como um parâmetro temporal e dependência,

característicos da maioria dos problemas que geraram a necessidade do conceito de função.¹⁹ (p. 53)

Nos livros didáticos brasileiros, a definição de função apresentada aos alunos utiliza, via de regra, a linguagem da teoria dos conjuntos. Inicialmente, define-se relação com base no produto cartesiano para, depois, chegar ao conceito de função. Um exemplo desse tipo de formulação é dado por: “Dados dois conjuntos não vazios A e B , dá-se o nome de **relação** R de A em B a qualquer subconjunto de $A \times B$. Seja f uma relação de A em B . Essa relação f é uma **função** de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um, e apenas um, elemento y do conjunto B .”²⁰

Se, por um lado, a opção por esse tipo de definição confere ao conceito de função uma generalidade muito grande, já que A e B nem sequer precisam ser conjuntos numéricos, por outro se perde muito da intuição do conceito, ligada aos problemas mais práticos que fizeram surgir a necessidade da ideia de função. Caberia aos autores e professores avaliar, levando em conta as finalidades mais gerais do Ensino Médio, qual seria a abordagem mais adequada a esse segmento. Em relação a essa escolha, concordamos com Ávila (2006) ao afirmar que

O ensino de funções, como vemos em vários livros, (...) está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada. O excesso de “conjuntos” continua presente em vários livros, “entulhando” o currículo. Tudo isso pode ser reduzido substancialmente e com vantagens, beneficiando o bom aprendizado das ideias matemáticas. São as ideias que devem ser enfatizadas, a linguagem e a notação somente quando necessárias para o objetivo de introduzir novas ideias. (p. 38)

Diante do que foi exposto até aqui, defendemos que o enfoque dado atualmente ao ensino de funções seja totalmente revisto, de modo a valorizar a ideia de variabilidade. E a porta de entrada para tal abordagem consiste na retomada do raciocínio proporcional, que é visto ao longo do Ensino Fundamental, mas praticamente não é explorado durante o estudo de funções no Ensino Médio.

Ao introduzir o conceito de função, em vez de tanta ênfase aos formalismos introduzidos pela linguagem de conjuntos, poderia ser trabalhado o conceito de taxa de

¹⁹ Se trata de una última generalización del concepto y que, como tal, pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función.

²⁰ *Matemática, uma nova abordagem – Volume 1*. São Paulo: FTD, 2013.

variação média. Há muitos problemas reais relacionados a esse assunto em que as variações são mais relevantes do que os valores absolutos das funções envolvidas. Por exemplo, quando se estuda a dilatação térmica de uma barra, é mais importante observar o quanto ela se alongou do que seu comprimento. Ou ainda, para estudar a inflação, é mais relevante olhar para as variações nos preços do que para os seus valores numéricos.

Nesse sentido, podem ser trabalhadas situações envolvendo gráficos ou tabelas, nas quais sejam enfatizados o significado da taxa de variação média e alguns de seus aspectos básicos, como a interpretação do sinal de uma taxa. Por exemplo, no gráfico da figura 17, retirado de um estudo científico²¹, deseja-se comparar a eficácia de dois medicamentos antitérmicos administrados a um grupo de crianças com febre alta. Em uma análise preliminar, isso pode ser feito por meio das taxas de variação média em diferentes intervalos de tempo. Para as primeiras três horas, a dipirona apresentou uma taxa de variação média de $\frac{37,7-39,5}{3} = -0,6 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{h}$. Já no caso do ibuprofeno, ela foi de $\frac{36,8-39,5}{3} = -0,9 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{h}$. Assim, nas três primeiras horas, a temperatura das crianças caiu, em média, 0,6 e 0,9 grau Celsius por hora para a dipirona e o ibuprofeno, respectivamente.

Figura 17 – Eficácia de dipirona e ibuprofeno em crianças com febre alta ao longo do tempo

²¹ Magni, A. M.; Scheffer, D. K.; Bruniera, P. Comportamento dos antitérmicos ibuprofeno e dipirona em crianças febris. *Jornal de Pediatria*. Rio de Janeiro: vol. 87, n. 1, Jan/Fev 2011.

Ao utilizar a taxa de variação média como ferramenta para a análise de fenômenos, além de aproximar mais as aulas das atividades de modelagem no sentido exposto no Capítulo 1, pode-se conferir uma nova perspectiva ao estudo das funções polinomiais.

Para ter uma ideia de como os livros didáticos brasileiros abordam o assunto, consultamos quatro livros²², todos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015 e tradicionalmente adotados em um número grande de escolas. Em todos eles, a definição das funções polinomiais de 1º e 2º grau é feita por meio de suas leis algébricas (respectivamente $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$). A função polinomial de 1º grau, por exemplo, poderia ser definida a partir de sua propriedade fundamental (a taxa de variação é constante), derivando-se daí sua lei algébrica.

Em dois desses livros, é apresentada a definição de taxa média de variação. Porém, isso é feito em um tópico isolado, pouco conectado com o restante do estudo das funções. Nos outros dois, a ideia de taxa de variação nem chega a ser trabalhada.

O estudo do parâmetro a da função do 1º grau (coeficiente angular) enfatiza a sua relação com o crescimento da função (quando a é positivo, a função é crescente e, quando é negativo, ela é decrescente). Porém, isso é feito de maneira superficial, com o objetivo de mecanizar alguns procedimentos para resolução de inequações, por exemplo. Não se percebe uma intencionalidade de caracterizar, com maior profundidade, o padrão de crescimento (ou decrescimento) de uma função do 1º grau, nem de interpretar o coeficiente angular em diferentes contextos.

O modo como é construído o gráfico de uma função do 1º grau é mais uma evidência desse enfoque que deixa a ideia de variabilidade em segundo plano. Em geral, o único recurso trazido pelos livros brasileiros é a construção de uma tabela de pontos, cujas abscissas são escolhidas de modo aleatório. Uma abordagem alternativa para a construção desses gráficos, conhecida como *“using slope and y-intercept to graph lines”*, utiliza os valores dos coeficientes angular e linear (coeficientes a e b , respectivamente). As figuras 18a e 18b ilustram as duas abordagens para a função f , dada pela lei $f(x) = 2x + 1$.

²² Matemática: ciência e aplicações, vol. 1 (Gelson Iezzi et al.); Matemática: contexto e aplicações, vol. 1 (Luiz Roberto Dante); Matemática – Paiva, vol. 1 (Manoel Paiva); Matemática – Ensino Médio, vol. 1 (Kátia Smole e Maria Ignez Diniz).

x	y	Ponto
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	A
-1	$2 \cdot (-1) + 1 = -1$	B

(a)

Coeficiente angular: $a = 2$ Coeficiente linear: $b = 1$

(b)

Figura 18 – Construção do gráfico de função do 1º grau: duas abordagens

Na abordagem da figura 18b, marca-se o ponto C onde a reta intercepta o eixo das ordenadas. Em seguida, é necessário interpretar o significado do coeficiente angular: $a = 2$ quer dizer que, para cada aumento de 1 unidade na variável x , a variável y cresce 2 unidades. Já na abordagem da figura 18a, nem sequer é necessário conhecer o conceito de coeficiente angular: basta marcar os pontos cujas coordenadas são dadas na tabela e uni-los por uma linha reta.

Nos Estados Unidos, o uso dos coeficientes angular e linear para a construção e interpretação de retas é incentivado nas orientações curriculares. Isso pode ser visto no Common Core State Standards for Mathematics, documento preparado pelo Council of Chief State School Officers (CCSSO)²³ em 2010 com o objetivo de endereçar os principais problemas identificados, na primeira década do século XXI, pelos pesquisadores de Educação Matemática nas escolas daquele país. A preocupação com a noção de variabilidade aparece em dois objetivos de aprendizagem definidos para o 8º ano (CCSSO e NGA, 2010):

²³ O CCSSO é uma entidade que reúne os líderes dos órgãos estaduais equivalentes às nossas Secretarias de Educação nos Estados Unidos.

8º Ano, Expressões/Equações, CCSS.Math.Content.8.EE.B.5: Representar graficamente relações de proporcionalidade, interpretando a taxa unitária como o coeficiente angular da reta. Comparar duas relações de proporcionalidade representadas de diferentes formas. Por exemplo, comparar o gráfico da posição em função do tempo de um objeto com a equação da posição em função do tempo de outro objeto para determinar qual deles tem a maior velocidade.²⁴

8º Ano, Funções, CCSS.Math.Content.8.F.B.4: Obter a função que representa a relação linear entre duas quantidades. Determinar a taxa de variação e o valor inicial da função a partir da descrição da relação ou de dois pares $(x; y)$ de valores, inclusive lendo esses valores em um gráfico ou tabela. Interpretar a taxa de variação e o valor inicial de uma função linear em termos da situação que ela modela, e também de seu gráfico ou de uma tabela de valores.²⁵ (p. 54 e 55)

Com isso, identifica-se um enfoque que valoriza a questão da variabilidade nos materiais didáticos americanos. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) sugere, em seu programa Illuminations, atividades com o objetivo de criar significado em torno dos conceitos de coeficiente angular e coeficiente linear. Dentre vários outros exemplos, podemos citar a atividade “Equations of Attack”²⁶, proposta para o 8º ano, que tem como um de seus objetivos “construir o gráfico de uma reta dados seus coeficientes angular e linear”.

Claro que a construção de gráficos a partir de uma tabela de valores também é importante para que o aluno seja capaz de transitar por diferentes representações do conceito de função. Mas ao apresentar as duas abordagens aos alunos, destaca-se o conceito de coeficiente angular, tão importante para o desenvolvimento da ideia de variabilidade.

Diante do exposto, propomos que o estudo da função polinomial do 1º grau seja iniciado com a retomada da ideia de proporcionalidade vista no Ensino Fundamental, em lugar de defini-la a partir de sua lei algébrica como é feito na maioria dos livros didáticos. Um enfoque baseado em proporções permite valorizar a ideia de variabilidade, destacando a natureza das variações observadas entre duas grandezas diretamente proporcionais. Com isso, a lei algébrica acaba aparecendo como uma consequência natural da relação de

²⁴ Graph proportional relationships, interpreting the unit rate as the slope of the graph. Compare two different proportional relationships represented in different ways. For example, compare a distance-time graph to a distance-time equation to determine which of two moving objects has greater speed.

²⁵ Construct a function to model a linear relationship between two quantities. Determine the rate of change and initial value of the function from a description of a relationship or from two (x, y) values, including reading these from a table or from a graph. Interpret the rate of change and initial value of a linear function in terms of the situation it models, and in terms of its graph or a table of values.

²⁶ Disponível em: <<https://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2858>>. Acesso em 18.01.2017.

proporcionalidade entre as duas variáveis, e não como o ponto de partida da construção do raciocínio.

Para ilustrar tal abordagem, vamos imaginar que, a partir da exploração de um contexto familiar aos alunos, sejam identificadas duas variáveis diretamente proporcionais x e y tais que $y = 3x$. A tabela 9 mostra diferentes valores de x e os correspondentes valores de y para essa situação.

Tabela 9 – Valores correspondentes de duas variáveis x e y diretamente proporcionais.

x	0	1	2	3	3,5	4,5	$\sqrt{29}$	$\sqrt{29} + 1$
y	0	3	6	9	10,5	13,5	$3\sqrt{29}$	$3\sqrt{29} + 3$

No Ensino Fundamental, é comum destacar, em um caso como este, que o valor da variável y é sempre o triplo do valor de x , o que consiste em focar cada coluna da tabela separadamente. No entanto, também é possível pensar nas variações correspondentes das duas variáveis, como indicado pelas flechas: pode-se perceber que, a cada aumento de 1 unidade na variável x , corresponde um crescimento de 3 unidades na variável y .

Ampliando a análise acima, podemos mostrar que as variações Δx e Δy das duas variáveis também são diretamente proporcionais. De fato, sendo x_1 e x_2 valores distintos da variável x e y_1 e y_2 , respectivamente, os valores correspondentes da variável y , temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3x_2 - 3x_1}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 3$$

Este resultado, apesar de bastante simples, representa uma propriedade fundamental das proporções, que servirá como base para um estudo das funções baseado na ideia de variabilidade: se duas variáveis são diretamente proporcionais, então o crescimento de uma em relação à outra se dá a uma taxa constante.

Resumindo, temos que se x e y são variáveis proporcionais, ou seja, existe uma constante de proporcionalidade a tal que $y = ax$, então suas variações correspondentes Δx e Δy também são proporcionais (com a mesma constante de proporcionalidade). Uma investigação interessante consiste em analisar a situação inversa: o que se pode concluir sobre duas variáveis cujas variações correspondentes são proporcionais? Será que elas também serão proporcionais?

Para responder a essas perguntas, vamos considerar duas variáveis x e y tais que $\Delta y = a \cdot \Delta x$, sendo a uma constante não nula. Chamaremos de b o valor assumido pela variável y quando a variável x assume o valor zero. Assim, sendo x e y dois valores correspondentes quaisquer das duas variáveis, temos:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x \quad \therefore \quad y - b = a \cdot (x - 0) \quad \therefore \quad y = ax + b$$

A relação acima mostra que a razão $\frac{y}{x}$ só será constante quando tivermos $b = 0$. Dessa forma, duas variáveis cujas variações correspondentes são proporcionais não serão, necessariamente, proporcionais. Vale lembrar que, neste caso, a razão $\frac{y-b}{x}$ será constante.

Observamos, ainda, que a lei algébrica $y = ax + b$ surgiu como consequência de um aspecto muito mais significativo para caracterizar as funções polinomiais do 1º grau: elas variam com uma taxa constante.

A interpretação gráfica das duas situações analisadas é fundamental para a criação de significado em torno da questão da variabilidade de uma função polinomial do 1º grau. Nas figuras 19a e 19b, mostramos, respectivamente, os gráficos correspondentes às leis algébricas $y = ax$ e $y = ax + b$. Nos dois casos, a cada aumento de 1 unidade na variável x corresponde um aumento de a unidades na variável y . Além disso, o gráfico de $y = ax$ passa, necessariamente, pela origem do sistema de coordenadas, enquanto que o gráfico de $y = ax + b$ intercepta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0; b)$.

Figura 19 – Representações gráficas correspondentes às leis $y = ax$ e $y = ax + b$

Nas figuras 19a e 19b, os gráficos apresentados correspondem a situações em que o coeficiente a é positivo. Evidentemente, é importante também trabalhar com os alunos vários casos em que o coeficiente a é negativo, originando funções decrescentes. Para tais funções, a cada aumento de 1 unidade na variável x corresponde uma queda de $-a$ unidades na variável y .

O caso da função do 1º grau é bastante adequado para que os alunos compreendam o significado de taxa de variação, já que, neste tipo de função, a taxa é constante. Uma vez que essas ideias tenham sido bem exploradas para este caso, é possível fazer alguns aprofundamentos interessantes durante o estudo da função polinomial do 2º grau, que permitem chegar às noções de derivada e concavidade de uma função.

Uma maneira natural de introduzir as funções do 2º grau considerando a ideia de proporcionalidade abordada nas funções do 1º grau consiste em explorar situações envolvendo duas variáveis, em que uma delas seja proporcional ao quadrado da outra. Por exemplo, quando se pensa na área S de um quadrado em função da medida x de sua diagonal, tem-se que $S = \frac{1}{2} \cdot x^2$, ou seja, S é proporcional ao quadrado de x , com constante de proporcionalidade igual a $\frac{1}{2}$. Propomos aqui o uso da relação entre a área e a diagonal de

um quadrado, e não de seu lado, para que a constante de proporcionalidade envolvida não seja igual a 1.

Para explorar a função $S = \frac{1}{2} \cdot x^2$, sugerimos que se trabalhe simultaneamente com uma tabela de valores e com sua representação gráfica. Em um primeiro momento, é natural utilizar apenas valores positivos da variável x , uma vez que ela representa a medida da diagonal de um quadrado. Ao longo da atividade, porém, pode-se extrapolar o contexto original, propondo-se a investigação do comportamento da variável S para valores negativos de x . Tal extrapolação é necessária para visualizar de forma mais completa o gráfico da função, que é uma parábola, permitindo a identificação do seu vértice e dos intervalos de crescimento / decrescimento da função.

A construção de uma tabela de valores permite observar o comportamento da taxa unitária, ou seja, a variação ΔS da variável S para um aumento de 1 unidade na variável x . Para funções polinomiais do 2º grau, a taxa unitária não é constante, mas é possível identificar um padrão em sua variação. Esse padrão fica explicitado por meio do cálculo da “taxa da taxa”: uma vez que a taxa unitária é uma grandeza variável, podemos calcular a sua própria taxa unitária. Mais a frente, na página 94, detalhamos a análise da taxa da taxa de uma função quadrática por meio de um exemplo.

O comportamento da taxa unitária também pode ser observado graficamente, proporcionando que se comece a discutir os padrões de variação das funções polinomiais do 2º grau. Na figura 20, são mostradas as taxas unitárias da função S em três diferentes intervalos do seu domínio. A comparação visual dessas variações permite concluir que, ao contrário das funções polinomiais do 1º grau, a taxa de variação não se mantém constante. O trecho do gráfico correspondente a valores negativos de x foi feito em linha tracejada porque, no contexto original, a variável x só poderia assumir valores positivos.

Figura 20 – Representação gráfica e padrão de variação da função dada pela lei $S = \frac{1}{2}x^2$

De forma geral, se uma variável y é diretamente proporcional ao quadrado de uma variável x , podemos dizer que $y = ax^2$, sendo a uma constante não nula. Para completar a análise desse caso, vamos mostrar que, neste tipo de relação, a taxa de variação não é constante. Sendo x_1 e x_2 valores distintos da variável x e y_1 e y_2 , respectivamente, os valores correspondentes da variável y , temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

O resultado acima mostra que a taxa de variação depende da particular escolha dos valores x_1 e x_2 . Se $a > 0$, então essa taxa de variação cresce à medida em que x_1 e x_2 aumentam. Isto explica o padrão de crescimento mostrado no exemplo da figura 20, em que se observam taxas de variação crescentes ($\Delta S_1 < \Delta S_2 < \Delta S_3$).

Já se $a < 0$, a taxa de variação decresce à medida em que x_1 e x_2 aumentam. A figura 21 mostra o gráfico da função dada pela lei $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2$, com a indicação visual do crescimento a taxas decrescentes ($\Delta S_1 > \Delta S_2 > \Delta S_3$).

Figura 21 – Representação gráfica e padrão de variação da função dada pela lei $S = -\frac{1}{2}x^2$

Os gráficos das figuras 20 e 21 indicam uma maneira de discutir o conceito de concavidade de uma função baseada na ideia de variabilidade. Acrescentando a estes dois exemplos o caso das funções polinomiais do 1º grau, pode-se identificar três modelos possíveis para o crescimento de uma função: funções que crescem com taxa constante (aquelas cujo gráfico é uma reta), com taxa crescente (aquelas que têm a concavidade voltada para cima) e com taxa decrescente (aquelas que têm a concavidade voltada para baixo). A figura 22 traz um comparativo desses três modelos de crescimento: a função f , polinomial do 1º grau, que cresce com taxa constante, e as funções g e h , polinomiais do 2º grau, que, nos trechos reproduzidos, crescem com taxa crescente e decrescente, respectivamente.

Figura 22 – Três modelos de crescimento: taxa constante (f), crescente (g) e decrescente (h)

A simples análise visual dos três gráficos pode fornecer aos alunos importantes ferramentas para a compreensão de fenômenos em geral. Ao perceber que a função f cresce sempre com a “mesma velocidade”, a função g cresce “cada vez mais rapidamente” e a função h cresce “cada vez mais devagar”, os alunos podem compreender, por exemplo, o gráfico da figura 23, típico das dinâmicas populacionais. Inicialmente, quando há abundância de recursos, a população cresce a taxas crescentes. A partir do ponto P , quando os recursos se tornam escassos, a população continua crescendo, mas com taxas decrescentes, tendendo a estabilizar-se em torno de um valor que é a capacidade suporte daquele ambiente.

Figura 23 – Gráfico típico de crescimento populacional ao longo do tempo

Vale ressaltar que a análise feita para funções crescentes, que identificou três padrões de crescimento, deve ser feita, de maneira análoga, para as funções decrescentes.

Os três tipos de crescimento apresentados também podem ser usados para interpretar os movimentos uniforme e uniformemente variado, amplamente estudados pela Física na 1ª série do Ensino Médio. No movimento uniforme, em que a velocidade é constante, a posição cresce com taxa constante ao longo do tempo. Nos movimentos uniformemente acelerado e retardado, a posição cresce com taxa crescente e decrescente, respectivamente, ao longo do tempo. Com tal abordagem, é possível, inclusive, discutir o termo *uniformemente* variado sob um ponto de vista mais matemático. Vamos ilustrar essa análise tomando a função f , dada por $f(x) = x^2$, e investigando o padrão de variação não da própria função, mas de sua taxa unitária. Para isso, precisaremos do valor da taxa unitária da função f nos intervalos indicados na tabela 10.

Tabela 10 – Taxas unitárias da função f para seis intervalos.

Intervalo $[a; b]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$	$[3; 4]$	$[4; 5]$	$[5; 6]$
Taxa de variação unitária: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{1} = f(b) - f(a)$	1	3	5	7	9	11

Os valores calculados na tabela 10 mostram que a função f não tem a taxa unitária constante, mas que ela varia “de maneira uniforme”, crescendo sempre 2 unidades a cada intervalo. Ou seja, a “taxa da taxa” é constante e igual a 2. Evidentemente, a propriedade descrita está relacionada com a segunda derivada da função do 2º grau, que é constante.

A abordagem apresentada, baseada na ideia de variabilidade, confere outro significado para o conceito de concavidade que, nos livros didáticos, está associado exclusivamente ao sinal do coeficiente a e ao formato da parábola (“para cima” ou “para baixo”). A função com taxas crescentes apresenta concavidade para cima e, com taxas decrescentes, para baixo. Mais uma vez, dependendo do nível de profundidade com o qual se pretende trabalhar, pode-se ir além da simples análise visual, buscando-se alguns resultados mais quantitativos.

Por exemplo, para a função dada pela lei $f(x) = x^2$, vamos fixar um ponto $x = p$ do domínio e calcular a taxa de variação média no intervalo $[p; p + h]$, sendo $h > 0$. Temos que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(p + h) - f(p)}{(p + h) - p} = \frac{(p + h)^2 - p^2}{h} = 2p + h$$

Essa taxa também é chamada de **razão incremental** para um incremento h da variável x . Como p está fixo e h é positivo, percebemos que, para a função f , a taxa de variação sempre cresce à medida em que aumentamos o incremento h . Assim, a função apresenta taxa de variação crescente em todo o seu domínio e, portanto, tem a concavidade voltada para cima. Na figura 24, pode-se observar, para $p = 1$ e diferentes valores de h , o aumento da inclinação da reta que liga os pontos do gráfico de f com abscissas p e $p + h$ à medida em que h cresce, ilustrando o crescimento da taxa de variação. A escala no eixo x foi modificada para facilitar a visualização.

Figura 24 – Visualização gráfica de função com taxas de variação crescentes (concavidade para cima)

A figura 24 sugere ainda a possibilidade de trabalhar o problema da reta tangente ao gráfico da função f . Nesse caso, a análise visual mostra que, à medida em que diminuimos o

valor do incremento h , a reta desenhada mais se aproxima daquela que nossa intuição diz ser a reta tangente. Ao discutir essa situação com os alunos, além de introduzir o conceito de derivada por meio do coeficiente angular da reta tangente, cria-se uma oportunidade para tratar a ideia de limites de uma maneira bastante intuitiva.

Ao planejar uma atividade envolvendo derivadas e limites em uma aula sobre funções do 2º grau para a 1ª série do Ensino Médio, é preciso ter dois aspectos em mente. O primeiro deles refere-se à finalidade original de uma proposta dessa natureza. O foco não deve estar na técnica – na obtenção de uma regra de derivação ou no detalhamento de um cálculo de limite. Pelo contrário, o mais importante é o desenvolvimento das ideias centrais, de caráter mais geral, que ajudem os alunos a compreender fenômenos. Por exemplo, ao observar o gráfico da distância percorrida por um corpo em queda livre em função do tempo, perceber que a velocidade do corpo será cada vez maior.

O segundo aspecto está ligado ao nível de formalismo matemático empregado. Não se pode cometer o mesmo erro que se observa em alguns cursos universitários de Cálculo. O formalismo deve ser compatível com a maturidade matemática de alunos da 1ª série do Ensino Médio, suficiente para que eles consigam compreender e aceitar as ideias principais. Nesse contexto, justificativas por meio de gráficos ou exemplos tendem a ser bem mais adequadas do que demonstrações baseadas em manipulações algébricas.

Toda a apresentação que fizemos até aqui sobre as funções polinomiais do 2º grau baseou-se em casos particulares, cuja lei pode ser expressa na forma $y = ax^2$, com $a \neq 0$. Esta estratégia tem como vantagem proporcionar mais facilidade nas manipulações algébricas necessárias para mostrar determinadas propriedades. Não há problema que se proceda dessa maneira, desde que, em certo momento, seja trabalhado o caso geral, representado pela expressão $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. A seguir, mostraremos como isso pode ser feito de modo relativamente simples.

O gráfico de uma função dada por $y = ax^2$, com $a \neq 0$, é uma parábola cujo vértice coincide com a origem do sistema de coordenadas. Conforme o estudo que fizemos dos padrões de variação desse tipo de função, ela terá a concavidade para cima quando $a > 0$ e, para baixo, quando $a < 0$. Com base nestas informações, podemos construir os gráficos de dois outros tipos de funções, dados por leis do tipo $y = ax^2 + q$ e $y = a(x - v)^2$, com $a \neq 0$ em ambos os casos.

De fato, no primeiro caso, basta realizar uma translação de q unidades, na direção do eixo y , do gráfico da função dada por $y = ax^2$. Para mostrar essa propriedade aos alunos, é mais conveniente utilizar exemplos numéricos, construindo-se uma tabela com diferentes valores para a variável x e representando os pontos obtidos em um gráfico. Por exemplo, para as funções dadas pelas leis $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 + 3$, temos os valores registrados na tabela 11. Em cada coluna, o valor da última linha supera em 3 unidades o valor da linha anterior, como indicado pela flecha.

Tabela 11 – Pares $(x; y)$ pertencentes aos gráficos das funções dadas por $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 + 3$.

x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
$y = 2x^2$	8	4,5	2	0	2	4,5	8
$y = 2x^2 + 3$	11	7,5	5	3	5	7,5	11

Na segunda situação, o gráfico resultará de uma translação de v unidades do gráfico original, desta vez na direção do eixo x . Neste caso, trata-se de uma propriedade mais difícil de ser visualizada do que a anterior, de modo que a análise de exemplos numéricos torna-se ainda mais importante. A tabela 12 traz os exemplos das funções dadas pelas leis $y = 2x^2$ e $y = 2(x - 3)^2$. Para a segunda função, os valores de x escolhidos superam em 3 unidades os correspondentes valores de x da primeira função, resultando em valores iguais de y .

