UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Gean Pierre da Silva Campos

**A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos:
uma abordagem didática**

São Paulo
2014

Gean Pierre da Silva Campos

A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos: uma abordagem didática

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

São Paulo

2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Nome: CAMPOS, Gean Pierre.

Título: A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos

Subtítulo: uma abordagem didática

Aprovado em: _____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oscar João Abdounur – IME/EDM - FEUSP

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Profª. Dra. Abigail Fregni Lins – DME - UEPB

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Profª. Dra. Adriana César de Mattos – IGCE - FEUSP

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Profª. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov – DLCE - UFES

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Profª. Dra. Maria do Carmo Santos Domite – EDM - FEUSP

Julgamento: _____ Assinatura: _____

à Lourdes, por tudo.

AGRADECIMENTOS

A Oscar João Abdounur, Circe Mary, Bibi Lins, Maria do Carmo, Adriana César, Paulo de Tarso Salles, Sívio Ferraz, Helena Chamlian, Fernanda Nali, Tom Boechat, Simone Neiva, Reginaldo Aquino, André Bordinhon, Ana Paula Chaves, Edilson Barboza, Erlon Paschoal, Tulio Busato, Bruno Venturim, Marcos Ramos, Kenny Caliman, Zuleica Nali, Carlos Papel, Fernando Duarte, Edigar Gusmão, a todos da Secretaria da Pós da Faculdade de Educação, Coseas, Marina Macambyra, Ana Maris, Alexandre Barbatto, Claudia Wilezelek, Flavio Luiz, Silmara Cardoso, Gigi Dantas, Marcio Pinho, Marina Macambyra, Neuton Araújo, Roberto Votta, Marcelo Coelho, Felipe Salles, muito obrigado!

RESUMO

CAMPOS, Gean Pierre. A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos. 2014. 99 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Essa pesquisa tem como foco principal explorar como obras musicais de Villa-Lobos são passíveis de serem lidas ou analisadas por meio de uma racionalidade matemática. O intuito é buscar um enfoque didático – alternativa didática – para a abordagem de conceitos oriundos da Teoria dos Conjuntos, baseados nos estudos do matemático Georg Cantor (Teoria Ingênua dos Conjuntos) e nos estudos de Allen Forte (Teoria dos Conjuntos aplicada à Música). Busca-se trazer para o universo da Música e da Matemática ambas as teorias, por meio de um enfoque transdisciplinar, e situar o *saber* em regiões em que o aspecto afetivo já adquiriu níveis capazes de dar sentido ao conhecimento e propiciar a assimilação de significados relacionados à outra área. Em busca desses objetivos, e ainda estudar possíveis indicações das relações entre Matemática e Música em um cenário didático/pedagógico, essa obra lança mão da afetividade, transdisciplinaridade e pensamento analógico como forma de articular áreas aparentemente distantes, mas com forte semelhança em suas estruturas. Esse estudo pretende explorar (1) trabalhos que usaram a Teoria dos Conjuntos em análises de obras de Villa-Lobos, (2) processos criativos e composicionais presentes em obras musicais de Villa-Lobos, (3) técnicas matemáticas de análise musical, (4) tipos e estruturas matemáticas que possam auxiliar em análises musicais e verificar de que maneira a racionalidade matemática está presente na composição musical. Este estudo ao pesquisar trabalhos que usaram a Teoria dos Conjuntos em análise musical de obras de Villa-Lobos preenche uma lacuna na teoria musical; evidencia estruturas matemáticas que auxiliam na análise musical, mostrando a presença da racionalidade matemática. Uma das grandes contribuições desse trabalho é estabelecer relações de analogia entre conteúdos do currículo da matemática, frequentemente traduzidos por códigos numéricos, e aspectos da área musical, reconhecidos por sons.

Palavras-chave: Relações Matemática e Música; Teoria dos Conjuntos; Villa-Lobos.

ABSTRACT

CAMPOS, Gean Pierre. The Set Theory and The Music of Villa-Lobos: a didactic approach. 2014. 99 p. Ph. D. Thesis – School of Education, University of São Paulo, São Paulo, 2014.

This research is mainly focused on exploring how musical works by Villa-Lobos are likely to be read or analyzed by a mathematical rationality. The aim is to seek a didactic approach – a teaching alternative – in order to deal with concepts from the Set Theory, based on studies by mathematician Georg Cantor (Naive Set Theory), and from studies of Allen Forte (Set Theory applied to Music). It intends the following: to bring both theories into the world of Music and Mathematics through a transdisciplinary approach; to situate knowledge in areas where the affective aspect has already acquired levels able to make sense of such knowledge; to encourage the assimilation of related meanings from area to the other. In the pursuit of such goals, and still researching possible indications of the relationship between Mathematics and Music in a didactic/pedagogical scenario, this work makes use of affection and transdisciplinarity analogical thinking as a way of articulating seemingly distant areas with yet strong similarities in their structures. This research therefore explores (1) studies that used the Set Theory in analysis of works by Villa-Lobos, (2) creative and compositional processes present in musical works by Villa-Lobos, (3) mathematical techniques of musical analysis, (4) types and mathematical structures that can assist in musical analysis, and it verifies how the mathematical reasoning is present in the composite musical work. The present study, by researching papers that used the Set Theory in musical analysis of works by Villa-Lobos, fills a gap in music theory; it shows evidence of mathematical structures that can assist in musical analysis, showing the presence of mathematical reasoning. A major contribution of this work is to establish relations of analogy between the mathematical content of the curriculum, often translated by numerical codes, and aspects of Music recognized by sounds.

Keywords: Mathematics and Music Relations; Set Theory; Villa-Lobos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Disposição das Notas no Teclado	32
Figura 2 – Eixo Cartesiano em Analogia à Pauta Musical	32
Figura 3 – Pauta com Linhas Suplementares.....	33
Figura 4 - Claves.....	33
Figura 5 – Notação em Números Inteiros para a Escala Cromática	34
Figura 6 – Escala de Dó Maior com os Tons e Semintons.....	34
Figura 7 – Armaduras de Claves de Escalas com Sustenidos	35
Figura 8 – Armaduras de Claves de Escalas com Bemóis.	36
Figura 9 – Ciclo das Quintas com Sustenidos	36
Figura 10 – Melodia Principal Segmentadas em Tretacordes 4–7.....	39
Figura 11 - Linha tracejada indicando a segmentação dos trechos a1 e a2 da seção A	41
Figura 12 – Simetrias Formadas Pela Melodia (NERY, 2012)	42
Figura 13 – Eixo de Simetria	42
Figura 14 – Diagrama de Venn com Invariâncias	44
Figura 15 – Exemplos com Conjuntos, Subconjuntos e Invariâncias	44
Figura 16 – Notas para a Mão Esquerda e Direita do Piano.....	46
Figura 17 – Compasso 24 – Alma Brasileira.....	50
Figura 18 - Sequencias de Conjuntos.	51
Figura 19 - PC Set Calculator.....	52
Figura 20 – Compassos 50 e 51.....	53
Figura 21 – Compassos 29 e 30 – Conjuntos Arpejados	54
Figura 22 – Invariância entre dois conjuntos.....	55
Figura 23 – Compassos 34 e 36 com Conjuntos Complementares	55
Figura 24 – Escala Pentatônica de Fa# Maior	56
Figura 25 – Simetrias e Proporções em Alma Brasileira	57
Figura 26 – Compassos 50 e 51	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Numeração da Escala Cromática.....	26
Tabela 2 - Principais intervalos	27
Tabela 3 – Classes de Intervalos (STRAUS, 2013, p. 11).....	29
Tabela 4 - Padrão simétrico da forma da música (PENTEADO, 2012).....	39
Tabela 5 - Forma da Música	54

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO I - TEORIA DOS CONJUNTOS.....	18
1.1 Teoria dos Conjuntos de Cantor	19
1.2 Teoria dos Conjuntos de Forte	22
1.3 Conceitos e definições básicos da Teoria dos Conjuntos em Música.....	24
CAPÍTULO II – A RACIONALIDADE NA MÚSICA DE VILLA-LOBOS	35
2.1 Conjuntos e subconjuntos	35
2.2 Simetria	39
2.3 Invariâncias	40
2.4 Complementaridade	42
2.5 Choros nº5 <i>Alma Brasileira</i>	44
CAPÍTULO III – PROPOSTA DIDÁTICA	57
3.1 Introdução	57
3.2 Oficinas Interdisciplinares	65
3.3 Oficinas/Planos de Aulas	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
GLOSSÁRIO	79
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82
ANEXOS.....	87

INTRODUÇÃO

Este trabalho pretende explorar processos composicionais de Villa-Lobos a partir da Teoria dos Conjuntos e outras estratégias analíticas que contenham alguma racionalidade matemática. O intuito é relacionar Matemática e Música e contribuir didaticamente para o ensino e aprendizagem de ambas as áreas. Numa análise de nossas pesquisas, relatos, aulas, entre outros, percebemos que a relação Música/Matemática provoca algum interesse, e, em alguns casos, estranheza. Em termos gerais, a Música apresenta-se como arte associada ao dom, que pode ser vista em espetáculos, teatros, shows e frequentemente como sinônimo de alegria, diversão e entretenimento. Já a Matemática surge quase sempre associada a área das exatas, tratada como ciência e vinculada a ambientes acadêmicos, escolares, de pesquisa, frequentemente como sinônimo de seriedade, dificuldade e associada a fórmulas.

A história nos mostra que o que denominamos hoje Música e Matemática não se classificavam tão dicotomicamente como relatamos. Pitágoras foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes a intervalos musicais, tornando-se o *descobridor* do que viria a ser o quarto ramo da Matemática¹ por meio de suas experiências com o monocórdio². Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade e tocando-a em seguida, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original. A partir desta experiência, os intervalos passam a denominarem-se consonâncias pitagóricas. Essa concepção musical da Escola Pitagórica permanece forte durante toda a Idade Média³.

Já no Renascimento (século XIV a XVI), nomes como Ludovico Fogliani, Gioseffo Zarlino, Joannes Kepler, Marin Mersenne, René Descartes, Jean Philippe Rameau, G. W. Leibniz, dentre

¹ Na Idade Média, as artes liberais eram consideradas disciplinas próprias para formação de um homem livre, desligadas de toda preocupação profissional, mundana ou utilitária. As Artes Liberais eram formadas pelo *Trivium* - Lógica, Gramática e Retórica - e pelo *Quadrivium* - Aritmética, Geometria, Astronomia e Música (BOYER, 1987).

² Instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções.

³ Boetius (480-524 d. C.) foi o principal nome que contribuiu para sistematização da música ocidental (PAHIEN, 1991, apud ABDOUNUR, p. 21), através de seu livro *De Institutione Musica*, escrito no início do século VI d.C, e influenciou a maioria das obras e tratados teórico-musicais da Idade Média.

outros, contribuíram para a relação matemática/Matemática. Nesse período, com o predomínio da matematização, experimentação e mecanização, presentes na Revolução Científica, o misticismo é relegado a um segundo plano, ganhando espaço o uso de instrumentos experimentais. Na Idade Média, as formas musicais passaram de uma característica melódica para uma Matemática de característica harmônica, que se intensifica no Renascimento com o desenvolvimento harmônico.

No Século XVII temos o Temperamento⁴, já incipiente no século XVI, tornando-se mais recorrente e recomendado nos séculos XVIII e XIX com Rameau (1737) e C.P.E. Bach (1762), em que os diferentes temperamentos assumidos em Matemática no decorrer do tempo em diferentes culturas culminaram para o temperamento igual como as diversas bases numéricas em matemática concebidas em distintos povos e épocas convergida para a atual base 10 (ABDOUNUR, 1999).

No contexto do Século XX, Arnold Schoenberg e seus alunos Alban Berg e Anton Webern dedicaram-se aos estudos de um sistema de composição chamado Dodecafonismo⁵. Esse sistema composicional pretendia acabar com o papel predominante da tônica⁶ no sistema utilizado na Matemática ocidental conhecido como Tonalismo, predominante entre os séculos XVII e XX. O dodecafonismo baseia-se na utilização das 12 notas musicais que compõe a escala cromática e deve ter igual número de ocorrências em cada composição musical. Sendo assim, Schoenberg desenvolveu um método no qual séries matemáticas são utilizadas para que nessa sequência de notas não seja repetida nenhuma até que todas as 12 notas da escala cromática sejam utilizadas. Cada série pode ser usada em quatro formas: Original, Invertida, Retrógrada e na Retrógrada da Invertida (MENEZES, 2002).

Atualmente, encontramos inúmeras pesquisas e livros dedicados a estudar e pesquisar as relações entre Matemática e Matemática para diversos fins. Citamos, como exemplo, uma obra específica de Oscar Abdounur e de referência para esse trabalho, o livro *Matemática e Matemática: o pensamento analógico na construção de significados*, resultado de pesquisa de doutorado nas

⁴ Afinação de uma escala em que todos ou quase todos os intervalos resultam ligeiramente imprecisos, porém sem que fiquem distorcidos (SADIE, 1994, p. 938), aqui usado no sentido de Temperamento Igual que é a divisão do intervalo de oitava em 12 semitons associados a relações de frequências exatamente iguais (ABDOUNUR, 1999, p. 79).

⁵ O nome vem do grego *dódeka*, que significa 12.

⁶ A tonalidade é um termo que designa uma série de relações entre notas, em que uma em particular, a **tônica**, é a principal (BOYER, 1987, p. 953).

relações entre essas áreas contextualizadas no eixo histórico/didático e que versa acerca do pensamento analógico sob a perspectiva da rede de significados, inteligência coletiva e inteligência como um espectro de múltiplas competências. Outros trabalhos foram desenvolvidos como a dissertação de mestrado *A Pesquisa no Âmbito das Relações Didáticas Entre Matemática e a Matemática: estado da arte* de Delma Pilão, que apresenta o estado da arte das pesquisas acerca dessa relação no âmbito do ensino/aprendizagem no Brasil. A autora classificou as dissertações e teses em quatro grupos: Relação Matemática e Matemática utilizando analogias, para estruturar/auxiliar na aprendizagem; Música utilizada como ferramenta para o ensino da Matemática; matemática aplicada no composição musical e trabalhos de cunho filosófico das relações Matemática e Música (PILÃO, 2009, p. 58). Uma tendência apontada pela autora consiste na dimensão cognitiva presente em todas as pesquisas e fundamentadas por teorias de Piaget, Vygotsky, Lévy, Gardner, entre outros, e conclui que tais relações favorecem o processo educacional de ambas as áreas.

Nosso trabalho de mestrado também pesquisou práticas pedagógicas interdisciplinares envolvendo Matemática e Música. Nele, o intuito era buscar alternativas didáticas que auxiliassem no ensino/aprendizagem de frações, razões, proporções, progressões geométricas, notas, intervalos e escalas musicais e como essas atividades podiam facilitar o ensino/aprendizagem de ambas as áreas. Para isso, promovemos oficinas interdisciplinares junto a alunos e professores dessas áreas, em que pudemos debater, confrontar ideias e realizar alguns experimentos que tinham a Matemática e a Música e suas respectivas histórias como base. Por meio da história da relação Matemática/Música baseamos a trajetória para as oficinas. Os dados foram obtidos e analisados por meio de gravações em áudio e videoteipe, por relatórios feitos pelo pesquisador e observadores e ainda por questionários respondidos ao final de cada Oficina. As análises dos dados mostraram que nossa proposta favorece a afetividade, nos termos de Henri Wallon, autor que adotamos no recorte teórico, e facilita o ensino/aprendizagem de alguns dos conceitos abordados. Para Wallon (2007), a afetividade e a cognição estão intimamente ligadas e uma atua na outra, ou seja, o desenvolvimento afetivo ocorre simultaneamente com o desenvolvimento cognitivo, e vice versa.

Com a análise dos dados e fatos coletados constatamos que a proposta defendida é viável para ser realizada em sala de aula. As atividades desenvolvidas podem ser uma alternativa para os conceitos abordados no trabalho, elevando o nível de motivação, afetividade e interesse do aluno,

fazendo aluno e professor trabalharem diversos tipos de inteligências simultaneamente e contribuindo para um melhor ensino e aprendizado. As Oficinas mostraram ser um importante meio de ressignificação na prática pedagógica e na forma de apresentação dos conteúdos envolvidos neste trabalho. Para a área musical, serviram para compreender as estruturas da Música através da Matemática, aproximando campos do conhecimento considerados distantes. Para área Lógico-Matemática, tiveram a oportunidade de perceber novas formas de apresentação de conteúdos.

É de grande relevância para nosso atual trabalho as obras que utilizam a Teoria dos Conjuntos para análise de obras de Villa-Lobos. Dentre os trabalhos que obtivemos contato, podemos citar um que é referência, o livro de Paulo de Tarso Salles, *Villa-Lobos: Processos Composicionais*, de 2009, na qual o autor procura explicar a obra villalobiana a partir de seus processos composicionais, utilizando simetrias, aspectos texturais e harmônicos. Com a análise pautada na Teoria dos Conjuntos, Salles lida com a Música de Villa-Lobos a partir de conjuntos de notas, números, sequencias e conjuntos de classes de alturas como forma de tentar explicar as escolhas musicais do compositor.

Problematização, objetivos e justificativa

Durante o mestrado e principalmente nas Oficinas que realizamos como procedimento de pesquisa⁷ surgiram novas perspectivas, dúvidas e interesses, algumas das quais consideramos pertinente não incluir ou pesquisar naquele momento, mas cientes de sua importância para um momento futuro. Nossa preocupação era não desviar dos objetivos iniciais da pesquisa e tornar um trabalho muito amplo para o mestrado. Essa atual pesquisa nasce, portanto, das indagações e inquietações surgidas em nossa pesquisa de mestrado e que agora pretendemos transformar em tese de doutorado. Um dos importantes assuntos mencionados que surgiu com frequência nas Oficinas diz respeito ao processo de criação musical (composição ou elaboração de uma música). A trajetória para obtenção da escala temperada (CAMPOS, 2013, p. 116) e a construção de

⁷ Em nosso mestrado organizamos oficinas junto a professores e alunos licenciandos de matemática e música. Nessas Oficinas, sugerimos atividades que envolviam as duas áreas e através dos questionários, relatórios e videoteipes gravados nas oficinas, procuramos averiguar de que maneira as relações entre matemática e música poderiam ser utilizadas.

instrumentos musicais (2013, p. 127) fizeram esse assunto aparecer constantemente. Entre essas discussões, temos algumas dúvidas que procuraremos responder a partir dessa pesquisa, sendo elas: é possível analisar obras de Villa-Lobos à luz da Teoria dos Conjuntos ou mesmo por algum tipo de racionalidade matemática? Como relacionar Matemática e Música a partir de análises em obras musicais de Villa-Lobos e contribuir no ensino e aprendizagem de ambas as áreas?

