

EDUARDO B. OTTONI

**DOS LIMITES DO CONTAR AO CONTAR SEM LIMITES:
um estudo sobre o desenvolvimento da competência
numérica e da noção de infinitude na criança**



Tese apresentada ao Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Psicologia - área de concentração PSICOLOGIA EXPERIMENTAL.

SÃO PAULO

1 9 9 3

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE PSICOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

"DOS LIMITES DO CONTAR AO CONTAR SEM LIMITES -
UM ESTUDO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA COMPETÊNCIA NUMÉRICA
E DA NOÇÃO DE INFINITUDE NA CRIANÇA."

Candidato: EDUARDO BENEDICTO OTTONI
Orientador: Prof. Associado Cesar Ades



Tese apresentada ao Instituto de Psicologia,
Universidade de São Paulo, como parte dos
requisitos para obtenção do grau de Doutor
em Psicologia - área de concentração
PSICOLOGIA EXPERIMENTAL

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Wilson José Machado *Wilson José Machado*
Prof. Titular Lino de Macedo *Lino de Macedo*
Profa. Titular Zélia Ramozzi Chiarottino *Zélia Ramozzi Chiarottino*
Prof. Titular Sérgio Vasconcelos de Luna *Sérgio Vasconcelos de Luna*
Prof. Associado Cesar Ades *Cesar Ades*

INDICE

Agradecimentos	ii
Sumário	iii
Summary	iv
Resumé	v
Dedicatória	vi
Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Material e Métodos	21
Capítulo 3 - Contagem, Resposta Cardinal, Correspondência 1-a-1	32
Capítulo 4 - Conservação	59
Capítulo 5 - Estimação	75
Capítulo 6 - Infinitude	86
Capítulo 7 - Interações entre as Variáveis	122
Capítulo 8 - Discussão Geral e Conclusão	164
Apêndice A - Códigos das Variáveis e Tabelas dos Resultados	A-1
Apêndice B - Referências Bibliográficas	B-1

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com a subvenção do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através de uma bolsa de doutoramento.

Diversas pessoas colaboraram, de alguma forma, para a realização desta pesquisa. Agradeço, particularmente:

A Selene S. Cunha, pela colaboração na coleta de dados (sua empatia com as crianças foi decisiva para concretização deste trabalho) e pelas inúmeras formas de apoio, como colega e companheira.

Aos Drs. Lino de Macedo e Yves de la Taille, pela discussão do projeto, por ocasião do Exame Geral de Qualificação e em outras oportunidades;

A Martha M. Magaldi, (diretora), Rosana A. Dutoit (pedagoga) e todo o pessoal da Creche Central da USP;

Aos professores e funcionários e à direção da Escola de Aplicação da FEUSP, muito especialmente à professora Lituko Mochiduky, pelo apoio e pela simpatia;

'As bibliotecárias do Instituto de Psicologia da USP;

Aos colegas, funcionários e docentes do Departamento de Psicologia Experimental, em particular às Dras. Ana Maria de A. Carvalho e Vera R. Bussab, pela ajuda nos contatos da fase inicial de desenvolvimento do projeto e ao Dr. Takeshi Sato, pelas consultorias estatísticas;

'A minha família e, *last but not least*,

Ao orientador e amigo Dr. César Ades, por uma década de excelente convívio pessoal e intelectual.

OTTONI, E. B. - DOS LIMITES DO CONTAR AO CONTAR SEM LIMITES: um estudo sobre o desenvolvimento da competência numérica e da noção de infinitude na criança. São Paulo, 1993, 199 + vi pp. Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo.

SUMÁRIO

Observamos o desenvolvimento, em crianças de 3 a 12 anos, de comportamentos relacionados à compreensão do número. Foram analisados parâmetros relativos ao desempenho em tarefas de contagem, traduzidos em valores-limite de proficiência no contar, erros de contagem e de correspondência 1-a-1, uso de resposta cardinal e conservação do número. Outras perguntas verificaram os maiores nomes de números conhecidos, a compreensão da infinitude do número e o desempenho em tarefas de estimação de "grandes quantidades". Outros testes visaram explorar a compreensão de grandezas ou processos infinitos (Duração infinita, Ciclicidade, Subdivisão infinita e Limite) e as definições e exemplos fornecidos para o termo "infinito". As correlações entre as variáveis mostram que o desempenho no contar é um forte indicador do desempenho nos outros aspectos. Os resultados favorecem o ponto-de-vista das teorias sobre compreensão do número "baseadas no contar". Duas transições importantes foram observadas: a primeira referente ao contar além de 20 (domínio da base 10), a segunda relativa ao contar até mais de mil (domínio da "superbase" mil). A primeira se mostrou significativamente associada ao desaparecimento de erros de correspondência 1-a-1 e ao estabelecimento da resposta cardinal; a segunda, à consolidação da conservação, à compreensão de que os números naturais são infinitos e ao desenvolvimento da compreensão do conceito de infinitude.

OTTONI, E. B. - FROM THE LIMITS OF COUNTING TO COUNTING WITHOUT LIMITS: a study on the development of number competence and the conception of infinity in the child. São Paulo, 1993, 199+vi pp. Doctoral Thesis, Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo.

SUMMARY

We observed the development (in children from 3 to 12 years old) of behaviors related to the understanding of number. The parameters analysed included the performance in counting tasks - translated into limit-values of proficiency -, counting and one-one correspondence errors, cardinal response usage, and number conservation. Other questions verified the largest number names known, the comprehension of the infinity of number and the performance in tasks involving the estimation of "large quantities". Other tasks aimed to explore the understanding of infinite magnitudes or processes (Infinite Duration, Cyclicity, Infinite Subdivision, and Limit), as well as the definitions and examples provided for the word "infinity". The correlations between variables show that the counting performance is a strong predictor of performance in the other topics. Results favor the standpoint of "based on counting" theories on number comprehension. Two important transitions were observed: the first one refers to counting beyond 20 (understanding of base 10), the second one, to counting beyond one thousand (the "superbase" 1000). The former is significantly associated to the disappearance of one-one correspondence errors and to the establishment of cardinal response; the latter, to the consolidation of conservation, to the comprehension that natural numbers are infinite, and to the development of the concept of infinity.

OTTONI, E. B. - DES LIMITES DU COMPTAGE AU COMPTAGE SANS LIMITES: une étude du développement de la compétence numérique et de la notion d'infinité chez l'enfant. São Paulo, 1993, 199+vi pp. Thèse de Doctorat présentée à l'Institut de Psychologie de l'Université de São Paulo.

RESUME'

L'objectif de cette étude a été d'observer le développement, chez des enfants de 3 à 12 ans, de comportements liés à la compréhension du nombre. Les variables ayant trait à la performance dans des tâches de comptage (traduites en valeurs-limites de capacité de comptage), réponse cardinale, conservation de la quantité, erreurs de comptage et de correspondance 1-à-1, ont été analysées en premier lieu. D'autres questions ont, ensuite, permis de vérifier les plus grands noms de nombres connus par les sujets, leur compréhension de l'infinité des nombres et leur performance dans des tâches d'estimation de "grandes quantités" d'objets. Les sujets ont répondu à des tests qui cherchaient à capter leur compréhension des grandeurs ou processus infinis (Duration Infinie, Ciclicité, Subdivision Infinie et Limite) et permettre l'analyse des exemples qu'ils donnèrent du terme "infini". L'analyse des corrélations entre variables montre que la performance de comptage fournit une indication très claire à propos de la performance dans les autres tâches. Ces résultats appuient une interprétation qui se rapproche des théories de la compréhension du nombre "basées sur le comptage". Deux transitions importantes ont été observées: la première d'entre elles se réalise quand l'enfant arrive à compter au delà de 20 (domination de la base 10); la seconde, quand il arrive à compter au delà de mille (domination de la "superbase" 1000). La première transition est associée, d'une façon significative, à l'élimination des erreurs de correspondance 1-à-1 et à l'acquisition de la réponse cardinale; la seconde, à la consolidation de la conservation, à la compréhension que les nombres naturels sont infinis et au développement de la compréhension du concept d'infinité.

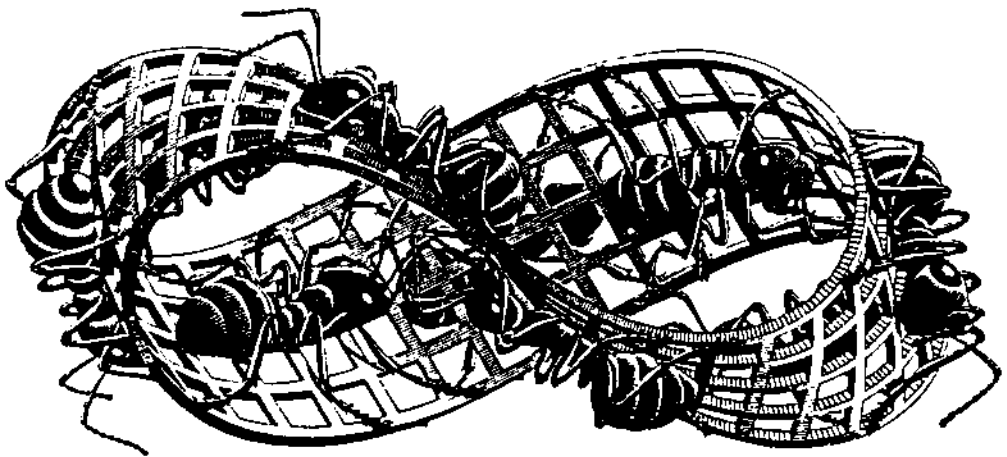
DEDICATÓRIA

Para Abner, Adilson, Adne, Adolfo, Adriana, Adriana, Adriana, Adriana, Adriano, Adriano, Afonso, Alessandro, Alex, Alex, Alexandre, Alexandre, Alexandre, Aline, Ana Carolina, Ana Maria, Ana Paula, Andressa, André, André, André, André, Andréa, Andréia, Angelo, Annick, Arthur, Bárbara, Barbara, Beatriz, Bruna, Bruna, Bruno, Bruno, Caio, Camila, Camila, Camilla, Carla, Carlos Eduardo, Carlos Fernando, Carmelita, Carolina, Carolina, Cecilia, Celso, Cintia, Clara, Claudia, Claudio, Cléber, Cristiane, Cristiane, Cristiano, Daiane, Dan, Daniel, Daniel, Daniel, Daniela, Daniela, Daniele, Danielle, Danielle, Danielle, Danilo, Denise, Diana, Diego, Diogo, Diogo, Diógenes, Débora, Débora, Ederson, Edi Carlos, Ednéia, Eduardo, Eigi, Elen, Eliana, Elisangela, Eliz, Eric, Eric, Eric, Erica, Erico, Fábio, Fábio, Felipe, Felipe, Felipe, Felipe, Felipe, Felipe, Fernanda, Fernanda, Fernanda, Fernanda, Fernanda, Flávio, Flavia, Flavio, Francisco, Gabriela, Gabriela, Gabriella, Gisele, Glalter, Guilherme, Guilherme, Halana, Helena, Helio, Henrique, Isabel, Ivan, Jamile, Janaina, Jaqueline, Jayson, Joana, João Batista, João Gabriel, João Paulo, Julia, Júlia, Júlia, Laura, Leandro, Leandro, Leonardo, Leticia, Lucas, Lucia, Luenarã, Luis, Luis Eduardo, Marcel, Marcelo, Marcio, Maria, Maria, Matheus, Max Akira, Melise, Nadja, Natália, Natalia, Natasha, Natasha, Natasha, Nathalia, Nelson, Orlando, Patricia, Patricia, Paula, Paulo, Pedro, Pedro, Priscila, Priscila, Rafael, Rafael, Rafael, Rafaela, Raquel, Rebeca, Rebeca, Renata, Renata, Renato, Robson, Rodolfo, Rodrigo, Rodrigo, Rodrigo, Romilda, Roseli, Rubens, Tabata, Thais, Thais, Thiago, Thiago, Tiago, Vanessa, Verônica, Vinicius, Vitor Hugo, Wagner, William e Yuri.

E para Júlia Adhara.

EDUARDO B. OTTONI

**DOS LIMITES DO CONTAR
AO CONTAR SEM LIMITES**



**DEPTO. DE PSICOLOGIA EXPERIMENTAL
INSTITUTO DE PSICOLOGIA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

1 INTRODUÇÃO

"What is a number, that a man may know it, and a man, that he may know a number?"
(McCulloch, 1963, apud Dehaene, 1992).

Dentre as "ferramentas" conceituais utilizadas pelo homem, seguramente a mais estranha e poderosa é a matemática. Estranha e poderosa na medida em que, embora se desenvolva de acordo com processos rigorosamente dedutivos, fornece modelos precisos para a descrição da experiência. Nas palavras de Piaget,

Nunca ocorre que o físico (...) encontre uma estrutura que não possa ser expressa com precisão em linguagem matemática, como se existisse uma espécie de harmonia pré-estabelecida entre todos os aspectos do universo físico e os marcos abstratos da geometria e da análise. No entanto, há ainda mais: acontece que este acordo não se realiza apenas no momento do descobrimento de uma lei física, ou a posteriori, porém os esquemas matemáticos antecipam, com anos de distância, o conteúdo experimental que então se inserirá naqueles (Piaget, 1975a, p.63).

Na verdade, boa parte dos instrumentos matemáticos que hoje nos parecem elementares são conquistas relativamente recentes para a maioria da humanidade: até a introdução dos algarismos ditos "arábicos" na Europa (Sec. XIII), por exemplo, qualquer operação aritmética mais longa envolvia técnicas de cálculo (com o ábaco de fichas) aprendidas apenas à custa de vários anos de estudo e acessíveis somente a uns poucos especialistas. Nos últimos séculos, no entanto, a aritmética, pelo menos, tornou-se parte corriqueira do ensino elementar, e uma gama crescente de procedimentos matemáticos mais complexos passou a frequentar o dia-a-dia do homem comum, ainda que muitas vezes de forma automatizada e quase invisível (através de sistemas mecânicos ou eletrônicos).

Se os métodos e conceitos mais sofisticados da matemática se constituem em um domínio restrito a uns poucos indivíduos submetidos a um treinamento acadêmico específico, os primeiros números naturais nos parecem, por outro lado, algo de tão imediato e intuitivo que estaria associado à percepção mais direta e elementar do mundo. Causam-nos quase descrença, assim, os relatos sobre culturas onde não existiriam nomes para designar números além da unidade e do par, sendo qualquer quantidade superior a dois referida pelo termo genérico para "muitos", "incontáveis" (Conant, 1931).

1.1 - O número e o imaginário humano

O poder que os números conferem sobre a realidade deixou marcas notáveis sobre a imaginação humana, como atestam as percepções religiosas ou místicas acerca do número ao longo da história: mesmo deixando de lado os casos mais evidentes, como a cabala ou o sistema pitagórico, podemos detectar estruturas numéricas associadas aos símbolos centrais, aos "mistérios" de qualquer sistema religioso (a trindade que é una, no cristianismo; os quatro elementos e a quintessência dos alquimistas; o uno que gera a dualidade dos opostos - que geram a "miríade" dos seres, no taoísmo, etc - os exemplos são inumeráveis...). Em suma, os números são percebidos como figuras "arquetípicas" (von Franz, 1974), como "idéias" platônicas.

Os "curadores de rasto" do sertão nordestino, por exemplo, utilizam fórmulas "mágicas" cujos modelos remontam, no mínimo, à Idade Média - como esta oração para inflamação das glândulas datada do Século V: *"Novem glandulae sorores/ Octo glandulae sorores/ Septem glandulae sorores (etc)/ Una fit glandula/ Nulla fit glandula"* (Câmara Cascudo, 1988, p.271).

Este sentimento "revente" diante do mistério do número frequentemente se expressa em superstições relacionadas a números específicos e nos tabus ligados ao contar:

Mantendo a tradição do poder dos números sobre os objetos enumerados, crendo em sua limitação pela alusão ao total, o povo conserva atos que denunciam a persistência religiosa de um hábito milenar. O fato de alguém contar alguma coisa predisporá à sua extinção ou multiplicação na ordem inversa do desejo humano. (...) contar os piolhos que se tiram da cabeça faz aumentar-lhes o número. Contar ovos no choco fá-los-á gorar. (...) O pescador não conta o peixe, enquanto estiver pescando, e sim quando deixar a pescaria. Se contar, os peixes fogem do anzol. Nos bandos de ovelhas, cabritos, bezerras, contar é limitar o número, fatalmente. Os portugueses dizem: *Do contado come o lobo*, e em França corre o provérbio: *Brebis comptées, le loup les mange*. Quem conta estrelas cria verruga nos dedos. Contar os frutos de uma árvore é agouro. Quase sempre, depois de contados, apodrecem antes de amadurecer ou caem ainda verdes (Câmara Cascudo, 1988, p.246).

No Antigo Testamento, Deus pune o povo de Israel por ter Davi ordenado um recenseamento (v. Samuel, 2, XXIV e Crônicas, I, XXI; o curioso é que, ao mesmo tempo, estes textos enumeram sem parar: quantos soldados, de quantas tribos, etc). O contar, em particular o *contar indefinidamente*, é atributo de deuses ou demônios.

Zaslavsky (1973, apud Bullock & Gelman, 1977) relata ritos tribais africanos nos quais, através da correspondência 1-a-1 com objetos não-tabu (que podem ser contados), se verifica a quantidade de objetos-tabu (gente, gado, riquezas, etc, que não podem ser contados) presentes. O medo diante do poder do contar se expressou de uma forma particularmente bela na prece Yoruba:

Morte contando continuamente, contando continuamente
Não me conta
Fogo contando continuamente, contando continuamente
Não me conta
Vazio contando continuamente, contando continuamente
Não me conta
Riqueza contando continuamente, contando continuamente
Não me conta
Dia contando continuamente, contando continuamente
Não me conta
A teia de aranha envolve o cesto de milho.

A natureza paradoxal e misteriosa do número - divino ou humano,

natural ou artificial, descoberto ou inventado, longe de ser uma questão restrita a manifestações culturais "arcaicas" ou "primitivas", continua a se impor como questão epistemológica: afinal, de onde vem o conhecimento do número?

1.2 - A natureza da matemática

1.2.1 - As estruturas lógico-matemáticas e a auto-organização da matéria viva

Piaget (1973) sustentou que o conhecimento lógico-matemático se constitui, forçosamente, numa categoria distinta tanto dos conhecimentos aprendidos pela experiência quanto da informação inata, geneticamente transmitida:

Os conhecimentos lógico-matemáticos não são hereditários, porque são adquiridos, por vezes mesmo com dificuldade, e dão assim lugar a uma espécie de aprendizagem frequentemente confundida com as aprendizagens autênticas. Não se reduzem, todavia, a estas últimas no sentido de serem tirados da experiência anterior e distinguem-se desta por uma série de caracteres endógenos (p.347).

Por um lado, os conhecimentos lógico-matemáticos são, para Piaget, suportes necessários à aprendizagem empírica (constituindo a condição necessária da organização e do registro da experiência); nesta medida, Piaget se aproxima de Kant, quando este afirma que "*as proposições matemáticas em sentido próprio são sempre julzos a priori e não empíricos porque trazem consigo necessidade, que não pode ser tirada da experiência*" (Kant, 1980, p.29). Neste sentido é que se fala em um "kantismo evolutivo" na perspectiva piagetiana (Ramozzi-Chiarottino, 1984).

Por outro, considerar os conhecimentos *a priori* como hereditariamente transmitidos (similares aos instintos animais), constitui, na visão de Piaget, a "*dificuldade central da tese de K. Lorenz*" (Piaget, 1973, p.356): o sacrifício da necessidade das ligações lógico-matemáticas ao seu inatismo. Piaget concorda com Lorenz na substituição dos *a priori* estáticos de Kant, pela ideia de aproximações graduais, em evolução, mas diverge num aspecto fundamental:

Se os *a priori* evoluem como quaisquer caracteres biológicos, enquanto condições prévias de todo o conhecimento experimental e condições fixadas hereditariamente como instintos ou quadros conceituais inatos, perdem então, com sua unicidade e sua universalidade (...), o que constituía seu principal valor, a saber, sua necessidade (Piaget, op.cit., p.356).

Este raciocínio decorre em grande parte das opiniões de Piaget à respeito da síntese neo-darwinista, no que se refere aos mecanismos do processo evolutivo. Piaget questionou a suficiência da seleção natural e das mutações, ressaltando o papel do organismo como "selecionador" do ambiente (o que não é mais estranho mesmo para as concepções biológicas mais ortodoxas, atualmente), mas vai mais longe e sugere um hipotético mecanismo de "feedback" informacional do fenótipo para o genoma (embora Piaget rejeite veementemente explicações lamarckistas, algumas de suas idéias soam - aos ouvidos de um biólogo - como uma forma de neo-lamarckismo).

Assim sendo, Piaget baseia as coordenações que conduzem às estruturas lógico-matemáticas não na transmissão genética, mas na organização básica da matéria viva, em seu funcionamento

auto-organizador:

Esta autoconservação supõe um funcionamento que continua no curso das transmissões (...), mas que não se transmite propriamente falando, porque dura simplesmente e prossegue sem nenhuma descontinuidade. Por conseguinte, não se transmite à maneira da transmissão de uma mensagem, mas se conserva no curso das transmissões particulares e constitui a condição necessária dessa transmissão. É ainda uma transmissão, se quisermos, porém mais elementar, pois é uma continuação ativa (Piaget, 1973, p.366).

A "autoconservação" característica do vivente "definida" de forma um tanto "difusa" por Piaget nos parece até certo ponto assimilável ao conceito de autopoiese, cunhado por Maturana & Varela (1984): *"Nossa proposição é a de que os seres vivos se caracterizam porque, literalmente, se produzem continuamente a si próprios, o que indicamos ao chamar à organização que os define, organização autopoietica"* (op. cit., p. 25).

A concordância entre a matemática e a experiência seria, pois, um caso particular do acordo constante entre os organismos e o meio exterior; este acordo prévio, desde o nível orgânico, fornece o substrato sobre o qual o indivíduo construirá, ao longo do seu desenvolvimento, os conhecimentos lógico-matemáticos, que são pré-requisitos necessários da aprendizagem empírica.

Partindo-se de uma perspectiva neo-darwinista, por outro lado, tende-se a preferir uma formulação em termos mais próximos dos utilizados por Gallistel (1989), que acredita que as sugestões advindas dos dados experimentais (sobre animais e humanos) apontam para um modelo envolvendo um isomorfismo cérebro-mundo (*à la* Leibniz), moldado pela seleção natural:

As descrições formais (matemáticas) em muitos processos cerebrais parecem espelhar as descrições formais das realidades externas a cujos processos o comportamento do animal se adapta. Sendo espaço, tempo e número aspectos tão fundamentais do ambiente de um animal, suas características formais são espelhadas nas características formais dos processos cerebrais básicos. A similaridade formal entre estes aspectos do ambiente e os processos cerebrais que a eles adaptam o comportamento dos animais é o que justifica uma abordagem computacional-representacional à análise comportamental e neurobiológica das funções cerebrais superiores" (Gallistel, 1989, p.185).

No nosso entender, as divergências entre a visão piagetiana e a de um neo-darwinista como Gallistel, embora drásticas no que se refere aos mecanismos da evolução biológica (um tópico que, embora fascinante e fundamental, pode ser deixado em suspenso, para nossas presentes finalidades), convergem no que diz respeito à noção de que o conhecimento lógico-matemático têm seu ponto de partida na estrutura auto-organizadora da matéria viva, a qual reflete toda uma história evolutiva de interação com o meio, e que se expressa na construção do conhecimento, que tem lugar com o desenvolvimento onto- e epigenético de cada ser vivo enquanto indivíduo em seu ambiente.

1.2.2 - Competência numérica em animais

O estudo da competência numérica em animais, embora afetado por enganos estigmatizantes no estilo "Clever Hans", nunca foi inteiramente posto de lado, como atestam as revisões de Salman (1943, incluindo uma discussão de questões metodológicas) e Wesley (1961; especialmente aves e mamíferos). Nos últimos anos, entretanto, a área tem passado por um significativo reaquecimento, o que pode ser verificado pela revisão feita por Davis & Pérusse (1988). Estes autores propõem uma padronização da terminologia relativa às formas de competência numérica que inclui as categorias: (a) julgamentos de numerosidade relativa; (b) subitização; (c) estimação; (d) protocontar e (e) contar.

Os julgamentos de numerosidade relativa seriam a forma mais elementar de competência numérica, envolvendo discriminações do tipo "mais ou menos que" e não expressando as quantidades absolutas envolvidas (já foram classificados como "proto-" ou "pré-numéricos").

A "subitização" (nossa tradução para o neologismo "subitizing") é uma categoria polêmica, caracterizada pela identificação quase que imediata (e portanto não aparentando envolver contagem) do número de estímulos visuais simultâneos; este processo foi descrito como basicamente perceptual (e não cognitivo) por von Glaserfeld (1982, apud Davis & Pérusse, 1988). O valor-limite para quantidades "subitizáveis" estaria na faixa de 3 a 6 elementos entre seres humanos adultos (quatro, de acordo com o estudo de Atkinson et al., 1976). Já outros autores defendem o ponto-de-vista de que a subitização só ocorre depois do estabelecimento do contar. Mandler & Shebo (1982) falam em três processos: uma resposta rápida e acurada para padrões com 1 a 3 elementos, baseada em "padrões canônicos adquiridos", uma resposta a conjuntos de 3 a 6-7 elementos baseada em contagem (dos elementos mantidos na memória) e uma resposta estimativa para mais de seis elementos. Os dados destes autores são consistentes com a visão de que o processo subjacente à subitização seja uma estratégia de contagem especializada (em grande parte inconsciente) que é aprendida, aparece tardiamente no desenvolvimento humano e não possui equivalente na cognição animal (com o que concorda Gallistel, 1989).

Davis & Pérusse, entretanto, acreditam na utilidade do termo para o estudo com animais, distinguindo um tipo de subitização "pré-contagem", não envolvendo a produção de rótulos numéricos, e ampliam a definição de subitização (de modo um tanto discutível, a nosso ver), que se refere originalmente a um processo extremamente rápido envolvendo estímulos visuais simultâneos, para incluir processos sequenciais de reconhecimento de padrões rítmicos.

Estimação é outro termo um tanto ambíguo: incluiria uma forma mais simples, que se distinguiria da subitização apenas pelo maior número de elementos no estímulo e pela menor precisão nas respostas; outra forma mais sofisticada de estimação envolveria avaliações numéricas significativas, seria posterior à capacidade de contar (Klahr & Wallace, 1973, apud Davis & Pérusse, op.cit.) e estaria restrito ao ser humano.

Davis & Pérusse, no artigo em questão, criam uma nova categoria conceitual que obteve um grau variado de aceitação entre seus comentadores: o "protocontar" ("protocounting"), que incluiria situações em que o contar tenha sido identificado como provável processo utilizado pelos sujeitos (tendo sido descartada a possibilidade de julgamentos de numerosidade relativa ou subitização), mas onde faltam evidências demonstrando um contar verdadeiro (como transferência intermodal). O "verdadeiro" contar *"requer, no mínimo, a aplicação de rótulos cardinais confiavelmente ordenados, em correspondência um-a-um com os elementos do conjunto (tais rótulos podem ser idiossincráticos e não precisam ser de natureza verbal)"* (op.cit., p.562); um atributo do "verdadeiro" contar seria a posse de um "conceito de número": *"o conceito de número é geralmente definido em termos de habilidade numérica abstrata ou independente de modalidades e revelado na capacidade de transferir discriminações numéricas entre diferentes modalidades sensoriais ou procedimentos"* (idem). Estes autores consideram que, se por um lado os animais são capazes de várias formas de competência numérica, por outro lado não haveria evidências sugerindo que animais tenham apresentado um sentido de número, ou, portanto, de que sejam capazes de contar, mas admitem que certos estudos recentes com chimpanzés poderiam constituir exceções.

Tomando-se o "contar" num sentido amplo (incluindo portanto o "protocontar"), as evidências na literatura sugerem que uma variedade de animais, de aves a primatas, pode aprender a "contar"; Hicks (1956), por exemplo, constatou a aquisição experimental do conceito de "três" ("threeness") - com proficiência moderada - em *Rhesus*; D'Amato & Colombo (1989) estudaram noções de seriação e posição ordinal em *Cebus*; no estudo de Wilkie, Webster & Leader (1979) com pombos, um esquema para distinguir tempo e número na discriminação mostrou que a contagem das respostas, independente da duração do responder, pode atuar como um estímulo controlador.

Para Davis & Memmott (1982), entretanto, as demonstrações bem sucedidas neste sentido costumam ocorrer em condições experimentais relativamente extremas, onde outras dicas sobre comida ou segurança não estejam disponíveis - ou seja, seria uma resposta relativamente "não-natural"; um exemplo disso seria a capacidade (observada em ratos) de contar até 3 para evitar um choque elétrico, um desempenho que seria pouco natural, podendo ser bloqueado ou encoberto por fontes mais salientes de informação (Davis & Memmott, 1983; v.tb. Davis, MacKenzie & Morrison, 1989; discriminação de número em estímulos tácteis em *Rattus*).

Capaldi & Miller (1988), ao contrário de Davis & Memmott, afirmam que os ratos contam rotineiramente e talvez contem automaticamente eventos reforçadores; estes autores descartam outros mecanismos (p.ex. discriminação igual/diferente ou subitização). Eles constataram que reforçadores qualitativamente diferentes podem ser categorizados como iguais ou diferentes para fins de contagem e que se observa o princípio de irrelevância da ordem e o uso de "tags" abstratos, isto em situações determinadas por regras abstratas; seria, portanto, um "contar" legítimo, que ocorreria frequentemente mas seria em geral confundido junto com outros indicadores. De modo análogo, e também trabalhando com ratos (séries de tentativas diferindo apenas no número de tentativas recompensadas - 2 ou 3 - usadas para testar a habilidade de ratos para aprender discriminações condicionais numéricas), Burns, Nesbitt, Cribb & Hulbert (1990) concluíram que estas discriminações podem ser plausivelmente conceitualizadas como contagem condicional; testes de transferência realizados depois que as discriminações estavam bem estabelecidas sugerem que, nestas condições, a informação numérica se sobreporá a outras fontes não-numéricas de informação tornadas relevantes pelas transferências.

Através de um estudo com ratos, envolvendo (inclusive) o efeito de drogas sobre o desempenho, Church & Meck chegaram à conclusão de que:

1. O número de eventos sucessivos (estímulos ou respostas) pode servir como um estímulo efetivo para o comportamento, mesmo quando todas as dicas temporais são contrabalançadas ou mantidas constantes, 2. Há transferência inter-modal do atributo numérico, e 3. O mesmo mecanismo interno é usado para discriminação de duração, número e taxa (...) Há algumas razões para suspeitar que as habilidades de contar podem ter evoluído nos animais, já que poderiam contribuir para o sucesso reprodutivo e o "fitness". Por exemplo, de acordo com a teoria do forrageamento ótimo os animais forragearão preferencialmente em áreas onde a densidade de presas seja a mais elevada (Church & Meck, 1984, p.462).

Este estudo reforçou o modelo proposto por estes autores, o qual afirma que "o mesmo mecanismo interno é usado para contar e marcar o tempo. Este mecanismo pode ser usado em muitos modos: o modo de "eventos" para contar ou os modos "correr" e "parar" para medir o tempo" (Meck & Church, 1983, p.320).

A propósito de "mecanismos internos", lembremos de passagem a descoberta, por Thompson et al. (1970), de células corticais (de gatos) que discriminam número, isto é, respondem com descarga a um evento

particular numerado numa série (no caso, foram observadas células que respondiam às numerosidades 2, 5, 6 e 7).

Recentemente, Gibbon & Church mostraram que aves e mamíferos comuns de laboratório executam, com representações de intervalos temporais, operações isomórficas à subtração, divisão e comparação ($>=$), a fim de obter inferências válidas sobre o estado corrente do mundo. Estas descobertas seriam evidência de que os animais possuem uma representação de intervalos temporais no sentido matemático de "representação" (Gibbon & Church, 1990, apud Gallistel, 1990).

De acordo com Gallistel (1989),

Enquanto que a maioria dos trabalhos usou pequenas numerosidades, ratos e pombos discriminam o número de respostas que deram na faixa de 16 a 50 (...). O limite superior (...) ainda está por se estabelecer. (...) A precisão com que os animais discriminam a numerosidade (...) é uma função da magnitude da numerosidade (...). Mesmo quando os números são grandes, no entanto, a capacidade discriminativa é razoavelmente boa: o pombo discrimina 45 bicadas de 50 com precisão de cerca de 70% e 40 de 50 com quase 90% de precisão (Rilling & McDiarmid, 1965) (...). Os resultados dos experimentos de discriminação de número implicam a existência de um mapeamento sistemático das numerosidades de conjuntos apresentados simultaneamente e sequencialmente em estados do sistema nervoso (Gallistel, 1989, p.182).

1.2.3 - Competência numérica em chimpanzés

Savage-Rumbaugh e colaboradores, responsáveis por uma boa parte da pesquisa recente sobre cognição, uso de linguagem e manipulação de símbolos por chimpanzés (Savage-Rumbaugh, 1984, 1990; Savage-Rumbaugh, Rumbaugh & Boysen, 1978; Savage-Rumbaugh et al., 1980, 1983a, 1983b, 1986, 1988), mostraram que os sujeitos Sherman e Austin eram capazes de somar pares de quantidades - chocolates em 2 compartimentos de uma bandeja de comida - e escolher a bandeja com mais chocolates: em testes com compartimentos contendo até cinco objetos, os sujeitos escolheram a bandeja correta em 90% dos casos. A hipótese dos autores envolve subitização de cada compartimento, um processo elementar de soma e a comparação dos resultados (Rumbaugh, Savage-Rumbaugh & Hegel, 1987; Rumbaugh, Savage-Rumbaugh & Pate, 1988).

Oden, Thompson & Premack (1988) estudaram a transferência espontânea de pareamento em chimpanzés: quatro filhotes aprenderam uma tarefa de "parear com o modelo" ("matching-to-sample") numa situação de treino com apenas dois estímulos e transferiram o conceito de pareamento para novos elementos, incluindo objetos tridimensionais e pedaços de tecido, sem qualquer feedback diferencial provido pelo experimentador, o que levou os autores a defender a visão de que o conceito de pareamento está amplamente construído pelos chimpanzés desde o início e não depende de treino explícito.

Boysen & Berntson (1989) demonstraram que a chimpanzé Sheba era capaz de calcular o total de objetos comestíveis colocados (conjuntos de 0-4) em dois de três locais possíveis, fornecendo a resposta por meio de plaquetas contendo algarismos arábicos, com os quais Sheba havia sido previamente familiarizada; para testar o uso representacional dos números, o experimento foi repetido (com sucesso) colocando-se em dois locais plaquetas com os algarismos (0-3).

Por outro lado, Premack, Woodruff & Kennel (1978) relatam que Sarah, uma chimpanzé com treino de linguagem, fez julgamentos acurados ("igual"/ "diferente") de quantidades de matéria sólida e líquida e conservou ambos os tipos de quantidade apesar de uma transformação em uma propriedade irrelevante (forma). Testes de controle mostraram que ela julgou baseada em inferência e não em uma avaliação perceptual das quantidades. Sarah, entretanto, não conseguiu

fazer julgamentos "igual"/ "diferente" acurados baseada no número (quantidades usadas: 2-3-5) e não foi testada para conservação deste tipo de quantidade; isso sugere que o número seja menos saliente que outras dimensões para o chimpanzé (em contraste com o que ocorre com a criança humana, que geralmente adquire a conservação do número antes da conservação de outras quantidades) e que, portanto, o curso de desenvolvimento nas aquisições de conservação pode diferir entre as duas espécies (Premack et al., op. cit., p.994).

Os resultados acima mostram que não é possível se fazer comparações simplistas entre o desenvolvimento cognitivo de chimpanzés e humanos. Antinucci (1989) criticou o "recapitulacionismo" na filogênese da cognição, ressaltando que não se pode dizer que os primatas não-humanos alcancem o estágio X ou Y do período sensorio-motor, apontando, por exemplo, a ausência de condensação de etapas anteriores (ocorre o contrário); a sequência de desenvolvimento nos primatas não-humanos não é mais "curta", é diferente (e portanto se eles "avançassem", seria numa direção diferente):

A proliferação, em Piaget, de subdivisões do desenvolvimento em períodos, estágios, sub-estágios, etc. (frequentemente usados apenas como suporte da exposição, já que nenhum correlato temporal estrito ou correspondência interna é associado a eles) tem se prestado facilmente a uma reificação direta em filogenia (Antinucci, op.cit., p.245)

Após construir estruturas lógicas de primeira ordem, mas, mais importante, enquanto ainda as estão desenvolvendo em abrangência e extensão, as crianças iniciam uma construção paralela de estruturas de segunda ordem (por exemplo, operações cujos elementos são eles próprios conjuntos, ao invés de elementos de um conjunto, ou classificações onde dois conjuntos de objetos similares são simultaneamente construídos). Este desenvolvimento não é encontrado entre as espécies de primatas não-humanos (idem, pp.248-9)

O caminho evolucionário que levou à estruturação das capacidades cognitivas humanas, como as vemos hoje, longe de constituir o avanço de um processo linear, parece ter dado várias "voltas" independentes em vários passos de seu longo percurso. O primeiro parece ter sido o que leva à elaboração do domínio físico. Isto parece ter ocorrido, dentro de um processo em andamento de retardo progressivo do desenvolvimento, através de um deslocamento heterocronico específico e particularmente forte. Depois, pelo menos dois outros momentos de "virada" podem ser discernidos: o que leva à capacidade representacional e o que leva à estruturação avançada da cognição lógica. Desafortunadamente não temos, no momento, condições de determinar nem sua sequência, nem seu mecanismo desencadeador. Saber, no entanto, por quê procurar, oferecerá um guia inestimável para uma pesquisa futura que deveria abranger, como fez no passado, da cognição animal à paleoantropologia (Antinucci, 1989, p.251).

Isto não implica, naturalmente, em que não sejam viáveis estudos sobre a cognição animal que obedeçam ao espírito do paradigma piagetiano, como atesta o estudo de Doré & Dumas (1987).

1.2.4 - A mão como instrumento de cálculo

Muito já foi dito sobre o papel da mão humana no processo de desenvolvimento cultural: o surgimento do bipedalismo abriu uma série de novas possibilidades de uso das mãos para o transporte, confecção e uso das ferramentas cada vez mais sofisticadas que o cérebro humano concebeu e impulsionando o processo de rápida evolução cerebral da espécie - o qual, por sua vez, impôs novas pressões ao desenvolvimento da mão.

Um outro papel das mãos, no entanto, é por vezes negligenciado: o de primeira máquina de calcular da história. Um testemunho bastante claro deste papel está no uso - o mais comum e hoje em dia praticamente hegemônico - da numeração na base dez. A escolha de uma base para o sistema numérico é, em princípio, arbitrária, mas certas características são vantajosas: a base não deveria ser muito pequena (o que alongaria excessivamente a representação de números

maiores) ou muito grande (o que exigiria a memorização de algarismos demais), e nesse aspecto a base dez é satisfatória. Mas uma base ideal deveria ser um número primo (onde as frações seriam geralmente irreduzíveis) ou, inversamente, comportar o maior número possível de divisores (facilitando as operações do dia-a-dia), critérios segundo os quais a base dez não se mostra particularmente privilegiada (Ifrah, 1989). A base doze, por exemplo, seria mais adequada segundo o último aspecto mencionado, e não só foi utilizada por algumas culturas - que contam com o polegar apontando as (doze) falanges dos dedos restantes - como sobrevive na nossa utilização da contagem de certos objetos por "dúzias" e "grozas". Parece-nos inequívoco, assim, que a predominância da base dez seja uma decorrência direta do número de dedos em um par de mãos humanas.

Outras indicações neste sentido nos são fornecidas pelas soluções alternativas para o problema da base adotadas por outras culturas: a língua Api (Novas Hébridas) utiliza uma espécie de base 5, e a palavra para "5" significa, literalmente, "a mão"; os maias e os astecas (entre outros), por sua vez, adotaram uma base vintesimal, cujos nomes de números estão associados aos dedos das mãos e dos pés (Ifrah, 1989).

O contar dos Oksapmin (Saxe, 1981), por outro lado, baseado na enumeração de várias partes do corpo (com algumas variações regionais quanto ao número e natureza das partes contadas) não se organiza sobre qualquer sistema de base. A ausência de base, por não determinar um mecanismo gerador de nomes de números, limita a grandeza das numerosidades "representáveis" e constitui um grande obstáculo à realização de cálculos, estando mais ligada a métodos de registrar os números; veja-se, por exemplo o caso dos algarismos acrofônicos gregos e dos algarismos romanos: os contadores romanos (e posteriormente os medievais) recorriam aos ábacos de fichas para praticar cálculos (Ifrah, 1989).

1.3 - O conceito de número

1.3.1 - A gênese do número em Piaget

Contraopondo-se às teorias empiristas (Helmholz) e lógicas (Russell e Whitehead) ou intuitivas (Poincaré), Piaget propôs a idéia de que o conceito de número advém da interiorização da ação do sujeito sobre as coisas - sob a forma de operações. Inicialmente, estas operações correspondem à experiência que o indivíduo tem de sua ação concreta sobre o meio (fase das "operações concretas"). O conceito, porém, só completa seu desenvolvimento ao se atingir a fase das "operações formais" (início da adolescência), quando as operações lógicas podem ser executadas na ausência de qualquer suporte perceptual (o zero e os números negativos, por exemplo, não derivam de percepção dos objetos) (Piaget, 1975a).

Duas vertentes se fundem, de acordo com Piaget, no conceito de número: a cardinalidade e a ordenação. A noção de cardinalidade se desenvolveria em conjunto com a lógica de classes, que permite que os entes sejam agrupados pelo que têm de comum, abstraídas as diferenças individuais não relevantes no caso ("igualização das diferenças"); a ordenação, por outro lado, se apoiaria nas relações assimétricas que permitem seriar os membros da classe em questão:

O número não é somente classe totalizante nem apenas relação seriante, mas, ao mesmo tempo, classe hierárquica e série. (...) os números finitos são, portanto, simultaneamente cardinais e ordinais, e isso resulta da própria natureza do número, que é ser um sistema de classes e de relações assimétricas fundidas num mesmo todo operatório (Piaget & Szeminska, 1975, pp.218 - 219).

Desta maneira, para Piaget, atividades como o contar em crianças pequenas não correspondem verdadeiramente à posse do conceito de número, já que esta só se verifica no momento em que cardinalização e seriação se integram. o indicador desta integração, no comportamento, é o surgimento da conservação das quantidades discretas diante de transformações espaciais numericamente irrelevantes, como no experimento clássico com garrafinhas e copos (Piaget & Szeminska, op.cit.).

Neste experimento, os sujeitos eram solicitados a construir uma fileira de copos em correspondência 1-a-1 com uma fileira de 6 garrafinhas e eram interrogados sobre a equivalência antes e depois de transformações no comprimento de uma das fileiras (destruindo-se assim a correspondência visual); os resultados foram classificados pelos autores em três fases: na primeira, as crianças não são capazes de construir a correspondência termo a termo; na segunda, os sujeitos constroem a fileira em correspondência mas não são capazes de conservar a equivalência diante das transformações espaciais; na terceira fase, correspondência e a equivalência se tornam duráveis (a criança entende a transformação no comprimento como numericamente irrelevante), o que corresponde a um indicador do início do período das operações concretas (que se segue ao período pré-operacional).

Mehler & Bever afirmaram ter mostrado conservação em crianças de 2:6 a 3:2 anos diante da transformação de uma de duas fileiras de quatro objetos pelo acréscimo de 2 objetos e encolhimento da fileira acrescida: as crianças escolhiam a fileira mais curta como a mais numerosa (corretamente); os autores checaram uma possível resposta por densidade alongando a fileira acrescida, ao invés de encolhe-la e a maioria escolheu a fileira correta (mais curta); sua hipótese é a de que a criança tem uma propensão inata para conservar e que

a inabilidade para conservar é uma fase temporária na criança em desenvolvimento [que] reflete um período de superdependência de estratégias perceptuais (...). [A criança pequena] tem efetivamente as capacidades que dependem da estrutura das operações cognitivas [necessárias para ser bem-sucedida nos problemas de conservação] (...) eventualmente, ela desenvolve uma compreensão *explícita* destas operações: aos 5 anos, ela resolve o mesmo problema contando as pelotas em cada fileira (...). Assim, o comportamento de não-conservação é uma exceção temporária à cognição humana, não uma característica básica da herança natural do homem (Mehler & Bever, 1967, p.142).

Os experimentos e argumentos de Bever & Mehler foram questionados, entre outros, por Beilin (1968; v. respostas às críticas em Bever, Mehler & Epstein, 1968), Gelman (1972; v. adiante) e por LaPointe & O'Donnell (1974), os quais assinalam que Mehler & Bever não usaram a tarefa-padrão de conservação de número (v. crítica de Piaget, adiante) e que muitos pesquisadores falharam em replicar tais resultados; LaPointe & O'Donnell lançam dúvidas sobre o entendimento pelos sujeitos dos termos do problema ("mais/igual"), considerando que a compreensão da linguagem parece ser uma condição necessária (embora insuficiente) para a conservação.

O próprio Piaget (1968) criticou o artigo de Mehler & Bever, questionando o uso do termo "conservação" pelos autores, já que houve adição a uma das fileiras (não há o que "conservar"); depois, mostrou (com experimentos) que o ajuntamento ("crowding") leva a julgamentos de quantidade (não apenas comprimento), e que isto se dá especialmente com crianças mais novas que as estudadas por Piaget &

Szeminska (4 a 5 anos): *"a tendência natural das crianças pequenas, evidentemente, é de conservar, enquanto não forem confrontadas por fatos que não esperam, e cuja inexplicabilidade as leva a mudar sua opinião"* (op.cit, p.978). Piaget critica o "inatismo" dos autores, já que concordaria, apenas, em termos de "funcionamento" inato, mas não de "idéias inatas": *"eu sustentei sempre que as estruturas lógico-matemáticas não derivam da linguagem (uma hipótese empiricista), mas da coordenação geral das ações"* (op.cit, p.979). O apelo de Mehler & Bever a uma estrutura inata, prossegue Piaget, não explica por que ela é sobrepujada tão facilmente nos estágios intermediários, nem dá conta da estrutura mais eficiente que se desenvolve mais tarde: *"quando a noção bastante maniqueísta de estruturas boas e más for substituída por uma teoria adequada de equilíbrio progressiva começando a partir da auto-regulação, a idéia de construção prevalecerá sobre a de pré- formação"* (op.cit., p.979).

Outro gênero de crítica ao modelo piagetiano é o levantado por Macnamara, que considera que, por um lado, a seriação não pode ser a base para a discriminação entre os objetos (uma vez eliminadas todas as diferenças individuais entre os elementos que constituem uma classe) e que, por outro lado, *"o número apresenta apenas uma relação accidental com nosso sistema de classificação de objetos"* (Macnamara, 1975, p.424); este autor observa que as crianças geralmente dominam problemas de adição antes de problemas de inclusão de classe, e acrescenta:

Os membros de classes são radicalmente diferentes de unidades aritméticas; as relações entre classes em um único nível ou entre níveis distintos são radicalmente diferentes das relações entre números; as operações com classes são radicalmente diferentes das operações com números. Dai se segue que as classes e a lógica de classes não podem se subordinar a conceitos numéricos ou formar uma parte qualquer destes (Macnamara, op.cit., pp.428 - 429).

Brainerd (1983), por sua vez, comparou três diferentes modelos para uma teoria do número natural em seu aspecto matemático e em suas implicações em termos de desenvolvimento cognitivo: embora haja claras diferenças metodológicas entre a matemática pura e as abordagens psicológicas do estudo do número, ambas são, para ele, tentativas complementares de se encontrar o conceito de número em processos psicológicos subjacentes.

A teoria proposta por Peano e von Neumann postula que o conceito de número pode ser reduzido a uma propriedade holística dos números naturais: sua ordenação inerente; na visão de Russell e Frege, o conceito de número se funda em uma propriedade atomística: o fato de que cada número natural é uma classe que inclui todas as classes contendo um número particular de elementos. A terceira teoria, proposta por Piaget, combina as teorias de Peano-von Neumann e Russell-Frege, ao apoiar o número simultaneamente na propriedade holística da ordem e na propriedade atomística da classe.

Do ponto-de-vista matemático, Brainerd afirma que as teorias ordinais são consistentes (não-contraditórias) e (semanticamente) completas, embora não-categóricas, enquanto que as teorias de classe sacrificariam a consistência e a completude ao salvaguardar a categoricidade. A teoria de Russell seria tautológica, na medida em que o "definiendum" (número) se insinua no "definiens" (classe de classes equivalentes).

Psicologicamente, a primeira teoria postula que o conceito de número deriva da ordenação; a segunda, que este deriva da cardinação; a terceira, que ele deriva tanto da cardinação quanto da ordenação; os experimentos de Brainerd apontam para a sequência cronológica de

desenvolvimento: ordenação → competência de números naturais (aritmética) → cardinação; *"Concluiu-se que a teoria de desenvolvimento do número que corresponde à mais satisfatória das três teorias matemáticas - a teoria ordinal - é apoiada consistentemente pelas descobertas a respeito do desenvolvimento"* (op. cit., p.222).

Outro tipo de crítica frequentemente lembrada contra Piaget está na complexidade das tarefas propostas aos seus sujeitos, que teria levado a uma subestimação das capacidades numéricas das crianças abaixo da idade em que tipicamente conseguem não apenas resolver tais tarefas mas ainda explicitar os princípios subjacentes às soluções;

A teoria piagetiana gira em torno da presença (ou ausência) de certas operações lógicas que se desenvolvem na faixa dos 6 aos 12 anos. Os piagetianos caracterizam o comportamento numérico (e outros) das crianças mais jovens primariamente em termos daquilo que a criança não é capaz de fazer (Sternberg, 1980, p.47).

Autores como Gelman, por outro lado (p.ex., Gelman & Gallistel, 1978; v. adiante), mostraram que as crianças em idade dita "pré-operacional" possuem habilidades numéricas rudimentares que podem utilizar em tarefas simples de contagem.

1.3.2 - Modelos baseados no contar

No meio século que nos separa da publicação de "A gênese do número na criança" (Piaget & Szeminska, 1975), uma grande número de pesquisadores se dedicou ao estudo do desenvolvimento das capacidades numéricas da criança. Além dos questionamentos a aspectos da seqüência de desenvolvimento proposta por Piaget (v.p.ex. Dodwell, 1961; Brainerd, 1973; Macnamara, 1975; Russac, 1978), a tendência mais marcante na literatura tem sido a de demonstrar a utilização de capacidades numéricas por crianças em idades bem menores que os sujeitos piagetianos. Como mencionamos acima, a abordagem piagetiana concentrou-se mais sobre o que a criança de uma determinada idade não consegue realizar e destaca o aspecto emergente dos progressivos patamares de compreensão numérica. Muitos dos estudiosos posteriores a Piaget, por outro lado, demonstraram que crianças muito jovens demonstram uma noção de princípios ligados ao número, embora não possam ainda expressá-los formalmente: *"crianças de apenas 3 anos conhecem os princípios que um procedimento tem de seguir a fim de que se constitua num procedimento válido de contagem, apesar de, é claro, não poderem articular tais princípios"* (Gelman & Meck, 1983, p.357).

Parece haver uma enorme "predisposição natural" com relação ao número na criança humana. Starkey & Cooper (1980), trabalhando com bebês de algumas semanas de idade demonstraram, através de um paradigma experimental envolvendo habituação/desabituação a estímulos visuais, que seus sujeitos discriminavam o número exato de elementos (2/3, 4/6) no estímulo. Resultados similares (mas apenas para o par 2/3, e não para 4/6) foram observados por Antell & Keating (1983) em recém-nascidos com algumas horas de idade.

Pode-se notar, na literatura, uma certa escassez de estudos no que se refere à faixa etária de 1 a 2 anos de idade: isso nos parece conseqüência da dificuldade em se estudar as capacidades numéricas em crianças já muito ativas para que sejam facilmente submetidas a situações experimentais como o paradigma habituação/desabituação acima descrito, por um lado, e no entanto muito jovens para estudos apoiados no comportamento verbal - que, a partir de um certo momento, estará intimamente associado aos processos de manipulação de números. Uma possível alternativa estaria em experimentos inspirados no experimento "mágico" de Gelman (1972), que não se

apoia demais na interação verbal entre a criança e o experimentador (uma situação de jogo em que, sem que haja referências explícitas a números, uma alteração - numérica ou não - é feita em um de dois conjuntos).

Neste estudo (e em alguns posteriores), Gelman mostrou que crianças de apenas 3 anos possuem regras de invariância numérica:

Nós mostramos que os pré-escolares categorizam as transformações que podem ser levadas a cabo em pequenos conjuntos (dois a quatro) como numericamente relevantes e numericamente irrelevantes (...). Quando crianças num experimento 'mágico' encontram conjuntos cujas propriedades espaciais (p.ex. comprimento, densidade) tenham sido subrepticamente alteradas, elas não acham que a numerosidade tenha sido afetada. Em contraste, quando encontram conjuntos cuja numerosidade foi subrepticamente mudada, elas postulam transformações aditivas ou subtrativas para explicar as mudanças inesperadas no número (Gelman & Tucker, 1975, p.168).

O problema está em explicar o motivo pelo qual crianças capazes de perceber igualdades numéricas e suas transformações em desigualdades não parecem entender a "conservação" do número nos testes piagetianos clássicos.

Mehler & Bever (1967), tendo supostamente observado tal capacidade em crianças de dois anos e meio, formularam a hipótese de que o desempenho inferior de crianças de três anos se deveria a um excesso de dependência de generalizações perceptuais ("se a fileira é maior, tem mais elementos"). Gelman discorda neste último aspecto:

Mehler e Bever (...) sugeriram que a capacidade lógica das crianças de 3 e 4 anos de idade para lidar com números é mascarada por estratégias perceptuais dominantes. Entretanto, isto não é apoiado por nossos resultados. Parece-nos que a resposta a esta questão está na análise da tarefa de conservação (Gelman, 1972, p.88).

O teste de conservação, segundo a autora, julga não apenas a capacidade lógica da criança, mas também uma série de capacidades extralógicas, envolvendo limitações ao nível da atenção e da linguagem. *"A habilidade de conservar representa um nível sofisticado do desenvolvimento cognitivo onde muitas habilidades separadas se coordenam"* (Gelman, op.cit., p.89). Trata-se de um ponto-de-vista bastante próximo ao expresso por Bever, Mehler & Epstein (1968): *"as estruturas cognitivas básicas estão disponíveis para a criança de 2 anos, mas ela não as pode utilizar eficientemente"* (Behver et al, op.cit, p.923).

Este tipo de colocação nos remete a uma visão sobre o desenvolvimento cognitivo que chama a atenção não para a aprendizagem ou para as reestruturações radicais do conhecimento através de uma série de estágios de desenvolvimento, mas sim as *"propriedades formais das estruturas e processos cognitivos que permanecem invariantes ao longo do desenvolvimento"* (Keil, 1981, p.197). Sem, evidentemente, negar a importância dos outros aspectos do desenvolvimento mencionados, Keil considera que as diferenças entre crianças e adultos não são tão grandes como podem parecer à primeira vista, e que (citando Fodor e Rozin) *"o desenvolvimento cognitivo consiste em grande parte de uma habilidade crescente de aplicar estruturas e subrotinas cognitivas a uma gama cada vez mais ampla de tarefas"* (op.cit., p.200).

Keil enfatiza o papel que teriam determinadas coerções ("constraints") cognitivas inerentes ao organismo, independentemente de seu estágio de desenvolvimento, que limitam a natureza do conhecimento possível de se desenvolver. Quanto mais complexo o domínio de conhecimento em questão, maiores seriam estas coerções, pois caso contrário não seria possível ao organismo lidar com a quantidade monstruosa de hipóteses que poderiam ser formuladas sobre

o mundo (o que não quer dizer que não possam surgir ou desaparecer certas coerções durante o desenvolvimento).

Esta idéia nos parece, no mínimo, interessante, tendo-se em mente o espantoso desenvolvimento das capacidades numéricas e do conhecimento matemático humano num período extremamente curto em termos evolutivos. Ao contrário do que sustentavam os modelos clássicos relacionando o peso relativo do "inato" e do "aprendido" numa proporção inversa, o impressionante potencial de aprendizagem matemática da espécie humana nos leva a pensar em uma igualmente significativa prontidão "natural" do nosso equipamento cognitivo, capaz de sustentar e orientar tal desenvolvimento.

1.3.3 - Princípios do contar

Em seu estudo sobre as capacidades numéricas em crianças pequenas, Gelman & Gallistel (1978) definem cinco princípios cujo conhecimento implícito caracterizaria a capacidade de contar: (a) o princípio da correspondência um-a-um, (b) o princípio da ordem estável, (c) o princípio da cardinalidade, (d) o princípio da abstração e (e) o princípio da irrelevância da ordem. Cada um destes envolveria, por sua parte, uma série de componentes comportamentais e/ou cognitivos.

Os três primeiros princípios definem os procedimentos básicos do contar: o primeiro determina que a cada elemento de um conjunto deve ser associado um - e apenas um - rótulo (que não precisa ser convencional nem mesmo verbal); o segundo, que a ordem dos rótulos deve ser sempre a mesma; o terceiro se refere ao papel do último rótulo utilizado na seqüência de contagem como símbolo do número de elementos no conjunto. Os princípios restantes têm um caráter "complementar": o quarto princípio ressalta o fato de que qualquer tipo de "objeto" - físico ou não - pode ser reunido para fins de contagem, e o quinto assinala que os elementos podem ser rotulados em qualquer ordem, desde que não seja violado qualquer dos três primeiros princípios (distinção entre o contar e o rotular).

Os autores falam em conhecimento "implícito" (em oposição a "explícito") pelos mesmos motivos pelos quais tal distinção é feita na literatura psicolingüística: *"queremos distinguir entre a habilidade de verbalizar ou afirmar os princípios do contar e a habilidade de demonstrar que o comportamento do sujeito é sistematicamente governado pelos princípios"* (Gelman & Meck, 1983, p.344). (Para uma discussão elaborada das estratégias de procedimento no contar infantil, vejam-se os modelos apresentados em Siegler & Robinson, 1982, Greno, Riley & Gelman, 1984 e Wilkinson, 1984; v. Capítulo 3).