Tabela 12 – Pares $(x; y)$ pertencentes aos gráficos das funções dadas por $y = 2x^2$ e $y = 2(x - 3)^2$.

x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
$y = 2x^2$	8	4,5	2	0	2	4,5	8
x	1	1,5	2	3	4	4,5	5
$y = 2(x - 3)^2$	8	4,5	2	0	2	4,5	8

valores iguais

A partir dos valores das tabelas 11 e 12, construímos os gráficos das três funções, dadas, respectivamente, pelas leis $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 3$ e $y = 2(x - 3)^2$, mostrados na figura 25. Com isso, ficam evidenciadas as duas translações descritas anteriormente.

Figura 25 – Gráficos construídos a partir de translações do gráfico da função dada por $y = 2x^2$

Combinando os dois raciocínios explicados nos exemplos anteriores, podemos pensar no caso mais geral, correspondente a funções dadas por uma lei do tipo $y = a(x - v)^2 + q$, em que a , v e q são constantes, com $a \neq 0$. O gráfico de uma função desse tipo será uma parábola com vértice no ponto de coordenadas $(v; q)$, obtida por meio de duas translações aplicadas ao gráfico da função dada por $y = ax^2$, cujas propriedades já foram estudadas anteriormente. A figura 26 mostra um esboço desse gráfico para o caso em que $a > 0$, $v > 0$ e $q > 0$.

Figura 26 – Gráfico de uma função dada por uma lei do tipo $y = a(x - v)^2 + q$, com $a > 0$, $v > 0$ e $q > 0$

Uma vez que conhecemos as propriedades dos gráficos das funções cuja lei pode ser escrita na forma $y = a(x - v)^2 + q$, resta mostrar que toda função polinomial do 2º grau, cuja expressão geral é $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pode ter sua lei escrita nessa mesma forma. O desenvolvimento que faremos a seguir envolve algumas manipulações algébricas mais trabalhosas. Por isso, o professor deve avaliar a pertinência de realizá-la integralmente com os alunos. Eventualmente, pode ser mais conveniente trabalhar com exemplos numéricos. Ressaltamos aqui a importância de administrar a tensão entre intuição e rigor, além da discussão sobre a existência de diferentes níveis de rigor em uma demonstração.

Desenvolvendo o quadrado $(x - v)^2$, temos:

$$y = a(x - v)^2 + q \Leftrightarrow y = ax^2 - 2avx + av^2 + q$$

Observando o coeficiente de x na expressão acima, fazemos $b = -2av$, obtendo que $v = -\frac{b}{2a}$.

Do mesmo modo, tomando a parte independente de x , fazemos $c = av^2 + q$, de onde segue que $c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + q$, ou seja, $q = c - \frac{b^2}{4a}$.

Assim, toda expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pode ser escrita na forma $y = a(x - v)^2 + q$, em que $v = -\frac{b}{2a}$ e $q = c - \frac{b^2}{4a}$. Note que o par $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$ corresponde às coordenadas do vértice da parábola definida por $y = ax^2 + bx + c$.

A equivalência que acabamos de mostrar garante que as propriedades vistas anteriormente, ligadas aos padrões de crescimento de funções dadas por leis do tipo $y = ax^2$, valem para qualquer função polinomial do 2º grau. Com isso, encerramos a apresentação de nossa proposta de enfoque para o estudo de funções, especificamente as funções polinomiais de 1º e 2º graus.

As propostas feitas nesta seção mostram como é possível trabalhar a ideia de variabilidade de maneira muito mais efetiva com uma simples mudança de enfoque na apresentação do conceito de função. Pode-se, inclusive, chegar à própria noção de derivada ainda na 1ª série do Ensino Médio, sem que, para isso, seja necessário trabalhar os limites de maneira formal. Neste caso, porém, o par finito – infinito acaba tendo um papel importante no processo de compreensão das ideias apresentadas. Por esse motivo, vamos apresentar,

na próxima seção, uma discussão sobre possibilidades de exploração desse par no contexto do Ensino Médio, o que, nos livros brasileiros, não é muito frequente.

2.3.3 A presença do par finito – infinito na escola básica

As reflexões sobre a noção de infinito permeiam praticamente toda a história da matemática, transbordando para outras áreas como a filosofia e a física. Como descreve Santos (1996), já são cerca de 26 séculos em que ideias como imensidão, eternidade, ilimitado, (in)comensurabilidade, entre outras, sustentam tanto discussões de caráter metafísico quanto lógico sobre o infinito. Segundo Boyer (1991), um marco importante nessa caminhada são os paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.), que foram aparentemente propostos para refutar as ideias de multiplicidade e divisibilidade dos pitagóricos, expondo problemas relacionados a processos constituídos de infinitas etapas. Do ponto de vista da construção lógico-dedutiva, os matemáticos só conseguiram resolver a questão do infinito no século passado, graças, principalmente, aos trabalhos de Dedekind e Cantor.

Não é de se estranhar, portanto, que a noção de infinito apareça com frequência em vários assuntos tratados na escola básica, nas aulas de matemática e de outras disciplinas. De fato, o infinito está presente nas discussões sobre tempo, universo, contagem, medida, entre outras.

Ao mesmo tempo, a história mostra que a noção de infinito pode não ser trivial. Não foram poucas as situações em que matemáticos, filósofos ou físicos colocaram-se diante de dilemas envolvendo este conceito, sendo necessários muitos anos de amadurecimento intelectual para superá-los.

Apesar desses dois aspectos, as discussões sobre a ideia de infinito costumam ser evitadas durante as aulas de Matemática na escola básica e, muitas vezes, até em cursos superiores de Cálculo. Em muitas situações que seriam favoráveis ao desenvolvimento de ideias sobre o tema, o debate a respeito da natureza de processos infinitos acaba sendo substituído pelo emprego de procedimentos mecânicos, cuja fundamentação não é apresentada de maneira adequada. Uma consequência disso, identificada por Rezende (2003) ao trabalhar com alunos do ensino superior, consiste no fato de que, “apesar da complexidade do conceito de infinito, é, no mínimo, curioso que nossos estudantes não

tenham sequer consciência das dificuldades referentes à noção de infinito, mesmo tendo eles já realizado um curso de Cálculo”.

Santos (1996), além de reconhecer a pouca atenção dada ao assunto no Ensino Fundamental, sugere alguns campos com potencial para que sejam desenvolvidas atividades sobre o tema.

(...) Ampliou-se o repertório possível de (...) situações-problema que contemplem vários desses aspectos na forma de sugestões para uma abordagem inicial do tema [infinito] nas diferentes séries [do Ensino Fundamental], para além da atenção discreta que vem sendo dada ao tema, mesmo no ensino de Matemática. Entre essas sugestões, pode-se considerar desde o trabalho com sucessões e séries envolvendo objetos, figuras e símbolos vivenciadas a partir da Educação Infantil e que se relacionam com a estrutura de ordem, até as sucessões numéricas, os números racionais e irracionais, cálculos de áreas e volumes, aproximações, convergência de algumas séries, ideia de limite, processos recursivos, variação de grandezas, função, probabilidade, paradoxos, fractais, relações entre conjuntos infinitos etc. (p. 68)

Apresentaremos, a seguir, um exemplo de situação presente no currículo da escola básica em que a dualidade finito – infinito poderia ser colocada mais em evidência. Não pretendemos, porém, nos aprofundar muito no tema, que é bastante vasto, para não desviar do escopo do trabalho.

A situação diz respeito à série geométrica convergente, ou seja, a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, com razão de módulo menor do que 1. Na maior parte dos materiais didáticos, o assunto é tratado apenas com uma abordagem algébrica, que passamos a reproduzir a seguir.

Tomando-se uma progressão geométrica de razão q , cujo primeiro termo seja a , escreve-se a soma S de seus termos:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por q , obtém-se:

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots$$

O artifício consiste, então, de subtrair, membro a membro, as duas igualdades, cancelando-se os termos comuns, como indicado a seguir.

$$\begin{aligned}
 S &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots \\
 - \quad qS &= \quad aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots \\
 \hline
 S - qS &= a \\
 \therefore S(1 - q) &= a \\
 \therefore S &= \frac{a}{1 - q}
 \end{aligned}$$

A natureza do cancelamento realizado acima é muito pouco discutida e, a partir de então, passa-se a utilizar a fórmula obtida sem que se volte a pensar no significado do processo.

O estudo das séries geométricas convergentes é uma excelente oportunidade para tratar da dualidade finito – infinito, podendo colaborar para a criação de significado em torno da noção de limite de um processo que se realiza em infinitas etapas. Para isso, é fundamental que ele esteja associado a um contexto mais concreto, no qual os alunos possam se apoiar durante a passagem do finito para o infinito.

Por exemplo, ao estudar a soma $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, vamos tomar, como contexto, um processo de sucessivas divisões feitas em uma figura. Essa figura é um quadrado com lado medindo 1, com seu interior inicialmente branco. Em cada etapa, a parte branca da figura é dividida em dois retângulos congruentes, colorindo-se o interior de um deles e deixando o outro branco. A figura 27 mostra as quatro primeiras etapas desse processo.

Figura 27 – Processo de sucessivas divisões de um quadrado de lado medindo 1

Vamos estudar a soma das áreas de todas as regiões coloridas até uma determinada etapa do processo. Chamando essa soma de S_n para a etapa n , temos:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

⋮

Cada soma indicada acima é finita. Porém, a cada etapa, em que se introduz uma nova parcela, mais ela se aproxima da soma infinita S que desejamos estudar. Tem-se, aí, um aspecto fundamental da dualidade finito – infinito: na maioria das situações, o estudo de um processo infinito é feito por meio de aproximações finitas.

O contexto introduzido concretiza a ideia de um processo que se estende indefinidamente. Por um lado, sempre é possível, pelo menos do ponto de vista teórico, dividir ao meio uma região. Por outro, ao fazer essa divisão, sempre restará uma parte que dará continuidade ao processo.

Para estudar o comportamento da soma à medida em que são introduzidas novas parcelas, é importante, em um primeiro momento, trabalhar com a representação decimal dos resultados obtidos, para que os alunos possam associar os valores numéricos à interpretação geométrica sugerida pelo contexto. Isso pode ser feito com uma calculadora ou uma planilha eletrônica, gerando a sequência (0,5; 0,75; 0,875; 0,9375; 0,96875; ...).

A análise dos valores numéricos indica que eles se aproximam cada vez mais de 1 conforme são acrescentadas mais parcelas. Na figura, isto pode ser visualizado pelo fato de que o quadrado, cuja área total é 1, vai ficando cada vez mais preenchido por figuras coloridas. Ao mesmo tempo, os incrementos gerados pela introdução de uma nova parcela são cada vez menores, o que, na figura, pode ser percebido pela diminuição do tamanho de cada novo retângulo colorido.

Uma pergunta que deve ser feita ao longo da discussão é: “quão perto de 1 se pode chegar aumentando o número de etapas do processo?”. É muito importante que os alunos percebam, apoiando-se tanto na sequência numérica quanto na figura, que é possível chegar tão perto de 1 quanto se queira. Uma justificativa para isso é o fato de que a área da região

branca na etapa n , que é igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pode ficar tão próxima de zero quanto se queira, bastando, para isso, escolher um n suficientemente grande.

As constatações acima permitem identificar uma característica da soma S que contribui decisivamente para a formação da noção de limite no infinito: tomando-se um número suficientemente grande de parcelas (ou de retângulos), pode-se chegar tão perto de 1 (ou da área total do quadrado) quanto se queira. Por isso, o limite da soma é igual a 1, o que justifica escrevermos $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$.

Depois de feita uma reflexão como esta, os procedimentos mecânicos trazidos pelos livros didáticos também podem ser discutidos, desde que as suas diferentes etapas sejam associadas às imagens criadas com a atividade proposta ou outra equivalente.

Existem outros tópicos em que as ideias acima poderiam ser trabalhadas, como na obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica ou no cálculo da área de um círculo, mas que os materiais didáticos preferem abordar de maneira mecânica, por meio de fórmulas prontas ou procedimentos cujos fundamentos não são discutidos com profundidade. Trabalhar intencionalmente os processos mentais ligados ao infinito em diferentes etapas da escolarização é fundamental para que os alunos possam de fato compreender os processos de aproximação do Cálculo, descritos nas seções 2.2.3 e 2.2.4.

2.3.4 Recursos tecnológicos

Quando se pensa nos aspectos relevantes para a integração do Cálculo ao programa do Ensino Médio, não se pode deixar de lado a perspectiva de utilização de recursos tecnológicos. Tal discussão se insere em um contexto bem mais amplo, que estuda o impacto das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) nos sistemas educacionais.

De forma geral, as TIC podem ser entendidas como um conjunto de recursos tecnológicos integrados que medeiam processos de circulação de informações e de comunicação entre seres humanos nas mais diferentes áreas, como nos negócios, na pesquisa científica e na educação.

No contexto educacional, muitos pesquisadores têm se dedicado a entender as implicações e os desafios do uso de TIC nos processos de ensino e aprendizagem. Dentre os

temas estudados, podemos citar a avaliação de resultados obtidos com a utilização de apoio tecnológico no ensino de matemática (Ramadan e Yaratan, 2014), a análise desse uso na aprendizagem de tópicos específicos (Assis, Silva e Bairral, 2016), a forma como os recursos tecnológicos estão incorporados nos materiais didáticos de matemática no Brasil (Ribeiro e Amaral, 2016) e a relação dos professores de matemática com a utilização de TIC (Trgalová e Jahn, 2013; Rosa e Mussato, 2015), entre outros.

Especificamente em relação ao ensino de Cálculo, a discussão sobre o papel das novas tecnologias vem ocorrendo há algumas décadas. White e Mitchelmore (1996) já apontavam que “o valor de cursos de Cálculo com foco nas técnicas passou a ser questionado porque computadores e calculadoras já realizam a maior parte (se não tudo) dos procedimentos ensinados em tais cursos”²⁷.

Um exemplo dessa busca de um novo significado para os cursos de Cálculo no atual contexto tecnológico é dado por Sofronas et al. (2011), que descrevem um posicionamento interessante dos especialistas ouvidos em sua pesquisa, revelando que o tempo dedicado em seus cursos ao aprendizado de técnicas de primitivação vem caindo com a ampliação da utilização do computador. Um dos participantes afirmou que “cortou a maioria das técnicas de integração, porque sempre se pode ir ao *integrals.com* para obter essas respostas”²⁸.

Voltando ao contexto da educação básica, já tratamos da tensão entre ideias e técnica, destacando a tendência a um viés para o lado da técnica que se observa no ensino de Cálculo em geral. Também afirmamos que, levando em conta as finalidades da escola básica, especialmente no que diz respeito à compreensão de fenômenos, o foco de um eventual ensino de Cálculo deveria ser a discussão de suas ideias fundamentais, e não a apresentação de um extenso ferramental técnico. No entanto, o domínio de certas técnicas pode ajudar o aluno a criar significado em torno das ideias centrais do Cálculo, além de aumentar a possibilidade de que tais ideias possam ser aplicadas em problemas reais.

Tomemos como exemplo a noção de integral, conforme sua descrição feita na seção 2.2.3. A ideia de aproximar a área da região limitada pelo gráfico de uma função e pelo eixo das abscissas, em certo intervalo, pela soma das áreas de vários retângulos é relativamente

²⁷ The value of skill-based calculus courses has also come under fire because computers and calculators now perform most (if not all) of the manipulative procedures taught in such courses.

²⁸ Cut out most of the integration technique hand methods, because you can go to *integrals.com* to get these answers.

simples. Para que se aproprie dessa ideia, porém, é preciso que o aluno se convença de que, ao aumentar a quantidade de retângulos, a aproximação obtida tenderá ao valor exato daquela área. Uma possibilidade de fazer isso é escrever a soma das áreas dos retângulos para uma função específica e determinar, algebricamente, o limite dessa soma quando o número de retângulos tende a infinito. É claro que tal possibilidade envolve o uso de técnicas algébricas e propriedades dos cálculos dos limites que não nos parecem adequadas ao enfoque do ensino de Cálculo que defendemos para o Ensino Médio.

Nesse contexto, o uso de recursos tecnológicos pode ajudar muito o trabalho com as ideias do Cálculo na escola básica, evitando a necessidade de introduzir todo um conjunto de técnicas que descaracterizaria o propósito inicial desse trabalho. Retomando o exemplo da ideia de integral, vamos mostrar como o *software* GeoGebra²⁹ pode representar uma alternativa ao cálculo do limite descrito anteriormente, totalmente adequada a uma abordagem voltada à escola básica.

Vamos considerar o cálculo da área A da região delimitada pelo eixo das abscissas e pelo gráfico da função f , dada pela lei $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 3x$, no intervalo de $x = 0$ até $x = 6$. Podemos inicialmente aproximar a área dessa região pela soma das áreas dos 3 retângulos indicados na figura 28, todos com base medindo 2.

Figura 28 – Aproximação da região delimitada pelo gráfico da função f por 3 retângulos

²⁹ Software de uso livre voltado ao ensino de matemática, que pode ser obtido em <<https://www.geogebra.org/cms>>.

Dessa forma, temos:

$$A \approx f(2) \cdot 2 + f(4) \cdot 2 + f(6) \cdot 2 \quad \therefore \quad A \approx 5 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 2 \quad \therefore \quad A \approx 44$$

O resultado acima, que pode ser facilmente obtido pelos alunos, corresponde à soma de Riemann de f , relativa à partição $P = \{0, 2, 4, 6\}$ do intervalo $[0; 6]$, tomando-se o valor da função no extremo direito de cada intervalo da partição.

O mesmo resultado pode ser obtido no GeoGebra: definindo a função f e utilizando o comando *SomaDeRiemannSuperior* $[f, 0, 6, 3]$, o programa representa os três retângulos sobre o gráfico de f , como na figura 28, e indica o valor 44 como a soma de suas áreas. Fazer esse cálculo no papel e, depois, utilizando o GeoGebra é uma forma de os alunos validarem os resultados do programa.

Para observar o comportamento da aproximação no GeoGebra à medida em que o número de retângulos aumenta, pode-se definir um controle deslizante n e reescrever o comando anterior como *SomaDeRiemannSuperior* $[f, 0, 6, n]$. O controle deslizante permite que o valor de n seja alterado de forma dinâmica com auxílio do cursor, de modo que o aluno possa acompanhar, simultaneamente, as mudanças na figura e no valor da soma das áreas conforme aumenta o número de retângulos. A figura 29 mostra o controle deslizante e a soma das áreas obtida para quatro valores distintos de n : 3, 12, 50 e 100.

Figura 29 – Soma das áreas de n retângulos para quatro valores distintos de n

À medida que aumenta o valor de n , a soma das áreas dos retângulos vai se aproximando do valor exato, que é 36. Com o GeoGebra, os alunos podem visualizar esse processo graficamente, identificando que o erro cometido é cada vez menor (a parte dos retângulos que fica fora da região delimitada pelo gráfico vai diminuindo) e, também, numericamente, por meio do cálculo que é realizado pelo programa.

Levando em conta um nível de rigor compatível com o Ensino Médio, o processo descrito acima pode substituir o cálculo algébrico do limite. Ao mesmo tempo, reforça uma ideia fundamental da matemática, a aproximação, que deveria ter um espaço maior dentro das aulas de Matemática desse segmento. Nesse sentido, a utilização de uma ferramenta tecnológica é essencial, pois não seria viável, em sala de aula, realizar tais aproximações no papel.

Nesta seção, apresentamos um exemplo bem representativo das potencialidades que o uso de recursos tecnológicos pode oferecer ao ensino de Cálculo. Embora não caiba mostrar aqui outros exemplos, o espectro de possibilidades é extremamente vasto. Por isso, é um aspecto que deve estar presente no planejamento de um curso de Cálculo, qualquer que seja o nível de escolaridade. Mais ainda na escola básica, onde o foco do ensino deve estar nas grandes ideias da área, que não podem ser ofuscadas por abordagens que valorizem excessivamente algoritmos e técnicas.

Sabemos que há muito a avançar no sentido de incorporar recursos tecnológicos ao cotidiano das escolas brasileiras de maneira significativa, vencendo resistências que perduram por várias décadas. Até mesmo a utilização de calculadora durante as aulas ainda é um tabu para muitos professores, tanto de Matemática quanto de outras disciplinas. Conforme analisam Borba e Penteado (2001), trata-se de um grande desafio para os professores a possibilidade de utilizar, em sua prática docente, tecnologias que alterem a dinâmica usual de suas aulas. Trata-se de sair de uma zona de conforto, em que a maioria das reações são previsíveis, em direção a uma zona de risco, repleta de inseguranças e incertezas.

Sobre essa situação, porém, concordamos com Brito e Purificação (2006). As duas autoras, referindo-se à relação entre as novas tecnologias e a educação, defendem que a comunidade escolar deve desenvolver “habilidades que permitam o controle das tecnologias e de seus efeitos”. Esse caminho contrasta, em um extremo, com uma postura de

isolamento frente aos novos recursos e, no outro extremo, pela adoção da tecnologia como uma mera corrida atrás do novo.

Por isso, a despeito das dificuldades apontadas, não faria sentido que nossa proposta de integrar as principais noções do Cálculo ao programa do Ensino Médio não fizesse referência ao uso de ferramentas tecnológicas. Tendo em mente os efeitos que se pretende obter nesse nível de escolaridade, trata-se de um recurso que pode fazer as grandes ideias do Cálculo brilharem ainda mais.

2.4 O Cálculo no Ensino Médio: uma síntese

Como já foi registrado aqui, ao contrário de outros países, o Cálculo não faz parte do programa de Matemática praticado pela maioria das escolas de Ensino Médio no Brasil. Ao longo dos dois primeiros capítulos deste trabalho, procuramos mostrar a necessidade de que tal decisão seja revista, considerando as finalidades mais gerais da escola básica e propondo um modelo bem diferente daquele adotado pela maioria dos livros didáticos editados até a década de 1990, cuja abordagem em relação ao Cálculo era uma mera antecipação do trabalho que seria feito na universidade.

Desde o princípio, destacamos que não se trata de acrescentar um item à lista de conteúdos atualmente praticada nas escolas, pois tal estratégia reforçaria um dos grandes problemas vividos pelo nosso Ensino Médio atual, a fragmentação curricular. Essa fragmentação revela-se no excessivo número de disciplinas, com pouca ou nenhuma integração entre si, e na falta de articulação entre os diferentes tópicos dentro de uma mesma disciplina.

Nossa análise partiu da discussão das finalidades formativas do Ensino Médio, estabelecidas no artigo 35 da LDB/96 (vide seção 1.1 deste trabalho). Fizemos isso porque tais objetivos estão totalmente alinhados com aquilo que, concordando com Machado (2016), entendemos ser a finalidade primordial da educação: “a formação de pessoas (...) competentes para a vida em sociedade e para a atuação no universo do trabalho”. No entanto, conforme expusemos ao longo do capítulo 2, a abordagem de muitos assuntos matemáticos no Ensino Médio contribui pouco, ou quase nada, para a consecução desses

objetivos. Podemos dizer que existe uma lacuna entre as finalidades mais gerais da escola básica e o seu desdobramento nas diferentes disciplinas que compõem o currículo do Ensino Médio. Um dos fatores mais importantes para a existência dessa lacuna, como dissemos, é a grande fragmentação curricular, tão acentuada nesse segmento.

No caso específico da Matemática, apresentamos a modelagem como uma estratégia muito identificada com as finalidades gerais do Ensino Médio, com grande potencial para integrar diferentes disciplinas e conferir significado aos conteúdos estudados. O exemplo das orientações curriculares de Portugal, que colocam a modelagem como o tema central da Matemática B nos três anos do ensino secundário, mostra de forma concreta como pode ser feita essa integração.

Sob a perspectiva de um currículo orientado pela modelagem, mostramos o valor que seria agregado ao programa do Ensino Médio por um estudo mais aprofundado da Estatística e pela introdução das noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral. A Estatística aumentaria a possibilidade dos alunos trabalharem com dados reais, usados na validação dos modelos construídos. E o Cálculo, ao fornecer as bases para o estudo dos diferentes padrões de variação, ampliaria a capacidade dos alunos de compreender fenômenos em geral e de construir modelos que os representem.

No que se refere à compreensão de fenômenos, é importante destacar o papel do Cálculo no desenvolvimento da ciência e da tecnologia a partir do século XVII. Considerado a principal ferramenta para descrever matematicamente princípios físicos, químicos e econômicos, entre outros, o Cálculo pode ser visto como parte do próprio pensamento científico, tornando-se um dos elementos integradores de diferentes áreas do conhecimento. Por isso, conhecer suas principais ideias aumenta a capacidade dos jovens de compreender os fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos atuais. Além disso, permite que alguns temas tradicionalmente vistos no Ensino Médio, como a cinemática, na Física, e a cinética química, na Química, sejam tratados de maneira mais integrada.

E as ideias do Cálculo transbordam ainda para a representação de fenômenos cotidianos, não apenas científicos. O título de uma reportagem veiculada por uma agência

de notícias da internet³⁰ é um exemplo disso: “Ritmo de queda na produção e no emprego na indústria desacelerou em junho, informa CNI”. Essa manchete indica um aumento do desemprego em junho e, mesmo assim, sinaliza para um cenário positivo. Tal interpretação depende de uma compreensão mais profunda da ideia de variação, que o Cálculo poderia trazer para o programa do Ensino Médio.

Diante do que foi exposto até aqui, o ensino do Cálculo incorporado a outros conteúdos tradicionalmente abordados no Ensino Médio, atrelado a um enfoque baseado na modelagem matemática, pode oferecer uma grande contribuição a um projeto educacional mais integrado, que rompa com a fragmentação do conhecimento escolar e esteja alinhado com as finalidades gerais da educação básica.

Mas como fazer essa integração? As justificativas que elencamos para a inclusão do Cálculo no Ensino Médio apontam para uma abordagem que priorize as suas ideias fundamentais, de modo que a técnica – procedimentos e fórmulas – seja tratada na medida em que sirva de apoio para a compreensão dos conceitos. Além disso, por se tratar de um primeiro contato dos alunos com o Cálculo, não se deve trabalhar com o excessivo rigor que caracteriza essa disciplina nos cursos universitários, optando-se por um enfoque mais intuitivo.

Tendo os dois aspectos acima como elementos norteadores da reflexão, as noções de derivada e integral emergiram como as mais centrais do Cálculo, mediadas pela ideia de aproximação. Procuramos caracterizá-las com base no par variabilidade – permanência, de forma que seus elementos mais fundamentais pudessem apontar conexões com o currículo atualmente praticado no Ensino Médio.