Dadas as considerações anteriores, esse trabalho objetiva explorar alternativas didáticas para conceitos da Teoria dos Conjuntos por meio de análises de obras musicais de Villa-Lobos e observar o quanto de racionalidade matemática existe nessa obra musical. Além desse objetivo central, estamos em busca de outros objetivos secundários: elaborar estratégias para o ensino da Música e da Matemática – fazendo uso de analogias entre as duas áreas do saber; utilizar a Música para o ensino e a aprendizagem da Matemática e vice-versa. Em busca desses objetivos, lançaremos mão de conceitos como afetividade, transdisciplinaridade e pensamento analógico como forma de articulação de áreas e conceitos aparentemente distantes, podendo funcionar como agente facilitador na aprendizagem tanto da Matemática como da Música.

A Teoria dos Conjuntos é um conteúdo abordado desde a educação infantil, com conceitos básicos de agrupamentos e coleções, passando pelo Ensino Médio com os conjuntos numéricos, relações, funções, até cursos de Graduação e Pós-Graduação, com aplicações em diversas áreas. Em alguns casos, esses conceitos se mostram descontextualizados e sem significado para o educando o que acarreta um ensino rígido, tedioso e com tópicos que aparecem sem ligações. Além disso, autores como Soares (2001), Ferreirós (1999), entre outros, debatem o impacto do *Movimento da Matemática Moderna (MMM)* nos currículos da escola básica. Nestes trabalhos há questionamentos sobre avanços, retrocessos e como foram, e ainda são, abordados em livros didáticos e no próprio currículo de nossas escolas. Esse movimento tinha o objetivo tornar a Matemática escolar mais contextualizada e ajustada às mudanças que ocorriam no mundo e tinha como principal eixo articulador a Teoria dos Conjuntos. Ao citar esse tema, temos o intuito de mostrar a grande importância que a *Teoria dos Conjuntos* tem em nosso currículo e a pertinência de nossa atual pesquisa em mostrar alternativas para a abordagem de alguns conceitos, pois pretendemos nos concentrar na relação Matemática e Música, no âmbito do ensino e aprendizagem, e conduzir para situações que favoreçam a dar significados à conceitos outrora distantes, dando vazão à aptidões e oferecendo solo fértil para que o afetivo e o cognitivo floresçam.

Soma-se à pertinência da escolha por análises e exemplos em obras de Villa-Lobos o fato de que, apesar da extensa obra e de ser considerado um dos maiores compositores brasileiros, Villa ainda carece de trabalhos que possam evidenciar esse rótulo (SALLES, 2009). Além disso, ainda hoje encontramos questionamentos quanto a uma suposta deficiência em suas técnicas composicionais e uma certa dose de experimentação em suas composições. Conforme argumenta Salles, pesquisador do nosso mais importante compositor, sua obra ainda é um desafio à musicologia brasileira já que não se sabe precisamente no que consiste seu estilo, sua técnica e suas estratégias no manejo da forma e do material harmônico, em que mesmo as séries de obras famosas e divulgadas como as Bachianas Brasileiras e os Choros são ainda um mistério com relação aos procedimentos empregados, além de problemas editoriais que abrangem instrumentação, revisão e outros. Villa-Lobos é lembrado ainda por suas contribuições como educador e relacionadas ao Canto Orfeônico⁸, um dos maiores projetos já visto na história e considerado por alguns o maior legado que o compositor deixou para o Brasil. Ainda que não seja esse o foco desse trabalho, o assunto inevitavelmente será tangenciado ao mostrar um pouco de sua vida e obra.

A partir de nossas pesquisas, percebemos uma lacuna no que concerne a estudos que tratem da relação entre Matemática e Música e que possam ser utilizados pelo professor dessas áreas, tanto para seu próprio entendimento, quanto como apoio para o ensino de tópicos matemáticos e musicais em que a relação entre as duas áreas seja especialmente importante. Ao nosso entender, deve-se fazer uso de uma linguagem sensível tanto ao professor de Música quanto ao professor de Matemática que possibilite a ambos compreender e construir noções de conceitos matemáticos contidos na Música, e vice-versa.

⁸ O canto orfeônico foi uma tradição do século XIX em quase toda a Europa, designando o canto coral à capella. No Brasil, o canto orfeônico era conhecido e praticado desde 1912, mas somente com o trabalho de Villa-Lobos ganhou alcance e importância. Para ele, o canto orfeônico era o meio eficaz de educação das massas, pois integrava a sociedade num sentimento coletivo e disciplinado de amor à pátria (PAZ, 1989).

Estruturação dos Capítulos

O trabalho organiza-se em três capítulos. Primeiramente apresentaremos a Teoria dos Conjuntos em uma breve contextualização histórica, desde a noção intuitiva de Georg Cantor e seus estudos sobre a continuidade e o infinito, até um detalhamento dos conceitos que direcionamos como base para as análises posteriores das obras musicais. Nesse sentido, dialogamos ainda com Allen Forte e sua Teoria dos Conjuntos aplicada à Música – que também fornece aporte para nossa análise da obra de Villa-Lobos no Capítulo 2 –, com o objetivo de dar ênfase às relações e correspondências entre Matemática e Música através de conteúdos que poderão ser aplicados em ambos, como a representação das notas musicais por uma numeração sequenciada.

Posteriormente, no segundo capítulo, realiza-se um detalhamento dos processos composicionais de Villa-Lobos, que aqui chamaremos de *Categorias de Análise* da Teoria dos Conjuntos. Para tal, nos valem de definições propostas por teóricos da Matemática como Halmos (1974), Weyl (1952), entre outros, *traduzidas* para a linguagem musical por meio de exemplificações em obras de Villa-Lobos, instaurando analogias entre essas duas áreas. Nesse sentido, dialogamos com pesquisas já realizadas nessa perspectiva, como a obra de referência de Paulo de Tarso Salles. O capítulo segue com uma proposta de análise da obra *Choros n° 5* de Villa-Lobos, também conhecida como *Alma brasileira*, em que procuraremos ressaltar as categorias detalhadas e exemplificadas anteriormente. Essa obra configura-se como um *estudo de caso*, privilegiando como tais procedimentos analíticos podem favorecer a abordagem de aspectos musicais e matemáticos, na tentativa de trazer esses conceitos para a área de maior afinidade e com isso buscar formas de auxiliar o entendimento tanto para estudantes de Matemática quanto de Música.

No terceiro e último capítulo teceremos considerações acerca dos resultados obtidos na análise de *Alma brasileira* e nos demais trabalhos que foram *exemplificados* pelas categorias de análise. Nos deteremos também nas implicações didático/pedagógicas explorando as vias de possibilidades para aplicações de conceitos relativos à Teoria dos Conjuntos em sala de aula, em consonância com conceituações de afetividade, transdisciplinaridade e pensamento analógico. Para finalizar, estabeleceremos as considerações finais pertinentes à pesquisa.

1. TEORIA DOS CONJUNTOS

Ao nos referirmos à Teoria dos Conjuntos, podemos entendê-la atrelada a um ramo da Matemática dedicado ao estudo dos conjuntos e de suas propriedades. Durante muito tempo a Teoria dos Conjuntos — ou a noção intuitiva do que vem a ser conjunto — foi usada por matemáticos e filósofos. A noção intuitiva da Teoria dos Conjuntos aparece em meados do século XIX, com os estudos do matemático Georg Cantor (1845 – 1918) que, juntamente com Richard Dedekind, pesquisava a respeito da continuidade e o infinito – conceitos rodeados de controvérsias – e correspondências biunívocas entre conjuntos numéricos e representações de funções de variável real através de séries trigonométricas, tentando mostrar uma unicidade da representação para funções com infinitos pontos singulares, chegando a ideia de conjunto derivado (BOYER, 1997; CANTOR, 1955; DAUBEN, 1990). Há indícios de antecipações⁹ da Teoria dos Conjuntos, mas é com Cantor e com sua procura por uma formulação mais rigorosa do conceito de infinito, que nasce a então Teoria dos Conjuntos que resultou em uma linguagem universal para a Matemática e deu sustentação teórica para diversos conceitos, tais como funções, equivalência, ordem, conjuntos numéricos, entre outros¹⁰.

Os estudos de Cantor acerca da Teoria dos Conjuntos baseava-se em uma ideia aparentemente simples: relacionar, elemento por elemento, conjuntos bem definidos por uma correspondência unívoca. Intuitivamente, a correspondência de elementos um a um entre dois conjuntos é o emparelhamento de um conjunto com o outro, de modo que cada elemento de um conjunto tenha um correspondente no outro. Para conjuntos finitos, “dizemos que conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se podem ser postos em correspondência biunívoca” (BOYER, 1997, p. 392). Portanto, não é necessário que contemos ou que conheçamos os elementos dos conjuntos para que possamos determinar se são ou não equivalentes. Partindo desse princípio, é possível provar que o conjunto dos números racionais, que tem infinitos elementos, é enumerável, pois podemos fazer uma bijeção entre os conjuntos dos números racionais com o conjunto dos

⁹ Bernad Bolzano (1851) chegou a uma clara compreensão do conceito de equipotência de conjuntos a partir do livro *Paradoxos do Infinito*, publicação feita depois de três anos de sua morte.

¹⁰ Os incríveis resultados de Cantor o levaram estabelecer a teoria dos conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, chamada *Mengenlehre* (teoria das coleções) ou *mannigfaltigkeitslehre* (teoria das multiplicidades), ramo que em meados do século vinte teria efeitos profundos sobre o ensino da matemática (BOYER, 1997, p. 394).

números naturais.

Primeiramente, a Teoria dos Conjuntos recebeu o nome de Teoria Ingênua dos Conjuntos com uma linguagem e notação ainda não axiomatizada. Em linhas gerais, as contribuições feitas à teoria ingênua dos conjuntos, do final do Século XIX até o início do XX, desenrolaram no que veio a ser a teoria axiomática dos conjuntos. Nesse intervalo, a ideia do que seria um axioma também sofreu alterações: se antes costumava ser visto como uma verdade absoluta independente do contexto, nos idos de 1900, o que se entendia por axioma flexibilizou-se como uma verdade que dependia da estrutura subjacente e, portanto, um axioma escolhido numa determinada estrutura poderia ser falso em outra que diferísse da original, gerando contradições. Nesse período, outros conceitos também foram questionados e pensados sob outras perspectivas. Na versão ingênua, não usamos uma linguagem estritamente formal ao tratar os conceitos envolvidos, se comparada à versão axiomática. Para evidenciar as diferenças, podemos citar o famoso *Paradoxo de Russel*¹¹, em que notaremos o tipo de problema que se encontra quando não se define com maior rigor o que se entende por conjunto. Na época de Cantor, lidava-se com conjuntos de maneira informal. Subentendia-se que o leitor entendia a notação usada para o conjunto em questão e, portanto, não era costume definir conjuntos tomando por base outro conjunto¹² cuja existência já estava assegurada (BOYER, 1997). Na tentativa de esclarecer, procuraremos retomar em tópicos as definições pertinentes a Teoria dos Conjuntos, embora saibamos que toda conceituação é redutora, mas que facilitarão a compreensão da proposta posterior desse trabalho.

1.1 Teoria dos Conjuntos de Cantor

¹¹ O Paradoxo de Russel, exposto em 1902, define o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo. Pergunta-se: o conjunto A pertence a si mesmo? Se A não pertence a A então, pela definição, A não pertence a A . Por outro lado, se A pertence a A , então, pela definição, A não pertence a si mesmo. Contradição! O paradoxo de Russel, também conhecido como Paradoxo do Barbeiro, pode ser assim reformulado: numa cidade existe um barbeiro que só barbeia as pessoas que não se barbeiam a si próprios. Pergunta-se: quem faz a barba do barbeiro? Quando respondemos essa pergunta somos levados a uma contradição!

¹² Evitaremos um paradoxo, como o de Russell, definindo previamente um conjunto, e a partir dele construindo outro conjunto, usando o *Axioma da Especificação*.

Conjunto: Cantor esboçou, em vários pontos de sua obra, caracterizações – ou definições – do conceito de conjunto. Em 1882, propôs uma definição de conjunto como “(...) uma totalidade de elementos que podem ser combinados em um todo por uma lei”. Posteriormente, já em 1895, afirmava conjunto como qualquer coleção ou agrupamento de objetos definidos e distintos pela nossa percepção ou pensamento, os quais se chamam elementos do conjunto. Por conjunto entendemos toda coleção **M** de objetos bem definidos em nossa percepção ou pensamento, que chamamos de elementos de **M**. Um elemento de um conjunto pode ser um gato, uma laranja ou uma nota musical. Um conjunto pode ele mesmo ser elemento de outro conjunto. Designaremos os conjuntos por letras maiúsculas *A, B, C, ...* e os elementos por por letras minúsculas *a, b, c,*

Pertinência: Outro conceito principal da Teoria dos Conjuntos é de pertinência, denotado pelo símbolo $\in$ – derivado da letra grega ϵ (épsilon). Analogamente, $\notin$ indica que não ocorre a pertinência. Por exemplo, escrevemos $x \in A$ para indicar que *x* pertence ao conjunto *A*, e $x \notin A$ quando *x* não pertence a *A*. A relação de igualdade entre dois conjuntos *A* e *B* é simbolizada por: $A = B$. De maneira semelhante, escrevemos $A \neq B$ para expressar que *A* é diferente de *B*.

Axioma da Extensão: Dois conjuntos são iguais se e somente se têm os mesmos elementos. Em outras palavras, um conjunto é determinado por sua extensão. É interessante entender que o axioma da extensão não é somente uma propriedade necessária da igualdade, mas uma asseção não trivial sobre a pertinencia (HALMOS, 1973). Se *A* e *B* são conjuntos e se todo elemento de *A* é um elemento de *B*, dizemos que *A* é subconjunto de *B* ou que *B* inclui *A*:

$$A \subset B \quad \text{ou} \quad B \supset A$$

Axioma da Especificação: a todo conjunto *A* e toda condição (propriedade) *S(x)* corresponde um conjunto *B* cujos elementos são exatamente aqueles elementos *x* de *A* para os quais *S(x)* é válida. O Axioma da Especificação – também conhecido como Axioma da Separação ou Axioma da Compreensão – nos diz que dado um conjunto e uma sentença acerca deste, podemos obter um novo conjunto. Como exemplo, seja *A* o conjunto dos pássaros, e considere $B = \{x \in A: x \text{ é sabiá}\}$. Isto pode ser lido como “*B* é o conjunto dos pássaros sabiás”. Tomaremos como base para construção de um conjunto vazio o que não contém nenhum elemento simbolizado por $\emptyset$. Pelo Axioma da Extensão esse conjunto é único. Formalmente temos que: dado um conjunto *A*, o

conjunto vazio pode ser definido como:

$$\emptyset = \{x \in A \text{ tal que } x \notin x\}$$

Axioma do Par: dados dois conjuntos quaisquer, existe um conjunto a que ambos pertencem. O Axioma do Par nos diz que, dados dois conjuntos a e b , existe um conjunto C tal que, C tal que $a \in C$ e $b \in C$. Uma formulação equivalente para esse axioma é que “para dois conjuntos quaisquer existe um conjunto que contém ambos e nada mais” (HALMOS, 1973, p. 10). A forma usual para esse conjunto é $\{a, b\}$, chamado par não-ordenado, pois $\{a, b\}$ é o mesmo que $\{b, a\}$, ou seja, podemos mudar a ordem dos elementos e continuaremos com o mesmo conjunto. Isto decorre do Axioma da Extensão, já que a e b são os únicos elementos de ambos os conjuntos.

União: para toda coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos da dada coleção. Em outras palavras, para toda coleção A existe um conjunto U tal que se $a \in A$ para algum A em U então $a \in U$. Além disso U é único – pelo axioma da extensão – e denominado união do conjunto. Usando o Axioma do Par e o Axioma da União, podemos definir a união de dois conjuntos, digamos A e B - simbolizado por $A \cup B$ -, como sendo o conjunto cujos elementos pertencem a A ou a B . A definição geral de união implica no caso especial que $x \in A \cup B$ se e somente se x pertence a A ou a B ou a ambos:

$$A \cup B = \{x, \text{ tal que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersecção: de forma semelhante e com muitos pontos análogos, podemos definir outra operação muito importante da Teoria dos Conjuntos: a intersecção. Seja dois conjuntos, digamos A e B , a intersecção desses dois conjuntos é o conjunto $A \cap B$, dado por:

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$$

E como $x \in A \cap B$ se e somente se x pertence a ambos, segue que:

$$A \cap B = \{x, \text{ tal que } x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os conjuntos A e B são disjuntos.

Dados três conjuntos A , B e C , existem duas identidades – as quais podem ser demonstradas como leis distributivas – envolvendo uniões e intersecções que são frequentemente usadas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ e } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Complemento: Se A e B são conjuntos, definimos a diferença entre A e B – ou, como é mais

conhecido, *complemento relativo* de B em A , como sendo o conjunto $A - B$ definido por:

$$A - B = \{x, x \in A \text{ tal que } x \notin B\}.$$

Nesta definição, não é necessário supor que $B \subset A$. Para este trabalho e para facilitar a exposição de certos conceitos, vamos considerar que existe um conjunto que contém todos os outros conjuntos – que podemos denominar conjunto *universo*. Assumiremos tal conjunto por ora, já que não iremos lidar com conjuntos muito grandes no momento.

Axioma da Potência: Para cada conjunto existe uma coleção de conjuntos os quais contêm, entre seus elementos, todos os subconjuntos do dado conjunto. Tal axioma nos diz que dado um conjunto A podemos obter um conjunto $P(A) = \{X: X \subseteq A\}$, denominado conjunto potência (ou conjunto das partes de A). Como exemplo, considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Então o conjunto potência de A é dado por $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Vemos que A possui 3 elementos e $P(A)$ possui 8, que é uma potência de 2, pois $8 = 2^3$.

1.2 Teoria dos Conjuntos de Forte

O sistema tonal¹³, que surgiu com Pitágoras e foi predominante por séculos, foi base para um estilo de Música composta entre 1650 até 1900, consolidando-se no classicismo e sendo muito utilizada atualmente – a Música Ocidental em sua grande maioria, por exemplo. Desse modo, poderíamos incluir diversos compositores, tais como Bach, Handel, Haydin, Mozart, Beethoven, Wagner, Brahms e todos os seus contemporâneos que utilizaram da chamada *harmonia tonal* para compor suas obras. O que caracteriza esse estilo de Música é a utilização de um *centro tonal* que dá sentido de centro de gravidade. A harmonia tonal é baseada quase que exclusivamente nas escalas maiores e menores e seus acordes são construídos com estruturas de terças, ou seja, em terças sobrepostas, tal como o acorde de dó maior que é formado pelas notas dó-mi-sol. Além disso, esses acordes são construídos sobre diversos graus da escala, formando uma tonalidade, e

¹³ A harmonia tonal não está limitada ao período 1650–1900. Ela iniciou bem antes desse período e continua até hoje em dia – ligue o rádio ou a televisão, ouça um música de fundo em supermercado, são praticamente todas centradas no sistema tonal. Mas a delimitação aqui indicada em 1900 indica que muita da música dita *séria* ou de *concerto* têm estado mais interessados em harmonias não tonias, e isso não significa que a harmonia tonal deixou de existir (KOSTKA, 2006).

relacionam entre si e com o centro tonal, adquirindo uma função padrão dentro da tonalidade.