Gelman e Gallistel não consideram a linguagem como um pré-requisito do contar, distinguindo "numerlogs" - palavras de contagem convencionais - de "numerons", rótulos que obedeçam aos princípios de contagem mas que não precisam ser verbais (v. p.ex. Saxe, 1981) ou sequer perceptíveis no comportamento do sujeito.

No caso particular da espécie humana, entretanto, nos parece que o enorme desenvolvimento das capacidades numéricas tem um de seus principais suportes (se não o principal) na associação número-linguagem; com seu poder de representar o ausente (e mais ainda - realizar operações sobre o ausente), a linguagem tem um papel determinante na plasticidade do pensamento numérico-matemático humano. Wohlwill (1960), por exemplo, concluiu que, no desenvolvimento inicial da noção de número, o domínio dos rótulos verbais designando os números tem um papel proeminente.

Relacionamos esta idéia à sugestão de Karmiloff-Smith (1988) de que a hipótese mais produtiva na discussão das analogias e

diferenças entre as competências numéricas animais e humanas seria a de que *"os princípios numéricos humanos e não-humanos inatamente especificados são os mesmos, mas no caso humano as representações são 're'- representadas e tornam-se assim acessíveis a outras partes do sistema cognitivo"* (op. cit., p.590).

Dentre os diversos pesquisadores que colocaram o contar das crianças pequenas numa nova perspectiva, pelo menos três tendências se distinguem: uma considera os "princípios do contar" como pré-existentes ("principles before": Gelman e colaboradores); outra ("principles after") supõe que as crianças começam imitando adultos e sendo modeladas por estes, e só depois generalizam as rotinas aprendidas, abstraindo os princípios (p.ex., Briars & Siegler, 1984; Fuson, 1988, apud Wynn, 1990); a terceira tendência corresponderia aos autores que consideram que existem mecanismos "inatos" anteriores aos "princípios", como as "disposições gerais" de Shipley & Shepperson (1990a).

Wynn (1990) chegou à conclusão de que a aquisição de capacidade de contar não é guiada pelos princípios do contar: a criança aprende como contar. A abordagem dos "princípios depois", neste sentido, estaria correta, mas não esclarece muito sobre como as crianças aprendem o que aprendem. Wynn considera que pode haver um outro papel para uma representação inata dos princípios que não seja o de guiar a aquisição das habilidades de contagem: eles poderiam estar embutidos na "subitização", e a habilidade de discriminar pequenas numerosidades pode estar subjacente à habilidade de aprender que o contar determina a numerosidade. A autora sugere que se siga Gelman e colegas *"em espírito, se não nos detalhes"* (Wynn, 1990, p.189), apontando para as evidências relativas a componentes não-aprendidos que estariam subjacentes a habilidade de contar nas crianças, como um viés ("bias") para objetos discretos (Shipley & Shepperson, 1990b), um conhecimento do número independente do conhecimento do contar (Gelman - experimento mágico), a discriminação das numerosidades 2 e 3 em bebês (Antell & Keating, 1983; Starkey & Cooper, 1980; Starkey, Spelke & Gelman 1990); parece, assim, que há algum conceito de um, dois e três ("oneness", "twoness", "threeness") e que as crianças aprenderiam o significado dos nomes de números ao associa-los com numerosidades "subitizadas" (Klahr & Wallace, 1973, apud Wynn, 1990; Shaeffer et al., 1974):

Parece que o desenvolvimento da compreensão do contar pelas crianças é complexo e formado pouco a pouco. Os bebês podem ter um conceito inato de numerosidade ou, ao menos, das numerosidades *um, dois e três*, as quais elas tem de mapear associando aos nomes de números corretos. As crianças primeiro mapeiam a palavra "um" à sua numerosidade, adquirindo isto, a seguir, para a palavra "dois" e então para a palavra "três". O contar começa como uma atividade sem significado, algo como um jogo de "patty-cake", a partir do qual as crianças abstraem certas propriedades mais cedo, outras mais tarde, talvez auxiliadas por habilidades não-aprendidas tais como as sugeridas por Shipley e Shepperson (1990). Uma propriedade que algumas crianças podem aprender é que a última palavra usada numa contagem é a resposta para "quantos" elementos há, mesmo que não entendam, de início, que "quantos" se refere a *numerosidade*. Por volta dos 3 1/2 anos de idade, a maioria das crianças chega a compreender que o último nome de número usado numa contagem representa a numerosidade dos itens contados e usa este conhecimento para aprender os significados de todos os nomes de números dentro de sua faixa de contagem (Wynn, 1990, pp.191-2).

Estudos recentes têm reforçado a idéia de que a emergência de raciocínios numéricos não depende do desenvolvimento prévio de uma habilidade de contagem verbal ou da experiência cultural com números (Starkey, 1992) e de que nossa concepção inicial do número seja representada de forma bastante distinta da maneira pela qual o sistema de contagem representa um número, o que torna uma tarefa difícil para as crianças o mapeamento de um para o outro (Wynn, 1992). Gallistel

& Gelman (1992), repensando seu modelo, propõem que, por trás dos "princípios" do contar estão *"mecanismos pré-verbais de contagem que compartilhamos com gêneros no mínimo tão distantes quanto roedores e aves"* (op.cit., p.44), cujo substrato seria um mecanismo como o descrito por Meck & Church (1983; v. acima); este mecanismo pré-verbal seria a fonte dos princípios, provendo o quadro de referência para a assimilação do sistema verbal; aprender a contar envolveria, em parte, *"aprender um mapeamento das magnitudes numéricas pré-verbais para os símbolos numéricos verbais e escritos e os mapeamentos inversos destes símbolos para as magnitudes pré-verbais"* (Gallistel & Gelman, 1992, p.43).

1.3.4 - Número e linguagem: o domínio da série dos números naturais

Se pensarmos nos termos da chamada "hipótese de Sapir-Whorf", a saber, de que o suporte linguístico através do qual uma cultura se expressa determina em larga escala toda a concepção de realidade desta cultura (Whorf, 1972), ficaremos ainda mais perplexos diante dos supracitados "primitivos" de Conant (1931) com suas linguagens com "numerlogs" limitados a termos referentes às quantidades de dois, três, ou quatro. De qualquer modo, para todas as línguas "modernas", as coisas são bastante diferentes: as crianças são desde o nascimento expostas a um vocabulário numérico que, associado ao sistema de base (dez), permite a representação de qualquer número inteiro (e com alguns recursos adicionais, qualquer número real).

A enunciação da seqüência dos números naturais começa a ser observada no comportamento da criança pouco depois do início da fala, ou seja, antes de possuir qualquer significado funcional, como uma brincadeira de imitação estimulada pelo adulto e começa a adquirir este significado ao se articular com o mecanismo de correspondência um-a-um, apoiado em padrões motores de tocar ou apontar para os objetos à medida que os "numerlogs" são enunciados (primeiro e segundo princípios de Gelman e Gallistel; v. acima). *"As crianças aprendem a contar, inicialmente, como um jogo de recitação desencadeado por dicas específicas, como instruções para contar ou a pergunta 'quantos?'"* (Sophian, 1988b, p.640).

Este primeiro momento, porém, costuma ser marcado não apenas por erros de performance mas também por erros idiossincráticos que, para Gelman & Meck, são muito interessantes, na medida em que revelam a atuação dos "princípios" subjacentes: trata-se da utilização - observada em algumas crianças de dois anos de idade - de listas contendo alterações da ordem (p.ex. "1- 2- 8- 10") ou mesmo envolvendo termos não-numéricos (p.ex. "1- 2- 3- 4- 5- 6- 7- h- i- j- k" ou "vermelho- amarelo- azul"), mas que, embora não-convencionais, não violam os princípios do contar (desde que sejam usadas sistematicamente da mesma forma). *"A invenção e o uso correto de listas idiossincráticas são difíceis de explicar a não ser que se apele para algumas regras implícitas guiando a busca que a criança faz em seu ambiente por uma lista com a qual contar"* (Gelman & Meck, 1983, p.345). Trata-se do mesmo argumento utilizado para explicar super-generalizações como por exemplo "runned" ou "unthirsty" na fala infantil: a ocorrência destas seqüências de contagem atípicas mas funcionalmente corretas *"torna necessária a postulação de um conjunto implícito de regras"* (idem).

Entre dois e três anos de idade, segundo Klein & Starkey,

as crianças começam a aplicar todos os três princípios do contar em conjunção, quando contam uma coleção de objetos. Crianças de dois anos podem aplicar um ou dois princípios quando tentam contar uma coleção, mas tipicamente não aplicam todos os três (Klein & Starkey, 1988, p.13).

Dos três anos em diante, não encontramos referências ao tipo de erro de contagem envolvendo o uso de listas idiossincráticas. Quando, por exemplo, ocorreram erros na performance entre os sujeitos de Siegler & Robinson (1982), com idades variando entre três e cinco anos, estavam ligados a problemas na utilização dos mecanismos linguísticos relacionados ao sistema de base, tais como omissões ou repetições de dezenas inteiras ou a produção de números atípicos ("nonstandard") como "vinte-e-dez" ao invés de "trinta", por exemplo. *"Os números atípicos que foram usados invariavelmente envolviam concatenações de números típicos [standard]"* (Siegler & Robinson, 1982, p.256).

Além dos cinco princípios básicos do contar já mencionados, Gelman admite que novos princípios venham a emergir durante o desenvolvimento, três dos quais, pelo menos, seriam de importância fundamental.

O primeiro deles seria o uso de um esquema gerador de nomes de números apoiado no sistema de base, sem o qual seria muito difícil a formação das listas longas e estáveis de nomes de números necessárias para a contagem de grandes conjuntos: *"a primeira consequência desta dificuldade é que muito poucas crianças de cinco anos conseguem contar até 20 confiavelmente e precisam trabalhar duro para adquirir esta habilidade"* (Gelman & Meck, 1983, p.357). Neste princípio estariam as sementes da multiplicação.

Outra noção emergente - a partir da aplicação do contar na subtração - seria o reconhecimento de que há "números", como o zero, aos quais não se chega pelo contar ordinário: *"crianças pré-escolares parecem reconhecer apenas aqueles números aos quais podem chegar por um procedimento de contagem"* (op.cit., p.358).

Um outro princípio é o da infinitude da série numérica:

Os pré-escolares parecem não compreender (...) que a lista dos nomes de números é efetivamente interminável. Sua apreciação deste princípio, como sua apreciação dos princípios geradores para a produção de cada vez mais 'numerlogs' parece depender da experiência com a contagem de conjuntos cada vez maiores e da apreciação do poder gerador de um sistema de base. Este princípio, é claro, leva a um começo de compreensão da infinitude dos números, um conceito que as crianças pré-escolares parecem não possuir (op.cit., pp.357-358).

1.4 - A descoberta da infinitude do número

Davis & Pérusse (1988) observam, sem maiores comentários, que *"o contar implica a possibilidade de enumeração infinita"* (p.562). Não fica claro o sentido desta afirmação, mas, em termos concretos, parece fora de discussão que há um intervalo razoável entre o momento em que a criança domina os aspectos básicos do contar e aquele em que se dá conta da infinitude da série numérica. De acordo com Gelman (1980), é apenas nos primeiros anos de escola que as crianças adquirem uma compreensão de que não existe o maior de todos os números e de que os números nunca terminam.

Para Piaget, esta compreensão está vinculada ao início da fase das operações formais (por volta dos 11-12 anos):

Apenas superado o nível das operações concretas e desde o momento em que os mecanismos formais prolongam a ação possível, a série dos números acessíveis à criança de 11-12 anos ultrapassa toda a percepção e inclusive toda a representação particulares e se compromete na direção da construção pura. Por exemplo, dizer que "nunca se chegará ao final dos números", segundo a expressão de um de nossos sujeitos de 11 anos, é descobrir o poder infinito de iteração da operação $+1$, comparado com um esquema finito e que pode ser representado como o de um número dado, suscetível de reunir efetivamente os termos de uma coleção concreta de objetos. Dito de outro modo, o número consiste exclusivamente em um sistema de ações ou operações que se exercem sobre os objetos, mas que não dependem das propriedades particulares destes objetos, e a construção do número pode prosseguir indefinidamente para além dos limites da percepção e inclusive para além da representação imaginada das coleções formadas por estes objetos, quer dizer, muito além das fronteiras do objeto. O emprego das diversas formas de infinito, indispensáveis para o teórico do número como para o analista ou o geômetra, não é senão o testemunho cotidiano desta libertação dos entes numéricos em relação ao objeto, posto que o objeto de experiência é necessariamente finito (Piaget, 1975a, p.130).

O problema do infinito atual sempre opõe do modo mais radical as interpretações racionalistas e as interpretações operatórias do número. (...) querer situar um infinito atual no mundo, seja o real ou o das idéias, apresentou, sempre que se colocou o problema, ao longo da história, uma série de dificuldades sempre semelhantes. Pois bem, estas só podem ser evitadas recorrendo-se, de modo implícito ou explícito, ao dinamismo intelectual das operações, único suporte legítimo das diversas formas de infinito, porque substitui a realização atual pela virtualidade de um desenvolvimento ilimitado. (...) só há uma maneira de evitar os becos sem saída para onde nos conduz o realismo do infinitamente pequeno: considerar como Leibniz (...) o infinito como expressão do próprio dinamismo da construção operatória (Piaget, op.cit., pp.123-4).

Até onde temos conhecimento, a única questão ligada à infinitude empiricamente abordada por Piaget foi a da subdivisão infinita, em sua obra "La representation de l'espace chez l'enfant", de 1947 (Piaget & Inhelder, 1977). Ao observar o desenvolvimento da compreensão infantil acerca das possibilidades de divisão de um segmento de reta, Piaget afirma que no Estágio III (7-8 a 11-12 anos),

Apesar de a criança estar agora preparada para admitir a possibilidade de um grande número de subdivisões, ela não as vê como infinitas. (...) estes procedimentos nunca se erguem acima do nível das operações concretas, nunca são generalizadas além do tamanho visível ou tangível. Se os elementos não são mais entendidos como isomórficos com o todo original, como o eram no Estágio II, sua forma é vista como dependente do modo particular de subdivisão e eles nunca são concebidos como um número infinito de pontos sem área de superfície (Piaget & Inhelder, 1977, p.620).

Mais adiante, no que o autor denomina Estágio IV (começando aos 11-12 anos),

a operação de ordenar elementos em séries (...) não mais apresenta qualquer dificuldade e a subdivisão é concebida como ilimitada. (...) Diversas crianças chegam independentemente à ideia de uma correspondência termo-a-termo entre a série de pontos formando uma linha e a série de números considerada como infinita (apesar de, naturalmente, não possuírem o menor indicio do conceito de números irracionais para preencher os espaços intervenientes) (op.cit., p.620-1).

Taback (1975) discutiu aspectos bastante semelhantes, em seu estudo (de enfoque piagetiano) sobre o desenvolvimento do conceito matemático de limite; no experimento de intercalação de pontos num intervalo aberto, verificou que

Enquanto apenas uma criança de 10 anos foi capaz de conceptualizar uma quantidade infinita de pontos dentro dos limites, oito crianças de 12 anos foram capazes disso. De fato, neste aspecto do intervalo aberto, as crianças de 10 anos não tiveram um desempenho muito melhor que o das de 8, que claramente não desenvolveram qualquer noção de infinitude; nenhuma criança de oito anos pensou que houvesse mais de 50 pontos dentro do intervalo aberto (op.cit., p.134-135).

De modo análogo, no experimento com uma área circular, "apenas

uma criança de 10 anos pensou que houvesse uma quantidade infinita de pontos no círculo aberto; em contraste, sete crianças de 12 anos assim pensaram "(idem).

Para Langford (1974), os estudos anteriores falharam em distinguir infinitude potencial de infinitude completa; a infinitude potencial está envolvida em noções como a da possibilidade de interação infinita das operações matemáticas (não havendo, portanto, um "maior dos números"), enquanto que a infinitude completa está ligada à ideia de conjuntos infinitos ou de decimais infinitos (o conceito de limite podendo ser considerado de ambos os pontos-de-vista). De acordo com os resultados de Langford (um tanto obscurecidos por uma mistura de idades cronológicas e idades mentais na apresentação dos dados; v. Capítulo 6), os conceitos relacionados à infinitude potencial se desenvolvem entre as idades de 9 e 15 anos (contrariamente ao defendido por Piaget), enquanto que os conceitos de infinitude completa só se desenvolvem mais tarde.

Evans & Gelman (1982) questionaram crianças de jardim-da-infância e dos três primeiros anos primários acerca do "maior número" que conheciam, da possibilidade de se somar mais um a este número, etc, além de verificar seu entendimento de idéias como a de "um poço sem fim", "para sempre" e de "uma espaçonave reabastecível enquanto viaja através do espaço" (num contexto envolvendo outros tópicos matemáticos); os sujeitos foram classificados de acordo com suas respostas em três níveis: I) Finito e pequeno (habilidade de contar restrita, sem noção da infinitude dos números); II) Finito e grande (mencionam grandes números mas acreditam que há um maior dos números); III) Infinito (maiores detalhes no Capítulo 6). Evans concluiu que

O reconhecimento de que não existe o maior de todos os números está relacionado ao conhecimento de números maiores que cem, à habilidade de somar sistematicamente e à habilidade de induzir que pode-se sempre somar um para obter um número maior (...) estas condições, entretanto, não eram suficientes para uma criança reconhecer que não há o maior dos números. Tal conclusão pode requerer, por parte da criança, a capacidade de reconhecer e resolver contradições em seu pensamento (Evans, 1984).

1.5 - O projeto de estudo

A "descoberta" da infinitude representa, acreditamos, um marco extremamente importante no desenvolvimento cognitivo do indivíduo, da cultura e da espécie, na medida em que é um dos indicadores do momento em que o pensamento ganha definitivamente uma dimensão independente de existência, não mais limitado aos dados da experiência sensorial.

Neste estudo, realizado através de entrevistas com amostras etárias transversais abrangendo crianças de 3 a 12 anos de idade, nosso objetivo foi o de mapear a curva de desenvolvimento do domínio da série dos números naturais, detectando o momento da descoberta de sua infinitude, e o de analisar a relação entre este processo e outros parâmetros relacionados às capacidades numéricas (como a conservação de quantidades discretas), bem como com o desenvolvimento de uma noção genérica de "infinitude" - com suas possíveis implicações sobre o modo de encarar as grandes quantidades, o contável e o incontável, em seus aspectos tanto numéricos quanto linguísticos.

2

MATERIAL E MÉTODOS

A coleta de dados foi realizada através de entrevistas com um total de 200 crianças, distribuídas em 10 amostras de 20 sujeitos cada (10 meninos e 10 meninas), cada amostra correspondendo a uma faixa etária, de 3 a 12 anos completos (A3 a A12 - o número da amostra indica a idade em anos).

Ao nos referirmos, ao longo do texto, a sujeitos particulares, o número entre parênteses "(XX/YY)" indica a Amostra (XX, idade em anos) e o número do sujeito (YY, onde 0 a 10 correspondem às meninas e 11 a 20, aos meninos). Em caso de indicações mais precisas de idade, será usada a forma *(anos:meses)*

As entrevistas com os pré-escolares foram efetuadas durante o primeiro semestre de 1991, junto à Creche Central da USP; a segunda etapa do levantamento foi desenvolvida na Escola de Aplicação da FEUSP, durante o segundo semestre de 1991.

A coleta respeitou a seqüência cronológica das amostras, de maneira a permitir que a entrevista fosse parcial e progressivamente reformulada - nos momentos (entre amostras) em que isso nos pareceu oportuno ou necessário - uma vez que não seria possível manter a mesma entrevista ao logo de todo o estudo (as modificações envolvem principalmente a inclusão de novos itens, além de eventuais alterações nos procedimentos referentes aos tópicos pré-existentes); descreveremos adiante (v. 2.2) o procedimento utilizado com os sujeitos da primeira amostra (A3) e indicaremos, subseqüentemente, as alterações introduzidas a cada nova amostra.

2.1 - Amostras e procedimento

2.1.1 - Amostras A3 a A6: pré-escolares

Crianças da faixa etária adequada (n anos:0 meses a n anos:11 meses), escolhidas ao acaso, eram chamadas a participar voluntariamente ("brincar com os bonequinhos") e levadas para uma das salas do Módulo desocupadas no horário em questão. Cada

entrevista durou cerca de 20 minutos. Nossas anotações era feitas às claras, mas não explicitamos às crianças a presença do gravador (ao contrário do procedimento usado posteriormente com as crianças das amostras A7 a A12). As idades (médias, máximas, mínimas) dos sujeitos em cada amostra estão indicadas na Tabela 2.1.

TABELA 2.1

Idades dos sujeitos em cada uma das Amostras (anos:meses)

AMOSTRA	média	mínimo	máximo	méd. fem.	méd. mas.
A3	3:5.5	3:1	3:11	3:6.0	3:4.9
A4	4:6.9	4:2	4:11	4:6.7	4:7.1
A5	5:6.0	5:1	5:11	5:6.0	5:5.9
A6	6:6.4	6:1	6:10	6:5.2	6:7.5
A7	7:7.3	7:2	7:11	7:6.7	7:7.8
A8	8:4.3	8:0	8:09	8:4.2	8:4.3
A9	9:5.5	9:1	9:11	9:5.2	9:5.8
A10	10:4.8	10:1	10:10	10:5.6	10:4.0
A11	11:4.8	11:1	11:8	11:4.4	11:5.2
A12	12:5.3	12:1	12:10	12:5.4	12:5.2

AMOSTRA 3 (A3: 3 anos completos): as entrevistas foram realizadas nas dependências do Módulo II da Creche (3-4 anos); nossa amostra correspondia a cerca da metade das crianças disponíveis neste Módulo; uma vez conduzida à sala de entrevistas, apenas uma criança (sexo masculino) deixou de participar, permanecendo em silêncio (e não foi incluída na amostra).

AMOSTRA 4 (A4: 4 anos completos): a coleta de dados se deu, em sua maior parte, no Módulo II da Creche; duas meninas e quatro meninos, apenas, faziam parte do Módulo III (não foi possível obter uma amostra suficiente em apenas um dos Módulos, nem amostrar igualmente os dois Módulos); duas meninas e um menino interromperam as entrevistas perto do início (sendo, portanto, excluídos da amostra), e outro menino abandonou a entrevista por motivos externos, tendo sido entrevistado com sucesso posteriormente (sujeito 4/12).

AMOSTRA 5 (A5: 5 anos completos): as crianças entrevistadas pertenciam ao Módulo III da Creche Central da USP. Nenhum sujeito interrompeu a entrevista.

AMOSTRA 6 (A6: 6 anos completos): Módulo III da Creche; uma menina acompanhou-nos à sala de entrevistas, mas permaneceu em silêncio, não permitindo a entrevista; outra (6/08) foi vista, pouco antes da entrevista, participando de uma conversa com 2 ou 3 outras meninas da mesma faixa etária (uma, pelo menos, já havia passado pela entrevista), onde foi dito que "infinito não tem fim".

Como subsídio para análises posteriores, levantamos material sobre as propostas e atividades pedagógicas da Creche relacionadas à matemática, através de conversas com a pedagoga Rosana A. Dutoit e do Relatório (1990) sobre a atividade desenvolvida no local pela equipe da Oficina de Matemática da FEUSP.

2.1.2 - Amostras A7 a A12: alunos do Primeiro Grau

As entrevistas foram realizadas com alunos da 1ª a 7ª Series do 1º

Grau da Escola de Aplicação de Faculdade de Educação da USP. Os sujeitos foram escolhidos ao acaso (procurando, porém, manter uma média de idade próxima de $n:06$; afora isso, tomamos os primeiros nomes das listas).

A partir da Amostra A7, tornamos explícita a presença do gravador; esta amostra foi composta exclusivamente de alunos das 1^{as} Séries, enquanto que, para as amostras subsequentes, entrevistamos metade dos sujeitos em uma Série e metade na Série seguinte (o que permite uma análise dos efeitos do grau de escolaridade); A8, por exemplo, é formada por 5 meninos da 1^a Série, 5 meninos da 2^a Série, 5 meninas da 1^a Série e 5 meninas da 2^a Série, e assim por diante.

As crianças da 1^a à 4^a Séries nos eram enviadas pela professora conforme lista previamente combinada (retiradas 5 crianças por sessão diária, exceto nas duas primeiras entrevistas, feitas durante o recreio); já com os alunos da 5^a e da 6^a Séries, as entrevistas não mais foram feitas em horário de aula, em função de haver, a partir daí, várias aulas de 50 minutos, de disciplinas específicas (nossa intervenção perturbaria a atividade didática); entrevistamos os sujeitos em horários combinados individualmente (em geral, após as aulas - no fim da manhã, ou no período da tarde, quando muitos alunos destas turmas, apesar de terem aula pela manhã, permanecem na escola durante a tarde).

As entrevistas foram realizadas (por um único experimentador) na biblioteca ou em salas de aula desocupadas.

Ao nos apresentarmos, além deixar clara a presença do gravador, enfatizamos o fato de não haver qualquer relação entre nosso levantamento e a atividade escolar (avaliação, etc).

AMOSTRA 7 (A7: 7 anos completos): sujeitos pertencentes às turmas 1^a I e 1^a II.

AMOSTRA 8 (A8: 8 anos completos): metade da amostra pertencente às 1^{as} Séries I e II, metade às 2^{as} Séries (I/II).

AMOSTRA 9 (A9: 9 anos completos): metade dos sujeitos pertencia às 2^{as} Séries I e II, metade às 3^{as} Séries I e II; um sujeito escolhido foi substituído por não se dispor a participar naquele momento; dois outros o foram por terem faltado às aulas.

AMOSTRA 10 (A10: 10 anos completos): metade dos sujeitos pertencia às 3^{as} Séries (I e II), metade às 4^{as} Séries (I e II).

AMOSTRA 11 (A11: 11 anos completos): sujeitos pertencentes às 4^{as} Séries (I e II) e 5^{as} Séries (I e II); uma menina da 4^a Série I foi substituída (por outra da mesma classe) por não querer vir na hora prevista; um menino da 4^a Série II foi substituído por ter faltado e outro (5^a Série I), por ter deixado a Escola.

AMOSTRA 12 (A12: 12 anos completos): entrevistas realizadas com alunos das 5^{as} Séries I e II e 6^{as} Séries (I e II); entre os sujeitos de 5^a Série, duas meninas foram substituídas por não ter sido possível acertar horários para as entrevistas e um menino, por não se mostrar muito disposto e também devido a antecedentes de problemas neurológicos; na 6^a Série, uma menina foi substituída por ter deixado a Escola.

Levantamos junto à Escola material referente às propostas pedagógicas e o o programa de matemática para cada Série do 1^o Grau, como subsídio para a interpretação dos resultados.

2.2 - A entrevista

Embora o procedimento tenha buscado um grau elevado de padronização, procuramos manter um tom coloquial na interação com as crianças; aceitamos suas respostas, via-de-regra, sem grandes questionamentos (a não ser quando não as compreendíamos): nosso propósito era o de observar respostas espontâneas e imediatas e não explorar, por assim dizer, a "área de desenvolvimento proximal" dos sujeitos.

Apresentamos a seguir o roteiro da entrevista - a partir do modelo utilizado para amostra A3 e indicando as modificações subseqüentemente introduzidas (maiores detalhes a respeito de cada tópico podem ser encontrados nos próximos capítulos).

A3: após nos apresentarmos às crianças, tinha início a entrevista, envolvendo os seguintes tópicos:

I - Contagem com Objetos: na primeira situação proposta, as crianças deveriam contar os elementos de um conjunto de bonecos "Lego" (cabeça e corpo estilizados, aproximadamente 5 cm de altura, várias cores), em número de 10; inicialmente, estes eram colocados um a um diante da criança pelos experimentadores, facilitando, assim, o desempenho no que se refere à correspondência um-a-um entre objetos e "numerlogs"; uma segunda contagem era posteriormente solicitada, para checar esta correspondência. Em seguida, a pergunta "então quantos bonequinhos são?" visava verificar a ocorrência de uma resposta cardinal adequada (o último nome de número indicando a quantidade de elementos do conjunto). A seguir, era proposta a tarefa de parear um palito de fósforo a cada boneco, perguntando-se, antes, o número de palitos necessário (só de A3 a A6), e, posteriormente, o número de palitos utilizado. Finalmente, era perguntado se havia mais bonecos ou palitos e manipulava-se o comprimento das duas fileiras de objetos, de modo a verificar o desempenho dos nossos sujeitos numa tarefa tipicamente piagetiana acerca da conservação de quantidades discretas (análoga aos "copos e garrafinhas" de Piaget & Szeminska, 1975). Como recurso para atrair a atenção das crianças, utilizamos um fantoche (que era referido como "vovozinho", em função de sua aparência - e os bonecos, seus "netinhos"), o qual as crianças deveriam "ajudar a contar".

II - Contagem sem Objetos: concluída a primeira parte, os bonecos eram afastados e a criança solicitada a contar até onde soubesse (para "ensinar o vovozinho a contar"). A cada parada, a criança era estimulada a prosseguir ("e depois?"); insistíamos no procedimento até ficar aparente que não haveria mais avanço; eram registrados as seqüências de contagem produzidas pelas crianças, o limite sem erros, o limite com erros ocasionais, o limite máximo atingido, o maior número mencionado e os erros observados, sistemáticos ou não (o mesmo foi observado nas contagens do item anterior). Após o fim da contagem, perguntávamos à criança "qual o maior número" que ela conhecia e qual "o maior número que existe".

III - Estimação: solicitamos a cada criança a estimação do número de elementos em alguns conjuntos "incontáveis" (presentes e ausentes): um punhado de palitos de fósforo (50), as folhas de uma árvore vista pela janela, as estrelas no céu noturno ("numa noite bem limpa, bem estrelada").

IV - Finalmente, perguntamos às crianças se sabiam "o que quer dizer Infinito"; não esperávamos respostas adequadas nesta faixa etária, mas o fizemos para observar como a criança lidava com a pergunta - e para nos assegurar, posteriormente, das primeiras ocorrências de

respostas que revelassem o mais ténue reconhecimento do vocábulo. Perguntas do tipo "quanto tempo uma pedra cai em um poço sem fundo" foram abandonadas, nesta fase, por total incompreensão, por parte das crianças, dos termos do problema.

A4: o procedimento foi basicamente o mesmo usado com a amostra anterior. Na Contagem com Objetos, entretanto, as crianças que tiveram um desempenho correto (ou quase) ao contar os 10 bonecos, eram solicitadas a contar palitos de fósforo (50), sendo também feita a pergunta sobre cardinalidade ("quantos tem?") logo após a contagem. O uso do fantoche como motivador das crianças foi sendo atenuado, uma vez que percebemos que ele não surtia, sobre as crianças de 4 anos, o mesmo efeito que sobre as de três (especialmente entre os meninos).

A5: o procedimento sofreu as seguintes modificações:

I - No item "Estimação de Incontáveis", além dos conjuntos relativos aos palitos (50) de fósforo, folhas de uma árvore e "estrelas no céu", foram acrescentados um pacote de plástico transparente com 200 palitos de fósforo e um frasco transparente com 100 ml de areia (para estimativa do número de grãos).

II - O item "Infinito" foi ampliado para incluir dois problemas: no primeiro, apresentamos às crianças um tratorzinho de plástico e uma "estrada" circular (impressa em papel); era solicitado às crianças que fizessem o carrinho andar pela estrada e perguntado: "quanto falta para o fim da estrada?" e "onde é o fim?". O segundo problema envolve uma noção de limite e evoca o paradoxo de Zenão: um bonequinho (dos utilizados anteriormente) quer atravessar a mesa de ponta a ponta, mas só anda aos pulos e avança, em cada pulo, a metade da distância que falta percorrer; "quantos pulos ele precisa dar para vir daqui (origem) até aqui (destino)?" Finalmente, era feita a pergunta "v. sabe o que é infinito?", como anteriormente; nos casos, entretanto, em que obtivemos respostas revelando alguma noção, ainda que vaga, do conceito de infinitude, perguntamos, ainda, que coisas a criança conheceria que fossem "infinitas", obtendo assim uma lista de "exemplos" de infinitude; a cada "exemplo", solicitávamos outro, até que a criança parasse de produzi-los ou, em uns poucos casos, se tivesse tornado redundante.

A6: utilizamos a mesma entrevista que para a Amostra 5.

A7: a entrevista foi pouco alterada: a contagem inicial de bonecos foi suprimida e a contagem de palitos, substituída por contagem de feijões (cerca de 120); contagem sem objetos: as crianças foram solicitadas a contar de 10 em 10 até 200, de cem em cem até mil, etc, até falhar ou até 1 milhão (de cem mil em cem mil).

A8: nesta amostra, de modo geral, não foi mais necessário exemplificar o que queríamos dizer com "contar de dez em dez, de cem em cem", etc. Duas foram as alterações no procedimento:

I - no item "Infinitude" houve o acréscimo de uma pergunta envolvendo Subdivisão Infinita: depois de demonstrar duas divisões de um pedaço de papel (inicialmente com 14 X 11 cm), perguntou-se: "se eu picar a folha assim (descartando uma metade, prosseguindo com a outra) por uma hora, o pedaço na minha mão vai ficar bem pequeno; se eu pudesse continuar picando para sempre, de que tamanho ficaria o papel na minha mão?".

II - No teste sobre Limite (boneco que salta sempre a metade do que falta, etc), passamos a registrar após que "pulo" da demonstração inicial a criança soube indicar corretamente o local aonde o pulo seguinte levaria o boneco.

A9: as condições permaneceram basicamente inalteradas, com as seguintes exceções:

I - Uma vez que passaram a ocorrer casos em que o "maior número conhecido" era da ordem dos **n-lhões** (bilhões, trilhões, etc), adotamos

o procedimento de, nestes casos, fazer perguntas acerca das relações de ordem de grandeza entre este número e o milhão (p.ex., "quantos milhões há em 1 bilhão?");

II - Introdução de mais um "incontável" para estimação da quantidade: um recipiente de plástico transparente (tubo cilíndrico, cerca de 6cm de altura e 2 cm de diâmetro) com cerca de 2 mil grãos de arroz;

III - Uma nova questão (inspirada em Evans & Gelman, 1982) foi introduzida no tópico "infinitude" (entre a relativa à subdivisão infinita do papel e a que questionava acerca do significado do termo "infinito"): esta pergunta girava em torno da noção de uma Duração Infinita, e era enunciada da seguinte forma: "se eu tiver aqui (gesto) um poço sem fundo e dentro dele jogar uma pedra (gesto), quanto tempo a pedra vai ficar caindo?"

A10 a A12: procedimento igual ao utilizado com a amostra A9. Em sua forma final, a entrevista se constituiu das seguintes etapas:

I - Apresentação: onde conversávamos um pouco com as crianças, informalmente, nos apresentávamos e deixávamos claro não haver qualquer relação entre a entrevista e qualquer avaliação da escola; esclarecíamos que se tratava de uma entrevista "sobre números" e indicávamos, de passagem, a presença do gravador.

II - Contagem com Objetos: cento-e-vinte-e-poucos feijões eram apresentados para contagem em voz alta, com verificação do acerto no contar, de padrões particulares de comportamento no contar (contar de 2 em 2, agrupar, etc) e da resposta cardinal adequada; este item - embora relativamente pouco significativo nesta altura - foi mantido, em parte por oferecer um momento inicial de relaxamento e concentração para os tópicos subsequentes.

III - Correspondência 1-a-1: a ser construída entre dois conjuntos de objetos (bonecos e feijões): esse item foi mantido apenas na qualidade de introdução ao item seguinte:

IV - Conservação de quantidades discretas: entre a fileira de bonecos e a fileira de feijões, iguais em número mas submetidas, num segundo momento, a duas transformações sucessivas: aproximação dos bonecos entre si e aproximação (ainda maior) dos feijões.

V - Contagem sem Objetos (enumeração): solicitamos aos sujeitos que contassem, até que lhes dissessemos para parar, de dez em dez (até depois de 200), de 100 em 100 (até 1000), de mil em mil (até depois de 10 mil), de 10 mil em 10 mil (até 100 mil) e de 100 mil em 100 mil (até 1 milhão).

VI - O "maior dos números": a pergunta inicial foi "qual o maior número que você conhece?"; quando a resposta era diferente de "infinito", a pergunta seguinte era "e qual o maior de todos os números que existem?"; caso contrário, a segunda pergunta passava a ser: "sem ser infinito, qual o nome do maior número que você conhece?"; em qualquer dos casos, após o "maior número", verificávamos a noção dos sujeitos sobre as relações de ordem de grandeza entre as grandes unidades mencionadas (milhão, bilhão, etc), conforme descrito acima ("quantos milhões há em 1 bilhão?", etc; v. Amostra 9).

VII - Estimação: era solicitado aos sujeitos que estimassem - rapidamente e sem tentar contar - a quantidade de elementos nos seguintes conjuntos: a) um pacote transparente com 50 palitos de fósforo; b) um pacote similar, mas com 200 palitos; c) um frasco com cerca de 2 mil grãos de arroz; d) um frasco com areia (quantidade avaliada pelo experimentador em cerca de 10 milhões de grãos); e) folhas em uma árvore (visível pela janela); f) a quantidade de estrelas que se pode avistar "numa noite de céu bem limpo".

VIII - Primeiro problema envolvendo infinitude (Limite): perguntamos qual o número de saltos que um boneco teria de dar para

percorrer uma dada distância (junto à borda da mesa, cerca de 50 cm), saltando de cada vez apenas a metade da distância que faltar para chegar ao fim - uma variante do Paradoxo de Zenão; além disso, registramos quantos pulos eram necessários, na demonstração inicial, eram necessários até que a criança entendesse corretamente a "regra" envolvida, i.e., indicasse corretamente aonde iria o boneco no pulo seguinte (o primeiro pulo era sempre demonstrado); esta pergunta foi repetida com um objeto maior (suporte dos bonecos) e outro menor (feijão), a fim de verificar a compreensão da irrelevância deste fator (independentemente de uma resposta correta indicando o número infinito de pulos necessário).

IX - Segundo problema - repetição infinita de um processo cíclico (Ciclicidade Infinita): dados uma "estrada" circular (impressa em papel) e um tratorzinho de plástico, que o sujeito era convidado a mover ao longo da "estrada", perguntamos: "quanto falta para que ele chegue ao fim da estrada?"; se a resposta não indicasse a ausência de um fim, perguntava-se "onde é o fim dessa estrada?"; caso obtivéssemos então uma resposta do tipo "não tem fim", repetíamos a primeira parte da pergunta ("então quanto falta..." etc).

X - Terceiro problema - Subdivisão Infinita: "se eu pegar uma folha de papel como esta (o experimentador mostra a folha de 11 X 14 cm) e for picando no meio (demonstra)... divido, joga fora uma metade e continuo com a outra (2 demonstrações; v.A8)... se eu puder ficar picando para sempre, de que tamanho vai ficar o papel?"

XI - quarto problema - Duração Infinita de um percurso infinito: "se eu tiver aqui ao lado um poço, mas um poço sem fundo... e se eu jogar dentro dele uma pedra... (etc; v.A9) ... quanto tempo a pedra fica caindo?"

XII - questões explícitas acerca do conceito de Infinitude: "o que é 'infinito'?... e que coisas você conhece que sejam infinitas?"; insistíamos ("e o que mais?") até receber uma série de respostas negativas ("não sei mais", etc) ou até considerarmos que se havia iniciado uma série de "exemplos" de natureza redundante; em alguns poucos casos, solicitamos maiores explicações sobre o porquê de determinados "exemplos" de infinitude (onde os "motivos" de inclusão nos pareceram obscuros), mas este procedimento foi via-de-regra evitado, pois tal questionamento poderia inibir a espontaneidade dos "exemplos" subseqüentes (e em geral produzia apenas respostas tautológicas).

XIII - apenas para os sujeitos de A12 e metade dos de A11, foi perguntado, ainda, "quanto é": a) "infinito mais um", b) "infinito menos um", c) "infinito mais infinito" e d) "infinito menos infinito".

Finalmente, agradecemos a colaboração do sujeito, solicitando que evitasse comentar pormenores da entrevista com colegas ainda por entrevistar (o que, ao menos sistematicamente, não parece ter acontecido) e encerrávamos a entrevista (que tinha uma duração média de cerca de 25 minutos).

2.3 - Algumas observações com crianças na faixa dos 2 anos completos

Uma vez concluída a coleta de dados no Módulo III da creche, consideramos a possibilidade de ampliar o espectro etário deste estudo de modo a incluir uma "Amostra 2", com crianças de 2 anos a 2 anos e 11 meses, já que havia um número suficiente (embora sem margens de

segurança) de sujeitos potenciais no Módulo I, que recebe crianças de menos de um ano até três anos. Nossa intenção era a de utilizar uma entrevista extremamente simples, envolvendo apenas a contagem de objetos, segundo a metodologia utilizada para as outras amostras: contagem dos bonecos com utilização do fantoche como instrumento auxiliar na interação com as crianças. Trazer as crianças desta idade para a situação de entrevista, no entanto, foi por si só inviável: pudemos notar que há uma diferença impressionante entre as crianças de 3 e 2 anos (talvez acentuada pela distribuição etária nos Módulos), seja na facilidade de interação verbal, seja no desempenho em termos de compreensão da tarefa solicitada ou na capacidade de fixação da atenção. Assim sendo, optamos por uma abordagem dos sujeitos de forma menos rígida, interagindo no próprio local onde as crianças se encontravam (sem leva-las a uma sala isolada) e utilizando como estímulos quaisquer objetos à mão (palitos, gravetos, ilustrações de livros infantis). Mesmo assim, não foi possível obter uma amostra numericamente significativa, já que a maioria das crianças não respondeu às nossas perguntas com qualquer forma de contagem. Ficou claro que a observação com crianças desta idade requereria outro tipo de metodologia, e uma vez que a introdução desta nova amostra não era particularmente relevante para nossa proposta, abandonamos a idéia de uma "Amostra 2", ficando apenas com uma observação genérica acerca do desempenho das crianças desta idade nas condições acima descritas.

Um dos aspectos do nosso procedimento que certamente restringiu o desempenho observado nas crianças (além das exigências em termos de atenção e proficiência verbal) foi o fato de não nos permitirmos induzir contagens por imitação imediata, isto é, nunca dizíamos aos sujeitos nada além de "um...", apenas mencionando, além da unidade, números já verbalizados pela criança. Em cerca de uma dezena de crianças que tentamos entrevistar, apenas metade respondeu com alguma espécie de contagem (cinco crianças, 3 meninos e 2 meninas):

KAL: "1-2(12?)-... (algumas vezes); 1-2(12?)-3-... (1 vez); 1-12-4-5(3 vezes)".

TIK: "1-2-... (algumas vezes)".

GRSS: "1-2-... (1 vez); 1-4-... (1 vez); 1-2-4-... (1 vez)".

IA: "1-2-3- e depois? e depois?(repetindo a pergunta; algumas vezes)".

ROR: "1-2-... (2 vezes)".

Embora nossa interação com as crianças tenha melhorado muito no decorrer de nossas visitas ao Módulo I (após uma fase inicial de timidez diante de estranhos, as crianças nos procuravam espontaneamente para brincar, mostrar ou pedir coisas, etc.), não observamos desempenhos mais expressivos no contar que acompanhassem esta maior intimidade com os sujeitos.

2.4 - Grupo controle (adulto) para a tarefa de Estimação

Entrevistamos uma amostra de 20 sujeitos adultos, solicitando a estimativa da quantidade de elementos nos mesmos conjuntos de "incontáveis" (v. Capítulo 5) propostos às crianças (com exceção do "número de folhas na árvore" e do "número de estrelas no céu"). Foram testados 20 sujeitos, assim distribuídos: 5 homens e 5 mulheres com nível universitário (pós-graduandos do Departamento de Psicologia

Experimental) e 5 homens e 5 mulheres sem formação universitária (funcionários do IPUSP).

2.5 - Processamento e análise dos dados

O registro das entrevistas foi feito por meio de anotação direta e de gravação em fita cassete. Ambos os registros eram utilizados quando da transcrição/codificação dos dados obtidos, realizada no máximo dois dias após a sessão de entrevista.

As entrevistas foram transcritas para um banco de dados (AppleWorks), cada item correspondendo a um campo ou conjunto de campos, de modo a permitir a fácil obtenção de "reports" referentes a partes específicas das entrevistas. Para a análise, estes dados foram tabulados em planilhas de SuperCalc v.3a.

Na maior parte dos casos, a tabulação envolveu o recorte de "categorias" de respostas (nominais ou ordinais); as variáveis analisadas e os critérios utilizados na categorização das respostas são detalhados adiante (v. Capítulos 3 a 6). Uma sinopse destas variáveis (nomes, códigos e locais das definições no texto) pode ser encontrada no Anexo A.

Os procedimentos estatísticos utilizados neste estudo se encontram descritos em Robson (1973), Siegel (1975), Aspey (1977) e Keeves (1988).

3

CONTAGEM
RESPOSTA CARDINAL
CORRESPONDÊNCIA 1-A-1

"A voz de Funes, da escuridão, prosseguia falando. Disse-me que por volta de 1886 desenvolvera um sistema original de numeração e que em pouquíssimos dias ultrapassara o vinte e quatro mil. Não o tinha escrito, porque o pensou uma vez só já não se lhe podia apagar. Seu primeiro estímulo, acredito, foi o desagrado de que os trinta e três orientais requereram dois signos e três palavras, em vez de uma só palavra e um só signo. Aplicou logo esse disparatado sistema aos demais números. Em lugar de sete mil e treze dizia (por exemplo) *Máximo Perez*; em lugar de sete mil e catorze, *A Ferrovia*; outros números eram *Luis Melián Lafinur*, *Olimar*, *enxofre*, *os bastos*, *a baleia*, *o gás*, *a caldeira*, *Napoléon*, *Augustin de Vedia*. Em lugar de quinhentos, dizia *nova*. Cada palavra tinha uma senha particular, uma espécie de marca. As últimas eram muito complicadas... Tratei de explicar-lhe que essa rapéódia de vozes inconexas era exatamente o contrário de um sistema de numeração. Falei-lhe que dizer 365 era dizer três centenas, seis dezenas, cinco unidades; análise que não existe nos "números" *O Negro Timoteo* ou *maná de carne*. Funes não me entendeu ou não quis entender-me" (*Funes, o memorioso*, em Borges, 1975).

3.1 - Contagem

3.1.1 - Definições

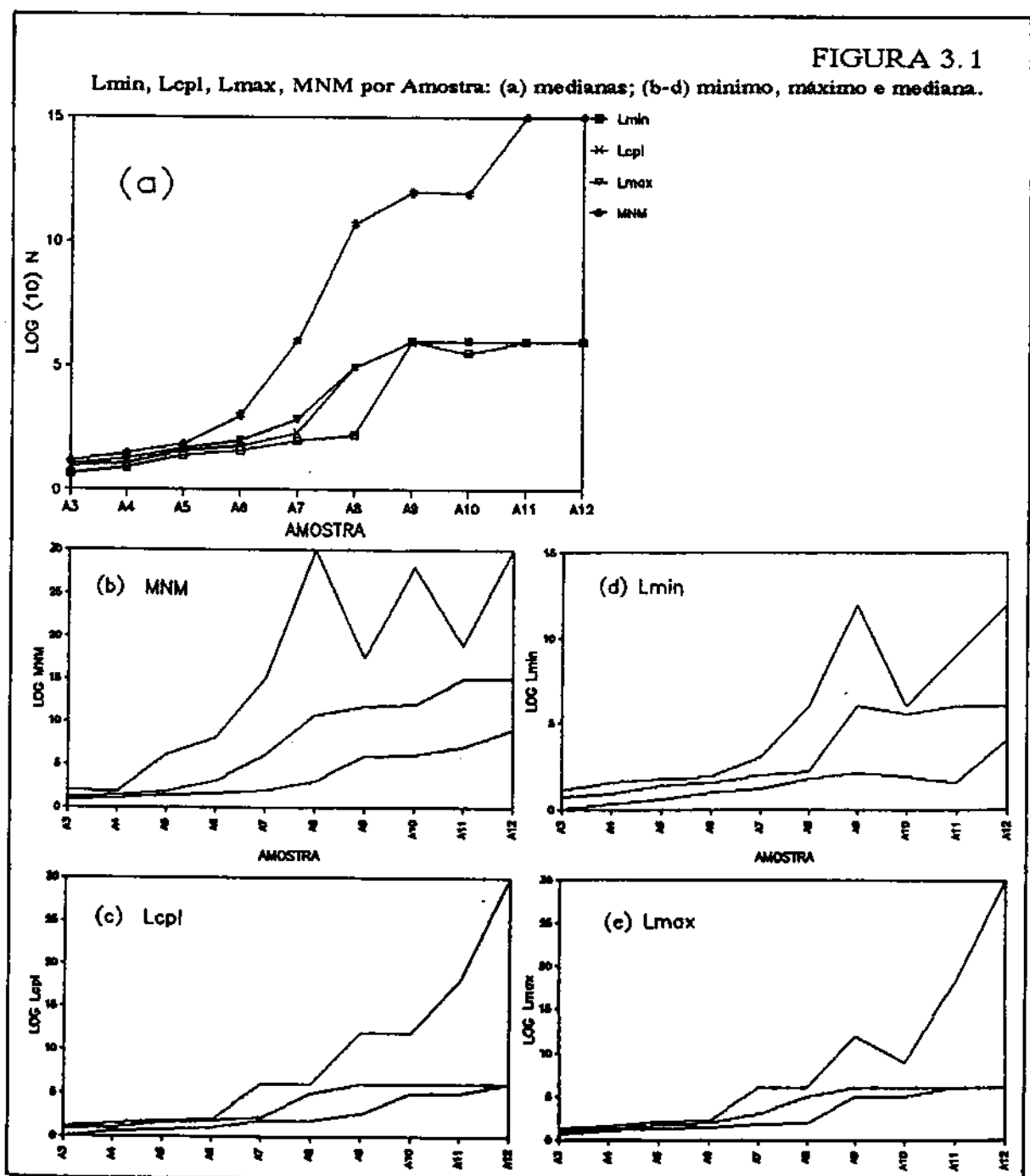
O desempenho exibido pelos sujeitos quanto ao domínio da sequência dos números naturais foi avaliado, basicamente, a partir das respostas aos itens da entrevista **Contar com Objetos** e **Contar sem Objetos**. No caso das crianças mais novas, foram considerados, ainda, erros na contagem dos objetos durante o teste sobre conservação de quantidades discretas. Conforme anteriormente mencionado, quando os sujeitos contavam corretamente (ou quase) até cem, solicitávamos que contassem de dez em dez até duzentos, depois de cem em cem até mil, de mil em mil até dez mil, de dez mil em dez mil até cem mil e de cem mil em cem mil até um milhão. Nos casos de crianças que contaram corretamente até um milhão e que mencionaram (quando da pergunta "qual o maior dos números?" ou em outro ponto qualquer da entrevista) números superiores a um milhão, perguntamos: "quantos milhões há em um bilhão", "quantos bilhões em um trilhão", etc (até o maior número mencionado). Note-se que não nos preocupamos, aqui, com outros aspectos da proficiência no contar (v. adiante), mas tão-somente com a enumeração correta. Os limites no desempenho das crianças foram inicialmente avaliados segundo três critérios progressivamente restritivos: o Limite Mínimo (Lmin), que só considera o ponto até onde a criança contou sem nunca errar; o Limite Completo (Lcpl), onde erros assistemáticos em um número foram relevados (se este número fosse omitido em uma contagem mas não em outra(s), não determinava o Lcpl); finalmente, o Limite Máximo (Lmax), onde eram relevados erros mais graves - e eventualmente sistemáticos - (como a omissão de uma ou mais dezenas), desde que seguidos por uma retomada do contar "correto". Além disso, foram registrados o Maior Número Mencionado pela criança durante a entrevista (MNM) e determinados tipos de erros de enumeração (v. adiante). Quanto aos "n-lhões" mencionados, consideramos incluídos em Lmax/ Lmin os casos em que a criança indicasse corretamente a

ordem de grandeza em questão; valores mencionados entre um milhão e um bilhão foram aceitos desde que a "contagem" tivesse sido correta até um milhão.

3.1.2 - Descrição dos resultados

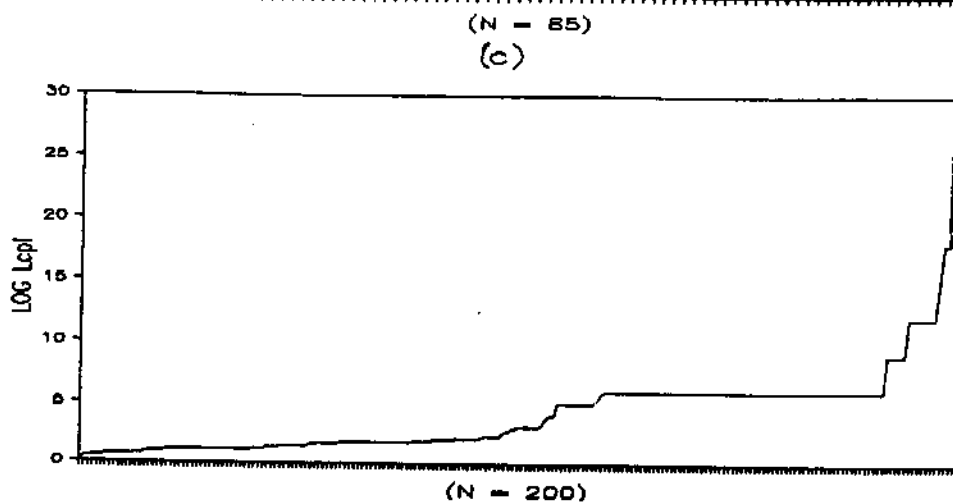
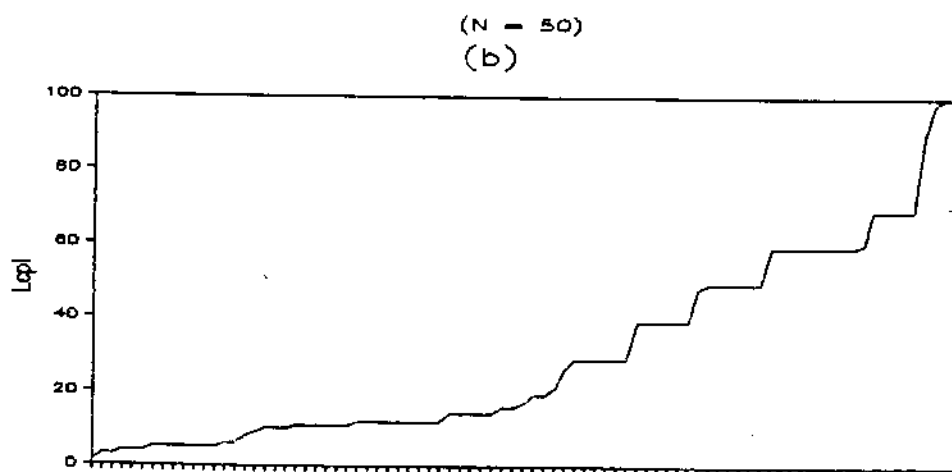
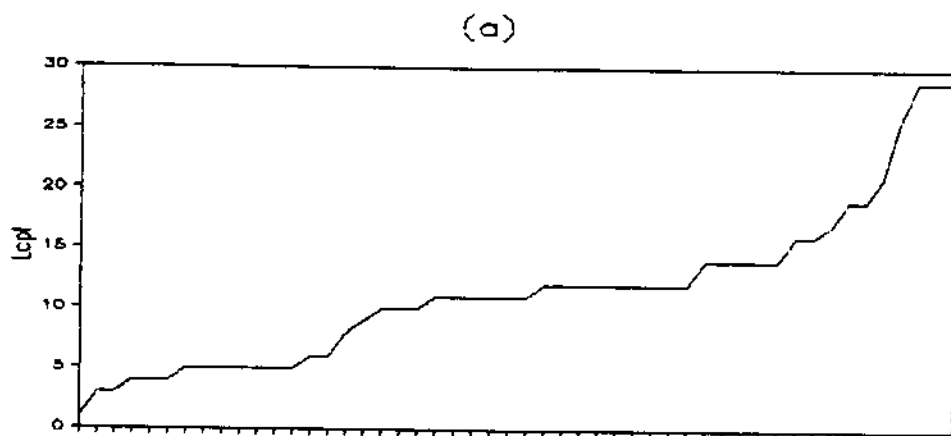
As medianas dos valores observados de L_{min} , L_{cpl} , L_{max} e MNM se encontram indicadas na Figura 3.1a. Estes dados tiveram de ser representados através dos logaritmos (base 10) dos valores. Observe-se o "efeito de teto" nos Limites, a partir de A9, que é, em parte, um artefato do procedimento que utilizamos a fim de verificar a "contagem" acima de um milhão (10^6).

As Figuras 3.1b-e destacam cada uma das curvas (medianas de MNM , L_{max} , L_{cpl} e L_{min}) juntamente com os valores máximo e mínimo registrados para cada amostra; note-se a "explosão" do vocabulário (nomes de "n-lhões") por volta dos 8 anos (Fig.3.1b), que só parece ser acompanhada por uma compreensão adequada destas magnitudes por volta dos 11-12 anos.



Optamos por adotar L_{cpl} como o parâmetro básico no que se refere à contagem, por ser o critério mais equilibrado (embora, na maioria dos casos, todos os três Limites fossem próximos); o primeiro aspecto analisado desta variável foi a ocorrência de "patamares" de desempenho na população estudada, o que pode ser observado na Figura 3.2.

FIGURA 3.2
 L_{cpl} acumulado: (a) até 30; (b) até 100; (c) total



Estes gráficos foram obtidos ordenando-se os sujeitos segundo os Lcpl crescentes (abcissas), com os valores de Lcpl nos eixos das ordenadas: as regiões mais inclinadas da curva correspondem, por tanto, a valores nos quais poucos sujeitos paravam de contar ou erravam, enquanto que os "patamares", ou regiões horizontais indicam valores de Lcpl registrados para um maior número de indivíduos, ou seja, pontos particularmente "difíceis" da seqüência dos números naturais.