Com isso, apresentamos possíveis abordagens para o estudo das funções polinomiais de 1º e 2º grau e das progressões geométricas, que valorizam as ideias fundamentais que orbitam em torno dos conceitos de derivada e integral, como variabilidade, aproximação e o par finito – infinito. Poderíamos fazer isso facilmente em outros tópicos do programa atualmente praticado, como nas funções exponenciais, na geometria analítica ou no cálculo de áreas e volumes.

³⁰ Agência de notícias da CNI – Confederação Nacional da Indústria. Disponível em: <<http://www.portaldaindustria.com.br/cni/imprensa/2016/07/1,92810/ritmo-de-queda-na-producao-e-no-emprego-na-industria-desacelerou-em-junho-informa-cni.html>>. Acesso em 20.01.2017.

E, por fim, ressaltamos a importância da utilização de recursos tecnológicos, que apoiem a criação de significado em torno das ideias fundamentais do Cálculo sem a necessidade de um excessivo ferramental técnico.

Não pretendemos, com a proposta feita, prescrever a profundidade com que tais conexões devem ser colocadas em prática, pois esta deve estar alinhada com o projeto de cada escola. Nesse sentido, preferimos indicar diferentes caminhos, cabendo aos professores decidir em que nível a aplicação dessas ideias pode favorecer a concretização de um currículo de Matemática mais alinhado com as finalidades gerais da escola básica, de acordo com as particularidades de sua comunidade escolar.

Ao ancorar as duas noções centrais do Cálculo no par variabilidade – permanência, foi possível estabelecer uma série de relações com outros tópicos já vistos no Ensino Médio. Tal estratégia nos motivou a investigar em que medida esse par de ideias é trabalhado de forma intencional ao longo da escola básica, e não apenas no Ensino Médio. Para isso, no próximo capítulo, apresentaremos um marco teórico que descreve como se dá o desenvolvimento cognitivo em torno dessa dualidade, procurando identificá-lo em diferentes etapas da escolarização.

CAPÍTULO 3 – O raciocínio covariacional

A proposta para a incorporação das ideias fundamentais do Cálculo ao programa do Ensino Médio brasileiro que fizemos no capítulo anterior pode suscitar alguma desconfiança por parte daqueles que estão habituados ao modo como essa disciplina é ministrada na maior parte dos cursos universitários. Afinal, como defender que se está ensinando Cálculo na escola sem que os alunos, necessariamente, vivenciem o cálculo de diferentes tipos de limite, conheçam as regras de derivação e integração de um número variado de funções e sejam apresentados aos teoremas mais tradicionais que aparecem nos livros didáticos? Podem até concordar que trabalhar a noção de variabilidade ou a ideia de aproximação seja positivo para a formação matemática dos alunos, mas costumam a aceitar que isso seja aprender Cálculo.

A pergunta que se coloca diante de um questionamento desse tipo refere-se ao momento em que se começa a aprender Cálculo. Façamos uma analogia com o aprendizado da Álgebra, que tem sido bastante estudado pelos pesquisadores da área de Educação Matemática. Formalmente, a Álgebra é introduzida somente no 7º ano do Ensino Fundamental (crianças de 11-12 anos), quando se inicia o estudo das equações do 1º grau. Porém, as pesquisas têm mostrado a importância de que seja feito um trabalho desde muito antes disso, já com crianças de 6 a 7 anos, com o objetivo de desenvolver o seu raciocínio algébrico. Assim, alunos dessa faixa etária têm sido expostos de maneira mais frequente a situações ligadas, por exemplo, ao reconhecimento de padrões numéricos, ainda que sem a preocupação com o uso da linguagem algébrica. Um ensino de matemática com esse enfoque desde as séries iniciais pode potencializar o desempenho dos alunos quando eles tomam contato com a Álgebra formal.

Outros campos da matemática apresentam relações similares entre seu estudo sistematizado e o desenvolvimento das formas de pensar típicas daquele campo. Por exemplo, o pensamento geométrico, que se desenvolve desde o momento em que a criança começa a interagir com o mundo ao seu redor, é trabalhado na escola desde as séries iniciais, ainda que seu estudo mais formal, incluindo a sistematização de propriedades e a

demonstração de teoremas, só seja concretizado bem mais a frente. O mesmo pode ser dito sobre os pensamentos combinatório e estatístico.

Da mesma forma, defendemos a importância de que o ensino de Cálculo não seja pensado apenas a partir do instante em que ele é formalmente introduzido aos alunos. Para fornecer uma base teórica a essa proposta, é fundamental refletir sobre os processos cognitivos relacionados ao aprendizado do Cálculo e os modos de atribuir significado aos seus objetos.

Neste capítulo, faremos inicialmente uma breve descrição do que os educadores matemáticos têm chamado de pensamento algébrico e da importância de seu desenvolvimento ao longo da escola básica, com dois objetivos principais. Por um lado, ela ajudará a compreender a necessidade de caracterizar melhor as formas de pensar típicas do Cálculo e os benefícios que poderão ser obtidos para o ensino dessa disciplina a partir dessa caracterização. Por outro, poderemos destacar os aspectos do pensamento algébrico que são importantes para o aprendizado do Cálculo e também em que medida as formas de pensar da Álgebra e do Cálculo se diferenciam.

Em seguida, buscando um modelo que possa ser utilizado para representar as principais formas de pensar do Cálculo, vamos discutir o marco teórico elaborado por Carlson et al. (2002), que descreve o **raciocínio covariacional**.

Finalmente, vamos procurar associar o marco teórico do raciocínio covariacional com diferentes partes do currículo de Matemática da escola básica, mostrando que ele pode estabelecer um caminho sólido para o desenvolvimento das ideias fundamentais do Cálculo bem antes da chegada dos jovens aos cursos universitários.

3.1 O desenvolvimento do pensamento algébrico na escola básica e sua relação com o ensino de Cálculo

A Álgebra desempenha um papel de grande importância na estrutura dos currículos de Matemática da escola básica. O desenvolvimento de tópicos como funções, geometria analítica, trigonometria, logaritmos, equações algébricas, entre outros, depende fortemente

da capacidade dos alunos de lidar com a linguagem algébrica, atribuindo significado aos seus diferentes objetos.

No entanto, são amplamente reconhecidas as dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem da Álgebra, desde o domínio dos seus símbolos até a criação de significado em torno de seus procedimentos, que, muitas vezes, acabam sendo apenas repetidos mecanicamente.

Por esses dois motivos, a aprendizagem da Álgebra tem sido objeto de muitas pesquisas, ocupando uma parte significativa dos documentos oficiais relativos ao ensino de Matemática em vários países. Jacobs et al. (2007) destacam uma questão fundamental sobre as investigações nessa área, ao apontar que “a transição da aritmética para a álgebra tem se revelado difícil para os alunos, sendo hoje amplamente reconhecido que os estudantes precisam de oportunidades anteriores para desenvolver o raciocínio algébrico”.

Obviamente, não se trata de antecipar o ensino da Álgebra, mas sim de entendê-lo de modo mais amplo, de maneira que a sua ênfase não recaia no mero aprendizado de regras que permitam manipular expressões algébricas. Assim, o esforço de muitos pesquisadores tem se concentrado em caracterizar melhor o raciocínio algébrico de modo que se possa desenhar currículos em que as formas de pensar típicas da Álgebra sejam trabalhadas desde as séries iniciais, antes de sua introdução formal.

Inúmeras formas de caracterização do pensamento algébrico têm emergido recentemente, reflexo dos diferentes pontos de vista e contextos em que são realizadas as pesquisas. Evidentemente, não faz parte do escopo deste trabalho discuti-las em detalhes. Porém, consideramos importante elencar, ainda que de maneira bem sintética, alguns aspectos relevantes para o ensino e a aprendizagem do Cálculo.

Ao analisar o ensino de matemática nas séries iniciais do período de escolarização, Blanton e Kaput (2005) indicam a necessidade de que a prática dos professores, historicamente focada na aritmética e na aquisição de fluência nos cálculos, incorpore novos elementos que possam preparar melhor os alunos para uma aprendizagem mais profunda e estrutural da matemática. Nos últimos anos, vem crescendo o reconhecimento de que uma abordagem preocupada com o desenvolvimento do pensamento algébrico oferece uma contribuição decisiva nesse sentido.

Segundo os autores, o pensamento algébrico pode ser definido como um processo no qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecendo essas generalizações por meio de um discurso argumentativo e expressando-as por vias gradativamente mais formais e apropriadas à sua idade. Dessa forma, o pensamento algébrico pode se manifestar de várias maneiras, dentre elas:

- a) pelo uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
 - b) pela generalização de padrões numéricos para a descrição de relações funcionais (pensamento funcional);
 - c) pela modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
 - d) por generalizações sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações.³¹
- (p. 413)

A aritmética generalizada consiste em raciocinar sobre as propriedades e operações numéricas a partir de casos práticos, como por exemplo identificar generalizações a respeito da propriedade comutativa da multiplicação. Já o pensamento funcional está relacionado à exploração e descrição de regularidades com números, como padrões de crescimento de sequências. A modelagem, do ponto de vista do pensamento algébrico, também está ligada à generalização de regularidades, mas em contextos em que a tarefa de modelagem se sobrepõe à identificação dessas regularidades.

Finalmente, a generalização sobre sistemas matemáticos, também chamada de álgebra abstrata, envolve operações com classes de objetos. Um exemplo disso, relatado pelos autores, revelou-se na conclusão de um grupo de crianças de que a soma de três números ímpares é sempre um número ímpar. Para apoiar sua conclusão, elas usaram generalizações prévias (a soma de dois ímpares é par e a soma de um par com um ímpar é ímpar), caracterizando o uso de classes de objetos – números pares e ímpares.

Em primeiro lugar, deve-se ressaltar a importância de uma caracterização como a feita por Blanton e Kaput (2005), ao permitir que a Álgebra seja trabalhada bem antes de sua introdução formal. A partir dela, pode-se imaginar uma série de atividades voltadas às séries iniciais, que desenvolvam o raciocínio algébrico conforme a concepção descrita pelos autores.

³¹ (a) the use of arithmetic as a domain for expressing and formalizing generalizations (generalized arithmetic); (b) generalizing numerical patterns to describe functional relationships (functional thinking); (c) modeling as a domain for expressing and formalizing generalization; and (d) generalizing about mathematical systems abstracted from computations and relations.

Ainda que haja muito a ser investigado nesse sentido, várias pesquisas têm mostrado evidências de que um enfoque voltado ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde as séries iniciais tem um impacto positivo na relação dos alunos com o aprendizado de Álgebra em diferentes etapas da escolarização (Blanton e Kaput, 2005; Jacobs et al., 2007; Cyrino e Oliveira, 2011; Stephens e Ribeiro, 2012).

Traçando um paralelo com as pesquisas que vêm sendo realizadas no campo da Álgebra, as ações e os resultados descritos mostram a importância de que qualquer proposta ligada ao ensino de Cálculo não seja pensada apenas a partir da introdução formal de seus conteúdos. Pelo contrário, é preciso planejar um trabalho prévio focado no desenvolvimento dos modos de pensar do Cálculo, que possa trazer resultados semelhantes aos que vêm sendo obtidos na Álgebra.

Outro ponto a ser destacado em relação à caracterização de Blanton e Kaput (2005) diz respeito à aplicação de alguns de seus elementos à aprendizagem do Cálculo. O desenvolvimento do pensamento funcional é fundamental para essa disciplina, assim como a generalização sobre sistemas matemáticos. A regra de derivação $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$, por exemplo, pode ser percebida pelos alunos, de maneira natural, a partir da realização do cálculo da derivada das funções dadas por $y = x^2$, $y = x^3$, e assim sucessivamente, e da observação de uma regularidade algébrica.

Dessa forma, o trabalho com o pensamento algébrico desde as séries iniciais também pode trazer benefícios ao ensino do Cálculo. No entanto, deve-se ressaltar que o aprendizado dessa disciplina requer dos alunos outros elementos além daqueles que caracterizam o pensamento algébrico. Esta ressalva é fundamental, na medida em que, para suprir aquilo que chamam genericamente de “falta de base dos alunos”, muitos professores de Cálculo fazem um exaustivo trabalho focado apenas em técnicas algébricas antes de iniciar o conteúdo do curso propriamente dito, obtendo, na maioria das vezes, resultados decepcionantes. Voltaremos a esse ponto quando formos tratar dos chamados “cursos de Pré-Cálculo”.

Ruíz-Hidalgo e Fernández-Plaza (2013), referindo-se à relação de dualidade existente entre a Álgebra e o Cálculo, afirmam que “a [aprendizagem da] Análise apoia-se continuamente em habilidades algébricas, mas, ao mesmo tempo, para conseguir dominar o

raciocínio analítico, é necessário afastar-se do modo de pensar da Álgebra, adquirindo consciência das diferenças que se estabelecem entre eles”³².

Nesse sentido, Artigue (1995) procura descrever aquilo que ela chama de “ruptura Álgebra – Cálculo” por meio do exemplo da igualdade. Em Álgebra, para verificar uma igualdade, é comum raciocinar por meio de **equivalências**. Assim, partindo de uma expressão algébrica $A(x)$, são feitas sucessivas manipulações que permitem obter expressões equivalentes até que se chegue à expressão $B(x)$, o que conduz à conclusão de que $A(x) = B(x)$.

Em Cálculo, porém, nem sempre é possível proceder dessa maneira, sendo frequente utilizar um raciocínio baseado na ideia de **aproximação**. Por exemplo, para mostrar que os limites de duas sequências infinitas a_n e b_n são iguais, é comum argumentar que a diferença entre seus termos, em módulo, pode ficar tão pequena quanto se queira. Compreender a validade desse argumento é um passo importante na ruptura entre a Álgebra e o Cálculo.

O exemplo acima mostra que a forma de raciocinar do Cálculo envolve novos elementos que não são trabalhados dentro do pensamento algébrico, o que pode trazer grandes dificuldades aos alunos se não for considerado ao longo de sua formação matemática. Artigue (1995) aponta que, muitas vezes, essa ruptura Álgebra – Cálculo não é levada em consideração nos cursos de Cálculo.

Tudo isto não tem como ser natural. E a prática tradicional de ensino não ajuda os alunos a tomarem consciência dessas mudanças, procurando minimizar as rupturas e manter a ilusão de uma aprendizagem progressiva e contínua.³³ (p. 115)

O exemplo da Álgebra e as particularidades do modo de pensar do Cálculo que resumimos nesta seção mostram o quanto é importante investir em pesquisas que procurem caracterizar melhor essa forma de pensar, interpretando-a em níveis anteriores à apresentação formal do Cálculo. Nesse sentido, o modelo do raciocínio covariacional, que vem sendo desenvolvido por alguns educadores matemáticos no contexto do ensino universitário, pareceu-nos promissor para que se avance nessa direção.

³² El Análisis se apoya continuamente en habilidades algebraicas, pero, al mismo tiempo, para conseguir dominar el pensamiento analítico se requiere alejarse del algebraico y tomar conciencia de las diferencias que se establecen entre ellos.

³³ Todo esto no tiene por qué ser natural. Y la ideología tradicional de la enseñanza no ayuda a los estudiantes a tomar conciencia de estos cambios que conducen a minimizar las rupturas y a mantener la ficción de un aprendizaje progresivo y continuo.

Na próxima seção, apresentaremos um marco teórico para o raciocínio covariacional, que serviu como base para a investigação que foi realizada com um grupo de alunos egressos do Ensino Médio, no início de uma disciplina introdutória de Cálculo, descrita no Capítulo 4.

3.2 Um marco teórico para o raciocínio covariacional

Ao longo do Capítulo 2, foram exploradas as ideias fundamentais do Cálculo, destacando-se a importância do par variabilidade – permanência para a sua construção. De maneira bem simplificada, podemos dizer que a essência dessa construção está na observação de “como as coisas variam”. No caso da noção de derivada, o ponto central consistiu em caracterizar o padrão de variação de uma função polinomial do 1º grau, em que a taxa de variação é constante, e aproximar as demais funções para essa situação. Tal caracterização exigiu a observação de diferentes incrementos da variável independente e, de forma coordenada, as correspondentes variações da variável dependente.

Uma análise rápida mostra que essa coordenação entre duas quantidades que variam é muito frequente no estudo do Cálculo. Vamos dar mais um exemplo. Ao introduzir o conceito de limite, muitos livros didáticos, para dar um significado intuitivo a uma expressão do tipo $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 11$, recorrem a tabelas de valores como a tabela 13.

Tabela 13 – Ilustração da ideia intuitiva do limite de uma função.

x	3	3,5	3,9	3,99	...	4,01	4,1	4,5	5
$f(x)$	9	10	10,8	10,98	...	11,02	11,2	12	13

Para compreender o que se pretende com essa tabela, é preciso avaliar, de maneira coordenada, os comportamentos das variáveis x e $f(x)$: enquanto os valores escolhidos da variável x formam duas sequências que vão se aproximando de 4, uma crescente e outra decrescente, os valores correspondentes da variável $f(x)$ vão ficando cada vez mais próximos de 11.

Muitos pesquisadores têm chamado o conjunto de habilidades necessário para que se faça esse tipo de análise de **raciocínio covariacional**. De forma geral, ele pode ser entendido como o raciocínio utilizado para interpretar relações entre duas variáveis (Zieffler e Garfield, 2009).

O raciocínio covariacional tem sido tema de pesquisas em áreas como psicologia, ciência, educação matemática e educação estatística, gerando diferentes focos de interesse e entendimentos. Em nosso trabalho, vamos considerar o foco descrito por Carlson et al. (2002). Segundo esses autores, o raciocínio covariacional é definido como “o conjunto de atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas variáveis quando se observam as formas como cada uma delas se modifica com relação à outra”³⁴.

Há várias pesquisas que descrevem o raciocínio covariacional como um fator relevante para uma formação mais ampla das noções de variável (Trigueros e Jacobs, 2008) e função (Oehrtman, Carlson e Thompson, 2008), para a interpretação de modelos dinâmicos (Rasmussen, 2001) e para a compreensão de elementos centrais do Cálculo, como os conceitos de limite (Cottrill et al., 1996) e derivada (Zandieh, 2000) e a ideia de acumulação (Thompson e Silverman, 2008). Tendo em conta a importância desse conjunto de habilidades para a aprendizagem do Cálculo, Carlson et al. (2002) propuseram um marco teórico para descrever as ações mentais envolvidas na aplicação do raciocínio covariacional quando se interpretam e representam funções associadas a eventos dinâmicos.

Na elaboração de seu marco teórico, os autores consideraram o trabalho de Saldanha e Thompson (1998), segundo o qual a noção de covariação está ligada a “manter em mente, de maneira simultânea, uma imagem sustentada de duas variáveis quantitativas”³⁵, o que implica unir as informações dessas duas variáveis, formando um novo objeto. Esse novo objeto permite monitorar o comportamento de qualquer uma das variáveis originais pela imediata percepção de que, em cada instante, a outra variável assume um valor correspondente.

De acordo com esta teoria, as imagens da covariação são consideradas como algo que se desenvolve nos indivíduos. Nas palavras de Saldanha e Thompson (1998),

³⁴ the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities attending to the ways in which they change in relation to each other.

³⁵ holding in mind a sustained image of two quantities values (magnitudes) simultaneously.

No início do desenvolvimento, uma pessoa coordena as duas variáveis pensando em uma delas, depois na outra, voltando à primeira, indo para a segunda, e assim sucessivamente. Imagens posteriores da covariação implicam compreender o tempo como uma variável contínua, mas ainda persistindo a separação entre os valores das duas variáveis. Uma imagem operatória da covariação é aquela em que a pessoa acompanha ambas as variáveis por um certo tempo, com a decorrente correspondência entre elas sendo uma propriedade que emerge daquela imagem.³⁶ (p. 298 e 299)

Dessa forma, o marco teórico proposto por Carlson et al. (2002) leva em conta que as imagens da covariação são evolutivas, tomando-se esta expressão em um sentido piagetiano, e podem ser definidas por níveis que emergem em uma sucessão ordenada. Foram identificadas, então, cinco ações mentais relacionadas ao raciocínio covariacional e seus comportamentos associados, observados em alunos que realizavam tarefas envolvendo a interpretação e representação de funções ligadas a situações dinâmicas. As cinco ações mentais, bem como alguns comportamentos associados a elas, estão mostrados na tabela 14.

³⁶ In early development one coordinates two quantities values to think of one, then the other, then the first, then the second, and so on. Later images of covariation entail understanding time as a continuous quantity, so that, in one's image, the two quantities values persist. An operative image of covariation is one in which a person imagines both quantities having been tracked for some duration, with the entailing correspondence being an emergent property of the image.

Tabela 14 – Ações mentais que caracterizam o raciocínio covariacional.

(Carlson et al. 2002, p. 357, tradução do autor.)

Ação mental	Descrição da ação mental	Comportamentos associados
AM1	Coordenação do valor de uma variável com mudanças na outra.	<ul style="list-style-type: none"> Designação dos eixos com indicações verbais de coordenação de duas variáveis (por exemplo: y varia com as mudanças de x).
AM2	Coordenação do sentido da mudança de uma variável com mudanças na outra.	<ul style="list-style-type: none"> Construção de uma linha reta com coeficiente angular positivo. Verbalização da consciência do sentido de mudança de uma variável quando é considerada uma mudança no valor de entrada.
AM3	Coordenação da variação absoluta de uma variável com mudanças na outra.	<ul style="list-style-type: none"> Marcação de pontos e construção de linhas retas secantes. Verbalização da consciência da variação absoluta da variável dependente considerando mudanças na variável independente.
AM4	Coordenação da taxa de variação média de uma função com incrementos uniformes na variável independente.	<ul style="list-style-type: none"> Construção de linhas retas secantes contíguas em todo o domínio da função. Verbalização da consciência das mudanças na taxa de variação de uma função considerando incrementos uniformes da variável independente.
AM5	Coordenação da taxa de variação instantânea de uma função com variações contínuas da variável independente em todo o domínio da função.	<ul style="list-style-type: none"> Construção de uma curva suave, com indicações claras de mudanças de concavidade. Verbalização da consciência das mudanças na taxa de variação para todo o domínio da função (indicação correta das concavidades e pontos de inflexão).

A partir das ações mentais e comportamentos associados descritos na tabela 14, é possível determinar o nível de raciocínio covariacional que um indivíduo pode atingir ao realizar uma determinada tarefa. Isto é feito de acordo com a imagem global que aparentemente sustenta as ações mentais exibidas no contexto daquela tarefa. Assim, o marco teórico para o raciocínio covariacional contém cinco níveis distintos de desenvolvimento, como mostrado na tabela 15. Diremos que a habilidade de raciocínio covariacional de uma pessoa em uma tarefa alcança um certo nível de desenvolvimento quando sustenta as ações mentais daquele nível e dos anteriores.

Tabela 15 – Níveis de raciocínio covariacional.

(Carlson et al. 2002, p. 358, tradução do autor.)

Nível	Nome	Descrição
N1	Coordenação	No nível de coordenação, as imagens da covariação podem sustentar a ação mental de coordenar mudanças em uma variável com as variações de outra (AM1).
N2	Sentido	No nível do sentido, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar o sentido da variação de uma variável (crescente ou decrescente) com as variações da outra. As ações mentais AM1 e AM2 são ambas sustentadas por imagens de N2.
N3	Coordenação quantitativa	No nível da coordenação quantitativa, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar a variação absoluta de uma variável com as variações da outra. As ações mentais AM1, AM2 e AM3 são sustentadas por imagens de N3.
N4	Taxa de variação média	No nível da taxa de variação média, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar a taxa de variação média de uma função com variações uniformes da variável independente. Também podem sustentar o uso da taxa de variação média para coordenar a variação absoluta de uma variável com as variações da outra. As ações mentais de AM1 até AM4 são sustentadas por imagens de N4.
N5	Taxa de variação instantânea	No nível da taxa de variação instantânea, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar continuamente a taxa de variação instantânea de uma função com variações da variável independente ao longo de um intervalo. Este nível inclui a consciência de que a taxa de variação instantânea resulta de refinamentos da taxa de variação média em intervalos cada vez menores. Também inclui a consciência de que, no ponto de inflexão, a taxa de variação passa de crescente para decrescente, ou o contrário. As ações mentais de AM1 até AM5 são sustentadas por imagens de N5.

A noção de imagem utilizada por Carlson et al. (2002) para descrever os níveis do marco teórico proposto por eles baseia-se na caracterização feita por Thompson (1994), que se foca na dinâmica das operações mentais. Ao descrever sua caracterização de imagem, esse autor afirma que

Por “imagem” eu quero dizer muito mais do que uma imagem mental. Ao contrário, eu chamo de “imagem” o tipo de conhecimento que permite a uma pessoa, ao entrar em uma sala cheia de velhos amigos, ter a expectativa de saber como os eventos irão se desenrolar. Uma imagem é constituída de fragmentos

coordenados de experiências obtidas por meio da cinestesia, propriocepção, olfato, tato, paladar, visão ou audição.³⁷ (p. 229)

Uma observação importante sobre o marco teórico apresentado é o fato de que ele utiliza situações envolvendo representações gráficas para descrever os diferentes níveis de raciocínio covariacional. Consideramos isso positivo, uma vez que a habilidade de interpretar e representar graficamente informações sobre funções requer uma compreensão conceitual significativa por parte dos alunos. Vamos aprofundar um pouco mais a análise das ações mentais descritas na tabela 14 nestes contextos gráficos.

Uma coordenação adequada das duas variáveis em um contexto gráfico, descrita pela ação mental AM1, pode se revelar no modo como um aluno denomina os eixos coordenados de um gráfico. De fato, ao representar a variável independente no eixo x , um aluno fornece uma evidência de que compreende a natureza da relação entre as mudanças das duas variáveis – y varia com as mudanças de x .

Em relação ao sentido de mudança de uma variável, correspondente à ação mental AM2, no caso de uma função crescente, tem-se a formação de uma imagem em que os valores de y aumentam à medida em que se percorre o gráfico da esquerda para a direita. Geralmente, esta imagem se revela na construção de uma reta com coeficiente angular positivo.

Tanto na coordenação quantitativa (ação mental AM3) quanto na taxa de variação média (ação mental AM4), a evidência mais comum demonstrada pelos alunos consiste no traçado de um gráfico composto de vários segmentos de reta formando uma linha poligonal. No primeiro caso, porém, o aluno se concentra nos valores absolutos da variável y (ou nas suas variações absolutas) conforme se altera o valor da variável x . Já no segundo, o modo de pensar se baseia na taxa de variação média para intervalos de mesma amplitude da variável x , com comparações do tipo “neste intervalo, a função cresce mais rápido do que no anterior”.