Toda essa hegemonia do sistema tonal foi colocada em questão com a tentativa de reorganização de sons e escalas do dodecafonismo propostas por Schoenberg e seus discípulos. Essa proposta, chamada de sistema *dodecafônico* ou *atonal*, estabelece que em cada composição seja fixada uma determinada ordenação das 12 notas da escala cromática escolhida pelo compositor, designada *série*. Uma série pode ser vista como uma sequência dos 12 sons (em que não se repete nenhum), arranjados numa determinada ordem e usados em qualquer oitava e em qualquer ritmo. O compositor pode usar a série ou na sua forma *original*, ou *invertida*, ou *retrógrada* (lida do fim para o princípio), ou mesmo ainda *transposta* por alguns meios-tons.

A Teoria dos Conjuntos aplicada à Música vem preencher uma lacuna na teoria e na análise musical. Essa teoria foi introduzida por Milton Babbitt, mas sistematizada por Allen Forte em seu livro *The Structure of Atonal Music* (1973) e que foi de suma importância para compreender e analisar boa parte da Música do século XX.

Amparamo-nos também no trabalho de João Pedro Paiva de Oliveira em seu livro *Teoria Analítica da Música do Século XX*, de 1986. Este último autor tem mostrado uma preocupação em respaldar a atividade de análise e composição, num contexto que sempre está em rápida mutação. Além disso, a obra de Oliveira tem como idioma original a língua portuguesa – de Portugal – o que nos facilita para mostrar exemplos e também para que o leitor que se interesse por esse trabalho, com bibliografia em sua língua materna.

Encontramos nessa teoria vários operadores que são como uma alternativa lógica para a ausência de hierarquias tradicionais do sistema tonal, procedimento mais simples e eficaz para analisar combinações intervalares e que se manteve importante para analisar parte da produção musical do Século XX. Apesar do conceito de *Conjunto* ser um dos mais primitivos da Matemática, levou muito tempo para se pudesse representar notas musicais através números e, a partir daí, relacionar esse conceito com a Teoria Cantoriana e aplicar axiomas e operações da Matemática, como união, intersecção, complementaridade, e trabalhar com termos como pertinência, subconjunto, elemento, entre outros. Essa teoria desenvolveu também uma terminologia para a análise musical pautada em termos como *conjunto de classes de notas*¹⁴. Segundo Forte (1973), o repertório da

¹⁴ *Conjuntos de classes de notas* são os blocos constitutivos de muitas músicas pós-tonais. Um conjunto de classes de notas é uma coleção não ordenada de classes de notas. É um motivo pelo qual muitas características

Música atonal se caracteriza por combinações não usuais de notas, bem como combinações familiares de notas em ambientes não usuais.

Com objetivo de compreender as possibilidades mais finitas do universo cromático, os subconjuntos possíveis são reduzidos a sua *ordem normal* ou a sua *forma primária*, obtendo-se uma representação numérica de quaisquer subconjuntos da escala cromática dispostos em uma tabela que facilita uma referência rápida. Cada forma primária é agrupada de acordo com seu número cardinal, pela quantidade de elementos de cada conjunto. Por exemplo, o conjunto 3-1 designado por Forte (1973) configura a primeira forma (cromática) do cardinal 3, contendo as classes de altura 0,1,2. Pode-se dizer, dessa maneira, que a forma normal expressa a menor relação intervalar possível entre os elementos de um conjunto, sendo encontrada por meio da ordenação e permutação desses elementos, enquanto que a forma primária é encontrada quando uma forma normal é ajustada para que seu elemento inicial seja o 0. A terminologia é emprestada da Matemática. Dessa forma, um termo consagrado pela teoria musical como *som comum entre conjuntos* vem a ser renomeado como invariância, que na Teoria dos Conjuntos chamamos de *interseção*. Já as manipulações com os intervalos são chamadas de *operadores*, transposição (T), inversão (I) e multiplicação (M), para citar as principais.

1.3 Conceitos e definições básicos da Teoria dos Conjuntos em Música

Nesse momento, iremos abordar conceitos básicos de sistematização analítica para fornecer suporte metodológico para as análises da obra *Alma Brasileira* e exemplos que traremos nas categorias de análise. Estes modelos simbólicos permitirão analisar diferentes tipos de estruturas musicais e, paralelamente, destacar uma perspectiva didática que adquira aplicabilidade para o aluno e/ou professor nas áreas em questão – Matemática e Música – tentando ressignificar conceitos que, em alguns casos, fogem de uma intuição imediata e/ou que podem parecer muito abstratos. Nas análises propostas, alternaremos a representação numérica e a tradicional (com os nomes das notas, nomes dos intervalos, etc.), para que essa alternância nos dois processos de representação possa estimular o leitor a relacionar ambas ou permitir que escolha aquela que

identificadoras – registro, ritmo, ordem – foram ignoradas. O que permanece é simplesmente a identidade básica de classes de notas e de classes de intervalos de uma ideia musical (STRAUS, 2013, p. 29).

melhor se adapte.

Cabe frisar que são conceitos introdutórios de contextualização que não exigem o domínio de um instrumento musical, nem por parte do professor nem do aluno, o que não contrapõe a importância de que se leve a Música para sala de aula. Como proposta que dialoga e aproxima duas áreas, é de extrema importância ouvir as obras que estão nesse trabalho. Caso ainda o leitor tenha familiaridade com algum instrumento musical, por exemplo, um piano, teclado ou violão, é importante que toque os exemplos antes ou depois de ler as seções desse capítulo. Falar sobre Música e não ouvi-la se torna pouco produtivo e não informativo, e a apreciação da Música deve ser uma experiência vivida tanto pelo aluno quanto pelo professor. Como suporte, pode-se lançar mão da tecnologia que hoje nos fornece softwares e programas que simulam o som de teclado que mostre as 12 notas presentes no teclado. A proposta exige algum esforço, mas que pode ser suprido com leitura e prática aqui mencionadas sem nenhuma necessidade de que sejam instrumentistas. Observamos também que, no tópico da análise, usaremos conceitos da Música que devem ser compreendidos apenas como informação referencial, e não como um conceito a ser detalhado para uso, já que não se tem objetivo de tocar música ou analisar música, mas apropriar-se desse conhecimento contextual para estabelecer relações entre as áreas.

Esta pesquisa aborda algumas das características estruturais do sistema sonoro formado pelos doze meio-tons temperados, orientando-se para uma aplicação específica na obra do compositor Heitor Villa-Lobos e averiguando técnicas composicionais que contenham alguma racionalidade Matemática, com particular incidência para o estilo habitualmente chamado de *atonal*. Basearemos nossas análises nos eixos formal, melódico e harmônico, não abordando nesse trabalho teorias relacionadas ao ritmo ou aos contornos sonoros. A título de exemplificação, usaremos obras que fizeram parte de nossa revisão bibliográfica no âmbito *Teoria dos Conjuntos – Heitor Villa-Lobos*.

a. Representação em Números Inteiros

Se denominarmos a sequência de 12 sons da escala cromática do sistema temperado como sendo 0 para *do*, 1 para *do sustenido*, 2 para *ré*, e assim sucessivamente, teremos para o número 11 a nota *si* e o próximo *dó* podemos associar ao número 0 novamente (Tabela 1) – lembrando que notas de mesmo nome são consideradas equivalentes. Uma das razões principais para a utilização

de números inteiros para modelar os sons musicais do sistema temperado é que ambos partilham de várias propriedades comuns, das quais as mais importantes são os de serem ordenados e discretos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Dó	Dó# ou Réb	Ré	Ré# ou Mib	Mi	Fá	Fá# ou Solb	Sol	Sol# ou Láb	Lá	Lá# ou Sib	Si

Tabela 1 - Numeração da Escala Cromática

Com isso, sendo a nota s representada pela letra n , a nota meio tom acima de s será representada algebricamente pelo número inteiro $n + 1$ e, analogamente, a nota meio tom abaixo pelo número inteiro $n - 1$. Dizemos então que o conjunto dos números inteiros é um modelo para o conjunto dos sons musicais¹⁵ e, portanto, a manipulação do modelo poderá representar a manipulação daquilo que é modelado, desde que envolva apenas as características estruturais que são comuns a ambos. Poderemos então utilizar diversas propriedades inerentes ao funcionamento operativo dos números que poderão ser utilizadas para as notas musicais, e vice versa, levando em consideração alguma limitações (OLIVEIRA, 1998). Em nossas análises, as notas serão referenciadas por números em correspondência com as notas musicais, além da notação em forma silábica – dó, ré, mi, fá, etc. –. O conjunto de todas as notas musicais será representado pelo conjunto dos números inteiros no qual chamaremos de *espaço musical*.

b. Intervalos

Intervalo é um dos conceitos mais importantes em toda a teoria da Música. Se entendermos que estaremos lidando com um conjunto de notas musicais que formarão um espaço musical específico, podemos pensar em uma série de relações características desse espaço, tais como, por exemplo, distância, movimentos entre dois pontos, medidas de diversos tipos. Pensando de

¹⁵ Um conjunto de sons musicais da escala temperada é finito, diferentemente do conjunto dos números inteiros que é infinito. Estamos interessados nos sons audíveis para um ser humano, limitado aproximadamente pelas frequências entre 20 Hz e 20.000 Hz.

maneira abstrata chamaremos de intervalo o espaço¹⁶ entre dois pontos pertencentes a esse espaço musical. Então podemos afirmar que para dois pontos s e t pertencentes a este espaço musical (aqui usaremos a notação *int* para intervalo), temos:

$$\text{int}(s, t) = t - s$$

Por exemplo, aplicando essa definição, sendo $fa = 5$ e $si = 11$, temos:

$$\text{Int}(11, 5) = 6$$

O intervalo entre as notas *fa* e *si* é igual a 6 (ou seis meio-tons na escala cromática). Em Música classifica-se intervalos derivados do modelo teórico tonal. Embora nossas análises estejam pautadas pela numeração supracitada, é útil que também seja apresentada essa nomenclatura:

<i>nome tradicional</i>	<i>nº de semitons</i>
Uníssono	0
2ª menor	1
2ª maior, 3ª diminuta	2
3ª menor, 2ª aumentada	3
3ª maior, 4ª diminuta	4
4ª justa, 3ª aumentada	5
4ª aumentada, 5ª diminuta	6
5ª justa, 6ª diminuta	7
5ª aumentada, 6ª menor	8
6ª maior, 7ª diminuta	9
7ª menor, 6ª aumentada	10
7ª maior, 8ª diminuta	11

Tabela 2 - Principais intervalos

c. Equivalência

No espaço musical, há algo especial acerca do intervalo de oitava. Notas separadas por uma ou mais oitavas são geralmente percebidas como *equivalentes*¹⁷. O nome Ré, por exemplo, é dado

¹⁶ Na maioria das vezes, e em diversos livros de teoria musical, encontramos a definição de *intervalo* como sendo a distância entre duas notas. Mas, para nós, preferimos a opção de descrever intervalo como sendo um *espaço de separação* e não a distância entre duas notas, ligados ao conceito matemático de distância, que ultrapassa o caráter intuitivo que pretendemos transmitir nesse momento (OLIVEIRA, 1998, p. 2).

¹⁷ A notação musical reflete essa equivalência ao dar o mesmo nome às notas relacionadas por oitavas. Notas relacionadas por oitava são denominadas com um mesmo nome porque elas soam muito semelhantes e porque a música ocidental as trata como funcionalmente equivalentes (STRAUS, 2013).

não somente para uma nota específica, como o Ré que está a dois meio-tons do Dó central¹⁸, mas também a todas as outras notas que estão a uma ou mais oitavas acima ou abaixo dela. Podemos então concluir que elementos do espaço musical que estão uma ou mais oitavas de distância são considerados semelhantes – ou equivalentes –, por razões de ordem física, funcional ou mesmo histórica. No Espaço Musical há uma relação binária de equivalência que o particiona em subconjuntos disjuntos chamados *classes de equivalência*. A união de todas as classes de equivalência forma o espaço musical completo:

Uma classe de equivalência é formada por todas as notas que têm o mesmo nome, ou, em outras palavras, elementos do espaço musical que se encontrem separados pelo intervalo de oitava, ou seus múltiplos, pertencem à mesma classe de equivalência (OLIVEIRA, 2013, p. 4).

Por exemplo, para que duas notas s e t estejam em uma mesma classe de equivalência, essas têm que obedecer:

$$s = t + 12k \text{ (com } k \text{ sendo um número inteiro e o número 12 os sons da escala cromática)}$$

d. Classes de Notas e Classes de Altura

O espaço musical, já definido anteriormente, é constituído por uma sucessão cromática de notas que se estende para o agudo e para o grave *ad infinitum*. Também pode ser dividido em partes, tomando como base a relação de equivalência que correspondem aos 12 meio-tons da escala cromática. A estas classes de equivalencia chamaremos de Classes de Altura ou Classes de Notas¹⁹ – ou em inglês *pitch-class* (pc), assim temos:

Classe de Altura 0 = (... -48, -36, -24, -12, **0**, 12, 24, 36, 48, ...)

Classe de Altura 1 = (... -47, -35, -23, -11, **1**, 13, 25, 37, 49, ...)

Classe de Altura 2 = (... -46, -34, -22, -10, **2**, 14, 26, 38, 50, ...)

Classe de Altura 3 = (... -45, -33, -21, -9, **3**, 15, 27, 39, 51, ...)

...

...

¹⁸ As expressões Do central, Do3 e C3, referem-se à mesma nota, que é a nota "Dó 3", convencionada como referência para a extensão da maioria dos instrumentos musicais. É a nota que está exatamente no meio da pauta dupla, entre a pauta superior e a inferior.

¹⁹ Straus (2013) denomina Classes de Notas.

Classe de Altura 10 = (... -38, -26, -14, -2, **10**, 22, 34, 46, 58, ...)

Classe de Altura 11 = (... -37, -25, -13, -1, **11**, 23, 35, 47, 59, ...)

e. Classe de Intervalos

Como consequência dos conceitos anteriores, um intervalo entre classes de notas é também denominado de *classe de intervalos*. Como cada classe de notas contém várias notas individuais, a classe de intervalos também terá vários intervalos entre notas individuais. Com a equivalência de oitava, intervalos maiores do que uma oitava são considerados equivalentes às suas contrapartes dentro da oitava. Além disso, intervalos entre classes de notas maiores do que seis são considerados equivalentes aos seus complementos (Tabela 3):

classe de intervalos:	0	1	2	3	4	5	6
intervalos entre as notas:	0, 12, 24	1, 11, 13	2, 10, 14	3, 9, 15	4, 8, 16	5, 7, 17	6, 18

Tabela 3 – Classes de Intervalos (STRAUS, 2013, p. 11)

f. Notas e registros de oitava

Nota em Música é referente a altura do som. A nomenclatura atual notas musicais é atribuída a Guido D'arezzo e foram assim fixadas: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. Utilizaremos a altura relacionando essas notas com o teclado do piano, usando as notas dó como exemplo. O dó mais próximo do meio do teclado é chamado de dó central ou dó3 (dó três). Movendo para a direita do teclado teremos as notas dó mais agudas chamadas de dó4, dó5, dó6 e dó7. De maneira análoga, movendo para a esquerda do teclado teremos as notas dó mais graves, chamadas de dó2, dó1 e dó-1. Na figura abaixo representamos as notas no piano:

Figura 1 – Disposição das notas no teclado

Em inglês utiliza-se as primeiras letras do alfabeto para representar os nomes das notas em latim: A (lá), B (si), C (dó), D (ré), E (mi), F (Fá) e G (Sol). Em português utilizamos a nomenclatura latina e interpretamos as letras do alfabeto *A B C D E F G* como cifras que representam as notas.

g. Notação em pauta

Nosso sistema de notação musical é similar a um gráfico no plano cartesiano, com o tempo indicado no eixo das abscissas (x) e a altura no eixo das ordenadas (y). No exemplo abaixo, estão representadas duas notas, R ocorre antes é mais alta que a nota S:

Figura 2 – Eixo cartesiano em analogia à pauta musical (KOSTKA, 2006)

Uma pauta consiste em cinco linhas e quatro espaços em que é usada na Música para indicar altura e tempo da nota. Uma pauta pode ser infinitamente expandida através de linhas e espaços suplementares (Figura 3):

Figura 3 – Pauta com linhas suplementares

No começo da pauta temos um símbolo chamado *clave* que indicará que alturas irão ser associadas às linhas e espaços. As claves usadas neste trabalho serão a clave de sol e clave de fá.

Figura 4 – Claves (KOSTKA, 2006)

Teremos os acidentes que serão utilizados para grafar as notas na pauta, que são mostrados na tabela abaixo (Tabela 4):

#	Sustenido	Eleva em um semitom ²⁰ a nota natural
♯	Bequadro	Cancela um acidente
♭	Bemol	Abaixa em um semitom a nota natural

Tabela 4 – Acidentes

h. Escalas

Escalas são como conjuntos que contém como elementos notas musicais. Por exemplo, a escala de dó maior será um conjunto de notas diferente da escala de sol maior, que será diferente da escala de dó menor, e assim por diante. Escalas com mesmas notas em sua formação serão consideradas iguais, com por exemplo dó maior e lá menor, como veremos a seguir. Existem diversos tipos de escalas, cada uma com diferentes características e composição e, a título de exemplificação, mostraremos as escalas cromática, maior e menor, que são as mais utilizadas.

A escala cromática é a base da Música Ocidental. São doze notas, todas separadas por semitons. Começando no dó₃ na clave de sol, a representação dos números inteiros que apresentamos anteriormente será (são as doze notas da escala cromática utilizada na maioria das Música no ocidente):

²⁰ Um semitom é a distância entre uma tecla no teclado para a próxima tecla, seja ela branca ou preta.

Figura 5 – Notação em números inteiros para a escala cromática

A *escala maior* é um padrão com uma sucessão de semitons (meio tom) e tons (tom inteiro) dentro de uma oitava, assim como todas as outras escalas. Se pensarmos somente nas teclas brancas, teremos dois semitons dentro de uma oitava (oito notas de dó a dó), que serão entre o *mi* e *fá* e entre *si* e *dó*. Um tom inteiro iremos para a segunda nota mais próxima. Usando novamente as teclas brancas do teclado teremos cinco tons inteiros em cada oitava, entre o *dó* e *ré*; *ré* e *mi*; *fá* e *sol*; *sol* e *lá*; *lá* e *si*. Assim, o padrão da escala maior será tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom, que é o mesmo encontrado nas teclas brancas do teclado de um dó até o próximo dó (Figura 6):

Figura 6 – Escala de dó maior com tons e semitons.