Podemos observar algumas regiões distintas nesta curva: primeiramente, na faixa de 1 a 20, a curva tem uma inclinação mais homogênea, embora haja patamares particularmente nítidos para os valores 5 e 11-12-13 (Fig.3.2a): o cinco parece constituir um limite bastante natural (dedos da mão), enquanto que os patamares na segunda dezena seriam conseqüência da falta de um padrão gerador de nomes de números neste ponto da seqüência numérica.

A partir da terceira dezena, se delineia um novo padrão: os Limites, para a esmagadora maioria dos sujeitos incluídos, se situam nos finais de dezena (29, 39, 49, etc), pontos em que se torna a necessária a aplicação dos mecanismos de geração de nomes de números associados ao sistema de base dez. Estes patamares praticamente desaparecem nas últimas transições de dezena da primeira centena (Fig.3.2b).

Mais adiante (Fig.3.2c), os resultados refletem, em parte, as limitações práticas da medida do desempenho (contagem em intervalos), mas correspondem a patamares previsíveis, ou seja, momentos em que se faz necessário o recurso às regras do sistema de base em níveis mais complexos: 99-> 10², 900-> 10³, 9000-> 10⁴, 90000-> 10⁵, 900000-> 10⁶; Finalmente, há sujeitos que registraram Lcpl da ordem de "n-lhões" (bilhões, trilhões, etc), isto é, que tendo contado até 1 milhão, mencionaram tais valores e responderam corretamente às perguntas do tipo "quantos milhões em um bilhão".

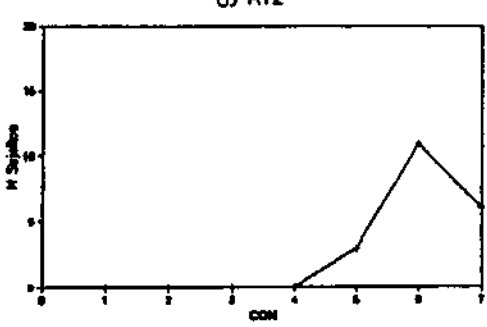
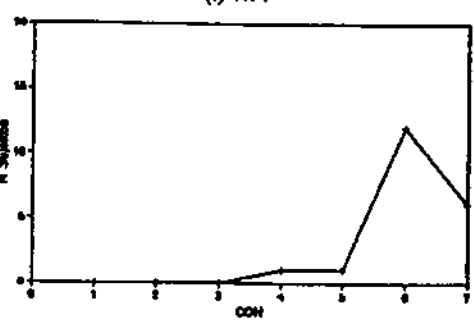
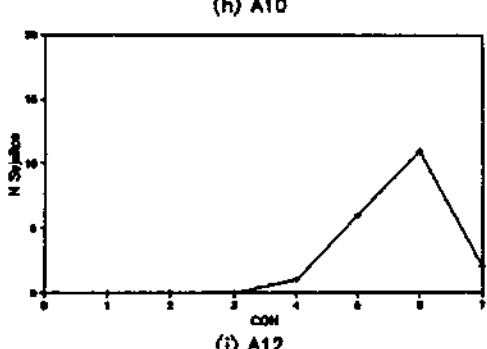
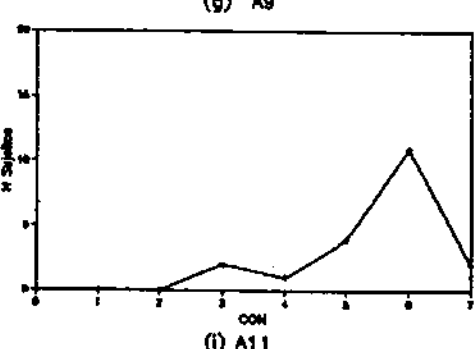
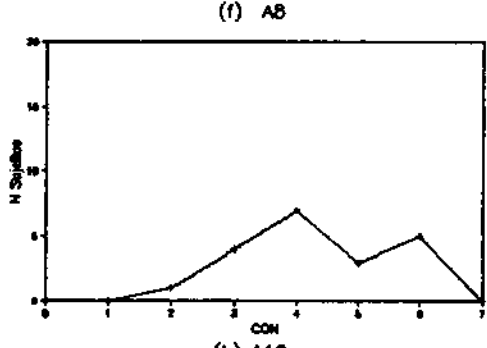
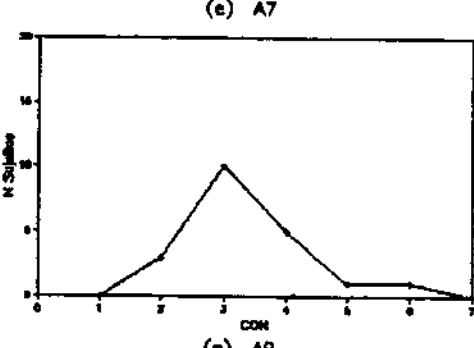
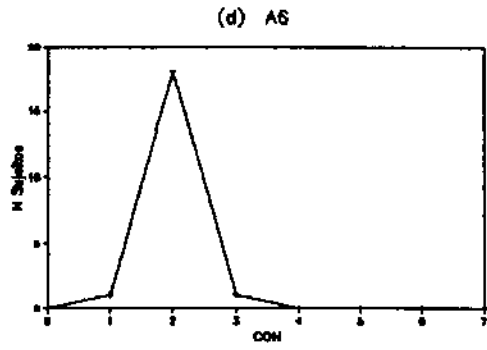
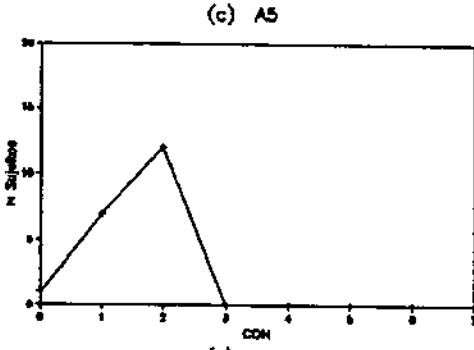
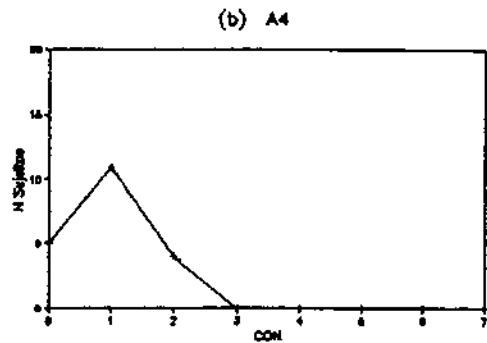
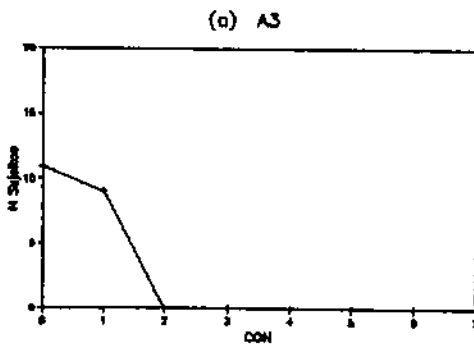
Embora a conversão para logaritmos de base dez atenua a tendência exponencial da curva e nos pareça razoavelmente coerente com os progressivos níveis de dificuldade, ainda assim estes valores não se mostraram muito adequados à posterior comparação com as outras variáveis estudadas (geralmente apresentadas na forma de categorias discretas (ao nível nominal ou ordinal); assim sendo, transformamos os valores obtidos para Lcpl em categorias que correspondem, a grosso modo, às diferentes regiões da curva mostrada na Figura 3.2a-c. Estas categorias de desempenho no contar estão indicadas na Tabela 3.1 e constituem a variável doravante denominada Contagem (CON).

TABELA 3.1

Categorias na variável Contagem (CON)

CON	DESCRIÇÃO
0	Lcpl < 10
1	10 ≤ Lcpl < 20
2	20 ≤ Lcpl < 100
3	100 ≤ Lcpl < mil
4	mil ≤ Lcpl < cem mil
5	cem mil ≤ Lcpl < 1 milhão
6	1 milhão ≤ Lcpl < 1 bilhão
7	Lcpl ≥ 1 bilhão

FIGURA 3.3
Contagem (CON): Amostras A3 (a) a A12 (j)



A distribuição dos indivíduos em cada uma das categorias de CON se encontra na Figura 3.3 (a-j) e na Tabela 3.2:

TABELA 3.2

Contagem (CON): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

CON	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	TOT
0	11	5	1	0	0	0	0	0	0	0	17
1	9	11	7	1	0	0	0	0	0	0	28
2	0	4	12	18	3	1	0	0	0	0	38
3	0	0	0	1	10	4	2	0	0	0	17
4	0	0	0	0	5	7	1	1	1	0	15
5	0	0	0	0	1	3	4	6	1	3	18
6	0	0	0	0	1	5	11	11	12	11	51
7	0	0	0	0	0	0	2	2	6	6	16

Comparando as amostras entre si pelo teste U de Mann-Whitney (valores atribuídos a cada sujeito em CON), verificamos não apenas que, como seria de se esperar, o desempenho progride em função da idade, mas também que são significativas as diferenças entre as amostras contíguas, com exceção de A9 X A10 e de A11 X A12 (neste último caso, há provavelmente um efeito de "teto"), sendo a diferença entre A6 (creche) e A7 (1ª Série) a mais acentuada, conforme mostra a Tabela 3.3:

TABELA 3.3

Contagem (CON): Probabilidades associadas a H_0 nas comparações entre Amostras (Mann-Whitney)

AMOSTRAS	U	p (unilateral)
A3 X A4	122.0	< .05
A4 X A5	108.0	< .01
A5 X A6	123.5	< .05
A6 X A7	35.0	< .00005
A7 X A8	105.0	< .01
A8 X A9	99.0	< .005
A9 X A10	192.0	(> .05)
A10 X A11	131.5	< .05
A11 X A12	194.5	(> .05)

A interação entre as faixas etárias e as categorias de desempenho em CON pode ser melhor avaliada através da Tabela 3.4, onde são indicados os níveis de significância encontrados para cada casela na matriz AMO x CON, obtidos através do cálculo do Resíduo Padrão (Standard Residue: Aspey, 1977), onde

$$z = \frac{(F \text{ observada} - F \text{ esperada})}{\sqrt{(F \text{ esperada})}}$$

TABELA 3.4

CON x AMO: Resíduo Padrão - níveis de significância
(acima do esperado, apenas; p unilateral)

AMO	CON							
	0	1	2	3	4	5	6	7
A3	.0001	.01	-	-	-	-	-	-
A4	.01	.0001	-	-	-	-	-	-
A5	-	.01	.0001	-	-	-	-	-
A6	-	-	.0001	-	-	-	-	-
A7	-	-	-	.0001	.01	-	-	-
A8	-	-	-	.05	.0001	-	-	-
A9	-	-	-	-	-	-	.01	-
A10	-	-	-	-	-	.001	.01	-
A11	-	-	-	-	-	-	.01	.001
A12	-	-	-	-	-	-	.01	.001

3.1.3 - Comparações entre sub-amostras por sexo e por turma

Comparamos o desempenho de cada sub-amostra por sexo (Figura 3.4a-j), tendo constatado uma diferença significativa apenas em A9 (Fig.3.4i), onde o desempenho dos meninos supera o das meninas (Mann-Whitney, bilateral, $\bar{U}=195$, $p<.05$).

Na comparação entre sub-amostras por turma (A8 a A12 - 1º Grau, apenas) - sujeitos da mesma amostra, mas pertencentes a turmas distintas - as diferenças (favorecendo os alunos das turmas mais adiantadas - T+) foram significativas para A8 (Mann-Whitney, unilateral, $U=5$, $p<.02$) e A9 ($U=22$, $p<.05$); no caso de A11 e A12, a ausência de diferenças significativas se deve, provavelmente, a um efeito de "teto", mas tal não parece ser o caso de A10 (Figura 3.5a-e).

FIGURA 3.4
Contagem (CON): sub-amostras por SEXO, A3 (a) a A12 (j)

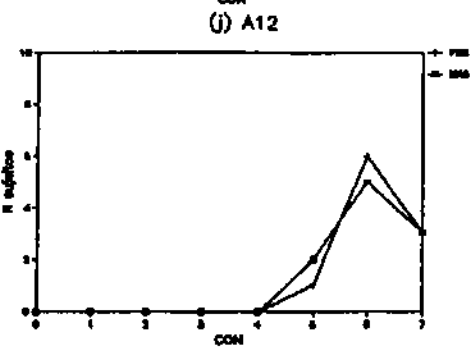
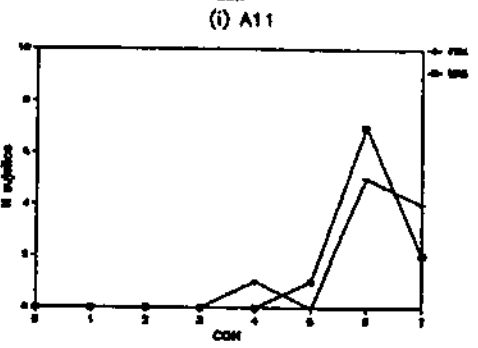
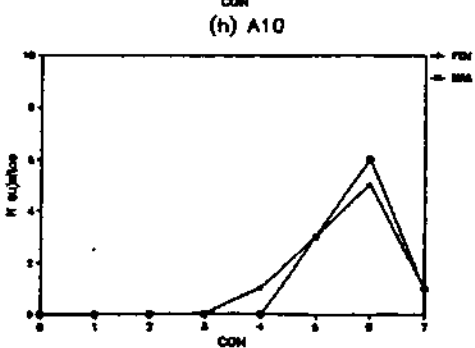
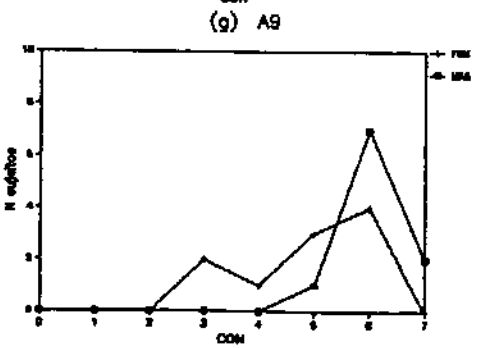
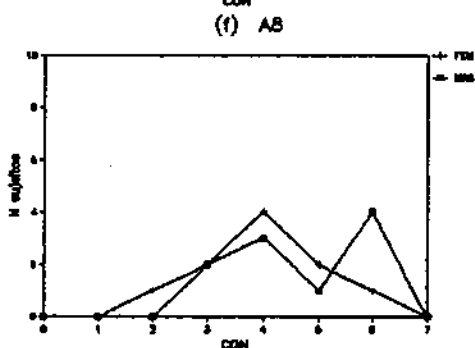
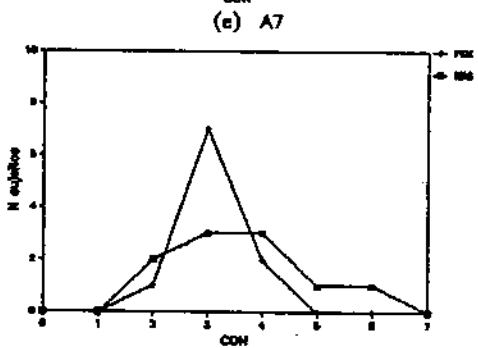
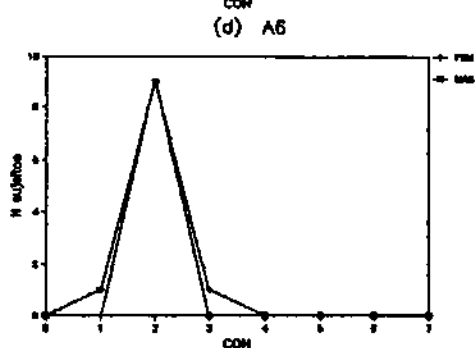
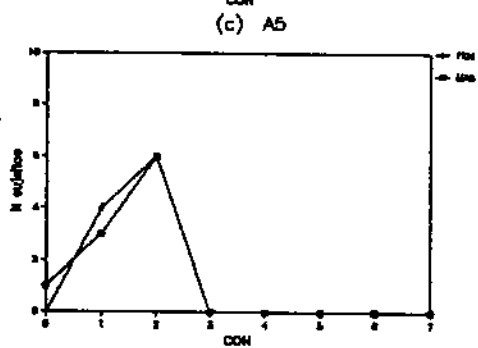
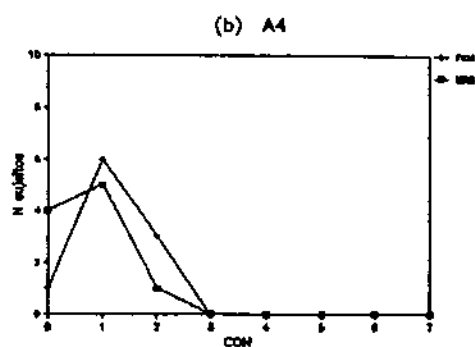
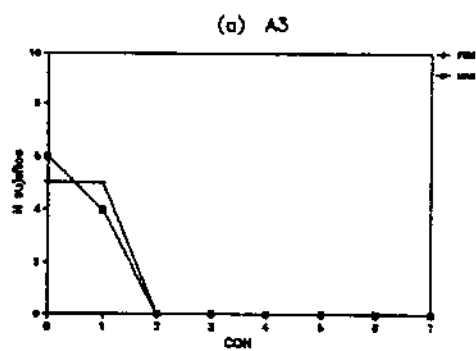
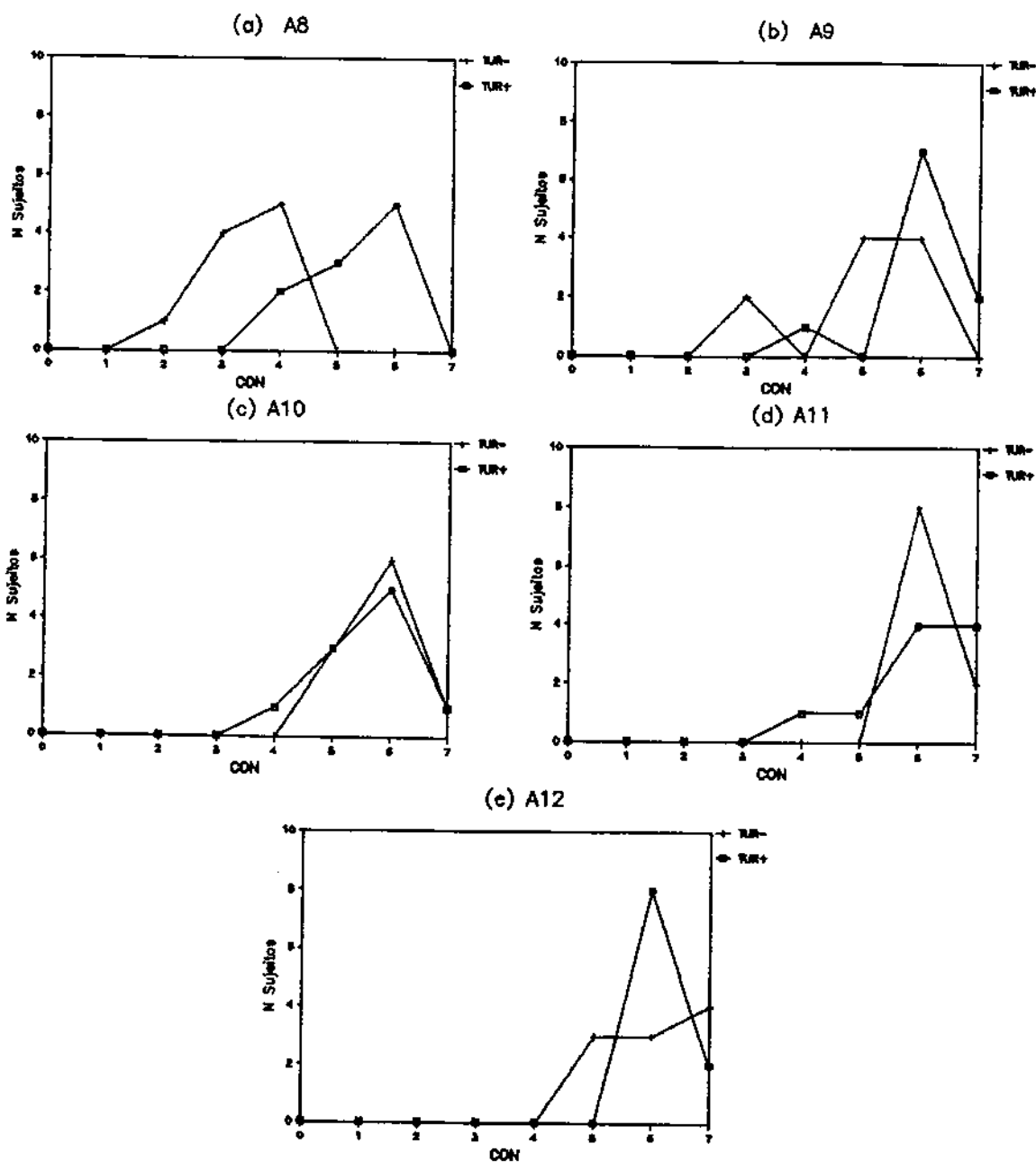


FIGURA 3.5
Contagem (CON): sub-amostras por TURMA, A8 (a) a A12 (e)



3.1.4 - Erros no contar

O tipo de erro de mais simples descrição - a omissão de um ou mais números - se reflete automaticamente nos Limites acima descritos (as omissões sistemáticas determinam o L_{cpl} , as eventuais, o L_{min}). Outros tipos de erro, entretanto, são dignos de menção:

A) Saltos da primeira dezena para a segunda (e/ou vice-versa): o primeiro caso é típico das crianças de cinco anos ou

menos, frequentemente produzindo "ciclos" (v. adiante) do tipo "...11-12-13-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-4-5..."; os casos de salto da 1ª para a 2ª dezena, na maior parte das vezes, são seguidos da inversão oposta (2ª para a 1ª dezena), sendo talvez melhor descritos como erros no nome de um número (do tipo "1-2-13-4-5..."). Estes tipos de erro só foram observados entre pré-escolares, conforme mostra a Figura 3.6a e estão praticamente restritos aos sujeitos CON=0-1 (Lcpl < 20; Figura 3.6b).

B) **Extrapolação do Lcpl:** nos referimos aqui aos casos em que, após contar até onde realmente sabia, a criança continua "contando", de forma mais ou menos desordenada. Na **Contagem com Objetos**, é uma ocorrência sistemática entre as crianças mais novas (na falta de nomes de números para associar aos objetos que se sucedem); Na **Contagem sem Objetos** a tendência, com o avanço da idade, é parar ao atingir o limite dos números conhecidos (ou após alguns números errados), sendo esta "extrapolação" um padrão típico de pré-escolares. Em boa parte dos casos, observam-se repetições cíclicas de determinadas seqüências de números - freqüentemente partes (internamente corretas) da dezena que contém o Lcpl. A Figura 3.6c indica as ocorrências deste tipo de erro *apenas na Contagem sem Objetos*, bem como os casos em que foi claramente detectável a presença de "ciclos" na seqüência de números errados (a Figura 3.6d mostra a ocorrência deste tipo de erro em função de CON: note-se que se trata de um erro restrito a CON=0-2 e particularmente freqüente em CON=0-1, apenas).

C) **Omissão de uma ou duas dezenas:** esta variedade de erro se reflete na diferença entre Lcpl e Lmax: uma ou duas dezenas são omitidas (p.ex.: "...38-39-50-51..."), mas a contagem prossegue "corretamente"; é um erro típico dos sujeitos com CON=2 (a maioria destes sujeitos o apresenta): não seria possível para os que contam até menos que vinte e não ocorre entre os que contam corretamente (Lcpl) até cem ou mais. A dezena dos 90's aparece, em boa parte dos casos, em seguida ao trecho de contagem omitido. A Figura 3.6e ilustra a ocorrência deste erro (apenas a omissão sistemática de 1 ou 2 dezenas, não omissões mais extensas ou assistemáticas).

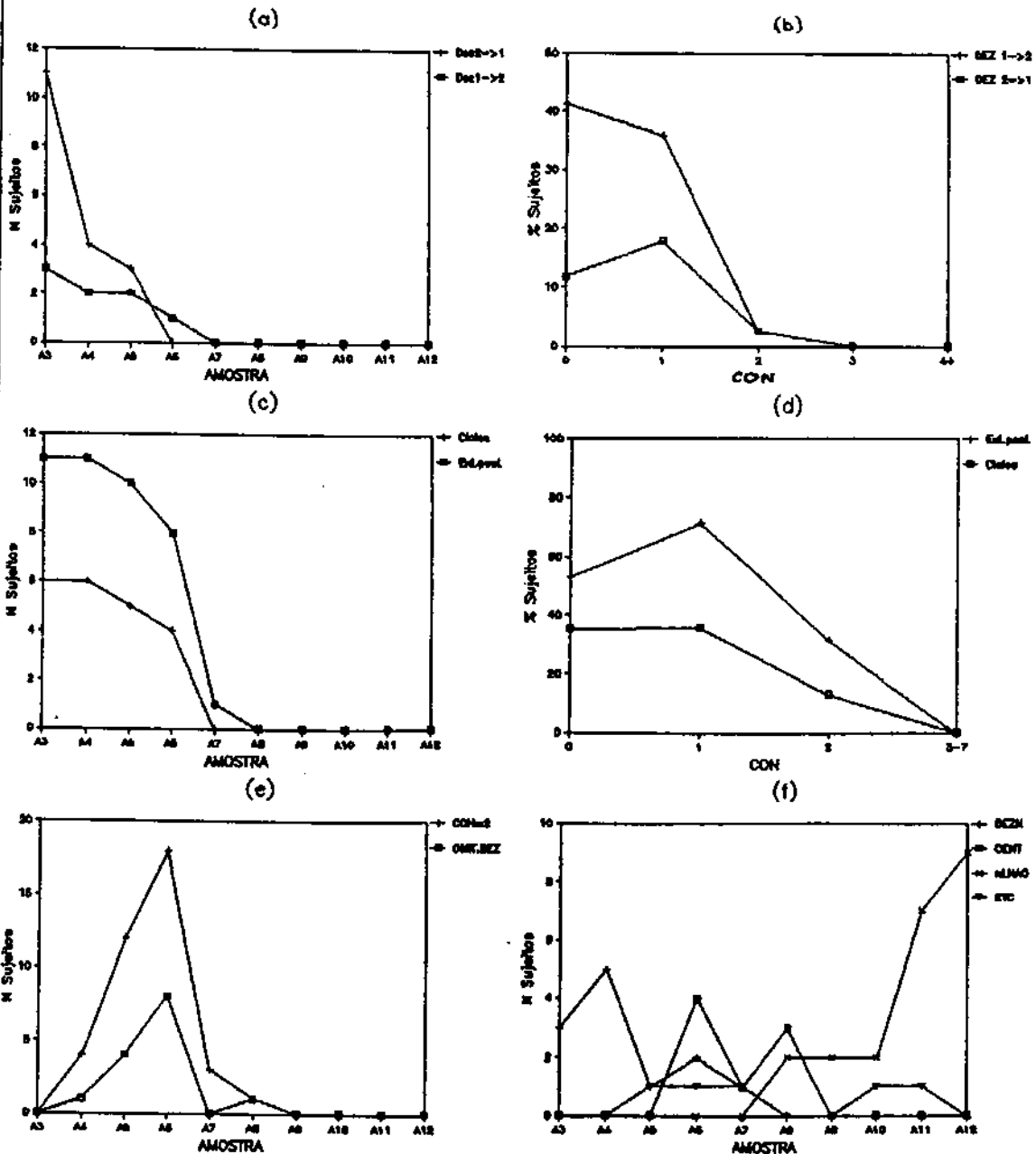
D) **Erros em nomes de números:** observamos uma enorme variedade de erros nesta categoria, que procuramos reunir em quatro grupos, a saber: I) **Erros com dezenas (abaixo de 100):** "padronização" indevida da segunda dezena ("dezequatro" (14), "dezecinco", "dezeoito"), extrapolção da segunda dezena ("dezedez" (20), "dezeonze"), substituição de dígito de unidade por um número inadequado ("dezequinze" (15), "vinte-e-doze", etc), extrapolção de dezena ("vinte-e-dez" (30), etc); II) **Erros com centenas (entre cem e mil):** centena sem "cento" ("cem-um" (101), etc), extrapolção de centena ("199, cento-e-cem"), extrapolção de dezena e centena ("199, cento-e-noventa-e-dez, cento-e-noventa-e-onze..."), centena defeituosa ("quatro-cem" (400), "quinhzentos" (500)); III) **Erros nos nomes de n-lhões:** erros graves (não aceitos: "milésimo" (milhão), "tetra..." (quatrilhão), etc) e erros leves (aceitos: "quadrilhões", "quinqüilhões/ quatrilhões/ quinquilhões/ quilhões", "octolhão", "novilhão"); IV) **Outros:** ruptura da ordem hierárquica interna dos nomes ("cento-e-noventa-e-quarenta-e-nove", "10-milhões-e-bilhões-e-trilhões", "5-milhões-e-400-trilhões"), pseudonúmeros ("montilhões", "um barão", "bi"). As freqüências de ocorrência destes tipos de erro estão indicadas na Figura 3.6f. Acrescentemos, ainda, que a ocorrência de "pseudonúmeros" como os que mencionamos (que não são propriamente "erros", mas expressões coloquiais) foi bastante inferior à que seria de se esperar em função de seu uso na linguagem

coloquial, o que seguramente se deve ao contexto da entrevista.

E) Outros tipos de erros: parece-nos oportuno mencionar, ainda, o que chamamos de erros de intervalo: muitos dos sujeitos que contaram corretamente acima de cem, e aos quais, portanto, era solicitado que contassem "de dez em dez", "de cem em cem", etc (v. acima) cometiam erros da forma (p.ex.) "...80-90-100-200-300..."; são erros, contudo, muito ligados à contagem por intervalos que havíamos solicitado, e não ocorreram, necessariamente, numa contagem normal; além disso este tipo de erro não foi quantificado porque só poderia ser observado quando o sujeito ultrapassasse o limite solicitado (p.ex., "contar de cem em cem até mil"), o que não fazia parte de nosso propósito original e não ocorreu de forma sistemática.

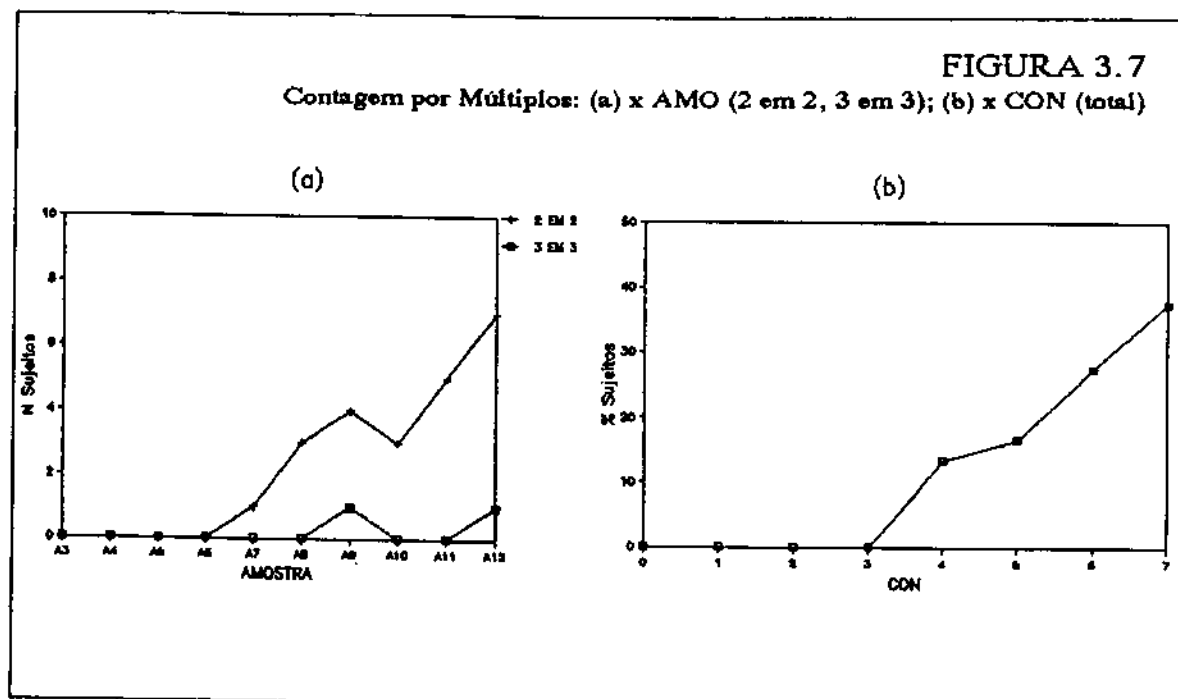
FIGURA 3.6

Erros de Contagem: (a) saltos entre a 1ª e a 2ª dezenas; (b) CON x erros de inversão de dezena; (c) Extrapolação do Lcpl e Ciclos de repetição; (d) CON x Extrapolação e Ciclos; (e) Omissão de Dezena (x CON=2); (f) Erros em Nomes de Números



3.1.5 - Contagem por múltiplos

Entre as crianças da amostra A7 em diante (não entre os pré-escolares), observamos, em várias ocasiões (na Contagem com Objetos) um comportamento espontâneo que merece registro: a contagem (correta) de dois em dois ou (mais raramente) de três em três: os sujeitos que o fizeram, em geral, nos perguntavam se o podiam fazer (não tínhamos objeções) e nem sempre mantinham este padrão ao longo de toda a contagem. O número de casos em cada amostra em que isto foi observado é mostrado na Figura 3.7a. Não foram, observadas, neste caso, diferenças significativas (P. de Fisher) entre os sexos ou entre as sub-amostras por turma (A8 a A12). Há uma correlação entre a frequência de casos de Contagem por Múltiplos e a variável CON, como mostra a Figura 3.7b: este padrão não é observado entre os sujeitos CON=0-3 (Lcpl < 1.000), e sua frequência relativa aumenta gradualmente de CON=4 a CON=7.



3.2 - Resposta cardinal

3.2.1 - Definição

Por "resposta cardinal", designamos o comportamento de, imediatamente após a conclusão da Contagem com Objetos, e diante da pergunta "então quantos tem?", responder com o último número contado (independentemente de eventuais erros envolvidos na contagem). Este comportamento, por si só, não nos assegura um domínio pleno da noção de cardinalidade (no caso, a compreensão de que o último número designa a quantidade total de elementos no conjunto), já que, num primeiro momento, pode ser atribuído a uma

aprendizagem restrita no sentido de "responder com o último número quando perguntado 'quantos'". Entretanto, como anteriormente assinalado, nossos critérios se concentraram, fundamentalmente, no aspecto explícito do comportamento dos sujeitos na situação coloquial da entrevista. A resposta típica das crianças que ainda não dominaram esta "regra" da Resposta Cardinal é a de recontar os objetos tantas vezes quanto lhes seja perguntado "quantos são?". As categorias de respostas delimitadas para a variável Resposta Cardinal (CAR) foram as indicadas na Tabela 3.5:

TABELA 3.5

Categorias na variável Resposta Cardinal (CAR)

CAR	DESCRIÇÃO
0	Sem resposta ou não entende a pergunta;
1	Recontagem dos objetos;
2	Resposta cardinal incerta (total inteiramente errado e/ou hesitação entre 1 e 3);
3	Resposta cardinal correta.

Para a maioria das análises posteriores, esta variável (bem como outras) foi transformada em uma variável binária: quando, adiante, nos referimos a CAR+, entenda-se CAR = 3.

3.2.2 - Descrição dos resultados

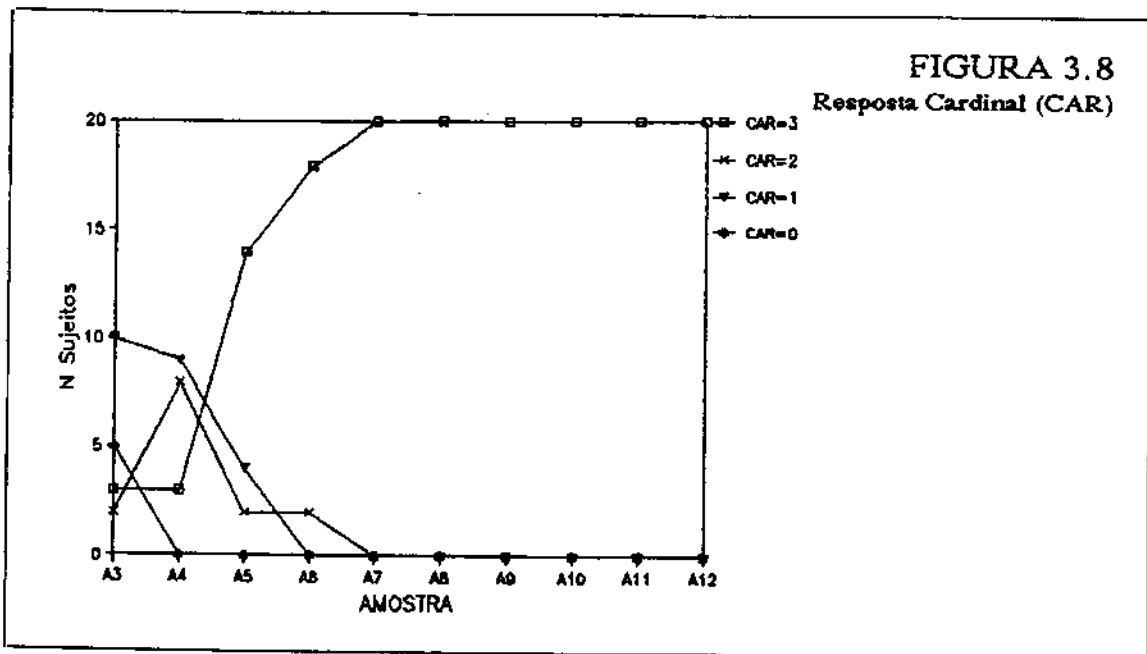
Respostas distintas de CAR = 3 foram observadas apenas entre pré-escolares (creche), conforme mostram a Tabela 3.6 e a Figura 3.8:

TABELA 3.6

Resposta Cardinal (CAR):

Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

CAR	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	10	9	4	0	0	0	0	0	0	0
2	2	8	2	2	0	0	0	0	0	0
3	3	3	14	18	20	20	20	20	20	20



A comparação entre as amostras contíguas mostrou diferenças estatisticamente significativas apenas entre A3 e A4 e entre A4 e A5 (Tabela 3.7). Comparando A5 a A7, observamos uma probabilidade associada de $p = .053$, o que corresponde a uma diferença que se aproxima da significância.

TABELA 3.7

Resposta Cardinal (CAR): Probabilidades associadas a H_0 nas comparações entre Amostras (Mann-Whitney)

AMOSTRAS	U	p (unilat.)
A3 X A4	130.0	< .05
A4 X A5	102.0	< .01
A5 X A6	159.0	(> .05)
A6 X A7	180.0	(> .05)

Se levarmos em conta apenas a distinção CAR+ (CAR=3) versus CAR- (CAR=0-2), no entanto, ao compararmos as amostras contíguas, não há diferenças entre A3 e A4 (idênticas) nem entre as amostras de A5 a A7; a única mudança significativa se verifica na passagem de A4 para A5 (Tabela 3.8; $\chi^2 = 10.23$, 1 g.l., $P_{unil.} < .005$).

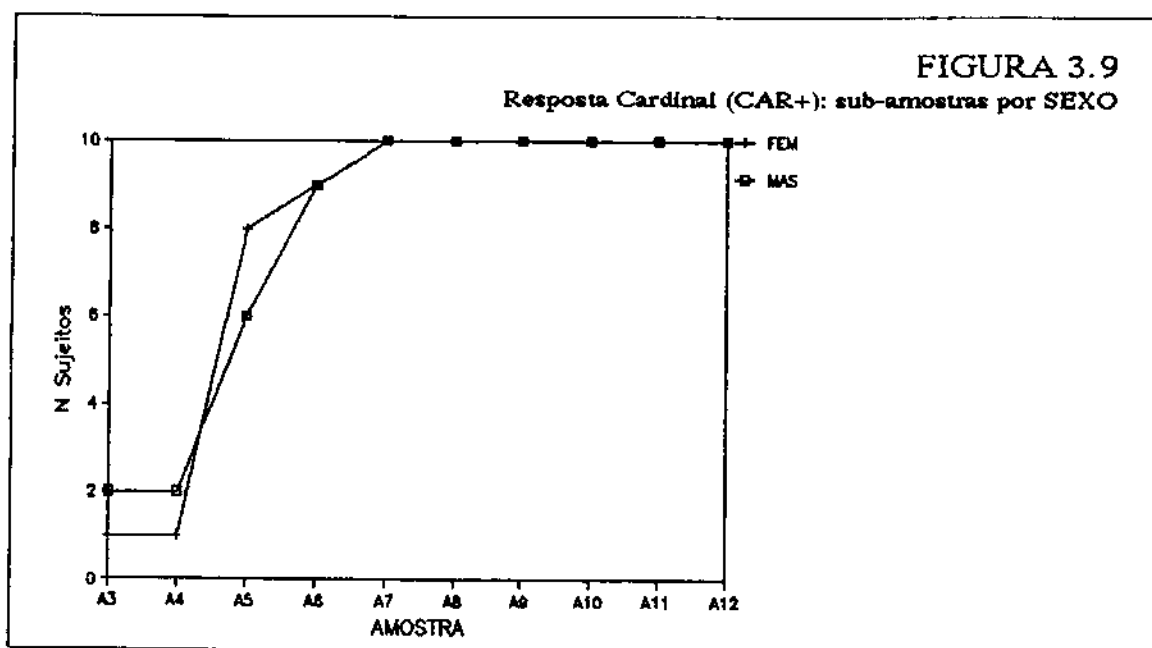
TABELA 3.8

Resposta Cardinal (CAR +/-): A4 X A5

	A4	A5
CAR-	17	6
CAR+	3	14

3.2.3 - Comparação entre as sub-amostras por sexo

Nenhuma diferença significativa ($p < .05$, Mann-Whitney, bilateral) foi observada entre as sub-amostras masculina e feminina para as amostras A3 a A6. O mesmo se dá comparando-se estas sub-amostras apenas em termos da frequência de respostas corretas (CAR+) ou incorretas (CAR-) pela Prova de Fisher (v. Figura 3.9).



Como CAR = 3 para todos os sujeitos das amostras A7 em diante, não houve comparação entre sub-amostras por turma (1º Grau).

3.3 - Correspondência 1-a-1

3.3.1 - Definição

Por erros de Correspondência entendemos não apenas os erros ocorridos quando os sujeitos eram solicitados a construir uma fileira de palitos (ou feijões) em correspondência com a fileira de dez bonecos (para o teste de conservação que se seguia; ou seja, o número de palitos/feijões não resultava o mesmo que o de bonecos - 10), mas, ainda, os erros de correspondência observados durante a Contagem com Objetos, quando ocorria alguma espécie de defasagem entre objetos manipulados e números enunciados (afetando portanto a contagem total). Os desempenhos na variável Correspondência 1-a-1 (COR) foram classificados conforme indicado na Tabela 3.9:

TABELA 3.9

Categorias na variável Correspondência 1-a-1 (COR)

COR	DESCRIÇÃO
0	Erro de Correspondência no pareamento de palitos /feijões aos 10 bonecos (tb.na Contagem com Objetos);
1	Erros de Correspondência na Contagem com Objetos (apenas);
2	Sem erros de Correspondência.

Quando, adiante, esta variável for tratada sob a forma binária, nos referiremos a COR+ (COR = 2) e COR- (COR = 0->1).

3.3.2 - Descrição dos resultados

De modo semelhante ao observado em CAR (Resposta Cardinal), só se verificaram erros de Correspondência entre os pré-escolares (Amostras A3 a A6); estes resultados estão indicados a seguir, na Tabela 3.10 e na Figura 3.10:

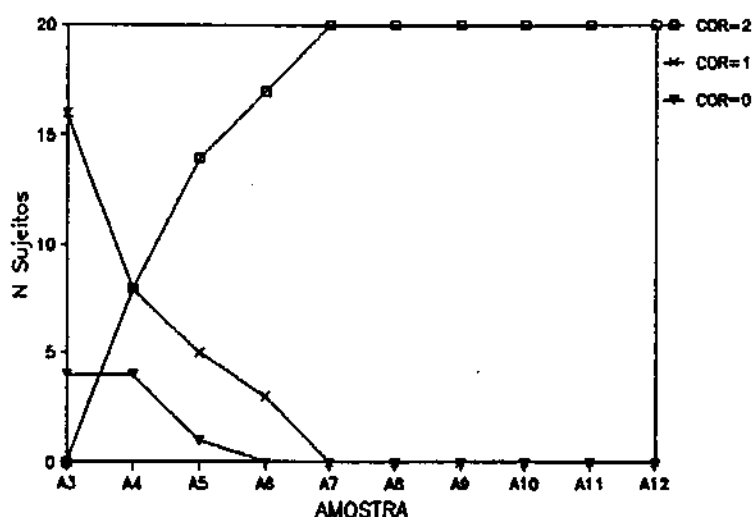
TABELA 3.10

Correspondência 1-a-1 (COR): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

COR	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	TOT
0	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	9
1	16	8	5	3	0	0	0	0	0	0	32
2	0	8	14	17	20	20	20	20	20	20	159

FIGURA 3.10

Correspondência 1-a-1 (COR)

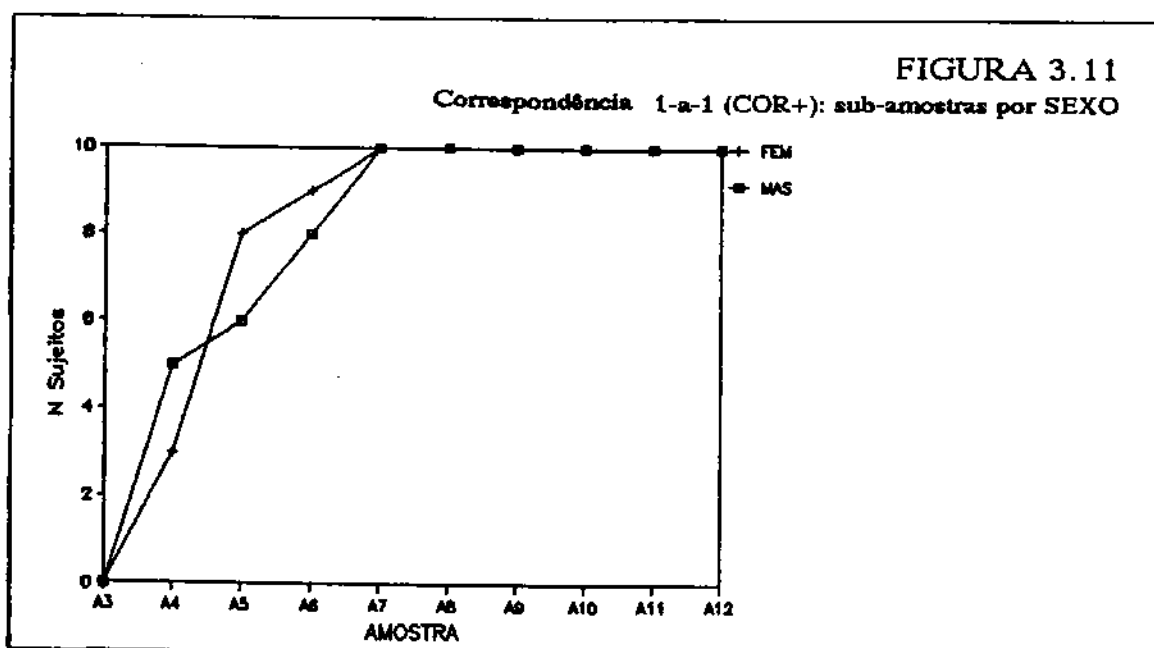


É importante notar que COR- se deve, basicamente, a erros de correspondência na Contagem com Objetos, já que CON=0 foi infrequente mesmo entre as crianças mais novas, ou seja, somente 9 das 200 crianças erraram na construção da fileira de objetos em correspondência 1-a-1.

As comparações entre amostras contíguas, levando-se em conta apenas COR+ versus COR- só mostraram uma diferença significativa para A3 X A4 (P.Fisher, unilateral, $p < .005$). Ao considerarmos os valores obtidos para COR (0 -> 2), no entanto, a única diferença significativa entre amostras contíguas foi observada entre A4 e A5 (Mann-Whitney, unilateral, $p < .05$; comparando-se amostras não-contíguas (apenas A_N X A_{N+2}), observam-se diferenças significativas para A3 X A5 ($p < .001$) e para A4 X A6 ($p < .01$), mas não para A5 X A7. Estes resultados refletem o fato de que, a partir de A5, a maioria dos sujeitos não comete quaisquer erros de correspondência (v. Fig.3.9).

3.3.3 - Comparação entre as sub-amostras por sexo

Não foi observada qualquer diferença significativa ($p < .05$) entre sub-amostras por sexo, seja considerando-se apenas COR+ X COR- (Teste Chi-quadrado ou Prova de Fisher - v. Figura 3.11), seja levando-se em conta a variável completa (Mann-Witney, bilateral).



Como ocorre com CAR, não houve comparação entre sub-amostras por turma, uma vez que, para todos os sujeitos de A7 em diante, COR = 2.

3.4 - Discussão

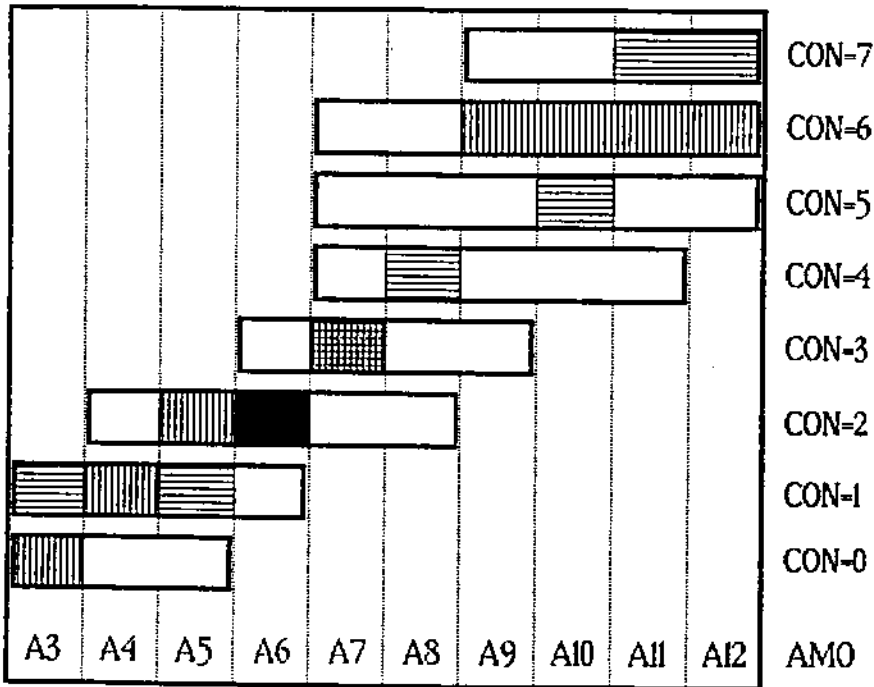
O primeiro aspecto que ressaltamos acerca dos níveis de desempenho nas tarefas de Contagem (extensão do domínio da série dos números naturais) foi, como seria de se esperar, sua estreita correlação com a idade dos sujeitos (variação ao longo das amostras por faixa etária), onde as curvas das freqüências de cada categoria de CON, para cada amostra, se comportam, a grosso modo, como distribuições próximas à normal avançando ao longo do eixo CON (v. Figs. 3.3a-j) em função do avanço das idades (A3 -> A12).

Em outras palavras, não obstante a variação individual no seio de cada amostra, a extensão dos números contados, ao nível da população estudada, como um todo, aumenta gradualmente com a idade até os nove ou dez anos (com diferenças quase sempre significativas de amostra para amostra), até que se observa um efeito de teto - determinado, em parte pelo desempenho dos sujeitos e de determinadas características do procedimento experimental, mas também pela própria natureza da variável: embora a série dos números naturais seja "ilimitadamente" enumerável mesmo na linguagem comum, o vocabulário desta, no que se refere a nomes de números, se esgota nos nonilhões - além dos quais há apenas a possibilidade de combinar termos em "numerlogs" cada vez mais extensos.

O diagrama da Figura 3.12 resume (invertendo os eixos) os gráficos da Figura 3.3, mostrando a ocorrência de cada categoria da variável CON ao longo das amostras: de seu exame, fica evidente que a transição mais abrupta (Mann-Whitney, $p < .00005$) se dá de A6 para A7, ou seja, na passagem da pré-escola para o 1º Grau (os sujeitos em A7 eram alunos da 1ª Série cursando, à época das entrevistas, o terceiro bimestre letivo); este é um ponto em que os fatores idade e escolaridade (de resto, intimamente relacionados) se confundem na escala "etária" das amostras A3 a A12 - já que não havia disponibilidade suficiente de crianças de sete anos completos na Creche e nem quaisquer escolares de seis anos.

Entre as sub-amostras por Turma (escolar), observamos diferenças significativas na variável CON (em favor dos alunos das turmas mais adiantadas) apenas em A8 e A9; entre as sub-amostras por Sexo, apenas em A9 (em favor dos meninos). Com relação às variáveis Resposta Cardinal (CAR) e Correspondência 1-a-1 (COR; v. adiante, 3.4.2), nenhuma diferença entre os sexos foi detectada.

FIGURA 3.12
Contagem (CON) x Amostras (AMO; idades)



3.4.1 - Os limites da contagem

Observando os gráficos da Figura 3.2 constatamos, antes de mais nada, que os limites das contagens (L_{cpl}) não se distribuem uniformemente, mas formam "patamares", ou seja, determinados números ocupam, tipicamente, a posição de "limites"; mais ainda, é possível distinguir regiões da curva em função da distribuição destes "patamares": até $L_{cpl}=20$, não se observam padrões claros e quase todos os números são "limites", ao menos para alguns indivíduos (com exceção do 13, do 15 e do 18), sendo particularmente acentuados os "patamares" dos números 5, 11, 12 e 14; de $L_{cpl}=20$ a $L_{cpl}=70$, os "patamares" antecedem as mudanças de dezena (29, 39, 49, etc); a partir daí, só se observam "patamares" claros em torno de 100 e 200 (mudanças de centena) e das mudanças de potência de dez,

especialmente para 1 milhão. Estes últimos casos decorrem em grande parte do procedimento usado para a observação da contagem, já que, na Contagem sem Objetos (a partir de A7), solicitávamos às crianças que contassem por múltiplos (10 em 10, cem em cem, etc - o que suprimia a possibilidade de erro em valores intermediários) e que, acima da casa dos milhões, levamos em conta apenas as respostas corretas a perguntas do tipo "quantos milhões há em um bilhão" (se "bilhão" - por exemplo - tivesse sido espontaneamente mencionado pelo sujeito).

Os dados referentes aos "limites" inferiores a 130, porém, tendo sido obtidos a partir de contagens "normais" (de 1 em 1), se prestam a uma confrontação interessante com os dados de Siegler & Robinson (1982): estes autores compararam os "pontos de parada" na contagem (determinados por um critério próximo mas não idêntico ao do nosso Lcpl) entre crianças que A) contavam no máximo até 19 (correspondente a CON=0-1), B) contavam até mais que 19 e menos que cem (correspondente a CON=2) ou C) contavam até cem ou mais (no caso, até 140, já que a amostra incluiu crianças de até 5 anos, apenas; corresponde a uma parte de CON=3).

Na comparação entre idade e desempenho na contagem, nossos resultados foram semelhantes com respeito às amostras A3 e A5, mas uma diferença foi observada em relação às crianças de quatro anos completos, que, no experimento de Siegler & Robinson, se mostraram predominantemente CON=2 (20 + 99), enquanto que os nossos sujeitos em A4 foram principalmente CON=1, o que pode ser apenas uma consequência de diferenças metodológicas ou função dos distintos níveis socio-econômicos (alta classe média norte-americana, no estudo citado) ou de escolaridade (não mencionada pelos autores).

No que se refere, por outro lado, a determinados parâmetros utilizados por Siegler & Robinson para comparar os três grupos mencionados acima, nossas observações foram praticamente idênticas: a Tabela 3.11, por exemplo, indica a frequência relativa dos Lcpl terminados em 0 ou 9 para os nossos grupos CON=0-1, CON=2 e CON=3 (parte, apenas os 10 sujeitos - de um total de 17 - que contaram até no máximo 129), análogos aos de Siegler & Robinson (v. op.cit, p.254):

TABELA 3.11

CON (0-3) x terminação dos Lcpl (f. relativa.)

	CON=0-1 (N=45)	CON=2 (N=38)	CON=3 (parte*) (N=9)
Lcpl termina em 0	6.7	2.6	66.7
Lcpl termina em 9	6.7	86.4	22.2
Lcpl termina em 1-8	86.6	11.0	11.1

* - Lcpl até 129; ver texto

De modo semelhante ao observado por Siegler & Robinson, as crianças que contaram até 19 ou menos não se agrupam em torno de pontos-limite claramente definidos, as que tem ponto de parada entre 20 e 99 param, costumeiramente, num número terminado em 9 (antes de uma mudança de dezena) e as que contam além de 99 (até 130),

principalmente em números terminados em 0 (ou, em segundo lugar, terminados em 9).