Finalmente, a imagem mais comum que sustenta as ações mentais AM5, de coordenação da taxa de variação instantânea, consiste da construção de uma curva em que

³⁷ By “image” I mean much more than a mental picture. Rather, I mean “image” as the kind of knowledge that enables one to walk into a room full of old friends and expect to know how events will unfold. An image is constituted by coordinated fragments of experience from kinesthesia, proprioception, smell, touch, taste, vision, or hearing.

a taxa de variação muda continuamente, em que é possível identificar as diferentes concavidades e pontos de inflexão.

Na seção 4.2, quando descrevemos a metodologia para realização de uma coleta de dados sobre raciocínio covariacional entre alunos egressos do Ensino Médio, são exibidos exemplos de gráficos construídos por alunos para representar situações dinâmicas em que se pode observar algumas das imagens descritas acima.

O desenvolvimento do marco teórico aqui descrito apoiou-se em um trabalho realizado com alunos que apresentaram excelente aproveitamento em uma disciplina de Cálculo ministrada na universidade. Trata-se do cenário mais comum pois, de forma geral, as pesquisas que abordam o raciocínio covariacional referem-se ao contexto do ensino superior. No entanto, entendemos que ele tem um papel importante na formação dos alunos ainda na escola básica, independentemente de seu interesse em prosseguir com os estudos em nível universitário ou não. Por isso, na próxima seção, vamos discutir o raciocínio covariacional no contexto da educação básica.

3.3 O raciocínio covariacional na escola básica

Já discutimos a questão da fragmentação curricular observada na educação básica brasileira, especialmente no Ensino Médio. Nessa discussão, as ideias fundamentais emergiram como uma vacina contra a falta de articulação entre diferentes disciplinas e dentro dos tópicos de uma mesma disciplina. O foco nas ideias fundamentais evita que o programa se perca em meio a tantos detalhes técnicos que, mesmo fazendo parte de cada campo do conhecimento, não deveriam ser os protagonistas nesse nível de escolaridade.

Desse modo, a busca pela identificação de cinco ou seis grandes ideias em torno das quais se possa construir um programa que represente a essência daquela área e, ao mesmo tempo, seja significativo para os alunos deve estar na agenda de todos os educadores que, de alguma forma, interagem com o currículo da escola básica.

Colocando em prática este exercício de reflexão sobre as ideias fundamentais da matemática, vamos mostrar o papel do raciocínio covariacional na caracterização dessa área

e, por consequência, a importância de que ele esteja presente, de maneira intencional e planejada, nos programas escolares dessa disciplina.

3.3.1 As ideias fundamentais da matemática e o raciocínio covariacional

Afinal, o que é a matemática? Essencial na identificação de um conjunto de ideias fundamentais que possa orientar a construção de um currículo de matemática para a escola básica, essa pergunta foi feita por muitos autores ao longo da história. Nesta seção, vamos explorar a análise de Devlin (1994) sobre o assunto.

A resposta mais ingênua para a questão proposta acima seria definir a matemática como a “ciência dos números”. É ingênua porque se remete a um período muito remoto da história, mais precisamente 2500 anos atrás. Até aproximadamente 500 a.C., o conhecimento matemático, representado principalmente pelo que foi desenvolvido por egípcios e babilônios, limitava-se a questões aritméticas, com uma abordagem predominantemente utilitária. Podemos dizer então que, naquela época, a matemática representava o estudo dos **números**.

De 500 a.C. até 300 d.C., a matemática viveu a era da Grécia clássica, cujo principal foco era a Geometria. Até mesmo a maneira como os gregos enxergavam os números – a partir de medidas de segmentos – era essencialmente geométrica. Na Grécia, a matemática deixou de ser simplesmente um conjunto de técnicas para medir e contar, passando a se constituir em um sistema lógico-dedutivo como a conhecemos hoje. Assim, de acordo com essa visão, a matemática grega pode ser considerada a ciência dos números e das **formas**.

A natureza geral do conhecimento matemático que floresceu na Grécia perdurou pelos séculos seguintes, até o surgimento do Cálculo, em meados do século XVII. Em sua essência, a invenção de Newton e Leibniz tratava da mudança e do movimento, contrastando com a matemática “estática” desenvolvida até então. As técnicas do Cálculo foram essenciais para o estudo sistematizado de inúmeras situações físicas, como o movimento dos planetas e dos objetos em queda próximo à superfície da Terra, o funcionamento das máquinas, o escoamento de líquidos, a expansão de gases, e assim por diante. Depois de Newton e Leibniz, portanto, a matemática passou a ser a ciência dos números, das formas, da **mudança** e do **movimento**.

Já nos meados do século XVIII, em parte impulsionados pela busca de uma maior formalização em torno dos conceitos e das técnicas do Cálculo, os matemáticos passaram a nutrir um grande interesse pela matemática em si, e não apenas pelas suas aplicações. Tal movimento, que pode ser exemplificado pelo surgimento da Análise, fez da matemática o estudo dos números, das formas, da mudança, do movimento e das **ferramentas usadas nesse estudo**.

O século XX assistiu a uma grande explosão da atividade matemática. Além de expandir o conhecimento desenvolvido até então, essa explosão levou ao surgimento de vários novos ramos na matemática. Uma tentativa de enumerá-los levaria, certamente, a uma contagem de 60 a 70 categorias distintas.

Como resume a figura 30, a evolução dos diferentes ramos da matemática tornou praticamente impossível sua caracterização segundo a mesma lógica que vínhamos utilizando nos parágrafos anteriores. Diante disso, passou-se a tentar identificar aspectos comuns às práticas dos matemáticos, independentemente do ramo particular ao qual pertencessem esses matemáticos. Em outras palavras, busca-se classificar uma atividade como matemática analisando **como** ela é feita, a metodologia empregada, e não mais com base em **o que** é estudado.

Figura 30 – Evolução do entendimento do que é a matemática, segundo Devlin (1994)

Devlin (1994) afirma que, após essa mudança de foco, conseguiu-se chegar a uma definição mais ou menos consensual de matemática. De acordo com esse autor,

Foi apenas nos últimos vinte anos ou mais que surgiu uma definição de matemática sobre a qual a maioria dos matemáticos concorda: a matemática é *a ciência dos padrões*. O que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, de forma, movimento, comportamento e assim por diante. Esses padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou quase de interesse recreativo. Eles podem surgir do mundo que nos rodeia, das profundezas do espaço e do tempo ou da própria atividade da mente humana.³⁸ (p. 3)

Encarar a matemática como a ciência que busca identificar padrões nas mais diferentes situações torna mais evidentes as relações entre seus diferentes ramos. Para exemplificar esse raciocínio, vamos tomar quatro ramos aparentemente bem distintos: a Aritmética, a Probabilidade, o Cálculo Diferencial e a Teoria dos Jogos.

A construção da Aritmética se dá a partir da identificação de inúmeros padrões numéricos, começando com a própria propriedade comum a todas as coleções com a mesma quantidade de elementos, para formar a ideia abstrata de número natural. Também podemos citar os diferentes padrões de contagem (de 2 em 2, de 3 em 3, e assim sucessivamente), que levam às noções de múltiplos, divisores e números primos.

A Probabilidade nasce da busca de padrões em eventos aleatórios. Trata-se de reconhecer, por exemplo, o que há de comum entre a obtenção de cara ou coroa durante o lançamento de uma moeda e a determinação do sexo de uma criança quando de sua concepção.

Para o Cálculo Diferencial, como tem sido explorado neste trabalho, o ponto de partida consiste em encontrar padrões de mudança em fenômenos dinâmicos. Por exemplo, ainda que o espaço percorrido por um corpo em queda livre não seja constante em intervalos de tempo iguais, é possível encontrar um padrão em sua variação: a cada segundo, o corpo percorrerá 10 metros a mais do que no segundo anterior. Da tentativa de descrever os diferentes padrões de variação existentes, surge uma das duas ideias centrais do Cálculo, a derivada.

Já bem mais contemporânea, a Teoria dos Jogos surgiu como ferramenta para compreender fenômenos econômicos. Ela pode ser descrita como a busca de padrões nas

³⁸ It was only within the last twenty years or so that a definition of mathematics emerged on which most mathematicians now agree: mathematics is the *science of patterns*. What the mathematician does is examine abstract 'patterns' – numerical patterns, patterns of shape, patterns of motion, patterns of behavior, and so on. Those patterns can be either real or imagined, visual or mental, static or dynamic, qualitative or quantitative, purely utilitarian or of little more than recreational interest. They can arise from the world around us, from the depths of space and time, or from the inner workings of the human mind.

estratégias adotadas por diferentes agentes econômicos com o objetivo de maximizar seus ganhos em situações específicas, levando em conta as interações entre tais estratégias.

A compreensão da natureza do pensamento matemático como uma busca de padrões em diferentes contextos pode trazer elementos importantes para a reflexão sobre os currículos de matemática em geral. No caso da educação básica, essa visão é ainda mais rica, pois contribui para a construção de um currículo que se organize em torno de um conjunto de ideias fundamentais, sem se perder em especificidades técnicas.

Estamos aqui relacionando a capacidade de identificar padrões, no seu sentido mais amplo, com a compreensão estrutural da matemática, na concepção de Bruner (1973), descrita na seção 2.1. A análise de Richland, Stigler e Holyoak (2012) reforça essa relação. Como Bruner, os três autores associam o entendimento da estrutura da matemática às habilidades de transferência e generalização. É o que permite que os alunos selecionem procedimentos adequados e criem novas estratégias ao se depararem com problemas com os quais não estejam habituados. Esse nível de compreensão em relação aos objetos matemáticos leva os estudantes a aprender por comparação ou analogia, ou seja, por meio da identificação de padrões. Os autores exemplificam essa ideia analisando as resoluções de várias multiplicações feitas em sequência por um grupo de alunos de 13 anos. Uma parte deles não era capaz de perceber um padrão nos resultados das operações 10×13 , 20×13 e 30×13 , apresentadas em sequência, evidenciando a ausência de uma compreensão do significado da multiplicação que fosse além da mera aplicação mecânica de um algoritmo.

É nesse contexto que estamos considerando as contribuições do raciocínio covariacional para o desenvolvimento dos alunos na escola básica, no sentido de promover uma aprendizagem mais estrutural da matemática.

Os níveis de raciocínio covariacional propostos por Carlson et al. (2002), apresentados na tabela 15, representam a construção gradativa de uma estrutura que permite aos alunos lidar com os diferentes padrões de variação. Essa capacidade de caracterizar a mudança traz consigo a ideia de movimento, presente em praticamente todos os fenômenos naturais que nos rodeiam. Devlin (1994) faz uma bela descrição da relação entre movimento e mudança em termos da identificação de padrões:

Alguns movimentos parecem caóticos, mas muitos apresentam ordem e regularidade, exibindo o tipo de padrão que é, ou pelo menos deveria ser, passível

de estudo matemático. Porém, as ferramentas da matemática são essencialmente estáticas; números, pontos, retas, equações e assim por diante não incorporam a ideia de movimento. Assim, para estudar o movimento, deve-se encontrar uma maneira pela qual esses instrumentos estáticos possam ser usados para representar padrões de variação.³⁹ (p. 74)

Além da compreensão de fenômenos que envolvem movimento, que será mais explorada na próxima seção, o desenvolvimento do raciocínio covariacional proporciona um fortalecimento de algumas ideias fundamentais que orbitam ao redor de vários assuntos da escola básica, como aproximação e o par finito – infinito.

A percepção da estrutura da matemática está diretamente ligada ao reconhecimento de padrões, dos quais emergem as ideias fundamentais da área. É em torno dessas ideias que um currículo para a escola básica deve estar organizado, de modo que os assuntos abordados sejam consequência dessa organização. Nesse sentido, a capacidade de lidar com os diferentes padrões de variação, dada sua importância na construção da matemática e na compreensão de fenômenos, deve ocupar um espaço relevante na formação básica dos jovens.

3.3.2 A compreensão de fenômenos e o raciocínio covariacional

Ao longo do Capítulo 1, mostramos a importância que a capacidade de compreender e interpretar fenômenos originários das mais diferentes áreas possui na formação básica dos jovens. Como destacam os documentos oficiais ao definirem as finalidades mais gerais do Ensino Médio, ela é fundamental para formar indivíduos capazes de interagir socialmente, fazendo a leitura do mundo que os rodeia e propondo intervenções.

Os processos que envolvem covariação desempenham um papel de grande relevância na compreensão de fenômenos naturais. O notável professor português Bento de Jesus Caraça, em sua obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, ressalta que, movido pelo desejo de dominar a natureza, o Homem dedicou-se a observar os fenômenos, buscando identificar suas causas e seu encadeamento e que, nessa busca, duas características fundamentais se destacaram. Segundo Caraça (1984),

³⁹ Some motions appear chaotic, but much has order and regularity, exhibiting the kind of regular pattern that is, or at least ought to be, amenable to mathematical study. But the tools of mathematics are essentially static; numbers, points, lines, equations, and so forth do not in any way incorporate motion. So, in order to study motion, a way has to be found whereby these static tools can be brought to bear on patterns of change.

A realidade que a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com duas características essenciais:

1ª: Interdependência. Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros. (...)

2ª: Fluência. O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo flui, tudo devém. (p. 109 e 110)

As raízes do raciocínio covariacional estão justamente na identificação e caracterização das relações de *interdependência* entre quantidades que variam (ou que, em um contexto dinâmico, *fluem* ao longo do tempo). Por esse motivo, é praticamente inviável pensar em um currículo que objetive o desenvolvimento da capacidade de compreender fenômenos, mas que não proporcione aos alunos situações que exijam, em maior ou menor grau, a aplicação do raciocínio covariacional.

Tal constatação já havia aparecido no Capítulo 1, quando apresentamos a relação natural existente entre a modelagem de sistemas dinâmicos e as ideias fundamentais do Cálculo. Ao descrevê-la a partir do raciocínio covariacional, porém, fica mais evidente que não se trata de acrescentar um tópico isolado ao programa, mas sim de promover o desenvolvimento de uma forma de pensar extremamente valiosa para a capacidade de ler o mundo dos alunos.

Diante das contribuições que o raciocínio covariacional pode trazer à formação básica dos nossos estudantes, passaremos agora a analisar em que medida ele está presente no atual currículo brasileiro, propondo algumas abordagens que fortaleceriam o desenvolvimento dessa competência.

3.3.3 O programa de matemática e o raciocínio covariacional

Para ter uma boa representatividade do programa de Matemática praticado na maioria das escolas brasileiras, consultamos o Guia Digital PNLD 2017 (BRASIL, 2016a), que traz análises das obras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD, promovido pelo Ministério da Educação, subsidia o trabalho pedagógico dos professores das escolas da rede pública, distribuindo aos alunos as coleções de livros didáticos aprovadas no programa.

Nas 11 obras de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental que constam do guia, identificamos o estudo das proporções como o primeiro momento em que as relações de covariação aparecem de maneira significativa no currículo. Isso ocorre no 7º ano, quando são trabalhadas as noções de grandezas direta e inversamente proporcionais. Em apenas um dos livros, esse estudo é iniciado já no 6º ano, relacionado às ideias de escala e semelhança de figuras geométricas.

O raciocínio covariacional é exigido, por exemplo, para o entendimento das tabelas usadas para discutir a proporcionalidade direta e inversa. Esse tipo de atividade requer a coordenação de duas variáveis que vão assumindo diferentes valores, como ilustramos na seção 2.3.1 (tabela 9). Nesse processo, emergem as ações mentais AM1, AM2 e AM3, descritas na seção 3.2 (tabela 14). De fato, para que se faça a diferenciação entre a proporcionalidade direta e a inversa é necessário identificar o sentido da variação de uma das variáveis à medida que a outra variável cresce (ou decresce), caracterizando AM1 e AM2. Além disso, a análise da constante de proporcionalidade k em uma relação de proporcionalidade direta expressa pela lei $y = kx$ permite concluir que, a cada aumento de 1 unidade na variável x , corresponde um aumento de k unidades na variável y , em um tipo de raciocínio que caracteriza AM3.

Neste primeiro contato dos alunos com as grandezas direta e inversamente proporcionais, os livros analisados exploram predominantemente situações numéricas, ilustradas por tabelas. Nem sempre, porém, o principal foco do trabalho está no desenvolvimento do raciocínio covariacional: em muitas das obras, identifica-se uma valorização excessiva das técnicas e dos procedimentos mais mecanizados, como a aplicação das regras de três simples e composta. Por outro lado, algumas coleções dedicam um tempo significativo para trabalhar as ideias de covariação em outros contextos, como na ampliação e redução de figuras, nas representações em escala ou no cálculo de probabilidades, o que auxilia o processo de criação de significado pelos alunos.

Nas séries seguintes do Ensino Fundamental, alguns dos livros retomam e aprofundam o assunto, revelando uma preocupação com o desenvolvimento gradual do pensamento proporcional. A maioria deles, porém, acaba esgotando o estudo no 7º ano, caracterizando uma abordagem em que a proporcionalidade se torna um tópico isolado dos

demais. Apenas no 9º ano, quando é apresentado o teorema de Tales, volta-se a fazer uma breve referência ao tema.

Um aspecto extremamente relevante para a formação do raciocínio covariacional, segundo o marco teórico proposto por Carlson et al. (2002), é a exploração de representações gráficas de situações envolvendo covariação. Tal aspecto, porém, praticamente não é trabalhado nos livros didáticos avaliados pelo PNLD, como aparece explicitamente na seção “Coleções Aprovadas” do guia digital (BRASIL, 2016a):

Em quase todas as coleções, o estudo da proporcionalidade (direta e inversa) entre grandezas é feito sem que se recorra ao conceito de função. O que prevalece é a opção, que perdura há décadas, de se iniciar pela apresentação dos conceitos de razão e de proporção, seguida da resolução de problemas das denominadas “grandezas proporcionais”, com ênfase no emprego da regra de três.

No volume do 9º ano do Ensino Fundamental, a maioria das coleções aborda as funções – em algumas poucas isso ocorre ainda no 8º ano. Trata-se de uma introdução ao tema, uma vez que o estudo das funções ocupa a maior parte dos livros de Matemática da 1ª série do Ensino Médio. Este seria o momento ideal para retomar o desenvolvimento das habilidades ligadas ao raciocínio covariacional, explorando representações gráficas ligadas à proporcionalidade. Como indicado na abordagem de funções proposta na seção 2.3.1, haveria muitas vantagens em utilizar a proporcionalidade direta como ponto de partida para o estudo da função polinomial do 1º grau. Além de integrar os dois assuntos, tal abordagem permitiria a realização de tarefas que mobilizassem as ações mentais AM4 e, em alguns casos, até AM5.

Uma evidência disso é o trabalho de Villa-Ochoa (2011), que relatou a resolução de problemas envolvendo funções polinomiais do 2º grau que demandavam a aplicação do raciocínio covariacional por um aluno do Ensino Médio. Segundo o autor, o estudante foi capaz de estabelecer algumas ações mentais AM5 do marco teórico de Carlson et al. (2002) durante a pesquisa, apesar de não conhecer o conceito de taxa de variação instantânea. Ele pôde interpretar diferentes concavidades de um gráfico a partir do estudo discreto da taxa de variação média e de suas variações.

Em vez de promover essa integração natural entre a noção de proporcionalidade e o estudo das funções, nosso programa acaba desenvolvendo os dois assuntos de maneira isolada. As grandezas direta e inversamente proporcionais são utilizadas apenas para

resolver problemas de regra de três simples e composta. Já as funções são tratadas a partir de suas leis algébricas, sem um enfoque baseado nas variações de grandezas.

Na matriz de referência de Matemática e suas tecnologias do ENEM, percebe-se uma louvável preocupação no sentido de valorizar o enfoque variacional no estudo das funções, refletida na redação da competência de área 4: “construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano”. No entanto, as quatro habilidades que detalham essa competência, mostradas na 16, não se referem explicitamente à noção de taxa de variação, restringindo-se aos tradicionais problemas de regra de três e à identificação da lei algébrica que descreve determinada relação.

Tabela 16 – Habilidades da matriz de Matemática do ENEM referentes à competência de área 4.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Além disso, os objetos de conhecimento associados à matriz de referência não incluem a taxa de variação. Pelo contrário, eles parecem valorizar o enfoque predominantemente algébrico das funções que é escolhido pela maioria dos livros didáticos, o que pode ser visto no seu detalhamento: “conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º grau, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas”.

Apesar da crítica à transposição da ideia geral da competência de área 4 para as habilidades da matriz e para os objetos de conhecimento, é preciso reconhecer que as provas do ENEM têm apresentado mais questões explorando o raciocínio covariacional do que a maioria dos exames vestibulares. Dois exemplos de questões desse tipo, referentes a um dos exames aplicados em 2016, são mostrados na figura 31. Na primeira, a ideia de taxa de variação surge a partir de um gráfico que mostra o volume de água em um recipiente em função do tempo, sendo necessário o cálculo da vazão de esvaziamento desse recipiente. Na

segunda, é pedido explicitamente que se calcule o coeficiente angular de duas retas conhecendo-se alguns de seus pontos. Como nos dois casos os contextos envolvem trechos do gráfico de funções de 1º grau, podemos considerar que são requeridas ações mentais AM3 do marco teórico.

Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

- A 1 000
- B 1 250
- C 1 500
- D 2 000
- E 2 500

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

- A diminuir em 2 unidades.
- B diminuir em 4 unidades.
- C aumentar em 2 unidades.
- D aumentar em 4 unidades.
- E aumentar em 8 unidades.

Figura 31 – Exemplos de questões do ENEM 2016 envolvendo covariação

Ainda que não tenhamos encontrado questões mais complexas, envolvendo ações mentais AM4 e AM5 do marco teórico de Carlson et al. (2002), a inclusão de questões da competência de área 4 nas provas do ENEM teve um efeito positivo em muitos livros didáticos do Ensino Médio, que passaram a retomar as noções de proporcionalidade durante o estudo das funções. Em alguns casos, as relações entre as grandezas proporcionais e a função do 1º grau são apresentadas de forma bem interessante, revelando um avanço em relação à proposição de atividades que promovam o desenvolvimento do raciocínio covariacional.

Depois do estudo da função polinomial de 1º grau, nossos livros didáticos trabalham outros tipos de função (funções polinomial de 2º grau, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica). Poderia ser escolhida uma abordagem que colocasse em evidência o

desenvolvimento do raciocínio covariacional, como apontamos na seção 2.3.2. Porém, os aspectos algébricos e as técnicas ainda acabam predominando.

O estudo das funções representa uma parte significativa do programa de Matemática do Ensino Médio. Sem dúvida, trata-se do assunto que mais oferece oportunidades para aprofundar o raciocínio covariacional. Mas também há outros tópicos em que isso pode ser feito. Um exemplo é a geometria analítica, durante o estudo da reta. Para isso, deveria ser dada uma grande ênfase ao significado do coeficiente angular da reta.

Porém, ao tratar desse tópico, muitos dos nossos livros didáticos optam por um caminho em que o coeficiente angular tem papel secundário. Inicialmente, é desenvolvida a condição algébrica de alinhamento de três pontos, expressa por meio de um determinante. Em seguida, chega-se à equação geral da reta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ por meio da igualdade $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Trata-se de uma construção tipicamente algébrica, em que a propriedade fundamental da reta, que diz respeito à sua variação a uma taxa constante, não recebe qualquer tipo de destaque.

Depois disso, o coeficiente angular é introduzido, para que se possa discutir as condições de paralelismo e perpendicularidade de duas retas. Seu cálculo é realizado a partir das coordenadas de dois pontos da reta, por meio da fórmula $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Não é feita, em geral, qualquer associação entre o coeficiente angular e a ideia de taxa de variação. Mais especificamente, não se trabalha o fato de que, em uma reta de coeficiente angular 2, a cada variação de 1 unidade na abscissa corresponde uma variação de 2 unidades na ordenada.

A maioria das situações apresentadas até aqui, envolvendo as grandezas proporcionais, a função do 1º grau e o estudo analítico da reta, exigem predominantemente as ações mentais AM1, AM2 e AM3 do marco teórico. Para que se possa aprofundar o trabalho com a covariação, atingindo níveis que suportem as ações mentais AM4 e AM5, chega-se naturalmente às ideias fundamentais do Cálculo que discutimos no Capítulo 2. Em outras palavras, um trabalho planejado e intencional voltado ao desenvolvimento do raciocínio covariacional na escola básica, baseado no marco teórico de Carlson et al. (2002), acaba desembocando nas noções de derivada e integral. Mais uma vez, essa constatação

não significa defender a introdução do Cálculo no programa do Ensino Médio com um nível de formalismo e profundidade incompatível com as finalidades desse segmento. Pelo contrário, o marco teórico apresentado aponta um caminho por meio do qual tais ideias podem ser desenvolvidas de forma natural na escola básica, reforçando um ensino voltado para a compreensão estrutural da matemática.

A análise feita nesta seção partiu do programa de Matemática praticado pelos principais livros didáticos brasileiros. Neste cenário, o raciocínio covariacional começa a ser trabalhado de maneira significativa no 7º ano do Ensino Fundamental, com o estudo das proporções. No entanto, a analogia feita na seção 3.1 com o desenvolvimento do pensamento algébrico mostra que a formação do raciocínio covariacional é um processo gradual, que não se inicia necessariamente com a introdução de um conteúdo formal como as grandezas proporcionais.

Assim, levando em conta o papel ocupado pelo raciocínio covariacional na estrutura da matemática, vista como a ciência dos padrões, e na capacidade de compreender fenômenos, defendemos que ele seja incorporado ao currículo da escola básica bem antes do 7º ano, ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Claro que tal posição abre um vasto espaço para pesquisas que investiguem formas de trabalhar a covariação com crianças de 7 a 10 anos, que fugiriam do escopo deste trabalho. Mesmo assim, consideramos conveniente tecer alguns comentários sobre essa questão.

Parece-nos bem razoável trabalhar os dois primeiros níveis de raciocínio covariacional com crianças dessa faixa etária, que suportam as ações mentais AM1 e AM2. Isso envolveria a simples identificação de dependência entre duas quantidades variáveis e a percepção da variação de uma delas em relação à outra. Chamaremos essa fase de pré-covariacional.

Por exemplo, ao explorar ampliações e reduções de figuras em malhas quadriculadas, conteúdo que costuma ser abordado nos materiais didáticos voltados às séries iniciais, pode-se propor aos alunos que investiguem o que acontece com o número total de quadrados usados na construção de certa figura quando duplicamos (ou triplicamos, ou reduzimos à metade) todos os seus comprimentos, como ilustrado na figura 32. Uma atividade como essa

poderia, inclusive, ser realizada em um software de geometria dinâmica como o GeoGebra, possibilitando acompanhar o que ocorre com o número de quadrado à medida que o comprimento do lado varia em um contínuo. Isso daria aos alunos a oportunidade de coordenar as duas variações de modo a buscar a confirmação de suas hipóteses.