A *escala menor*, também denominada de *escala menor natural*, terá sua formação intervalar com tom-semitom-tom-tom-semitom-tom-tom. Essa escala pode ser comparada com a escala maior com 3ª, 6ª e 7ª notas abaixadas em meio tom, como ilustramos abaixo:

Dó maior	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
Grau da escala	1	2	3	4	5	6	7	1
Dó menor	dó	ré	mib	fá	sol	lab	sib	dó

Obs.: Temos também as escalas menor harmônica, com a 3ª e 6ª abaixada, e a menor melódica, com somente a 3ª abaixada em relação a escala maior. Essas duas escalas são menos usadas e funcionam como uma extensão da escala menor natural. Abaixo, a comparação entre as escalas

dó menor harmônica e dó menor melódica em relação a escala de dó maior:

Dó maior	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
Grau da escala	1	2	3	4	5	6	7	1
Dó menor harmônica	dó	ré	mib	fá	sol	lab	si	dó

Dó maior	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
Grau da escala	1	2	3	4	5	6	7	1
Dó menor melódica ascendente	dó	ré	mib	fá	sol	lá	si	dó

d. Armaduras de Claves

É um padrão de sustenidos ou bemóis que aparecem no começo de um pentagrama e indicam que certas notas grafadas naquela linha ou espaço serão alteradas de forma ascendente – com os sustenidos – ou descendente – com os bemóis. Podemos relacionar as armaduras de clave com as escalas maiores e menores através do padrão de tons e semitons que apresentamos anteriormente. Em cada caso, podemos encontrar a escala maior – ou a respectiva tonalidade – subindo em meio tom a partir do último sustenido (Figura 7):

Figura 7 – Armaduras de claves de escalas com sustenidos.

Há também sete armaduras de clave que usam bemóis. Exceto a tonalidade de fá maior, o nome da escala e sua respectiva tonalidade é a mesma do penúltimo bemol na armadura de clave:

Figura 8 – Armaduras de claves de escalas com bemóis

Podemos memorizar as armaduras de clave através do Ciclo das Quintas, que é um diagrama

paracido com um relógio (Figura 9). No sentido horário temos a sequencia sempre com a próxima escala uma quinta abaixo. Neste ciclo, há também uma forma conveniente de achar as escalas relativas – escalas com as mesmas notas em sua formação – com os respectivos acidentes das escalas maiores e menores. Por fora a sequencia de escalas maiores (símbolos em letras maiúsculas) e por dentro a sequencia de escalas menores (símbolos em letras minúsculas):

Figura 9 – Armaduras de claves de escalas com sustenidos

2. A RACIONALIDADE NA MÚSICA DE VILLA-LOBOS

Os processos composicionais de Villa-Lobos figuram em diversos momentos em suas composições. Nesse capítulo iremos nos concentrar nessas técnicas que, de algum modo, mostram um procedimento composicional em que a racionalidade matemática esteja presente. Chamaremos esses processos composicionais – ou mesmo estruturas composicionais – de *Categorias de Análise*, e, para fins de delimitação, destacaremos (1) conjuntos e subconjuntos; (2) simetrias; (3) invariâncias; (4) complementaridade. Importante ressaltar que poderíamos incluir diversas categorias nessa análise, como matrizes, determinantes, vetores, permutações, entre outras, mas que não foram privilegiados devido à limitação temporal imposta por um trabalho de pesquisa. Para finalizar esse capítulo, propõe-se uma análise da obra *Choros nº5*, também conhecida por *Alma Brasileira*, como um estudo de caso em que ressaltaremos as quatro categorias citadas anteriormente.

2.1 Conjuntos e Subconjuntos

O termo conjunto²¹, utilizado em contextos musicais de análise, significa grupamentos de classes de alturas e se refere a motivos²² que sustentam composições de algumas composições – principalmente aquelas com características pós-tonais. Esse conjunto pode aparecer melodicamente (notas em sequência), harmonicamente (notas tocadas simultaneamente), conter ou estar contido em subconjuntos, conter entre 0 e 12 classes de alturas, etc. Os conjuntos são, na maioria das vezes, utilizados com as terminologias tricorde, tetracorde, pentacorde, hexacorde, heptacorde e octacorde em sua classificação. Já o termo classe de conjuntos refere-se aos conjuntos relacionados uns aos outros, tanto pela transposição quanto pela inversão. Os conjuntos podem ser relacionados pelo número de classes de alturas que contêm ou por seu conteúdo

²¹ *Conjunto* se refere aos motivos que fundamentam a estrutura de alturas, em que a estrutura motivica é a base de todas as melodias e de todas as harmonias, de todos os grupamentos de alturas e, ainda, das vozes condutoras. “Por isso, precisamos de um outro termo – substituindo o termo 'motivo' – que descreva estas estruturas formadas por alturas. Este termo é 'conjunto', significando grupamentos de alturas”. (Lester, 1989, pp. 11-13).

²² “Na musica pós-tonal, os motivos são essenciais na determinação das alturas da peça, porque não há nenhuma linguagem de alturas comum a todas as peças” (Lester, 1989, p. 4).

intervalar (KOSTKA, 1999, p. 97). Para compreender as possibilidades finitas do universo da escala cromática, os subconjuntos possíveis são reduzidos à sua *ordem normal* ou em sua *forma primária*. Obtemos assim uma representação numérica de todos os subconjuntos da escala cromática, dispostos em uma tabela ordenada, sistematizada por Forte²³ (1973) em uma tabela com 220 formas primárias – ver apêndice – às quais atribuiu um número de classificação, chamado FN (Forte *number*). Cada uma das formas primárias é designada pela quantidade de elementos de cada conjunto. Por exemplo, o conjunto 3-1 é a primeira forma (cromática) do cardinal 3, contendo as classes de altura 0,1,2. A forma normal expressa assim a menor relação intervalar possível entre os elementos de um conjunto, sendo encontrada por meio da ordenação e permutação desses elementos. Já a forma primária é encontrada quando uma forma normal é ajustada para que seu elemento inicial seja o 0.

O artigo *Organização harmônica no movimento final do Quarteto de Cordas nº 15 de Villa-Lobos*²⁴ de Paulo de Tarso Salles (2008) mostra conjuntos e subconjuntos no trecho inicial do quarto movimento, obra composta em Nova Iorque em 1952 e dedicada ao *The New Music Quartet*. Para o autor, a curiosidade despertada pelo modo como a harmonia assume uma característica não-tonal foi o motivo da escolha desse movimento. Em função dessa característica, a adoção de uma técnica analítica como a Teoria dos Conjuntos pareceu ser bastante pertinente.

O autor diz que o problema inicial para o emprego analítico da Teoria dos Conjuntos é a segmentação do material musical em unidades significativa pois trata-se de um recorte arbitrário que requer certo bom senso e não está livre de imperfeições. Nesses casos, o emprego de conjuntos de notas e subconjuntos é feito para segmentar o material musical que vai ser analisado, procurando seguir, por exemplo, frases melódicas em planos definidos como melodia principal inicial – tocadas pelo violoncelo – e imitações pelos outros instrumentos. Salles observa, dessa forma, que a superposição progressiva das melodias secundárias gera formações

²³ Forte (1973) elencou todas as classes de conjuntos possíveis, a *Lista de formas primitivas dos conjuntos de classes de notas*, criando também uma nomenclatura numérica para distingui-las, onde o primeiro número indica a *cardinalidade*, ou seja, quantas classes de notas distintas formam o conjunto e o segundo número, a *ordem* do conjunto na lista de formas primitivas. Por exemplo, o conjunto 4-3 possui cardinalidade 4, ou seja, é formado por quatro classes de notas e é o terceiro conjunto de cardinalidade 4 que aparece na lista de Forte, que poderá ser consultada em um dos anexos desse trabalho.

²⁴ Disponível em: <http://www.anppom.com.br/anaais/anaiscongresso_anppom_2008/comunicas/COM341%20-%20Salles.pdf> . Acesso em: 10 de outubro 2013.

de acordes (conjuntos), aparecendo principalmente nas partes de cello, viola e 2º violino nos compassos 10-12. Após a segmentação do material, podemos observar na figura que são formados vários subconjuntos todos originados do conjunto (4-7) mostrando uma quantidade de sons comuns entre esses subconjuntos. Uma maneira possível de apresentar esse exemplo é evidenciando esses conjuntos a partir do som, experimentando esses conjuntos auditivamente e tocando em um teclado ou violão as notas de cada conjunto. Mesmo sendo notas diferentes, a sensação de equivalência será ouvida, pois se trata de conjuntos com os mesmos intervalos em regiões diferentes (é mais fácil observar visualmente no teclado). O aluno que tem maior afinidade com a Música poderá entender que se trata de conjuntos iguais tocados em regiões diferentes, mas com o mesmo *espaço* intervalar.

The figure shows a musical score for cello and viola. The melody is segmented into tetrads (4-7). The notes are labeled with pitch classes (0-11) and the intervals between them are shown in parentheses. The segments are as follows:

- Segment 1: 2 3 11 10 (4-7 (10 11 2 3))
- Segment 2: 5 6 2 1 (4-7 (1 2 5 6))
- Segment 3: 7 8 4 3 (4-7 (3 4 7 8))
- Segment 4: 0 1 9 8 (4-7 (8 9 0 1))
- Segment 5: 5 6 2 1 (4-7 (1 2 5 6))
- Segment 6: 7 8 4 3 (4-7 (3 4 7 8))

Arrows indicate the relationship between the segments and the overall structure. The intervals 8-1 (8 9 10 11 0 1 2 3) and 5-3 (10 11 1 2 3) are shown above the first two segments. The interval 8-1 (1 2 3 4 5 6 7 8) is shown above the third segment. The interval 8-1 is shown above the fifth segment.

Figura 10 - Melodia principal segmentada em tetracordes 4-7. Os números utilizados imediatamente abaixo das notas na partitura são suas classes de alturas e os números entre parenteses são a forma normal de cada conjunto

2.2 Simetria

Um aspecto importante na obra de Villa-Lobos diz respeito à simetria²⁵. O compositor evidencia esse conceito em diversas de suas composições em consonância com compositores que também utilizaram esse aspecto em suas obras, tais como Stravinsky, Webern, entre outros. Para Weyl (1952) simetria – termo originalmente vindo da geometria analítica – é uma ideia que, ao longo dos tempos, os homens têm tentado compreender e criar ordem, beleza e perfeição. Em Música, esse conceito tem a noção de uma *harmonia de proporções*, associada a uma beleza ideal e clássica. Tal conceito relaciona-se ao aspecto geométrico e pode se apresentar nas formas bilateral, translacional, rotacional e ornamental. Para esse trabalho, nos concentraremos nos três

²⁵ Nesse trabalho, iremos discutir simetria baseados nos estudos de Weyl (1997) e Salles (2009).

primeiros tipos de simetria, pois, em Música, é mais fácil a percepção dessas três primeiras formas, por serem bidimensionais e por poderem ser mais bem percebidas quando analisamos a Música na partitura (SALLES, 2009).

A simetria bilateral ou simetria de reflexão acontece quando uma figura, quando refletida em relação a um eixo (eixo de simetria), corresponde ponto a ponto com a imagem original. Reflexão é a simetria bilateral obtida colocando-se um objeto diante de um espelho e considerando-se a forma e sua imagem. Na simetria de reflexão existe um eixo que poderá estar na figura ou fora dela, e que servirá como um espelho refletindo a imagem da figura desenhada. A figura poderá ter vários eixos de simetria.

Weyl (1952), quanto a esse tipo de simetria, pontua se tratar de um conceito absolutamente preciso e estritamente geométrico. Um objeto, ente ou forma que possui simetria de reflexão tem um plano imaginário que divide em duas partes idênticas de natureza espetacular. Esses eixos são encontrados na Arquitetura, na Geometria Plana, na Biologia, no Desenho Geométrico etc. A simetria de translação existe uma mudança que preserve a figura, podendo-se movimentar em qualquer direção de forma que a alteração coincida com a figura original. Translação é um movimento tal que todos os pontos da figura percorrem segmentos paralelos de mesmo comprimento.

Outro exemplo de simetria de que nos fala Weyl é a rotação ao redor de um ponto, que e quando existe uma rotação diferente da identidade que preserve a figura. Pode-se dizer que ocorre simetria rotacional quando um objeto girado sob um eixo permanece inalterado. Rotação é um movimento onde todos os pontos de circunferências com centro em O e todos esses arcos correspondem a uma medida de ângulo. Ela é uma simetria simples também chamada de simetria cíclica ou simetria rotatória. Na simetria de rotação a figura toda gira em torno de um ponto que pode estar na figura ou fora dela, e cada ponto da figura percorre um ângulo com vértice nesse ponto.

O artigo *Simetria na forma e no material harmônico da Ciranda nº 4 de Villa-Lobos* de Ronaldo Alvez Penteado (2012) propõe uma análise de aspectos da simetria como elemento estrutural da obra – também conhecida como Sapo Jururu, de Heitor Villa-Lobos. Essa peça, de 1926, relaciona a temática folclórica de superfície a uma tendência de composição pós-tonal da época, que consistia em recorrer à simetria para elaborar o material formal e harmônico da seção não tonal da peça. A seção A pode ser segmentada em duas partes: *a1* que vai do começo da peça até

a primeira parte do compasso 3, e *a2*, que vai do final do compasso 3 até o compasso 4. A linha tracejada no segmento abaixo indica a segmentação em *a1* e *a2* da seção A (Figura 11). A redução do segmento *a1* na recorrência da seção A ressalta uma característica do processo composicional de Villa-Lobos: passagens com forte identidade simétrica, mas em que a segunda metade traz alguma seção que se apresenta desconstruída em relação à primeira.

Figura 11 - Linha tracejada indicando a segmentação dos trechos *a1* e *a2* da seção A (PENTEADO, 2012)

No campo formal, a peça apresenta um padrão de simetria translacional: Ao falarmos em forma ternária do tipo A-B-A, por exemplo, reconhecemos um padrão que é translacional quanto há a repetição da seção A. Nenhum elemento novo exceto ao fato de, com a segmentação da seção A, verificar-se o padrão de simetria do tipo rotacional. Na reapresentação da seção A, após o término da seção B, Villa-Lobos apresenta o segmento *a2* e encerra a peça com o segmento *a1* (Tabela 5). Nesse sentido, tendo a seção B como eixo, a simetria é do tipo rotacional:

Seção A		Seção B	Seção A	
a1	a2		a2	a1

Eixo de simetria

Tabela 5 - Padrão simétrico da forma da música (PENTEADO, 2012)

Outros exemplos de simetria aparecem na dissertação de mestrado *Os Voos d'o Passarinho de Pano e análise dos processos composicionais na suíte Prole do Bebê nº2 de Villa-Lobos* de Walter Nery Filho (2009). O autor usa a Teoria dos Conjuntos como metodologia e comprova a preferência do compositor por elementos de estruturação ligados a processos de simetria, o que contribui, segundo Walter Filho, para desmitificar argumentações relacionadas a uma certa falta

de técnica como compositor. No exemplo – *O Passarinho de Pano* – observa-se que a nota Lá sobressai naturalmente por ser repetitiva e que sofre a ação de elementos melodicamente interferentes (Figura 12) que modificam a impressão causada por sua reiteração, o que causa uma sonoridade modulada. Aponta ainda que já nos compassos iniciais percebe-se a preocupação do compositor com aspectos de simetria:

Figura 12 - Simetrias formadas pela melodia utilizando a nota lá identificado pelos círculos (NERY FILHO, 2012)

O autor assinala outros exemplos de simetria nesta obra, como é o caso das unidades assinaladas com triângulos em que este fator transparece já em uma observação visual. Essa simetria revela-se ao comparar o conteúdo intervalar presente nas duas quíntas do compasso 18. Um eixo de simetria se estabelece pelo fato de ambas as estruturas formarem agrupamentos que pertencem à mesma classe de conjuntos:

Figura 13 - Eixo de simetria formado com conteúdos intervalares

2.3 Invariâncias

Quando um conjunto de classes de notas é transposto ou invertido, seu conteúdo mudará

inteiramente, parcialmente, ou não mudará. Notas mantidas em comum entre dois membros diferentes da mesma classe de conjuntos podem prover uma continuidade musical importante. De modo inverso, uma ausência de notas em comum pode enfatizar o contraste entre dois membros diferentes da mesma classe de conjuntos. Dessa maneira, um termo consagrado pela teoria musical como *som comum* será renomeado como *invariância*. Essa terminologia empregada é tomada de empréstimo da Matemática, em que podemos fazer uma analogia com o conceito de *intersecção*. As manipulações com os intervalos são chamadas de *operadores*, em que os principais são a transposição (T), a inversão (I) e a multiplicação (M). O número de invariâncias pode ser calculado a partir do *vetor intervalar*, em relação ao fator de transposição. O vetor intervalar consiste em um conjunto de seis classes de intervalos, que expressa todas as relações de intervalo em um conjunto de classes de altura, neste caso, o cálculo das invariâncias é mais complicado (FORTE, 1973).

O artigo *Análise do material harmônico nos compassos iniciais do Noneto de Villa-Lobos* de Paulo de Tarso Salles (2010) mostra invariâncias no material harmônico nos compassos iniciais do Noneto, de Villa-Lobos entre conjuntos de notas. Nessa obra, pode-se observar uma complexa organização de simetrias e uso de algumas invariâncias, e, para tratar alguns agrupamentos sonoros dentro do sistema temperado, Salles se apropria da Teoria dos Conjuntos desenvolvida por Forte (1973). Após segmentação da música com unidades discretas para evidenciar um contexto pós-tonal na peça, adotando a nomenclatura de Forte (1973) para designação dos conjuntos sonoros que atuam como acordes, melodias e elementos de texturas. O autor considera, em primeiro plano, a interação entre a melodia do saxofone e o primeiro acorde tocado pelo piano, em que o tetracorde do sax e o hexacorde do piano apresentam uma invariância que funciona com eixo de simetria (as notas lá e do), coordenando as interações harmônicas com as demais alturas:

Figura 14 – Diagrama de Venn mostrando a invariância – intersecção – entre dois conjuntos

Outro exemplo de invariância acontece no compasso três em que o piano toca uma versão transposta de vários componentes do primeiro acorde, resultando no hexacorde 6-z26:

Figura 15 – Exemplo mostrando conjuntos, subconjuntos e invariâncias

2.4 Complementaridade

Em qualquer conjunto, as classes de notas que ele exclui constituem seu *complemento*. Portanto, o complemento do conjunto [3,6,7] é [8,9,10,11,0,1,2,4,5]. Todo conjunto e seu complemento, quando tomados juntos, por exemplo, no caso das notas musicais, devem conter todas as doze classes de notas e para qualquer conjunto contendo n elementos, seu complemento irá conter $12 - n$ elementos. Cabe observar que há uma semelhança intervalar entre um conjunto e seu complemento, que sempre possuem uma distribuição semelhante de intervalos (diferente da ideia de que quaisquer que sejam os intervalos que um conjunto tenha em quantidade, o seu complemento tem sempre menos). Para conjuntos complementares, a diferença no número de ocorrências de cada intervalo é igual à diferença entre o tamanho dos conjuntos. Exemplificando no contexto ainda da Música, se um tetracorde tem o vetor intervalar 021030, o seu complemento de oito notas terá o vetor 465472. O conjunto de oito notas tem quatro a mais de todos (exceto para o trítone, do qual ele tem dois a mais). Como se pode notar, o conjunto maior é como uma versão expandida do seu complemento menor.