Siegler & Robinson propõem três "modelos" subjacentes ao procedimento de contagem, referentes a estes três grupos (v. op.cit., pp. 262 - 264) em que

A) no primeiro modelo (ponto de parada até 19) predominaria o contar baseado apenas na recitação da lista decorada de nomes de números; a única regra seria, assim, a da sucessão (do tipo "Y é o sucessor de X");

B) o segundo modelo (ponto de parada entre 20 e 99) envolve uma "sub-rotina" onde uma "lista de dígitos" controla a seqüência de contagem no interior das dezenas, a qual é interrompida ao se chegar ao dígito "9" - quando então é buscado o número (decorado) sucessor (dezenas redondas, formando uma "lista de aplicabilidade da regra" geradora de dezenas) - se não é encontrado, a contagem é interrompida (num número terminando em 9) ou ocorre um salto para uma dezena incorreta (escolhida arbitrariamente da "lista de aplicabilidade da regra");

C) finalmente, no terceiro modelo (ponto de parada igual ou superior a 100), se acrescenta uma "sub-rotina" que checaria a presença, a cada nome de número já dito, de termos pertencentes a uma nova lista (centenas), acrescentando este termo ao início do novo nome - gerado por um algoritmo igual ao descrito no modelo anterior. Neste caso, já que as crianças são capazes de contar por períodos mais longos, o cansaço e o tédio poderiam determinar o ponto de parada tanto quanto a falta de conhecimento: *"quando o desejo das crianças de continuar se torna suficientemente fraco, elas param no próximo ponto em que a tarefa estaria completa - no próximo '9' ou no próximo '0'"* (op.cit., p.265).

Se, por um lado, os critérios de Siegler & Robinson não são idênticos aos nossos, é oportuno, por outro lado, assinalar que o padrão descrito por estes autores se repete, de modo extremamente similar, também para nossos outros critérios além de Lcpl: Lmin (limite do contar sem qualquer erro em qualquer contagem) e Lmax (limite do contar relevando-se trechos - usualmente dezenas - sistematicamente omitidos); avaliando-se estes dados de acordo com os mesmos critérios que os indicados para a Tabela 3.11, obtivemos os resultados da Tabela 3.12:

TABELA 3.12

Terminação dos Lmin e Lmax (frequências relativas)

	Lmin:1-19 (N=51)	Lmin:20-99 (N=50)	Lmin: 100-130 (N=7)
Lmin termina em 0	13.7	4.0	57.1
Lmin termina em 9	9.8	78.0	28.6
Lmin termina em 1-8	76.5	18.0	14.3
	Lmax:1-19 (N=35)	Lmax:20-99 (N=42)	Lmax: 100-130 (N=16)
Lmax termina em 0	11.4	2.4	44.4
Lmax termina em 9	22.9	81.0	44.4
Lmax termina em 1-8	65.7	16.7	11.1

Os erros típicos que observamos para cada grupo também são congruentes com as previsões nesse sentido feitas por cada um dos modelos acima: as omissões sistemáticas de dezenas características de CON=2 (Fig. 3.6e), por exemplo, seriam consequência de um defeito na lista ainda "mal-decorada" de nomes de dezenas; entre os sujeitos CON=0-1 (quase que exclusivamente: v. Fig. 3.6b), os "saltos" da primeira dezena para a segunda - geralmente seguidos de "retornos" à primeira dezena corresponderiam, à luz do modelo I, a defeitos na lista "única" de nomes de números - com a substituição de um ou mais números da primeira dezena por seus análogos da segunda (na forma "um, dois, treze, quatorze, cinco...").

Não observamos listas idiossincrásicas como as citadas por Gelman & Meck (1983) com relação a crianças de 2 anos, como "red, yellow, blue" ou "1-2-3-4-5-6-7-h-i-j-k" (os autores atribuem esta troca, mais provavelmente, a uma confusão causada pela semelhança acústica entre "8" e "h" (em inglês; a propósito, "h" é também a oitava letra); os saltos que observamos entre a primeira e a segunda dezenas podem ser explicados nestes termos; este último tipo de erro nos lembra o cometido por crianças Oksapmin ao confundir numerais designados por partes análogas (simétricas) do corpo (Saxe, 1981).

Um outro tipo de erro, no entanto, não se encaixa tão facilmente nos "modelos" de Siegler & Robinson: o sujeito 3/17, por exemplo, é CON=1 (por contar confiavelmente apenas até 11), omitindo sistematicamente o 12, o 15 e o 16 e com um "padrão" bastante irregular para a segunda dezena, que incluiu, algumas vezes, "...dezeito, dezenove, dezedez, dezeonze..."; ou seja, o sujeito já tem alguma consciência da "regra" geradora de nomes dentro das dezenas - embora esta só se aplique sistematicamente a partir da terceira dezena, e este menino jamais tenha sequer mencionado o 20 ou qualquer número maior!

A "padronização" indevida dos nomes da segunda dezena pode ser entendida como uma "teoria apoiada na liguagem", de forma análoga ao exemplificado por Karmiloff-Smith & Inhelder (1975) com relação a formas verbais irregulares em inglês:

Crianças pequenas são capazes de assimilar as formas irregulares que ouvem, tais como "feet" e "went", e enuncia-las, inicialmente, em sua forma *correct* (...). Tais elocuições parecem ainda "não-contaminadas" por regras, ou pelo que se poderia chamar de "teorias apoiadas na linguagem" [theories-in-language] implícitas. (...) as crianças progressivamente reconhecem padrões em seu ambiente linguístico e constroem "teorias apoiadas na linguagem". A tendência para generalizar estas teorias implícitas resulta no desaparecimento temporário das formas corretas, irregulares, em favor de erros reveladores da teoria (p.ex., "foots", "goed", etc.) (...). Quando as formas linguísticas corretas reaparecem, não são mais entidades não-analizadas como na primeira fase, mas exceções a um sistema unificado (Karmiloff-Smith & Inhelder, op.cit., p.210).

Interferências "prematuras" da "regra" geradora de nomes de dezenas, deste tipo, foram também observadas nas contagens de 3/20 ("dezecinco") e 4/16 ("dezequatro" (14), "dezeito"), ambos CON=0, sendo que apenas o último mencionou algum número acima de 19 ("34" - uma única vez, na estimação de estrelas); poder-se-ia ver nestes casos formas de transição entre os modelos I e II anteriormente mencionados, mas isto implica em admitir que a "regra" geradora (no caso, das dezenas "bem-formadas" - do 20 em diante) pode estar presente antes da "lista" de aplicação da regra (nomes das dezenas completas).

Outro exemplo de possíveis problemas na transição entre os modelos I e II nos é dado pelo sujeito 4/15, que conta até 29 (Lcpl e Lmax; CON=2) mas, se instado a prosseguir, responde com "...vinte-e-nove, vinte-e-dez..."; numa (suposta) confusão entre a "lista única" do modelo I e a lista de aplicabilidade da "regra" geradora de dezenas.

As "extrapolações" de contagem (além dos limites corretos), na Contagem sem Objetos, com frequência incluindo "ciclos" de repetições, são, também, características de CON=0-1, ocorrendo com frequência relativa bem menor em CON=2 (v. Fig.3.6d) e estando ausentes de CON=3 em diante.

Outro aspecto dos nossos resultados relevante para esta discussão é o fato de que, como se pode observar em todas as tabelas relativas à contingência entre CON e as outras variáveis, CON=0 e CON=1 não se mostraram nitidamente distintos um do outro, o que significa que os sujeitos nestas duas categorias tem um desempenho muito semelhante no que se refere a todos os parâmetros de compreensão do número observados neste estudo; isto nos levou a considerar que a classificação *post hoc* mais adequada deveria colapsar a ambas numa mesma categoria (CON=0-1), de modo compatível com o modelo de Siegler & Robinson.

Esta situação pode ser característica exclusiva de sujeitos educados nos idiomas ocidentais, já que se observou, entre crianças orientais, uma ^{compreensão} mais precoce do sistema de base 10, supostamente em função da não-ocorrência de uma segunda dezena irregular em idiomas como o japonês, o chinês ou o coreano (Miura et al., 1988); em adultos, foram observadas, num teste sobre reversão de números de dois dígitos, dificuldades maiores com os números terminados em 1 quando o teste era feito em inglês, mas não quando em chinês (Miller & Zhu, 1991).

Uma discrepância curiosa: Siegler & Robinson (1982) indicam, como os pontos de parada mais comuns no primeiro grupo (equivalente a CON=0-1) os números 4, 7, 8 e 13 - enquanto que nossas observações (Lcpl) destacaram o 12 (20%), o 5 (15.6%), o 11 (13.3%) e o 14 (11.1%). Convém lembrar que os dados de Siegler & Robinson se referem a 10 sujeitos, enquanto que os nossos provém de um grupo de 45 crianças; parece-nos mais fácil perceber alguma lógica intuitiva nos nossos "limites" mais frequentes: afinal, o 12 corresponde ao segundo sistema de base mais usado no dia-a-dia (a dúzia) e o 5 corresponde à metade da base 10 e ao número de dedos em uma mão (a primeira máquina de calcular); além disso, em português, 11, 12 e 14 são três dos cinco nomes mais irregulares da 2ª dezena; por outro lado, 13 e 15 não foram limites em nenhum caso (13, aliás, não foi limite em um só caso, não apenas em Lcpl, como também em Lmin e Lmax; os outros "limites" de Siegler & Robinson estão entre os valores menos assinalados da nossa lista...). Por outro lado, concordam conosco os resultados de Fisher & Beckey (1990), que também obtiveram o 12 como o mais frequente ponto de parada em crianças entre 4 e cinco anos.

Siegler & Robinson contrapõem seu modelo "tríplice" (três modelos referentes a três estágios sucessivos do desenvolvimento do domínio da contagem - enquanto mecanismo de geração de "numerlogs" verbais) ao que consideram uma ausência de estruturas ou regras que não a de "sucessão" (*a la* Peano) nos modelos computacionais propostos por Greeno, Riley & Gelman; com efeito, estes autores, em seu modelo hipotético acerca da competência no contar de crianças de cinco anos não atribuem maior complexidade ao mecanismo de geração dos nomes de números:

A busca do próximo numeral é mais simples na nossa simulação do que a busca do próximo objeto. Nós assumimos que a lista de numerais pode ser buscada na memória, com o conjunto acumulado de numerais previamente usados servindo de pista para a busca do próximo numeral na lista. (...) A concordância com a ordem estável dos numerais é conseguida simplesmente tendo-se os numerais armazenados na memória numa lista ordenada, com um processo de busca que mantém um registro na memória do numeral mais recentemente usado para buscar seu sucessor (Greeno, Riley & Gelman, 1984, pp. 133-135).

Nossa impressão, no entanto, é a de que a questão da geração de nomes de números não chega a ser realmente aprofundada no referido artigo: Greeno et al. preocuparam-se explicitamente com o contar envolvendo a manipulação concreta de objetos (a serem contados) e com a proposição de modelos de procedimento responsáveis pela implementação de capacidades numéricas como a cardinalidade e a correspondência 1-a-1 (v. adiante); no que se refere ao domínio de uma "lista de ordem estável" de "numerlogs" (a contagem, na acepção mais frequentemente utilizada no presente estudo), Greeno et al. destacam resultados como os de Gelman & Gallistel (1978), mostrando que mesmo em crianças muito novas (2 anos e meio) se pode observar indicadores da posse de um domínio (implícito) do que Rochel Gelman considera um dos "princípios" básicos subjacentes ao contar: o "princípio da ordem estável" (da lista de "numerlogs"). Quanto à geração da(s) lista(s) de "numerlogs" verbais, em si, pouco é dito por Greeno et al. - mesmo porque os experimentos mencionados envolvem a contagem de conjuntos relativamente pequenos de objetos - mas nos parece que os modelos ali propostos aceitariam em seu interior "sub-rotinas" mais estruturadas, responsáveis pela geração de nomes, sem que houvesse maior comprometimento dos modelos, em si. Afinal, Gelman & Meck (1983) já assinalavam a importância de esquemas generativos envolvendo uma ou mais bases geradoras de números e observando que *"se aprender a contar de 3 a 20 permitisse prever a dificuldade de contar de vinte até mil, é desnecessário dizer que muito poucos humanos jamais aprenderiam a contar até mil"* (op. cit., p.357).

Embora Siegler & Robinson apresentem três modelos referentes a três estágios no desenvolvimento da contagem, parece-nos implícito que, à medida em que, com o avanço das idades, novas ordens de grandeza numérica vão sendo dominadas pela criança, novos níveis de aninhamento ("nesting") de sub-rotinas (referentes a "regras") - com suas respectivas "listas de aplicabilidade" - vão se acumulando, como já ocorre do Modelo I para o Modelo II e deste para o Modelo III. A crescente ordem de aninhamento de regras e o aumento do número de listas poderia, em determinados momentos do desenvolvimento, sujeitar o desempenho a "fatores limitantes" relacionados, por exemplo, à memória e à atenção.

Em nossa concepção do que seria uma versão "ampliada" do modelo de Siegler & Robinson, destacaríamos, antes de mais nada, o salto em complexidade que se verifica, quanto à geração de nomes de números, quando se ultrapassa o primeiro milhar; até 999, os "numerlogs" são compostos de ordens de grandeza designadas por listas distintas de nomes: a lista de nomes/idades, a de nomes de dezenas e a de nomes de centenas, cujos termos são claramente diferenciados entre si; de mil a um milhão (exclusive), passa-se a trabalhar com um novo conjunto de centenas, dezenas e unidades (de milhares), o que resulta numa estrutura hierárquica mais complexa de "classes de nomes" imbricadas, resultando num padrão que sugere uma "superbase" 1000 em nosso sistema de numeração (padrão que se reflete, inclusive, na notação algarismica, através de pontos ou vírgulas de separação). Esta estrutura se repete para as ordens mais elevadas que se seguem: milhões, bilhões, etc (voltaremos a este assunto oportunamente).

Um outro aspecto do comportamento de contagem que nos chamou a atenção (observável espontaneamente nas tarefas de Contagem com Objetos) foi o de contar por múltiplos (de 2 em 2 ou de 3 em 3; não confundir com a contagem por múltiplos solicitada pelo experimentador na Contagem sem Objetos): computando-se tanto os casos em que este comportamento caracterizou a contagem total de objetos (pouco mais de 120 feijões) como os que envolveram apenas alguns surtos de

contagem por múltiplos ao longo de uma contagem "normal" (1 em 1), constatamos que tal padrão só ocorre entre crianças que contam aceitavelmente (Lcpl) até pelo menos mil (i.e., a partir de $CON=4$, aumentando gradualmente a partir daí, conforme mostrado na Fig.3.7b).

Contar para além de mil, acrescentemos, implica em ultrapassar os limites das quantidades "concebíveis":

O número 100 inquestionavelmente corresponde a uma concepção distinta. Talvez o mesmo possa ser dito do 1000, embora isto não possa ser postulado com igual certeza. Mas que dizer de 10.000? (...) A verdade parece ser que nossa concepção mental de número é bem mais limitada do que se costuma pensar, e que nós adotamos inconscientemente alguma nova unidade como padrão de comparação quando queremos tornar inteligível a nosso pensamento qualquer número de considerável magnitude. (...) O número 1.000.000 é, em si mesmo, tão superior a tudo o que faz parte de nossa experiência cotidiana que não temos senão uma concepção vaga dele, exceto como algo muito grande (Comant, 1931, p.35).

3.4.2 - Resposta Cardinal e Correspondência 1-a-1

Na situação de Contagem com Objetos, era possível verificar a ocorrência de erros relativos à variável Resposta Cardinal (CAR: responder o último número contado quando da pergunta "então quantos objetos há?"); a resposta típica das crianças consideradas CAR- era a de recontar os objetos.

Gelman (1972), através de seu "experimento mágico", concluiu que crianças de 2 anos e meio possuem um conceito adequado básico de numerosidade cardinal e que, para números bastante pequenos, "as crianças focalizavam espontaneamente a numerosidade de um conjunto" (op.cit., p.87); crianças desta idade foram observadas repetindo o último número contado ("Um, dois, três. Três!"), frequentemente enfatizando a repetição (V. Gelman & Gallistel, 1978, pp. 94-8). Em tarefas de contagem envolvendo conjuntos de 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 e 19 elementos, Gelman verificou, para cada faixa etária (3/4/5 anos), a ocorrência de resposta cardinal ao fim da contagem em função do número de objetos: a probabilidade de a criança usar o princípio cardinal diminui com o aumento da numerosidade do conjunto contado (e, naturalmente, aumenta com a idade; Gelman, 1980; Gelman & Gallistel, 1978, pp.122-126).

Schaeffer, Eggleston & Scott (1974) também observaram diferenças de desempenho conforme o tamanho dos conjuntos (1-4 ou 5-7 elementos). A ocorrência de resposta cardinal, segundo os resultados destes autores, ocorre um pouco mais cedo do que o verificado entre nossos sujeitos; isto pode ser explicado pelo fato de termos testado a sua ocorrência com numerosidades maiores (no limite do contar proficiente das crianças mais novas), e não em função de numerosidades específicas e pré-determinadas.

Note-se que a resposta que consideramos correta não implica necessariamente numa compreensão real do significado da cardinalidade. Como nota Sophian (1988a), o contar como "recitação" fornece uma explicação alternativa para o ênfase no último termo (cf. Fuson, Pergament & Lyon, 1985, apud Sophian, op.cit.); ou seja: uma resposta padronizada à pergunta "quantos" (repetir o último número contado) pode não refletir qualquer compreensão de cardinalidade. Frye et al. (1989), num experimento com crianças de 3-4 anos julgando contagens e respostas cardinais de um fantoche, observaram que o julgamento das respostas cardinais mostrou-se mais ligado a uma resposta de "repetição da última palavra" (como propõe Fuson), já que aceitavam como corretas respostas geradas por contagens com erros (não relacionariam contagem com numerosidade), não tendo sido observada uma relação entre julgamento da contagem e da resposta

cardinal (concordando com Shaeffer et al, 1984) o que levou estes autores a assinalar que o contar da criança parece preceder a compreensão dos princípios.

Nossas observações ratificam os resultados de Frye et al. (op.cit.): nas faixas etárias em que a maioria dos sujeitos forneceu respostas cardinais adequadas, mas cujo limite do contar proficiente ficava aquém do número de objetos a ser contado - o que dava margem, tipicamente, a contagens com final errado (o tipo de erro acima denominado "Extrapolação do Lcpl"), a maioria das respostas consideradas CAR+ ocorreu em seguida a uma contagem errada; no caso das crianças de 5 e 6 anos, particularmente (A5+A6), verificamos que 80% das 40 crianças foi julgada CAR+ (já que o critério, aqui, era exclusivamente o da repetição do último número contado), mas dentre estes 32 sujeitos, 24 (75%) obtiveram valores cardinais incorretos em função dos erros de contagem (anteriormente, os mesmos sujeitos tinham dado respostas cardinais perfeitas após contar os 10 bonecos; em muitos casos, os erros consistiam da simples omissão (assistemática) de uma dezena ou mesmo de um dígito, e nesta situação talvez não haja sentido em destacar a resposta cardinal baseada em contagem errada (já que o erro seria uma consequência de um acidente de contagem); muito mais eloqüentes se mostram os erros similares por crianças que terminaram a contagem de forma inteiramente errada, como foi o caso, por exemplo, de uma menina (5:3 anos, 5/05), que, após contar: "1 → 19, 31, 32...3, 4, 5, 6, 2, 7, 1 → 6", respondeu, "adequadamente", que haviam "6" palitos (tendo anteriormente contado corretamente os dez bonecos e respondido que haviam "10"). Nestas situações, porém, parece-nos mais adequado falar não em um desconhecimento do princípio, mas em limitações na capacidade de aplicação coordenada dos princípios do contar, como propõem Gelman & Gallistel (1978).

Wynn (1990) verificou que, para números muito pequenos (1-4), as crianças mais novas podem ser capazes de contar corretamente e emitir uma resposta cardinal adequada, por um lado, e por outro, não sabem entregar ao experimentador o mesmo número de objetos quando solicitadas, o que evidenciaria um desconhecimento do princípio cardinal (lembramos que 4 seria o limite das numerosidades subitizáveis, de acordo com Atkinson et al., 1976); este só seria compreendido por volta dos 3 anos e meio, quando a criança teria adquirido a compreensão de números acima da faixa subitizável (e estenderia imediatamente a compreensão do princípio a qualquer número dentro de sua faixa de contagem).

De modo semelhante, Russac (1978) supõe que na comparação da relação cardinal entre coleções possa atuar uma terceira estratégia, em acréscimo às estratégias cognitivas gerais de correspondência e contagem, a qual Brainerd (1976, apud Russac, op.cit.) denominou "cardinalidade percebida", que consistiria em "*uma discriminação direta, feita de um só relance, da relação cardinal entre coleções contendo menos do que cinco ou seis objetos*" (op.cit., p. 728).

Esta interpretação favorece a hipótese de que a compreensão do princípio cardinal adviria da experiência simultânea com os nomes atribuídos às numerosidades subitizáveis e os nomes finais obtidos ao se contar conjuntos com essas numerosidades (e sua consequente extrapolção, sob a forma de princípio, para quaisquer outras numerosidades; Klahr & Wallace, 1973, apud Wynn, 1990; Shaeffer et al., 1974).

A curva de desenvolvimento referente à variável Correspondência 1-a-1 (COR+: estabelecer o pareamento correto entre objetos e "numerlogs" na Contagem e construir corretamente a segunda série de

10 objetos para o teste sobre conservação) mostra que o desempenho em em CAR e COR está intimamente relacionado, já que os sujeitos, em sua esmagadora maioria, são CAR+/COR+ ou CAR-/COR- (v. adiante, Fig. 7.3b); tanto CAR+ quanto COR+ aumentam gradualmente de A3 a A7, sendo que CAR- e COR- ocorreram apenas entre pré-escolares; este resultado está em concordância com os de Schaeffer, Eggleston & Scott (1974) que observaram que a habilidade de construir correspondências um-a-um se desenvolve mais ou menos ao mesmo tempo que a capacidade de aplicar a regra da cardinalidade.

Um exame da Tabela 3.10, entretanto, deixa claro que a maioria dos casos em COR- se deve a sujeitos que cometeram erros de correspondência nas atividades de Contagem de Objetos; os erros na construção de uma fileira de 10 objetos (feijões ou palitos) em correspondência com os 10 bonecos foram significativamente minoritários mesmo entre as crianças de 3 anos, embora a maioria destas não contasse proficientemente até 10; estes dados diferem do observado por Piaget (1965), segundo o qual as crianças até 5 anos não constroem correspondência 1-a-1, mas estão de acordo com os resultados de Cowan & Biddle (1989), que verificaram (numa situação de partilha de objetos entre duas bonecas) que crianças muito pequenas (3-4 anos) compreendem o princípio da correspondência 1-a-1; isso parece mostrar que a capacidade de pareamento, em si, antecede as capacidades numéricas propriamente ditas - ou, como assinalaram Klein & Starkey (1988), que a construção de correspondência parece ser usada mais precocemente no desenvolvimento do que o contar; se levarmos em conta as observações de Oden, Thompson & Premack (1988), que mostraram que o pareamento de objetos parece ser uma habilidade espontânea em chimpanzés, somos levados a explicar este tipo de comportamento em função de vieses ou coerções (constraints) cognitivas anteriores aos "princípios" de Gelman, como o "viés para objetos discretos" ("DPO bias") proposto por Shipley & Shepperson (1990a, 1990b); nesse caso particular, tratar-se-ia de um "viés de formar pares complementares" (Sugarman, 1983 e outros, apud Shipley & Shepperson, 1990a).

O fato de que crianças que pareiam 10 objetos corretamente cometam erros de correspondência durante a Contagem com Objetos pode, por outro lado, ser visto como uma confirmação do modelo de Gelman, que aponta para a dificuldade das crianças pequenas em aplicar simultaneamente os "princípios básicos" do contar.

Se levarmos em conta, ao avaliar o uso do princípio da correspondência 1-a-1, principalmente o desempenho das crianças no pareamento de 10 objetos, tenderemos a concordar, portanto, com a sequência de dificuldade indicada por Gelman e Gallistel (1978), que observaram que o princípio mais freqüentemente utilizado seria o da ordem estável dos "numerlogs", seguido pelo da correspondência 1-a-1 e, finalmente, pelo princípio cardinal (raramente usado em conjunto com outros princípios pelas crianças de dois anos e responsável pela maior parte dos erros de contagem nas crianças de 3 anos).

4 CONSERVAÇÃO

4.1 - Definições

Após as tarefas relativas à Contagem com Objetos e Correspondência, as crianças se encontravam diante de duas fileiras de dez objetos cada - bonecos e feijões (ou palitos), estes últimos tendo sido postos em correspondência um-a-um pelos próprios sujeitos (levados pelo experimentador a corrigir os eventuais erros de correspondência que tivessem cometido naquela tarefa).

Era-lhes então perguntado (P1): "há mais bonecos, mais feijões (palitos), ou a quantidade está igual?"; as respostas eram aceitas sem questionamentos (a não ser quando não tivessem sido claras) e em seguida o experimentador desfazia a correspondência visual, aproximando os bonecos uns dos outros (encurtando a fileira), após o que a mesma pergunta era repetida (P2): "há mais bonecos... (etc)"; as respostas eram registradas e agora os feijões (palitos) eram aproximados entre si, tornando esta fileira ainda mais curta que a de bonecos, sendo a pergunta repetida novamente (P3) (nenhuma alteração foi feita, naturalmente, na quantidade dos objetos). Os padrões de respostas observados definiram as categorias na variável Conservação (CNS), segundo os critérios indicados na Tabela 4.1:

TABELA 4.1

Categorias e sub-categorias na variável Conservação (CNS)

CNS SUB-CAT. DESCRIÇÃO

0		Sem resposta ou não entende a pergunta.
1	A	Não responde "igual" a qualquer das três perguntas (P1/P2/P3); responde que "tem mais" (em uma das fileiras) em P1 e que "tem mais na (outra fileira)" em P2 e P3;
	B	Responde que "está igual" em P1, mas diz que "tem mais" (em uma das fileiras) em P2/P3 (a mesma fileira nos dois casos);
2	A	Responde que "tem mais" (em uma das fileiras) em P1; em P2 e P3, diz que há mais na fileira mais aglomerada (menos extensa);
	B	Semelhante a 2A, mas responde a P2 e P3 dizendo que "tem mais" na fileira mais extensa (1 exceção: v. texto);
3	A	Diz que "está igual" em P1, mas responde a P2 e P3 dizendo que "tem mais" na fileira mais aglomerada;
	B	Semelhante a 3A, mas responde a P2 e P3 dizendo que "tem mais" na fileira mais extensa;
4		Responde sempre que "está igual" em P1; responde que "tem mais" elementos na fileira mais extensa em P2 mas responde que "está igual" em P3, em geral retificando também a resposta dada em P2 (1 exceção: v. texto);
5		Conservação perfeita: responde sem hesitar que "está igual" às três perguntas (P1/P2/P3).

As sub-categorias têm a função de distinguir padrões distintos de resposta, entre os quais, porém, não nos pareceu adequado estabelecer uma ordenação qualitativa (no que se refere à variável em questão).

Os sujeitos em CNS=0, como indicado, não responderam (ou emitiram respostas incongruentes com as perguntas); os em CNS=1 escolheram (em P2 e P3) sistematicamente um dos conjuntos de objetos, não afirmando a igualdade em P2/P3 nem levando em conta - errada mas coerentemente - as transformações efetuadas (a grande maioria considerou mais numerosa a fileira de bonecos, possivelmente em função do maior tamanho daqueles); nos casos em que CNS=2, as crianças não consideraram "iguais" as fileiras em correspondência (antes das transformações), mas reagiram às transformações, julgando "mais numerosa" a fileira mais extensa (ou a mais densa - mas o mesmo critério foi aplicado, por cada indivíduo, em P2 e P3); foi aqui incluído um caso excepcional (6/20), que respondeu "igual" em P2 (porém que haviam "mais palitos em P1 - iguais - e P3 - a mais extensa); para CNS=3, o mesmo se deu, mas os sujeitos, responderam corretamente a P1 ("está igual").

Das categorias definidas na Tabela 4.1, CNS=0/1/2/3 correspondem a sujeitos "não-conservadores" ("latu sensu") e CNS=5 a sujeitos que apresentam conservação perfeita de quantidades descontínuas, enquanto que CNS=4 contém casos-limite, transicionais, onde os sujeitos terminam por responder como conservadores, mas apenas depois de alguma hesitação (em um único caso (8/06), o sujeito respondeu corretamente a P1/P2 e optou pela fileira mais extensa em P3). Quando nos referimos, adiante, à forma binária da variável, CNS+ corresponde a CNS=4-5.

4.2 - Descrição dos resultados

A Tabela 4.2 mostra a frequência de cada sub-categoria nas amostras; a Tabela 4.3 e a Figura 4.1a a resumem, indicando a ocorrência das várias categorias de resposta em cada amostra (agrupadas em CNS=4/5 (CNS+), CNS=3 e CNS=0/1/2, para maior clareza, na Figura 4.1b):

TABELA 4.2

Conservação (CNS): Sujeitos por Amostra em cada Sub-categoria

CNS	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	11	3	0	0	0	0	0	0	0	0
1A	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
1B	5	1	1	2	0	1	1	0	0	0
2A	2	5	2	1	0	0	0	0	0	0
2B	0	4	10	12	3	0	0	0	0	0
3A	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3B	1	4	4	4	12	9	5	5	0	0
4	0	0	0	0	0	3	4	5	1	0
5	0	0	0	1	5	7	10	10	19	20

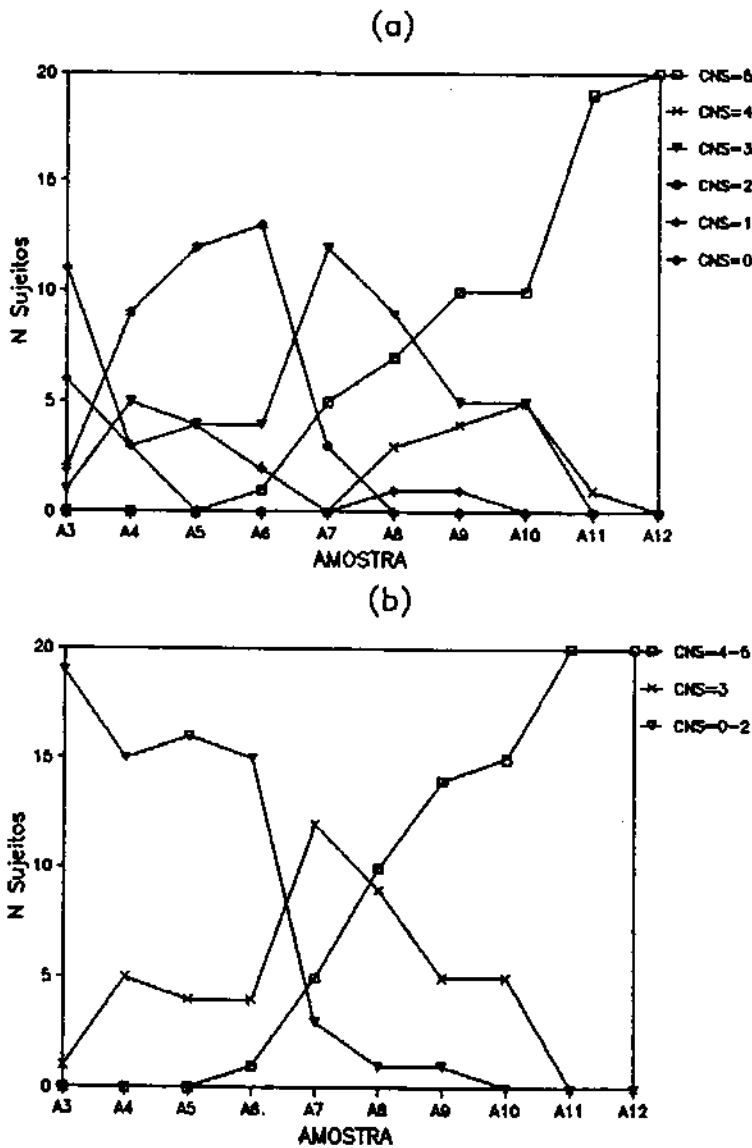
TABELA 4.3

Conservação (CNS): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

CNS	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	TOT
0	11	3	0	0	0	0	0	0	0	0	14
1	6	3	4	2	0	1	1	0	0	0	17
2	2	9	12	13	3	0	0	0	0	0	39
3	1	5	4	4	12	9	5	5	0	0	45
4	0	0	0	0	0	3	4	5	1	0	13
5	0	0	0	1	5	7	10	10	19	20	72

FIGURA 4.1

CNS (Conservação) X AMO (idade): (a) categorias (CNS=1-5); (b) categorias agrupadas.



4.2.1 - Justificativas espontâneas dos sujeitos

Em uns poucos casos (4), os "conservadores" foram observados certificando-se de suas respostas por meio de uma rápida recontagem dos objetos (o que evidentemente não quer dizer que outros sujeitos não tenham usado contagens encobertas); as respostas típicas, porém, não apenas eram seguras, como os sujeitos, freqüentemente (sem que lhes fosse solicitado) ainda as justificavam; as justificativas registradas se enquadram nos seguintes tipos:

1. "Está igual porque são 10 objetos em cada fileira" (9 casos: 6/18, 8/19, 9/05, 16, 19, 10/18, 11/01, 03, 19), por exemplo:

"Tá igual porque tem dez bonecos e dez feijões" (8/19).

2. "Está igual porque não houve adição ou subtração de objetos" (5 casos: 8/03, 20, 9/03, 18, 12/02), por exemplo:

"tá igual porque v. não tirou nenhum" (8/03);

"Igual... porque v. encolheu mais os feijões do que os bonecos; porque não tirou nenhum, então vai ter o mesmo resultado" (8/20).

"Tá igual... só fica diferente se tirar um boneco; se tirar um de cada um fica igual" (9/03).

3. "Igual porque a transformação foi apenas espacial, mas numericamente irrelevante" (4 casos: 9/8,9,14,19), por exemplo:

"A mesma quantia, v. só juntou os bonecos e separou os palitos" (9/09).

Três conservadores - todos entre os mais velhos - comentaram o aspecto "enganoso" do comprimento:

"Parece que tem mais boneco, mas se for contar, a quantidade é a mesma" (12/8);

"A quantidade fica igual; só o tamanho dos homininho diminui" (12/11);

"Tá igual porque eu sei, se fosse olhar, parece que tem mais bonequinho" (12/12).

Mas as "justificativas" não foram privilégio dos conservadores:

"Tem mais palitinho, porque v. juntou (os bonecos)" (6/14).

Algumas destas pseudo-justificativas indicam problemas com os termos "maior/menor", "mais/menos":

(P1): *"tem mais boneco e mais palito: os dois!"* (4/05);

(Bonecos aglomerados): *"tem mais boneco e mais sobrando palitinho"* (3/12);

(idem): *"tem mais boneco... porque tem bastante"* (5/11);

(palitos aglomerados): *"tem pouco palito"* (pergunta repetida) *"tem mais boneco"* (6/16);

"Nós pensa que tem mais feijão, porque (incompreensível) (?) ...tem menos boneco" (7/02);

"os bonecos ficam maiores... tem mais boneco" (9/2).

Mesmo entre os conservadores, o uso da terminologia relativa à quantidade pode ser um tanto precário:

"a quantidade de aglomerado?... a quantidade de número tá igual" (12/5);

"tem mais feijões de assim (comprimento); a quantidade tá igual" (12/13);

"daqui prá cá (comprimento), tem mais feijão; a quantidade tá igual" (12/14).

Uma comparação interessante, entre os não-conservadores, se refere ao predomínio da extensão da fileira sobre sua densidade como pseudo-indicador de numerosidade. Consideremos CNS=2 e CNS=3: estes dois grupos se distinguem apenas por afirmar ou não a igualdade inicial das quantidades nas duas fileiras (antes das transformações); por outro lado, nas respostas subseqüentes às transformações, 2A e 3A consideraram mais numerosa a fileira mais densa, enquanto que 2B e 3B optaram pela mais extensa; mas se em ambos os casos (2 e 3) a extensão predomina, por outro lado há uma diferença significativa ($\chi^2 = 8.12$, 1 g.l., $p < .01$) na freqüência de opções pela fileira mais densa: há apenas um caso em CNS=3 (2.2% de N=45) contra 10 em CNS=2 (25.6% de N=39).

4.2.2 - Comparação entre as amostras

Como mostra a Figura 4.1, o desenvolvimento da Conservação ao longo das faixas etárias (freqüência de CNS+ por amostra) é razoavelmente linear, principiando por volta dos seis anos, atingindo uma freqüência significativamente majoritária (P. Binomial, bilateral, $p < .05$) aos nove anos e correspondendo à totalidade dos sujeitos a partir dos onze anos de idade. A comparação entre amostras contíguas

($A_N - A_{N+1}$) em função de CNS (0-5) mostrou diferenças significativas ($p < .05$) apenas entre A3-A4, A6-A7 e A10-A11 (v. Tabela 4.4); já para as comparações entre amostras $A_N - A_{N+2}$ as únicas diferenças não significativas foram entre A4-A6 e A8-A10 - neste último caso observa-se uma tendência fraca ($P < .1$), do mesmo modo que entre A7-A8. Estes dados apontam para os seguintes faixas etárias com desempenhos claramente distintos: A3, A4-A5-A6, A7, A9-A10 (A8 correspondendo a uma "transição" entre os dois últimos grupos) e A11-A12.

TABELA 4.4

Probabilidades associadas a H_0 nas comparações entre Amostras (CNS=0-5; Mann-Whitney, unilateral)

AMOSTRAS	U	p
A3 X A4	82.0	< .001
A4 X A5	186.0	($p > .05$)
A5 X A6	184.0	($p > .05$)
A6 X A7	71.5	< .0005
A7 X A8	151.5	($.05 < p < .1$)
A8 X A9	161.0	($p > .05$)
A9 X A10	192.5	($p > .05$)
A10 X A11	107.0	< .01
A11 X A12	190.0	($p > .05$)
(amostras não-contíguas:)		
A4 X A6	173.5	($p > .05$)
A7 X A9	120.0	< .025
A8 X A10	150.0	($.05 < p < .1$)

As associações significativas entre as Amostras e as categorias em CNS confirmam as comparações acima (Mann-Whitney), e podem ser vistas na Tabela 4.5:

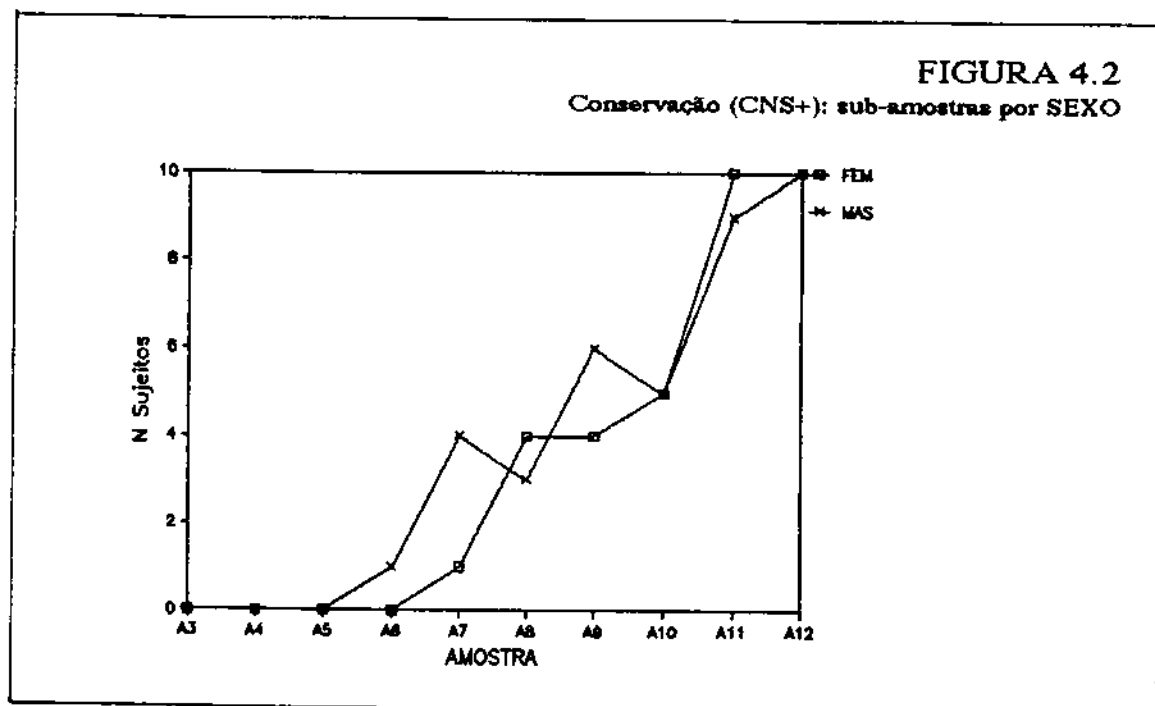
TABELA 4.5

CNS x AMO: Resíduo Padrão: n. de significância (acima do esperado)

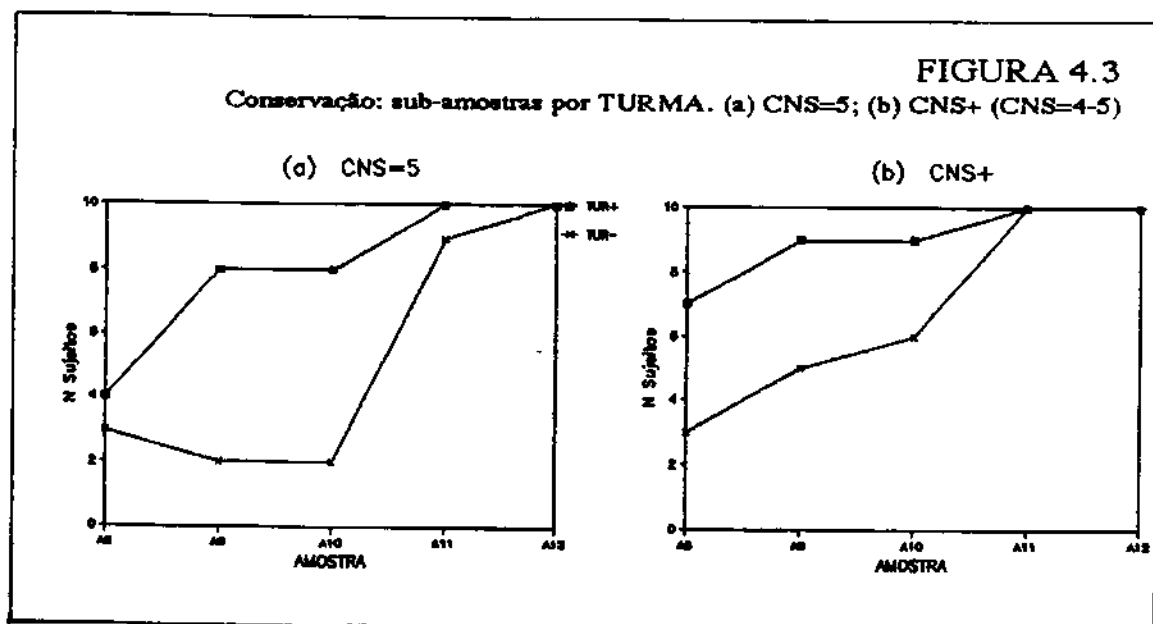
AMO	CNS					
	0	1	2	3	4	5
A3	.0001	.001	-	-	-	-
A4	-	-	.005	-	-	-
A5	-	.05	.0001	-	-	-
A6	-	-	.0001	-	-	-
A7	-	-	-	.001	-	-
A8	-	-	-	.05	.05	-
A9	-	-	-	-	.01	-
A10	-	-	-	-	.001	-
A11	-	-	-	-	-	.0001
A12	-	-	-	-	-	.0001

4.2.3 - Comparação entre as sub-amostras por sexo e turma

Não foram observadas diferenças significativas entre as sub-amostras por sexo, seja quanto a CNS(0-5) (Mann-Whitney, bilateral), seja nas frequências de CNS+ (P. de Fisher), representadas na Figura 4.2. Este resultado está de acordo com o esperado, já que uma revisão da literatura piagetiana indica, no geral, nenhuma ou uma pequena mas insignificante correlação entre sexo e conservação ((Modgil & Modgil, v.II, 1976; vários estudos citados; mas Miller, 1976, encontrou, em alguns de seus experimentos, um melhor desempenho dos meninos).



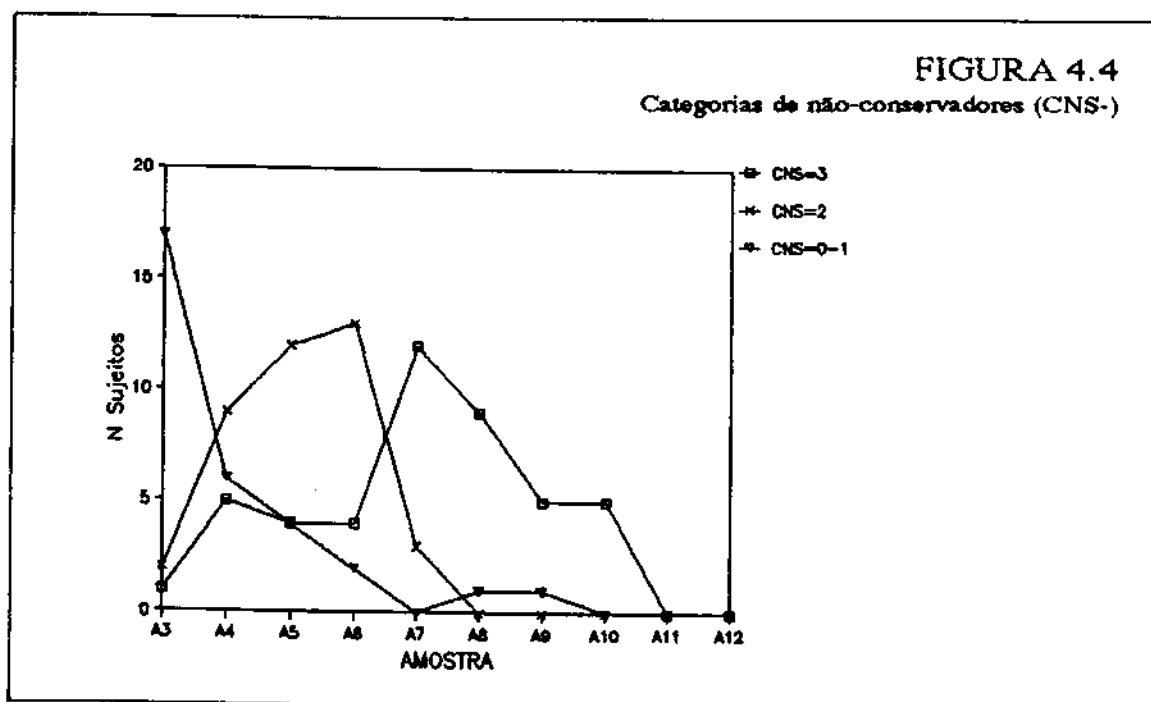
A comparação entre sub-amostras por turma apresentou diferenças significativas favorecendo os alunos das turmas mais adiantadas nas amostras A9 (Mann-Whitney, unilateral, $p < .01$) e A10 ($p < .025$). O mesmo se verifica ao compararmos apenas as frequências de CNS=5 (Figura 4.3a), P.de Fisher, unilateral, $p < .05$), mas tais diferenças deixam de ser significativas se compararmos CNS+ (CNS=4-5; v. Figura 4.3b).



4.2.4 - Categorias de não-conservadores

A Figura 4.4 reinterpreta parte dos dados contidos na Figura 4.1, referentes apenas aos sujeitos não-conservadores (CNS=0/1/2/3); enquanto o conjunto CNS=0/1 decai gradualmente (da quase totalidade em A3 para apenas alguns casos isolados após A6, a passagem de A6 para A7 (ou seja, de pré-escolares para escolares) é acompanhada por uma inversão brusca entre as categorias CNS=2 e CNS=3 (aliás, é esta inversão, além do aumento de CNS=4/5, a responsável pelo nível de significância em A6 X A7, na Tabela 4.4); ora, a diferença básica entre estas categorias foi a afirmação ou não da igualdade inicial entre as quantidades nas duas fileiras de objetos (P1).

Insinua-se aqui um problema paralelo, o do domínio da noção de igualdade, que parece até certo ponto, ao menos, independente do desempenho no teste de conservação das quantidades discretas, haja visto que, mesmo entre as respostas classificadas como CNS=1 já observávamos duas sub-categorias (A e B), as quais se distinguiam exatamente pela ocorrência (ou não) da resposta "está igual" em P1 (v. 4.2.1).



4.3 - Discussão

Como se pode verificar através dos gráficos e tabelas deste capítulo, o desempenho na prova de conservação da quantidade discreta mostrou-se intimamente associado à idade dos sujeitos, não simplesmente no sentido genérico (e obviamente previsível) de que quanto mais velha a criança, mais provável a resposta correta (conservação), mas no de que, não obstante uma razoável variação individual, observamos associações significativas específicas entre Amostras e categorias de resposta em CNS (Tabela 4.5), que podem ser

assim resumidas:

A. As crianças de três anos mostraram-se, em sua maioria, $CNS=0-1$, isto é, ou não forneceram respostas classificáveis (55%; em uns alguns casos, não tendo sequer sido propriamente "testáveis"), ou responderam sem levar em conta coerentemente as transformações (30%); considerando mais numerosa uma mesma fileira após ambas as transformações (não notamos preferências significativas pelos bonecos ou pelos palitos); o caso das crianças $CNS=0$ é particularmente interessante por mostrar que, ao menos nas nossas condições, a capacidade de compreender e responder adequadamente (ainda que errado) ao tipo de pergunta utilizado ("Tem mais palitos, mais bonecos, ou está igual?") advém mais tardiamente que a capacidade de construir a fileira de palitos em correspondência 1-a-1 com os bonecos (uma tarefa não-verbal), já que 8 dos 11 sujeitos $CNS=0$ nesta amostra construíram adequadamente a fileira em correspondência ($COR=1-2$).

B. O padrão de resposta mais frequente entre as crianças de 4 a 6 anos foi $CNS=2$: estes sujeitos não reconheciam a igualdade inicial entre as fileiras, dizendo "ter mais" em uma delas (preferência pouco acentuada pelos bonecos), embora a maioria tivesse construído a correspondência sem correção do experimentador, o que nos parece advir de problemas na utilização do termo "igual" num contexto quantitativo; estas mesmas crianças, por outro lado, responderam às perguntas P2 e P3 (após as transformações) à maneira dos não-conservadores, isto é, escolhendo sempre a fileira mais extensa (a maioria) ou sempre a mais densa - uma estratégia mais freqüente entre as crianças mais novas (3-4 anos), em concordância com o assinalado por Piaget (1968); não é muito rigoroso, porém, chama-las "não-conservadoras", já que não havia igualdade (admitida) a conservar.

C. A categoria dos "não-conservadores típicos" ($CNS=3$), que reconhecem a igualdade inicial mas julgam mais numerosa a fileira mais extensa (em apenas um caso, a mais densa) após as duas transformações, foi observada dos 3 aos 10 anos, mas está significativamente associada às amostras de 7 anos (60% do total) e 8 anos (45%) embora o total de conservadores ($CNS=4-5$, com 50% dos casos), nesta última, já supere $CNS=3$.

D. Os "conservadores inseguros" ($CNS=4$: respondem a P2 como não-conservadores mas se corrigem ao responder a P3) estão significativamente associados às amostras de 8 a 10 anos, enquanto que as amostras de 11 e 12 anos estão associadas aos "conservadores seguros" ($CNS=5$).

4.3.1 - Comparação com os resultados análogos na literatura

Para Piaget, o sucesso na prova de conservação de quantidades discretas é um indicador extremamente importante do nível de desenvolvimento cognitivo, na medida em que a conservação do número assinalaria o ingresso da criança no período das operações concretas, (por volta de 7 anos) quando a construção de estruturas operacionais dá à criança os meios de conhecer o mundo em termos de sistemas de classificação lógica, seriação, números, coordenadas espaciais e temporais e causalidade (Modgil & Modgil, 1976), embora, nesta fase, a compreensão da compensação, identidade e reversibilidade das operações esteja ainda limitada ao plano concreto (a criança não raciocina sobre operações abstratas ou hipóteses). Antes da conservação, não há uma verdadeira compreensão do número, para Piaget, já que esta depende da fusão, num todo operatório, da lógica de classes e das relações assimétricas, fusão esta que se evidencia na resposta de conservação: *"as crianças têm de dominar o conceito de conservação da quantidade antes de que possam desenvolver o*

conceito de número (Piaget, 1965, p.407).

Para os autores que defendem as teorias sobre a cognição do número baseadas no contar, como assinalamos anteriormente,

a tarefa de conservação avalia mais de uma coisa (...) é, no mínimo, um teste de capacidade lógica, controle da atenção, semântica correta e habilidades de estimação. Portanto, a habilidade de conservar representa um nível sofisticado de desenvolvimento cognitivo no qual muitas habilidades separadas são coordenadas. Pode ser que a coordenação da lógica e outras habilidade aconteça com o início das operações concretas (Gelman, 1972, p.89).

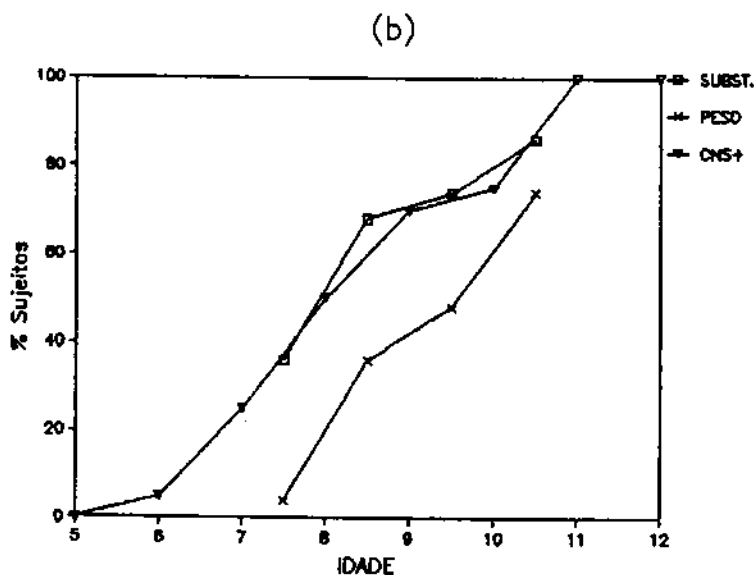
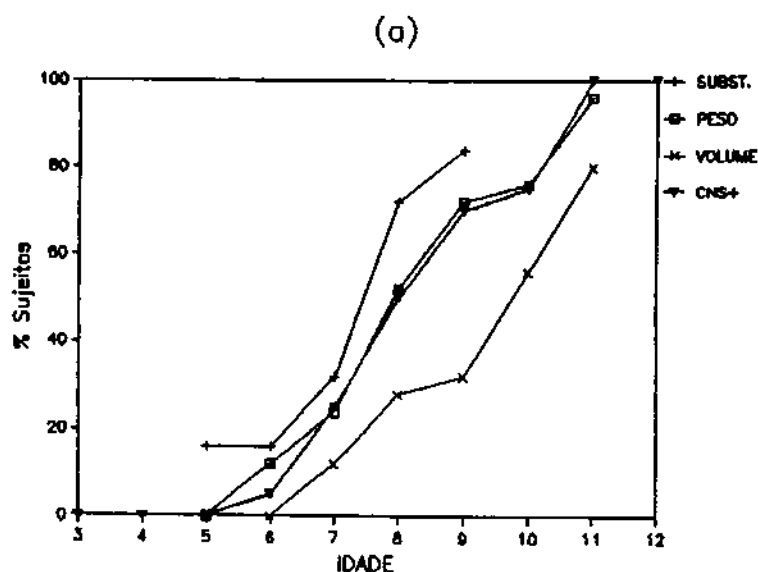
Gallistel e eu (Gelman & Gallistel, 1978) sugerimos que a conservação pode ser um indicador do surgimento de uma habilidade de raciocinar aritmeticamente sobre valores indeterminados. A idéia é a de que ao contrário dos pré-escolares, as crianças na idade da escola elementar são capazes de raciocinar algebricamente, de pensar a respeito de números como uma variável e determinar os efeitos de operações aritméticas sem pensar em um número específico. Se estivermos certos, poderia ser que a conservação indique o início das habilidades de raciocínio aritmético elevado e *antes* o início da compreensão dos números. De qualquer modo, dificilmente se pode sustentar que uma criança que falha na conservação do número não saiba nada sobre números (Gelman, 1980, p.66).

Piaget & Szeminska (1975) classificaram os resultados de seus testes sobre a correspondência termo a termo entre copos e garrafas em três fases: I. ausência de correspondência termo a termo e de equivalência; II. correspondência termo a termo, mas ausência de equivalência durável (não-conservadores); III. Correspondência e equivalência durável (conservadores). Nesta obra, os autores não forneceram informação pormenorizada acerca da ocorrência destas categorias ao longo das idades; em termos genéricos. Piaget (1965) indicou a etapa I como durando até por volta dos 5 anos, a etapa II como caracterizando, em média, o comportamento de crianças de 6 anos, a etapa III (conservação) sendo observada a partir dos 6.5 ou 7 anos. Respondendo a críticas sobre a ausência de dados quantitativos, Piaget & Inhelder (1975b) forneceram, na introdução à "Gênese das quantidades físicas na criança", alguns dados um pouco mais objetivos sobre a ocorrência das categorias em testes sobre a aquisição da conservação da substância, do peso e do volume; a seqüência da aquisição de conservação seria invariante e a conservação do número seria a primeira a ser observada no desenvolvimento (seguida da substância, do peso e, finalmente, do volume).

Nosso primeiro caso de conservação (CNS+) observado ocorreu na amostra de 6 anos (1 caso), porém os conservadores só foram maioria a partir dos nove anos e a totalidade dos casos apenas a partir de 11. Estes resultados são um tanto "atrasados", se comparados com o que se encontra na literatura em relação à conservação de quantidades discretas, mesmo levando-se em conta apenas as pesquisas ligadas ao paradigma piagetiano (ou seja, sem falar nas alegações de Mehler & Bever, 1967, por exemplo). Para comparar nossos dados com os resultados piagetianos clássicos, plotamos a curva de CNS+ em conjunto com os resultados obtidos por Inhelder & Vihn-Bang e por Lovell & Olgivie (1960, apud Piaget & Inhelder, 1975b) para substância, peso e volume (não há dados sobre número). O resultado são os gráficos das Figuras 4.5a-b.