Figura 32 – Atividade envolvendo covariação voltada às séries iniciais do Ensino Fundamental

No campo de números e operações, são comuns os problemas relacionados ao cálculo do troco em situações cotidianas, que também podem ser usados para trabalhar o raciocínio covariacional. Por exemplo, ao se determinar o troco recebido por uma pessoa que pagou 5 canetas, cada uma custando R\$ 2,30, com uma nota de 20 reais, pode-se perguntar o que aconteceria com esse troco caso o número de canetas fosse maior (ou menor) do que 5. Essa atividade requer a realização das ações mentais AM1 e AM2.

A argumentação construída nesta seção teve como objetivo mostrar a importância de que seja feito um trabalho mais consistente na escola básica em relação ao raciocínio covariacional. De fato, a análise dos cinco níveis propostos no marco teórico sugere que o desenvolvimento dessa forma de pensar é um processo longo, devendo ocorrer em diferentes fases da escolarização.

Com isso, identificamos diversos assuntos tradicionalmente abordados nos nossos livros didáticos, que fazem parte do programa de Matemática praticado na maioria das escolas brasileiras, e procuramos montar uma espécie de trilha do raciocínio covariacional, que dialoga com o marco teórico de Carlson et al. (2002) e poderia ser desenvolvida ao longo da escola básica. O esquema mostrado na figura 33 resume essa trilha.

Figura 33 – Trilha para o desenvolvimento do raciocínio covariacional ao longo da escola básica

Neste capítulo, apresentamos o raciocínio covariacional como uma estrutura capaz de ancorar o trabalho com as ideias do Cálculo na escola básica desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, mostrando as contribuições que ele pode trazer à formação dos jovens independentemente da continuidade ou não de seus estudos em nível universitário.

A introdução intencional e sistemática de atividades envolvendo covariação no currículo da educação básica, além do benefício para a formação dos estudantes, pode eventualmente trazer um efeito adicional: a alteração, em alguma medida, do quadro negativo observado atualmente no ensino de Cálculo nas universidades, como descrito no início desse trabalho. Embora não estejamos defendendo aqui a introdução do Cálculo no Ensino Médio como uma forma de preparar os alunos para o Ensino Superior, consideramos que seria oportuno avaliar esse efeito. É o que faremos a seguir, mostrando os resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de alunos egressos do Ensino Médio, ingressantes em cursos de Administração de Empresas e Ciências Econômicas.

CAPÍTULO 4 – O raciocínio covariacional dos egressos do Ensino Médio e seus efeitos sobre a disciplina de Cálculo na universidade

As reflexões que fizemos ao longo deste trabalho sobre o programa de Matemática na escola básica, a forma de abordar determinados assuntos nesta etapa de escolarização e o desenvolvimento do raciocínio covariacional foram motivadas, em grande parte, pela nossa experiência como docente de uma disciplina introdutória de Cálculo oferecida aos alunos do primeiro semestre de cursos universitários.

Muitas das ideias ali colocadas são fruto de percepções originadas no convívio com os alunos: suas trajetórias formativas na escola e a relação com sua capacidade de aprender matemática de forma estrutural e, de forma mais específica, as dúvidas e dificuldades enfrentadas nas disciplinas de Cálculo. Dessa forma, durante essas reflexões, surgiu naturalmente um movimento no sentido contrário, representado pelo interesse de compreender os possíveis efeitos que um trabalho mais sistematizado voltado ao desenvolvimento do raciocínio covariacional na escola básica poderia ter sobre esses alunos.

Esse movimento gerou um estudo realizado com alunos de uma disciplina de Cálculo 1, recém-ingressados no ensino superior, que descreveremos neste capítulo.

4.1 A motivação para o estudo

Ao longo do Capítulo 3, procuramos construir uma relação de analogia entre a formação do pensamento algébrico na escola básica, que tem sido objeto de inúmeras pesquisas de educadores matemáticos em diversos países, e o desenvolvimento do raciocínio covariacional.

Os estudos têm indicado que o processo de formação do pensamento algébrico é bastante longo, gerando um consenso entre os pesquisadores de que ele deva ser intencionalmente trabalhado desde as séries iniciais, embora a introdução formal da Álgebra

só ocorra a partir dos 11-12 anos. Esse fato nos levou a esboçar uma possível trajetória para o desenvolvimento consistente dos alunos, ao longo da escola básica, em processos relacionados à covariação, que chamamos de trilha do raciocínio covariacional.

No entanto, mesmo não identificando uma preocupação explícita com o desenvolvimento do raciocínio covariacional na maioria dos livros didáticos mais usados no Brasil, sabemos que a covariação está naturalmente presente em muitos dos assuntos tratados nesses livros. Dessa forma, pareceu-nos importante realizar um levantamento que pudesse nos fornecer um indicativo do nível de raciocínio covariacional dos alunos egressos do Ensino Médio no Brasil.

A proposta acima, da maneira como foi descrita, seria muito difícil de ser realizada na prática, devido à sua grande abrangência. As dimensões de nosso país, suas peculiaridades regionais, as enormes diferenças entre as abordagens pedagógicas das escolas e os distintos interesses dos alunos ao concluir o Ensino Médio acrescentariam tantas variáveis ao estudo que seria difícil obter uma resposta satisfatória. Eventualmente, a inclusão planejada de algumas questões sobre covariação em uma exame de abrangência nacional como o ENEM, envolvendo diferentes níveis do marco teórico de Carlson et al. (2002), poderia fornecer dados sobre essa questão. Evidentemente, isso não seria viável nesse trabalho.

Há vários fatores que influenciam o desempenho de um aluno quando ele é avaliado em uma habilidade específica ao final do Ensino Médio: o currículo vivenciado por ele ao longo de sua trajetória escolar, seus interesses e expectativas em relação à conclusão da escola básica, os recursos das escolas que frequentou – incluindo aí o perfil de seus professores – e seus próprios recursos, sua afinidade com determinada área do conhecimento e o particular instrumento por meio do qual ele está sendo avaliado. Dentre todos esses fatores, levando em conta as finalidades da nossa pesquisa, estamos interessados apenas no primeiro: em que medida o programa atual de Matemática promove o desenvolvimento do raciocínio covariacional dos alunos. Por isso, consideramos adequado realizar o estudo com um conjunto bem menor de alunos, que não fosse representativo de todo o Ensino Médio brasileiro.

Segundo essa lógica, consideramos algumas características específicas para escolher o grupo pesquisado. Ele deveria ser composto por alunos que tivessem concluído o Ensino Médio há menos de um ano, em escolas com desempenho acima da média no ENEM. Além

disso, eles deveriam ter ingressado em instituições de nível superior com processos seletivos relativamente concorridos, em cursos cujos currículos exigissem conhecimentos matemáticos razoavelmente aprofundados em relação à escola básica.

Com isso, pudemos assumir a hipótese de que o aspecto preponderante no desempenho desses alunos em uma avaliação envolvendo a covariação fosse a forma como o raciocínio covariacional esteve presente em sua formação na escola básica, no currículo ao qual eles foram expostos. De fato, de maneira geral, estaríamos trabalhando com alunos que tiveram acesso a boas escolas, com interesse em prosseguir seus estudos em nível superior e boa afinidade com a matemática.

A oportunidade de realizar um levantamento sobre o nível de desenvolvimento do raciocínio covariacional com que um grupo de alunos finalizava o Ensino Médio e iniciava o Ensino Superior motivou-nos a ampliar o escopo da pesquisa. Embora não fizesse parte do foco principal de nosso trabalho, que trata das ideias do Cálculo na escola básica, essa ampliação pode trazer valiosos *insights* para outro problema que vem sendo investigado por diversos pesquisadores: o ensino de Cálculo nas universidades.

Em nossa experiência docente em disciplinas iniciais de Cálculo na universidade, temos obtido bons resultados procurando valorizar atividades voltadas ao desenvolvimento do raciocínio covariacional, com uma abordagem mais intuitiva e contextualizada, antes da apresentação formal dos conceitos e das técnicas que fazem parte do programa da disciplina. Um exemplo disso está descrito em Orfali e Ponte (2015).

No entanto, toda a argumentação feita no Capítulo 3 mostra que o desenvolvimento do raciocínio covariacional é gradual, ocorrendo ao longo de vários anos de escolarização. Assim, pareceu-nos oportuno buscar formas de avaliar em que medida o nível de desenvolvimento do raciocínio covariacional de um aluno ingressante na universidade pode influenciar sua aprendizagem de Cálculo em uma disciplina introdutória. Dito de outra forma, nosso interesse relacionava-se com o quanto os estudantes estavam preparados para iniciar a disciplina de Cálculo, pelo menos no que se refere ao nível de raciocínio covariacional.

Colocada essa questão, julgamos importante fazer um breve levantamento sobre os cursos de Pré-Cálculo, que têm sido adotados por algumas universidades. O objetivo

principal desses cursos consiste justamente de preparar os alunos que entram na faculdade para a primeira disciplina de Cálculo. Na sua maioria, eles foram motivados pelo histórico de fraco desempenho que os ingressantes apresentavam em Cálculo e outras disciplinas da área de matemática, atribuído a uma base deficiente em sua formação. Por exemplo, a Universidade Federal de Minas Gerais disponibiliza a seguinte mensagem em sua página na internet: “O número de alunos que desistem ou reprovam nas disciplinas da Matemática no primeiro semestre do ciclo básico vem crescendo assustadoramente, em particular dos cursos do Instituto de Ciências Exatas. Este problema não é de hoje. Houve várias iniciativas por parte de professores (...) para tentar resolver ou pelo menos amenizar este problema. Acreditando no potencial destes alunos, o Programa de Educação Tutorial da Matemática criou um curso de nivelamento titulado: Pré-Cálculo – Semi Presencial (...)”.⁴⁰

Já a Universidade Federal do Rio Grande do Sul aponta que “O Curso de Pré-Cálculo visa propiciar uma experiência que facilite a transição do Ensino Médio para a Matemática de nível superior, em especial para o Cálculo, incentivando a autonomia e a autocrítica no estudo e na superação das dificuldades. Prioritariamente, são atendidos os alunos que obtiveram menos de 12 acertos na Prova de Matemática do Concurso Vestibular da UFRGS. Nessa faixa de acertos, estudos estatísticos comprovaram que o desempenho na disciplina de Cálculo é fortemente dependente da participação efetiva no Curso de Pré-Cálculo.”⁴¹

Infelizmente, praticamente não há dados na literatura da área de educação matemática sobre experiências relacionadas aos cursos de Pré-Cálculo das universidades brasileiras. Por isso, fizemos uma pesquisa nos sites de várias universidades, buscando informações sobre eventuais cursos de Pré-Cálculo oferecidos aos alunos ingressantes. A análise feita a seguir baseia-se nas informações obtidas nesse levantamento⁴².

Foram identificados vários pontos em comum nos programas e materiais dos cursos de Pré-Cálculo analisados. De forma geral, os dois principais temas desses cursos são os números reais e as funções de 1º e 2º graus, havendo também um grande espaço para as técnicas algébricas básicas (resolução de equações, operações com polinômios e fatoração). Em alguns casos, também são incluídos os tópicos: exponenciais, logaritmos e trigonometria.

⁴⁰ Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/pet/site/index.php/ensino/pre-calculo>>. Acesso em 02.05.2016.

⁴¹ Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/precalculo/precalculo/precalculo.html#informa>>. Acesso em 17.02.2017.

⁴² Foram considerados programas de Pré-Cálculo das seguintes universidades: Universidade Federal de Minas Gerais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade Federal Fluminense e Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

A tabela 17 mostra o programa de um desses cursos, oferecido no 2º semestre de 2015 pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná em 14 aulas de duas horas de duração⁴³.

Tabela 17 – Programa de curso de Pré-Cálculo oferecido por universidade brasileira.

1. Operações com conjuntos e conjuntos numéricos.	6. Polinômios e fatoração.
2. Sistemas de coordenadas e relações binárias.	7. Função definida por várias sentenças e função modular.
3. Função real de uma variável real e operações com funções.	8. Função exponencial.
4. Função e inequação do 1º grau e domínio de função real.	9. Função logarítmica.
5. Função e inequação do 2º grau e sistemas de equações.	10. Trigonometria.
	11. Trigonometria.
	12. Funções hiperbólicas.
	13. Polinômios e equações polinomiais.
	14. Números complexos.

Embora os assuntos sejam tratados de maneira mais aprofundada do que nos materiais do Ensino Médio, a abordagem é bastante semelhante. Por exemplo, no estudo das funções, ao mesmo tempo em que se nota uma grande ênfase na apresentação de fórmulas e procedimentos, verifica-se pouca ou nenhuma preocupação com o desenvolvimento do raciocínio covariacional.

Dessa forma, em relação ao que se considera necessário para que um aluno ingressante na universidade esteja preparado para a disciplina inicial de Cálculo, os cursos de Pré-Cálculo analisados revelaram grande preocupação com uma dimensão diferente daquela que temos mostrado ao longo deste trabalho. Enquanto temos voltado nossa atenção para o desenvolvimento do raciocínio covariacional, esses cursos dedicam a maior parte de seus esforços ao repertório técnico dos alunos.

Fora do contexto brasileiro, alguns pesquisadores têm relatado a existência de diferentes visões sobre a preparação dos estudantes para as disciplinas iniciais de Cálculo. Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) apontam que, nos Estados Unidos, os estudantes vivenciam uma grande tensão na transição do Pré-Cálculo para o Cálculo universitário,

⁴³ Programa disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/curitiba/estrutura-universitaria/diretorias/dirgrad/departamentos/matematica/pagina-inicial/noticias-do-damat/pre.pdf>>. Acesso em 10.02.2017.

devido, em parte, a uma falta de clareza sobre o que deve ser ensinado nos cursos de Pré-Cálculo. Segundo esses autores,

Somando-se à complexa interação de fatores [que contribuem para essa] tensão, não há atualmente consenso entre os elaboradores de currículo e instrutores sobre as bases conceituais que são necessárias para o Cálculo. Uma revisão superficial dos livros didáticos de Pré-Cálculo já evidencia essa falta de consenso. Para complicar ainda mais, resultados do 3º Estudo Internacional de Matemática e Ciências indicam que as práticas de ensino de Matemática em escolas americanas tendem a se concentrar sobre tópicos e procedimentos isolados no lugar de conceitos que são fundamentais para uma aprendizagem continuada da matemática.⁴⁴ (p. 114)

As situações analisadas mostram um quadro pouco claro em relação ao conhecimento que se esperaria de um aluno que inicia um curso de Cálculo na universidade. Por um lado, como apontamos no capítulo 3, várias pesquisas acadêmicas têm descrito o raciocínio covariacional como um fator fundamental para a aprendizagem do Cálculo. Por outro, os materiais dos cursos de Pré-Cálculo e as práticas docentes em grande parte dos cursos de Cálculo valorizam o domínio de técnicas algébricas e procedimentos mecanizados para resolução de problemas relacionados a números reais e funções.

Diante desse quadro, decidimos ampliar ainda mais a investigação, incluindo uma avaliação do domínio de técnicas algébricas demonstrado pelos alunos. Essa inclusão pode trazer elementos importantes para uma melhor compreensão das dificuldades que os alunos apresentam em cursos universitários de Cálculo, na medida em que permite a comparação de diferentes dimensões do conhecimento prévio desses alunos.

Assim, o objeto de estudo foi definitivamente delineado, correspondendo à avaliação do nível de raciocínio covariacional de um grupo de alunos concluintes do Ensino Médio, seu domínio de técnicas algébricas e a influência dessas duas dimensões no seu desempenho em uma disciplina inicial de Cálculo em nível universitário.

Na seção seguinte, apresentamos a metodologia que foi adotada para que se pudesse atingir o objetivo traçado.

⁴⁴ Adding to the complexity of the interplay of attrition factors, there is currently no widespread agreement among curriculum developers or instructors about the conceptual foundations that are needed for calculus. Even a casual review of precalculus level textbooks makes apparent this lack of consensus. To further complicate matters, results from the Third International Mathematics and Science Study indicate that instructional mathematics practices in American schools tend to focus on fragmented procedures and topics rather than concepts that are central to continued learning of mathematics.

4.2 Metodologia

Após definir, na seção anterior, o objeto do estudo proposto, vamos procurar construir os modos de investigá-lo. Fiorentini e Lorenzato (2012) apresentam uma classificação para as técnicas de interrogação da realidade e coleta de dados mais usadas em educação matemática, com o objetivo de mostrar suas potencialidades e limites. Dentre elas, a pesquisa experimental pareceu-nos a mais adequada ao propósito do estudo. No entendimento desses autores, um experimento é “aquela parte da investigação na qual se manipulam certas variáveis e se observam seus efeitos sobre outras”.

Na investigação proposta, procurou-se medir duas variáveis – o nível de raciocínio covariacional e o domínio de técnicas algébricas de um grupo de alunos egressos do Ensino Médio – e identificar o efeito de cada uma delas sobre o aprendizado desses estudantes na disciplina inicial de Cálculo.

O universo pesquisado constituiu-se de um grupo de 75 alunos matriculados na disciplina de Cálculo 1 e os dados foram coletados antes da primeira aula da disciplina. Como 9 desses alunos haviam concluído o Ensino Médio há mais de um ano, tendo cursado parcial ou integralmente uma disciplina de Cálculo em outras instituições, seus dados não foram considerados, permanecendo apenas 66 alunos no estudo.

Esses alunos ingressaram no segundo semestre de 2015 em cursos de Administração de Empresas e Ciências Econômicas do Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa, uma instituição de ensino superior privada localizada em São Paulo, SP. Trata-se de cursos que possuem uma procura relativamente alta, com o processo seletivo apresentando um nível de concorrência bem mais elevado do que a média observada em instituições privadas na cidade de São Paulo. No referido processo seletivo, os alunos realizaram apenas três provas: Redação, Análise Verbal e Análise Quantitativa e Lógica, sendo que essa última aborda os conteúdos tradicionais das provas de Matemática da maioria dos exames vestibulares, além de noções de lógica formal.

Como resultado dessa concorrência, a maioria dos alunos aprovados no vestibular tem uma formação matemática satisfatória, o que se confirma a partir da experiência com turmas ingressantes em semestres anteriores. E, de forma geral, são alunos oriundos de escolas com excelentes desempenhos no ENEM.

Uma das propostas dos cursos de Administração de Empresas e Ciências Econômicas do Insper é oferecer uma formação analítica forte a seus alunos. Com isso, a trilha de Métodos Quantitativos é muito valorizada nos currículos dos dois cursos, trabalhando com os alunos conhecimentos matemáticos e estatísticos de maneira aprofundada.

Para analisar as variáveis envolvidas, foi necessário construir instrumentos que pudessem, de alguma forma, produzir uma mensuração que permitisse uma comparação entre os alunos. Passaremos, a seguir, a descrever esses instrumentos, justificando a escolha de cada um.

4.2.1 Avaliação do raciocínio covariacional

Como foi citado anteriormente, a maioria dos livros didáticos brasileiros não adota uma abordagem que contemple, de maneira sistematizada e intencional, o desenvolvimento das habilidades ligadas ao raciocínio covariacional. Ainda assim, é razoável supor que os alunos possam apresentar diferentes níveis de desempenho em tarefas ligadas à covariação, fruto de experiências distintas ao longo de sua formação escolar.

Para avaliar esses diferentes níveis em um grupo que, de forma geral, não teve acesso a uma instrução mais sistematizada nessa área, foi necessário selecionar tarefas que não exigissem conhecimentos técnicos ligados à taxa de variação, mas que permitissem identificar nuances do raciocínio covariacional. Por isso, optamos por problemas ligados a eventos dinâmicos descritos em linguagem cotidiana. Além disso, as tarefas solicitavam a representação gráfica das variáveis envolvidas no problema, sem que fosse exigida uma análise numérica que necessitasse de ferramentas desconhecidas da maioria desses alunos.

Foram elaboradas quatro tarefas, que pudessem ser realizadas em um período máximo de uma hora. Considerando o nível de discriminação proporcionado por essas tarefas no grupo de 66 alunos, uma delas foi descartada, sendo utilizadas na análise apenas as outras três. As figuras 34 e 35 mostram os enunciados das três tarefas.

Tarefa 1

Um leitor enviou a uma revista a seguinte análise de um livro recém lançado, de 400 páginas:

“O livro é eletrizante, muito envolvente mesmo! A cada página terminada, mais rápido eu lia a próxima! Não conseguia parar!”

Desenhe um gráfico que represente, de forma a refletir corretamente a análise feita, o número de páginas lidas pelo leitor (N) em função do tempo (t). Não se preocupe com valores numéricos, apenas com a tendência do gráfico.

Dê uma breve explicação de como pensou.

Tarefa 2

Uma torneira com vazão constante* é usada para encher uma garrafa, inicialmente vazia, com o formato mostrado ao lado.

Como varia o nível de água na garrafa ao longo do tempo? Para responder, desenhe o gráfico do nível de água em função do tempo. Não se preocupe com valores numéricos, apenas com a tendência do gráfico.

*a expressão “vazão constante” equivale a dizer que a torneira libera sempre o mesmo volume de água a cada segundo.

Figura 34 – Tarefas 1 e 2 para avaliação de raciocínio covariacional

Tarefa 3

O gráfico ao lado mostra a frequência com que uma lâmpada pisca, dada em piscadas por minuto, em um intervalo de 20 minutos. Desenhe um gráfico que represente o número total de piscadas que essa lâmpada deu em função do tempo, indicando a escala no eixo y. Explique brevemente o seu raciocínio.

Figura 35 – Tarefa 3 para avaliação de raciocínio covariacional

A avaliação de raciocínio covariacional foi aplicada aos 66 alunos no primeiro dia de aula da disciplina de Cálculo 1, sendo explicado a eles que se tratava de uma avaliação diagnóstica que não valeria nota para o curso, e cujos dados poderiam ser utilizados em uma pesquisa acadêmica sobre ensino e aprendizagem de Cálculo. Embora tenha sido informado que a participação era totalmente facultativa, todos os alunos concordaram em realizar a avaliação. O tempo não foi um fator limitante para a realização da avaliação: foi fornecida uma hora e todos os alunos finalizaram-na antes desse período.

Para o tratamento dos dados, foi utilizado o marco teórico proposto por Carlson et al. (2002), apresentado na seção 3.2. Para cada aluno, em cada tarefa, o pesquisador identificou o nível de raciocínio covariacional atingido conforme descrito na tabela 15, sendo atribuída uma pontuação de 1 a 5 pontos para os níveis de N1 a N5, respectivamente. Se o aluno não realizou a tarefa ou não conseguiu perceber qualquer relação entre as variações das variáveis envolvidas, foi atribuída a pontuação zero àquela tarefa. Ao final, as

pontuações obtidas nas três tarefas foram somadas, gerando, para cada aluno, uma nota variando de 0 a 15 pontos para representar seu desempenho em raciocínio covariacional.

Para detalhar o modo como o marco teórico foi utilizado para definir as pontuações, finalizaremos esta seção mostrando exemplos de respostas dadas por alguns alunos para a tarefa 2 que ilustram as pontuações de 1 a 5 da escala.

Na resposta da figura 36, observamos que foi percebida uma relação entre a variação do volume e o tempo (“o volume de água vai aumentando”), mas a análise do gráfico indica que o sentido dessa variação não foi identificado. Por isso, consideramos que, nesta tarefa, foi atingido o nível N1 (coordenação) de raciocínio covariacional, sendo atribuído 1 ponto à resposta.

Figura 36 – Exemplo de pontuação 1 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional

Na resposta da figura 37, além da relação entre a variação do volume e o tempo, foi corretamente identificado o sentido dessa variação, tanto no texto quanto no gráfico. Por isso, consideramos que, nesta tarefa, foi atingido o nível N2 (sentido) de raciocínio covariacional, sendo atribuídos 2 pontos à resposta.

Figura 37 – Exemplo de pontuação 2 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional

Na resposta da figura 38, foi identificada a coordenação entre o tempo e a variação absoluta do nível de água (“o nível da água ao longo que ela é adicionada varia”), o que também pode ser confirmado pela análise do gráfico. Por isso, consideramos que, nesta tarefa, foi atingido o nível N3 (coordenação quantitativa) de raciocínio covariacional, sendo atribuídos 3 pontos à resposta.

Figura 38 – Exemplo de pontuação 3 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional

Na resposta da figura 39, a garrafa foi dividida em quatro regiões, para as quais foram associados diferentes períodos de tempo. Para cada período, foi identificada a taxa de variação média, coerente com o formato da garrafa (“como a área II da garrafa tem volume maior que a área IV, o coeficiente angular é menor”), o que também pode ser confirmado pela análise do gráfico. Por isso, consideramos que, nesta tarefa, foi atingido o nível N4 (taxa de variação média) de raciocínio covariacional, sendo atribuídos 4 pontos à resposta.

Figura 39 – Exemplo de pontuação 4 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional

Na resposta da figura 40, foi identificada a coordenação entre o tempo e a taxa de variação instantânea do nível de água, caracterizada pela construção de uma curva suave com as corretas indicações de concavidade. Por isso, consideramos que, nesta tarefa, foi atingido o nível N5 (taxa de variação instantânea) de raciocínio covariacional, sendo atribuídos 5 pontos à resposta.

Figura 40 – Exemplo de pontuação 5 em tarefa da avaliação de raciocínio covariacional

4.2.2 Avaliação de técnicas algébricas

Os docentes da disciplina de Cálculo 1 na qual foram coletados os dados desta pesquisa realizam, todos os semestres, uma avaliação de técnicas algébricas na primeira semana de aula do curso. O objetivo da avaliação é fazer uma rápida identificação de alunos com dificuldades em conteúdos matemáticos básicos ligados à Álgebra, que são requeridos já nas primeiras aulas do curso.

A avaliação, composta de 15 questões de múltipla escolha, abrange assuntos como potenciação e radiciação, operações com polinômios, fatoração e resolução de equações. Os alunos que acertam 11 questões ou menos são encaminhados a sessões de estudo orientado, devendo realizar uma nova versão da avaliação cerca de três semanas depois da primeira.

O conteúdo cobrado nessa avaliação assemelha-se a uma parte significativa do que é trabalhado nos cursos de Pré-Cálculo. Dessa forma, consideramos que seria uma boa medida do domínio de técnicas algébricas dos alunos ingressantes. Assim, considerando que cada acerto na avaliação corresponde a um ponto, foi gerada, para cada aluno, uma nota variando de 0 a 15 pontos para representar seu desempenho em técnicas algébricas.

4.2.3 Avaliação do aprendizado de Cálculo

A mensuração do aprendizado de Cálculo pareceu-nos a mais difícil de ser realizada, por diversos motivos. Em primeiro lugar, o objetivo da pesquisa consistia em relacionar as duas variáveis descritas nas seções anteriores com esse aprendizado, mantendo-se as demais condições. No entanto, a aprendizagem depende de inúmeros outros fatores que não podem ser controlados, como a dedicação de cada aluno ao curso, sua afinidade com a matéria e seu ritmo próprio de aprendizagem.