Conjuntos relacionados por complemento têm uma distribuição proporcional de intervalos considerando-se que o conteúdo intervalar não é modificado pela transposição ou inversão, e o relacionamento intervalar é mantido mesmo quando os conjuntos são transpostos ou invertidos. Portanto, ainda quando os conjuntos não forem *literalmente complementares* (um contém as notas excluídas pelo outro), o relacionamento intervalar ainda é mantido desde que os conjuntos

sejam *abstratamente complementares* (membros das classes de conjuntos relacionados por complemento). Tomemos a exemplo os conjuntos $\{0,1,2\}$ e $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Eles não configuram complementos literais um do outro, basta notar que todos os membros do primeiro conjunto estão contidos no segundo. No entanto, são membros de classes de conjuntos relacionados por complemento e têm uma distribuição semelhante de intervalos. Conjuntos relacionados por complemento não tem tanto em comum quanto conjuntos relacionados por transposição ou inversão, mas eles têm uma sonoridade semelhante por causa da semelhança do seu conteúdo intervalar.

A relação de complemento tem particular importância em músicas nas quais as doze classes de notas estejam circulando relativamente livres e na qual o agregado (uma coleção contendo todas as doze classes de notas) seja uma unidade estrutural importante. Os cardinais, cuja soma é 12, são *complementares*. Dessa maneira, as coleções pentatônica (5-35) e diatônica (7-35) são complementares entre si, visto que a ordenação dos conjuntos de classes de altura na tabela de Forte dispõe os conjuntos de acordo com esse critério, e alguns hexacordes são complementares a si próprios. A complementaridade também acontece entre versões transpostas ou invertidas do mesmo conjunto de classes de altura, em que essas versões complementam-se para formar o total cromático. Outra propriedade também associada à noção de complemento chama-se *similaridade*, que pode ser observada em classe de alturas e em classe de intervalos.

A dissertação de mestrado *Concerto para Piano e Orquestra nº 1 de Villa-Lobos: um estudo analítico-interpretativo* de Raimundo Fortes (2004) mostra aspectos de complementaridade quando aborda o uso intencional por Villa-Lobos de padrões e combinações entre teclas brancas e pretas do piano. Nesse trabalho, Fortes caracteriza essa complementaridade no segundo capítulo *A Politonalidade*²⁶ *das Teclas Brancas e Pretas*, a partir de diversos exemplos. Em um dos exemplos evidencia a utilização estruturada melodicamente por teclas brancas na parte superior e pretas na parte inferior da partitura (mão direita e esquerda) e ainda o acorde final deste trecho (Figura 16):

²⁶ Termo que designa a superposição de melodias, cada qual com uma tonalidade diferente.

Figura 16 – Notas para a mão esquerda e direita do piano (OLIVEIRA, 1984, p. 22)

Outro artigo de referência que fala sobre complementaridades entre teclas brancas e pretas utilizadas por Villa-Lobos é o *Black Key versus White Key: a Villa-Lobos device*²⁷, de Jamary Oliveira (1984). Nesse artigo o autor comenta que a combinação de teclas pretas e brancas era uma preocupação real de Villa-Lobos em suas peças, utilizando este recurso até o extremo, com óbvias consequências para seu próprio estilo. Villa-Lobos mostra que o uso das possibilidades de alternância entre teclas pretas e brancas pode ser visto de duas maneiras. Em primeiro lugar, como próprio de seu tratamento em relação ao número de notas, tanto melodicamente e harmonicamente alternância; e, em segundo como a formação motivica e sua relação com a batida subdivisão.

2.5 Choros nº5 *Alma Brasileira*

Não escrevo dissonante para ser moderno. De maneira nenhuma. O que escrevo é consequência cósmica dos estudos que fiz, da síntese a que cheguei para espelhar uma natureza como a do Brasil. Quando procurei

²⁷ Disponível em: <http://moodle.stoa.usp.br/file.php/604/Black_Key_versus_White_Key_OLIVEIRA_.pdf>. Acesso em: 10 de outubro 2013.

formar a minha cultura, guiado pelo meu próprio instinto e tirocínio, verifiquei que só poderia chegar a uma conclusão de saber consciente, pesquisando, estudando obras que, à primeira vista, nada tinham de musicais. Assim, o meu primeiro livro foi o mapa do Brasil, o Brasil que eu palmilhei, cidade por cidade, estado por estado, floresta por floresta, perscrutando a alma de uma terra. Depois, o caráter dos homens dessa terra. Depois, as maravilhas naturais dessa terra. Prossegui, confrontando esses meus estudos com obras estrangeiras, e procurei um ponto de apoio para firmar o personalismo e a inalterabilidade das minhas idéias.

Heitor Villa-Lobos

Composta em 1925, o Choros nº5 – também chamado de *Alma Brasileira* – é uma das composições mais conhecidas e executadas de Villa-Lobos para piano. Com 4' 30" (gravação do Autor) de duração, a obra foi dedicada à Arnaldo Guinle e teve como primeira audição conhecida em 16 de outubro 1940, no Festival de Música Brasileira no Museu de Arte Moderna de Nova Iorque, interpretada por Bernardo Segall (VILLA-LOBOS, 2009, p. 13). Villa-Lobos estava em uma fase de afirmação de suas técnicas e de um *idioma* brasileiro e nacionalista na arte de compor.

Nesse rápido panorama sobre o Choros nº 5 observamos não só o uso de estruturas diatônicas, mas também estratégias tonais tradicionais, como os recursos mais utilizados pelo compositor nessa obra. A utilização de tópicos bárbaros e indígenas na seção central corresponde à tentativa de representação de uma vertente ancestral que faria parte do tripé ibérico-africano-indígena que comporia a Música popular brasileira e que serviria como mote para a produção dos Choros. Um conceito que parece explicar essa associação natural é o domínio musical do ruído e a estrutura atabaque ao piano utilizada a partir do compasso 34 que reforça essa interpretação com sua percussividade e caráter tribal. Por outro lado, o Choro nº 5 lega aos elementos diatônico-tonais o papel de representantes da tradição, ainda que remetentes a elementos historicamente mais recentes do que as tribos indígenas e são mais antigos do que os dispositivos musicais utilizados na representação dos indígenas (ultracromatismo, octatonismo, etc.).

Por fim, na repetição da seção A, Villa-Lobos encerra com um arpejo não-diatônico cadencial, finalizado com o acorde de dó maior com quinta aumentada e sétima maior, onde evidencia a importância da sonoridade dissonante em sua síntese final entre Música Popular e vanguardística, bem como uma reminiscência de sentimento nacional posto ao fim da peça. Mostra um procedimento inverso ao do compasso 45, com o qual obtém dissonâncias que resultam da bricolagem de estruturas musicais tradicionais - as tríades. Em resumo, o que importa para Villa-Lobos, tanto nessa obra quanto nas outras em análise, é a interação e a recriação, processos dinâmicos e fluidos que se delineiam como fundamentais para a compreensão desse repertório em que as estruturas musicais constroem poéticas de modernidade e sugestões de brasilidade.

Nessa música, Villa-Lobos associa estruturas diatônicas à civilidade:

(...) poucos anos depois de finda a guerra, e não sem ter antes vivido a experiência bruta da Semana de Arte Moderna, de São Paulo, abandonava consciente e sistematicamente o seu internacionalismo afrancesado, para se tornar o iniciador e figura máxima da Fase Nacionalista em que estamos (ANDRADE, 1939/91, p.25).

Tal declaração tangencia dois pontos pertinentes ao objeto de análise dos Choros nº 5: o sentimentalismo e a tristeza. Villa-Lobos possuía certa tendência ao exagero em suas afirmações, como Mário de Andrade deixava exposto em suas falas: Villa-Lobos é oito ou oitenta. E somos forçados a reconhecer que mais numerosamente ele não se deixa ficar no oito das descrições e das sabedorias, em vez, prefere o oitenta dos espalhafatos, dos espetáculos, das teorizações nascidas em cima da hora.

O processo de análise começa com a segmentação da escolha das alturas, ou seja, um conjunto de notas (ou alturas) estruturalmente relevantes. Depois, classifica-se esse conjunto a partir das Tabelas de Forte e então atribui a esse conjunto a distribuição de seus intervalos em sua forma compacta, conhecida com forma normal²⁸. A intenção da análise é mostrar exemplos da utilização de uma racionalidade matemática que estava presente nas técnicas composicionais de Villa-

²⁸ Um conjunto de classes de notas pode ser apresentado musicalmente de vários modos. Contrariamente, muitas figuras musicais diferentes podem representar o mesmo conjunto de classes de notas. Se quisermos ser capazes de reconhecer um conjunto de classes de notas, não importando como ele seja apresentado na música, será útil colocá-lo numa forma simples, compacta, e facilmente compreensível, chamada *forma normal*. A forma normal – a maneira mais compacta de escrever um conjunto de classes de notas – permite ver com mais facilidade os atributos essenciais de uma sonoridade e compará-la com outras sonoridades (STRAUS, 2013).

Lobos. Analisaremos os planos formal, harmônico e melódico em busca dessa racionalidade, dividindo em partes e adotando a Teoria dos Conjuntos e a nomenclatura de Allen Forte (1973) para designar conjuntos, subconjuntos, relações entre conjuntos, simetrias, proporções, complementos, grupamentos sonoros em forma de melodias, acordes, conjuntos de notas, entre outros.

A primeira seção da música (Parte A), que vai do compasso 1 ao 23, caracteriza-se por uma expressão um tanto melancólica devido às frequentes variações de dinâmica, articulação e andamento, associadas aos modos sobre os quais foi criada a melodia. Essa primeira parte pode ser dividida em duas seções. A primeira exposição do tema vai dos compassos 1 ao 11, no qual a melodia destaca-se sem a presença de outras linhas melódicas intermediárias (contrapontos). A segunda, que se inicia no compasso 12, propõe variações rítmicas no tema e uma linha melódica intermediária que acompanha a melodia da mão direita.

A estrutura harmônica é baseada em movimentos de característica tonal, com uso de tensões, especialmente as nonas, décimas terceiras e quartas suspensas. Em questão harmônica e melódica, a parte A é construída essencialmente sobre o modo menor natural e melódico na tonalidade de Mi. Nos compassos 1-3; 5-7; 9-14; 16-18; 20-22; verifica-se a escala menor natural de mi. Nos compassos 4 e 15, nota-se a escala Mi Menor Melódica. Nos compassos 5 e 16 podemos observar uma aproximação cromática superior à nota Lá e à nota Dó no acompanhamento (mão esquerda).

A segunda seção (Parte B) inicia no compasso 24 e prossegue até o 33. Nesse trecho há uma modulação para o tom homônimo maior (Mi Maior) e utiliza como uma passagem (Ponte) o compasso 24 onde antecipa na melodia e harmonia essa modulação (Figura 17). Com mais leveza e docilidade, utiliza figuras rítmicas típicas do baião e mantém a linha melódica intermediária que acompanha a melodia.

No compasso 33 (Parte C) há o uso da escala de tons inteiros de Dó# que logo se altera alcançando a nota Fa#. Essa nova parte, que resolvemos adotá-la como uma variação de B, traz agora um contraste em relação a parte A, tanto na forma melódica quanto na forma harmônica e rítmica. De maneira geral, a obra é baseada em um padrão de melodias acompanhadas, sendo que o ostinato funciona como uma base para o desenvolvimento da peça:

Ponte

Figura 17 - Compasso 24.

Uma Racionalidade Matemática em Alma Brasileira?

Nos dois primeiros compassos da parte A percebemos uma sequência de notas em blocos que são tocadas simultâneamente e em sequência em forma de acordes (Figura 18). Logo após a clave de Sol na parte superior do sistema de pautas, temos a armadura de clave com um sustenido, o que nos indica a tonalidade de Mi Menor. Esse bloco de notas pode ser visto como conjuntos e subconjuntos dessa escala, pois, numa rápida análise visual, sem necessariamente identificar cada nota, percebemos que não há acidente – sustenido ou bemol –, caracterizando que todas as notas desse trecho são notas da escala de Mi Menor:

Figura 18 – Sequências de conjuntos de notas utilizados como acompanhamento.

Vamos pensar na escala de Mi Menor como o conjunto universo, com as notas Mi, Fa#, Sol, Lá, Si, Dó e Ré, que poderemos substituir pelo conjunto numérico $\{4, 6, 7, 9, 11, 0, 2\}$ que aqui chamaremos de *conjunto* G . Temos os cinco subconjuntos: $G_1 = \{11, 4, 7\}$, $G_2 = \{0, 4, 9\}$, $G_3 =$

$\{2,5,11\}$, $G_4 = \{4,7,0\}$ e $G_5 = \{5,9,2\}$: Notar que o primeiro e o quarto subconjunto se repetem, pois estão ligados por uma ligadura, prolongando a execução do som obtido.

Para encontrar a *forma normal* (normal form), a *forma prima* (prime form) a fim de entender as origens desses acordes e como analisá-los a luz da Teoria dos Conjuntos, utilizaremos um programa que simula uma calculadora e que mostra rapidamente esses e outros operadores de conjunto de notas. Temos várias opções que são disponibilizadas gratuitamente via internet por diversos sites de universidades na maioria americanas. Um programa interessante, rápido e confiável chama-se *PC Set Calculator*²⁹ (Figura 19).

PC Set Calculator

Normal form: [6,7,9,11,0,2,4]
 Prime form: (013568T)
 ic vector: 254361
 Z-Mate: None
 n values for T_n invariance: 0
 n values for $T_n I$ invariance: 6

Subsets:
 Supersets:
 Matrix:
 © 2001 David Walters

Figura 19 - PC Set Calculator
 Fonte: www.mat.ca

Assim obtemos a forma normal para a escala de Mi Menor, que será $G = \{4, 6, 7, 9, 11, 0, 2\}$, que fará parte do heptacorde (7-35). É interessante notar que, exceto o subconjunto G_4 , que tem

²⁹ Disponível em <http://www.mta.ca/faculty/arts-letters/music/pc-set_project/calculator/pc_calculate.html>. Acesso em 17 de março de 2014. Acesso em: 10 de outubro 2013.

como sua forma prima o grupo (036), os outros subconjuntos vêm do mesmo grupo (037), que são conjuntos tricordes (3-11) e, de acordo com Forte (1973), podem ser considerados iguais. Villa-Lobos pode ter utilizado dessa técnica para harmonizar o trecho em questão com o objetivo de dar sentido de coesão no acompanhamento, fato que notamos ao ouvir a música nesse trecho. Abaixo (Tabela 6) apresentamos vários conjuntos tranpostos que podem ser utilizados para exercitar o uso de notas com números inteiros e também para outros exemplos de conjuntos que são muito utilizados em obras musicais:

Conjuntos (<i>sets</i>)	Número de FORTE (FN)	Classes de altura (<i>pitch classes</i>)							
M ₁ : escala diatônica	7-35	0	1	3	5	6	8	10	
M ₂ : tons inteiros	6-35	0	2	6	10	0	4	8	
M ₃ : tríade diminuta	4-28	0	3	9	3	6	0	6	
M ₄ : tríade aumentada	3-12	0	4	0	8	0	8	4	
M ₅ : escala cromática: heptacorde 1	7-1	0	5	3	1	6	4	2	
M ₆ : trítono		0	6	6	6	0	0	0	
M ₇ : escala cromática: heptacorde 2	7-1	0	7	9	11	6	8	10	
M ₈ : tríade aumentada	3-12	0	8	0	4	0	4	8	
M ₉ : tríade diminuta	4-28	0	9	3	9	6	0	6	
M ₁₀ : tons inteiros	6-35	0	10	8	2	0	8	4	
M ₁₁ : escala diatônica (inversão)	7-35	0	11	9	7	6	4	2	

Tabela 6 – Exemplos de conjuntos, número de Forte e classes de alturas
Fonte: Salles (2009)

Outro exemplo do uso de conjuntos aparece no compasso 50, no qual notamos o auge do desenvolvimento e, como veremos mais adiante, se encontra a seção áurea. Notamos novamente a presença do tricorde (3-11) no acompanhamento, com as notas {Si - Mi - Sol#} ou $G_6 = \{4,8,11\}$ e com um baixo pedal em Do#. Esse tricorde também apareceu anteriormente, nos compassos que analisamos anteriormente (Figura 20). Essa recorrência desse conjunto pode ser considerada como forma de dar unidade às diversas seções que temos na obra:

Figura 20 – Compassos 50 e 51

No final do compasso 30, a obra apresenta dois acordes que são estruturados de forma a dar sentido de finalização da Seção *B*, já preparando-se para uma mudança sonora e estrutural. Villa-Lobos então coloca dois conjuntos de notas – acordes – sobrepostos e arpejados (Figura 21). Neste compasso, o cacho de notas da pauta inferior – na qual encontra-se a clave de fá – é complementado com o cacho de notas da pauta superior – em que temos a clave de Sol. Nesse tipo de sistema de pautas, a mão esquerda do pianista toca na clave de Fá – pauta de baixo – e a mão direita na clave de Sol – pauta de cima. Aqui temos outro tipo de técnica composicional que nos mostra um sentido de complementaridade, muito usado por pianistas inclusive, e que veremos mais detalhadamente a seguir.

Em relação aos dois conjuntos, indentificamos na pauta de baixo um tetracorde $\{1, 3, 7, 9\}$ e na pauta de cima um pentacorde com as notas $\{1, 3, 6, 7, 11\}$. Com esses dois conjuntos dispostos podemos formar o conjunto união $\{1, 3, 6, 7, 9, 11\}$. Se ouvirmos separadamente cada conjunto de notas desse compasso final – reproduzindo por exemplo por meio de um teclado – notaremos que as notas $\{1, 3, 7\}$ serão repetidas. Mas se tocarmos os dois conjuntos simultaneamente essas notas não darão um sentido de duplicidade, o que mostra uma das características da união de dois conjuntos: quando há elementos repetidos não é necessário repetí-los no conjunto união:

Figura 21 - Compassos 29 – 30 mostrando os conjuntos arpejados no final do compasso 30 (destacado)

Atentando para os conjuntos, encontramos a intersecção, que chamaremos em música de invariância. São 3 notas formando o conjunto $\{1, 3, 7\}$ funcionando como uma elo de sustentação entre os acordes expostos (Figura 22). Outra forma de mostrar os acordes e suas invariâncias é pelo Diagrama de Venn, forma mais característica de representação de conjuntos em Matemática. Aqui observamos de forma gráfica a intersecção dos dois conjuntos:

Figura 22 - Invariância ou Intersecção entre dois conjuntos

Villa-Lobos utiliza o sentido de complemento quando se vale, no compasso 36 (Figura 23), do uso da técnica composicional de teclas brancas e pretas, técnica essa muito recorrente em suas obras para piano. Nesse compasso, e em boa parte da Seção C, o compositor utiliza na mão direita o conjunto $\{1, 3, 6, 10\}$, todas notas de teclas pretas, e na mão esquerda o conjunto $\{0, 4, 7\}$, todas notas de teclas brancas no piano³⁰.