FIGURA 4.5

Comparação entre CNS+ e conservação de (a) peso, substância e volume, segundo Inhelder & Vihh-Bang; (b) peso e substância, segundo Lovell & Olgivie, 1960 (apud Piaget, 1975b)



Os dados de Lovell e Olgivie (op.cit.), canadenses, se mostraram ligeiramente atrasados em relação aos estudos de Genebra. Nossa curva (número), que teoricamente deveria anteceder as curvas para substância, peso e volume, mostrou-se mais próxima curva do peso (Inhelder & Vihh-Bang) ou da substância (Lovell & Olgivie). O padrão geral da curva de CNS+, por outro lado, se assemelha bastante ao das outras, com pontos iniciais e finais razoavelmente próximos e inclinações muito semelhantes. Nossos resultados são compatíveis com os de Amaiwa (1973, apud Modgil & Modgil, v. VII, 1976) que concluiu que a maioria das habilidades de conservação são adquiridas por volta dos oito anos: foi em nossa amostra A8 que observamos a maior dispersão das respostas pelas categorias, indicando uma idade de transição e conseqüentemente, de máxima variação individual.

4.3.2 - Análise das diferenças observadas

Embora tenhamos observado uma ocorrência um tanto "tardia" da conservação (de acordo com a literatura), este se deveu, efetivamente, aos padrões inequívocos das respostas observadas, e não a um excesso de rigor na classificação das respostas observadas. Cabe, assim, analisar as particularidades do nosso levantamento que possam ter determinado esta diferença.

O primeiro aspecto que diferencia os métodos aqui utilizados dos procedimentos piagetianos padrão é, naturalmente, a forma da entrevista, que em nosso caso consistiu de perguntas pré-determinadas cujas respostas eram aceitas sem questionamento ou "reforçamento" diferencial; não solicitamos justificativas para respostas certas ou erradas, mas tão-somente registramos as que foram espontaneamente emitidas pelos sujeitos; isto quer dizer que as crianças não teriam muita oportunidade de modificar suas respostas iniciais (a não ser reconsiderando espontaneamente de P2 para P3); lembremos que Gréco (1962, apud Kamii, 1992) observou que, em seguida a uma resposta não-conservadora, uma resposta de conservação podia ser dada pela criança, após esta ser solicitada a contar os objetos - embora, em outros casos, as crianças sejam capazes de dizer que *"o número de fichas vermelhas é o mesmo que o número de fichas brancas, mas ainda há mais vermelhas do que brancas"* (Gréco, 1962, Apud Berlyne, 1973, p.70).

No "método clínico" há um maior grau de plasticidade na estrutura da entrevista e um período mais longo de tempo é dedicado à tarefa, onde as perguntas exploram o problema de vários ângulos, permitindo à criança mais oportunidades para trabalhar as contradições em seu pensamento e/ou aclarar o uso da terminologia envolvida; o método clínico, ao nosso ver, envolve, em certo grau, uma exploração na "zona de desenvolvimento proximal" (Vygotsky, 1962; Shotter, 1989) dos sujeitos.

O sexo do experimentador pode ter sido um fator interveniente adicional. Parish & Wheatley (1973, apud Modgil & Modgil, v.II, 1976), estudando a conservação de comprimento em estudantes da 2ª série, concluíram que a variável sexo do aplicador é um fator importante na avaliação da conservação nos níveis mais baixos da escola elementar: há significativamente mais conservadores operacionais sob a administração de testes por mulheres que por homens; em nosso caso, os testes nas Amostras da creche (3 a 6 anos) foram aplicados pelo autor e uma colaboradora, mas para as Amostras do 1º Grau, apenas o autor realizou as entrevistas.

Outro ponto relevante envolve a possibilidade de problemas relativos à linguagem: pesquisas como as de Gelman e Siegel deixam claro que "crianças podem dar mostras de solução bem-sucedida de problemas sem serem capazes de produzir a linguagem apropriada" (Siegel, 1978, p.54); Lawson, Baron & Siegel (1974) mostraram que crianças de 3 a 5 anos confundem a terminologia relacionada a número ("more") com aquela relacionada a comprimento ("longer"), especialmente em situações de conflito entre estes indicadores; Sinclair-de-Zwart (1969, apud Siegel, 1978) encontrou diferenças entre conservadores e não-conservadores no uso de terminologia numérica comparativa (conservadores usavam termos relacionais mais comumente que não-conservadores, ao descrever objetos de tamanhos diferentes e conjuntos de números diferentes). Siegel constatou, ainda, que o efeito facilitador de dicas verbais em tarefas de equivalência varia em função da idade (maior para crianças mais velhas), propondo, por esses motivos, um maior ênfase em abordagens metodológicas

não-verbais (algo com que o próprio Piaget veio a concordar, em termos):

No sistema piagetiano, a linguagem não é a causa da emergência das operações cognitivas; elas emergem e se desenvolvem independentemente da linguagem (...) pareceria um paradoxo postular-se a independência de linguagem e pensamento e a seguir se apoiar na linguagem para inferir a existência de certos tipos de pensamento (Siegel, op.cit., p.47).

Miller (1976), num estudo sobre o acessamento não-verbal da conservação, concluiu que a performance na condição não-verbal foi melhor, mas a diferença não foi grande, e que esta superioridade não foi causada porque as crianças fossem mais consistentemente corretas, mas porque fossem menos consistentemente erradas na condição não-verbal; finalmente, a comparação com a condição controle (onde foi eliminada a informação necessária à conservação), o que sugere que muitas respostas corretas na condição não-verbal se devam a mecanismos outros que a conservação (contagem, etc.).

Hudson (1983), estudando a compreensão de correspondências e diferenças numéricas entre conjuntos disjuntos em crianças entre 4 e 8 anos, chegou à conclusão de que

Muitas crianças pequenas são capazes de estabelecer correspondências e determinar as diferenças numéricas exatas entre conjuntos disjuntos; sua má performance nas questões-padrão aparentemente reflete uma má interpretação ou uma compreensão inadequada de instruções comparativas da forma geral "quantos... (termo comparativo)... do que...?" (...) a variedade de significados do termo comparativo geral "mais" pode ser a fonte de dificuldade para as crianças pequenas em certas tarefas de raciocínio numérico (Hudson, 1983, p.84-7).

Mesmo o uso da noção de "igualdade", como anteriormente mencionado, parece criar certos problemas para os pré-escolares: a categoria CNS=2 só se distingue de CNS=3 ("não-conservadores típicos") pela resposta à primeira pergunta do teste (P1, antes das transformações); nossa impressão é a de que "igual" pode ser um conceito ainda mais difícil de se utilizar do que "mais/menos que", já que, na situação de igualdade numérica, outros aspectos da situação concreta (heterogeneidade entre os objetos das duas fileiras, por exemplo), numericamente irrelevantes, poderiam perturbar o julgamento; "igual" talvez seja um termo menos capaz de orientar a atenção da criança pequena para os aspectos quantitativos em questão do que "mais/menos". A inversão abrupta entre as curvas de CNS=2 e CNS=3 (v. Figuras 4.1a ou 4.4), na passagem da Creche para a 1ª Série reflete, no nosso entender, um desenvolvimento na utilização de terminologia relacional.

O número de objetos constituindo os conjuntos utilizados, por outro lado, nos parece um aspecto particularmente relevante nas diferenças de procedimento. O experimento clássico de Piaget, com copos e garrafas de brinquedo, utilizou conjuntos de 6 elementos (Piaget & Szeminska, 1975), enquanto que nosso experimento utilizou conjuntos de 10 objetos. O efeito da numerosidade dos conjuntos sobre o desempenho numérico de crianças pequenas foi apontado por Klahr & Wallace, (1973, 1976, apud Saxe, 1979 e Sigel, 1981); no que se refere especificamente à conservação, várias evidências na literatura sugerem tal efeito; as crianças desde muito cedo compreendem a invariância da numerosidade em conjuntos pequenos, subitizáveis (Gelman, 1972; Shaeffer et al., 1974), embora falhem nas tarefas tradicionais de conservação; Lawson, Baron & Siegel (1974) observaram que mesmo crianças abaixo de 5 anos podem conservar o número sob certas condições, sugerindo que o conceito imaturo de número da criança pode ser confundido com o comprimento, especialmente quando os números forem grandes demais para a estimação acurada.

No prefácio à terceira edição de "A Gênese do Número na Criança", Piaget & Szeminska citam diversos estudos mostrando que, se por um lado (como proposto por Piaget), a síntese de inclusão e seriação se constitui por volta dos 7-8 anos, para os primeiros números naturais, ela só acontece "de maneira muito progressiva" para os números maiores:

Como o provou especialmente P. Oréco (...), assiste-se a uma espécie de aritmetização muito progressiva da série de números, por parcelas de aproximadamente 1-7, depois 8-15, após 15-30 etc., com as parcelas ainda não aritmetizadas conservando muito tempo seus caracteres de simples classes ou de simples ordem serial enquanto a síntese não é generalizada (Piaget & Szeminska, 1975, pp.16-17).

Em suma, como resumiu Kamii (1992), *"mesmo estando apta a conservar com 8 objetos, isto não significa que a criança possa necessariamente conservar quando se usam 30"*(p.31).

A abordagem do desenvolvimento cognitivo em termos de "acessamento de regras" (Rule-Assesment Approach) proposta por Siegler tem como principal suposição a de que *"o desenvolvimento cognitivo pode ser caracterizado em grande parte como a aquisição de regras cada vez mais poderosas para solucionar problemas"* (Siegler, 1981, p.3); de acordo com um modelo decisório proposto pela teoria para a conservação do número, formas de transição no comportamento diante da prova de conservação podem envolver o uso estratégias diferenciadas em função do número de objetos (2-3 X 5-6-7, 3 X 8) empregado na tarefa:

As crianças geralmente tem um desempenho em níveis mais avançados com conjuntos pequenos do que com grandes. (...) grande número de crianças de 4 e cinco anos se mostravam dispostas a alternar estratégias dependendo do tamanho do conjunto, bem como do tipo de transformação (...). Observou-se que o desempenho na tarefa de conservação de número era influenciada substancialmente pelo número de objetos nas fileiras (Siegler, 1981, pp.50-9).

No estudo citado, Siegler observou o desempenho de seus sujeitos não apenas quanto à conservação do número, mas também quanto à de quantidades sólidas e líquidas, para as quais observou um processo de desenvolvimento um tanto distinto do descrito por Piaget, já que, para estas (ao contrário do número), não haveriam etapas intermediárias:

Durante o período no qual a compreensão da conservação do número está mudando para uma base transformacional, a compreensão da conservação da quantidade de líquido e de sólido permanece constante; as crianças continuam a utilizar uma abordagem perceptual unidimensional nestes problemas. Logo após as crianças compreenderem plenamente o papel das transformações na conservação do número, entretanto, elas mudam para a abordagem transformacional nas tarefas com as quantidades líquidas e sólidas também (Siegler, 1981, p.51).

Tudo isso nos leva a considerar (lembrando as Figs.4.5a-b, acima), que o nosso teste possa ser considerado, simplesmente, como a verificação da presença de um conceito mais "sólido e seguro" da conservação do número que o exigido pelo teste clássico de Piaget.

Não se pode descartar, finalmente, a possibilidade de fatores socio-econômico-culturais **determinarem** alguma diferença real de desempenho entre as nossas amostras e as estudadas por outros autores; embora se suponha, de modo geral, que a conservação do número seja a mais "robusta" das formas da conservação, em termos de universalidade ou "insensibilidade" à fatores ambientais (v. Modgil & Modgil, 1976; Saxe, 1981), estes fatores sem dúvida (ainda que não sejam, possivelmente, decisivos) determinam, no mínimo, "feedbacks" ou facilitações no desenvolvimento da cognição do número, como admitiram Inhelder et al. (1966). Uma evidência de efeitos ambientais está na questão do treino da conservação: uma revisão dos estudos nesta área, por Brainerd & Allen (1971, apud Modgil & Modgil, v.VII,

1976), apoia a visão de que a conservação pode ser induzida por meios experimentais de curto prazo. Murray (1976, apud Modgil & Modgil, op.cit.) mostra que, curiosamente, a maioria dos estudos sobre treino da conservação nos anos 60 levou revisores como Flavell e Siegel a concluir que a conservação não era ensinável, que mas muitos dos estudos posteriores apontam na direção oposta, mesmo quando reproduzindo paradigmas dos trabalhos anteriores.

Pelo menos uma evidência de influências sócio-culturais sobre o desempenho na conservação pode ser encontrada em nossos resultados: para as amostras de 9 e de 10 anos de idade, observamos um efeito significativo da escolaridade (A9: 1ª X 2ª Série; A10: 2ª X 3ª Série; v. Figura 4.3).

De qualquer modo, como assinalou Inhelder (prólogo ao vol.IV de Modgil & Modgil, 1976), *"numa perspectiva construtivista (...), é claramente a seqüência de estágios que é importante e não as idades cronológicas; as últimas variam consideravelmente de um ambiente para outro e dependem também dos procedimentos experimentais sendo utilizados"* (op.cit., p.8). Dodwell ressaltou a grande variabilidade no estágio em que a criança parece estar, em função de diferentes tarefas (aparentemente similares), e sugere que a variabilidade nos estágios e a ausência de fortes dependências seqüenciais previstas pela teoria de Piaget é uma função de respostas aprendidas para situações particulares sem a completa assimilação, ou uma função de aprendizagem sem a generalização adequada da resposta (Dodwell, 1960).

Nas palavras de Siegler & Robinson (1982), o desenvolvimento conceitual *"é algo complexo demais para que assessemos a compreensão das crianças examinando a performance em uma única tarefa: nenhuma idade é a idade na qual o conceito é compreendido"* (op.cit., p.308).

5 ESTIMAÇÃO

"E, apontando para uma velha e grande figueira que se erguia a uma pequena distância, (Beremiz) proseguiu:

- Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos. Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil quinzentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?

- Que maravilha! - exclamei atônito. - E' inacreditável que possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim! Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!

- Como assim? - estranhou Beremiz. - Jamais me passou pela idéia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?" (Malba Tahan, *"O homem que Calculava"*).

Em seguida às tarefas ligadas ao contar e a conservação de quantidades discretas, era solicitado às crianças que estimassem - sem tentar contar, nos casos em que isto era possível - a quantidade de elementos em determinados conjuntos de objetos, a saber: 50 palitos de fósforo (amontoados para A3 a A6, num embrulho plástico transparente para A7 a A12), 200 palitos num embrulho (A5 em diante), cerca de 2 mil grãos de arroz em um tubo plástico transparente (A9 em diante), grãos de areia em um frasco de vidro de 100 ml (estimados pelo autor em cerca de dez milhões; A5 em diante), as folhas de uma árvore (mostrada através da janela; todas as amostras) e o número de estrelas "no céu".

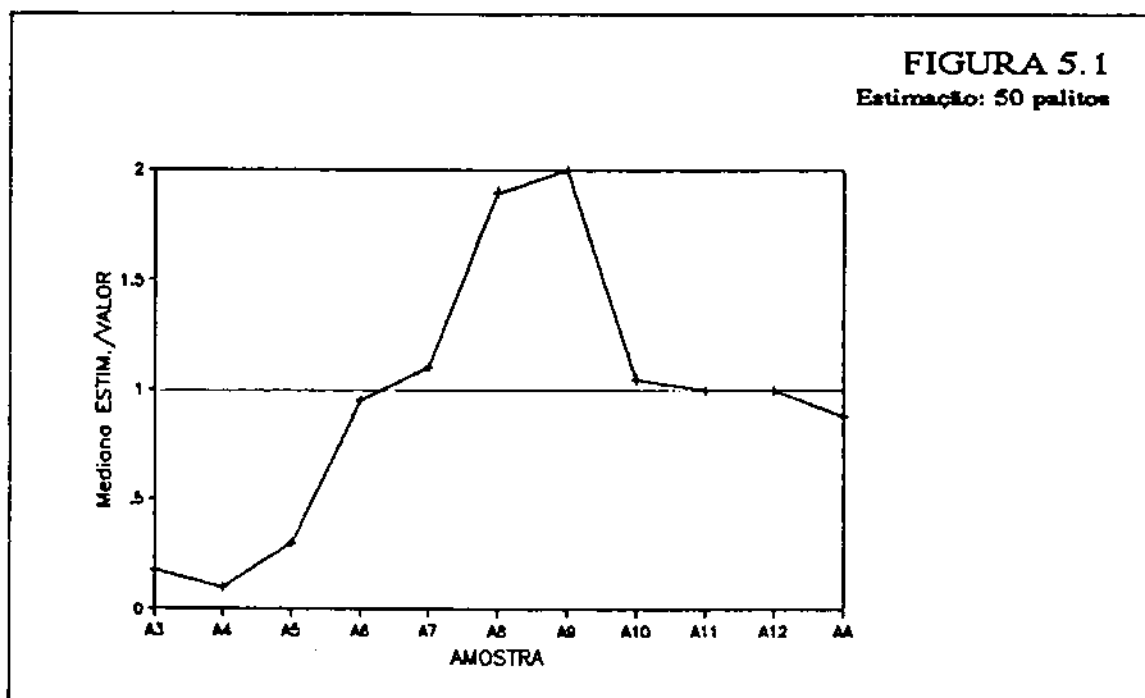
Além de verificar eventuais desenvolvimentos na precisão das estimativas, estávamos interessados na observação do vocabulário numérico dos sujeitos, em geral, e particularmente, nas respostas não-cardinais - como termos "intensivos" para grandes quantidades e a estimação, para alguns destes conjuntos, de quantidades "infinitas".

Para os palitos (50/200), grãos de arroz e areia, levantamos as estimativas de uma amostra de 20 adultos para fins de comparação. Nos referiremos a esta amostra, nos itens que se seguem, como "AA" (v. 2.4); alguns comentários em torno deste grupo serão feitos ao final do capítulo.

5.1 - Resultados: estimação das quantidades discretas

5.1.1 - Os 50 palitos

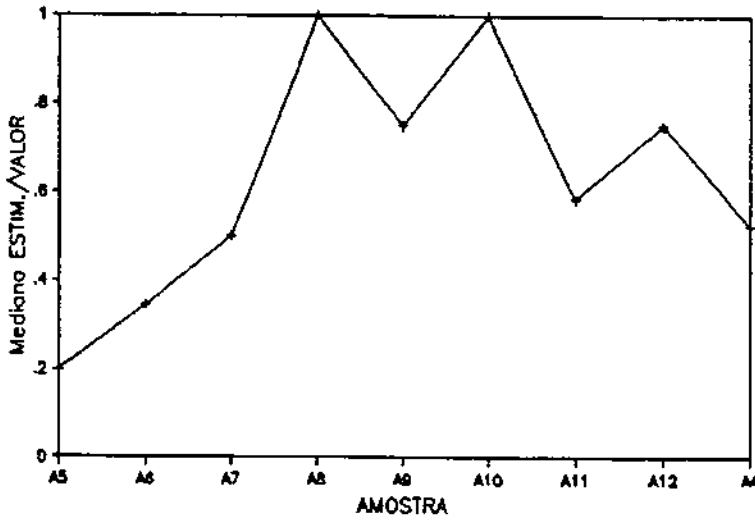
As respostas das crianças (e do grupo adulto) neste teste podem ser vistas na Figura 5.1 (medianas do valor obtido, para cada amostra, dividindo-se a estimativa de cada sujeito pelo número correto de elementos, ou seja, uma estimativa correta corresponde à unidade). Pela figura, tem-se a impressão de que as estimativas para esta quantidade assumem um padrão semelhante ao dos adultos (e bastante próximo do valor correto) a partir dos dez anos de idade - ou desde os seis, se relevarmos a superestimação pelas amostras A8 e A9.



5.1.2 - Os 200 palitos

A Figura 5.2 mostra as medianas (divididas pelo valor correto, como na figura anterior) das estimativas por amostra no caso dos 200 palitos: entre as crianças mais novas, percebem-se os efeitos dos limites em seu domínio dos números (tb. nas Figuras 5.1 e 5.4-6), mas o que se verifica adiante é uma tendência mais irregular - onde as medianas das estimativas em A8 e A10 foram mais acuradas, inclusive, que as dos adultos.

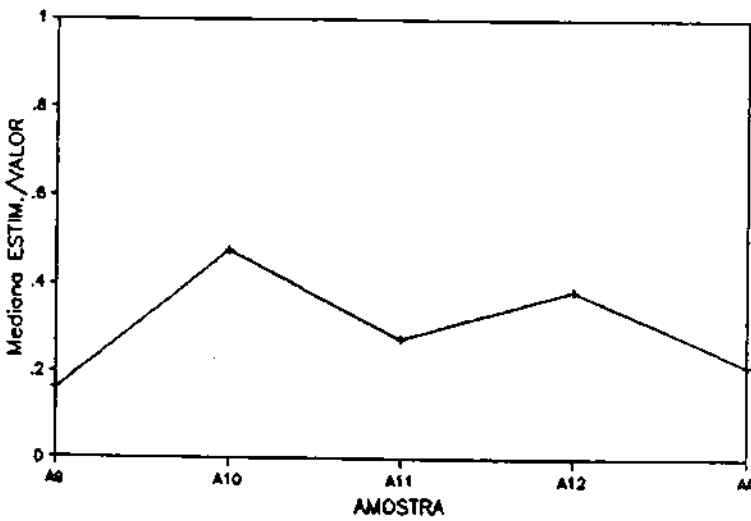
FIGURA 5.2
Estimação: 200 palitos



5.1.3 - Os 2000 grãos de arroz

A irregularidade, ou ausência de um desenvolvimento claro na precisão das estimativas é particularmente nítida neste caso (Figura 5.3); observe-se, antes de mais nada, que adultos e crianças já erram grosseiramente para menos (medianas) para esta quantidade.

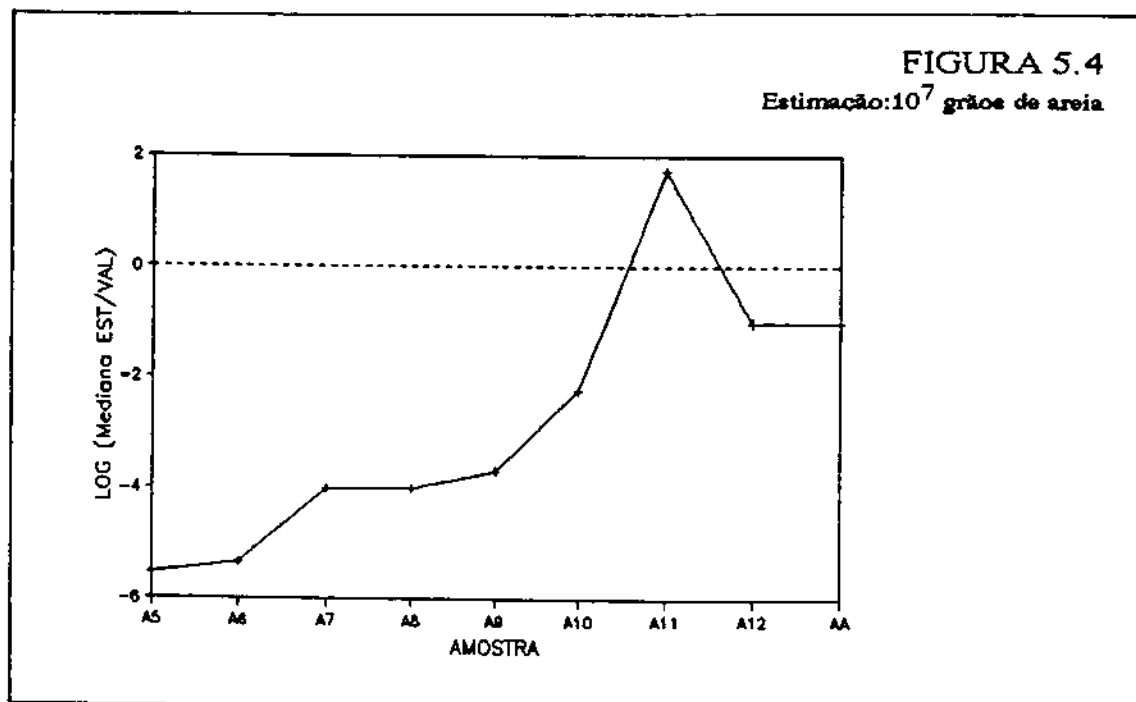
FIGURA 5.3
Estimação: 2000 grãos de arroz



5.1.4 - Os grãos de areia

Aqui, tornou-se necessária a representação das respostas através do

logaritmo (base 10) das medianas de $\text{estimativa}/10^7$ (estimativa do experimentador); as limitações no uso do vocabulário numérico parecem se fazer sentir até os nove ou dez anos; a mediana para a amostra A11 excedeu nossa estimativa em função do uso frequente de nomes de números "astronômicos", e o desempenho da amostra A12 foi semelhante ao dos adultos. Na Figura 5.4, o nosso valor supostamente "correto" corresponde não ao 1, mas ao zero do eixo das ordenadas ($\log_{10}1$).



5.1.5 - Folhas de árvore e estrelas

As estimativas de folhas de árvore (Figura 5.5) não têm grande interesse em si (mesmo porque não há uma estimativa de nossa parte com a qual compara-las), mas apenas pelas limitações impostas pelo vocabulário das crianças mais novas e pela oportunidade de se observarem respostas não-cardinais; situação similar ocorre para o "número de estrelas" (Figura 5.6), com dois problemas adicionais: a pouca ou nenhuma experiência das crianças de cidade grande com um céu realmente estrelado e a distinção entre estrelas visíveis e estrelas existentes - um ponto sobre o qual optamos por não insistir muito: embora a pergunta mencionasse as estrelas visíveis "numa noite de céu bem limpo", muitas das respostas se referiram, aparentemente (entre as crianças mais velhas), às estrelas "que existem".

FIGURA 5.5
Estimação: folhas de árvore

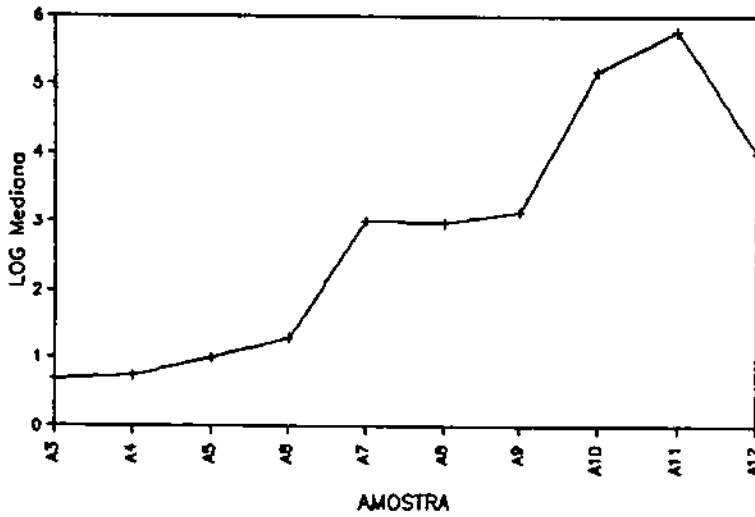
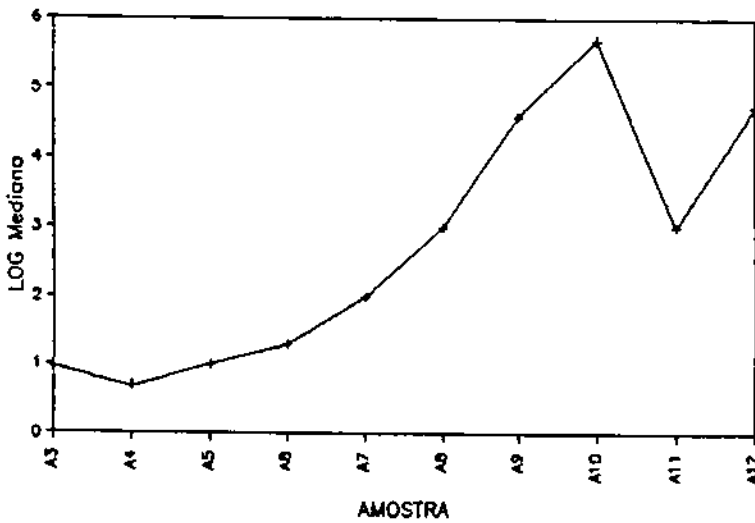


FIGURA 5.6
Estimação: estrelas



5.2 - Outros aspectos das respostas

5.2.1 - Respostas não-cardinais

Embora insistíssemos um pouco em respostas numéricas, nem sempre as obtínhamos, em especial para os conjuntos mais numerosos e entre as crianças mais jovens; as respostas não-cardinais foram excluídas dos cálculos de medianas acima mencionados

(evidentemente), com exceção das respostas que se referiam a um número "infinito" (basicamente, estrelas), que foram mantidas como valores máximos na ordenação.

As Figuras 5.7a-e indicam a ocorrência de respostas cardinais (CAR) ou não para, respectivamente, 50 palitos, 200 palitos, 2000 grãos de arroz, grãos de areia, folhas e estrelas, assim discriminadas: termos genéricos sugerindo "incontabilidade" (INC; em sua esmagadora maioria, "muitos"), "pseudo-contagens" (CON; respostas do tipo "1...2...3...") e outras (ETC; sem resposta, respostas incompreensíveis, gestos); estas categorias registram apenas os casos em que não houve resposta melhor por parte dos sujeitos.

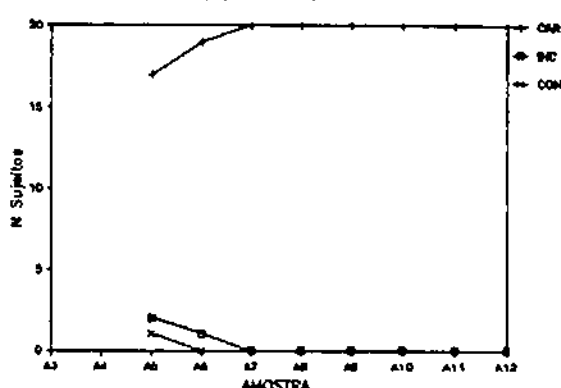
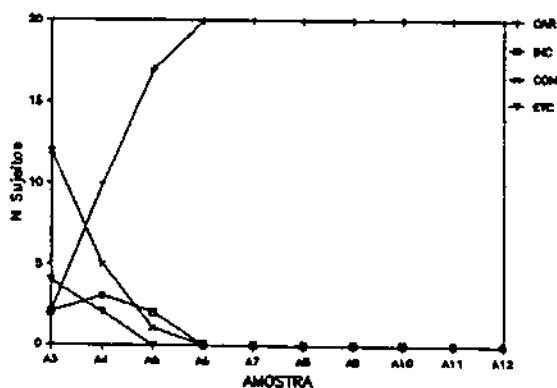
Não foram destacadas as respostas envolvendo "infinitude" (v. adiante), incluídas em CAR, e nem alguns casos em que as crianças responderam, diante do frasco com areia, que havia "x gramas", uma vez que houve correção subsequente (após repetirmos a pergunta).

FIGURA 5.7

Estimación: resposta cardinal e outras
(CAR = r. cardinal; INC = alegação de "incontabilidade"; CON = "pseudo-contagens"; ETC = outros)

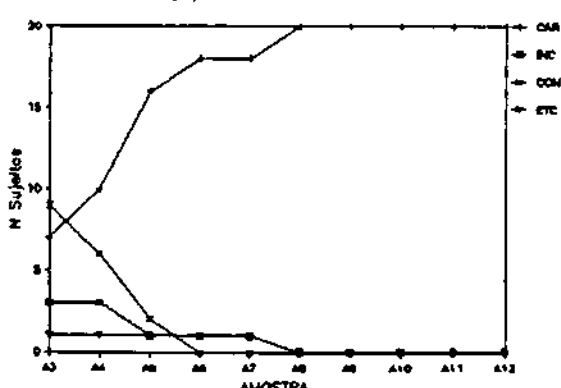
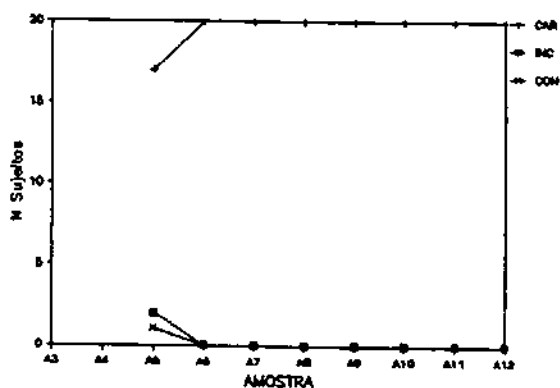
(a) 50 palitos

(b) 200 palitos

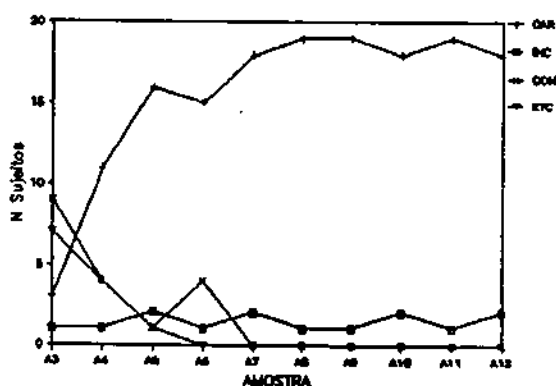


(c) grãos de areia

(d) folhas de árvore



(e) estrelas



5.2.2 - Infinitude nas respostas de estimação

Via de regra, respostas estimando algum dos conjuntos como "infinito" ocorreram apenas para o número de estrelas; as únicas exceções foram: uma resposta para as folhas de árvore (6/14) e outra para os grãos de areia (9/13 - o qual depois, como repetimos a pergunta, respondeu: "*um monte... quatro quatrilhões*") e um caso onde uma menina (A6), depois de insistir em que não sabia quantos palitos havia (no pacote com 200), concluiu:

"...Acho que tem infinito, então!"(6/08).

A ocorrência de respostas do tipo "é infinito", quando da pergunta sobre estrelas está indicada na Figura 5.8; vale a pena citar algumas:

"Mais de infinito"(7/17);

"Infinita, porque tem bastante estrela no universo"(8/01);

"Xi.. Infinito, mais ou menos... eu vejo umas vinte, mas acho que tem um milhão, por aí.."(8/15);

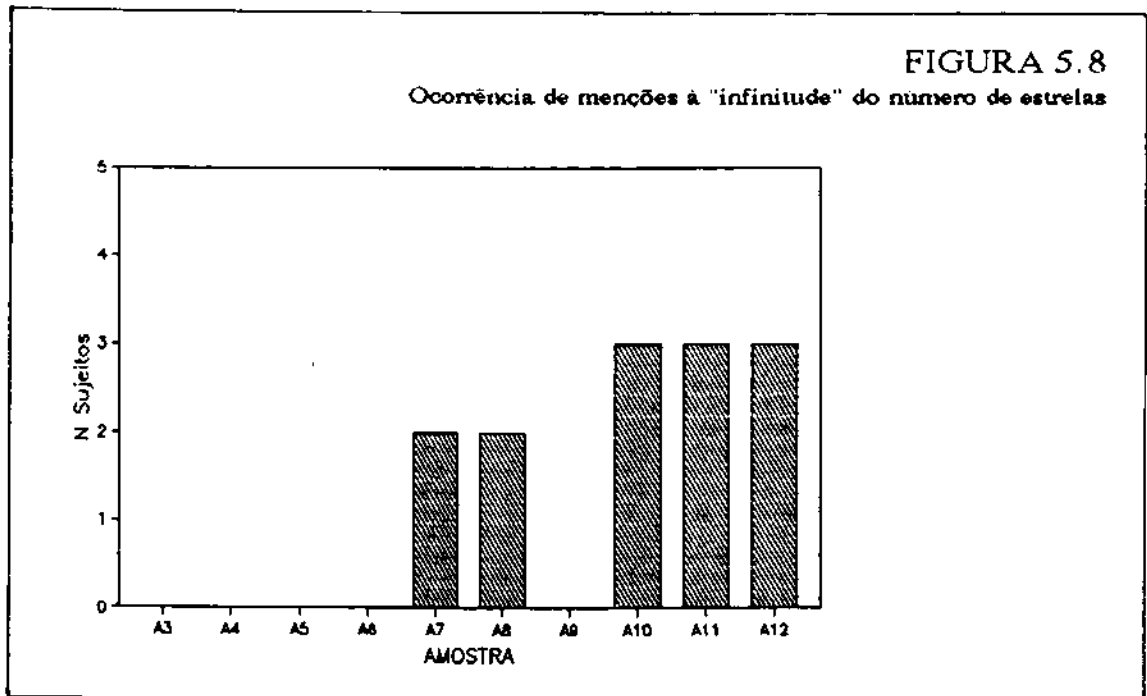
"O infinito... nunca acaba as estrelas"(10/01);

"Infinito... novecentos trilhões"(10/2);

Em dois casos, houve menção indireta à infinitude:

"trilhões de estrelas, porque o universo não tem fim... não sei quantas estrelas tem o universo..."(12/07);

"Não dá para saber: o céu é infinito, é o espaço, né?"(9/17).

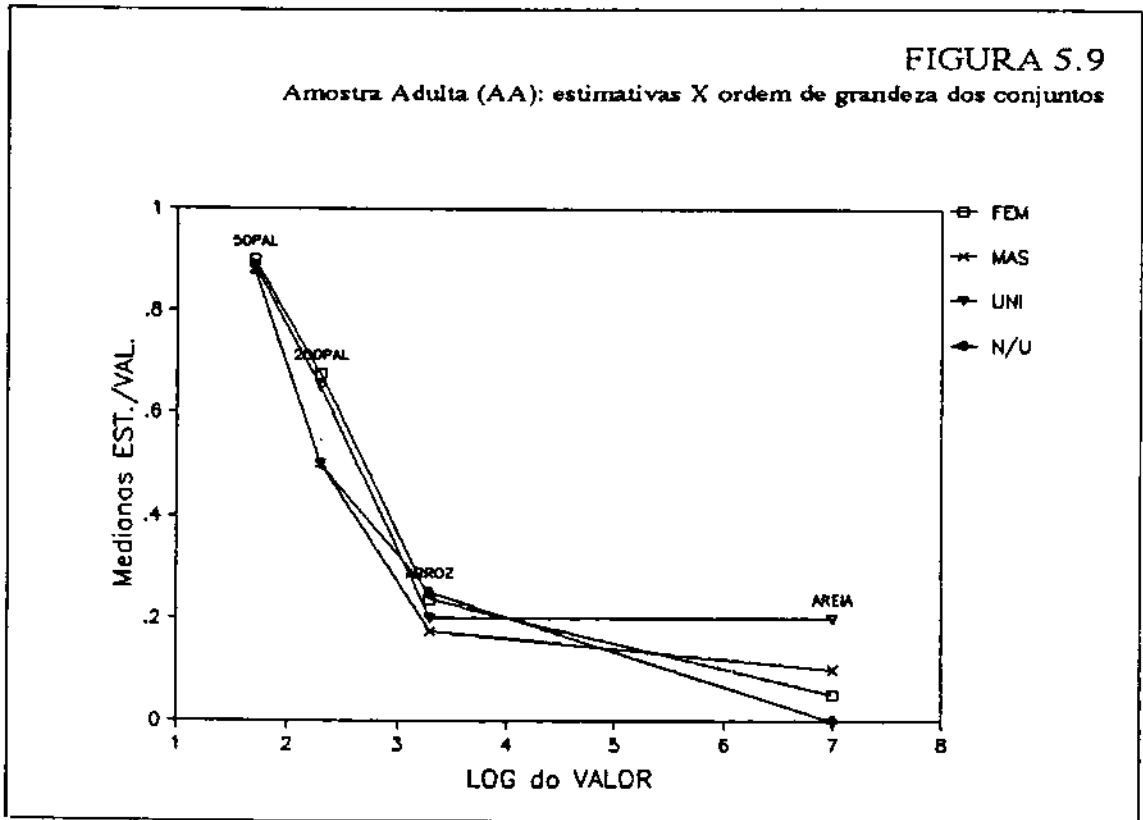


5.3 - Algumas observações sobre a amostra adulta (AA)

Os dados para esta amostra foram coletados como uma espécie de grupo-controle, porque, para este tipo de problema, não poderíamos, evidentemente, supor que a resposta "adulta" fosse uma resposta "correta"; a amostra foi formada por sujeitos com e sem grau universitário e de ambos os sexos. Não nos aprofundaremos aqui na comparação entre estas sub-amostras (o que foge aos propósitos deste estudo), mas observe-se, no entanto, que há uma tendência geral à subestimação - que aumenta, até certo ponto ao menos, com o tamanho dos conjuntos estimados (Figura 5.9). No caso dos grãos de areia, as medianas (todas muito abaixo da nossa estimativa) foram maiores para os homens que para as mulheres e maiores para os universitários que para os não-universitários - mas o mesmo não ocorreu para os conjuntos menos numerosos.

FIGURA 5.9

Amostra Adulta (AA): estimativas X ordem de grandeza dos conjuntos



5.4 - Discussão

Um dos principais objetivos desta série de questões sobre estimação de quantidades era o de eliciar eventuais alegações de infinitude, a menção à grandes nomes de números, o uso de "pseudo-números" para expressar incomensurabilidade, etc., respostas estas que foram levadas em conta através de outras variáveis analisadas nesta pesquisa (p. ex., o uso espontâneo da palavra "infinito", Cap. 5, ou o Maior Número Mencionado, Cap. 3).

No que diz respeito à qualidade do desempenho de estimação, em si, o que se observa antes de mais nada é que, para as crianças mais novas (basicamente os pré-escolares), o pequeno domínio da série dos números naturais se torna um "fator limitante" das estimativas, ou seja, estas são "achatadas" pela falta de vocabulário numérico, especialmente para os conjuntos maiores. Neste sentido, vale notar que, para os 50 palitos, as medianas das estimativas ultrapassam o valor correto para as amostras de 8 e 9 anos completos, estabilizando-se em torno daquele valor a partir dos 10 anos; somente aos 12 anos as estimativas das crianças para os grãos de areia se tornam semelhantes às dos adultos.

Outro aspecto evidente (ver especialmente a Fig. 5.9, referente à amostra adulta) é que, em termos gerais, quanto maior a numerosidade do conjunto, maior a sua subestimação pelos sujeitos, embora, no caso dos grão de areia, tenhamos obtido uma mediana "superestimadora" para a amostra A11, e embora a subestimação tenha sido a mesma (medianas), entre os adultos de nível universitário, para os grãos de arroz e os grãos de areia.

Com relação aos grãos de areia, encontramos em Ifrah (1989) uma estimativa de 10 grãos por mm^3 - dez vezes menor que a nossa; nesse caso, não teria havido subestimação dos grãos de areia, mas isto seria uma consequência de coincidirem a (suposta) quantidade e o termo numérico mais prontamente invocado nesta situação ("milhão"). Um indicador da pouca noção que as pessoas tem de quantidades nesta ordem de grandeza é o fato de alguns sujeitos terem mencionado números exageradamente grandes: na amostra adulta, um sujeito mencionou "um trilhão"; uma menina de 8 anos falou em "um quatrilhão", e um menino (8 anos) mencionou "sextilhões" de grãos de areia: mesmo admitindo a estimativa de Ifrah, um sextilhão de grãos de areia (10^{21}) corresponderia a cem trilhões (10^{14}) de litros de areia!

Tudo isto reflete o fato de que, assim como as pessoas não são capazes de visualizar os crescimentos exponenciais, também não são capazes de conceber realmente a dimensão de quantidades superiores, digamos, a mil: *"Eu sempre suspeitei que relativamente poucas pessoas realmente sabem a diferença entre um milhão e um bilhão"*, comentou Douglas Hofstadter (1985, p.116), ao discorrer sobre o que chama de "number numbness" - e a decorrente indiferença do público diante de números alucinantes como dívidas de trilhões de dólares ou arsenais nucleares da ordem de gigatoneladas de TNT...

Na realidade, é difícil encontrar no universo qualquer coisa que não possa ser medida ou contada dentro do limite de 10^{42} ("treze-lhões"): este número corresponde à razão entre o diâmetro do universo conhecido e o do núcleo de um átomo, ou entre a idade do universo e o tempo gasto pela luz para atravessar um núcleo atômico, ou ainda ao número de núcleons (prótons e nêutrons) contido no universo (Ifrah,

As respostas não-cardinais observadas envolvem, além do uso de termos genéricos e/ou alegações de "incomensurabilidade", respostas de "pseudo-contagem" - recitação dos números naturais sem pareamento com os objetos; este tipo de resposta corresponde, a grosso modo, aos sujeitos que não emitiram respostas cardinais adequadas anteriormente (CAR-, v. Cap.3) - dos quais, portanto, não teríamos porque esperar respostas cardinais aqui, diante de perguntas na (mesma) forma: "quantos...?"; o interessante é que este padrão foi observado não apenas para os objetos presentes e "contáveis" (50/200 palitos) como também para os presentes mas pouco ou não-contáveis (arroz/ areia), distantes (folhas) ou mesmo ausentes (estrelas), o que nos sugere que a "contagem" pode ser uma resposta verbal "estereotipada" aprendida para a pergunta "quantos...?", numa fase anterior a qualquer compreensão efetiva da resposta cardinal, conforme foi proposto por vários autores, como Shaeffer et al. (1974), Sophian (1988a, 1988b) e Wynn (1990) (v. Cap.3, Discussão).

6

INFINITUDE

"Cada porção de matéria pode ser concebida como um jardim cheio de plantas e como um lago cheio de peixes. Mas cada ramo de planta, cada membro de animal, cada gota de seus humores é ainda um jardim ou um lago" (Leibniz, *A Monadologia*)

Três variáveis foram delimitadas em relação ao domínio do conceito de infinitude pelos sujeitos: uma diz respeito ao conhecimento e o uso do termo "infinito"; outra ao reconhecimento do caráter infinito da série dos números naturais; a terceira variável se refere ao uso espontâneo, pelas crianças, da palavra "infinito", antes que esta tivesse sido mencionada pelo experimentador.

6.1 - O uso espontâneo do termo "Infinito"

Conforme anteriormente descrito, o termo "infinito" só era mencionado pelo experimentador na parte final da entrevista; em vários tópicos antecedendo este momento, porém, tornava-se particularmente plausível a menção desta palavra pelos sujeitos: quando das perguntas relativas ao "maior de todos os números", quando da estimação de quantidades "incontáveis" e, acima de tudo, nos testes especificamente voltados para o uso do conceito de infinitude (cujos resultados serão discutidos adiante). A variável **Uso Espontâneo do Termo 'Infinito'** (USO), entretanto, se restringe à palavra, em si, não levando em conta qualquer aspecto qualitativo na aplicação do termo, por um lado, e por outro, desconsiderando expressões do tipo "não tem fim", "nunca acaba", etc. Trata-se de uma variável dicotômica, onde USO=1 (ou USO+) corresponde à ocorrência deste uso espontâneo e USO=0 (ou USO-) à não-ocorrência.

6.1.1 - Resultados:

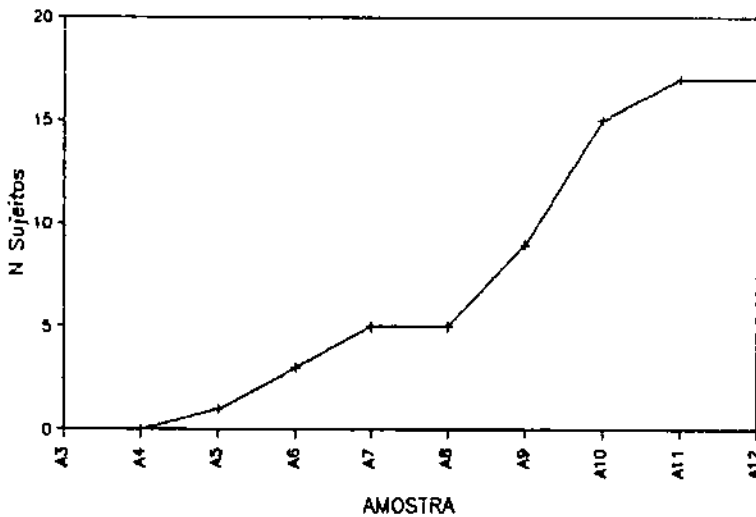
A ocorrência das duas categorias de resposta possíveis está registrada na Tabela 6.1 e na Figura 6.1:

TABELA 6.1

Uso espontâneo do termo "Infinito" (USO)
Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

USO	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	20	20	19	17	15	15	11	5	3	3
1	0	0	1	3	5	5	9	15	17	17

FIGURA 6.1
Uso Espontâneo do Termo "Infinito" (USO=1 ou USO+)



6.1.2 - Comparação entre as amostras

Como se pode verificar na Figura 6.1, USO=1 ocorre de forma gradual e progressiva a partir dos cinco anos, com um predomínio significativo de USO+ (P. Binomial, bilateral, $P < .05$) a partir dos dez anos de idade (amostras A10 em diante; para A11 e A12, $p = .002$). Mas na comparação entre amostras contíguas, nem mesmo a diferença entre A9 e A10 mostrou-se significativa (P. Fisher). A contingência entre as amostras e as categorias em USO está indicada na Tabela 6.2:

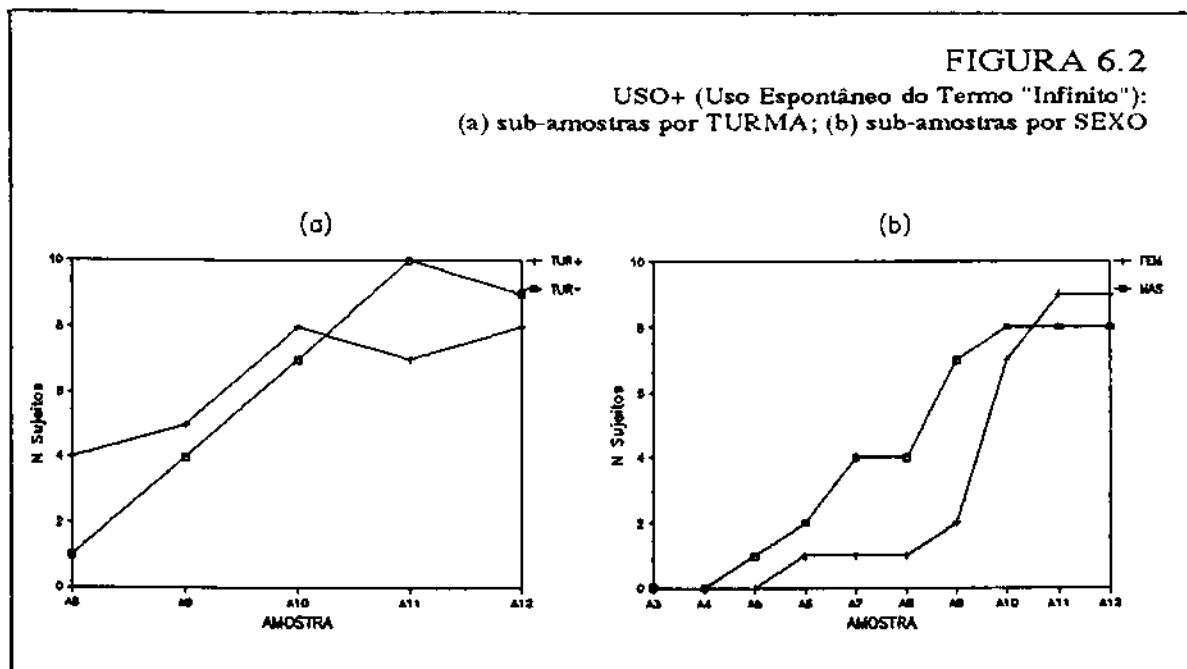
TABELA 6.2

USO x AMO (Resíduo Padrão: níveis de significância)

USO	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	.05	.05	.05	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	-	.01	.001	.001

6.1.3 - Comparação entre sub-amostras por sexo e por turma

Para as sub-amostras por turma (A8 a A12), não foram observadas diferenças significativas entre os alunos das Séries mais e menos adiantadas (TUR+ e TUR-; Figura 6.2a). Já ao comparar as sub-amostras por sexo, observamos uma tendência maior ao uso do termo "Infinito" entre os meninos, na faixa dos sete aos nove anos (Figura 6.2b); embora esta diferença pareça particularmente grande em A9 (80% dos meninos contra 30% das meninas), não chega a ser estatisticamente significativa para esta amostra isoladamente (P. Fisher, bilateral, $p = .07$), embora os valores para o conjunto A7-A8-A9 ($N = 60$), o sejam ($\chi^2 = 7.70$, 1 g.l., $p < .01$).



6.2 - A infinitude dos números naturais

Preocupamo-nos, aqui, com a noção, por parte das crianças, de que a série dos números naturais não tem fim; ao contrário dos critérios utilizados para USO (v. acima), não era decisivo o uso da palavra "Infinito", a qual, aliás, não foi aceita acriticamente na tabulação dos resultados: consideramos um sujeito "proficiente" quanto à variável **Infinitude do Número (NIN)** quando A) afirmava, em resposta à pergunta "qual o maior dos números", que estes "não tem fim", "não acabam" (ou resposta análoga) e/ou B) quando afirmavam que o maior dos números "é infinito" - desde que a definição de "Infinito" dada mais adiante na entrevista fosse considerada aceitável, (INF+, v. adiante; isso evitou a inclusão de alguns casos em que os sujeitos, aparentemente, supunham que "infinito" fosse um nome de número, como p.ex., "bilhão"); C) quando, apesar de não responder das maneiras mencionadas à pergunta sobre o "maior dos números", respondeu adequadamente à pergunta "o que quer dizer 'infinito'" e, a seguir, indicou "os números" como um dos exemplos de "coisas

infinitas' (v. adiante) - aceitamos este ultimo tipo de caso porque a pergunta sobre o "maior dos números" podia dar margem a uma certa confusão (como saber o NOME para o "maior número" se eles não tem fim?). Os casos ambíguos foram tabulados como NIN=1, numa escala de 0 (sem qualquer noção da infinitude da série dos números naturais) a 2 (noção presente; quando nos referirmos a NIN+, entenda-se NIN=2).

6.2.1 - Resultados

A Tabela 6.3 mostra distribuição das respostas nas amostras, juntamente com a Figura 6.3:

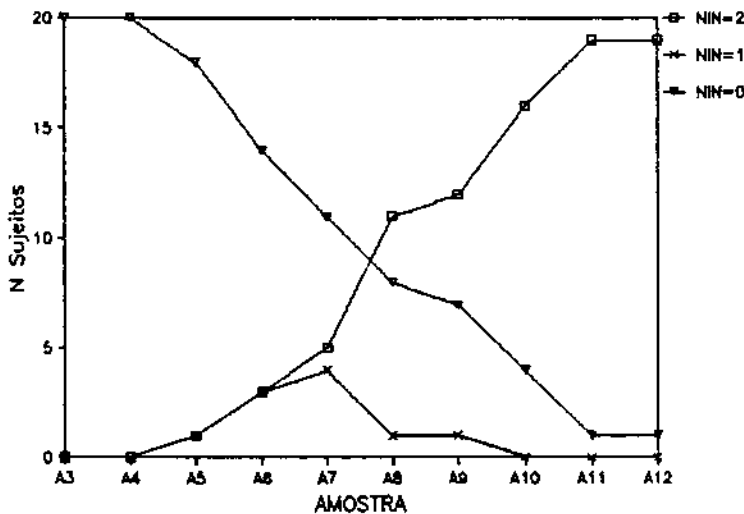
TABELA 6.3

Infinitude dos números naturais (NIN): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

NIN	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	20	20	18	14	11	8	7	4	1	1
1	0	0	1	3	4	1	1	0	0	0
2	0	0	1	3	5	11	12	16	19	19

FIGURA 6.3

Infinitude do Número (NIN)



6.2.2 - Comparação entre as amostras

Como mostra a Figura 6.3, a noção da infinitude do número aumenta gradualmente, na população estudada, a partir dos cinco anos, sendo que NIN+ passa a ser significativamente majoritário apenas a partir dos dez anos de idade (A10: P. Binomial, $p = .012$). Um problema do tipo acima mencionado (não mencionar a infinitude no item sobre o "maior dos números"), aliado a nossa formulação do pedido de exemplos de infinitude (talvez o sujeito não pensasse em "números" como "coisas") seria uma possível explicação para os valores

residuais de $NIN=0$ nas amostras mais velhas.

As diferenças ($NIN+ \times NIN-$) entre amostras contíguas não se mostraram significativas - mesmo para $A7 \times A8$, onde se invertem as curvas para $NIN-$ e $NIN+$ (Tabela 6.4; χ^2 , unilateral, 1 g.l., $.1 < p < .05$).

TABELA 6.4

$NIN+/-: A7 \times A8$

	A7	A8
$NIN-$	15	9
$NIN+$	5	11

A contingência entre amostras etárias e categorias da variável NIN pode ser vista na Tabela 6.5:

TABELA 6.5

$NIN \times AMO$ (Resíduo Padrão: níveis de significância)

AMO	NIN		
	0	1	2
A3	.01	-	-
A4	.01	-	-
A5	.01	-	-
A6	-	.05	-
A7	-	.01	-
A8	-	-	-
A9	-	-	-
A10	-	-	.01
A11	-	-	.001
A12	-	-	.001

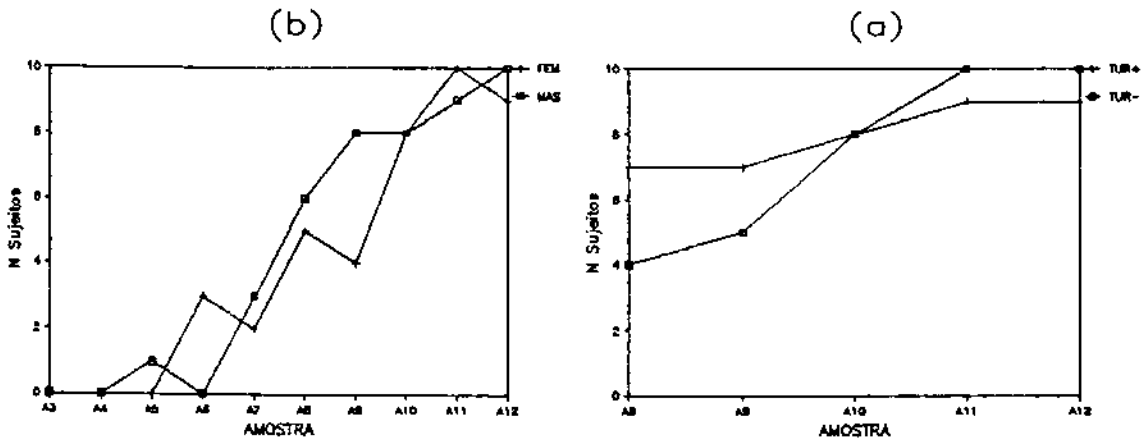
Como se pode ver, $NIN=0$ está associado às amostras de 3 a 5 anos, $NIN=1$ às amostras de 6 e 7 anos e $NIN=2$, às amostras de 10 anos de idade em diante; em função da grande variabilidade interna, as amostras $A8$ e $A9$ não registraram associações significativas quer com $NIN=1$, quer com $NIN=2$.