Outro aspecto a ser levado em conta é o fato de que a aprendizagem dos 66 alunos que participaram da pesquisa está ligada ao curso específico de Cálculo que lhes foi oferecido. Assim, embora essa variável seja a mesma para todos os integrantes do estudo, resultados diferentes poderiam ser obtidos se, por exemplo, ele fosse realizado em outra instituição de ensino. Nesse sentido, a “aprendizagem de Cálculo” poderia ser traduzida como o “desempenho naquele curso específico de Cálculo”.

Além disso, o entendimento de “aprender Cálculo” pode variar muito, dependendo das concepções que se tem de aprendizagem e do próprio Cálculo. Para muitos, aprender Cálculo pode significar o domínio das técnicas de derivação e integração. Para outros, a compreensão de seus conceitos fundamentais e a capacidade de aplicá-los na resolução de problemas.

Diante da complexidade que caracteriza a tarefa de mensurar a aprendizagem de Cálculo, seria ideal contar com instrumentos diversificados de avaliação. As provas tradicionais são fontes importantes de informação, mas possuem limitações. Por exemplo, na maioria dos cursos de Cálculo, elas acabam privilegiando o domínio de técnicas. Além disso, muitos alunos têm dificuldade para explicitar seu conhecimento em provas formais, tendo a avaliação de seu conhecimento prejudicada quando elas representam o único instrumento.

A observação do modo como os estudantes aplicam seus conhecimentos em trabalhos realizados durante as aulas ou em projetos de escopo mais amplo traria mais elementos para compor a avaliação proposta. No entanto, não havia essa possibilidade no contexto em que foi realizada a coleta dos dados. Por isso, buscamos compreender, dentro da realidade daquele curso específico de Cálculo, qual medida seria a mais adequada.

A disciplina de Cálculo 1 dos cursos de Administração de Empresas e Ciências Econômicas do Insper, com duração semestral, possui algumas diferenças em relação à maioria dos cursos de Cálculo oferecidos nas universidades brasileiras. Na primeira metade da disciplina, que corresponde a um período aproximado de dois meses, o Cálculo é explorado apenas com funções polinomiais, o que diminui bastante as dificuldades técnicas provenientes da manipulação de expressões envolvendo exponenciais, logaritmos e funções trigonométricas. Com isso, nesta primeira etapa, foca-se na construção da noção de derivada, trabalhando-se de maneira intensa o desenvolvimento do raciocínio covariacional.

Na segunda parte, quando os alunos já tiveram tempo para amadurecer as ideias mais básicas do Cálculo, as demais funções vão sendo progressivamente introduzidas, o que aumenta a exigência sobre o domínio de técnicas, como as regras da cadeia, do produto e do quociente para derivação. A cada nova função introduzida, há a oportunidade de retomar as ideias fundamentais que foram desenvolvidas no início das aulas. Finalmente, inicia-se a construção da noção de integral, trabalhando-se problemas de acumulação e sua relação

com o cálculo de áreas e o teorema fundamental do Cálculo. As técnicas de integração são vistas na disciplina de Cálculo 2. Algumas informações do programa de ensino da disciplina Cálculo 1 do Insper, incluindo sua ementa, podem ser vistos no Anexo A.

O processo de avaliação é composto predominantemente de duas provas, a prova intermediária, que é realizada cerca de dois meses após o início do curso, e a prova final, aplicada após os quatro meses de duração da disciplina (as duas provas, juntas, correspondem a 75% da média final). O restante da avaliação consiste de três avaliações menores, chamadas de “provinhas”, com menor quantidade de conteúdo, realizadas ao longo do semestre.

Diante do quadro descrito, decidimos utilizar a nota da prova intermediária como medida da aprendizagem dos alunos, ainda que tal escolha trouxesse consigo as limitações já apresentadas anteriormente. A opção também se baseou na experiência dos docentes da disciplina em relação ao comportamento dos alunos em semestres anteriores.

Na época em que a prova intermediária é aplicada, cerca de dois meses depois do início das aulas, a maioria dos estudantes já está mais adaptada à rotina da faculdade, conseguindo se preparar melhor para a avaliação, o que não necessariamente ocorre nas duas primeiras provinhas. A motivação para o estudo, em geral, também é alta, impulsionada pela novidade que representa a entrada no ensino superior. E ainda, por não ser um período tão distante do início das aulas, consideramos que o conhecimento prévio mensurado pelas duas avaliações descritas nas seções anteriores tem grande potencial para influenciar o desempenho dos alunos.

Embora também sejam cobradas técnicas como o cálculo de derivadas e limites, uma grande parte do conteúdo exigido nessa avaliação é bastante conceitual, incluindo a compreensão da noção de derivada e sua interpretação gráfica. Esse perfil de avaliação aproxima-se mais da concepção de aprendizagem de Cálculo que temos considerado ao longo deste trabalho. Além disso, por envolver apenas funções polinomiais, o impacto negativo de eventuais dificuldades em conteúdos do Ensino Médio como as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas é diminuído. A prova intermediária aplicada no segundo semestre de 2015 pode ser vista no Anexo B.

Pelos motivos expostos, consideramos que, dentre os instrumentos disponíveis, a nota da prova intermediária, ainda que com algumas limitações, seja a medida mais razoável para representar o aprendizado de Cálculo dos alunos. Dessa forma, cada aluno teve atribuída uma nota de 0 a 10 pontos representando seu aprendizado, que denominaremos “desempenho em Cálculo”.

4.3 Resultados

A tabela 18 mostra a média e o desvio padrão das pontuações obtidas pelos 66 alunos nas três avaliações realizadas: raciocínio covariacional (RC), técnicas algébricas (TA) e desempenho em Cálculo (DC). Lembramos que as duas primeiras podiam variar de 0 a 15 pontos e, a última, de 0 a 10 pontos.

Tabela 18 – Resultados gerais das três avaliações aplicadas (RC, TA e DC).

Avaliação	Média	Desvio padrão
Raciocínio Covariacional (RC)	7,80	4,26
Técnicas Algébricas (TA)	11,53	2,54
Desempenho em Cálculo (DC)	7,54	1,93

Vale destacar que os valores das médias mostrados na tabela 18 não devem ser comparados entre si, uma vez que as escalas de cada avaliação não foram construídas utilizando ferramentas que pudessem propiciar uma comparação direta. Ao longo desta seção, iremos padronizar as variáveis com o objetivo de realizar algumas análises específicas.

Inicialmente, vamos trabalhar somente com os dados referentes à avaliação RC, uma vez que um dos objetivos da pesquisa é obter um indicativo do nível de raciocínio covariacional de um grupo de alunos egressos do Ensino Médio.

4.3.1 Resultados da avaliação do nível de raciocínio covariacional

O primeiro ponto importante sobre os resultados obtidos na avaliação RC, realizada com alunos que haviam concluído recentemente o Ensino Médio e não tinham começado a

cursar o Ensino Superior, foi a sua aderência em relação ao marco teórico proposto por Carlson et al. (2002). De fato, a existência de respostas em todos os níveis definidos no marco teórico, ilustradas nas figuras de 36 a 40, é um indicativo de que se trata de um referencial apropriado para a descrição das habilidades relacionadas à covariação na escola básica brasileira. Em outras palavras, o marco teórico não é simples demais nem excessivamente complexo considerando a formação na escola básica do grupo de alunos pesquisado.

A outra questão a ser destacada está ligada aos dados fornecidos na tabela 18. A avaliação RC apresentou média 7,80 e desvio padrão 4,26, indicando um alto grau de dispersão. Esse fato também pode ser observado no gráfico de colunas da figura 41, em que as cinco classes apresentam frequências bem próximas: a diferença entre a classe mais frequente (7 a 9) e a menos frequente (13 a 15) foi de apenas 6 alunos.

Na seção 4.4.1, vamos discutir esses dois aspectos, analisando também as respostas de alguns alunos para as tarefas da avaliação RC.

Figura 41 – Distribuição das notas obtidas pelos 66 alunos na avaliação RC

4.3.2 Relações entre os resultados das três avaliações

Na comparação dos resultados das três avaliações, iniciou-se o tratamento dos dados buscando identificar a existência de correlações entre as três variáveis envolvidas. Para isso, analisamos essas variáveis duas a duas utilizando um gráfico de dispersão e o coeficiente de correlação de Pearson (r), que pode variar de -1 a 1 . Utilizamos o critério adotado por Dancey e Reidy (2014), segundo o qual a correlação entre duas variáveis é fraca quando $0,1 < |r| \leq 0,3$, moderada quando $0,3 < |r| \leq 0,7$ e forte quando $0,7 < |r| \leq 1$. A situação em que $|r| \leq 0,1$ caracteriza ausência de correlação.

A figura 42 mostra um gráfico de dispersão com as medidas de raciocínio covariacional (RC) e técnicas algébricas (TA) dos 66 alunos.

Figura 42 – Gráfico de dispersão: raciocínio covariacional × técnicas algébricas

A análise do gráfico não parece mostrar a existência de qualquer tipo de correlação. O coeficiente de correlação encontrado foi de $-0,004$, reforçando a ausência de correlação entre as avaliações de raciocínio covariacional e técnicas algébricas. Este resultado nos pareceu bastante importante, pois confirmou que se tratam de duas dimensões diferentes de conhecimento. Em outras palavras, no universo pesquisado, o domínio de técnicas algébricas não implica necessariamente um bom nível de raciocínio covariacional, e vice-versa.

A figura 43 mostra um gráfico de dispersão com as medidas de raciocínio covariacional (RC) e desempenho em Cálculo (DC) dos 66 alunos.

Figura 43 – Gráfico de dispersão: raciocínio covariacional × desempenho em Cálculo

Neste gráfico, percebe-se uma grande concentração de pontos no canto superior direito do gráfico, sugerindo que alunos com bom nível de raciocínio covariacional tendem a apresentar um desempenho melhor em Cálculo. É interessante notar que há um único aluno que atingiu mais de 7 pontos na avaliação de raciocínio covariacional e teve nota abaixo de 5,0 na prova intermediária de Cálculo.

O coeficiente de correlação calculado foi de 0,32, o que representa, segundo o critério adotado, um grau moderado de correlação positiva entre a avaliação de raciocínio covariacional e o desempenho em Cálculo. Em outras palavras, confirma-se a impressão dada pelo gráfico de dispersão.

A figura 44 mostra um gráfico de dispersão com as medidas de técnicas algébricas (TA) e desempenho em Cálculo (DC) dos 66 alunos.

Figura 44 – Gráfico de dispersão: técnicas algébricas × desempenho em Cálculo

Mais uma vez, percebe-se uma grande concentração de pontos no canto superior direito do gráfico, sugerindo que alunos com bom domínio de técnicas algébricas tendem a apresentar um desempenho melhor em Cálculo. Neste caso, porém, há uma quantidade significativa de alunos que atingiram 10 ou mais pontos na avaliação de técnicas algébricas mas tiveram nota abaixo de 5,0 na prova intermediária de Cálculo.

O coeficiente de correlação calculado foi de 0,31, o que representa, segundo o critério adotado, um grau moderado de correlação positiva entre a avaliação de técnicas algébricas e o desempenho em Cálculo. Novamente se confirma a impressão dada pelo gráfico de dispersão.

As primeiras análises sugerem, portanto, que as duas dimensões estudadas – o nível de raciocínio covariacional e o domínio de técnicas algébricas avaliados no início do curso – têm um impacto positivo sobre o desempenho em Cálculo. Ao mesmo tempo, porém, essas duas dimensões parecem ser independentes entre si. Para aprofundar essa análise, vamos formar diferentes grupos de alunos, de acordo com seus resultados nas avaliações de RC e TA, e comparar seu desempenho em Cálculo.

Para que as dispersões dos dados de cada avaliação não afetem de maneira diferente a formação desses grupos, vamos padronizar as pontuações de RC e TA. Assim, sendo μ e σ , respectivamente, a média e o desvio padrão das notas dos 66 alunos em uma das duas

avaliações e x a nota de um aluno específico nessa mesma avaliação, a nota padronizada z desse aluno é dada por $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

A partir da definição acima, notas padronizadas positivas correspondem a notas maiores do que a média μ e, negativas, a notas menores do que a média μ . A partir das notas padronizadas de RC e TA, os alunos foram divididos em quatro grupos, conforme indicado na tabela 19.

Tabela 19 – Grupos de alunos formados com base nas notas padronizadas de RC e TA.

Grupo	Nota padronizada em Raciocínio Covariacional (RC)	Nota padronizada em Técnicas Algébricas (TA)
A	+ (acima da média)	+ (acima da média)
B	+ (acima da média)	– (abaixo da média)
C	– (abaixo da média)	+ (acima da média)
D	– (abaixo da média)	– (abaixo da média)

Os alunos que tiveram pelo menos uma das duas notas padronizadas muito próxima da média (entre $-0,20$ e $0,20$) foram retirados da análise. Em outras palavras, foram consideradas apenas as notas que se diferenciaram da média em pelo menos 20% do desvio padrão. Fizemos isso para minimizar a possibilidade de que pequenas variações nas pontuações de RC e TA influíssem na formação dos grupos. Com isso, 20 alunos foram retirados da análise, restando 46 alunos.

A figura 45 mostra a distribuição dos 46 alunos em um gráfico de dispersão, com RC no eixo horizontal e TA no eixo vertical. Assim, os grupos A, B, C e D ficaram dispostos no 1º, 4º, 2º e 3º quadrantes, respectivamente. As cores dos pontos que representam cada aluno estão relacionadas ao seu desempenho em Cálculo (N), de acordo com a legenda do gráfico. As linhas tracejadas limitam as regiões próximas das médias.

Figura 45 – Gráfico de dispersão: notas padronizadas (RC × TA) e desempenho em Cálculo (N)

No 1º quadrante do gráfico, onde estão os pontos correspondentes aos alunos do grupo A (resultado acima da média em RC e TA), notamos a maior concentração de pontos azuis escuros, representando um excelente desempenho em Cálculo (nota maior ou igual a 8,0 na prova intermediária). A comparação visual de cores mostra que os alunos desse grupo tiveram, coletivamente, as notas mais altas na prova intermediária.

No 4º quadrante do gráfico, onde estão os pontos correspondentes aos alunos do grupo B (resultado acima da média em RC e abaixo da média em TA), notamos uma grande concentração de pontos azuis claros (nota entre 6,5 e 8,0 na prova intermediária) e nenhum

ponto vermelho. As cores sugerem um bom desempenho em Cálculo, mas inferior ao do grupo A.

No 2º quadrante do gráfico, onde estão os pontos correspondentes aos alunos do grupo C (resultado abaixo da média em RC e acima da média em TA), notamos uma dispersão grande entre as cores dos pontos. As cores sugerem um desempenho em Cálculo inferior aos dos grupos A e B, com grande variação entre os alunos que compõem o grupo.

No 3º quadrante do gráfico, onde estão os pontos correspondentes aos alunos do grupo D (resultado abaixo da média em RC e TA), notamos a maior concentração de pontos vermelhos e rosas, representando um desempenho ruim ou regular em Cálculo (nota menor do que 5,0 ou entre 5,0 e 6,5 na prova intermediária, respectivamente). A comparação visual de cores mostra que os alunos desse grupo tiveram, coletivamente, as notas mais baixas na prova intermediária.

Para complementar as análises visuais proporcionadas pelo gráfico de dispersão da figura 45, faremos alguns testes estatísticos para comparar as médias das medidas de desempenho em Cálculo (DC) nos diferentes grupos. A tabela 20 traz essas médias, além dos respectivos desvios padrões.

Tabela 20 – Médias e desvios padrões de DC nos quatro grupos de alunos.

Grupo	Número de alunos	Média	Desvio padrão
A	14	8,73	1,27
B	12	7,61	1,24
C	10	6,99	2,79
D	10	5,96	1,86

Utilizando o programa *StatPlus* (StatPlus, AnalystSoft Inc. – statistical analysis program for Mac OS, version v6), foram realizados testes t de Student para comparar, duas a duas, as médias dos quatro grupos definidos acima, verificando se elas podem ser consideradas diferentes ou não. A hipótese de que as populações sejam normais, necessária para a realização desse teste, foi verificada para os quatro grupos pelo teste de Jarque e Bera, considerando-se um nível de significância de 5%.

A tabela 21 mostra os resultados dos seis testes t realizados, nos quais foi considerado um nível de significância de 5%.

Tabela 21 – Resultados dos testes t para os quatro grupos de alunos comparados dois a dois.

Grupos comparados	As médias podem ser consideradas diferentes?	Valor p
A e B	Sim	0,032
A e C	Sim	0,050
A e D	Sim	0,00026
B e C	Não	-----
B e D	Sim	0,022
C e D	Não	-----

Os testes estatísticos confirmaram algumas das impressões proporcionadas pela análise visual dos dados no gráfico de dispersão. A média do grupo A foi, de fato, a mais alta dentre os quatro grupos. Além disso, a média do grupo B revelou-se superior à média do grupo D.

No entanto, não foi possível diferenciar estatisticamente a média do grupo C das médias dos grupos B e D. Entendemos que isso tenha sido causado pelo fato de que a dispersão dos dados do grupo C foi bem superior à dispersão dos demais grupos, o que pode ser notado pelo alto valor do desvio padrão. Na próxima seção, procuraremos levantar possíveis interpretações para esse fato.

4.4 Discussão

A exemplo do que fizemos na apresentação dos resultados, vamos separar a discussão em duas partes, começando pela avaliação do nível de raciocínio covariacional dos alunos egressos do Ensino Médio.

4.4.1 O nível de raciocínio covariacional dos egressos do Ensino Médio

Os estudos sobre o raciocínio covariacional citados neste trabalho referem-se a contextos universitários. O próprio marco teórico proposto por Carlson et al. (2002) é apresentado junto com os resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 2º semestre de um curso superior, que haviam demonstrado alto rendimento em uma disciplina inicial de Cálculo no período anterior.

Considerando que esse marco teórico embasou nossa proposta de criação de uma trilha estruturada ao longo da escola básica com o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio covariacional, surgiu a necessidade de verificar sua adequação a um nível de escolaridade diferente do Ensino Superior.

Os dados mostrados na figura 41 representam uma evidência importante dessa adequação. Lembrando que os 66 alunos cujos resultados foram considerados na pesquisa estavam iniciando seu primeiro curso universitário, não tendo cursado parcial ou integralmente uma disciplina de Cálculo em outra instituição de nível superior, é bastante significativo que 10 deles (15% do total) tenham obtido de 13 a 15 pontos na avaliação RC, cuja pontuação máxima era 15. Tivemos, ainda, 15 alunos (23% do total) com pontuação de 10 a 12.

Os alunos que obtiveram pontuação maior ou igual a 10 na avaliação RC atingiram o nível N4 (taxa de variação média) de raciocínio covariacional em pelo menos uma das três tarefas analisadas. Já os que tiveram 13 ou mais pontos atingiram o nível N5 (taxa de variação instantânea) em pelo menos uma das tarefas. Isso mostra um percentual significativo de alunos que foram capazes de realizar ações mentais AM4 e AM5 para resolver problemas em contextos dinâmicos.

Esses resultados indicam que é realista a proposta de trabalhar o raciocínio covariacional na escola básica, nos cinco níveis propostos no marco teórico, sem a necessidade de ministrar um curso formal de Cálculo nos moldes do que é feito na maioria das universidades. Para reforçar essa conclusão, vamos analisar as respostas de um aluno com excelente desempenho na avaliação RC (pontuação 14), começando pela tarefa 1, mostrada na figura 46.

Figura 46 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 1 da avaliação RC

Sem familiaridade com a palavra derivada e sua definição formal, o aluno recorreu à expressão “crescimento exponencial” para representar a ideia de taxa de variação crescente. Assim, é provável que o aluno tenha compreendido a situação descrita textualmente e buscado, dentre os modelos de funções conhecidos por ele, o mais adequado para descrevê-la.

Analisando apenas a tarefa 1, surge a seguinte dúvida: o aluno de fato reconheceu a taxa de variação instantânea ou foi induzido a desenhar uma curva suave pela associação com a função exponencial? Para procurar responder essa questão, vamos analisar a tarefa 2 do mesmo aluno, mostrada na figura 47.

Figura 47 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 2 da avaliação RC

Nesta tarefa, não aparece na resposta do aluno uma associação explícita com algum modelo de função. Dessa forma, a relação do fenômeno com o gráfico construído é feita por meio das expressões “nível sobe cada vez mais lentamente”, “volume sobe cada vez mais rápido” e “nível aumenta [de forma] constante”. Uma vez que o gráfico ilustra essas expressões por meio de curvas suaves, podemos concluir que, de fato, o aluno realizou ações mentais AM5 do marco teórico.

A resposta do aluno demonstra bom domínio dos três modelos de crescimento ilustrados na figura 22 – taxa constante, crescente e decrescente – relacionando cada um deles com a variação da área da seção transversal nos diferentes trechos da garrafa. Trata-se de um raciocínio refinado, que foi construído sem o conhecimento de ferramentas técnicas como as derivadas primeira e segunda.

Finalmente, vamos analisar a tarefa 3, apresentada na figura 48.

Figura 48 – Resposta de aluno com pontuação 14 na tarefa 3 da avaliação RC

O gráfico dado no enunciado da tarefa 3 indicava frequência constante de piscadas entre 0 e 5 minutos (10 piscadas por minuto) e entre 15 e 20 minutos (0 piscada por minuto). Nesses intervalos, o aluno pareceu não encontrar dificuldade para determinar o total de piscadas: no primeiro intervalo, traçou um trecho de uma reta de coeficiente angular positivo e, no segundo, um segmento de reta horizontal. Essas conclusões podem ser obtidas por meio de um raciocínio proporcional, uma vez que a taxa de variação é constante.

Porém, no intervalo entre 5 e 15 minutos, a taxa de variação não é constante, o que dificultou a análise do aluno. Por isso, ele dividiu esse intervalo em 10 partes e calculou a taxa de variação média considerando incrementos uniformes no tempo (soma mostrada na parte inferior direita da figura 48). Ele obteve, assim, um total de piscadas igual a 45 no intervalo de 5 a 15 minutos, quando o correto seria 50. Podemos inferir que, neste caso, faltaram ferramentas técnicas para lidar com a taxa de variação instantânea: o valor correto poderia ser obtido por meio da integral da função dada pelo gráfico do enunciado no

intervalo de 5 a 15 minutos, que é equivalente à área da região limitada por esse gráfico e pelo eixo das abscissas.

Mesmo assim, ao construir o gráfico, o aluno desenhou uma curva suave, e não sucessivos segmentos de reta, indicando a consciência, ainda que intuitiva, de que a taxa de variação do total de piscadas em função do tempo alterava-se continuamente no intervalo de 5 a 15 minutos.

Embora a existência de uma quantidade significativa de alunos com excelente desempenho na avaliação RC indique a viabilidade de trabalhar os níveis mais elevados do marco teórico do raciocínio covariacional usando uma abordagem diferente para conteúdos tradicionais do programa da escola básica, a grande variabilidade observada no gráfico da figura 41 traz outra constatação. Esses resultados positivos devem-se possivelmente a iniciativas isoladas de alguns professores ou escolas. Não se identifica, porém, um trabalho consistente em relação ao desenvolvimento do raciocínio covariacional. Essa premissa, que já era forte a partir da análise dos principais materiais didáticos, torna-se mais evidente com os resultados da avaliação RC.

Para fazer um contraponto às respostas mostradas nas figuras 46, 47 e 48, de um aluno com excelente desempenho na avaliação RC, apresentamos, nas figuras 49 e 50, as respostas de outro aluno, que teve pontuação 2 na mesma avaliação.

Tarefa 1

Tarefa 2

Figura 49 – Respostas de aluno com pontuação 2 nas tarefas 1 e 2 da avaliação RC

Figura 50 – Resposta de aluno com pontuação 2 na tarefa 3 da avaliação RC

As respostas nas três tarefas demonstram um nível bem primário de raciocínio covariacional. As dificuldades aparecem já nas ações mentais AM1 e AM2: na tarefa 1, o aluno não consegue perceber que o número de páginas lidas só pode aumentar ou permanecer constante à medida em que passa o tempo. Na tarefa 2, ainda que indique corretamente o sentido da variação, ele não estabelece distinções entre as diferentes regiões da garrafa. E, na tarefa 3, ele parece repetir o formato do gráfico dado no enunciado, sem estabelecer qualquer relação entre as variações do tempo e do total de piscadas.

Os 12 alunos na faixa de pontuação de 0 a 3 da avaliação RC (18% do total) representam uma quantidade significativa do grupo pesquisado. Lembramos de que se trata de alunos aprovados em um exame vestibular concorrido, em que foram avaliados apenas nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa. São alunos que, mesmo vivenciando todo o programa de Matemática do ensino básico em escolas com recursos bem acima da média e se preparando para um exame concorrido, demonstram níveis sofríveis de raciocínio covariacional.

Os resultados dessa parte do estudo apontam para duas direções: ao mesmo tempo em que é possível atingir na escola básica os níveis mais elevados de raciocínio covariacional propostos por Carlson et al. (2002), esse trabalho de desenvolvimento não tem sido feito de

maneira consistente pela maioria das escolas brasileiras. Vamos discutir a seguir o impacto que isso pode ter no ensino de Cálculo em nível universitário.

4.4.2 Impactos do raciocínio covariacional sobre a disciplina de Cálculo na universidade

Diversos trabalhos têm relatado as grandes dificuldades enfrentadas por professores e alunos nas disciplinas introdutórias de Cálculo nas universidades brasileiras (Bonomi, 1999; Rêgo, 2000; Reis, 2001; Rezende, 2003; Beltrão, 2009; Campos, 2012; Lima, 2015). Certamente, trata-se de um problema complexo, que não pode ser explicado por um único fator. Mesmo assim, muitos docentes que atuam nessa disciplina costumam atribuir os altos níveis de reprovação à falta de base dos alunos que ingressam no Ensino Superior. Nesse contexto, a expressão “falta de base” costuma ter entendimentos bem diferentes e, muitas vezes, nebulosos (Carlson, Oehrtman e Engelke 2010). Entre muitos docentes brasileiros, a falta de base é associada, de maneira predominante, ao domínio limitado de técnicas algébricas apresentado pelos alunos, o que inclui propriedades operatórias de números reais, resolução de equações, manipulação de expressões algébricas e alguns conhecimentos procedimentais ligados às funções de 1º e 2º graus.

O estudo realizado confirmou que, de fato, o domínio de técnicas algébricas por estudantes que iniciam uma disciplina introdutória de Cálculo é um aspecto que influencia positivamente o seu desempenho nessa disciplina. No entanto, ficou evidente a importância de outro elemento ligado à formação dos alunos nesse desempenho: o raciocínio covariacional.