³⁰ Nesse compasso há a utilização da nota do# na mão esquerda, o que caracterizaria uma nota preta do piano, mas que aqui estamos considerando como nota de apoio ou, em uma terminologia musical, appoggiatura.

Figura 23 - Compassos 34 a 36 com os conjuntos complementares

No compasso 42 o conceito de complemento aparece com a utilização de dois acordes sobrepostos formando a escala de Fa# pentatônico³¹. Neste trecho, o autor repete o conjunto {0,3,5} sobre a nota Si, completando a escala, com o conjunto {Fá# - Lá - Si/Si - Ré- Mi} e formando o conjunto {2, 4, 6, 9, 11}. Acompanhando o tricorde Si-Ré-Mi, o atabaque ao piano muda sua afinação opondo um Mi grave em uníssono às formações Mi-Si-Fá e Sol#- Dó#-Fá#, valorizando a polarização teclas brancas x teclas pretas, como no compasso 36:

Figura 24 - Compassos 40 a 42, formando a escala pentatônica de Fa# menor

Enquanto em outras obras Villa-Lobos mostrava vários elementos que apareciam muitas vezes sobrepostos e concorrentes, com texturas complexas do ponto de vista sonoro e da representação tópica, nessa composição ele elabora uma proposta de cada vez, mostrando uma estrutura formal³² bastante clara, quase didática. Iremos dividir a peça em quatro partes – ABCA – sendo essa divisão uma variação da forma ternária ABA, com a parte C funcionando como um

³¹ A escala de Fa# pentatônico é {Fa# - La - Si - Re - Mi} ou em numeração do conjunto {2, 4, 6, 9, 11}.

³² Estrutura Formal ou Forma Musical é o meio pelo qual uma composição é organizada.

desenvolvimento da parte *B* e com a ideia de apresentação-contraste-retorno. Identificamos uma primeira parte (*A*) apresentando o tema na tonalidade de Mi Menor – tonalidade principal da peça – um trecho menor (*B*), apresentando o tema na tonalidade de Mi Maior – tom homônimo – uma seção onde motivos e incisos dos dois temas anteriores são desenvolvidos (*C*) e finalmente o retorno ao primeiro tema (*A*):

Seções	Compassos	Nº de Compassos
A	1 – 24	24
B	25 – 32	8
C	33 – 64	32
A	65 – 80	16

Tabela 7 - Forma da música

Villa-Lobos apresenta nessa composição a forma com 32 compassos de apresentação (Seções *A* + *B*), 32 compassos de desenvolvimento (Seção *C*) e 16 compassos de retorno, voltando a primeira parte (Seção *A*). Percebemos então uma proporção 2:2:1 que diz respeito ao processo de simetria, presente em várias peças de Villa-Lobos. Conforme Salles (2009, p. 42) “o conceito de simetria em Música passa pelo senso comum atribuído a simetria em geral, com a noção um pouco vaga de uma *harmonia de proporções*, associada a uma beleza ideal, clássica”. A noção do sentido de simetria vem de Weyl (1952) com a ideia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos. Mas, no caso da obra em análise, podemos notar também essa simetria auditivamente ao perceber que a forma da música estabelece o modelo apresentação-desenvolvimento-retorno:

Figura 25 - Simetrias e proporções em Alma Brasileira (ASSIS, 2009, p. 67)

Quanto às divisões e relações entre as partes, eventos significativos recaem sobre pontos

proporcionais bem delimitados: a seção áurea encontra-se próxima do compasso 50³³ – auge do desenvolvimento; a metade da obra encontra-se próxima do compasso 38 – início do desenvolvimento; o primeiro terço encontra-se próximo ao compasso 25 – início da seção *B*; o segundo terço, próximo do compasso 50 – coincidente com a seção áurea. Outros eventos importantes ocorrem também a dois quintos da obra – compasso 32, coincidente com o início da transição para o desenvolvimento – e a quatro quintos, no compasso 65, com o início da reexposição do primeiro tema; relevante mencionar que a simetria encontrada entre a soma dos compassos em tonalidade maior e menor é a mesma (40 + 40 compassos).

Já no compasso 50, em que se nota o auge do desenvolvimento no qual se encontra a seção áurea, há novamente a presença do tricorde 3-11 no acompanhamento, agora com as notas {Si - Mi - Sol#} ou $G_6 = \{4,8,11\}$ e com um baixo pedal em Do#. A composição nesse momento assume uma característica atonal.

Figura 26 - Compassos 50 e 51

O conceito de Seção Áurea tem atraído à atenção de pesquisadores quanto a sua influência, consciente ou não, em compositores e ouvintes. Seção Áurea pode ser entendida como a divisão de um segmento de tal forma que o segmento menor relaciona-se ao segmento maior na mesma proporção em que o segmento maior relaciona-se com o segmento total, postulada por Euclides, em *Elementos*, como *divisão de meio e extremo* (BOYER, 1997).

Para que se possa chegar algebricamente ao número (*Phi*), considere: $m(AB) = 1$ unidade de comprimento, $m(AD) = x$ e $m(DB) = 1-x$:

³³ $80/1.618 \cong 50$, sendo 1.618 o número de ouro obtida pelo cálculo da seção aurea.

Obtém-se então a divisão de um segmento em média e extrema razão:

$$\frac{m(AB)}{m(AD)} = \frac{m(AD)}{m(DB)}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação encontram-se duas raízes:

$$x' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a raiz negativa, e calculando *Phi* através da razão $1/x$ obtemos o valor do número de ouro (razão aurea) igual a 1,618...

$$\text{Phi} = \frac{1}{x'} = 1,618 \dots$$

3. PROPOSTA DIDÁTICA

3.1 Introdução

Neste capítulo procuramos mostrar que as análises propostas, os processos composicionais de Villa-Lobos, a racionalidade matemática envolvida na criação e estruturação das composições abordadas, as associações do universo matemático com o universo musical, as diversas abordagens e respectivos signos e símbolos relacionando ambas as áreas podem contribuir no entendimento de conceitos matemáticos e musicais e favorecer para a emancipação de significados no qual há um grande potencial de conexão entre âmbitos afetivos e cognitivos. No cenário educacional mostramos a relação Matemática/Música por suas distintas qualidades, pois quando se estabelece relações entre cenários diferentes aos universos referidos, a associação de ideias favorece a emancipação de significados de caráter somente cognitivo para significados com identidade afetivo/cognitiva (ABDOUNUR, 1999).

Partimos do pressuposto de que as situações didático-pedagógicas que envolvem atividades musicais favorecem a afetividade. A Música cria um ambiente livre de tensões, facilita a sociabilização, cria um ambiente escolar mais abrangente e favorece o desenvolvimento afetivo. Na Música vários motivos são simultaneamente acionados, como audição, canto, dança, ritmo corporal e instrumental da criação melódica, contribuindo para o desenvolvimento da pessoa e para transformar o ato de aprender em uma atitude viva no cotidiano do professor e do aluno. Promove-se a interação com o outro, a capacidade de criar e experimentar, dinamizar a aprendizagem de conteúdos formais do currículo da escola e trazer vida ao ambiente escolar, estimulando a comunicação, a concentração e a capacidade de trabalhar e de se relacionar melhor em grupo.

Nesse sentido valorizaremos conceitos formais ao invés de atrelarmos a Música somente ao aspecto subjetivo, por muitas vezes tomada até como algo sobrenatural, já que é uma das áreas em que é muito comum evocar a noção de dom. Se o dom e/ou a aptidão são aspectos relevantes para o desenvolvimento e o aprendizado da linguagem musical, outros aspectos, como conceitos matemáticos, são imprescindíveis para o entendimento de alguns conceitos musicais e por isso não devem ser preteridos.

Nossa pesquisa se volta para alunos e professores de Licenciatura do Ensino Superior com um

foco nas áreas da Matemática e da Música. Um dos motivos que nos leva a enveredar por esses caminhos consiste na escassez de pesquisas voltadas a esse público. Além disso, a estrutura e organização do Ensino Superior no Brasil prepara um grupo social privilegiado e restrito para transmitir conhecimentos para camadas sociais menos privilegiadas e sempre se voltou para o domínio cognitivo do conhecimento, deixando renegada a questão da integração desse conhecimento com a afetividade (MAHONEY e ALMEIDA, 2011).

Pesquisadores da área da Educação que concentraram seus estudos na afetividade³⁴ avaliam o aspecto afetivo como indispensável no processo de ensino e aprendizagem e são unânimes em afirmar que nesse processo há desejos e paixões possíveis de identificar e entender e, dessa maneira criar condições favoráveis para o ensino-aprendizagem. Um ambiente afetivo é, nesse sentido, mais saudável e amigável e age diretamente como facilitador no ensino e aprendizado de diversas áreas do conhecimento (CAMPOS, 2013). Nossa proposta procura conectar-se com tendências mais recentes da Educação, dando ênfase aos sentimentos e ao emocional na tentativa de suscitar novas ideias para o desenvolvimento da criatividade. Para Abdounur (1999, p. 283), as relações entre Matemática e Música colaboram:

(...) para desbravar territórios cognitivos mais inóspitos ou temporariamente interditados por variações afetivas, por meio de pontes unificadas a regiões mais exploradas. Esquemas estruturais e dinâmicos agindo como suportes permitem-nos "desatolar" em circunstâncias cognitivas de difícil movimentação através da transferência para terras semeadas e fertilizadas afetivamente, onde o pensamento flui melhor. Tal procedimento torna a área de aparente dificuldade locomotora mais acessível à região inicial, agora reconhecidamente conectada a um território mais familiar.

Wallon nos convida a perceber isso, pois mostra em sua teoria a pessoa – criança – de modo integrado, com uma psicologia do desenvolvimento da personalidade concebida como integração entre afetividade e inteligência. Essa teoria se preocupa em estudar a gênese dos processos que constituem o psiquismo humano, com a intenção de compreender como vai se articulando a complexidade de fatores que constituem o psiquismo humano com um enfoque para a consciência. Diz ainda que influências afetivas acompanham a pessoa logo ao nascer e têm uma ação determinante na evolução mental da criança. À medida que o indivíduo (criança) percebe a vida, ele se dirige a “[...] automatismos que o desenvolvimento espontâneo das estruturas nervosas contêm em potência, e por intermédio deles, a reações de ordem íntima e fundamental.

³⁴Yves De La Taille, Marta Kohl de Oliveira, Heloysa Dantas, Sérgio Antônio da Silva Leite, Abdounur, Campos, entre outros.

Assim, o social se amalgama ao orgânico” (WALLON, 2007, p. 122). Há uma evolução progressiva da afetividade, tendo um distanciamento das manifestações da base orgânica e progressivamente relacionando ao social, e isso é visto em suas teorias do desenvolvimento e das emoções, que permitiram evidenciar o social como origem da afetividade.

Leite (2006, p. 16) pontua que, embora a discussão sobre afetividade tem ganhado grande destaque atualmente em pesquisas da área de Educação ela não foi considerada como parte central na constituição humana visto que:

(...) além do dualismo razão/emoção, durante séculos o pensamento dominante sempre caracterizou a razão como a dimensão mais importante, sendo a emoção, em vários momentos históricos, considerada o elemento desagregador da racionalidade, responsável pelas reações inadequadas do ser humano.

Essa representação teve um papel crucial nos currículos e conteúdos escolares, contribuindo para que se considere a dimensão racional e cognitiva mais importante que as influências dos aspectos emocionais e afetivos. Mas foi a partir do século XX, com o surgimento de novas concepções voltadas para determinantes culturais, históricos e sociais da condição humana, que se criou condições para avançarmos na compreensão das dimensões afetivas no desenvolvimento humano e nas relações entre razão e emoção³⁵. Leite (2006) afirma também que o aspecto afetivo não se encontra apenas na interação direta entre aluno e professor e sim no planejamento de práticas pedagógicas pelo professor, no desenvolvimento de objetivos de ensino, na escolha do tipo de atividade que será desenvolvida em sala de aula, na organização dos conteúdos, no respeito ao conhecimento que o aluno envolvido traz e nas práticas de avaliação. O ensino praticado atualmente nas escolas se mostra, muitas vezes, como uma mera transmissão de técnicas e modelos – um ensino bancário, como dizia Paulo Freire – sendo o aluno um mero espectador e sendo avaliado como aquele que melhor reproduz o que o professor escreveu no quadro ou talvez o que está nos livros adotados.

Nesta pesquisa as relações entre Música e Matemática visam contribuir para a valorização do aspecto interdisciplinar/transdisciplinar e para que o aluno possa trazer o conteúdo para o campo de

³⁵ Davydov (1999, p. 1) nos diz que “a coisa mais importante na atividade científica não é a reflexão, nem o pensamento, nem a tarefa, mas as esferas das necessidades e emoções. (...) As emoções capacitam a pessoa a decidir, desde o início, se, de fato, existem meios físicos, espirituais e morais necessários para que ela consiga atingir seus objetivos”.

conhecimento mais permeado por uma afinidade, valorizando-se, portanto, o contexto em que o aluno se insere. Em consonância com D'Ambrósio (2004, p.16). “a *transdisciplinaridade* é um enfoque holístico ao conhecimento que se apoia na recuperação das várias dimensões do ser humano para a compreensão do mundo na sua integralidade” O enfoque transdisciplinar coloca a busca incessante pelo saber em primeiro plano e substitui a arrogância de comportamentos incontestados. Como consequência, promove o desenvolvimento de posturas de respeito, solidariedade e cooperação.

Morin (2005) diz que a educação deve ser baseada mais na construção do conhecimento pelo aluno e menos na pura e simples assimilação do conteúdo ministrado. O conhecimento deve ser visto em um contexto e não de forma isolada, criticando assim as especializações e a departamentização do ensino, indo ao encontro da visão transdisciplinar do ensino e aprendizagem. O importante na proposta trazida aqui se concentra na necessidade de tornar evidente o cenário multidirecional, contrastando com um conhecimento fragmentado, como saberes desunidos, divididos, compartimentados, mostrando a necessidade de resgatar a percepção da totalidade com realidades ou problemas cada vez mais multidisciplinares, transversais, multidimensionais, transnacionais, globais e planetários. A contribuição para a educação vai além da interdisciplinaridade e aponta para um caminho que a transcende em seus limites e possibilidades, propondo a prática transdisciplinar.

O século XX é marcado pelo fenômeno do aumento do número de disciplinas, em que o ritmo que se dão as descobertas é tão veloz que mesmo a figura do especialista que surge nessa época, não é capaz de acompanhá-las e manter-se atualizado. Diante da impossibilidade de, sendo criadas tais disciplinas, eliminá-las, a interdisciplinaridade manifesta-se, nesse contexto, como um esforço de correlacioná-las. Segundo Weil (1993), os teóricos da interdisciplinaridade argumentam que todas as disciplinas são inter-relacionadas e que por esse mesmo motivo a via interdisciplinar mostra-se ainda insuficiente para reorganizar o *caos* proporcionado pela multidisciplinaridade, em que seria necessário então avançar no processo de recuperação do todo por meio da transdisciplinaridade.

Não se trata, aqui, de negar ou combater a especialização. Trata-se, antes, de redimensioná-la numa perspectiva que possa contemplar, conjunturalmente, os pólos estabilidade e movimento, concordância e divergência; redimensioná-la numa perspectiva que entenda a disciplina não como saber isolado, mas como uma articulação contínua de saberes fragmentados, evitando-se

generalizações. No entanto, para que a transdisciplinaridade transponha o campo teórico e se materialize institucionalmente é indispensável que não seja via uma imposição hierárquica *de cima*; mas viabilizada progressivamente por meio de sínteses interdisciplinares construída na base das organizações, do debate, da reflexão e do trabalho coletivo.

Outro importante meio de ressignificação dos conceitos abordados nas relações entre Matemática e Música vem por meio de analogias. Através de procedimentos semelhantes em ambas as áreas é possível criar atalhos para o acesso ao conhecimento por meio de analogias que possibilitem o desenvolvimento de esquemas e favorecer a fluência de pensamento. Para Abdounur (2002, p. 283):

(...) o pensamento analógico permite resgatar uma integração fisiológico/afetivo/mental, estimulando a impregnação de carga afetiva na comunicação, fator afetado fortemente pela situação de primazia mental referida. Encorajar o uso de analogias significa, ainda; semear o costume de se "pensar com o corpo inteiro", o que confere a esse mecanismo comparativo responsabilidade sobre a integridade pessoal.

Abdounur argumenta que o pensamento analógico permite que sejam criadas as condições para acessar áreas cognitivas comumente mais interditas por questões afetivas ao ligá-las as áreas mais exploradas e conhecidas. Esse procedimento torna a área de aparente dificuldade mais acessível à região inicial, agora reconhecidamente conectada a um território mais familiar. Em consonância com Abdounur, a junção de ideias de enredamento de significados de forma multidiretiva com as concepções de múltiplas inteligências propicia uma contínua prática de reconfiguração, construção e desmoronamento mentais, que são indispensáveis a representações mais flexíveis dos significados e a uma ampliação de uma estrutura e dinâmica de pensamento. Procuramos, nesse sentido, ressaltar a importância do desenvolvimento de uma certa atmosfera afetiva por meio da qual a analogia acontece com mais fluência e espontaneidade com o objetivo de acionar e agilizar esses processos que favorecem a humanização e estabelece uma relação intrínseca entre afetividade e pensamento analógico.

Procuramos aqui reforçar então, em diálogo com Abdounur, a importância do desenvolvimento da capacidade de realizar interpretações multidiretivas para a construção consciente de analogias, procurando ressaltar ainda a importância de analogias como atalhos no mundo afetivo/cognitivo para que se desenvolva a prática habitual do pensamento que conforme a teoria do pensamento analógico, sustenta-se em estrutura/dinâmicas distintas da teoria de múltiplas inteligências ou de alguma outra concepção para essa capacidade humana. Nesse sentido, o autor aponta ainda para a necessidade de se refletir sobre metodologias para alcançar o que chama de uma *espontaneidade*

liberdade mental, conquistada a partir da exploração de áreas mais impregnadas de afeto, para então efetuar análises simples e mais profundas e estabelecer relações entre Matemática e Música, eixos aqui privilegiados com o objetivo de reconhecer a relevância dos esquemas fornecidos na compreensão das raízes comuns a essas ciências.