6.2.3 - Comparações entre sub-amostras por sexo e por turma

Não foram observadas diferenças significativas ($p < .05$ na Prova de Fisher, $NIN+ \times NIN-$) para nenhuma das amostras, seja entre as sub-amostras por turma (Figura 6.4a), seja entre as sub-amostras por sexo (embora, em $A9$, apenas 4 meninas tenham sido consideradas $NIN+$, contra 8 dos meninos (Figura 6.4b), o que é de algum interesse, à luz de outros dados similares, já mencionados, com relação a esta amostra).

FIGURA 6.4

Infinitude do Número (NIN)
 (a) sub-amostras por TURMA; (b) sub-amostras por SEXO



6.3 - Definições do termo "Infinito"

As respostas fornecidas à pergunta "o que é 'Infinito'?", dividem os sujeitos em três grupos básicos:

A. Os que não respondem ou que produziram apenas respostas incompreensíveis ou, se compreensíveis, revelando um total desconhecimento do termo; o exemplo típico deste último caso está nos 4 sujeitos que responderam (explícita ou implicitamente) confundindo "infinito" com "alfinete" (de fralda):

"Sei!... um alfinete"(4/18)

"É essa coisa na fralda..."(4/06)

B. Respostas que descreviam "Infinito" como uma "grandeza incontável" porém finita, um "número muito grande" ou simplesmente, uma "coisa grande" (frequentemente com um uso francamente hiperbólico):

"É uma coisa grande... minha casa é um infinito"(5/08)

"É um negócio... que tem bastantão"(5/18)

"É mil"(6/17)

C. Respostas aceitáveis - ao menos por seu conteúdo aparente, envolvendo o emprego de expressões como "não tem fim", "não acaba nunca" ou similares (alguns casos incertos foram considerados como pertencentes ao grupo anterior).

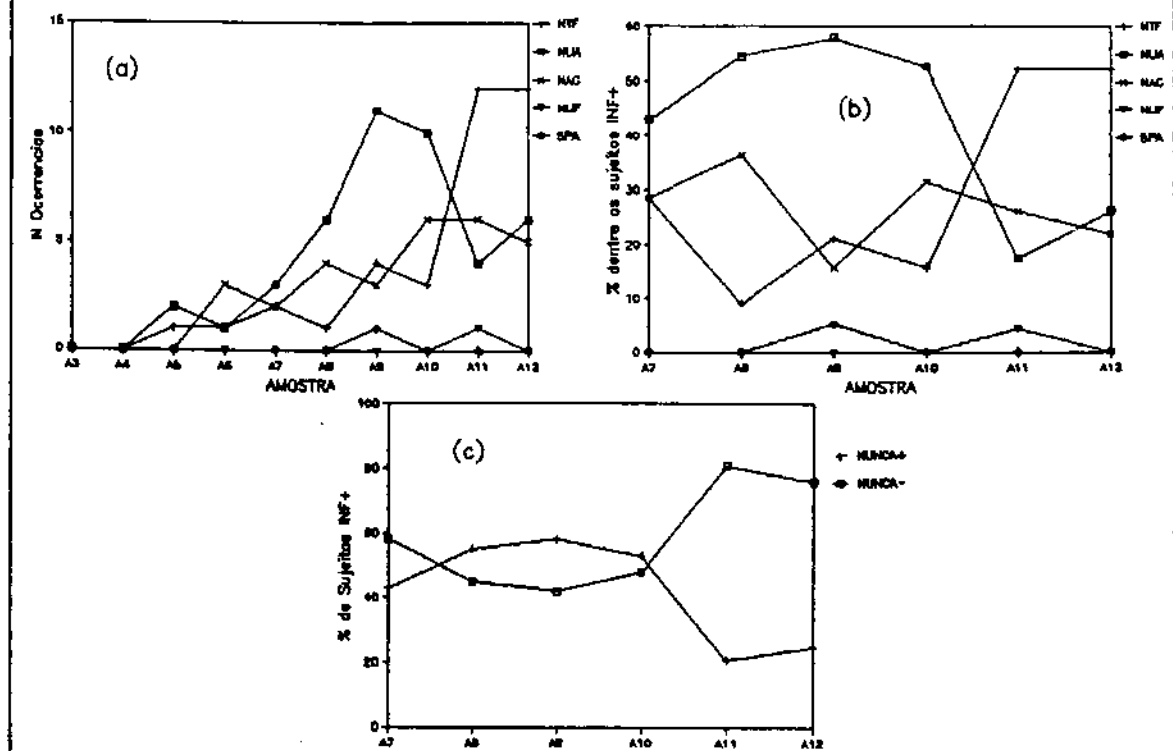
As expressões empregadas pelo grupo C para definir "Infinito" não variavam muito na forma, podendo ser agrupadas em três classes fundamentais: 1) "não tem fim", "sem fim" (NTF), 2) "não acaba (mais)" (NAC) e 3) "nunca acaba (mais)", "não acaba nunca (mais)" (NUA); apenas duas respostas não se encaixaram bem nesta classificação: "nunca tem fim" (NUF) e "sem parar" (SPA), com uma única ocorrência cada. Enquanto (1) é uma forma mais restrita à etimologia da palavra, (3) sugere um sentido "temporal" do conceito; (2) também o faz, diríamos - em função do termo acabar - mas de

forma mais menos acentuada que (3), onde é utilizado também o termo **nunca**. A frequência absoluta de uso de cada uma destas expressões esta indicada na Figura 6.5a (110 definições para 103 sujeitos, por causa de 7 respostas duplas); note-se o predomínio de NUA por volta dos nove a dez anos e o de NTF a partir dos onze anos de idade (NUA: 57.9% em A9 e 52.6 em A10; NTF: 52.2% em A11 e A12); a Figura 6.5b mostra os mesmos dados (a partir de A7) sob a forma de frequências relativas. Por fim, a Figura 6.5c indica as frequências relativas para as categorias agrupadas NUNCA+ (NUA + NUF) e NUNCA- (NTF + NAC + SPA), ou seja, as definições que continham ou não a expressão temporal "nunca": observe-se que (ignoradas as oscilações nas amostras pré-escolares, causadas pelos pouquíssimos casos) os dois grupos ocorrem em frequências equilibradas até os 10 anos e, a partir dos 11, NUNCA- (basicamente NTF e NAC) passa a ser responsável por cerca de 75% dos casos.

FIGURA 6.5

Definições de "INFINITO" entre os sujeitos INF+ (N=103):
 NTF="não tem fim"; NUA="nunca acaba"; NAC="não acaba"; NUF="nunca tem fim";
 SPA="sem parar".

(a) frequência absoluta das categorias; (b) f. relativa; (c) f. relativa do uso de expressões contendo ou não o termo "nunca" (NUNCA+ = NUA+NUF; NUNCA- = NTF+NAC+SPA)



6.4 - Exemplos de infinitude

O último grupo acima descrito (C), embora fornecesse, em geral, definições extremamente homogêneas e pouco variadas, mostrou-se bastante heterogêneo no que se refere aos exemplos de "coisas infinitas" que lhes era solicitado a seguir; procuramos agrupar estes "exemplos" em uma série de classes em função de sua "adequação"; este recorte é inevitavelmente questionável em seus detalhes, mas possibilita, no conjunto, uma classificação mais fina do comportamento dos sujeitos

quanto ao seu uso do termo "infinito" (ainda que a inserção de certos "exemplos" em uma outra classe possa ser discutida). Com poucas exceções, não interrogamos as crianças quanto aos "porquês" de cada exemplo, em parte porque isto nos pareceu inibir as respostas, em parte porque, quando o fazíamos, recebíamos, via-de-regra, respostas tautológicas ("porque sim", "porque é infinito", etc).

Classificamos os "exemplos" fornecidos pelos sujeitos em três tipos; no Tipo I, incluímos os grupos considerados mais "adequados": Número, Tempo, Espaço e Outros adequados; no Tipo III, os exemplos considerados como "inadequados": Quantidade Finita, Durabilidade e Outros Inadequados; o Tipo II reúne os exemplos julgados como "intermediários": Cosmos/ Ambiente/ Recursos e Outros Intermediários). Deixemos claro que os exemplos do Tipo III foram fornecidos sem qualquer indicação explícita de um uso conscientemente hiperbólico do termo "Infinito" (o uso deliberadamente hiperbólico do termo foi incluído no Tipo II).

A Tabela 6.6 indica o número de sujeitos com exemplos fornecidos em cada grupo delimitado para os Tipos I, II e III.

TABELA 6.6

Exemplos de infinitude

CATEGORIA	EXEMPLOS	NÚMERO DE SUJEITOS										
		A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	TE
Tipo I	NÚMERO	0	0	1	4	8	9	9	12	16	16	
	TEMPO	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	
	ESPACO	0	0	0	4	5	9	8	12	13	12	
	OUTROS ADEQ.	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
	CÍRCULO (tb. mundo redondo)	0	0	0	0	0	0	1	1	0	3	
Tipo II	COSMOS/ AMBIENTE/ RECURSOS	0	0	0	2	1	3	1	3	3	4	
	ESTRELAS/PLANETAS/GALAXIA	0	0	0	1	1	1	2	2	1	1	
	TERRA	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	
	SOL/LUA	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	
	NATUREZA	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	CHÃO	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	
	ATMOSFERA/NUVENS/VENTO/AR	0	0	0	0	0	0	1	2	1	3	
	ÁGUA/MAR/RIO	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	
	LUZ (eletricidade)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	CORES (no tempo)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	BICHINHOS (nao os em extincao)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	PESSOAS (nascem mais/ familia/ vida)	0	0	0	0	0	0	2	2	3	0	
	OUTROS INTER.	TAUTOLOGIAS (coisa s/ fim, imortais)	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0
EXEMPLIFICA USO ENFATIZANTE	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
ABSTR. (vontade/capacid/poss.vida esp.)	0	0	0	0	0	1	0	0	3	0		
CITACOES ENTREV. (CIC/ DUR)	0	0	0	0	0	0	3	5	1	4		
Tipo III	QUANTIDADE	0	0	0	2	5	1	0	3	0	1	
	OBJETOS ARTIFICIAIS (quantidade)	0	0	1	0	3	1	0	1	0	1	
	CRÍAC. HUMANAS (letras/paiav/music/dinh)	0	0	0	1	1	1	1	3	4	2	
	OBJ.S. NATURAIS (arvore/feij/g. areia/pedra)	0	0	0	3	1	0	0	1	0	0	
	PESSOAS (NOMES): qtdde simult. existente	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	
	DURABILIDADE	DURABILIDADE (materiais/objetos)	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0
	OUTROS INADEQ.	PROFUND. DA TERRA/ AREIA MOVEDICA	0	0	0	0	0	0	0	2	1	
	DESERTO (extensao)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
CASA (grande/ demorada)	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0		
TOTAL		0	0	3	20	34	32	43	64	58	57	
N. SUJEITOS (INF > 0)		1	0	6	11	12	13	17	19	20	20	
TOTAL ADEQUADOS (N Sujeitos)		-	-	1	6	10	12	15	16	20	19	
TOTAL INTERMEDIARIOS (N Sujeitos)		-	-	0	3	3	5	9	10	10	10	
TOTAL INADEQUADOS (N Sujeitos)		-	-	2	4	6	3	3	6	5	3	

6.4.1 - Exemplos do Tipo I

Consideramos "adequados" os exemplos contidos nas categorias Número, Tempo, Espaço e Outros Adequados da Tabela 6.6; por "adequados", entendemos aqui exemplos que não causariam estranheza se emitidos por um adulto medianamente educado (e não segundo os critérios, p.ex., de um astrofísico - que questionaria a infinitude do universo).

6.4.1.1 - Número

A rigor, esta seria a única categoria perfeitamente adequada; além das respostas típicas - "número(s)", "numerais" (9/08), "números naturais" (11/06), foi aceita a variante "contagem" (10/19) e a resposta (primeiro caso, na sequência cronológica das idades):

"contando o mundo inteiro, todo dia..." (5/16).

A idéia de infinitude no número enquanto operação de duração infinita fica clara em vários exemplos como:

"Números: vão indo... indo... e não acaba!" (8/18);

"Infinito é número sem parar... sem parar..." (9/20);

"Números: a gente vai contando... contando... e nunca vai chegar no fim" (11/02).

Entre os sujeitos que caracterizaram "Infinito" como algo "grande" (grupo B), "infinito" é muitas vezes entendido como o "nome de um número enorme":

"Infinito é dinheiro; tem infinito e tem milhão" (5/17);

"I. é um monte de números... igual a um milhão" (6/14);

"Um número que ninguém consegue contar até ele" (7/08);

"I. é um número que é bem grande" (7/09);

"I. é... um trilhão e... muitos números" (7/20).

6.4.1.2 - Tempo

Embora nas definições e exemplos observados a idéia implícita de infinitude *no tempo* seja talvez a mais freqüente (em comparação, p.ex., com extensão), os exemplos especificamente relativos ao tempo foram poucos - e só ocorreram nas amostras mais velhas (onze anos em diante):

"Os dias... os meses... os anos..." (11/10);

"Dia: todo dia tem dia e noite, dia e noite..." (11/12);

"Anos... está incluído em número..." (11/13);

"As horas... os anos..." (12/16);

"O tempo..." (12/02).

6.4.1.3 - Espaço

Incluimos aqui os termos que se referiam, aparentemente, à "totalidade do cosmos": "mundo", "universo", "espaço" e "céu"; nestes casos, infinitude temporal e espacial foram difíceis de se distinguir (a não ser em função de alguns comentários específicos):

"O espaço... é sem começo nem fim" (8/20);

"Mundo... só morre as pessoas... o mundo não acaba" (9/16);

"O universo... porque não tem um limite" (11/19).

Observem-se, por outro lado, algumas respostas de crianças do grupo B:

"O mundo, porque é grande... tem muito espaço lá em cima onde Deus fica..." (6/19);

"O mundo... porque o espaço é grande"(8/11);

NOTA: "mundo" implica em uma certa ambiguidade: cosmos ou terra? Entretanto, como vários exemplos apontavam para a primeira alternativa (p.ex., *"não esse, que parece mas não é infinito: é universo... as estrelas"* (9/09)), mantivemos todos os casos nesta categoria, inclusive (9/03), que acrescentou *"...só acaba com a guerra"*.

6.4.1.4 - Outros exemplos considerados "adequados"

Fazem parte desta categoria: A) exemplos mencionando *"círculos"* (embora sejam provavelmente lembranças do teste CIC, só classificamos como "citações" os casos explícitos - v. adiante), incluindo-se aqui menções à circunferência da terra, como:

"uma linha em volta do mundo: não tem começo nem fim, é um círculo..."(12/7);

"dando a volta num círculo até acabar... nunca acaba"(12/17).

B) exemplos relativos à imortalidade da alma:

"a pessoa... porque reencarna"(9/09);

"a alma de uma pessoa"(10/02);

"a alma... a vida não, a ALMA de uma pessoa"(11/17).

6.4.2 - Exemplos do Tipo II

Este grupo reflete a extrema dificuldade que sentimos em classificar os exemplos quanto à sua adequação, e contém todos os casos que, se não podiam ser considerados entre os mais adequados, também não poderiam ser chamados de inadequados; entre os "intermediários", incluímos duas categorias: **Cosmos/ Ambiente/ Recursos e Outros Intermediários.**

6.4.2.1 - Cosmos/Ambiente/Recursos

Foram classificados aqui toda uma série de exemplos esparsos (com baixas frequências de ocorrência individuais), relativos a objetos ou recursos do ambiente; neste grupo, a infinitude se refere, de modo geral, à duração no tempo (incorreta, à rigor, mas indeterminada ou vastíssima) ou a uma suposta "inesgotabilidade" enquanto recurso, ou ainda à uma certa "ausência de limites" que justificaria um uso mais "frouxo" do conceito de infinitude.

Nesta categoria incluímos os seguintes grupos (alguns exemplos dignos de nota assinalados):

A) Estrelas, Planetas e Galáxia (quantidade e/ou duração):

"Estrelas... dizem que são infinitas... planetas - os que a gente não conhece - podem ser infinitos..."(12/16);

B) Terra (ou *"nosso planeta"*, duração e, em um caso, "ausência de limite"); às vezes, era mencionada a possibilidade de um fim:

"(terra:) ... um dia pode até acabar"(9/01);

"a terra, que não para de girar..."(10/07)

"(nosso planeta:) ... se a gente não destruir ele"(11/14);

C) Sol e Lua (duração);

D) Natureza (duração);

E) Chão ("ausência de limite");

F) Atmosfera ("ausência de limite")/ Nuvens/ Vento/ Ar (recurso "inesgotável", eterno fluir):

"o vento... porque tá sempre ventando"(12/18).

G) Água/ Rio (recurso "inesgotável", eterno fluir)/ Mar (neste caso, talvez também "ausência de limites");

"(rio:) ... porque a água nunca vai parar... só se um dia não chover mais... "(12/06);

"(água:) ... porque não acaba... vem com a chuva... "(12/8).

H) Luz (eletricidade: recurso "inesgotável");

"a luz, que a gente tá sempre precisando... "(10/07);

I) Cores (sua existência *no tempo!*);

"(cores:) Não tem começo nem fim "(8/20);

J) Pessoas (porque nascem mais)/ Família (gerações se sucedendo)/ Vida:

"(pessoas:) Todo dia tá nascendo um "(9/14);

"(vida:) Morre um, nasce outro "(9/16);

"(pessoas:) ... por que vai nascendo... de família em família... é muito grande... "(11/5).

K) Bichinhos ("*não os em extinção* "(11/14)); lembrado em função, presumivelmente, da reprodução, já que foi citado imediatamente após "Família" (v. acima).

6.4.2.2 - Outros exemplos considerados "intermediários"

Incluimos nesta categoria os exemplos:

A) abstrações como "vontades", "capacidades" e "possibilidades":

"você querer ir pro céu "(11/3);

"a capacidade do ser humano: ele tá sempre aprendendo "(11/11);

"a capacidade de mutação entre os animais "(11/11).

"a vida no espaço"- possibilidade de existência (8/20);

B) tautologias:

"um filme sem fim "(visto num comercial de TV (!?)) (6/11);

"imortais "(8/20);

"uma coisa sem fim "(9/12)

"um lugar que não tem fim "(9/19);

C) um "exemplo" de uso coloquial "ênfaticamente", ao se retrucar a um xingamento: alguém diz: "- você é (X)", ao que o sujeito responderia: "- e você é *infinitamente* (X)", este poderia ser considerado um exemplo "inadequado", se o sujeito (9/03) não o tivesse exposto com consciência do caráter coloquial do uso do termo;

D) citações dos testes sobre infinitude (DUR e CIC; v. adiante, 6.6), como por exemplo:

"aquela estrada do caminhãozinho... não tem começo nem fim "(12/07);

"um poço como o que você falou... alguns, não todos (só os sem fundo)"(10/02).

6.4.3 - Exemplos do Tipo III

Consideramos como "inadequados" os exemplos das categorias denominadas **Quantidade, Durabilidade e Outros Inadequados** (Tabela 6.6):

6.4.3.1 - Quantidade

A categoria reúne as referências a grandes quantidades (às vezes nem tão grandes) dos seguintes tipos de entidades:

A) Objetos artificiais (a esmagadora maioria dos casos), incluindo: *casas, prédios, carros, ônibus, bolas, livros, estantes, bonecos, tratores, rodas e estradas* este gênero de exemplos, naturalmente, foi típico de sujeitos do grupo B; além dos objetos já mencionados, um sujeito referiu-se a:

"um monte de bolinhas de gude... dois montes de jornais, de papéis... 10 caixas de ovos... "(7/19).

"Livros" foram os objetos mais citados (seguidos de "carros"), sem

dúvida pelo fato de muitas das entrevistas com alunos do 1º Grau terem sido realizadas na biblioteca da escola (e os escolares mais jovens olhavam ao redor em busca de exemplos!); a formulação mais curiosa foi:

"os livros daqui... porque tem um monte"(7/11).

B) Objetos naturais: I) *"pedras"* e *"grãos de areia"*; II) *"um monte de grãos de feijão... fica contando, contando... nunca acaba"*(10/01); III) *"árvores"* (e *"folhas de árvore"*), incluídos aqui porque, enquanto que a menção à "bichinhos" (v. acima) envolvia uma sugestão de reprodutividade ilimitada, a menção a árvores (possivelmente induzida pela Estimação do número de folhas) veio acompanhando outros exemplos de numerosidade (objetos) e/ou continha referências explícitas à quantidade, como por exemplo:

"árvores... porque tem em vários lugares"(10/15);

C) Criações humanas: *"letras"*, *"palavras"*, *"músicas"* e *"dinheiro"*; sobre este último, um caso merece ser citado:

"dinheiro... porque também é um número"(10/7).

D) Pessoas (quantidade presente simultaneamente no mundo) ou "nomes" (alguns exemplos):

"pessoas trabalhando"(6/14);

"nome... porque tem muita pessoa no mundo"(6/15).

6.4.3.2 - Durabilidade

Esta categoria se refere a materiais ou objetos:

"Papel-alumínio... porque não queima no fogo"(9/15);

"Essa mesa... se cuidar dela, deixar ela aqui para sempre e não acontecer nada...; tudo que é feito de madeira - se cuidar... cimento... vidro... uma folha de papel..."(9/18);

"um relógio... se for de bateria, é só trocar"(10/3).

6.4.3.3 - Outros exemplos considerados "inadequados"

Estes casos são, de certo modo, usos "hiperbólicos" do termo (alguns possivelmente ouvidos de um adulto) sem indicadores explícitos de uma consciência de que o termo estaria sendo utilizado apenas como "figura de linguagem":

A) Tamanho/ extensão:

"Minha casa é um infinito!"(5/08);

"O deserto (é infinito)"(10/15);

B) Demora (na construção):

"uma casa... porque de vez em quando não acaba"(7/03);

C) Profundidade:

"(terra:) vai furando, furando... não chega a lugar nenhum"(11/19);

"a profundidade da terra"(12/15);

"areia movediça"(11/17).

6.4.4 - Reconsideração de exemplos (não computados)

Segundo um dos escolares mais novos (7/11) *"muita coisa (é infinita)"*... Já na opinião de alguns dos sujeitos mais velhos, *"não tem tanta coisa assim..."*(12/03), *"poucas coisas são infinitas"*(11/04), - e nossos pedidos de mais exemplos colocavam as crianças em situações de dúvida, o que levou alguns exemplos a serem mencionados - e em seguida retirados (não tendo sido, por isso, computados); alguns casos particularmente interessantes nesse sentido foram:

"(pessoas:)... tem bastante... parece mas não é infinito"(9/03);

"(céu:) parece que é infinito, porque não tem fim... não é que não tem

fim, mas eu não vejo o fim..."(11/06);

"(estrelas:)... não... as estrelas são finitas..."(11/16);

"se eu ficar teclando sempre a mesma coisa numa máquina... não, vai ser finito, algum dia eu vou ter que parar..."(12/05);

"água... não é que seja infinito... mas tem demais... também o ar..."
(12/13);

"as células do nosso corpo... não: quando morre, acaba"(12/14).

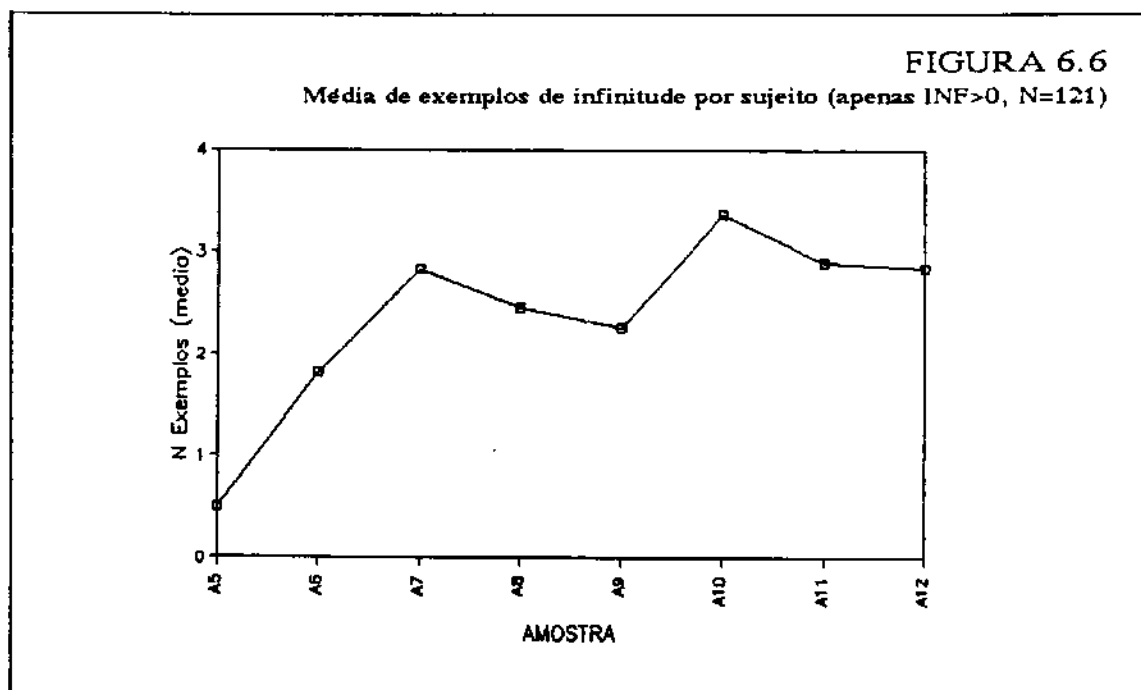
Nenhum dos casos de exemplos reconsiderados e retirados foi observado antes da amostra A9 (nove anos completos), e quase todos ocorreram entre sujeitos de onze ou mais anos de idade.

6.5 - A variável Infinito (INF)

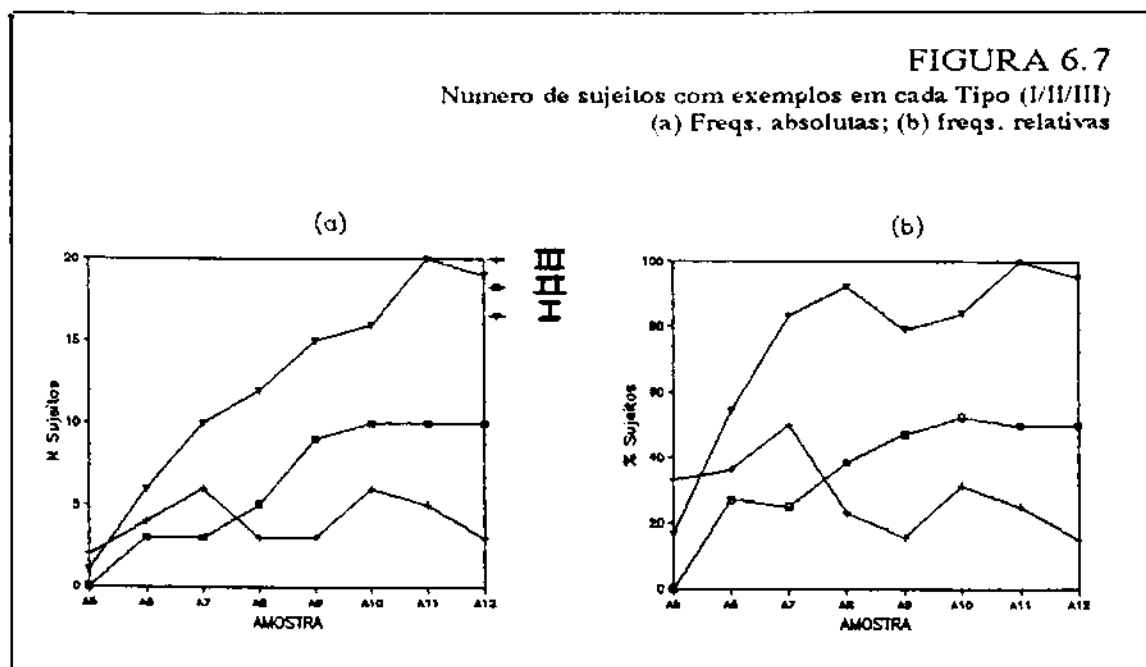
Nossa principal variável relativa ao domínio da noção de infinitude pelas crianças - **Infinito (INF)** - se refere às definições apresentadas ao responder à pergunta "o que é infinito?", e aos exemplos de "coisas que sejam infinitas" oferecidos subsequentemente. Levamos ainda em conta a classificação dos sujeitos quanto à variável Infinitude do Número (v. adiante; note-se, que INF e NIN não são inteiramente independentes entre si - bem como NIN e USO, constituindo, antes, diferentes recortes dos resultados).

Como mostramos anteriormente, as respostas à pergunta sobre o significado do termo "Infinito" dividiram os sujeitos em três grupos: os que desconheciam o termo (A), os que o associavam a uma "coisa grande" ou um "nome de número grande" (B) e os que emitiram respostas ao menos aparentemente corretas, usando expressões do gênero "que não tem fim" ou "que nunca acaba" (C).

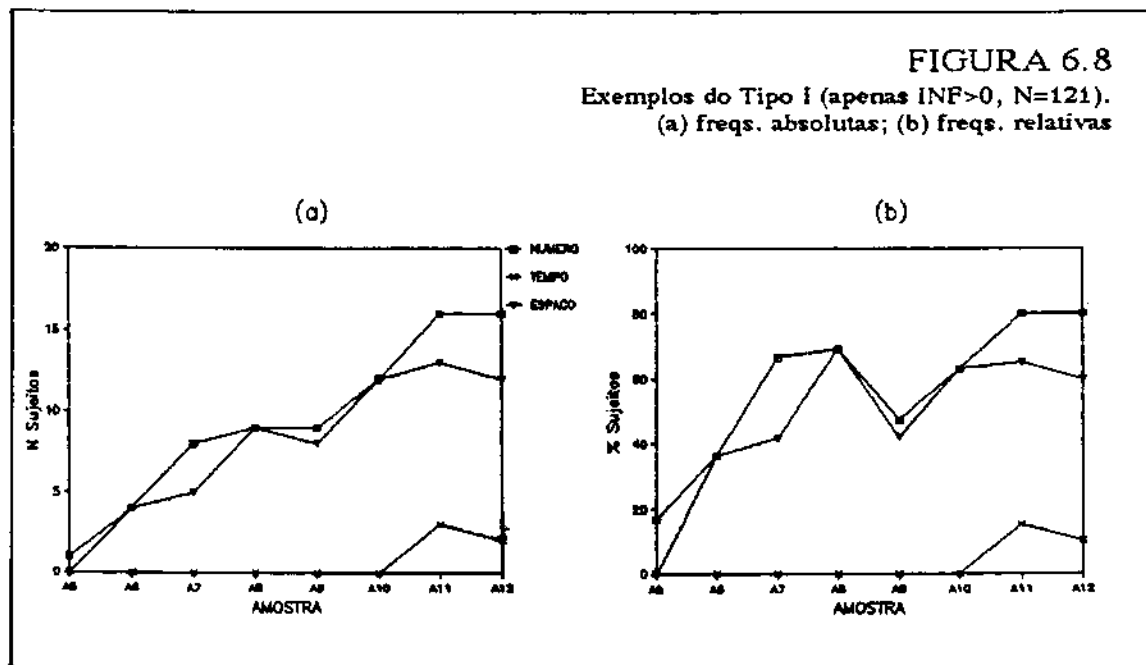
Apenas um sujeito, antes da amostra A5, não foi incluído no grupo A, tendo sido considerado como pertencente ao grupo B (3/20, v. adiante); como este sujeito não forneceu "exemplos", os gráficos apresentados a seguir só incluem as amostras A5 em diante. A Figura 6.6 mostra a média de exemplos por sujeito em cada uma das amostras:



A Figura 6.7a mostra o número de sujeitos com exemplos nas três categorias e a Figura 6.7b, a frequência relativa, levando-se em conta apenas os sujeitos dos grupos B e C (ou seja, excluídos os que desconheciam inteiramente o termo "infinito"):



Finalmente, a Figura 6.8a indica a frequência absoluta, em cada amostra, de sujeitos que forneceram exemplos pertencentes às três categorias principais dos exemplos do Tipo I (Número, Tempo, Espaço), enquanto a Figura 6.8b apresenta os mesmos dados, mas sob a forma de frequências relativas e levando em conta apenas os sujeitos dos grupos B e C:



Os exemplos do Tipo I, ainda que possam ser, a rigor, incorretos ou discutíveis (com a exceção de Número), correspondem aqueles que poderiam ser emitidos por um "adulto culto", se instado a fornecer tais exemplos; os do Tipo II tornam-se quase aceitáveis ao pensamento "adulto", se admitirmos uma definição um pouco menos rigorosa - ou mais coloquial - do termo "Infinito" (e levarmos em conta que os sujeitos eram repetidamente solicitados a fornecer mais e mais exemplos, até que se recusassem a continuar a enumeração); já os casos do Tipo III aproximam os sujeitos que os emitem dos sujeitos acima classificados no grupo B, embora a definição fornecida na primeira pergunta deste tópico ("o que quer dizer 'Infinito'?") tenha sido mais sofisticada.

Outro fator complicador é a coexistência de exemplos dos Tipos I, II e III nas respostas de um mesmo sujeito, não havendo aqui qualquer possibilidade de recortes nítidos entre os conjuntos de respostas; no que se refere a classificação dos sujeitos na variável INF optamos, assim, por utilizar os "exemplos" no desmembramento do grupo C (v. acima) segundo critérios razoavelmente "genéricos": 1) a presença ou ausência de exemplos do Tipo III e 2) o desempenho do sujeitos em NIN; assim, dentre os membros do terceiro grupo, constituíram uma categoria distinta aqueles que **não forneceram exemplos do Tipo III e ao mesmo tempo foram considerados NIN+**. Em outras palavras, uma quarta e mais elevada categoria de desempenho foi definida, para a variável INF, composta pelos sujeitos que definiram o termo "infinito" de maneira aceitável (C), não forneceram exemplos do Tipo III e incluíram o NÚMERO entre seus exemplos (ou haviam afirmado a infinitude dos números anteriormente). A inclusão de NIN em nosso critério justifica-se por, além de decidir certos casos ambíguos, nos parecer fundamental para uma formulação mais "madura" do conceito de infinitude, a consciência da infinitude do número.

As categorias assim delimitadas para INF estão sintetizadas na Tabela 6.7:

TABELA 6.7

Categorias na variável Infinito

INF	DESCRIÇÃO
0	Sem resposta / Resposta incompreensível / Resposta compreensível mas totalmente incorreta
1	"Infinito" = muito grande, incontável.
2	"Infinito" = "não tem fim" (ou "não acaba nunca", etc); a relação de exemplos fornecidos inclui casos do Tipo III E/OU o sujeito é NIN- (não exibiu uma noção clara da infinitude dos números naturais).
3	"Infinito" = "não tem fim" (ou similar); o sujeito não fornece quaisquer exemplos do Tipo III e foi considerado NIN+ (tem noção da infinitude da série dos números naturais).

6.5.1 - Descrição dos resultados

A frequência de cada categoria de INF nas diversas amostras está indicada na Tabela 6.8 e na Figura 6.9a:

TABELA 6.8

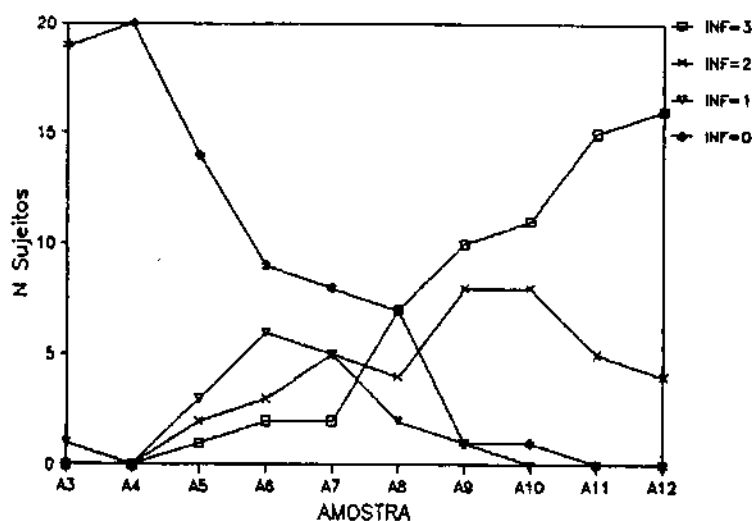
Infinito (INF): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

INF	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	19	20	14	9	8	7	1	1	0	0
1	1	0	3	6	5	2	1	0	0	0
2	0	0	2	3	5	4	8	8	5	4
3	0	0	1	2	2	7	10	11	15	16

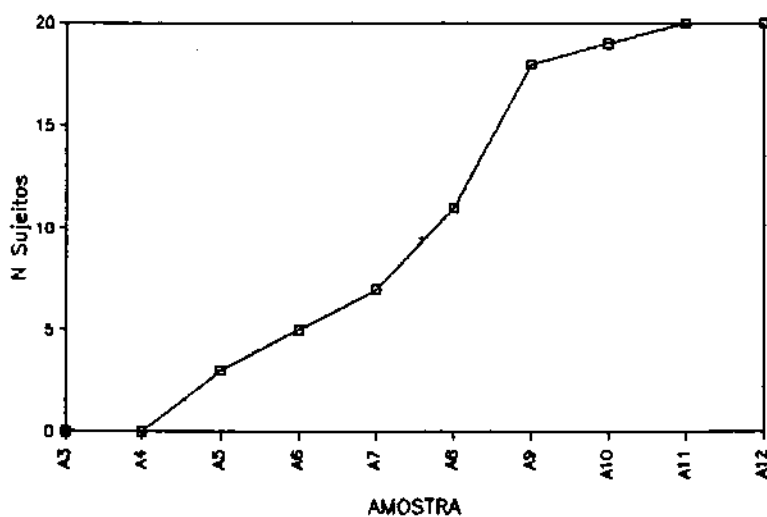
Nas análises mais gerais, entretanto, não utilizamos esta distinção baseada nos exemplos (e em NIN); assim sendo, quando nos referirmos à forma dicotômica desta variável, entenda-se por INF+, INF=2-3 (INF-: INF=0-1). As frequências de INF+ em cada amostra estão indicadas na Figura 6.9b:

FIGURA 6.9

Infinito (INF): (a) total; (b) INF+ (INF=2-3)



(a)



(b)

6.5.2 - Comparação entre as amostras

Observamos que o predomínio de INF+ é estatisticamente significativo a partir dos nove anos (P. Binomial, bilateral, $p < .001$), enquanto que $INF=3$ (um critério mais restrito), o é apenas a partir dos onze anos de idade (P. Binomial, bilateral, $p < .05$)

Comparando a distribuição de INF(0-3) entre amostras contíguas, observamos que não ocorrem saltos significativos de uma para outra, exceto para A8 X A9 (Tabela 6.9):

TABELA 6.9

INF: Probabilidades associadas a H_0 nas comparações entre Amostras contíguas (Mann-Whitney, unilat.)

AMOSTRAS	U	p
A3 x A4	190.0	(P > .05)
A4 X A5	140.0	(p < .1)
A5 X A6	151.0	(p < .1)
A6 X A7	181.0	(P > .05)
A7 x A8	158.0	(P > .05)
A8 X A9	139.0	< .05
A9 X A10	178.0	(P > .05)
A10 X A11	139.5	(P > .1)
A11 X A12	190.0	(P > .05)

A contingência entre amostras e categorias na variável INF é mostrada na Tabela 6.10:

TABELA 6.10

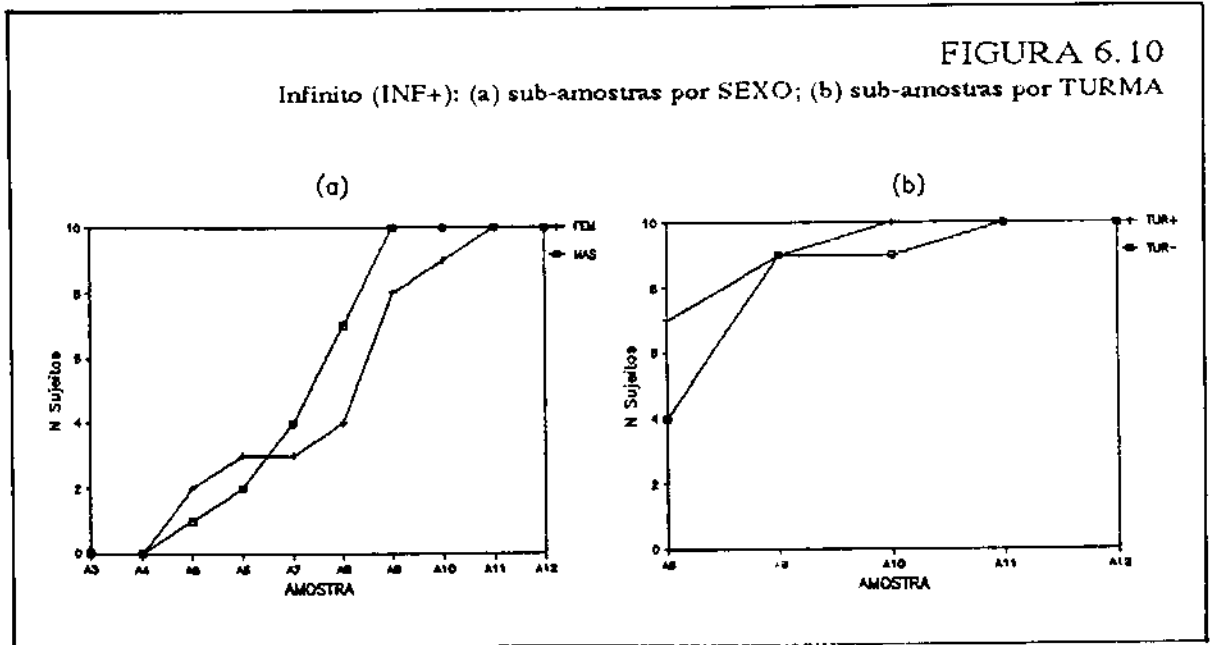
INF x AMO (Resíduo Padrão: níveis de significância)

AMO	INF			
	0	1	2	3
A3	.0001	-	-	-
A4	.0001	-	-	-
A5	.05	-	-	-
A6	-	.001	-	-
A7	-	.01	-	-
A8	-	-	-	-
A9	-	-	.05	-
A10	-	-	.05	.05
A11	-	-	-	.001
A12	-	-	-	.001

De modo semelhante ao observado com relação à variável NIN (v. Tabela 6.5), a amostra A8 não se mostra associada a qualquer das categorias em particular, em função da grande variabilidade interna, sugerindo uma idade de "transição".

6.5.3 - Comparação entre as sub-amostras por sexo e turma

Comparando INF nas sub-amostras por sexo (A3 a A12) e por turma escolar (A8 a A12) através da Prova U de Mann-Whitney, não foram observadas quaisquer diferenças significativas ($p < .05$), o mesmo se dando em comparações levando em conta apenas INF+ X INF- (P. de Fisher) - Figuras 6.10a-b.



6.6 - Testes acerca da noção de infinitude

Conforme anteriormente descrito, imediatamente antes da parte final da entrevista - onde a noção de infinitude era abordada de forma mais explícita, realizamos alguns testes cujas respostas "corretas" implicavam no reconhecimento da natureza infinita de determinados processos; nem todas as amostras foram submetidas a todos os testes, já que estes foram sendo introduzidos gradualmente na entrevista (v. acima).

6.6.1 - Duração infinita

Neste teste, realizado com os sujeitos das amostras A9 a A12, era perguntado (v. detalhes de procedimento acima) por quanto tempo ficaria caindo uma pedra lançada dentro de um "poço sem fundo"; as respostas foram categorizadas conforme descrito na Tabela 6.11:

TABELA 6.11

Categorias na variável Duração Infinita

DUR	DESCRIÇÃO
0	Sem resposta / Resposta não referente a tempo (p. ex., "quilômetros");
1	Tempo Finito: minutos/ segundos/ horas/ dias/ meses/ anos/ muito tempo;
2	Tempo Indefinido: (respostas duplas: 1<-->3)
3	Tempo Infinito: o resto da vida/ até o fim do mundo / todo o tempo/ não vai cair/ nunca chega/ para sempre/ eternamente/ infinitamente.

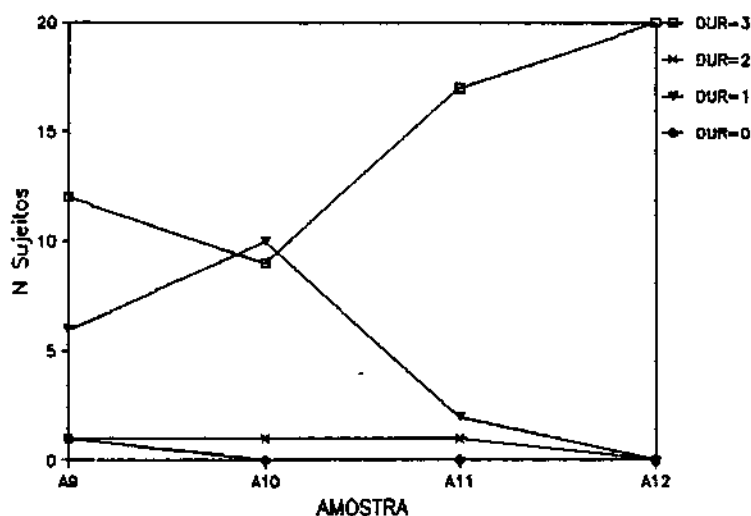
A distribuição das respostas se encontra na Tabela 6.12 e na Figura 6.11

TABELA 6.12

Duração Infinita (DUR): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

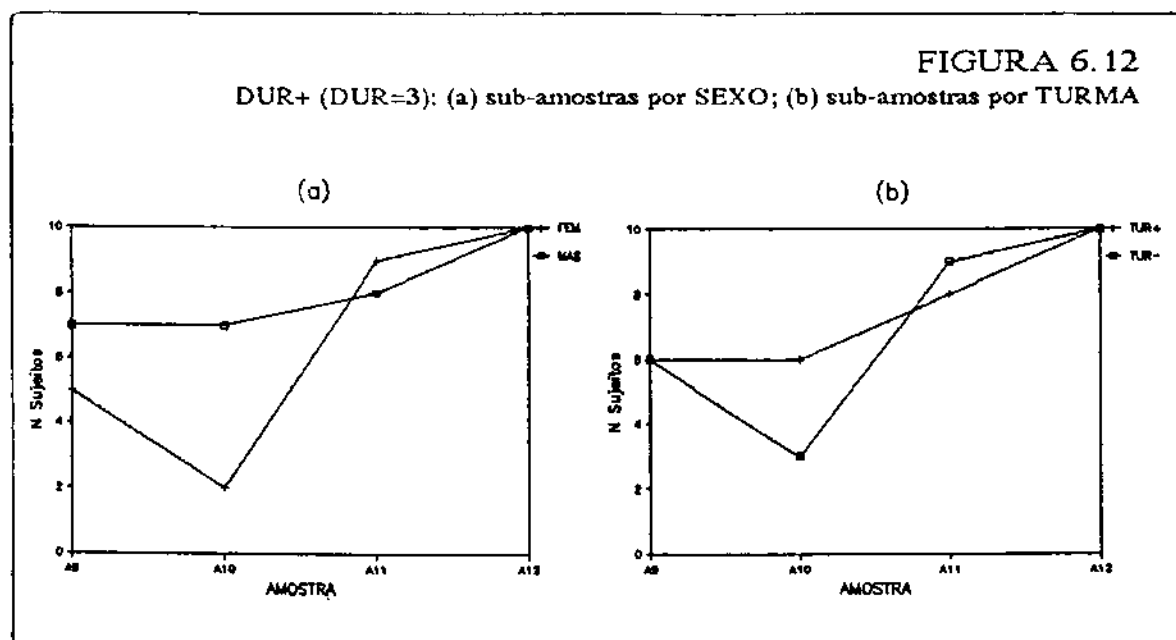
DUR	A9	A10	A11	A12
0	1	0	0	0
1	6	10	2	0
2	1	1	1	0
3	12	9	17	20

FIGURA 6.11
Duração Infinita (DUR)



As respostas classificadas como DUR+ (DUR=3:Tempo infinito) tornam-se significativamente majoritárias, como se pode ver, a partir dos onze anos de idade (P. Binomial, bilateral, $p < .005$); não podemos observar, neste teste, as ocorrências mais precoces de respostas corretas, já que em A9 estas já constituem cerca de 50% do total. Na verdade, este teste era de resposta bastante simples, uma vez que a infinitude já estava contida nos termos da pergunta ("poço sem fundo").

A comparação entre as sub-amostras por sexo (Figura 6.12a) não apresentou resultados significativos ao nível de 0.05 (P. de Fisher) - apesar de, na amostra A10, encontrarmos 70% dos meninos DUR+ contra apenas 20% das meninas (P. de Fisher, bilateral, $p = .07$); também não foram significativas as diferenças entre as subamostras por turma, embora haja, em A10, 60% de DUR+ para os alunos da turma mais adiantada (4ª Série) e apenas 30% para os da 3ª Série (Figura 6.12b):



6.6.2 - Ciclicidade infinita

Ao apresentarmos às crianças das amostras A5 em diante a "estrada" circular e o carrinho, perguntamos: A) quanto faltava para chegar ao fim e B) onde era o fim da "estrada"; as respostas foram categorizadas como indicado na Tabela 6.13:

TABELA 6.13

Categorias na variável Ciclicidade Infinita

CIC	DESCRIÇÃO
0	Sem resposta
1	Percurso total = 1 volta (de volta à origem)
2	Percurso finito (mais de 1 volta)
3	Resposta indefinida entre 2 e 4
4	Percurso infinito/ nunca chega/ não há fim

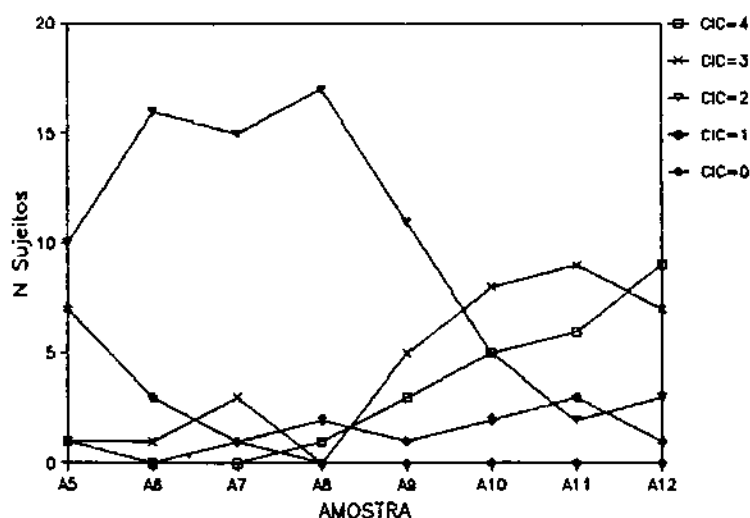
A ocorrência de cada uma destas categorias em cada amostra se encontra na Tabela 6.14, bem como na Figura 6.13:

TABELA 6.14

Ciclicidade Infinita (CIC): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

CIC	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	7	3	1	2	1	2	3	1
2	10	16	15	17	11	5	2	3
3	1	1	3	0	5	8	9	7
4	1	0	0	1	3	5	6	9

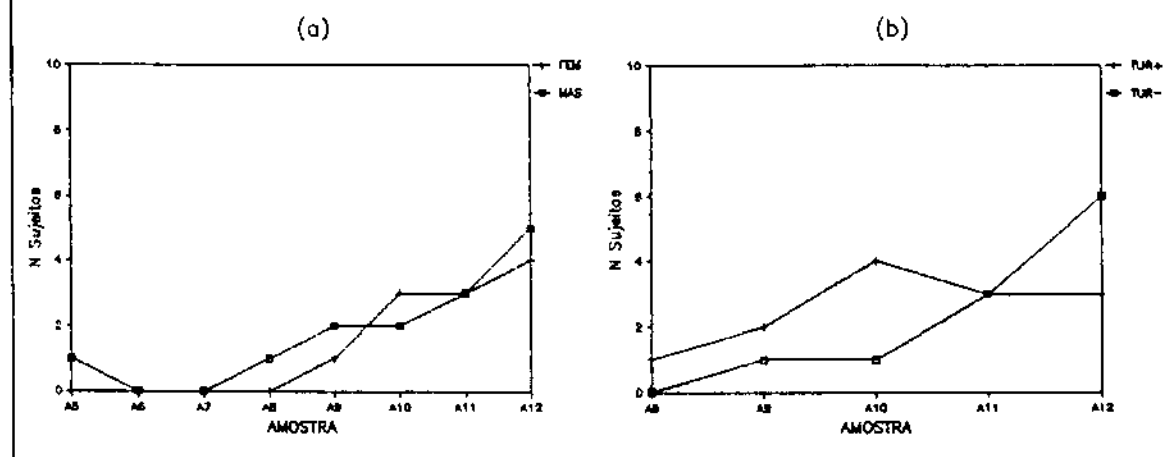
FIGURA 6.13
Ciclicidade Infinita (CIC)



Como se pode notar, a resposta CIC+ (CIC=4), não chega, nem para a amostra com doze anos de idade, a constituir a maioria absoluta, pois o número de respostas "indefinidas" (CIC=3) ainda é grande; por outro lado, CIC=2 ("percurso finito") é significativamente majoritária apenas até os oito anos (P. Binomial, bilateral, $p < .001$), enquanto que o conjunto CIC- (CIC=0-3) o é apenas até os dez anos de idade (P. Binomial, bilateral, $p = .042$).

Em nenhuma das amostras foram observadas diferenças significativas ($p < .05$, P. de Fisher, CIC+ X CIC-) seja entre as sub-amostras por sexo (Figura 6.14a), seja entre as sub-amostras por turma (Figura 6.14b).

FIGURA 6.14
CIC+ (CIC=4): (a) sub-amostras por SEXO; (b) sub-amostras por TURMA



6.6.3 - Subdivisão infinita

Neste teste (v. detalhes acima), perguntávamos "de que tamanho" ficaria um pedaço de papel se o dividíssemos ao meio, descartando metade e tornando a dividir - para sempre. As respostas foram classificadas nas seguintes categorias (Tabela 6.15):

TABELA 6.15

Categorias na variável Subdivisão Infinita

DIV	DESCRIÇÃO
0	Desaparece (o papel)/ acaba/ some/ zero/ nada;
1	Resposta hesitante entre 0 e 2 (minúsculo/ some);
2	(finitamente) pequeno/ minúsculo/ microscópico;
3	Infinitamente pequeno.

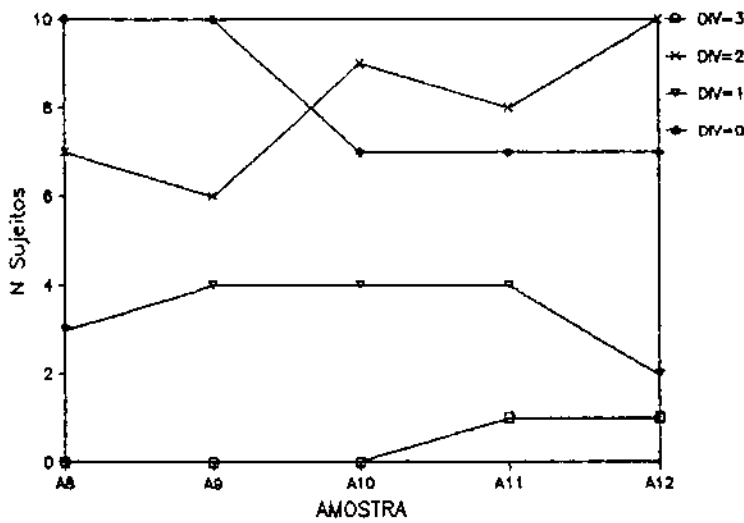
Estas categorias ocorreram, em cada uma das amostras testadas (A8 em diante), nas frequências indicadas na Tabela 6.16 e na Figura 6.15

TABELA 6.16

Subdivisão Infinita (DIV): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

DIV	A8	A9	A10	A11	A12
0	10	10	7	7	7
1	3	4	4	4	2
2	7	6	9	8	10
3	0	0	0	1	1

FIGURA 6.15
Subdivisão Infinita (DIV)



Note-se que DIV+ (DIV=3) foi observado somente a partir dos onze anos completos - e ainda assim, em apenas dois casos (um sujeito pertencente à amostra A11 e outro à amostra A12).

A Tabela 6.17 mostra, para cada categoria em DIV, as freqüências absoluta e relativa da ocorrência de comentários da forma "não dá para picar para sempre", "chega uma hora que não dá mais para picar" ou equivalente; curiosamente, a freqüência deste tipo de comentário é bem maior na categoria DIV=1 (respostas intermediárias/hesitantes entre "o papel some" e "fica - finitamente - pequeno") do que em DIV=0 ou DIV=2 (e não ocorre em DIV=3).