Um ponto fundamental do estudo consistiu em verificar se essas duas dimensões eram independentes entre si. Eventualmente, a competência algébrica demonstrada por um aluno poderia incluir a capacidade de raciocinar covariacionalmente. Se essa hipótese fosse comprovada, a preparação de um aluno para um curso de Cálculo poderia focar apenas o desenvolvimento de suas habilidades algébricas, o que incluiria, naturalmente, o raciocínio covariacional.

No entanto, os resultados mostraram que o domínio de técnicas algébricas e o nível de raciocínio covariacional de um aluno não têm qualquer grau de correlação. Mais ainda, eles sugerem que se tratam de dois aspectos até certo ponto complementares no que se

refere à preparação de um aluno para a disciplina de Cálculo. De fato, o desempenho em Cálculo dos alunos do grupo A, que tiveram resultados acima da média tanto em raciocínio covariacional quanto em técnicas algébricas, foi significativamente superior ao dos alunos dos grupos B e C, que se destacaram em apenas uma das duas dimensões, mostrando que a combinação das duas potencializou o resultado dos alunos na avaliação de Cálculo.

Há ainda outra questão ligada ao raciocínio covariacional que se poderia supor, mas que não foi corroborada pelos dados obtidos. Quando descrevemos a disciplina de Cálculo 1 do Insper, afirmamos que é trabalhado de maneira intensa, principalmente na primeira metade das aulas, o desenvolvimento desse tipo de raciocínio. Assim, o nível inicial apresentado pelos alunos poderia não influenciar o seu desempenho. Em outras palavras, as primeiras aulas de Cálculo poderiam compensar totalmente eventuais dificuldades dos alunos em situações que envolvem a covariação. No entanto, os resultados indicam que bons níveis de raciocínio covariacional no princípio tendem a aumentar a chance de que um aluno apresente um bom desempenho já na metade da disciplina. Isso é coerente com o marco teórico com o qual trabalhamos, que sugere que o raciocínio covariacional seja desenvolvido ao longo de um período de tempo relativamente longo.

Em um contexto mais limitado às disciplinas de Cálculo em nível universitário, esses achados indicam a necessidade de uma revisão dos programas dos cursos de Pré-Cálculo que têm sido introduzidos em algumas universidades brasileiras. O escopo desses cursos não deve se limitar à preparação técnica dos alunos, mas incluir também atividades que promovam o desenvolvimento do raciocínio covariacional. O marco teórico utilizado e as próprias tarefas que compunham a avaliação de raciocínio covariacional aqui apresentada indicam um caminho para que esse trabalho seja realizado sem a introdução de um formalismo matemático que seria incompatível com um curso que antecede o Cálculo.

Pensando em um contexto mais amplo, porém, os resultados apresentados mostram um benefício adicional da valorização do raciocínio covariacional na escola básica. Somando-se ao aspecto principal já apontado neste trabalho, ligado à formação geral dos estudantes independentemente de prosseguirem ou não com seus estudos, poderíamos contribuir para a diminuição do degrau existente entre o ensino de matemática na escola básica e no nível superior.

Finalmente, vale a pena refletir um pouco mais sobre as diferenças encontradas entre os resultados dos diferentes grupos, especialmente os grupos B e C.

Quando se comparam os grupos A (alunos com desempenho acima da média nas duas avaliações iniciais) e D (alunos com desempenho abaixo da média nas duas avaliações iniciais), é razoável esperar uma diferença significativa no desempenho em Cálculo, não só em uma avaliação específica, mas no curso como um todo. O bom resultado dos estudantes do grupo A nas duas avaliações iniciais é um indício de que se trata dos alunos com mais facilidade em matemática e que, ao longo de sua vida escolar, apresentaram uma tendência de ter bons resultados em avaliações dessa disciplina.

Já nos grupos B e C, não se verifica, *a priori*, um grupo com mais desenvoltura para matemática no sentido descrito no parágrafo anterior, uma vez que cada um deles teve um resultado melhor em uma das duas avaliações iniciais. Por esse motivo, a comparação entre eles é muito rica, pois permite confrontar diferentes dimensões da bagagem matemática desses alunos.

Numericamente, a média das medidas de desempenho em Cálculo do grupo B (alunos com desempenho acima da média na avaliação de raciocínio covariacional) foi superior à do grupo C (alunos com desempenho acima da média na avaliação de técnicas algébricas) – 7,61 contra 6,99. Porém, essa diferença não se mostrou significativa do ponto de vista estatístico, uma vez que os dados do grupo C apresentaram uma variabilidade bem maior do que a dos demais grupos (também não houve diferença estatística entre os grupos C e D, com médias 6,99 e 5,96, respectivamente).

Apesar disso, a alta dispersão das medidas dentro do grupo C, que variaram de 2,8 a 10,0, permite levantar algumas suposições sobre os alunos desse grupo. Essa grande amplitude sugere que o domínio de técnicas algébricas sem um bom nível de raciocínio covariacional não é um bom preditor do desempenho de um aluno em Cálculo. Uma hipótese para explicar isso é a possibilidade de que o bom resultado nas técnicas algébricas de uma parte significativa desses alunos seja fruto da mecanização de procedimentos sem uma compreensão mais profunda dos processos envolvidos, ou seja, um indício de ausência de aprendizagem estrutural da matemática. Nestes casos, haveria uma dificuldade maior para o desenvolvimento do raciocínio covariacional e a internalização da noção de derivada, bastante cobrada na prova intermediária de Cálculo. Para outros alunos do grupo, a

dificuldade inicial com o raciocínio covariacional pode ser consequência de uma exposição muito pequena a este tipo de raciocínio durante a escola básica. Porém, ela é rapidamente superada ao longo dos dois primeiros meses do curso.

Por outro lado, as medidas de desempenho em Cálculo dentro do grupo B apresentam uma dispersão bem menor, variando de 6,0 a 9,8. Aparentemente, um bom nível de raciocínio covariacional, mesmo sem um domínio satisfatório de técnicas algébricas, é um preditor melhor do desempenho de um aluno em Cálculo do que o caso anterior. Uma hipótese para isso é a possibilidade de que o bom nível de raciocínio covariacional proporcione a esses alunos uma melhor compreensão das ideias fundamentais da disciplina. Essa criação de significado em torno do que é discutido nas aulas tende a motivar mais esses alunos para o aprendizado, facilitando o processo de superação das dificuldades ligadas ao emprego de técnicas algébricas.

Evidentemente, as hipóteses levantadas em relação às diferenças entre os alunos dos grupos B e C carecem de investigações mais profundas, que podem gerar futuros trabalhos. O essencial a ser destacado sobre os resultados do estudo é a indicação de que o nível de raciocínio covariacional no início das aulas possui um papel relevante no desempenho de alunos em disciplinas introdutórias de Cálculo, o que deve balizar as discussões sobre os problemas de ensino e aprendizagem dessa disciplina observados em tantas universidades brasileiras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação inicial para a realização deste trabalho foi a ausência do Cálculo Diferencial e Integral do programa do Ensino Médio brasileiro. O interesse para esse fato foi despertado durante a elaboração do currículo de um novo curso de Engenharia, quando estava sendo feita uma pesquisa sobre as disciplinas de matemática em cursos de graduação de diferentes países. Especificamente em relação ao Cálculo, a pesquisa revelou uma diferença importante entre o Brasil e os demais países estudados: apenas no nosso país a disciplina inicial de Cálculo em nível universitário representava o primeiro contato dos estudantes de Engenharia com a área da matemática criada por Newton e Leibniz.

Tal constatação pode ser analisada sob duas perspectivas. Tomando como referência o momento de conclusão do Ensino Médio, é possível, do ponto de vista temporal, olhar para frente ou para trás. Considerando esse quadro, a perspectiva mais comum, que se refere à continuação da vida escolar dos estudantes, debruça-se sobre as consequências da escolha brasileira para os cursos universitários que demandam de seus alunos conhecimentos da área de exatas. Os trabalhos de Bonomi (1999) e Rezende (2003), que têm como foco principal o ensino e a aprendizagem do Cálculo nas universidades, apresentam importantes reflexões nesse sentido.

Porém, quando olhamos para trás, estamos considerando um universo muito maior de alunos, uma vez que a maioria dos estudantes que conclui o Ensino Médio não ingressa na universidade, havendo ainda aqueles que escolhem cursos de áreas com pouca afinidade com a matemática. A perspectiva que engloba esses jovens diz respeito aos impactos que a ausência do Cálculo pode ter na sua formação, independentemente deles virem a estudar o assunto em nível universitário ou não. Trata-se de uma discussão pouco frequente em trabalhos de Educação Matemática no Brasil, talvez por haver certo conformismo em torno da noção de que “Cálculo não é assunto para a escola básica”. Por discordar frontalmente dessa afirmação, decidimos dedicar a maior parte da pesquisa à segunda perspectiva.

1. As ideias do Cálculo e o raciocínio covariacional na escola básica

A percepção do conformismo ao qual nos referimos anteriormente motivou a investigação das razões do desaparecimento do Cálculo das salas de aula do ensino secundário no Brasil. Afinal, além de constar do currículo oficial até cerca de 60 anos atrás, o Cálculo fazia parte do programa dos principais exames vestibulares brasileiros até meados da década de 1990.

A abordagem dada ao Cálculo na escola básica representou, sem dúvida, o principal motivo de sua gradual extinção. Apresentado em geral no último ano do Ensino Médio, tratava-se de uma mera antecipação do tratamento formal que era adotado nas universidades. Dessa forma, pouco ou nada agregava à formação geral dos estudantes, sendo visto apenas como um tópico a mais a ser desenvolvido dentro de um currículo já caracterizado por uma enorme fragmentação.

O excesso de formalismo na apresentação do Cálculo, incompatível com a escola básica, e o grande destaque dado às técnicas, em detrimento das ideias fundamentais que dão sustentação à disciplina, acabaram gerando a impressão de que se tratava de um assunto muito complexo, sendo mais indicado deixá-lo para o ensino superior. Não deixa de ser uma conclusão surpreendente, dada a simplicidade das duas principais ideias que caracterizam o Cálculo, traduzidas pelas noções de derivada e integral, como exposto detalhadamente ao longo deste trabalho.

Dessa forma, ao discutir a presença do Cálculo na escola básica, optamos por voltar a atenção para as suas origens, para os problemas que motivaram a sua criação e para as grandes ideias que daí emergiram. É nesse núcleo que se concentram as contribuições que o Cálculo pode trazer ao currículo de Matemática.

Outro elemento fundamental para a argumentação construída ao longo do trabalho é a questão da fragmentação curricular. Quando se analisam os problemas vivenciados pela educação básica no Brasil, a despeito da divergência de posicionamentos em vários aspectos, ela parece representar um importante ponto de convergência, sendo vista como um dos principais fatores que geram desinteresse dos jovens pela escola.

Especialmente no Ensino Médio, o currículo é composto de uma quantidade excessiva de disciplinas, pouco articuladas entre si. O programa de cada uma delas acaba se

voltando para suas próprias questões, valorizando especificidades técnicas e dando pouco destaque às ideias fundamentais daquela área, que poderiam favorecer uma integração com os demais campos de conhecimento. E, mesmo dentro de uma mesma disciplina, existem poucas conexões entre os diferentes assuntos, que são apresentados como pontos isolados de uma extensa lista de tópicos.

Desde a década de 1990, é possível identificar, em diversos documentos oficiais e iniciativas promovidas pelo governo brasileiro na área de educação, ações visando reduzir a fragmentação curricular, reforçando que se trata de uma preocupação quase geral entre os educadores do país.

Um exemplo dessa preocupação é encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN), lançados em 1999. Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002), encontra-se uma descrição muito precisa da fragmentação que caracterizava o Ensino Médio na época.

(...) o ensino médio tem se caracterizado por uma ênfase na estrita divisão disciplinar do aprendizado. Seus objetivos educacionais se expressavam e, usualmente, ainda se expressam em termos de listas de tópicos que a escola média deveria tratar, a partir da premissa de que o domínio de cada disciplina era requisito necessário e suficiente para o prosseguimento dos estudos. Dessa forma, parecia aceitável que só em etapa superior tais conhecimentos disciplinares adquirissem, de fato, amplitude cultural ou sentido prático. Por isso, essa natureza estritamente propedêutica não era contestada ou questionada, mas hoje é inaceitável. (p. 8)

Como forma de organizar e interligar as disciplinas, sem que isso representasse sua diluição ou eliminação, os parâmetros propuseram a estruturação do Ensino Médio em torno de três grandes áreas – Linguagens e Códigos; Ciências da Natureza e Matemática; Ciências Humanas. Além disso, o documento valorizou intensamente a ideia de interdisciplinaridade, que perpassa praticamente todo o texto.

Quase na mesma época do lançamento do PCN, em 1998, ocorreu a primeira edição do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A proposta do exame representou, em certo sentido, um contraponto aos tradicionais exames vestibulares, que eram construídos a partir de extensas listas de conteúdos para cada disciplina, praticamente sem qualquer integração entre si. Diferentemente desse modelo, o ENEM foi estruturado em torno de uma matriz que indicava associações entre os conteúdos tradicionais e as competências e habilidades

esperadas do jovem quando da conclusão de sua escolaridade básica. As cinco competências gerais e as 21 habilidades que delas decorriam procuravam avaliar a capacidade dos estudantes de mobilizar aqueles conteúdos no enfrentamento de problemas ligados ao mundo real, chamados de “situações-problema”.

Dessa forma, é possível identificar no exame uma concepção bem diferente dos vestibulares da época em relação ao papel dos conteúdos disciplinares na formação dos alunos: eles eram vistos como um meio para que fossem desenvolvidas competências maiores, e não um fim em si mesmos. E, como descrevemos anteriormente, tal concepção estava totalmente alinhada com o espírito do PCN.

Apenas como esclarecimento, vale pontuar que, em 2009, o ENEM sofreu uma grande modificação, definindo sua atual estrutura. Sua principal finalidade, que era avaliar os egressos do Ensino Médio em relação a competências gerais, passou a ser a seleção de alunos para o ensino superior. Com isso, as provas elaboradas a partir desse ano caminharam um pouco na direção dos exames vestibulares. Ainda assim, é possível identificar, no novo modelo, uma preocupação com a questão da excessiva fragmentação disciplinar, uma vez que o exame foi organizado em torno de quatro grandes áreas (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas), e não em torno de várias disciplinas como se fazia tradicionalmente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Exame Nacional do Ensino Médio tiveram efeitos relevantes sobre a educação brasileira. É possível identificar sua influência na evolução dos livros didáticos desde a década de 1990 até hoje, por exemplo. Também os exames vestibulares, mesmo os mais tradicionais, apresentaram sinais de mudança no mesmo período, aproximando-se um pouco da original proposta do ENEM. Mesmo assim, ainda estamos muito longe de ter resolvido o problema da fragmentação curricular, principalmente no Ensino Médio. Uma evidência desse fato pode ser vista no Plano Nacional de Educação (PNE), aprovado em 2014, com vigência para os 10 anos seguintes. A primeira estratégia da meta 3, relacionada ao Ensino Médio, refere-se a (PNE, 2014):

institucionalizar programa nacional de renovação do ensino médio, a fim de incentivar práticas pedagógicas com abordagens interdisciplinares estruturadas pela relação entre teoria e prática, por meio de currículos escolares que organizem, de maneira flexível e diversificada, conteúdos obrigatórios e eletivos articulados

em dimensões como ciência, trabalho, linguagens, tecnologia, cultura e esporte (...). (Estratégia 3.1)

O estabelecimento de um programa de renovação do ensino secundário com o objetivo de incentivar abordagens interdisciplinares mostra que o PCN e o ENEM não foram suficientes para romper, no nível das práticas pedagógicas do dia-a-dia, com o isolamento disciplinar há décadas enraizado nesse segmento. Vale destacar que tal programa originou a proposta do Novo Ensino Médio, estabelecida por meio de uma Medida Provisória publicada em 2016.

Diante do momento vivido pela educação brasileira, em que é cada vez mais urgente fazer com que os conhecimentos disciplinares alcancem amplitude cultural ou sentido prático, é imprescindível repensar os conteúdos tradicionalmente estudados na escola básica e suas abordagens. Considerando as demandas aqui descritas, que há décadas vêm se tentando atingir, devem ser enfatizados temas que propiciem uma maior integração entre as diferentes áreas do conhecimento e promovam o desenvolvimento das competências ligadas às finalidades mais gerais da educação básica.

Nesse sentido, voltamos a falar do Cálculo, ressaltando agora o seu caráter integrador, que pode se revelar na interação com outras disciplinas como a Física e a Química ou dentro do próprio programa de Matemática. Ao longo deste trabalho, destacamos o papel histórico do Cálculo na construção do pensamento científico, quando ele se tornou uma linguagem praticamente universal dentro das ciências exatas. Também mostramos como suas raízes estão ligadas a diversas ideias fundamentais da matemática, como aproximação, variação e medida, que permeiam quase todo o currículo da escola básica.

Levando em conta tais características do Cálculo e o esforço que tem sido realizado para fortalecer abordagens interdisciplinares, é muito difícil justificar a forma como são trabalhados determinados assuntos de Física e Matemática na nossa escola. Na 1ª série do Ensino Médio, por exemplo, a cinemática é vista em Física praticamente na mesma época em que se estudam as funções, em Matemática. O conceito de velocidade instantânea, central na cinemática, teria tudo para desencadear uma discussão nas duas disciplinas, girando em torno da noção de taxa de variação. Essa discussão pode levar a uma construção mais significativa das funções polinomiais de 1º e 2º graus, como expusemos no Capítulo 2.

No entanto, a apresentação da cinemática pelos professores de Física faz verdadeiros malabarismos para evitar a ideia de derivada, enquanto que os professores de Matemática deixam a taxa de variação em segundo plano, focando nas leis algébricas $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$. As duas disciplinas optam por caminhos separados, quando, do ponto de vista epistemológico, tudo convergiria para uma integração.

O exemplo acima, que não representa um caso único, é uma evidência de como a construção do programa atual se deu de maneira isolada nas várias disciplinas, focando-se em questões específicas de cada área. É esse fato que tem levado as novas propostas curriculares a buscarem uma articulação dos conteúdos em dimensões que possam aumentar o interesse dos jovens pela escola, como ciência, trabalho, linguagens, tecnologia, cultura e esporte. Tal articulação reforça a visão dos conteúdos da escola básica como elementos que devem estar a serviço do desenvolvimento de competências gerais. E, mais uma vez, as noções do Cálculo podem contribuir com a consecução desse objetivo.

Nas reflexões que têm sido realizadas no contexto educacional brasileiro desde a década de 1990, o desenvolvimento da capacidade dos jovens de compreender fenômenos das mais variadas naturezas tem sido apontado como uma das principais funções do Ensino Médio. Essa tendência aparece na Lei de Diretrizes e Bases (1996), no Exame Nacional do Ensino Médio (1998), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999), nas Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (2012), no Plano Nacional de Educação (2014) e na proposta do Novo Ensino Médio (2016).

Considerando especificamente uma das quatro finalidades do Ensino Médio estabelecidas pela LDB/96, “a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos”, parece-nos um contrassenso abrir mão do Cálculo, que representa, desde o século XVII, a principal ferramenta utilizada pela ciência para descrever fenômenos físicos. Para citar somente a questão da geração de energia, tão importante em qualquer processo produtivo, a compreensão do fenômeno de indução eletromagnética, o estudo do decaimento radioativo ou a descrição do movimento de uma turbina correspondem a situações nas quais é fundamental o entendimento dos diferentes padrões de variação que uma grandeza pode ter. E falar em “como as coisas variam” significa chegar ao cerne do Cálculo Diferencial.

Quando apontamos o caráter integrador que as ideias do Cálculo podem ter em um currículo que valorize a compreensão de fenômenos ligados à ciência e à tecnologia, não podemos deixar de mencionar o ensino de matemática sob a perspectiva da modelagem. Como já se viu neste trabalho, no contexto educacional, a modelagem refere-se às situações de aprendizagem mediadas por problemas originados fora da Matemática. Trata-se de uma área que tem crescido muito dentro da Educação Matemática, justamente pelo seu potencial de aproximar os currículos das finalidades mais gerais da escola básica.

De forma resumida, a primeira etapa de uma atividade de modelagem consiste em identificar variáveis e relações entre essas variáveis, permitindo caracterizar o sistema que se deseja estudar. A partir dessa identificação, são selecionadas as ferramentas matemáticas com as quais se constrói uma representação do sistema, chamada de modelo. Resolvendo o modelo, pode-se explicar o comportamento daquele sistema e até mesmo fazer previsões sobre ele. Finalmente, os resultados obtidos são confrontados com os dados reais coletados do sistema, possibilitando a validação do modelo.

Quando se confronta o ciclo de uma atividade de modelagem descrito no parágrafo anterior com o programa do Ensino Médio brasileiro, mais uma vez se percebe como um trabalho mais consistente com as noções do Cálculo poderia agregar valor a esse programa, especialmente na representação matemática das relações entre as variáveis de um sistema. Vale ainda ressaltar a importância da Estatística na etapa de validação do modelo, outra área que, assim como o Cálculo, mereceria um espaço bem maior no dia-a-dia das escolas brasileiras.

A reflexão feita até aqui nas considerações finais, motivada pela ausência do Cálculo no programa do Ensino Médio brasileiro, converge, sob diferentes aspectos, para o reconhecimento da urgência em valorizar as ideias fundamentais dessa área no currículo da nossa escola básica. No entanto, ainda não discutimos uma forma mais sistematizada de fazer isso, que não seja, obviamente, por meio da inclusão de um tópico isolado voltado ao estudo do Cálculo, como era praticado há algumas décadas na escola brasileira. E, no nosso entender, aí reside a maior contribuição da pesquisa aqui apresentada. Estamos nos referindo à utilização do raciocínio covariacional como fio condutor para o trabalho das ideias do Cálculo ao longo da escola básica.

O raciocínio covariacional pode ser entendido como o conjunto das atividades cognitivas envolvidas na análise coordenada de duas variáveis interdependentes, considerando o modo como uma se modifica em relação à outra. Ele começou a ser estudado no contexto do ensino superior: um dos primeiros trabalhos a respeito (Carlson et al., 2002) apresentava o desempenho de um grupo de alunos de alto rendimento, que já havia cursado a disciplina de Cálculo na universidade, em tarefas que exigiam a utilização do raciocínio covariacional em contextos dinâmicos.

Apesar do interesse pelo raciocínio covariacional ter se originado no ensino superior, o percurso trilhado em nossa pesquisa foi indicando cada vez mais claramente a importância de desenvolver as habilidades ligadas aos processos de covariação independentemente do aluno vir a estudar o Cálculo de maneira mais formal, em um curso de nível universitário. De fato, o raciocínio covariacional constitui-se em uma forma de pensar diretamente relacionada a diversas ideias fundamentais da matemática, as quais se encontram espalhadas por todo o currículo da escola básica. E, como tal, deve ser desenvolvido ao longo da escolaridade do aluno, durante o estudo de diferentes conteúdos.

Assim, ao longo do trabalho, fomos construindo o argumento de que as ideias do Cálculo Diferencial e Integral precisam ser enfatizadas na escola básica e que o raciocínio covariacional representa um caminho para que isso seja feito de maneira consistente, desde as séries iniciais, dentro dos próprios conteúdos já tradicionalmente trabalhados. Entendemos que a educação brasileira vive um momento extremamente propício para a discussão dessa questão, uma vez que a comunidade escolar, de maneira geral, está sensibilizada para a necessidade de renovar práticas pedagógicas cotidianas de modo que a escola básica possa atingir suas finalidades mais gerais. Por esse motivo, decidimos incluir, nestas considerações finais, uma breve análise da presença do raciocínio covariacional na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ainda que ela não tenha chegado à sua versão final. Trazer o raciocínio covariacional para essa discussão pode acrescentar elementos importantes para o processo de transposição da BNCC para as salas de aula, o que inclui, além da interpretação da própria base, a produção de material didático e a formação de professores.

Podemos ilustrar a forte ligação do raciocínio covariacional com as ideias que dão sustentação ao pensamento matemático a partir do trecho que introduz a área de Matemática na BNCC (BRASIL, 2017), na sua versão para o Ensino Fundamental:

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. (p. 224)

Em nosso trabalho, ao descrever as ações mentais que caracterizam o raciocínio covariacional, construímos diversas pontes entre essa forma de pensar e as ideias enunciadas na BNCC. As ideias de **variação** e **interdependência** já aparecem na sua própria definição, constituindo a base do raciocínio covariacional. A **proporcionalidade** representa a porta de entrada para os processos de covariação, estabelecendo o modelo de variação a taxas constantes. E a **aproximação** é fundamental para a passagem da taxa de variação média para a instantânea, chegando aos níveis mais sofisticados de raciocínio covariacional.

A forma como tais ideias são trabalhadas em atividades que exploram o raciocínio covariacional é complementar a outras formas de pensar da matemática, como os pensamentos algébrico, geométrico e probabilístico, reforçando sua importância para a formação matemática dos estudantes.

Retomando o trecho da BNCC, as ideias fundamentais, além de promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, devem nortear a escolha dos objetos de conhecimento a serem estudados. No documento, isso é explicitado por meio de matrizes que, em cada série e para cada unidade temática, estabelecem os objetos de conhecimento e as habilidades a eles relacionadas.

Pode-se perceber, em alguns pontos das matrizes, situações com grande potencial para o desenvolvimento do raciocínio covariacional. Muitas dessas situações representam inovações em relação ao programa tradicional do Ensino Fundamental. A maior delas talvez seja o fato de que o estudo das grandezas proporcionais foi bastante ampliado, sendo abordado em todas as séries a partir do 5º ano, com retomadas e aprofundamentos em cada ano. Essa modificação é coerente, uma vez que proporcionalidade foi considerada uma das

ideias fundamentais nos diferentes campos que compõem a Matemática, e contrasta com o modelo tradicional, em que o tema é abordado quase que inteiramente no 7º ano.

Vamos analisar dois exemplos específicos. O primeiro deles refere-se a uma habilidade do 6º ano relacionada ao campo Grandezas e Medidas, que estabelece (BRASIL, 2017): “Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.”

Trata-se de uma situação em que o aluno deve coordenar variações em duas grandezas simultaneamente (medida do lado e perímetro ou medida do lado e área), para que possa identificar padrões relativos a essas mudanças. Uma questão importante a ser destacada sobre essa habilidade é o fato de ela aparecer antes do tratamento algébrico da proporcionalidade, programado para o 7º ano. Isso permite que, nessa introdução ao assunto, o processo de covariação não seja eclipsado por procedimentos mecânicos como a regra de três.

Outra habilidade que merece ser citada, referente ao 9º ano, é (BRASIL, 2017): “Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.”

Neste caso, chama atenção o termo **taxa de variação**, central no raciocínio covariacional, e que não era abordado no Ensino Fundamental. Mesmo nos livros do Ensino Médio, a taxa de variação não costuma receber muito destaque, sendo tratada como um apêndice do estudo da função polinomial do 1º grau.