Nesse contexto Abdounur argumenta que o pensamento analógico torna-se imprescindível na busca de mecanismos semelhantes ao de criação de trajetórias similares a áreas reconhecidas como distantes, esquemas subjacentes comuns regentes de conceitos aparentemente estanques. Tal *conduta* analógica nos conduz a desenvolver a prática de sempre se buscar e construir por meio do pensamento significados de uma maneira mais ampla, valendo-se dos esquemas que estão subjacentes e que ativam deslocamentos quanto ao ângulo de observação. Tal percepção, ao ser incorporada como uma prática orgânica e distanciando-se da apropriação mecanicista, num contexto de um grupo (como por exemplo um grupo de sala de aula), ativa a contínua construção e transformação de significados que, por esse mesmo motivo, passam a ser incorporados e experimentados de forma autêntica e permitem a construção também de uma certa liberdade e espontaneidade frente a cenários afetivos/cognitivos diversos. Reafirmamos que a crença na possibilidade que a efetivação dessa proposta permita o desencadeamento de uma conscientização de uma Inteligência Coletiva, sobre a qual, nos termos de Abdounur (1999), qualquer manifestação de nosso intelecto apoia-se e subjacente às diversas faces de mesmos esquemas, de significados comuns, bem como à estrutura do pensamento determinada por um cenário sócio-cultural em uma determinada época.

3.2 Oficinas Interdisciplinares

Pretende-se, nesse momento, apresentar propostas de atividades amparadas em concepções defendidas nesta obra a fim de ampliar o debate em relação ao uso didático das relações entre Matemática e Música. Iremos apresentar propostas sob forma de Oficina em que discutimos os planos de aulas aqui expostos. O público alvo são de professores de Matemática e Música, pedagogos e alunos de Licenciatura nas áreas de interesse.

A Oficina 1, que intitulamos *A Teoria dos Conjuntos de Cantor e Forte*, busca introduzir as principais questões conceituais e históricas da Teoria dos Conjuntos com base nos estudos de Georg Cantor e nas aplicações em Música por Allen Forte, tendo como eixos a apresentação da Teoria dos Conjuntos no currículo da escola e a Música no contexto da escola básica e a relação Matemática/Música no ensino e aprendizagem. Consideramos que a contextualização histórica corrobora para a percepção da longa trajetória necessária para construção dos conceitos muitas vezes tomados como prontos/acabados, de maneira a expor o desenvolvimento/evolução destes ao longo do tempo. Além disso, servem como motivação para o aprendizado de tópicos do conteúdo curricular. Posteriormente, trabalhar as aplicações desses conceitos em Música auxilia na percepção das amplas possibilidades em outras áreas e visa criar um espaço de aprendizado a partir das associações e analogias. Os participantes podem experimentar a construção de significados simultaneamente em Matemática e música e essa construção consolida-se na medida em que essas atividades dialogam com cenários históricos imbuídos nessa relação.

Na Oficina 2, *A Teoria dos Conjuntos Aplicada a Música*, temos o objetivo de trazer conceitos da Teoria dos Conjuntos com base em Georg Cantor e Allen Forte presentes em exemplos musicais, especificamente na obra musical de Villa-Lobos. Nesse sentido, essa Oficina tem caráter mais prático, procurando-se definir aquilo que chamamos de Categorias de Análise – Conjuntos, Simetria, Complementaridade e Invariâncias, relacionando-as a suas exemplificações auditivas, apresentando então algumas características do conhecimento musical atrelado a Teoria dos Conjuntos com uso de instrumentos musicais como violão, teclado, voz e nas audições das obras em questão. Parte-se do pressuposto de que essa forma de associação de ideias pode propiciar uma alternativa para o ensino de diversos conceitos da Teoria dos Conjuntos, além de dar suporte para análises em obras desse compositor, considerado um dos maiores compositores brasileiros.

Essa experiência torna-se significativa na medida em que promove a ampliação da noção de

conceitos antes atrelados a apenas um campo de saber e possibilita que os participantes vivenciem uma construção de conceitos na Matemática e na Música ao mesmo tempo, além de uma construção altamente significativa porque se caracteriza por permitir ativações sensoriais diversas que se entrecruzam, o que permite a conexão dos conceitos envolvidos nas categorias. Os procedimentos sinestésicos (processamento de sentidos diferentes como o visual e o auditivo) e analógicos auxiliam para a consolidação dos significados e promovem aproximações afetivas com esses campos do saber.

A Oficina 3 tem como enfoque a racionalidade matemática presente especificamente na obra Choros nº 5 – Alma Brasileira – composta por Heitor Villa-Lobos. Para evidenciar tal racionalidade, dividiremos a análise em categorias, já apresentadas na Oficina anterior. Nossa intenção é levar o leitor a perceber a relação Matemática/Música presente nessa obra, e tentar, a partir das análises, promover um debate sobre formas de apresentação desses conteúdos. Essa Oficina tem um enfoque mais analítico e, portanto, incluem-se atividades de apreciação musical. Construímos essa proposta partindo do pressuposto de que alternar procedimentos metodológicos pode contribuir para a dinâmica das aulas e na motivação dos envolvidos, possibilitando a construção de elos afetivos ao trazer a apreciação de Música para a sala de aula.

A Oficina 4, a última proposta nessa tese e nomeada *Implicações Educacionais na Relação Matemática/Música* objetiva reiterar para os participantes noções que de certa forma já possuem certa repercussão na educação e que estão presentes nas Licenciaturas e formações para professores, ainda que precisem ser sempre reativadas e re-contextualizadas. São elas as contribuições advindas do pensamento analógico, da transdisciplinaridade e afetividade. Ao procurar estabelecer relações analógicas entre conteúdos do currículo da Matemática, traduzidos com frequência por códigos numéricos, com aspectos da área da Música, reconhecidos por sons, o professor pode reconfigurar o pensamento de alunos que apresentam dificuldades na aprendizagem. Trata-se de trazer essas contribuições da educação para trabalhar com os participantes a construção de uma autonomia para elaborarem propostas de aula que conectem os conhecimentos envolvidos a um universo afetivo possível deles, enquanto professores, e de seus alunos. Como essa proposta específica tem como recorte Música e Matemática, pontuamos que não se trata de esperar que a Música explique completamente a Matemática e nem o contrário, visto que cada aptidão possui natureza própria e as analogias são sempre parciais.

3.2 Oficinas/Planos de Aula

*(...) ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades
para a sua própria produção ou a sua construção.
Paulo Freire*

OFICINA 1 – A Teoria dos Conjuntos de Cantor e Forte.

1.0 Introdução

A Teoria dos Conjuntos pode ser considerada como o ramo da Matemática dedicado ao estudo dos conjuntos e de suas propriedades. Durante séculos a noção intuitiva de *conjunto* foi usada tacitamente por matemáticos e filósofos: na era clássica da Matemática grega, com os silogismos de Aristóteles unindo Lógica e Matemática; no Século XIX com os estudos de George Boole e o uso dos conjuntos para representar *extensões* de conceitos lógicos; ou mesmo na abordagem de Riemann para a teoria das funções. Mas foi com Georg Cantor e Richard Dedekind, e a procura pela conceituação do infinito, que a Teoria dos Conjuntos ganhou status de linguagem universal para a Matemática. Nessa trajetória, há de se citar Allen Forte com a relação entre notas musicais e a Teoria dos Conjuntos, o que deu suporte para análise musical em obras musicais do Século XX.

2.0 Objetivo Geral

Introduzir às principais questões conceituais e históricas da Teoria dos Conjuntos com base nos estudos de Georg Cantor e nas aplicações em Música por Allen Forte.

2.1 Objetivos específicos:

- Discutir e apresentar breve histórico da Teoria dos Conjuntos;
- Definir conceitos da Teoria Ingênua dos Conjuntos;
- Definir conceitos da Teoria dos Conjuntos aplicados à Música;
- Discutir relações entre Matemática e Música nos temas abordados.

3.0 Sequência didática – Desenvolvimento.

- Um pouco da vida e obra de Geog Cantor
- Principais fatos históricos da Teoria dos Conjuntos;
- Teoria dos Conjuntos de Cantor;
- Teoria dos Conjuntos de Forte;
- Principais conceitos das teorias;
- Fundamentação para análises em pesquisas e obras de Villa-Lobos e a Teoria dos Conjuntos.
- Exercícios aprendizagem.

4.0 Formas de Mediação

- Aula expositivo-participativa;
- Construção participativa dos conceitos.

5.0 Temas para Discussão

- A Teoria dos Conjuntos no currículo da escola básica;
- A Música no contexto da escola básica;
- Relação Matemática/Música no ensino e aprendizagem;
- Conceitos abordados em sala de aula.

6.0 Avaliação

- Participação nas discussões em aula;

7.0 Bibliografia

BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. **História da Matemática**. 7^a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

DAUBEN, Joseph Warren. **Georg Cantor**: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Princeton: Princeton University Press, 1990.

FORTE, Allen. **The structure of atonal music**. New Haven: Yale UP, 1973.

HALMOS, Paul. **Naive Set Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974.

KOSTKA, S. **Materials and Techniques of Twentieth-Century Music**. Upper Sadle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006.

OLIVEIRA, João Pedro Paiva de. **Teoria analítica da Música do século XX**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1998.

OFICINA 2 – A Teoria dos Conjuntos na Música

1.0 Introdução

A Teoria dos Conjuntos é um conteúdo abordado em diversas áreas e está presente como conteúdo escolar em várias séries de nosso ensino regular. Em alguns casos, esses conceitos se mostram descontextualizados e sem significado para o educando. Nessa Oficina relacionaremos alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos com a obra de Villa-Lobos. Essa forma de associação de ideias pode propiciar uma alternativa para o ensino de diversos conceitos da Teoria dos Conjuntos além de dar suporte para análises em obras desse compositor, que é considerado um dos maiores compositores brasileiros, mas carece de trabalhos que possam evidenciar esse rótulo.

2.0 Objetivo Geral

Apresentar a Teoria dos Conjuntos aplicada à Música.

2.1 Objetivos específicos

- Discutir e apresentar conceitos da Teoria dos Conjuntos aplicados à Música;
- Definir as Categorias de Análise – Conjuntos, Simetria, Complementaridade, União e Intersecção;
- Exemplificar as Categorias de Análise em obras de Villa-Lobos;
- Discutir relações entre Matemática e Música nos temas abordados.

3.0 Sequência didática – Desenvolvimento.

- Definição das categorias de análise;
- Principais características do conhecimento musical;
- Exemplificação auditiva dos conceitos a partir de instrumentos – violão, teclado e voz;
- Exemplos em obras de Villa-Lobos;
- Exercícios aprendizagem.

4.0 Formas de Mediação

- Aula expositivo-participativa;
- Construção participativa dos conceitos.

5.0 Temas para Discussão

- A Teoria dos Conjuntos e o ensino na educação básica;
- Villa-Lobos: contextualização e racionalidade matemática;
- Conceitos da Teoria dos Conjuntos – Categorias de Análise.

6.0 Avaliação

- Participação nas discussões em aula;
- Análise das trabalhos em obras de Villa-Lobos;
- Resolução dos exercícios.

7.0 Bibliografia

FORTE, Allen. **The structure of atonal music**. New Haven: Yale UP, 1973.

HALMOS, Paul. **Naive Set Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974.

KOSTKA, Stephan. **Materials and Techniques of Twentieth-Century Music**. Upper Sadle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006.

OLIVEIRA, João Pedro Paiva de. **Teoria analítica da Música do século XX**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1998.

SALLES, Paulo de Tarso. **Villa-Lobos: processos composicionais**. Campinas: Editora da Unicamp, 2009.

_____. **Teoria dos Conjuntos: apontamentos**. CMU/ECA-USP, 2008.

VILLA-LOBOS, A., org., **Villa-Lobos, Sua Obra**. Rio de Janeiro, MEC/DAC/Museu Villa-Lobos, 1a ed., 1965; 2a ed., 1972; 3a ed., 1989, versão 1.0, 2009.

OFICINA 3 – Villa-Lobos e sua “*Alma Brasileira*”.

1.0 Introdução

Nessa Oficina abordaremos a racionalidade matemática presente na obra Choros nº 5 – Alma Brasileira – Composta por Heitor Villa-Lobos. Para evidenciar tal racionalidade, dividiremos a análise em categorias, já apresentadas na Oficina anterior. Nossa intenção é motivar o leitor a perceber a relação matemática/Música presente nessa obra, e tentar, a partir das análises, promover um debate sobre formas de apresentação desses conteúdos. A intenção é propor uma alternativa para apresentação dos conceitos de conjuntos, subconjuntos, uniões, intersecções, complementaridades, proporções, intervalos, escalas, invariâncias, complemento e classes de notas, como forma de auxiliar o aluno ou o professor de matemática ou de Música.

2.0 Objetivo Geral

Analisar a obra musical Choros nº 5 também intitulada *Alma Brasileira*.

2.1 Objetivos específicos:

- Apresentar as categorias de análise em *Alma Brasileira*;
- Discutir conceitos da Teoria dos Conjuntos aplicados à Música;
- Discutir relações entre matemática e Música por meio dos processos de análise musical.

3.0 Sequência didática – Desenvolvimento.

- Villa-Lobos: contextualização e racionalidade matemática presente em suas obras;
- Contextualização histórica de *Alma Brasileira* e apreciação musical;
- Apresentação das categorias de análise;
- Análise da obra;
- Exercícios aprendizagem.

4.0 Formas de Mediação

- Aula expositivo-participativa e apreciação musical;
- Construção participativa dos conceitos.

5.0 Temas para Discussão

- Principais contribuições de Villa-Lobos para a educação;
- A análise musical como alternativa para o ensino e aprendizagem da matemática;

6.0 Avaliação

- Participação nas discussões em aula;

7.0 Bibliografia

BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. **História da Matemática**. 7ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

FORTE, Allen. **The structure of atonal music**. New Haven: Yale UP, 1973.

KOSTKA, Stephan. **Materials and Techniques of Twentieth-Century Music**. Upper Sadle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006.

OLIVEIRA, João Pedro Paiva de. **Teoria analítica da Música do século XX**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1998.

SALLES, Paulo de Tarso. **Villa-Lobos: processos composicionais**. Campinas: Editora da Unicamp, 2009.

OFICINA 4 – Implicações Educacionais na Relação Matemática/Música.

1.0 Introdução

No cenário educacional, a relação Matemática/Música possui distintas qualidades: pode estabelecer relações entre cenários diferentes aos universos referidos, associar ideias e favorecer a emancipação de significados, trabalhar o caráter somente cognitivo para significados com identidade afetivo/cognitiva e apresentar alternativas para abordagens de conceitos associados aos temas propostos. Nessa Oficina evidencaremos as relações entre Matemática e Música em seu aspecto didático e discutir tais relações amparadas pelos conceitos de afetividade, transdisciplinaridade e pensamento analógico.

2.0 Objetivo Geral

Evidenciar aspectos didáticos nas relações Matemática e Música.

2.1 Objetivos específicos:

- Apresentar breve histórico da relação Matemática e Música;
- Discutir afetividade, pensamento analógico e transdisciplinaridade;
- Propor atividades com enfoque nas relações Matemática e Música.

3.0 Sequência didática

- Discutir e apresentar breve histórico da Teoria dos Conjuntos;
- Definir conceitos da Teoria Ingênua dos Conjuntos;
- Definir conceitos da Teoria dos Conjuntos aplicados à Música;
- Discutir relações entre Matemática e Música nos temas abordados.

4.0 Formas de Mediação

- Aula expositivo-participativa;
- Construção participativa dos conceitos.

5.0 Avaliação

- Participação nas discussões em aula;

6.0 Bibliografia

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música**: o pensamento analógico na construção de significados. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

CAMPOS, Gean Pierre. **Música e Matemática na Educação**. Vitória: Fames, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Um Enfoque Transdisciplinar à Educação e à História da Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

_____. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 10ª ed. Campinas: Papirus, 1996.

MORIN, Edgar. **Educação e Complexidade**: os sete saberes e outros ensaios. Tradução Edgard de Assis Carvalho. 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2005.

WALLON, Henri. **A Evolução Psicológica da Criança**. Tradução de Claudia Berliner. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

Considerações Finais

Esta pesquisa pautou-se no desafio de reunir a Matemática com a Música em uma proposta educacional. Procuramos buscar a presença da racionalidade Matemática nas composições musicais, especificamente em aproximar obras musicais de Villa-Lobos e Teoria dos Conjuntos. Outro objetivo importante é o desafio de buscar um enfoque didático na apresentação dos conceitos, nos enfoques musical e matemático das análises propostas e nas considerações e implicações educacionais que foram propostas. Para tal, procuramos usar uma linguagem sensível a professores e alunos de ambas as áreas mostrando que é possível abordar conceitos matemáticos da Teoria dos Conjuntos através de uma análise da obra musical, da partitura e da audição da obra.

Encontramos diversos trabalhos que utilizaram a Teoria dos Conjuntos para analisar as obras de Villa-Lobos. Grande parte desses trabalhos são direcionados para a área musical, principalmente para a análise, sem mostrar como essa forma de associação de ideias pode ser utilizadas para fins didáticos tanto para a Música quanto para a Matemática. Ao nosso ver, essa forma de apresentação pode auxiliar no ensino e aprendizagem das duas áreas e foi um de nossos objetivos mostrar que é possível utilizar essa forma de análise em uma aula de Matemática ensinando, por exemplo, o conceito de complementaridade entre dois conjuntos.

Pensamos que a maior contribuição deste trabalho está na sua proposta de transdisciplinaridade, ao procurar estabelecer relações analógicas entre conteúdos do currículo da Matemática, traduzidos com frequência por códigos numéricos, com aspectos da área da Música, reconhecidos por sons. O professor pode reconfigurar o pensamento de alunos que apresentam dificuldades na aprendizagem através de uma possibilidade de construção sinestésica, valendo-se dos recursos auditivos da Música, para assimilação de conceitos matemáticos que podem parecer muito abstratos para alguns. Cabe fazer a ressalva de que não pretendemos propor que a Música explique completamente a Matemática e nem o contrário, visto que cada aptidão possui natureza própria e as analogias são inequivocamente parciais, mas sim construir pontes entre os conhecimentos envolvidos e um universo afetivo possível de professores e alunos.

Procurou-se destacar a abordagem pedagógica transdisciplinar e o pensamento analógico. Algumas funções musicais foram definidas matematicamente. A composição dessas funções aparece no contexto tanto de Músicas eruditas quanto populares e podem ser detectadas na obra

de um dos nossos maiores compositores: Villa-Lobos. Averiguamos uma obra musical contendo simetrias, reflexões, transposições, inversões ciente de tais procedimentos permitiu-nos concluir que, tanto quando alguns compositores mostram sua abordagem racional e calculada, fazem uso da intuição, ou mescla entre tais formas de criação, a existência de tais procedimentos já é suficiente para nos valer dela nos processos de ensino-aprendizagem, lembrando que a estruturação Matemática não basta para explicar a riqueza sonora inerente à criação musical, algo mais se encontra presente. Procurou-se então dar uma abordagem didática aos cálculos de complementaridade, simetria, transposição e inversão com analogias à Música.