TABELA 6.17

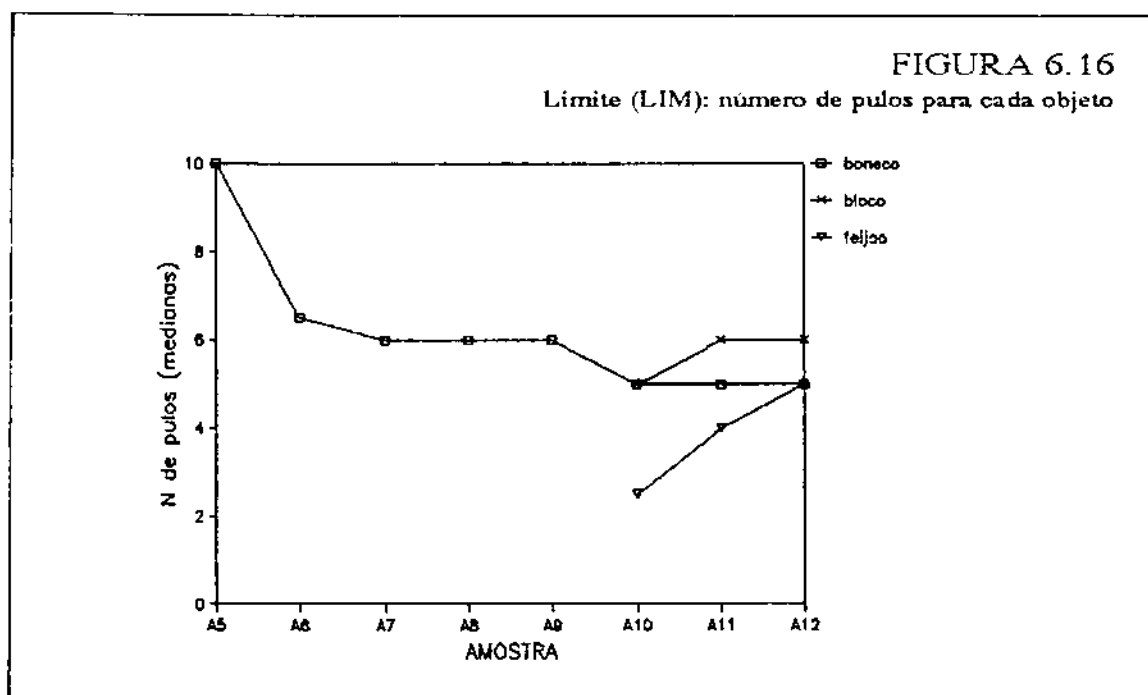
Subdivisão Infinita: Freqüência de ocorrência de respostas questionando a possibilidade de iteração infinita do processo de subdivisão do papel

DIV	N total	N "não vai dar, etc"	freq. rel.
0	41	3	7.3%
1	17	7	41.2%
2	40	5	12.5%
3	2	0	0%

6.6.4 - Limite e infinitude

Neste teste, era perguntado aos sujeitos (da amostra A5 em diante) quantos pulos um bonequinho (diâmetro da base = 1.7 cm) teria de dar para atravessar a mesa (cerca de 40 cm), sabendo-se que a cada pulo o boneco só poderia pular a metade da distância restante (uma variante do Paradoxo de Zenão); a partir da amostra A10, introduzimos mais

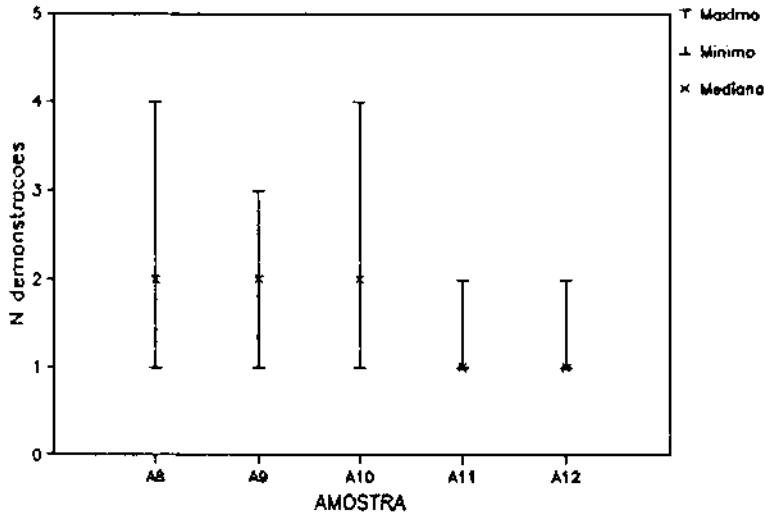
dois objetos a serem movimentados da mesma forma que o boneco, para verificar se, no caso das respostas envolvendo um número finito de pulos, este número seria afetado por diferenças nas dimensões destes objetos: um bloco plástico (base para os bonecos) com 13.5 cm na dimensão "relevante" e um feijão (cerca de 1cm). Se os sujeitos considerassem o comprimento do objeto como determinando o último pulo possível (apesar de que a explicação inicial chamava a atenção para a posição do ponto mais avançado do objeto), este limite seria algo em torno de 6 pulos para o feijão, 5 para o boneco e 2 para o bloco. As medianas do número de pulos estimados (em cada caso) para cada amostra são mostradas na Figura 6.16 (os raros casos em que a resposta foi correta não foram excluídos desta análise, mas deixados como os "valores máximos" das amostras em questão).



Outra modificação introduzida ao longo da pesquisa foi a verificação do número de vezes que era necessário explicar aos sujeitos a regra que comandava o movimento do boneco (o primeiro objeto testado): até a amostra A7, simplesmente explicávamos esta regra com alguns pulos a título de exemplo; a partir da amostra A8, decidimos utilizar o procedimento de dar a explicação mostrando o primeiro pulo (da origem ao meio do trajeto), perguntar para onde iria o boneco no segundo pulo, corrigir o sujeito e repetir a explicação em caso de erro, e assim por diante - até que percebessemos que a regra tinha sido compreendida; este procedimento não pareceu afetar o desempenho dos sujeitos (já que os dados não mostram qualquer melhoria após a sua introdução), mas nos permitiram perceber o padrão exposto na Figura 6.17 (que indica os números máximo e mínimo - e as medianas - de "pulos demonstrados" necessários para os sujeitos de cada amostra), onde se verifica que há um padrão bastante diferente para as amostras A8-A9-A10, de um lado, e A11-A12, de outro (os sujeitos destas últimas amostras entendem a regra com uma única demonstração ou, no máximo, duas).

FIGURA 6.17

Limite (LIM): número de exemplos necessário



A Tabela 6.18 indica as categorias em que as respostas a LIM foram classificadas:

TABELA 6.18

Categorias na variável Limite

LIM	DESCRIÇÃO
0	Número finito de pulos leva o boneco (e outros objetos) ao fim do trajeto; A10 em diante: número diferente de pulos necessários para cada objeto;
1	Só A10 em diante (v. texto): Número finito de pulos, mas o mesmo número para os três objetos;
2	O boneco (e outros objs.) nunca chega ao fim do trajeto (LIM+).

A Tabela 6.19 e a Figura 6.18 mostram a ocorrência de respostas corretas ao teste (LIM=2 ou LIM+) e, além disso, a frequência de respostas erradas (número finito de pulos) mas onde o número estimado de pulos era igual para os três objetos (LIM=1); este aspecto é relevante por indicar o número de crianças, em cada amostra que, se não percebeu a impossibilidade da travessia da mesa por estas regras - aparentemente por desconsiderar a distância residual abaixo de uma certa grandeza, ao menos não se atrapalharam com as dimensões específicas de cada objeto - que não eram relevantes para o problema em questão.

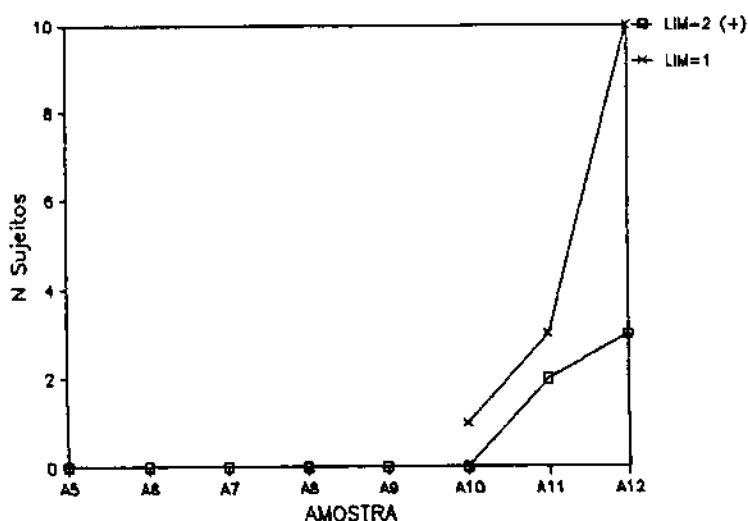
TABELA 6.19

Limite (LIM): Número de sujeitos por Amostra em cada Categoria

LIM	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
0	20	20	20	20	20	19	15	7
1						1	3	10
2	0	0	0	0	0	0	2	3

FIGURA 6.18

Limite (LIM)



Nenhum sujeito respondeu que "infinitos pulos" seriam necessários; todas as respostas envolvem construções temporais:

"Não dá para chegar assim: num certo tamanho sempre tem a metade" (11/11);

"Ah, ele nunca vai chegar!" (11/15);

"Não sei... acho que não vai parar nunca (demonstra com o boneco)" (12/07);

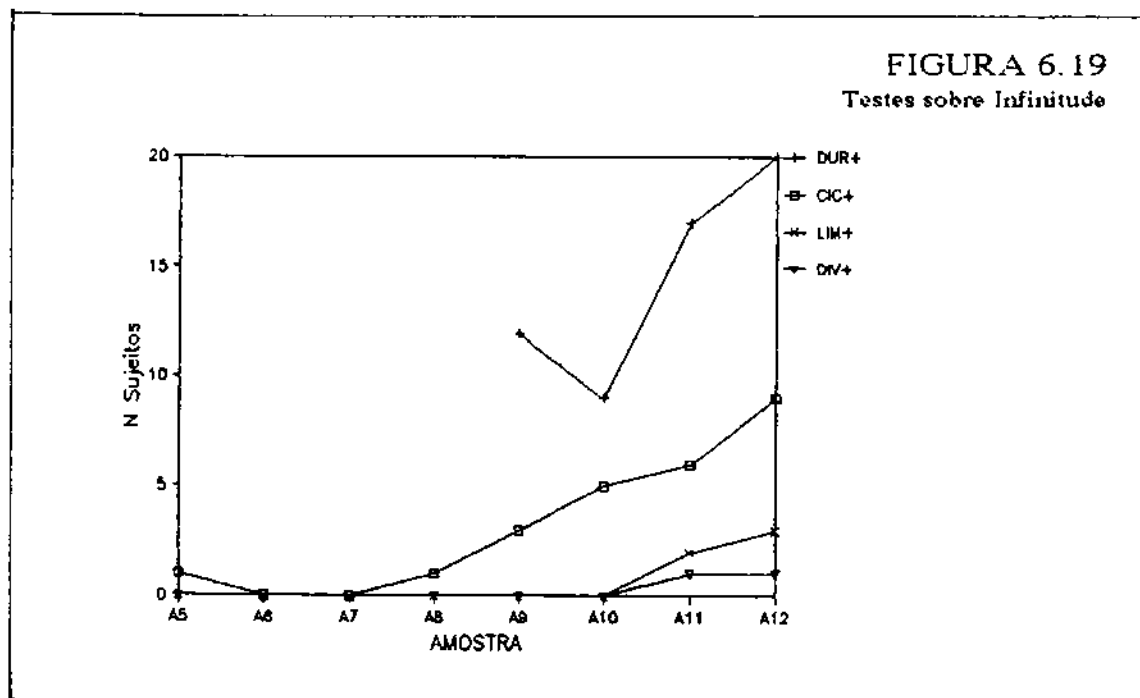
"(se corrigindo após erro inicial:) se só pula metade, ele nunca vai chegar" (12/10);

"Sei lá... acho que ele não vai conseguir não; se for a metade... (sobre o bloco:) também não ia chegar" (12/19).

Comparações entre sub-amostras por sexo ou por turma não seriam viáveis, neste caso, devido ao número muito pequeno de respostas LIM+ (apenas 2 meninos em A11, 2 meninos e 1 menina em A12, ou: 2 sujeitos de 11 e 3 de 12 anos).

6.6.5 - Testes sobre infinitude: resumo

A Figura 6.19 resume os resultados observados nos quatro testes acima descritos, indicando as curvas de ocorrência de DUR+, CIC+, DIV+ e LIM+.



6.7 - Operações com "Infinito"

Conforme mencionado no Capítulo 2, quatro perguntas adicionais foram feitas aos sujeitos de 12 anos (A12) e à metade dos de 11 anos (A11): a estas crianças foi perguntado "quanto você acha que é 'infinito mais um' / 'infinito menos um' / 'infinito mais infinito' / 'infinito menos infinito'?". A maioria das respostas foi adequada:

[Infinito + 1] (Figura 6.20a) foi considerado como igual a "infinito" em 54% das respostas; como existente mas de cardinalidade indeterminada (*"não dá para saber"* - porque "não se sabe" o valor de infinito) em 17% das respostas, como não-existente em 11% das respostas (outras respostas: 17%; cinco sujeitos forneceram respostas duplas, ambas computadas: N=35). As "outras" respostas incluíram, p.ex., *"acho que é mais infinito ainda"* (11/05), *"infinito-e-um"* (12/12).

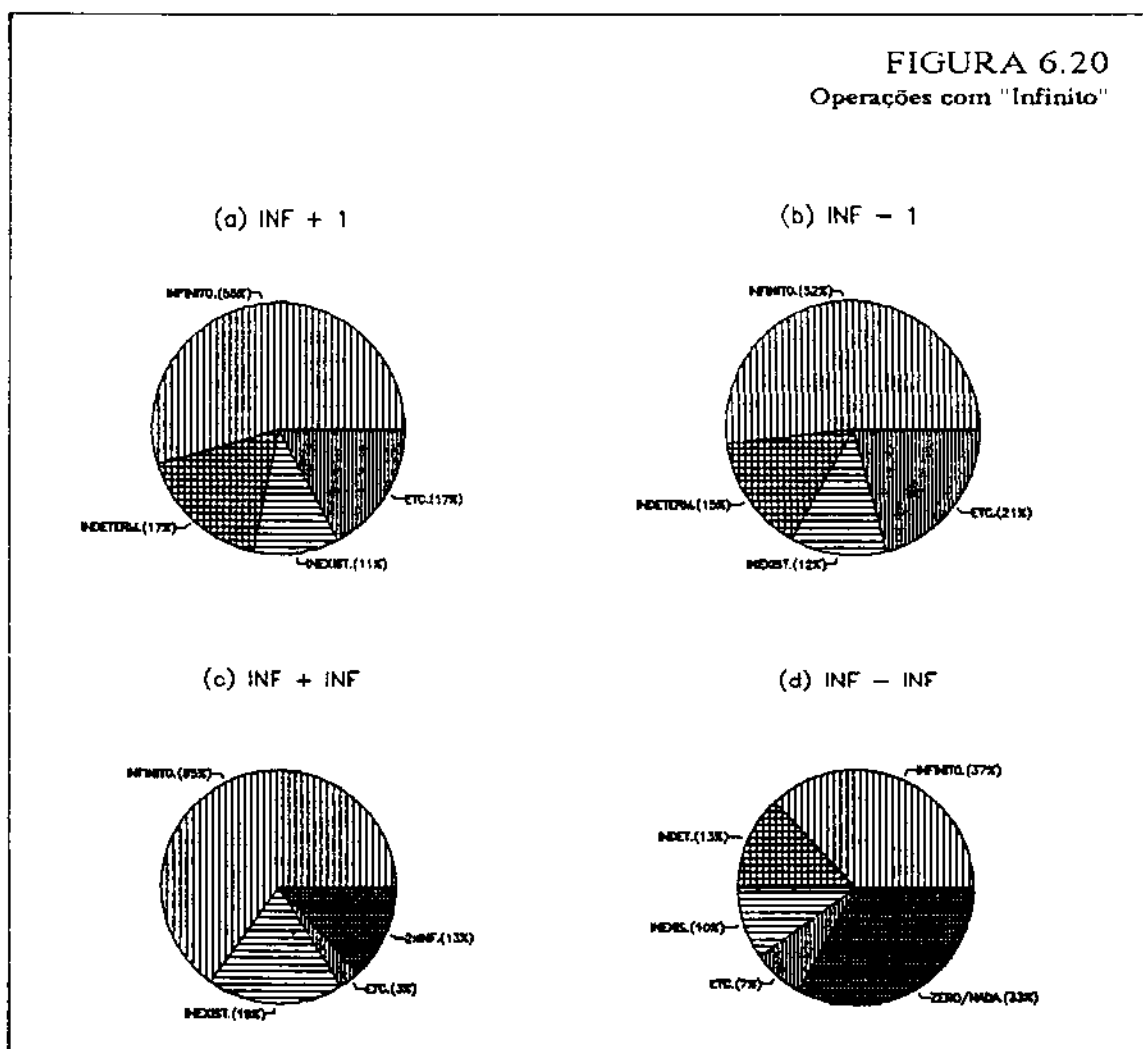
[Infinito - 1] (Figura 6.20b) foi julgado como "infinito" (52%), como existente mas indeterminado (15%), como inexistente (12%) (outros: 21%; 3 respostas duplas: N=33). Exemplos de "outras" respostas: *"forma menos infinito, infinito menor"* (12/11), *"Infinito tirando um número"* (12/13).

[Infinito + Infinito] (Figura 6.20c) foi considerado como sendo "infinito" (65%), não-existente (19%) ou "2 x infinito" (13%: *"dois infinito(s)"* - 11/19, 12/12, 12/18; *"o dobro de infinito"* - 12/11); (outros 3%: *"ai fica mais infinito ainda"* - 11/05; 1 resposta dupla: N=31).

Na grande maioria dos casos, cada sujeito deu respostas semelhantes para cada uma das três perguntas acima.

[Infinito - Infinito] (Figura 6.20d), por outro lado, foi considerado como "infinito" (37%) ou como "zero" ou "nada" (33%), como existente mas indeterminado (13%) ou inexistente (10%) (outros: 7%; 3 respostas duplas, 3 sujeitos não responderam: N=30). As duas "outras" respostas foram curiosas: "*si não tem infinito... si é Finito!*"(11/06) e "*da menos infinito*"(12/11; menor ou negativo?).

FIGURA 6.20
Operações com "Infinito"



6.8 - Discussão

6.8.1 - A infinitude do número

Nenhuma criança de 3 ou 4 anos mostrou qualquer compreensão da infinitude dos números naturais: apenas entre as crianças de 5 anos observamos a primeira referência ao contar como "*um negócio que não acaba nunca*" (5/16). A partir dos 8 anos, a maior parte das crianças afirmava que a sucessão dos números naturais não tem fim (maioria significativa dos 10 anos em diante).

Piaget & Inhelder (1977), ao discutir as respostas a tarefas de subdivisão, concluíram que o conceito de iteração indefinida não se desenvolve até o período das operações formais. Segundo Piaget,

apenas ao se superar o período das operações concretas é que a criança descobre "o poder infinito de iteração da operação +1" (Piaget, 1975a, p.130), ao libertar-se das restrições perceptuais (já que o objeto de experiência é necessariamente finito) e passar a compreender o número em termos de operação pura. Neste contexto, Piaget menciona, a título de exemplo, a resposta de um sujeito de 11 anos ("nunca se chegará ao maior dos números"); respostas semelhantes a esta, embora raras entre os pré-escolares, foram por nós observadas, conforme mencionado, já a partir dos cinco anos (e em 95% das respostas dos sujeitos de 11 anos).

Gelman & Meck (1983) comentam que "os pré-escolares parecem não compreender o princípio de que a lista de nomes de números nunca termina" (op.cit., p.357). De acordo com Gelman, é nos primeiros anos da escola primária que as crianças adquirem uma compreensão de que os números nunca acabam. Evans & Gelman (1982), em seu estudo sobre infinitude e outros conceitos matemáticos entre crianças de 5 a 9 anos, classificaram as respostas de seus sujeitos em três níveis:

Nível I: Finito e pequeno. (...) freqüentemente afirmavam que não poderiam somar um ao número que disseram que era o maior no qual podiam pensar (...). *Nível II: Finito e grande.* (...) tipicamente mencionavam números muito grandes (p.ex., um milhão) em resposta à questão sobre o maior número em que podiam pensar. Dizem que se pode continuar a somar e obter números cada vez maiores. Mas paradoxalmente insistem que há um ponto no qual não mais se pode somar um ou que há, assim mesmo, um maior dos números (...). *Nível III: Infinito.* Crianças neste nível começam com números muito grandes, dizem que se pode continuar somando, e que não há um maior dos números (...). Nenhum dos nossos sujeitos pré-escolares no experimento em si foi classificado como respondedor Nível III. A metade, entretanto (N = 18), foi classificada como Nível II. Mais surpreendente para nós foi a descoberta de que pouco mais da metade das crianças na 1ª Série (N = 20) e na 2ª Série (N = 19) foram classificadas como respondedores de Nível III. E 86% (N = 22) dos alunos de 3ª Série foram classificados como do Nível III (Gelman, 1980, pp.64-5).

Como se pode notar, nossos resultados foram extremamente semelhantes aos de Gelman & Evans (1982; tb. Gelman, 1980; Evans, 1984), exceto pelos nossos poucos casos de respostas NIN+ em A5 (1) e A6 (3), não observados por Gelman entre pré-escolares.

6.8.2 - O uso do termo "Infinito"

O uso espontâneo da palavra "infinito" pelos sujeitos, ao longo da entrevista (antes, naturalmente, que o experimentador introduzisse o mesmo, na pergunta "o que é infinito?") foi observado pela primeira vez em um menino de 5 anos, quando indagado sobre "o maior de todos os números"; embora questões como "qual o maior dos números?", "quantas estrelas há no céu?", além dos testes sobre infinitude, favorecessem este uso, ele não era a rigor necessário, mesmo para um sujeito que respondesse a todas as questões com perfeição (já que podiam sempre ser usadas construções alternativas como "não tem fim"); ainda assim, o uso do termo "infinito" (USO+) ocorreu na maioria das entrevistas a partir dos 10 anos de idade (com uma pequena diferença em função do sexo dos sujeitos, em favor dos meninos de 7 a 9 anos); USO+ ocorreu quase que exclusivamente (6 exceções) entre sujeitos INF+ (INF=2-3: definições aceitáveis de infinitude) e NIN=1-2 (1 única exceção; mesmo porque, como anteriormente assinalado, NIN e USO não são inteiramente independentes, já que uma mesma resposta podia determinar ambas as classificações, quando das perguntas sobre o "maior dos números").

6.8.3 - A compreensão da infinitude

O completo desconhecimento da palavra "infinito" (INF=0) foi a

regra entre as crianças de 3 a 5 anos; $INF=1$, ou seja, o reconhecimento do termo como representando "uma coisa grande" ou "um número muito grande (finito)" não chegou a ser um padrão majoritário em nenhuma faixa etária, mas foi mais freqüente por volta dos 6-7 anos; as definições aceitáveis ($INF+$) começaram a ser observadas a partir dos 5 anos, mas apenas dos 9-10 anos de idade em diante é que a categoria $INF=3$ (definição adequada e ausência de exemplos inadequados, compreensão da infinitude do número) passa constituir a maioria absoluta dos sujeitos.

As definições "aceitáveis" de infinitude mostraram-se extremamente homogêneas, pouco variadas, no mais das vezes variações das fórmulas "que não tem fim / não acaba" ou "que nunca acaba"; é interessante notar que as freqüências das respostas usando a primeira construção (mais neutra, "etimológica") e usando a segunda (com conotação "temporal") são mais ou menos iguais (em torno de 50 % dos casos) para as amostras A7 a A10 (7 a 10 anos), enquanto que a partir dos 11 anos de idade as respostas do segundo tipo (utilizando o termo "nunca") passam a constituir apenas cerca de 20% dos casos.

Dentre os exemplos de "coisas infinitas" fornecidos pelos sujeitos $INF=1-3$ (fundamentalmente $INF+$ (2-3)), os classificados no Tipo III (considerados "inadequados": Quantidade de objetos, Durabilidade, Etc), principal critério distinguindo $INF=2$ de $INF=3$ (ambos $INF+$), foram maioria entre as crianças de 5 anos; a partir dos 6, os exemplos do Tipo I (considerados "adequados": mais frequentemente "os números", "o mundo", "o universo") passam a ser a maioria, ultrapassando os do Tipo III (v. Figura 6.7b) e passando a se observar alguns casos de exemplos do Tipo II (considerados "intermediários": Cosmos/ ambiente/ recursos, Etc); a partir dos 8 anos, os exemplos do Tipo III se tornam a categoria menos freqüente; dos 10 anos em diante a freqüência de exemplos do Tipo II se estabiliza em cerca de 50% das entrevistas em cada amostra, enquanto que exemplos do Tipo III ocorrem em cerca de 20% dos casos e exemplos do Tipo I, em 80-100% dos casos.

6.8.4 - Testes sobre infinitude

Dentre os testes explorando o uso do conceito de infinitude, Duração Infinita (DUR) foi aparentemente o mais simples; aliás, este foi praticamente o único caso em que falhamos em introduzir o teste antes da idade em que as respostas corretas ocorressem: já na primeira amostra testada (A9), $DUR+$ comparece com 60% dos casos; diante da pergunta "por quanto tempo a pedra vai ficar caindo (no poço sem fundo)?", pelo menos metade das crianças de 9-10 não teve dificuldade em dar respostas adequadas - fossem elas mais coloquiais, como "o resto da vida" ou mais precisas, como "infinitamente". A outra metade dos sujeitos nesta faixa etária (9-10 anos), por outro lado, respondeu, tipicamente, mencionando durações claramente finitas, da forma "X segundos/ minutos/ horas/ dias/ meses/anos). Já entre as crianças de 11 anos em diante, a quase totalidade das respostas foi considerada $DUR+$ (A11: 85%; A12: 100%).

Dois aspectos do teste nos parecem ter contribuído fundamentalmente para esta maior facilidade: primeiro, a possibilidade de se buscar uma resposta adequada de forma mais ou menos "estereotipada", aplicando-se simplesmente uma fórmula apoiada na linguagem ("poço sem fundo" \rightarrow "queda sem fim"); em segundo lugar, considerando-se o observado acima com respeito às definições de infinitude pelos sujeitos de 7 a 10 anos (50% de construções contendo o termo "nunca"), há que se considerar a possibilidade de que a idéia de infinitude no tempo seja talvez a forma de infinitude de mais fácil

"visualização" pelas crianças até 10 anos de idade.

O teste que vem em seguida a DUR numa seqüência de dificuldade crescente é o que se refere ao percurso cíclico infinito (CIC; v. Figura 6.19); dois motivos "facilitadores" podem ter sido a ausência - perceptualmente dada - de um fim na pista circular e a possibilidade de respostas em termos temporais (dentre os 25 sujeitos CIC+, 13 usaram expressões contendo a palavra "nunca" e 2, a palavra "sempre"). Dos 5 aos 9 anos, a resposta mais freqüente foi CIC=2 (número de voltas ou tempo finito); entre as crianças de 10-11 anos, predominaram as respostas intermediárias (CIC=3), CIC=4 (CIC+) só se tornando a categoria mais freqüente entre as crianças de 12 anos: excetuando-se um caso de resposta correta em A5, a freqüência de casos CIC+ começa a crescer gradualmente a partir dos oito anos e corresponde a 45% dos sujeitos na amostra A12 (ou 80%, se incluirmos CIC=3, as respostas duplas e ambíguas entre CIC=2 e CIC=4).

Os testes que se mostraram mais difíceis foram o teste sobre a subdivisão infinita de um pedaço de papel (DIV) e sobre limite (LIM: o boneco "saltador"). Em DIV, as respostas afirmando que o papel "some" foram maioria entre as crianças de 8-9 anos; a partir dos 10 anos, predominaram respostas que se referiam a um tamanho finitamente pequeno, embora possa se supor aqui alguma ambigüidade (talvez um efeito limitante do vocabulário das crianças: as mais velhas freqüentemente usaram termos como "microscópico" ou "minúsculo"); apenas duas respostas perfeitas (DIV+) foram registradas (uma na amostra A11, outra em A12).

Nossos casos DIV- correspondem ao "Estágio III" (7-8 a 11-12 anos) definido por Piaget & Inhelder a respeito do desenvolvimento das noções de ponto, contínuo e subdivisão, estágio este que corresponderia ao período das operações concretas e durante o qual as crianças admitiriam um número grande, mas não infinito, de subdivisões: de fato, a maioria dos nossos sujeitos observou, antes de mais nada, que *"não dá para picar para sempre"* (ao que o experimentador insistia: "mas e se der, de que tamanho fica o papel?").

DIV+ corresponde ao Estágio IV (a partir de 11-12 anos), quando, de acordo com Piaget, a subdivisão passa a ser concebida como ilimitada, já que

(...) o pensamento é liberado das noções quasi-perceptuais dos estágios anteriores, onde as operações concretas estavam cercadas pelas condições restritivas do manejar ou desenhar concretos (Piaget & Inhelder, 1977, p.620).

Em LIM, apenas cinco sujeitos - dois de 11 e três de 12 anos - responderam que o boneco (e outros objetos) não chegariam ao fim do trajeto saltando sempre a metade do que ainda faltasse ("nunca vai chegar", "sempre falta metade", etc); nenhum sujeito, porém, mencionou um "número infinito de pulos" (não houve insistência do experimentador nesse sentido).

Taback (1975) estudou o desenvolvimento do conceito de limite entre crianças de 8, 10 e 12 anos através de várias tarefas, especialmente a do "Halfway Rabbit" - que inspirou nosso teste LIM - e a das "Ruas Convergentes" - sobre um homem que vai para sua casa, situada na convergência de duas ruas (45°) caminhando de uma rua para a outra de modo a atingi-las sempre perpendicularmente:

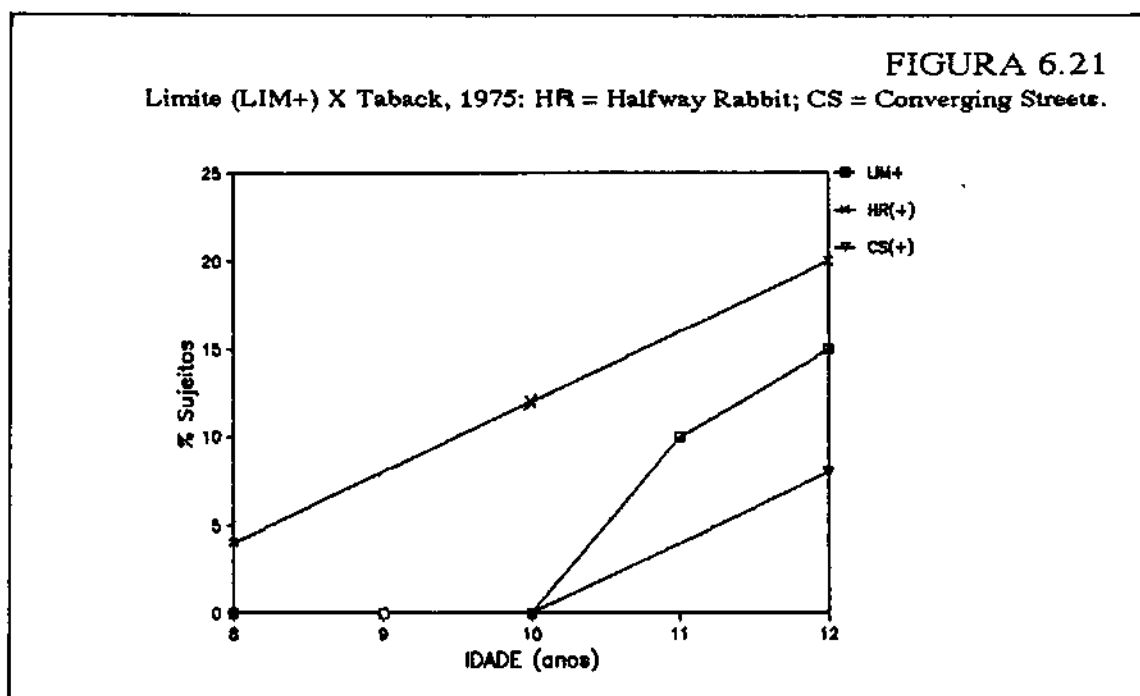
Neste estudo, mesmo no nível de idade de 12 anos, apenas 20% dos sujeitos podia conceitualizar a subdivisão infinita de um segmento de reta na forma usada na Tarefa do Halfway Rabbit. Em verdade, todos os três grupos etários incluídos no estudo tiveram uma performance extremamente baixa comparada com o grupo de Genebra. Três explicações para os resultados melhores de Piaget seriam plausíveis: (1) nas tarefas de Piaget o ponto-limite não está visível para a criança e na Tarefa do Halfway Rabbit está; (2) o uso de situações não-matemáticas, "lúdicas", para apresentar conceitos matemáticos

poderia distrair o sujeito; e (3) a maior dificuldade nas tarefas com pontos-limite visíveis poderia ser, em parte, uma função de diferenças no questionamento (Taback, 1975, p.143).

Em outros testes (Tarefa da Vizinhança), Taback perguntou às crianças sobre o número de pontos num intervalo aberto e num círculo aberto (25 sujeitos em cada amostra etária):

Enquanto que apenas uma criança de 10 anos foi capaz de conceitualizar infinitos pontos dentro dos limites, oito crianças de 12 anos foram capazes de fazê-lo. De fato, neste aspecto do intervalo aberto, as crianças de 10 anos não tiveram desempenho muito melhor do que as de 8 anos, que claramente não desenvolveram qualquer noção de infinitude; nenhuma criança de 8 anos pensou que houvesse mais de 50 pontos dentro do intervalo aberto (...) os resultados para o círculo aberto são similares aos do intervalo aberto (...) apenas um criança de 10 anos achou que havia infinitos pontos no círculo aberto; em contraste, sete de 12 anos pensaram assim. Estas crianças, de acordo com Piaget, já atingiram um estágio no qual têm "a habilidade de continuar as operações indefinidamente apesar das limitações materiais (...) ainda presentes em estágios anteriores (Taback, 1975, pp.134-5).

Levando-se em conta algumas diferenças (atribuíveis às particularidades metodológicas de cada estudo), nossos resultados em LIM foram razoavelmente semelhantes aos de Taback, como mostra a Figura 6.21:



Outro estudo particularmente relevante acerca das noções de limite e infinitude é o de Langford (1974):

Estudos anteriores sobre o desenvolvimento de conceitos de infinitude em crianças falharam em distinguir infinitude potencial de infinitude completa [completed] embora esta tenha sido, tradicionalmente, uma distinção importante em filosofia matemática (...). A infinitude potencial está envolvida em noções tais como a de que as operações matemáticas podem ser indefinidamente iteradas ou de que não há maior ou menor dos números. A infinitude completa está envolvida no conceito de um conjunto infinito ou de um decimal infinito. O conceito de limite pode ser considerado de ambos os pontos de vista. Se se diz que uma função pode ser trazida indefinidamente mais perto de um ponto limite, esta é uma afirmação sobre infinitude potencial. Se, por outro lado, falamos em se atingir o limite de uma seqüência infinita, esta é uma afirmação acerca de infinitude completa. Parece plausível que conceitos de infinitude potencial se desenvolvam antes dos de infinitude completa, já que muitos

Em seu Experimento 1, este autor testou a hipótese de que crianças de 12 anos tem pouca noção de infinitude completa, mas estão desenvolvendo um conceito de infinitude potencial (amostras de 9 e de 15 anos de *idade mental*); Langford utilizou questões envolvendo número e espaço, observando que as questões numéricas eram mais fáceis do que espaciais e que perguntas sobre se uma seqüência jamais chegaria ao fim foram mais fáceis que perguntas sobre qual seria o maior/menor termo, porque - segundo a hipótese do autor - as últimas tem implicações enganadoras para o pensamento adolescente em termos de infinitude potencial; a divisão mostrou-se nitidamente mais difícil que as outras operações:

No caso das operações numéricas, mesmo na idade mental de 9 anos a maioria das crianças era capaz de conceber a adição, subtração e multiplicação como continuando indefinidamente, quando questionadas de modo a desencorajar interpretações concretas das perguntas. Sob condições difíceis, onde tais interpretações concretas eram possíveis, isto não ocorreu até a idade mental de 14 ou 15. No caso da divisão, sob condições fáceis não antes da idade mental de 13 anos, e sob condições difíceis, não antes da idade mental 15 as crianças podiam conceber a iteração infinita. Todas estas conquistas estavam atrasadas de cerca de dois anos de idade mental no caso das operações espaciais (Langford, 1974, pp.316-7).

Pelas correlações parciais concluiu-se, porém, que a idade cronológica é mais importante que a mental (obtida por testes de inteligência) e que as idades acima mencionadas deveriam ser entendidas, antes, como idades cronológicas; quanto à tendência a acreditar que os limites são atingidos em um número finito de passos, Langford verificou que, no caso da divisão, há uma relação inversa entre respostas corretas sobre o limite da operação (0) e a tendência a achar que este será atingido em um número finito de passos; isto seria consequência de considerar-se as magnitudes removidas, acompanhada de uma inabilidade de perceber que isto é compensado pela diminuição progressiva destas magnitudes (a magnitude original vista como "um conjunto de partes"?); mais tarde a atenção se focalizaria, prioritariamente, no que resta a cada etapa.

Em seu Experimento 2, Langford cita Piaget & Inhelder (1977), que, usando uma pergunta sobre o produto final do processo de subdivisão de um segmento de reta, concluíram que crianças de 12 anos conseguem desempenhar a tarefa; Taback, contando apenas os casos em que as crianças afirmavam que o processo podia continuar indefinidamente, obteve resultados bem mais fracos, que atribuiu a um possível efeito da "concretude" da tarefa (coelho pulando), já que resultados melhores foram observados quando os aspectos concretos da tarefa foram removidos. Neste experimento, o autor observou a subdivisão de um segmento de reta, perguntando sobre o produto final e sobre o término da operação (sujeitos com idades cronológicas de 12 e 15 anos): de acordo com os resultados, a maioria das crianças de 12 anos acredita que a operação de dividir pela metade não pode continuar indefinidamente; A maior parte dos que assim respondem acredita que o produto final do processo será zero. "*Várias crianças de 12 anos que acreditam que a operação pode continuar indefinidamente realmente dizem que o zero será atingido, mas a amostra de TABACK (1969), com apenas cinco crianças, exagerou muito este tipo de resposta*" (Langford, op.cit., p.320); a maioria dos sujeitos de 15 anos, por sua vez, acredita que a operação pode ser indefinidamente iterada, e a maioria destes diz que haverá uma aproximação indefinida ao zero, e não que o zero será atingido (poucas crianças em ambas as idades, das que acreditam na iteração indefinida, disseram que o produto final da

divisão seria um número ou distância cada vez mais negativo):

Em condições das mais favoráveis, a maioria das crianças de 9 anos pode conceber que as operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação sejam indefinidamente iteradas quando aplicadas a números. No caso da divisão, isto demora até os 13 anos. A maneira pela qual as crianças respondem a perguntas sobre divisão indefinidamente iterada indica que apenas a partir dos 13 anos a maioria das crianças tem um concepção de limite. Mesmo aos 15 anos, a esmagadora maioria dos adolescentes continua a pensar em limites do ponto-de-vista de infinitude potencial, e não completa. Isto aponta para a conclusão de que, enquanto conceitos relacionados à infinitude potencial se desenvolvem entre as idades de 9 e 15 anos, os conceitos de infinitude completa não se desenvolvem senão depois deste período. Isto também indica que a afirmação de PIAGET e INHELDER (1956), baseada apenas em tarefas envolvendo divisão, de que o conceito de iteração indefinida não se desenvolve até o período das operações formais, precisa ser revista (Langford, op.cit., p.321).

Nas faixas etárias comparáveis, a concordância entre nossas observações e as de Langford é grande; também nos pareceu interessante, à luz de alguns de nossos resultados já mencionados, a conclusão de que perguntas sobre o último termo de uma seqüência infinita são mais difíceis que perguntas sobre a possibilidade de se atingir o final do processo.

A observação de que a compreensão de uma iteração infinita da divisão é mais difícil que a das outras três operações aritméticas também é importante, na medida em que - além de justificar a diferença entre nossas observações e as de Piaget (v. acima) - fornece uma explicação adicional para a diferença de dificuldade observada entre os testes sobre limite e subdivisão (LIM e DIV) e os restantes (DUR e CIC; v. também NIN).

A questão da distinção entre as noções de infinitude potencial e completa - ou "presente" ("actuel", nas palavras de Piaget) nos parece particularmente relevante, e a ela voltaremos oportunamente.

6.8.5 - Operações com "infinito"

Como se pode ver pelas respostas registradas em 6.7, as crianças de 11-12 anos já são, em sua maioria (não-significativa), capazes de respostas que rompem com a lógica cardinal das classes finitas (p.ex., " $INF + 1 = INF$ "); a última questão, porém ($INF - INF$), teve dois grupos majoritários de respostas: "zero" e "infinito": o interessante é que esta questão é a que nos parece evocar mais de perto certos paradoxos ligados às operações com infinitudes: a resposta "adulta intuitiva" seria, supomos, "zero"; a rigor, entretanto, ambas as respostas são defensáveis, dependendo do que se entender exatamente por "infinito"; nas operações com números transfinitos (Cantor; v. Rucker, 1984, p.221), uma resposta "infantil" como " $INF+1 = Infinito-e-um$ " (v. acima) pode fazer sentido conforme o contexto; se por "infinito" entendermos ω (ômega, a infinitude "contável", primeiro ordinal transfinito), $\omega+1$ corresponde ao seu sucessor.

Pois há infinitudes e infinitudes:

O conjunto dos números inteiros corresponde de modo biunívoco ao de seus quadrados, ou ao conjunto dos números pares, etc. O conjunto de todos estes conjuntos será pois a classe dos conjuntos enumeráveis. Pois bem, esta classe não corresponde ao conjunto dos números reais (racionais e irracionais), que é pois uma potência superior, ou potência do contínuo (Piaget, 1975a, p.125).

Em outras palavras,

Cantor conseguiu mostrar que o conceito de infinito é um conceito estruturado, e que assim como conjuntos finitos podem ter tamanhos diferentes, também pode haver conjuntos infinitos com tamanhos diferentes. Por exemplo, assim como o conjunto de capitais de estado é igual em tamanho ao conjunto de estados mas menor que o conjunto de senadores dos E.U.A., assim também, mostrou Cantor, o conjunto dos números naturais é igual em tamanho ao conjunto dos números racionais (quocientes de inteiros) mas menor que o conjunto dos números reais (decimais). Ao raciocinar sobre conjuntos infinitos é preciso ser cuidadoso, por que a lógica que se aplica para conjuntos finitos não necessariamente se aplica aqui. Por exemplo, pode-se mostrar que há tantos números ímpares quantos números naturais colocando-os em correspondência um-a-um (1-2, 2-4, 3-6, ..., n-2n, ...). Isto contradiz a noção euclidiana comum de que o todo é maior que a parte (DeLong, 1971, p.53).

O primeiro "ordinal infinito" - ω - segue a série dos números inteiros sem lhe pertencer; os ordinais transfinitos constituem ordens. O primeiro cardinal transfinito, \aleph_0 (alef₀ - Hilbert), é a classe dos conjuntos enumeráveis. O grande interesse disso, para Piaget, é que há *"um enfraquecimento do caráter especificamente numérico da construção"*, que marca *"um retorno parcial aos componentes lógicos do número"* (Piaget, 1975a, p.125):

Os números transfinitos de Cantor dissociam entre si as duas estruturas fundamentais da classe lógica e a relação assimétrica, que se fundem num só todo na construção dos números inteiros finitos. (...) como esta dissociação transfinita, entre os dois aspectos ordinal e cardinal do número inteiro, culmina num retorno aos esquemas operatórios separados da relação assimétrica e da classe lógica, constitui a maior confirmação da interpretação operatória (...) a respeito da gênese do número inteiro finito. (...) a iteração da unidade +1 é portanto, então, o produto combinado da inclusão de classes e da seriação das relações assimétricas, já que, se se separa um destes componentes do outro, os cardinais já não se iteram mais e deixam de corresponder biunivocamente aos ordinais (Piaget, 1975a, v.I, p.123).

7

INTERAÇÕES
ENTRE AS VARIÁVEIS

7.1 - Contingência entre as variáveis: Contagem, Correspondência, Resposta Cardinal e Conservação

7.1.1 - Contagem, Correspondência e Resposta Cardinal

A Figura 7.1 mostra claramente que os erros de Correspondência 1-a-1 (COR-) ocorrem apenas entre crianças classificadas como CON=0-2, ou seja, que contam sem erros sistemáticos (Lcpl) somente até 99, sendo que tais erros de correspondência já se mostram bastante raros para CON=2: a maior parte foi registrada entre crianças cujo limite (Lcpl) no contar não atingia 20 (CON=0-1). As frequências absolutas são mostradas na Tabela 7.1:

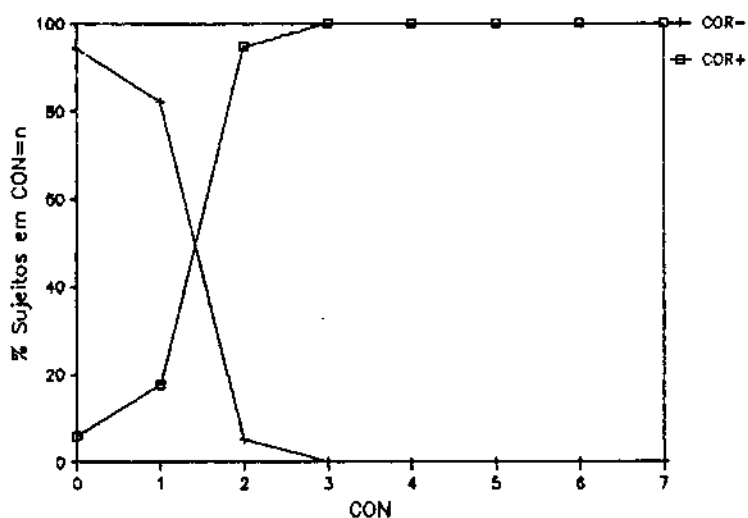
TABELA 7.1

Contagem x Correspondência 1-a-1

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
COR-	16	23	2	0	0	0	0	0
COR+	1	5	36	17	15	18	51	16

FIGURA 7.1

Contagem (CON) x Correspondência 1-a-1 (COR)



Comparando-se as categorias agrupadas CON=0-1 e CON=2-7, obtivemos a distribuição de COR-/+ mostrada na Tabela 7.2a; esta é a subdivisão mais significativa em termos estatísticos que se pode estabelecer ao longo de CON, com respeito a COR+/- ($\chi^2 = 150.8$, 1 g.l., $p < .001$). Na comparação envolvendo apenas as amostras contíguas A4 e A5 (região da curva sem maioria significativa de COR- ou COR+), a diferença se mantém significativa (Tabela 7.2b, $\chi^2 = 17.07$, $p_{unil.} < .001$) e neste caso ela não pode ser atribuída fundamentalmente ao fator idade, seja porque estreitamos a faixa etária, seja porque os valores computados na Tabela 7.2b, se reagrupados em função das amostras, não indicam diferenças significativas (Tabela 7.2c, $\chi^2 = .90$). Aliás, tomando-se isoladamente os dados para A4 (Tabela 7.2d; P.Fisher, $p_{unil.} < .05$) e A5 (Tabela 7.2e; $p_{unil.} < .001$), observamos ainda uma contingência entre CON e COR; isso mostra que o desempenho na Contagem permite prever com razoável eficiência o desempenho quanto à Correspondência 1-a-1.

TABELA 7.2

Contagem x Correspondência 1-a-1

		(a) N = 200 CON=0-1 CON=2-7		(b) N=40(A4-A5) CON=0-1 CON=2-7		(c) N=40(A4-A5) A4 A5	
COR-		39	2	18	2	12	8
COR+		6	153	4	16	8	12
		(d) A4 (N=20) CON=0-1 CON=2-7		(e) A5 (N=20) CON=0-1 CON=2			
COR-		12	0	6	2		
COR+		4	4	0	12		

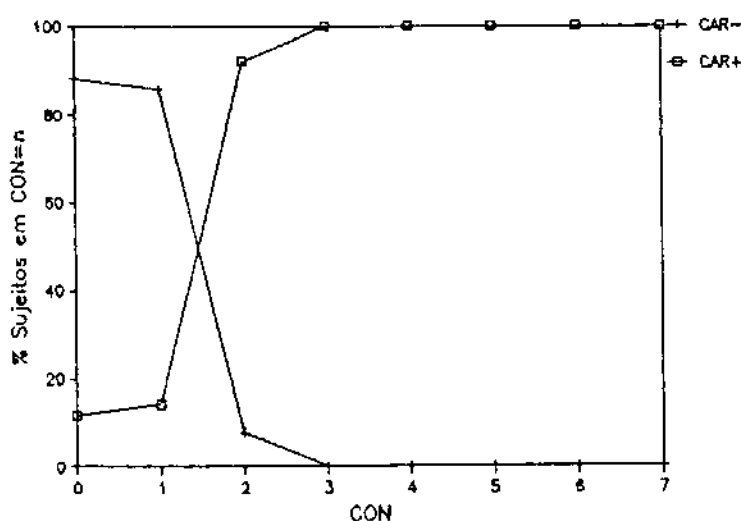
Observemos agora os resultados referentes à Resposta Cardinal correta (CAR+) em relação a CON (frequências absolutas na Tabela 7.3, porcentagens na Figura 7.2):

TABELA 7.3

Contagem x Resposta Cardinal

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
CAR-	15	24	3	0	0	0	0	0
CAR+	2	4	35	17	15	18	51	16

FIGURA 7.2
Contagem (CON) x Resposta Cardinal (CAR)



De forma análoga ao verificado para COR x CON (acima), o mais claro recorte que se pode observar *"post hoc"* em CON em função de CAR+/- (agrupando categorias), é o que subdivide aquela variável em CON=0-1 e CON=2-7 (Tabela 7.4a: $\chi^2=140.7$, 1 g.l., $p < .001$); do mesmo modo, tomando-se apenas os dados para as amostras A5 (única sem maioria significativa de CAR+ ou CAR-), a contingência entre CAR e CON é significativa (Tabela 7.4b; P.Fisher, $p_{unil.} < .001$), o que não permite que se atribua este resultado ao efeito comum da idade sobre as variáveis. Tomando-se os dados da Tabela 3.6b (A4-A5) e os reagrupando em função de CON (Tabela 7.4c), constatamos que a Contagem (CON) se mostra um melhor indicador acerca da Resposta Cardinal (CAR; $\chi^2=19.13$, 1 g.l., $p_{unil.} < .00005$) do que a idade ($\chi^2=10.23$, $p_{unil.} < .005$).

TABELA 7.4

Contagem X Resposta Cardinal

	(a) N = 200		(b) A5 (N=20)		(c) A4+A5 (N=40)	
	CON=0-1	CON=2-7	CON=0-1	CON=2	CON=0-1	CON=2
CAR-	38	3	6	0	21	2
CAR+	7	152	2	12	3	14

Os dados apontam para uma grande semelhança no comportamento das variáveis COR e CAR: a Figura 7.3a mostra as curvas de ocorrência de COR+ e CAR+, enquanto que a Figura 7.3b e a Tabela 7.5 apresentam as frequências associadas às combinações possíveis entre ambas (incluímos aqui apenas as amostras A3 a A6, já que COR- e CAR- foram observadas apenas entre os pré-escolares):

FIGURA 7.3

Correspondência 1-a-1 (COR) x Resposta Cardinal (CAR): (a) isoladas; (b) combinadas

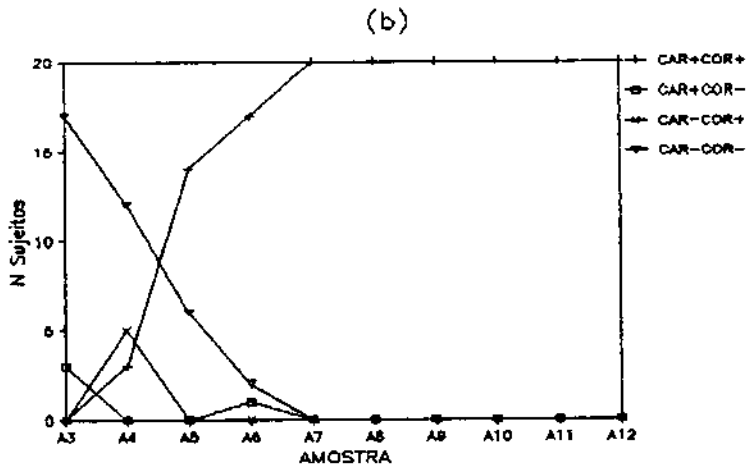
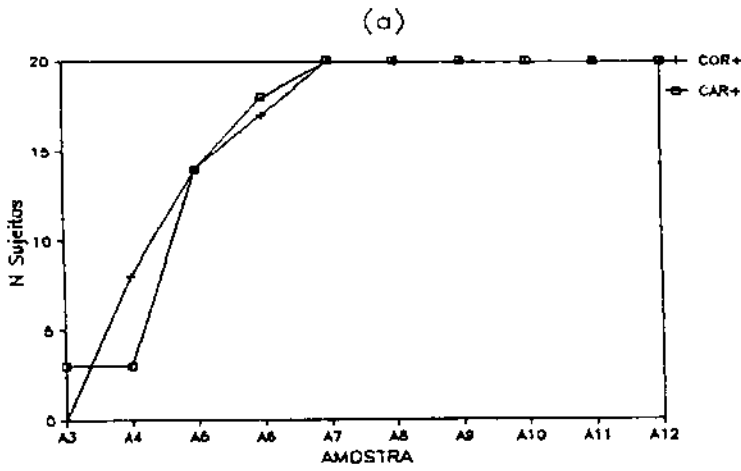


TABELA 7.5

Resposta Cardinal X Correspondência 1-a-1 (só Creche, A3 a A6, N = 80)

	COR-	COR+
CAR-	37	5
CAR+	4	34

A distribuição de frequências acima é bastante significativa ($\chi^2 = 44.99$, 1 g.l., $p_{unil.} < .0005$); os casos de CAR+/COR+ (como se pode ver na Fig.7.3b), com frequência bastante baixa em A4, são majoritários a partir de A5 (e **significativamente** majoritários, em relação às outras combinações reunidas, em A6: P.Binomial, bilateral, $p = .002$).

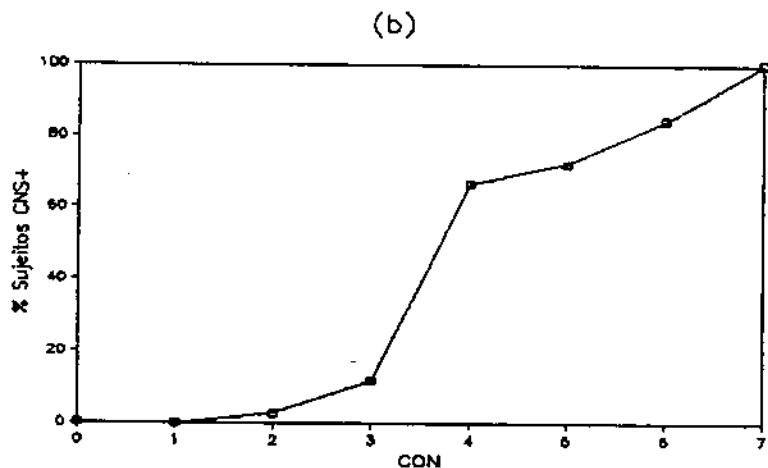
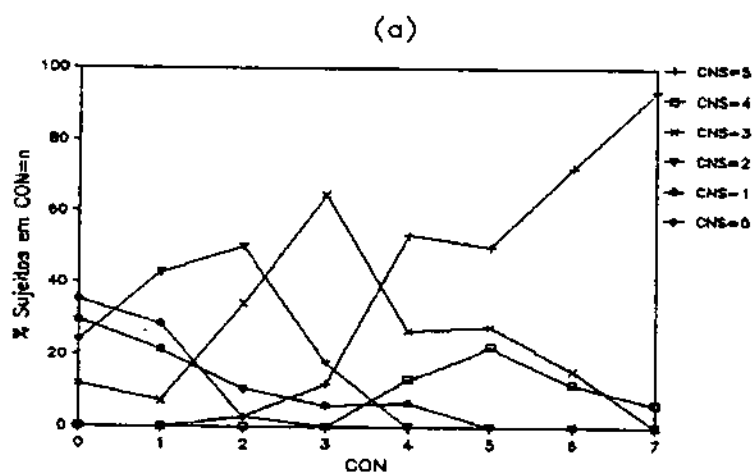
7.1.2 - Contagem e Conservação

A tabela 7.6 registra as frequências absolutas de ocorrência para Conservação (CNS) x Contagem (CON), enquanto a Figura 7.4a mostra estes dados sob a forma de frequências relativas.

TABELA 7.6
Conservação X Contagem

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
CNS=0	6	8	0	0	0	0	0	0
CNS=1	5	6	4	1	1	0	0	0
CNS=2	4	12	20	3	0	0	0	0
CNS=3	2	2	13	11	4	5	8	0
CNS=4	0	0	0	0	2	4	6	1
CNS=5	0	0	1	2	8	9	27	15

FIGURA 7.4
Contagem (CON) x Conservação (CNS): (a) CNS=0-5; (b) CNS+



Pela Figura 7.4a, pode-se constatar que CNS=0-2 (as formas mais "irregulares" de "não-conservação" do número e os casos que sequer afirmavam a igualdade inicial) predominam entre as crianças com CON=0-2; CNS=2 (semelhante à não-conservação "típica" mas sem afirmar a igualdade inicial) foi a resposta mais numerosa (50%) entre as crianças de CON=2 (Lcpl - limite da contagem sem erros sistemáticos - entre 20 e 99), seguido de perto por CNS=3 (não-conservadores "típicos": compreendem a correspondência inicial entre as fileiras, mas não a conservam diante das transformações no comprimento daquelas); para CON=3 (Lcpl **entre 100 e 999**) os não-conservadores "típicos" tornam-se maioria (64.7%); a partir de CON=4 (crianças que contam pelo menos até mil), a maioria é dos "conservadores" (CNS=4-5) - que constituem a quase totalidade (93.8%) dos sujeitos em CON=7 (Lcpl = 1 bilhão ou mais).