Em relação à nossa asserção de que o raciocínio covariacional deve ser desenvolvido ao longo da escolaridade do aluno como parte da formação de seu pensamento matemático, é possível, diante do exposto, identificar avanços na BNCC do Ensino Fundamental comparando-se ao programa atual. No entanto, há uma importante ressalva a ser feita: o texto da BNCC não faz referência explícita ao desenvolvimento do raciocínio covariacional, ao contrário de outras formas de pensar típicas da matemática, como os pensamentos numérico, algébrico e geométrico. Em nosso trabalho, mostramos que, mesmo se apoiando em habilidades algébricas, o raciocínio covariacional possui elementos próprios que o

diferenciam do pensamento algébrico. Ao não fazer tal explicitação, corre-se o risco de que, nos materiais didáticos e nas salas de aula, predomine uma abordagem puramente algébrica, como já descrevemos anteriormente para o estudo das funções.

Além disso, há que se observar como será conduzida a continuidade do trabalho com o raciocínio covariacional na BNCC do Ensino Médio, cuja versão final ainda não foi divulgada pelo Ministério da Educação. É nesse segmento que se dá a maior parte do estudo das funções, quando se tem uma grande oportunidade de trabalhar com os processos de covariação.

Há ainda uma questão importante a ser destacada sobre a BNCC e o Ensino Médio. A Base, ao indicar as aprendizagens essenciais para cada uma das quatro áreas em que está organizada, define apenas cerca de 60% do conteúdo escolar. Assim, a proposta do Novo Ensino Médio prevê que “o restante do tempo será dedicado ao aprofundamento acadêmico nas áreas eletivas ou a cursos técnicos” (BRASIL, 2016b). Dessa forma, muitos podem ter o receio de que, com a nova configuração curricular, os conteúdos matemáticos obrigatórios sejam reduzidos a 60% do que é praticado hoje, inviabilizando que as ideias do Cálculo possam ser trabalhadas.

Nesse sentido, reforçamos nossa argumentação de que a formação na escola básica deve estar focada nas ideias fundamentais da matemática. Há, no programa atual, um nível excessivo de detalhamento técnico que não é condizente com esse nível de escolaridade. Por isso, uma eventual redução nos conteúdos obrigatórios torna ainda mais necessária uma profunda revisão do que é praticado em nossas salas de aula. E, conforme já apontamos várias vezes em nossa pesquisa, as noções do Cálculo, norteadas pelo modelo do raciocínio covariacional, podem contribuir muito para a construção de um programa que coloque em evidência essas ideias fundamentais.

2. O raciocínio covariacional e a disciplina de Cálculo na universidade

Conforme explicamos no início das considerações finais, a análise que fizemos até aqui sobre a ausência do Cálculo na escola básica brasileira refere-se à formação dos alunos que concluem o Ensino Médio. Porém, a curiosidade como pesquisador, aliada à nossa experiência como docente de Cálculo em cursos universitários, motivou-nos a estender um

pouco o trabalho, dedicando um olhar a um grupo mais específico de estudantes: aqueles que decidem continuar os estudos em nível superior, escolhendo carreiras nas quais o Cálculo faz parte do currículo obrigatório.

É fundamental sublinhar que essa é uma questão bem diferente daquela discutida até aqui, até para que não se caia na tentação de defender a inclusão do Cálculo no Ensino Médio como forma de melhorar o desempenho dos alunos no ensino superior. O fortalecimento das ideias do Cálculo no currículo da escola básica por meio do desenvolvimento do raciocínio covariacional é importante para a formação do pensamento matemático dos alunos, independentemente de suas escolhas quando da conclusão do Ensino Médio.

Apesar disso, é impossível ignorar a influência do raciocínio covariacional na aprendizagem de Cálculo em qualquer nível de escolaridade. Por isso, vimos a oportunidade de avaliar o desempenho de um grupo de alunos em uma disciplina introdutória de Cálculo na universidade, comparando-o com o nível de raciocínio covariacional apresentado por eles ao ingressarem na faculdade. Tal investigação, apoiada nos estudos teóricos que fizemos sobre o raciocínio covariacional, poderia trazer alguns elementos importantes para a questão do baixo rendimento dos alunos universitários brasileiros em disciplinas de Cálculo, assunto que tem sido estudado por diferentes pesquisadores no Brasil.

A enorme dispersão nos resultados da avaliação de raciocínio covariacional em um grupo de alunos que enfrentou um processo seletivo bastante concorrido para ingressar na universidade foi o primeiro fato que nos chamou atenção. Por um lado, ela revela ser possível que alunos, ao final do Ensino Médio, resolvam tarefas envolvendo níveis mais sofisticados de raciocínio covariacional. Por outro, mostra como o programa praticado pelas nossas escolas básicas não apresenta consistência em relação ao desenvolvimento dessa forma de raciocinar.

O resultado mais relevante para o ensino de Cálculo no contexto universitário, porém, diz respeito à influência do nível inicial de raciocínio covariacional dos alunos no seu desempenho na disciplina. É comum associar-se a dificuldade dos estudantes em Cálculo à falta de base que eles trariam desde a escolarização básica, entendida muito mais como um domínio de conhecimento técnico abaixo do esperado. Nesse conhecimento técnico, podemos incluir a familiaridade com o cálculo algébrico e com aspectos operacionais dos

números reais e das funções polinomiais de 1º e 2º graus, exponencial, logarítmica e trigonométrica.

Nossa pesquisa apontou que, de fato, o conhecimento técnico é uma dimensão que influencia o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo. Entretanto, o nível de raciocínio covariacional mostrou-se um fator tão ou mais importante do que o conhecimento técnico, sendo essas duas dimensões independentes entre si.

O resultado descrito sugere que o raciocínio covariacional é um dos elementos que devem ser considerados nas discussões sobre a disciplina de Cálculo em cursos universitários. Nesse sentido, um aspecto mais específico refere-se à preparação dos alunos para uma disciplina de Cálculo com enfoque mais formal, característico do ensino superior, o que pode impactar sobre os cursos de Pré-Cálculo e a própria construção dos currículos. Outro aspecto, mais geral, está ligado a repensar os objetivos e a organização das disciplinas de Cálculo, que se concentram exageradamente no ensino de técnicas e na formalização matemática dos conceitos, deixando as grandes ideias do Cálculo em segundo plano, o que dificulta a criação de significado por parte dos estudantes.

3. Perspectivas futuras

Como dito anteriormente, a educação brasileira vive um momento singular, repleto de desafios e oportunidades. Há mais de 20 anos, as novas demandas da sociedade em relação à escola estão postas, mas a tarefa de transformar velhos hábitos é mais difícil do que parece. A questão da fragmentação curricular é emblemática nesse sentido.

A pesquisa realizada procurou mostrar as contribuições que as ideias do Cálculo, estruturadas pelo modelo oferecido pelo raciocínio covariacional, podem trazer ao currículo nesse momento de mudança. E, ao apontar algumas direções, abriu diversas portas para que o assunto continue sendo investigado.

Uma das mais importantes, sem dúvida, é o aprofundamento do modelo teórico usado para descrever o raciocínio covariacional, especialmente considerando a realidade da escola básica. Traçando um paralelo, sabemos quanta pesquisa tem sido feita para caracterizar o pensamento algébrico, o que permitiu criar programas consistentes para o

desenvolvimento dessa forma de raciocinar desde as séries iniciais. Um caminho semelhante poderia ser trilhado pelas pesquisas sobre o raciocínio covariacional.

Neste trabalho, mostramos algumas oportunidades de usar o Cálculo como forma de integrar diferentes conteúdos do programa e aproximá-los das finalidades mais gerais da educação básica. Mas as possibilidades são muito maiores. Um exemplo disso é a ideia de aproximação de uma função por polinômios, o que é formalizado, no Cálculo, pelo polinômio de Taylor. Agregar essa ideia ao estudo dos polinômios no Ensino Médio traria muito mais significado a esse tema.

Outro tema que mereceria vários trabalhos a respeito é a aplicação das ideias do Cálculo em atividades envolvendo Modelagem Matemática. Já dissemos aqui que o Cálculo se tornou a principal linguagem do pensamento científico, aumentando muito as oportunidades de criar atividades e projetos que integrem diferentes campos de conhecimento por meio da modelagem.

O aprofundamento da pesquisa sobre o ensino de Cálculo no Brasil em nível universitário, à luz do modelo teórico do raciocínio covariacional, também se mostra bastante promissor.

Terminamos aqui as reflexões finais com a certeza de que o Cálculo, essa fascinante invenção da humanidade, tem uma parcela de contribuição a oferecer para o enfrentamento dos desafios que vivemos hoje na escola brasileira. Contribuição essa vista sob a perspectiva da formação de cidadãos comuns, e não de especialistas da área de exatas. E, como não poderia deixar de ser, essa certeza vem acompanhada de muitas novas questões a serem respondidas, pontos de partida para as próximas jornadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2013.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GÓMEZ, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México: Iberoamérica, 1995.
- ASSIS, A. R.; SILVA, B. C.; BAIRRAL, M. A. Toques em telas de *tablets* e domínios de aprendizagem em geometria. *Educação Matemática em Revista*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 51, p. 6-14, 2016.
- ÁVILA, G. O Ensino de Cálculo no 2º Grau. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 18, p. 1-9, 1991.
- _____. Limites e derivadas no ensino médio? *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 60, p. 30-38, 2006.
- AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. *Funciones y Gráficas*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1996.
- BARON, M. E. E.; BOS, H. J. M. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo*. Brasília: Universidade de Brasília, volume 3, 1985.
- BASSANEZI, R. C. *Modelagem matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BELTRÃO, M. E. P. *Ensino de Cálculo pela modelagem matemática e aplicações: teoria e prática*. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2009.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.
- BONOMI, M. C. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BOYER, C. B. *A history of mathematics*. Revised by U. C. Merzbach. New York: John Wiley & Sons, 2nd edition, 1991.

- BRASIL. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias)*. Brasília: Ministério da Educação, 2002.
- _____. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação / Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Básica, 2012.
- _____. *Guia digital de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático*. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica / Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2016a. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/>>. Acesso em 10.02.2017.
- _____. *Novo Ensino Médio – Dúvidas*. Brasília: Ministério da Educação, 2016b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361#nem_02>. Acesso em 10.06.2017.
- _____. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em 05.06.2017.
- BRITO, G. S.; PURIFICAÇÃO, I. *Educação e novas tecnologias: um re-pensar*. Curitiba: IBPEX, 2006.
- BRUNER, J. S. *O processo da educação*. Tradução: Lólio Oliveira. São Paulo: Nacional, 3ª edição, 1973.
- BUSSE, R. S.; SOARES, F. S. O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio. *IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*. Belo Horizonte, 2007.
- CAMPOS, D. F. *Análise de uma proposta para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I surgida na UFMG após o REUNI usando o testbench de Engeström como modelo de aplicação da teoria da atividade em um estudo de caso*. Tese de Doutorado. Belo Horizonte: UFMG, 2012.
- CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984.
- CARLSON, M.; JACOBS, S.; COE, E.; LARSEN, S.; HSU, E. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 33, n. 5, p. 352-378, 2002.
- CARLSON, M.; OEHRTMAN, M.; ENGELKE, N. The precalculus concept assessment: a tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*. Vol. 28, n. 2, p. 113-145, 2010.
- CARVALHO, J. P. O cálculo na escola secundária – algumas considerações históricas. *Caderno CEDES*. Campinas: Papirus, nº 40, p. 62-81, 1996.

- CCSSO; NGA (Council of Chief State School Officers e National Governors Association Center for Best Practices). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC, 2010.
- CERQUEIRA, D. S. *Um estudo comparativo entre Brasil e Chile sobre Educação Matemática e sua influência nos currículos de Matemática desses países*. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2012.
- COSTA, J. C. O. *O currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a diversidade de percursos formativos*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2011.
- COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; NICHOLS, D.; SCHWINGENDORF, K.; THOMAS, K.; VIDA KOVIC, D. Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 15, p. 167-192, 1996.
- CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*. Rio Claro (SP): vol. 24, n. 38, p. 97-126, 2011.
- D'AMBROSIO, U. *Cálculo e introdução à Análise*. São Paulo: Nacional, 1975.
- DANCEY, C. P.; REIDY, J. *Statistics without Maths for Psychology*. London: Pearson, 6th edition, 2014.
- DEVLIN, K. *Mathematics: the science of patterns*. New York: Scientific American Library, 1994.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 3^a edição, 2012.
- JACOBS, V. R.; FRANKE, M. L.; CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; BATTEY, D. Professional development focused in children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 38, n. 3, p. 258-288, 2007.
- KLEINER, I. *Excursions in the History of Mathematics*. New York: Birkhäuser, 2012.
- LDBEN 9394/96. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em 05.06.2017.
- LIMA, G. L. Abordagem contextualizada e compreensão relacional: em busca de uma identidade para o curso inicial de Cálculo. *Anais da XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)*. Tuxtla-Gutierrez, México, 2015.
- LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Caderno CEDES*. Campinas: Papirus, Vol. 28, nº 74, p. 57-73, 2008.
- MACHADO, N. J. *Educação: autoridade, competência e qualidade*. São Paulo: Escrituras, 2016.

- MACHADO, N. J.; D'AMBROSIO, U.; ARANTES, V. A. (org.). *Ensino de matemática: pontos e contrapontos*. São Paulo: Summus, 2014.
- MEADOWS, D. H. *Thinking in systems: a primer*. Vermont: Chelsea Green Publishing, 2008.
- MOLES, A. *A criação científica*. São Paulo: Perspectiva, 1981.
- MOREIRA, I. C. As equações de Maxwell fazem 150 anos: descoberta ou construção? *Anais Eletrônicos do 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*. Belo Horizonte, 2014.
- MORRISON, F. *The art of modeling dynamic systems*. New York: Dover, 2008.
- OEHRTMAN, M.; CARLSON, M.; THOMPSON, P. W. Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In: CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.). *Making the connection – research and teaching in undergraduate Mathematics Education*. Washington: Mathematical Association of America, 2008.
- ORFALI, F.; PONTE, T. A. P. Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso. *Anais da XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)*. Tuxtla-Gutierrez, México, 2015.
- O SISTEMA educativo em Portugal 2006/2007. Disponível em:
<<http://www3.uma.pt/nunosilvafraga/wp-content/uploads/2007/07/eurydice-o-sistema-educativo-em-portugal-2006-2007.pdf>>. Acesso em 27.12.2016.
- PNE 2014. *Plano Nacional de Educação – Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014*. Disponível em:
<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm>. Acesso em 05.06.2017.
- PONTE, J. P.; FONSECA, H. Orientações curriculares para o ensino da estatística: análise comparativa de três países. *Quadrante*. Vol. 10, nº 1, p. 93-115, 2001.
- RAMADAN, E.; YARATAN, H. S. Impact of use of technology in mathematics lessons on student achievement and attitudes. *Social Behavior and Personality*. Vol. 42, Supplement 1 to issue 1, p. 31S-42S, 2014.
- RASMUSSEN, C. New directions in differential equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 20, p. 55-87, 2001.
- RÊGO, R. M. *Uma abordagem alternativa de ensino de Cálculo utilizando infinitésimos*. Tese de Doutorado. Natal: UFRN, 2000.
- REIS, F. da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese de Doutorado. Campinas: UNICAMP, 2001.

- REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.
- RIBEIRO, M.; AMARAL, R. B. Guia e tecnologia dos/nos livros didáticos de matemática: uma primeira discussão. *Educação Matemática em Revista*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 51, p. 64-75, 2016.
- RICHLAND, L. E.; STIGLER, J. W.; HOLYOAK, K. J. Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*. Vol. 47, n. 3, p. 189-203, 2012.
- ROSA, M.; MUSSATO, S. Atividade matemática com tecnologias digitais e contextos culturais: investigando o *design* como processo de cyberformação com professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. Vol. 8, nº 4, p. 23-42, 2015.
- RUÍZ-HIDALGO, J. F.; FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A. Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. In: RICO, L.; CAÑADAS, M. C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática – Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Editorial Comares, 2013.
- SALDANHA, L. A.; THOMPSON, P. W. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. In: BERENSEN, S. B.; DAWKINS, K. R.; BLANTON, M.; COULOMBE, W. N.; KOLB, J.; NORWOOD, K.; STIFF, L. (Eds.). *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, p. 298-303. Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 1998.
- SANTOS, V. M. O infinito: concepções e consequências pedagógicas. *Nuances*. Presidente Prudente: vol. 3, 1996.
- SHAUGHNESSY, J.M. Research on statistics learning and reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 957-1010. Charlotte: NCTM, Information Age, 2007.
- SILVA FILHO, R. L. L.; MOTEJUNAS, P. R.; HIPÓLITO, O.; LOBO, M. B. C. M. A Evasão no Ensino Superior Brasileiro. *Cadernos de Pesquisa*. v. 37, nº 132, p. 641-659, Set/Dez. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2007.
- SILVA, J. C. (coord); FONSECA, M. G.; MARTINS, A. A.; FONSECA, C. M. C.; LOPES, I. M. C. *Programa de Matemática B – 10º ano*. Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. Portugal: 2001. Disponível em: <http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_de_Artes_Visuais/matematica_b_10_novo.pdf>. Acesso em 08.01.2017.
- SOFRONAS, K. S.; DeFRANCO, T. C.; VINSONHALER, C.; GORGIEVSKI, N.; SCHROEDER, L.; HAMELIN, C. What does it mean for a student to understand the first-year calculus?

- Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 30, p. 131-148, 2011.
- STEPHENS, M.; RIBEIRO, A. Working toward algebra: the importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 15, n. 3, 2012.
- THOMPSON, P. W. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 26, p. 229-274, 1994.
- THOMPSON, P. W.; SILVERMAN, J. The concept of accumulation in Calculus. In: CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.). *Making the connection – research and teaching in undergraduate Mathematics Education*. Washington: Mathematical Association of America, 2008.
- TRGALOVÁ, J.; JAHN, A. P. Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM Mathematics Education*. Vol. 45, n. 7, p. 973-986, 2013.
- TRIGUEROS, M.; JACOBS, S. On developing a rich conception of variable. In: CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.). *Making the connection – research and teaching in undergraduate Mathematics Education*. Washington: Mathematical Association of America, 2008.
- VILLA-OCHOA, J. A. Raciocínio “covariacional”: o caso da função quadrática. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)*. Recife, Brasil, 2011.
- WHITE, P.; MITCHELMORE, M. Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, n. 1, p. 79-95, 1996.
- WIGGINS, G.; McTIGHE, J. *Understanding by design*. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development, 2nd edition, 2005.
- ZANDIEH, M. A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In: DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A.; KAPUT, E. (Eds.). *Research in collegiate mathematics education, IV*. Vol. 8, p. 103-127. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.
- ZIEFFLER, A. S.; GARFIELD, J. B. Modeling the growth of students’ covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*. Vol. 8, n. 1, p. 7-31, 2009.

ANEXO A – Informações do programa de ensino da disciplina de Cálculo 1 do Insper

Curso: ADMINISTRAÇÃO E CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Disciplina: CÁLCULO 1

Carga Horária: 80 horas (correspondem a aulas e atividades extraclasse)

OBJETIVO

Apresentar aos alunos o Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável, focando dois aspectos principais: a construção dos conceitos de limites, derivadas e integrais, desenvolvendo interpretações algébricas e geométricas em torno desses conceitos, e o domínio das principais técnicas utilizadas nos cálculos de limites, derivadas e integrais.

Espera-se que, ao final do curso, os alunos tenham evoluído nos processos de modelagem e resolução de problemas, sendo capazes de aplicar os conceitos e as técnicas desenvolvidos ao longo da disciplina.

EMENTA

Caracterização das principais funções de uma variável real (polinomial, de potência real, exponencial, logarítmica e trigonométrica). Estudo dos principais limites relacionados a essas funções. Análise do conceito de derivadas e estudo das técnicas de otimização de funções de uma variável. Definição das integrais definida e indefinida.

ANEXO B – Questões da prova intermediária da disciplina de Cálculo 1 do Insper – 2º semestre de 2015

Questão 1 (3,0 pontos) – Considere uma função f definida no domínio $\{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$, contínua e derivável em todos os pontos de seu domínio. Na tabela abaixo estão algumas informações da função f e de suas derivadas. Os símbolos $+/-$ indicam que a referida função é, respectivamente, positiva/negativa no intervalo considerado.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 4,5$	$x = 4,5$	$4,5 < x < 5$
$f(x)$		0		-2		-3		0	
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+	+	+

Além disso, a função apresenta os limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 5$$

(1,0) a) Identifique e classifique todos os pontos críticos da função f , justificando sua resposta brevemente.

(0,5) b) Identifique todos os pontos de inflexão da função f e analise a concavidade dessa função em todos os pontos do seu domínio.

(1,5) c) Esboce o gráfico da função f no plano cartesiano fornecido abaixo.

Questão 2 (3,5 pontos) – A empresa CGS, uma desenvolvedora de aplicativos para celular, produz *apps* para os mais diversos segmentos. Em 2014, a empresa se destacou no segmento de *softwares* para organização pessoal, sendo que um de seus aplicativos, chamado Super-Organizador, conseguiu atingir mais de 12% de *market share** no segmento, tendo sido lançado no início de 2014. (*O *market share* corresponde ao percentual de cópias vendidas de uma determinada marca em relação ao total que foi comercializado por todos que atuam naquele segmento.)

Por se tratar de um segmento lucrativo, a equipe responsável pelo Super-Organizador ganhou destaque dentro da empresa, sendo que seu gerente, Andrei Alves, foi devidamente bonificado pelos resultados atingidos. Porém, Andrei é cuidadoso e, embora muito satisfeito com os resultados de 2014, entende que 2015 pode não ser um ano tão bom quanto 2014. Assim, junto com seus analistas, desenvolveu um modelo para tentar prever o *market share* do aplicativo ao longo do ano de 2015.

Esse modelo incorporou diversos fatores, como o envelhecimento do produto, o lançamento previsto de novas versões dos produtos dos concorrentes, atualizações, etc. Após estudos cuidadosos, a equipe do Super-Organizador obteve a lei de uma função P que dá o valor do *market share* previsto para o Super-Organizador, no instante x , medido em meses desde o início de 2015. A lei $P(x)$ obtida foi:

$$P(x) = \frac{-x^4 + 28x^3 - 270x^2 + 972x + 1271}{100},$$

com $0 \leq x \leq 12$. Por exemplo, como $P(0) = 12,71$, tem-se que a empresa inicia o ano de 2015 com 12,71% de *market share*.

Algumas decisões estratégicas serão tomadas com base nesse modelo. Para responder aos itens a seguir, analise $P(x)$ e suas derivadas.

(0,5) a) Na 1ª reunião da equipe para analisar o modelo, no final de 2014, um dos analistas diz:

“Sr. Andrei, podemos ficar tranquilos no início de 2015, já que o modelo mostra que a tendência é de crescimento”.

A afirmação “o modelo mostra que, no início de 2015, a tendência é de crescimento” está correta? Justifique matematicamente.

b) Ao ouvir a fala do analista, Andrei rebate:

“Precisamos ser mais cuidadosos. Mesmo que a tendência inicial seja de crescimento, pode ser que a velocidade de crescimento esteja diminuindo.”

(0,5) b₁) De acordo com a hipótese de Andrei, como seria o esboço de uma função P que cresce no início, porém com velocidade de crescimento cada vez menor?

Observação: Você não precisa fazer o gráfico em escala. Basta deixar clara a tendência inicial no seu esboço.

(0,75) b₂) Do ponto de vista do Cálculo, o comportamento descrito por Andrei pode ser associado à concavidade da função P . Caso a função P inicialmente cresça, porém com velocidade de crescimento cada vez menor, o trecho inicial do gráfico será de uma função côncava ou convexa? Usando as derivadas de $P(x)$, verifique se a preocupação do gerente tinha fundamento.

c) Após a fala de Andrei, um segundo analista pondera: “Se a velocidade de crescimento cair por muito tempo, pode ser que o *market share* do Super-Organizador atinja um valor máximo, o que sinalizaria uma futura diminuição do *market share*.”

Para verificar se a preocupação desse analista tem fundamento, faça os itens a seguir.

(1,0) c₁) Encontre e classifique todos os pontos críticos da função P . *Dica:* uma raiz de $P'(x)$ é $x = 3$.

(0,25) c₂) De acordo com o modelo, o *market share* deve atingir um valor máximo em 2015? Caso atinja, qual é esse valor e quando ele deverá ocorrer?

(0,5) c₃) A empresa fará uma ação promocional durante todo o período em que o modelo prevê queda do *market share*. Determine em que momentos do ano deve ocorrer tal ação promocional.

Questão 3 (3,5 pontos) – Uma operadora de turismo oferece a seus clientes um passeio às cavernas de um Parque Estadual da região onde está localizada. De acordo com os regulamentos de segurança, os grupos podem ter, no máximo, 16 turistas. Além disso, é exigida a presença de, pelo menos, um guia para cada 7 turistas (os guias são profissionais qualificados, devidamente autorizados pelos órgãos de fiscalização).

(0,5) a) Em cada passeio, a operadora utiliza a menor quantidade possível de guias sem transgredir os regulamentos de segurança. Quantos guias, no máximo, podem estar presentes em um mesmo passeio? Em que situação isso acontece?

Cada turista paga à operadora R\$ 400 para participar do passeio às cavernas. Os custos gerados para a operadora em cada passeio são dados a seguir.

- Custo fixo de R\$ 600, relativo ao transporte e à taxa paga ao Parque Estadual.
- Custo variável de R\$ 100 por turista, referente ao valor do ingresso e à alimentação no parque.
- Valor de R\$ 800 pago a cada guia que participa do passeio.

Nos próximos itens, x representa a quantidade de turistas que participam de um mesmo passeio. No seu modelo, considere que x é uma variável real tal que $1 \leq x \leq 16$.

(0,25) b) Escreva a lei da função que fornece a receita $R(x)$ da operadora, em reais, correspondente a um passeio em que participam x turistas.

(0,5) c) Escreva a lei da função que fornece o custo $C(x)$ da operadora, em reais, gerado por um passeio em que participam x turistas.

(0,75) d) Escreva a lei da função que fornece o lucro $L(x)$ da operadora, em reais, obtido após um passeio do qual participam x turistas.

Observação: considera-se que um lucro negativo corresponde a passeios nos quais a operadora tenha tido prejuízo.

(0,5) e) Desenhe o gráfico da função lucro, cuja lei $L(x)$ você obteve no item anterior.

(0,5) f) Com base no gráfico de $L(x)$, determine o lucro máximo que a operadora pode ter com um único passeio às cavernas.

(0,5) g) A função dada pela lei $L(x)$ é contínua? Justifique matematicamente sua resposta.