Do ponto de vista educacional, o presente trabalho traz contribuições para o licenciando e para o professor, na medida em que oferece uma prática de reflexão e de possível ressignificação dos conceitos mencionados, e que permite transgredir esses limites ampliando essa prática a outras categorias relacionadas (para um aspecto rítmico, matrizes, determinantes, vetores, etc) e plenamente possíveis de também serem contempladas numa perspectiva *analógica*, mas que não foram incluídas nesse recorte. As propostas de aulas trazidas aqui é um importante resultado deste trabalho, na medida em que, voltada tanto para graduandos em Música como em Matemática – em especial licenciandos –, contribui com a formação de profissionais ao oferecer-lhes subsídios para atuar no Ensino Médio no âmbito de integração dessas áreas do conhecimento. Tais planos de aula têm o objetivo de proporcionar um vasto campo de trocas de experiências entre alunos de Matemática e de Música, os quais poderão se apropriar de novos conhecimentos proporcionados pela convivência interáreas.

Os teóricos da transdisciplinaridade aqui mencionados advogam um professor que deve sentir-se como tal e adotar uma postura transdisciplinar. Uma analogia pode ser feita com o fazer Música em conjunto, pois, cada um pode saber muito bem a sua parte, com riqueza de detalhes, mas nada é tão gratificante quanto ouvir a nova melodia que é gerada por todos em conjunto. É uma nova Música, um novo conhecimento que surge, do qual todos participam, cada um à sua maneira, doando a parte específica do instrumento que lhe cabe para gerar o encantamento de novas melodias. Este trabalho pretende, dessa forma, realizar contribuições para o desenvolvimento de novas práticas pedagógicas que auxiliem a exploração dos recursos afetivos e auditivos da Música no processo de ensino-aprendizagem. O pensamento lógico-matemático auxilia o entendimento de conceitos comumente relacionados ao cenário musical, tais como notas, intervalos e escalas musicais, ciclo das quintas, dissonância, ressonância e frequência. A

competência musical trazia benefícios para que os alunos entendessem e dessem novos significados a conceitos matemáticos na esfera de conjuntos.

Apesar de todos esses fatores positivos, devemos salientar que a utilização dessa proposta defendida não é simples de ser executada. Essa proposta exige uma preparação cuidadosa do docente nas áreas referidas. Esse preparo não chega a ser um conhecimento profundo da área que não é familiar. Por exemplo, um professor de Matemática que queira utilizar essas atividades deve conhecer os conceitos de intervalo e nota musical, conhecimentos esses básicos e que podem ser adquiridos com uma leitura mais atenta de uma bibliografia especializada e aplicados em um teclado simples ou mesmo software que simulam um instrumento, sem necessidade de ser instrumentista. Já o professor de Música deve também relembrar conceitos de Matemática que já foram estudados no currículo normal da escola.

Uma dificuldade destacada consiste nos materiais que não são acessíveis à maioria das pessoas. Materiais como violão e teclado não são encontrados facilmente em escolas, além de que, quem for manuseá-los, deverá saber um pouco a respeito do funcionamento desses instrumentos. O uso de softwares também pode trazer algumas dificuldades para professores e alunos durante a realização das atividades. Percebemos que esses recursos poderiam ser utilizados com mais cuidado, dedicando maior tempo na explicação de como funcionam e de como são utilizados.

As atividades desenvolvidas podem ser uma alternativa para os conceitos abordados nesse trabalho e atuar elevando o nível de motivação, afetividade e interesse no aluno, fazendo aluno e professor trabalharem diversos tipos de inteligências simultaneamente e contribuindo para o ensino e aprendizado. que se valham do pensamento analógico podem ser uma alternativa para a prática pedagógica e para a apresentação dos conteúdos envolvidos nesse trabalho. Para a área musical, as atividades servirão para compreender as estruturas da Música através da Matemática, aproximando campos do conhecimento considerados tão distantes. Para a área lógico-matemática, terão a oportunidade de perceber novas formas de apresentação de conteúdos.

Almejamos que essa tese possa servir de incentivo à constituição de projetos transdisciplinares e criação de propostas flexíveis, que contribuam para que o desenvolvimento e transito em várias linguagens, visto que ainda são raros. Nesse sentido, que as análises e analogias utilizadas possam ser um convite para que alunos, professores e pesquisadores ampliem o diálogo entre Música e Matemática.

GLOSSÁRIO

Bemol (b) – sinal de notação, normalmente colocado à esquerda de uma nota e indicando que a nota deve ter sua altura abaixada em um semitom. Um dobrado bemol, notado como dois bemóis juntos, indica que a nota deve ser abaixada dois semitons (SADIE, 1994, p. 92).

Ciclo (círculo) das quintas – disposição das tônicas das 12 tonalidades maiores ou menores, arranjando-se em ordem ascendente ou descendente, a intervalos de 5^a justas, formando um círculo fechado (SADIE, 1994, p. 198).

Coma – pequeno intervalo, habitualmente significando um nono de tom inteiro; as comas usadas em afinação por temperamento são aproximadamente 21,5 ou 23,5 centésimos (SADIE, 1994, p. 209).

Escala – seqüência de notas em ordem de altura ascendente ou descendente. É longa o suficiente para definir sem ambigüidades um modo ou tonalidade. Começa e termina na nota fundamental daquele modo ou tonalidade (SADIE, 1994, p. 302).

Escala cromática – ver *temperamento igual*.

Escala diatônica – escala constituída de sete notas constituídas por uma seqüência de tons e semitons (tom — tom — semitom — tom — tom — tom — semitom).

Escala temperada – ver *temperamento igual*.

Harmônicos – sons parciais que normalmente compõe a sonoridade de uma nota musical. Eles se fazem presentes pelo fato de que tanto uma corda quanto uma coluna de ar têm a característica de vibrar não apenas como um todo mas também como duas metades, três terços, etc. simultaneamente (SADIE, 1994, p. 408).

Hertz (Hz) – unidade de freqüência igual a um ciclo por segundo (SADIE, 1994, p. 426).

Modulação – movimento que leva de uma tonalidade a outra num processo musical contínuo na música tonal (SADIE, 1994, p. 612).

Semitom – metade de um tom; o menor intervalo do sistema tonal ocidental.

Sustenido (#) – sinal de notação normalmente colocado à esquerda de uma nota indicando que a altura da nota de ser elevada em um semitom (SADIE, 1994, p. 918).

Temperamento – afinação de uma escala em que todos ou quase todos os intervalos resultam

ligeiramente imprecisos, porém sem que fiquem distorcidos (SADIE, 1994, p. 938).

Temperamento igual (afinação temperada) – divisão do intervalo de oitava em 12 semitons associados a relações de frequências exatamente iguais (ABDOUNUR, 1999, p. 79).

Tom – como intervalo, é o equivalente a segunda maior, ou a soma de dois semitons. (...) (2) A qualidade de uma passagem ou composição musical que leva o ouvinte a senti-la como que gravitando no sentido de uma determinada nota, chamada de tônica (SADIE, 1994, p.952).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música**: o pensamento analógico na construção de significados. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

ABE, Jair Minor; Papavero, Nelson. **Teoria Intuitiva dos Conjuntos**. São Paulo: Makron, MacGraw-Hill, 1991.

ANDRADE, Mário de. **Ensaio Sobre a Música Brasileira**. 3a ed. São Paulo: Vila Rica; Brasília: INL, 1972.

ASSIS, Carlos Alberto. **Fatores de coerência nos Choros no 5 (“Alma brasileira”), de H. Villa-Lobos**. Per Musi, n.20, p.64-73. Belo Horizonte, 2009.

ÁVILA, Marli Batista. **A Obra Pedagógica de Heitor Villa-Lobos**: uma leitura atual de sua contribuição para a Educação Musical no Brasil. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade de São Paulo. 2010.

BENNETT, Roy. **Uma Breve História da Música**. Rio de Janeiro: Zahar, 1986.

BIBBY, Neil. Tuning and temperament: closing the spiral. In FAUVEL, John; FLOOD, Raymond; WILSON, Robin (Ed.). **Music and Mathematics**: From Pythagoras to Fractals. Oxford University Press, Oxford, 2003. cap 1, p. 13–27.

BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. **História da Matemática**. 7ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

BROMBERG, Carla. Música e História da. In BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu. **História da Ciência e Ensino**: construindo interfaces. Vol. 6. São Paulo: Educ, 2012. p. 1-15.

CANTOR, Georg. **Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers**. New York: Dover Publications, 1955.

CAMPOS, Gean Pierre. **Matemática e Música**: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.

CAMPOS, Gean Pierre. **Música e Matemática na Educação**. Vitória: Fames, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Um Enfoque Transdisciplinar à Educação e à História da Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

_____. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 10ª ed. Campinas: Papirus, 1996.

DAUBEN, Joseph Warren. **Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite**. Princeton: Princeton University Press, 1990.

GALVÃO, Izabel. **Henri Wallon: uma concepção dialética do desenvolvimento infantil**. Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

GAZIRI, Najat Nasser. **Sistemas de Composição e Análise Musical**. 1993. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

FERREIRÓS, José. **Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics**. Basel Birkhäuser, 1999.

FORTE, Allen. **The Structure of Atonal Music**. New Haven: Yale UP, 1973.

FORTES, Raimundo. **Concerto para Piano e Orquestra nº 1 de Villa-Lobos: um estudo analítico-interpretativo**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade Federal da Bahia. 2004.

GROUT, Donald. e PALISCA, Claude. **História da Música Ocidental**. 2ª edição. Lisboa: editora Gradativa, 2001.

HALMOS, Paul. **Naive Set Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974.

KOSTKA, Stefan. **Materials and Techniques of Twentieth Century Music**. 3ª ed. New Jersey: Pearson, 2006.

KRAUSE, Decio. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência**. São Paulo: EPU, 2002.

LEITE, Sérgio Antônio da Silva. Afetividade e Práticas Pedagógicas. In LEITE, Sergio A. da Silva (Org). **Afetividade e Práticas Pedagógicas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2006.

LESTER, Joel. **Analytic Approaches to Twentieth Century Music**. New York: Norton, 1989.

MANHONEY, Abigail Alvarenga e ALMEIDA, Laurinda Ramalho (Org.). **Henri Walon**. 10. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011

MENEZES, Flo. **A Apoteose de Schoenberg**. São Paulo: Ateliê Editorial, 2002.

MORIN, Edgar. **Educação e Complexidade**: os sete saberes e outros ensaios. Tradução Edgard de Assis Carvalho. 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2005.

NERY FILHO, Walter. **Os Voos d'o Passarinho de Pano e Análise dos Processos Compositivos na Suíte Prole do Bebê nº2 de Villa-Lobos**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade de São Paulo. 2012.

OLIVEIRA, Jarmy. **Black Key versus White Key: A Villa-Lobos Device**. Latin American Music Review , Vol. 5, nº 1. Spring - Summer, 1984, pp. 33-47.

OLIVEIRA, João Pedro Paiva de. **Teoria Analítica da Música do Século XX**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1998.

PAZ, Ermelinda. **Heitor Villa-Lobos, o Educador**. In: BRASIL. Ministério da educação – instituto nacional de estudos e Pesquisas educacionais. Prêmio grandes educadores brasileiros – monografia premiada 1988. Brasília: MeC/ineP, 1989.

PENTEADO, Ronaldo Alves. **Simetria na Forma e no Material Harmônico da Ciranda nº 4 de Villa-Lobos**. Anais do II Simpósio Brasileiro de Pós-Graduandos em Música (SIMPOM), p. 1063-1073. São Paulo: USP – Escola de Comunicação e Artes, 2012.

PETRAGLIA, Izabel. **Edgar Morin**: a educação e a complexidade do ser e do saber. 10ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

PILÃO, Delma. **A Pesquisa no Âmbito das Relações Didáticas Entre Matemática e a Música: estado da arte**. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em

Educação da Universidade de São Paulo, 2009.

SADIE, Stanley; TYRRELL, John. **The New grove Dictionary of Music and Musicians**. 2^a ed. - London: MacMillan, 2001.

SALLES, Paulo de Tarso. **Villa-Lobos: processos composicionais**. Campinas: Editora da Unicamp, 2009.

_____. **Teoria dos Conjuntos: apontamentos**. CMU/ECA-USP, 2008.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?** Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2001.

SOUZA, Luciana Gastaldi. **Uma Abordagem Didático-Pedagógica da Racionalidade Matemática na Criação Musical**. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade de São Paulo. 2012.

STRAUS, Joseph. **Introduction to Post-tonal Theory**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

TAILLE, Yves de La; OLIVEIRA; Marta Kohol de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão**. 10^a ed. São Paulo: Summus, 1992.

TASSONI, Elvira C. Martins. Dimensões Afetivas na Relação Professor-aluno. In LEITE, Sergio A. da Silva (Org). **Afetividade e Práticas Pedagógicas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2006.

VILLA-LOBOS, A., org., **Villa-Lobos, Sua Obra**. Rio de Janeiro, MEC/DAC/Museu Villa-Lobos, 1a ed., 1965; 2a ed., 1972; 3a ed., 1989, versão 1.0, 2009.

WALLON, Henri. **A Evolução Psicológica da Criança**. Tradução de Claudia Berliner. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WEIL, Pierre; D'AMBROSIO, Ubiratan; CREMA, Roberto. **Rumo à Nova Transdisciplinaridade: sistemas abertos de conhecimento**. São Paulo, Summus, 1993.

WEYL, Hermann. **Symmetry**. New Jersey: Princeton University Press, 1952.

ANEXOS

À Arnaldo Guinle
ALMA BRASILEIRA

CHOROS No. 5

H. VILLA-LOBOS
Rio, 1925

Moderato (M.M. ♩ = 52)

dolente

Ben marcato

f *mf* *p* *f* *pp*

murmurando e ritmico

dim

Lento

rall. *a tempo*

Copyright © 1948 Consolidated Music Publishers, Inc.—All Rights Reserved
New edition revised by the composer

First system of musical notation, measures 1-3. The music is in G major (one sharp) and 7/8 time. The right hand features a continuous eighth-note pattern with occasional triplets. The left hand plays a steady eighth-note accompaniment. Dynamic markings include *p.* (piano) and *f.* (forte).

Second system of musical notation, measures 4-6. The right hand continues with eighth-note patterns and triplets. The left hand maintains the eighth-note accompaniment. Dynamic markings include *p.* and *f.*.

Third system of musical notation, measures 7-9. The tempo marking *Lento* appears above the staff. The right hand features a triplet of eighth notes. The left hand has a triplet of eighth notes. The marking *rall.* (rallentando) appears below the staff in measure 9. Dynamic markings include *p.* and *f.*.

Fourth system of musical notation, measures 10-12. The tempo marking *a tempo* appears below the staff in measure 10. The right hand continues with eighth-note patterns. The left hand maintains the eighth-note accompaniment. Dynamic markings include *p.* and *f.*.

Fifth system of musical notation, measures 13-15. The right hand features a triplet of eighth notes. The left hand has a triplet of eighth notes. The marking *affret.* (accelerando) appears above the staff in measure 14, and *rall.* appears above the staff in measure 15. The marking *vall.* (vallo) appears below the staff in measure 14. The system ends with a key signature change to A major (two sharps). Dynamic markings include *p.* and *f.*.

Un poco più moto (M.M. ♩ = 66)

First system of musical notation. The key signature is three sharps (F#, C#, G#). The tempo is marked 'Un poco più moto' with a metronome marking of quarter note = 66. The first measure is marked *pp* (pianissimo). The music consists of a treble and bass staff with various melodic and harmonic lines.

Second system of musical notation, continuing the piece. It features similar melodic and harmonic patterns in the treble and bass staves.

Third system of musical notation. It includes dynamic markings *p* (piano), *mf* (mezzo-forte), *f* (forte), and *rit.* (ritardando). The tempo is marked *rall.* (rallentando). The system concludes with a *p* (piano) marking.

Un poco animato

Fourth system of musical notation. The tempo is marked 'Un poco animato'. The first section is marked *a tempo*. The second section is marked *molto rall.* (molto rallentando). The system concludes with a *ffz* (fortissimo with accent) marking. The music includes triplets and a change in time signature from 3/4 to 4/4.

Movimento giusto di marcia, moderato (M.M. $\text{♩} = 112$) Bem ritmado

Le chant en dehors

[illegible]

This page contains four systems of musical notation for a piano piece. Each system consists of a grand staff with a treble clef and a bass clef. The notation is complex, featuring many beamed notes, triplets, and dynamic markings.

The first system begins with a forte (*f*) dynamic in the bass staff and a crescendo (*cresc.*) marking in the treble staff. The second system includes markings for mezzo-forte (*mf*), fortissimo (*ff*), and fortississimo (*fff*). The third system features fortissimo (*ff*) and fortississimo (*fff*) markings. The fourth system starts with mezzo-forte (*mf*).

There are several unusual symbols throughout the score, including 'v' (possibly for vibrato or a specific performance instruction) and 'a|||' (possibly a section marker or a specific performance instruction). The notation is dense and appears to be from a 20th-century manuscript.

First system of musical notation. The treble clef staff begins with a forte (*f*) dynamic and a fortissimo (*sfz*) dynamic. The bass clef staff features a series of chords and a fermata. A repeat sign is present at the end of the system.

Second system of musical notation. The treble clef staff continues with a fortissimo (*sfz*) dynamic. The bass clef staff features a series of chords and a fermata. A repeat sign is present at the end of the system.

Meno mosso

Third system of musical notation. The treble clef staff begins with a fortissimo (*sfz*) dynamic. The bass clef staff features a series of chords and a fermata. The text "en dehors" is written above the bass clef staff. A repeat sign is present at the end of the system.

Fourth system of musical notation. The treble clef staff features a series of chords and a fermata. The bass clef staff features a series of chords and a fermata. The text "poco a poco allargando" is written above the bass clef staff. The text "molto rallentando" is written above the bass clef staff. A fermata is present at the end of the system.

TEMPO I?
Moderato dolente

musical score for piano, measures 72-81. The score is written for a grand piano (treble and bass clefs) and includes dynamic markings and tempo changes.

Measures 72-73: *mf* *p* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 74-75: *mf* *p* (piano). The right hand continues the melody, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 76-77: *f* *mf* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 78-79: *pp* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 80-81: *Lento* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 82-83: *dim.* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 84-85: *rall.* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 86-87: *a tempo* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 88-89: *un poco allarg.* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 90-91: *ff rapido* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 92-93: *fff rall.* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.

Measures 94-95: *fffz* (piano). The right hand plays a melody with eighth notes, and the left hand plays a rhythmic accompaniment of eighth notes.