Fica evidente na Figura 7.4b o salto na porcentagem de ocorrência de CNS+ (CNS=4-5, conservadores) entre as crianças de CON=3 e CON=4 (Lcpl abaixo ou acima de 1000). O nível de contingência entre CNS+/- e CON=0-3/CON=4-7 é extremamente elevado (Tabela 7.7a; $\chi^2 = 124.5$, 1 g.l., $p < .001$); se tomarmos apenas os dados para A8 e A9 (sem maioria significativa de CNS+ ou CNS - Prova Binomial) a contingência ainda se mostra significativa (Tabela 7.7b; P.Fisher, $p_{unil.} < .05$), enquanto que os mesmos dados reagrupados por amostra não o são (Tabela 7.7c, $\chi^2 = .94$). E mesmo para A8, isolada, a contingência é significativa (Tabela 7.7d, P.Fisher, $p_{unil.} < .05$). Uma indicação adicional de que CON=4 ($1000 \leq Lcpl < 100.000$) corresponde a uma faixa de transição na conservação é o fato de que se esta categoria for subdividida entre sujeitos que contam até menos ou mais do que 10.000, a contingência com CNS+ em A8 se torna ainda mais significativa (comparar a Tabela 7.7d com 7.7e, onde $p < .01$ - P. Fisher).

TABELA 7.7

Conservação X Contagem

		(a) N = 200 CON=0-3 CON=4-7		(b) A8+A9 (N=40) CON=0-3 CON=4-7	
CNS-		97	18	6	10
CNS+		3	82	1	23
		(c) N = 40 A8 A9		(d) A8 (N=20) CON=0-3 CON=4-7	
CNS-		10	6	5	5
CNS+		10	14	0	10
		(e) A8 (N=20) Lcpl: < 10.000 >= 10.000			
CNS-		7	3		
CNS+		1	9		

Os casos de associações (positivas) significativas entre categorias nas variáveis CON e CNS - calculadas através do método do Resíduo Padrão - estão indicadas na Tabela 7.8.

TABELA 7.8

CON x CNS - Resíduo Padrão (Níveis de significância)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
CNS=0	.0001	.0001	-	-	-	-	-	-
CNS=1	.01	.01	-	-	-	-	-	-
CNS=2	-	.01	.0001	-	-	-	-	-
CNS=3	-	-	-	.001	-	-	-	-
CNS=4	-	-	-	-	-	.01	-	-
CNS=5	-	-	-	-	-	-	.0001	.0001

7.1.3 - Conservação, Correspondência e Resposta Cardinal

Quanto à contigência entre CNS+ e as variáveis COR+ (Figura 7.5a) e CAR+ (Figura 7.5b), podemos notar, antes de mais nada, que nunca se observam erros de Correspondência (COR-) ou de Resposta Cardinal (CAR-) entre os "conservadores" (CNS+); em ambos os casos, há no entanto um numeroso grupo intermediário de sujeitos (v. também as Tabelas 7.9 e 7.10), considerados CAR+ (ou COR+) porém CNS- (não-conservadores): CAR+/CNS- foi observado de A4 a A10 e COR+/CNS- de A3 a A10; nos dois casos, estes grupos tem uma distribuição aproximadamente normal ao longo das amostras, com a moda em A6.

TABELA 7.9

Conservação X Correspondência 1-a-1

	COR-	COR+
CNS-	41	74
CNS+	0	95

TABELA 7.10

Conservação X Resposta Cardinal

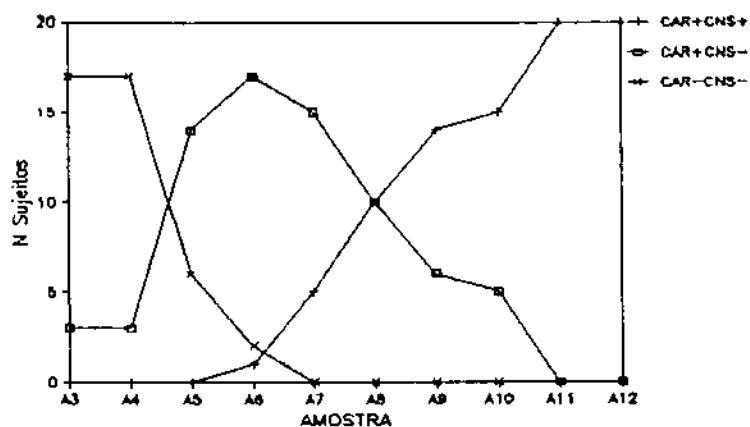
	CAR-	CAR+
CNS-	42	73
CNS+	0	85

Se voltarmos à Tabela 7.5, perceberemos que os sujeitos dos grupos CAR+/CNS- e COR+/CNS- são, a grosso modo, os mesmos, constituindo o grupo CAR+/COR+/CNS- da Figura 7.5c (muito semelhante às duas anteriores), onde as três variáveis são combinadas. Este padrão de respostas foi característico, portanto, das crianças de

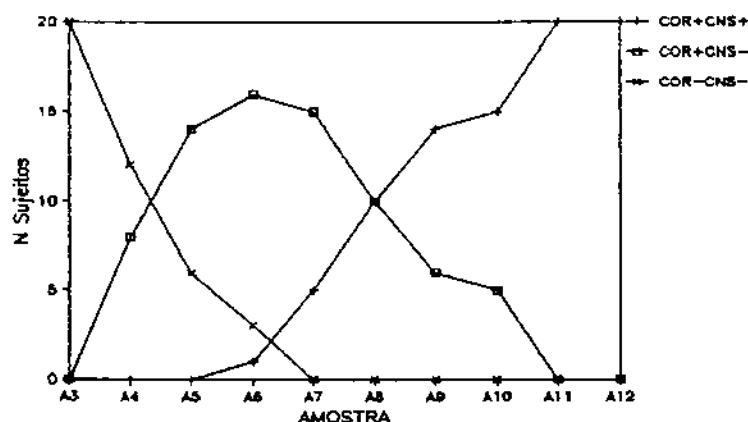
cinco ate oito ou nove anos de idade.

FIGURA 7.5

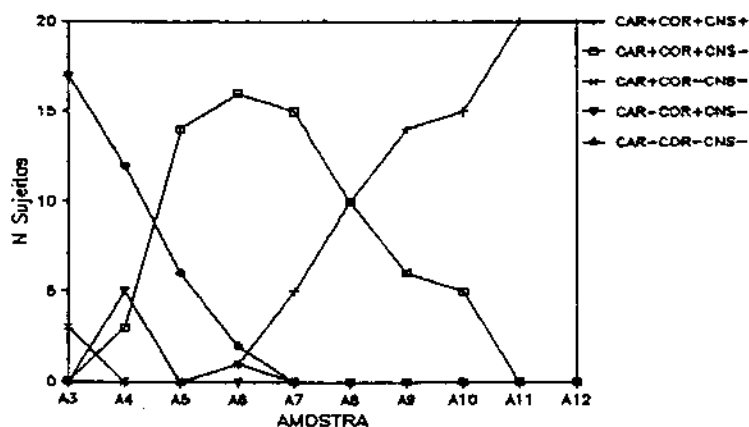
Conservação (CNS) x Resposta Cardinal (CAR) x Correspondência 1-a-1
 (a) CAR+CNS; (b) COR+CNS; (c) CAR+COR+CNS



(a)



(b)



(c)

7.2 - Infinitude, Contagem e Conservação

Trataremos agora das inter-relações entre as variáveis associadas ao conceito de infinitude (INF, NIN e USO) e as variáveis Contagem (CON) e Conservação (CNS).

Não nos deteremos na relação entre as variáveis CAR e COR e INF/NIN/USO, já que estas são triviais: todos os sujeitos

INF+/NIN+/USO+ são também CAR+ e COR+. Não seria pertinente comparar INF, NIN e USO entre si, uma vez que estas variáveis são interdependentes, como assinalamos no Capítulo 6.

7.2.1 - Infinitude e Contagem

7.2.1.1 - USO x CON

As frequências absolutas para USO x CON estão na Tabela 7.11, as frequências relativas, na Figura 7.6:

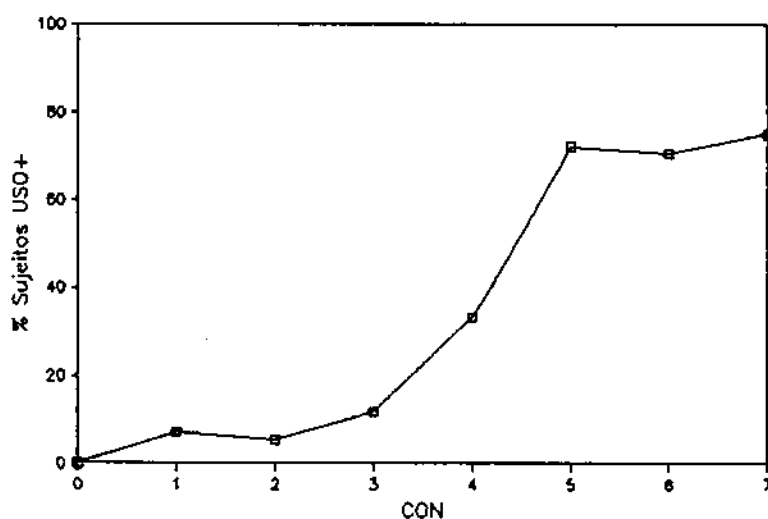
TABELA 7.11

Uso esp. do termo "Infinito" X Contagem

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
USO=0(-)	17	26	36	15	10	5	15	4
USO=1(+)	0	2	2	2	5	13	36	12

FIGURA 7.6

Uso espontâneo da palavra "infinito" (USO) x Contagem (CON)



USO+ constitui a maioria dos casos para CON=5 em diante - embora a diferença só seja significativa para CON=6 (P. Binomial, N=51, $z=2.8$, $P_{\text{bilat.}} < .01$); a contingência entre USO+/- e CON=0-4 / CON=5-7 (Tabela 7.12a) é significativa ($\chi^2 = 79.39$, 1 g.l., $p < .001$). A verificação da contingência entre USO e CON entre os sujeitos de A9, apenas (sem maioria significativa de USO+ ou USO-; Tabela 7.12b) não mostra resultados significativos (P. Fisher, $p_{\text{unil.}} = .15$), em função do pequeno número de sujeitos CON=0-4 (N=3, minoria significativa - P. Binomial). Se, no entanto, sanarmos esta falta somando os sujeitos de A8 e A9 (Tabela 8.12c), a contingência se mostra significativa ($\chi^2 = 6.59$, 1 g.l., $p_{\text{unil.}} < .01$) - ao passo que os mesmos dados, arranjados por amostra (X USO, Tabela 7.12d) não registram uma contingência significativa ($\chi^2 = .99$).

TABELA 7.12

Uso esp. do termo "Infinito" X Contagem

(a) N = 200 CON=0-4 CON=5-7			(b) A9 (N=20) CON=0-4 CON=5-7		
USO-	104	24	3	3	
USO+	11	61	0	9	
(c) A8+A9 (N=40) CON=0-4 CON=5-7			(d) A8+A9 (N=40) A8 A9		
USO-	14	12	15	11	
USO+	1	13	5	9	

A contingência entre as categorias de USO e CON, calculada através do Resíduo Padrão, está indicada na Tabela 7.13, e confirma as análises anteriores: o uso espontâneo da palavra "Infinito" está associado ao contar até pelo menos cem mil (e a ausência deste, ao contar até menos que cem).

TABELA 7.13

CON x USO - Resíduo Padrão (Níveis de significância)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
USO=0	.05	.05	.01	-	-	-	-	-
USO=1	-	-	-	-	-	.01	.0001	.01

7.2.1.2 - NIN x CON

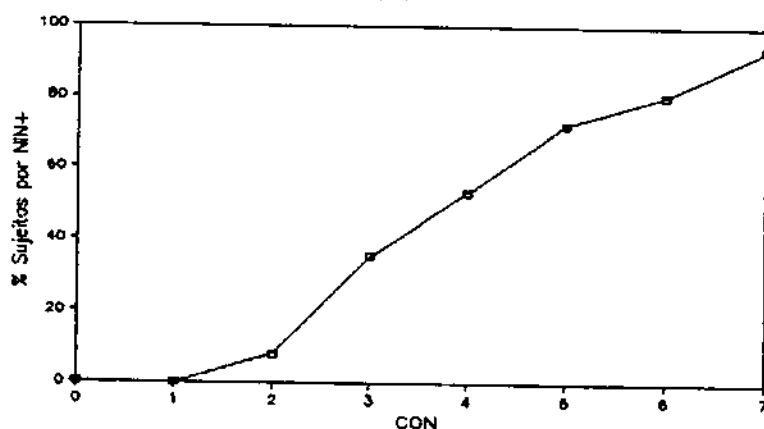
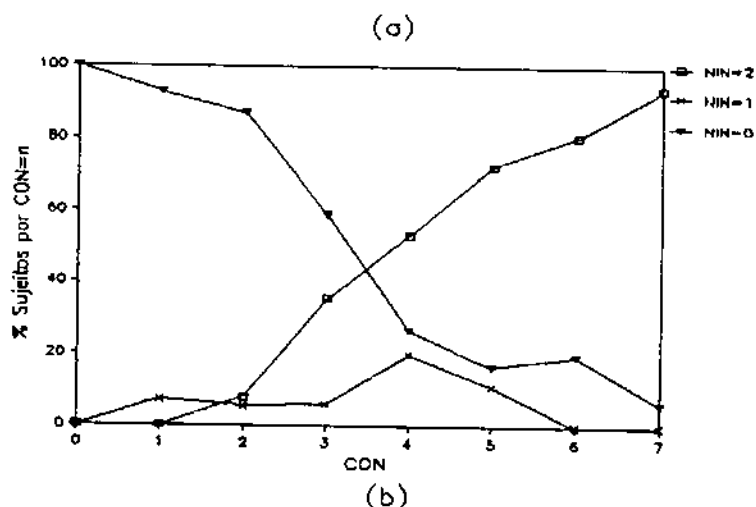
De modo análogo ao item anterior, a Tabela 7.14 traz as frequências absolutas para NIN x CON e a Figura 7.7a mostra os dados sob a forma de frequência relativas (a Figura 7.7b destaca NIN+, que corresponde a NIN=2):

TABELA 7.14

Infinitude do Número X Contagem

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
NIN=0	17	26	33	10	4	3	10	1
NIN=1	0	2	2	1	3	2	0	0
NIN=2	0	0	3	6	8	13	41	15

FIGURA 7.7
 Infinitude do numero (NIN) x Contagem (CON): (a) NIN=0-2; (b) NIN+



Embora a curva para NIN+ x CON seja bastante similar a de INF+ x CON (v. adiante) e NIN+ se torne maioria a partir de CON=4, esta maioria só se torna significativa a partir de CON=6 (P. Binomial, N=51, z=6.44, P_{bilat.} < .0001); a contingência entre CONON>3 e NIN+/- (Tabela 7.15a) é significativa ($\chi^2 = 91.6$, 1 g.l., p < .001). Reduzindo-se o espaço amostral, como anteriormente, a fim de eliminar o efeito da idade, tomamos apenas os dados referentes à amostra A8 (em A8 e A9 não há maioria significativa de NIN+ ou NIN-, mas em A9 há apenas 2 sujeitos CON=0-3, o que inviabiliza a análise estatística), mostrados na Tabela 7.15b; constata-se que persiste a contingência significativa entre NIN e CON (P. Fisher, P_{unil.} < .01).

TABELA 7.15

Infinitude do Número X Contagem

	(a) N = 200		(b) A8 (N=20)	
	CON=0-3	CON=4-7	CON=0-3	CON=4-7
NIN-	86	11	5	4
NIN+	14	89	0	11

A contingência entre categorias de CON e NIN esta indicada na Tabela 7.16:

TABELA 7.16

CON x NIN - Residuo Padrão: Níveis de significância)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
NIN=0	.01	.01	.01	-	-	-	-	-
NIN=1	-	-	-	-	.01	-	-	-
NIN=2	-	-	-	-	-	.05	.0001	.01

7.2.1.3 - INF x CON

A Tabela 7.17 apresenta as frequências absolutas para INF x CON; os mesmos dados - sob a forma de frequências relativas - são mostrados na Figura 7.8a. A Figura 7.8b destaca a curva relativa a INF+ (INF=2-3). Como se pode notar, a relação entre INF+ e CON é bastante linear, aumentando, a partir de CON=2, até CON=7 (todos os sujeitos INF+), sendo que INF+ se torna majoritário a partir de CON=4 (mas a diferença é estatisticamente significativa apenas a partir de CON=5: P. Binomial, N=18, $p_{\text{bilat.}} = .008$).

TABELA 7.17

Conceito de Infinitude X Contagem

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
INF=0	16	26	24	7	3	1	2	0
INF=1	1	2	7	3	3	2	0	0
INF=2	0	0	5	3	3	6	17	5
INF=3	0	0	2	4	6	9	32	11

Comparando-se CON=0-3 e CON=4-7 (Lcpl acima ou abaixo de 1000), verificamos um elevado índice de contingência em relação a INF+ (Tabela 7.18a: $\chi^2 = 109.6$, 1 g.l., $p < .001$); as amostras sem maioria significativa (P. Binomial) de INF- ou INF+ são A7 e A8; se tomadas isoladamente (Tabelas 7.18b-c), a contingência se mostra significativa apenas em A8 (P. Fisher, $p_{\text{unil.}} < .01$). Somando os dados de A8 e A9, obtivemos os valores mostrados na Tabela 7.18d, que correspondem a uma contingência significativa ($\chi^2 = 5.29$, 1 g.l., $p_{\text{unil.}} < .025$), enquanto que os mesmos dados, reagrupados por amostra (X INF, Tabela 7.18e) não atingem a significância estatística ($\chi^2 = .91$).

FIGURA 7.8
 Conceito de Infinitude (INF) x Contagem (CON): (a) INF=0-3; (b) INF+

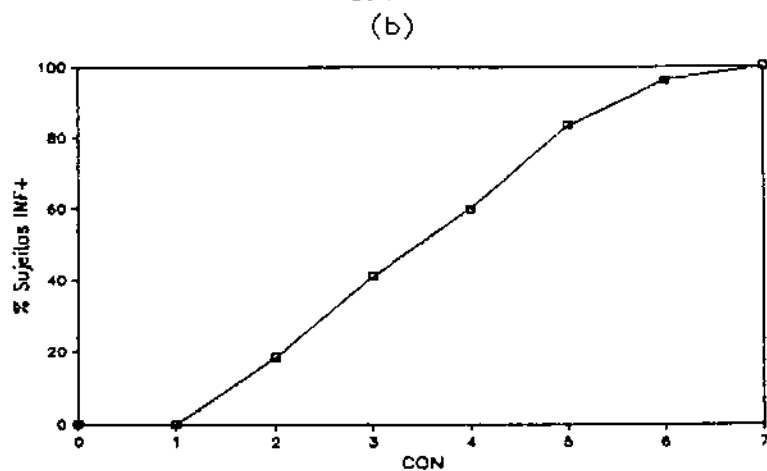
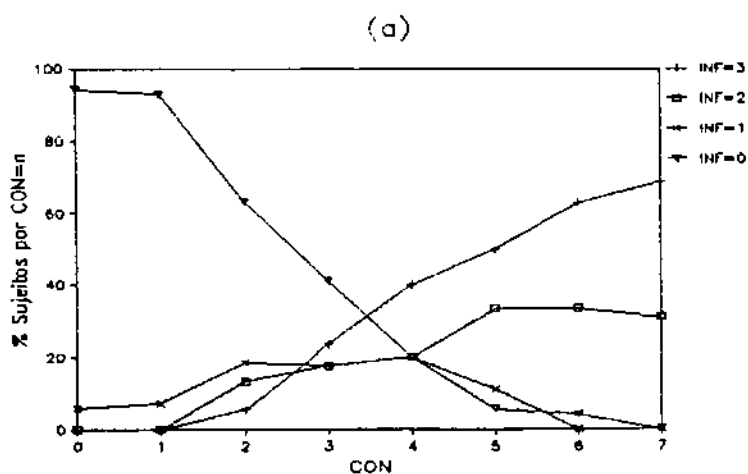


TABELA 7.18

Conceito de Infinitude X Contagem

(a) N = 200		(b) A7 (N=20)		(c) A8 (N=20)		(d) A7+A8 (N=40)		(e) A7+A8 (N=40)	
CON=0-3	CON=4-7	CON=0-3	CON=4-7	CON=0-3	CON=4-7	CON=0-3	CON=4-7	A7	A8
INF-	86	11	9	5	4	14	8	13	9
INF+	14	89	4	0	11	4	14	7	11

A contingência entre categorias em INF e CON é mostrada na Tabela 7.19:

TABELA 7.19

CON x INF - Resíduo Padrão (Níveis de significância)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
INF=0	.001	.0001	.05	-	-	-	-	-
INF=1	-	-	.05	-	-	-	-	-
INF=2	-	-	-	-	-	-	.05	-
INF=3	-	-	-	-	-	-	.0001	.01

7.2.2 - Infinitude e Conservação

7.2.2.1 - USO x CNS

A Figura 7.9a mostra as curvas de CNS+ e USO+ ao longo das amostras A3 a A12. Os dados da Tabela 7.20 (frequências absolutas) e das Figuras 7.9b e 7.9c (frequências relativas) mostram um aumento gradual na ocorrência do uso espontâneo do termo "Infinito" na entrevista, em relação à categoria de desempenho na prova de conservação (CNS=0-5); o número de sujeitos USO+ é minoritário entre as categorias CNS=0-3 ("não-conservadores"), corresponde a cerca de 50% dos casos em CNS=4 (conservadores "vacilantes" - este grupo, entretanto, contém apenas 13 sujeitos) e constitui a maioria (70.8%) de CNS=5 (P. Binomial, $z=3.42$, $P_{bilat.} < .001$).

TABELA 7.20

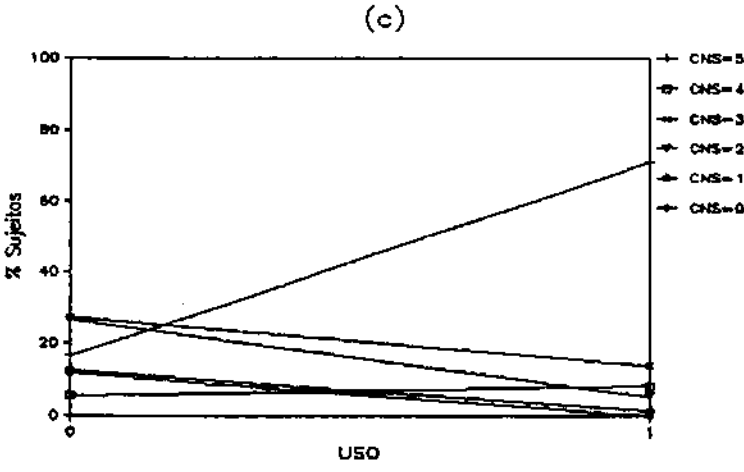
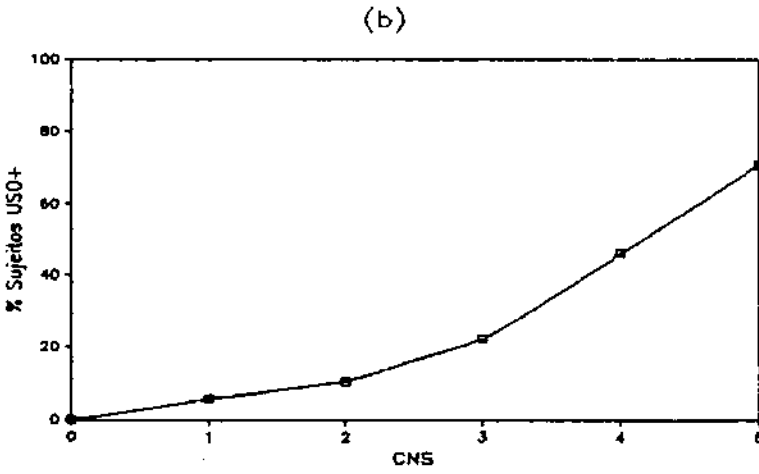
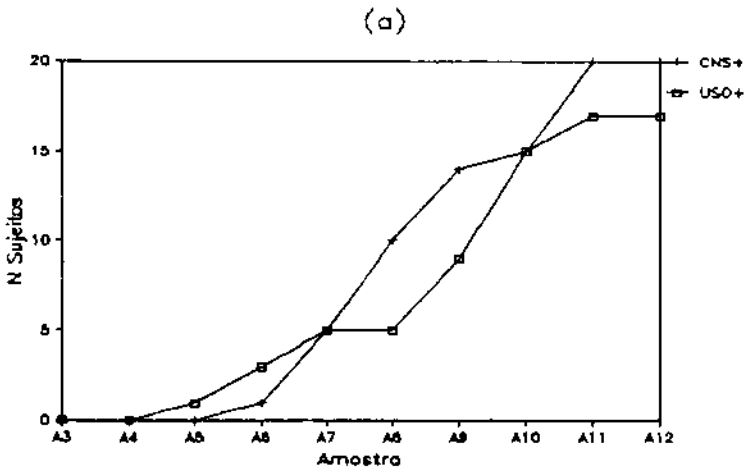
Uso espontâneo do termo "Infinito" X Conservação

CNS	0	1	2	3	4	5
USO=0	15	16	34	35	7	21
USO=1	0	1	4	10	6	51

FIGURA 7.9

Uso espontâneo da palavra "infinito" (USO) x Conservação (CNS)

(a) USO+ e CNS+ por Amostra; (b) USO+ x CNS; (c) CNS=0-5 x USO



A contingência entre estas variáveis é bastante significativa, se levarmos em consideração todas as amostras (Tabela 7.21a, $\chi^2 = 59.6$, 1 g.l, $p < .001$); entretanto, restringindo a análise às amostras A8/A9 (faixa etária em que se encontra um número suficiente de casos "+" e

"-" em cada variável para permitir comparações), esta contingência não chega a ser significativa (Tabela 7.21b, $\chi^2=.55$).

TABELA 7.21
USO X CNS

	(a) N = 200		(b) A8+A9 (N=40)	
	CNS-	CNS+	CNS-	CNS+
USO-	100	28	12	4
USO+	15	57	14	10

A contingência entre categorias de USO e CNS está indicada na Tabela 7.22:

TABELA 7.22
USO X CNS - Resíduo Padrão (Níveis de significância)

CNS	0	1	2	3	4	5
USO=0	.01	(.1)	.01	-	-	-
USO=1	-	-	-	-	-	.0001

7.2.2.2 - NIN x CNS

As frequências de ocorrência para NIN x CNS se encontram na Tabela 7.23 (frequência absoluta) e nas Figuras 7.10a-c (frequência relativa):

TABELA 7.23
Infinitude do Número X Conservação

CNS	0	1	2	3	4	5
NIN=0	14	13	35	29	4	9
NIN=1	0	1	3	4	0	2
NIN=2	0	3	1	12	9	61

Note-se que, quanto ao desempenho em CNS, os sujeitos classificados como NIN=0 (ausência da noção de infinitude do número) e NIN=1 (noção vaga) se comportam de modo semelhante (Fig. 7.10c), sendo, de modo geral, não-conservadores, enquanto que NIN=2 (NIN+) contém 81.4% de conservadores (P. Binomial, N=86, $z=5.72$, $P_{unilat.} < .0001$). A Figura 7.10d mostra a frequência de NIN+ para cada categoria de CNS.

A contingência entre CNS+ e NIN+ - cujas curvas superpostas ao longo das amostras podem ser vistas na Figura 7.10e - é altamente significativa, se levarmos em conta todas as amostras (Tabela 7.24a;

$\chi^2=90.6$, 1 g.l., $P_{\text{unil}} < .0005$); comparando-se apenas A8 e A9, amostras onde não há maioria significativa de casos "+" ou "-" para nenhuma das duas variáveis, a contingência se mantém (Tabela 7.24b, $\chi^2=3.11$, $P_{\text{unil}} < .05$); os mesmos dados, reagrupados por amostras, não acusam contingências significativas, seja em função de NIN+/- ($\chi^2=0$; Tabela 7.24c), seja em função de CNS+/- ($\chi^2=.94$; Tabela 7.24d).

FIGURA 7.10

Conservação (CNS) x Infinitude do numero (NIN)

(a) NIN x CNS; (b) CNS=1-5 x NIN; (c) CNS+ x NIN; (d) NIN+ x CNS; (e) NIN+ e CNS+ por Amostra

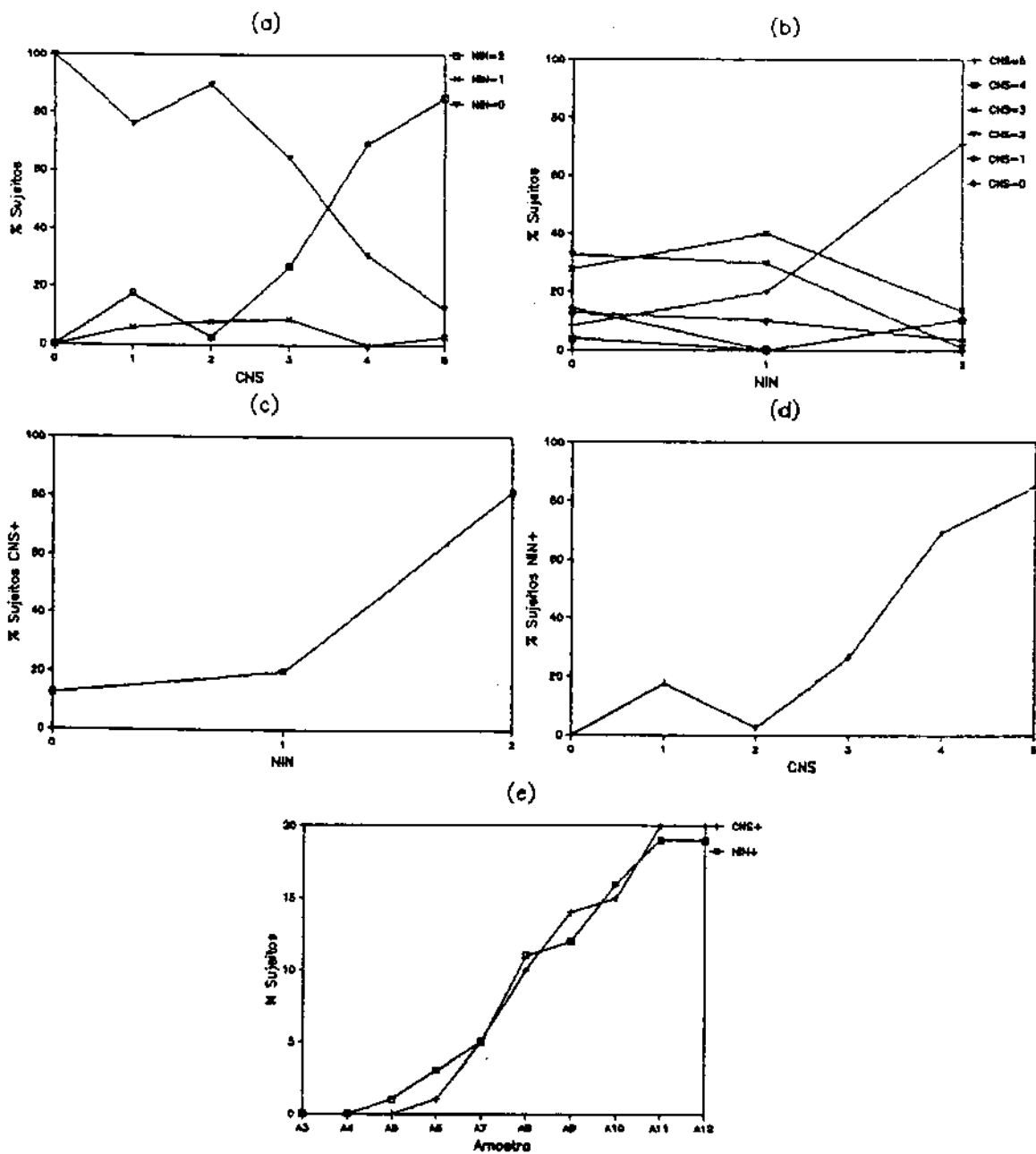


TABELA 7.24

NIN x CNS

	(a) N = 200		(b) A8+A9 (N=40)	
	CNS-	CNS+	CNS-	CNS+
NIN-	99	15	10	7
NIN+	16	70	6	17

	(c) A8+A9 (N=40)		(d) A8+A9 (N=40)	
	A8	A9	A8	A9
NIN-	9	8	CNS- 10	6
NIN+	11	12	CNS+ 10	14

As contingências (positivas) significativas entre categorias de NIN e CNS são mostradas na Tabela 7.25:

TABELA 7.25

NIN x CNS - Resíduo Padrão (Níveis de significância)

NIN	0	1	2
CNS=0	.01	-	-
CNS=1	-	-	-
CNS=2	.001	-	-
CNS=3	-	-	-
CNS=4	-	-	-
CNS=5	-	-	.0001

7.2.2.3 - INF x CNS

A matriz para INF x CNS é mostrada na Tabela 7.26 (freq. absoluta) e na Figuras 7.11a-b (freq. relativa); as Figuras 7.11c e 7.11d apresentam as curvas para, respectivamente, INF+(INF=2-3) x CNS e CNS+(CNS=4-5) x INF:

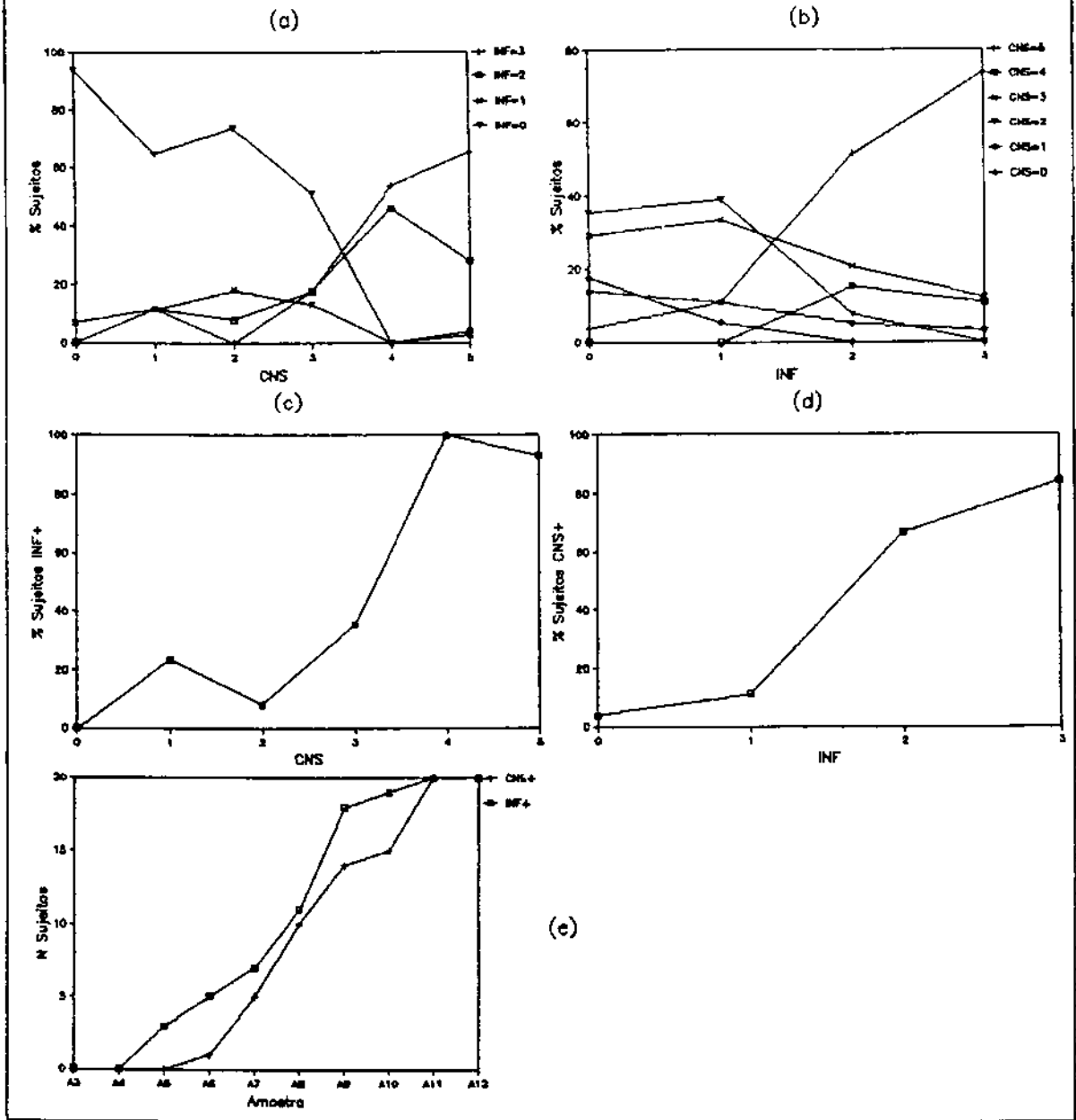
TABELA 7.26

Conceito de Infinitude X Conservação

CNS	0	1	2	3	4	5
INF=0	14	11	28	23	0	3
INF=1	0	2	8	6	0	2
INF=2	0	2	3	8	6	20
INF=3	0	2	0	8	7	47

FIGURA 7.11

Conceito de infinitude (INF) x Conservação (CNS)
 (a) INF=0-3 x CNS; (b) CNS=0-5 x INF; (c) INF+ x CNS; (d) CNS+ x INF; (e) INF+ e CNS+ por Amostra



Um exame das Figuras acima mostra que em INF=0-1 (INF-), os sujeitos são em geral não-conservadores (*latu sensu*), enquanto que em INF=2-3 (INF+), CNS+ constitui a esmagadora maioria (Fig. 7.11d); observe-se, ainda, que nossa subdivisão em INF+ (INF=2 e INF=3, baseada em NIN e na adequação dos exemplos de infinitude fornecidos pelos sujeitos) também parece se justificar em função de CNS: não só a diferença nas freqüências de CNS+/- entre os dois grupos é significativa ($N=103$, $\chi^2 = 3.42$, 1g.l., $p_{unilat} < .05$), como um exame da Fig. 7.11b nos mostra que a freqüência relativa de CNS=5 (conservação "segura") é maior para INF=3 do que para INF=2 ($\chi^2 = 4.30$, 1g.l., $p_{unilat} < .025$).

A Figura 7.11e mostra as curvas de CNS+ e INF+ ao longo das amostras A3 a A12 (idades); a contingência entre CNS+ e INF+ (Tabela

7.27a) é extremamente significativa para a amostra total ($\chi^2 = 104.5$, 1 g.l., $p < .001$). As amostras isoladas são pequenas para testes de qui-quadrado e a Prova de Fisher, nestes casos, não mostra resultados significativos (mas a prova é razoavelmente conservadora); por outro lado, a contingência entre CNS+ e INF+ para as amostras A7 e A8 somadas (amostras onde não há maioria significativa de INF+ ou INF-) é significativa (Tabela 7.27b: $\chi^2 = 3.27$, 1 g.l., $P_{unilat.} < .05$); os mesmos dados, reagrupados por amostras (Tabelas 7.27c-d) não registraram contingências significativas ($\chi^2 = .91$ e 1.71 , respectivamente).

TABELA 7.27

Conceito de Infinitude X Conservação

		(a) N = 200		(b) A7+A8 (N=40)	
		CNS-	CNS+	CNS-	CNS+
INF-	92	5	17	7	
INF+	23	80	8	10	

		(c) A7+A8 (N=40)		(d) A7+A8 (N=40)	
		A7	A8	A7	A8
INF-	13	9	CNS-	15	10
INF+	7	11	CNS+	5	10

A contingência entre categorias de INF e CNS está indicada na Tabela 7.28:

TABELA 7.28

INF x CNS - Resíduo Padrão (níveis de significância)

INF	0	1	2	3
CNS=0	.001	-	-	-
CNS=1	.05	-	-	-
CNS=2	.001	.05	-	-
CNS=3	-	-	-	-
CNS=4	-	-	.05	-
CNS=5	-	-	-	.0001

7.3 - Os testes sobre infinitude e as principais variáveis

7.3.1 - Comparação entre DUR, DIV, CIC e LIM

A ocorrência de respostas "corretas" aos nossos testes sobre infinitude (v. Cap.6) foi, de modo geral, um tanto quanto baixa para permitir análises mais aprofundadas ou testes estatísticos; não obstante, algumas observações gerais podem ser feitas:

Quanto às idades em que as primeiras respostas corretas foram observadas, podemos ordenar os testes da seguinte maneira: A) a pergunta sobre Ciclicidade Infinita (CIC) recebeu a primeira resposta adequada na amostra A8 (oito anos completos), excluindo-se uma única resposta correta na primeira amostra testada (A5); B) a pergunta sobre Duração Infinita (DUR), por sua vez, já produziu respostas corretas quando da sua introdução (A9); C) Subdivisão Infinita (DIV) e Limite (LIM), por outro lado, só foram respondidas adequadamente por uns poucos sujeitos das amostras A11 e A12 (onze ou doze anos completos); D) no que diz respeito às frequências de respostas corretas para a amostra mais velha (A12), obtivemos 1 caso para DIV (5%), 3 casos para LIM (15%), 9 casos para CIC (45%) e 20 casos para DUR (100%); DUR+, como anteriormente dito, já ocorria com uma frequência razoável em A9, mas torna-se *significativamente* majoritário à partir de A11 (P. Binomial, $P_{bilat.} = .002$).

Ao compararmos os sujeitos quanto ao padrão de respostas para os quatro testes em conjunto (considerando apenas as amostras A9 em diante - com todos os testes aplicados), obtivemos as frequências registradas na Tabela 7.29.

TABELA 7.29

Respostas corretas (+) aos testes sobre Infinitude:

PADRÃO	N casos
apenas DIV+:	0
apenas LIM+:	0
apenas CIC+:	4
apenas DUR+:	35
apenas DUR+ e DIV+:	0
apenas DIV+ e LIM+:	0
apenas CIC+ e LIM+:	0
apenas CIC+ e DIV+:	0
apenas DUR+ e LIM+:	4
apenas DUR+ e CIC+:	6
apenas DIV+, CIC+ e LIM+:	0
apenas DIV+, DUR+ e LIM+:	0
apenas DUR+, CIC+ e LIM+:	1
apenas DIV+, DUR+ e CIC+:	2
DIV+, DUR+, CIC+ e LIM+:	0

DUR e CIC se mostraram, portanto, como os testes mais fáceis (mas não comparáveis entre si), LIM se mostrou mais complexo que DUR (mas não comparável com CIC) e DIV, mais complexo que DUR e CIC - e não comparável a LIM.

7.3.2 - DIV, DUR, LIM e CIC x Conceito de Infinitude (INF)

7.3.2.1 - DUR x INF

Os 3 sujeitos INF- testados foram também DUR- e todos os DUR+, INF+ (como seria de se esperar; v. Tabela 7.30); dentre os sujeitos em INF+, 48% dos casos em INF=2 (N=25) foi de DUR-, enquanto DUR+ constituiu a ampla maioria (86.5%) de INF=3 (N=52; Figura 7.13a).

TABELA 7.30

DUR X INF (freqs. absolutas; N=80)

INF	0	1	2	3
DUR=0	0	0	0	1
DUR=1	2	1	10	5
DUR=2	0	0	2	1
DUR=3	0	0	13	45

7.3.2.2 - CIC x INF

Com uma única exceção, todos os sujeitos em CIC+ são INF+ (Tabela 7.31); para o grupo INF=2, as respostas CIC=0-2 constituem maioria (66.7%); a maior parte dos casos de CIC+ (72%) pertence ao grupo INF=3, onde as respostas CIC=4 (CIC+) e CIC=3 ("intermediárias"), somadas, são responsáveis por 64.1% do total (Figura 7.12b).

TABELA 7.31

CIC X INF (freqs. absolutas; N = 160)

INF	0	1	2	3
CIC=0	1	0	1	0
CIC=1	6	3	6	5
CIC=2	31	11	19	18
CIC=3	1	3	7	23
CIC=4 (+)	1	0	6	18

7.3.2.3 - DIV x INF

As 2 únicas respostas corretas (DIV=3) foram dadas por sujeitos INF=3 (Tabela 7.32); porém a curva para a resposta DIV=0 (o papel subdividido infinitamente "desaparece"), que diminui de INF=0 para INF=1, torna a aumentar gradualmente de INF=1 a INF=3, em detrimento das respostas DIV=2 (o papel fica finitamente pequeno) e DIV=1 (resposta dupla: "desaparece" ou fica finitamente pequeno; Figura 7.12c).

TABELA 7.32

DIV X INF (freqs. absolutas; N = 100)

INF	0	1	2	3
DIV=0	5	0	10	26
DIV=1	0	1	6	10
DIV=2	4	2	14	20
DIV=3	0	0	0	2

7.3.2.4 - LIM x INF

Todos os cinco casos de LIM+ (LIM=2) ocorreram entre sujeitos INF=3 (Tabela 7.33a); no que diz respeito à compreensão, ao menos, de que as dimensões do objeto "saltador" não eram relevantes para o problema (LIM=1 + LIM=2; apenas A10 em diante - Tabela 7.33b), apenas três casos foram observados entre os sujeitos INF=2 (N=20), contra 16 em INF=3 (N=39; Figura 7.12d), uma diferença significativa ($\chi^2 = 3.0$, 1g.l., $P_{unilat.} < .05$).

TABELA 7.33

LIM X INF (freqs. absolutas)

(a) total (N = 160)

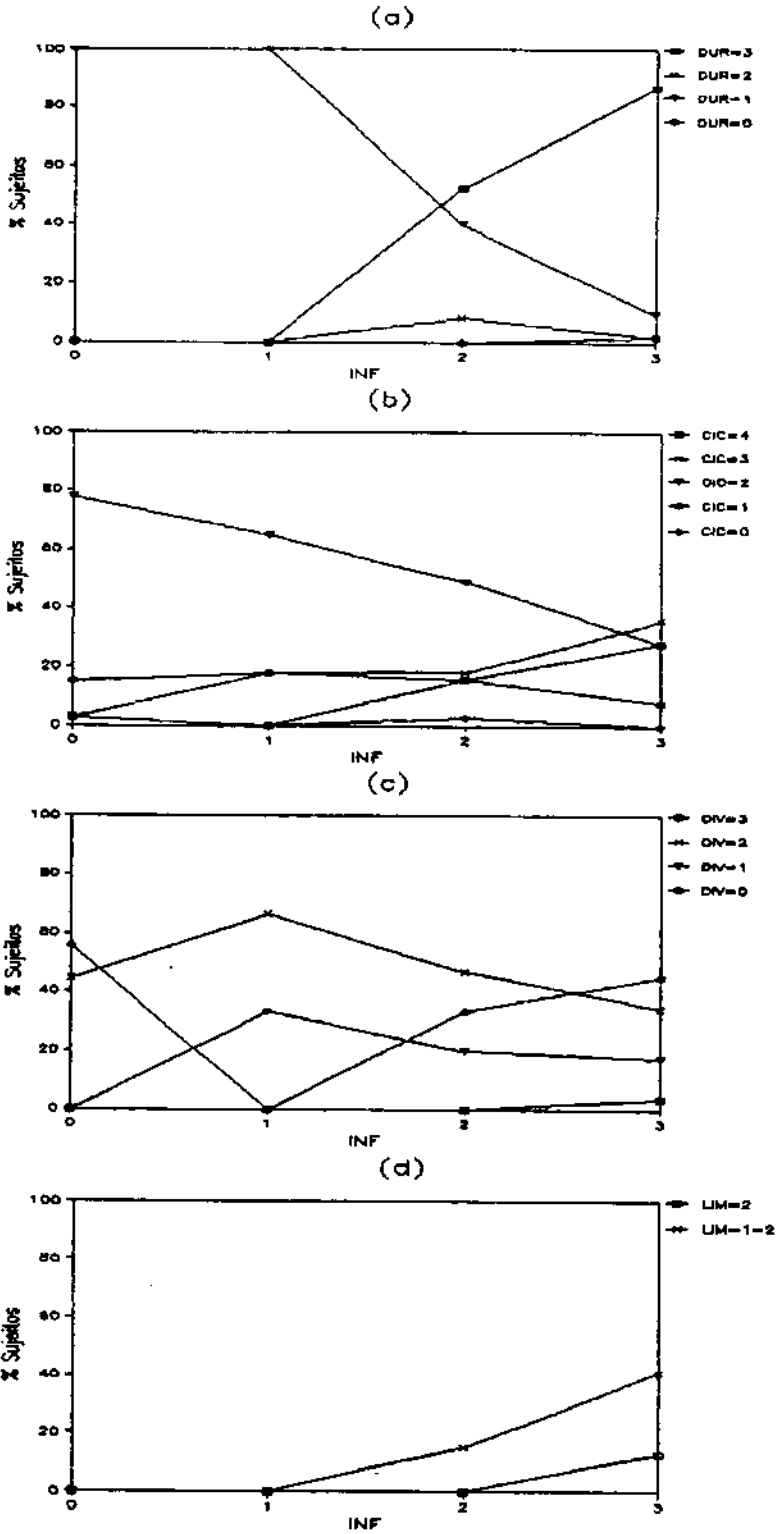
INF	0	1	2	3
LIM=0-1	40	17	39	59
LIM=2	0	0	0	5

(b) A10 - A12 (N = 60)

INF	0	1	2	3
LIM=0	1	0	17	23
LIM=1-2	0	0	3	16

FIGURA 7.12

Testes sobre infinitude (DUR, CIC, DIV e LIM) x Conceito de infinitude (INF)
 (a) DUR x INF; (b) CIC x INF; (c) DIV x INF; (d) LIM x INF (A10-A12)



7.3.3 - DIV, DUR, LIM e CIC x Conservação

7.3.3.1 - DUR x CNS

Os sujeitos que responderam que uma pedra cai "para sempre" (ou similar) num poço sem fundo (DUR+) foram sem exceção, conservadores ou não-conservadores "típicos" (CNS=3-5); por outro lado, o único conservador "atípico" testado (CNS=1) foi classificado como DUR=0 (Tabela 7.34):

"... não sei... (Quanto tempo...etc?) ... 100 mil quilômetros... não sei"
(9/04)

Como se pode notar na Figura 7.13a, o padrão de resposta predominante entre os sujeitos CNS=3 e DUR=1 (durações de tempo finitas).

TABELA 7.34

DUR X CNS (frequências absolutas)

CNS	0	1	2	3	4	5
DUR=0	0	1	0	0	0	0
DUR=1	0	0	0	7	3	2
DUR=2	0	0	0	1	1	1
DUR=3 (+)	0	0	0	2	6	50

7.3.3.2 - CIC x CNS

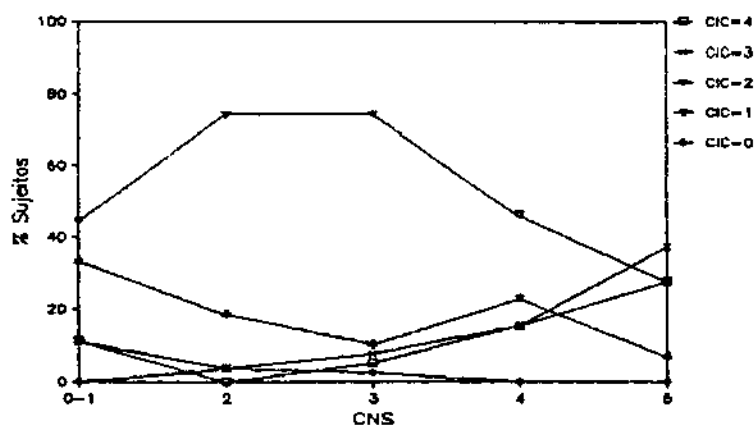
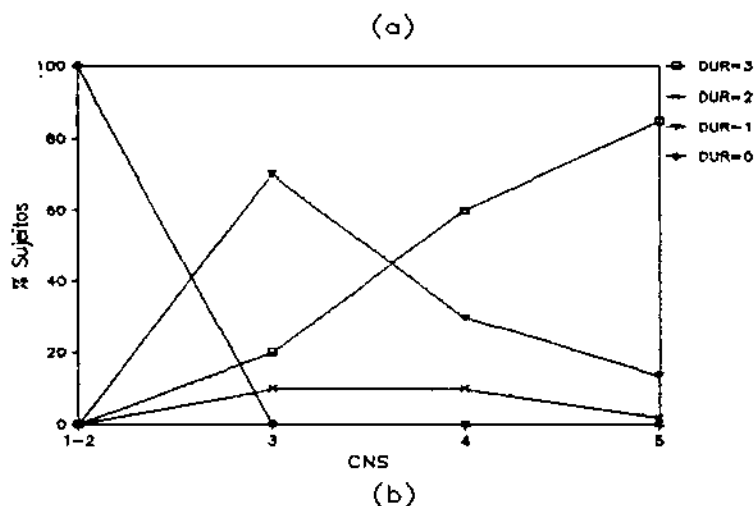
Como mostra a Tabela 7.35, apenas um sujeito CNS=0 foi testado (CIC=1 - uma volta); apenas uma resposta CIC+ foi registrada entre os não-conservadores "atípicos" (CNS=0-2), o mesmo ocorrendo entre os não-conservadores "típicos" (CNS=3); CIC=2 (trajeto finito) foi a resposta padrão para os não-conservadores CNS=2-3 (Figura 7.13b); as curvas para CIC=4 (trajeto infinito) e CIC=3 (resposta ambígua entre CIC=2 e CIC=4) aumentam gradualmente a partir de CNS=2, mas apenas somadas constituem a maioria (não significativa) das respostas entre os sujeitos CNS=5 (conservadores "perfeitos").

TABELA 7.35

CIC X CNS (frequências absolutas)

CNS	0	1	2	3	4	5
CIC=0	0	0	1	1	0	0
CIC=1	0	3	5	4	3	5
CIC=2	1	3	20	29	6	20
CIC=3	0	1	1	3	2	27
CIC=4 (+)	0	1	0	2	2	20

FIGURA 7.13
 Testes sobre infinitude (DUR, CIC, DIV e LIM) x Conservação (CNS)
 (a) DUR x CNS; (b) CIC x CNS



7.3.3.3 - DIV x CNS

Os dois únicos sujeitos DIV+ (DIV=3) foram conservadores "perfeitos" (CNS=5), como indica a Tabela 7.36:

"Ele (o papel) vai sempre diminuindo... (- e fica de que tamanho?) ... vai ficar infinitamente pequeno" (11/09);

"Não dá pra ver... (- de que tamanho?) ... minúsculo, menor que... ah, daí é infinito... infinitamente... porque v. corta na metade..." (12/14).

TABELA 7.36

DIV X CNS (frequências absolutas)

CNS	0	1	2	3	4	5
DIV=0	0	1	0	7	7	26
DIV=1	0	0	0	2	0	15
DIV=2	0	1	0	10	6	23
DIV=3 (+)	0	0	0	0	0	2

7.3.3.4 - LIM x CNS

Não apenas os cinco sujeitos que responderam que os objetos "saltadores" teriam de dar um número infinito de pulos para chegar ao fim do trajeto (LIM=2) eram todos CNS=5 (conservadores "perfeitos"), como também os 14 que, embora tenham mencionado números finitos de pulos, deram respostas iguais para os três objetos (LIM=2), não levando em conta as diferentes dimensões dos objetos (irrelevantes), conforme mostra a Tabela 7.37.

TABELA 7.37

LIM X CNS (frequências absolutas)

CNS	0	1	2	3	4	5
LIM=0	1	8	27	39	13	53
LIM=1*	0	0	0	0	0	14
LIM=2 (+)	0	0	0	0	0	5

(* só a partir de A10)

7.3.4 - DIV, DUR, LIM e CIC x Contagem

7.3.4.1 - DUR x CON

Para todos os sujeitos testados, foi observado um L_{cpl} superior a 100 (CON=3-7), sendo que apenas 2 ocorrências de CON=3 (um deles, o único caso de DUR=0) e 3 de CON=4 (Tabela 7.38); não foi observada qualquer interação significativa entre CON e DUR (Figura 7.14a)

TABELA 7.38

DUR X CON (frequências absolutas)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
DUR=0	0	0	0	1	0	0	0	0
DUR=1	0	0	0	0	1	4	10	3
DUR=2	0	0	0	0	0	2	1	0
DUR=3	0	0	0	1	2	8	34	13

7.3.4.2 - CIC x CON

Apenas 1 caso de CON=0 testado (resposta: CIC=2); CIC=2 (percurso finito) foi a resposta majoritária para os sujeitos em CON=2-4 ($19 < L_{cpl} < 10.000$), constituindo a quase totalidade (1 exceção) dos sujeitos em CON=3 ($99 < L_{cpl} < 1000$; Tabela 7.39). A frequência relativa de CIC=2 diminui, de CON=3 em diante - dando lugar a CIC=4 e CIC=3 (percurso infinito e respostas ambíguas, entre CIC=2 e CIC=4), sendo que o desempenho dos sujeitos CON=6 e CON=7 foi, no que diz respeito a CIC, praticamente igual (Figura 7.14b).

TABELA 7.39
CIC X CON (frequências absolutas)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
CIC=0	0	1	0	1	0	0	0	0
CIC=1	0	3	7	0	2	3	4	1
CIC=2	1	4	24	16	10	8	12	4
CIC=3	0	0	2	0	2	5	19	6
CIC=4 (+)	0	0	1	0	1	2	16	5

7.3.4.3 - DIV x CON

Somente um sujeito testado com L_{cpl} inferior a 100 (os restantes, CON=3-7; Tabela 7.40); as únicas 2 respostas DIV=3 foram dadas por um sujeito de CON=4 e outro de CON=5; não observamos qualquer tendência significativa na interação CON X DIV (Figura 7.14c).

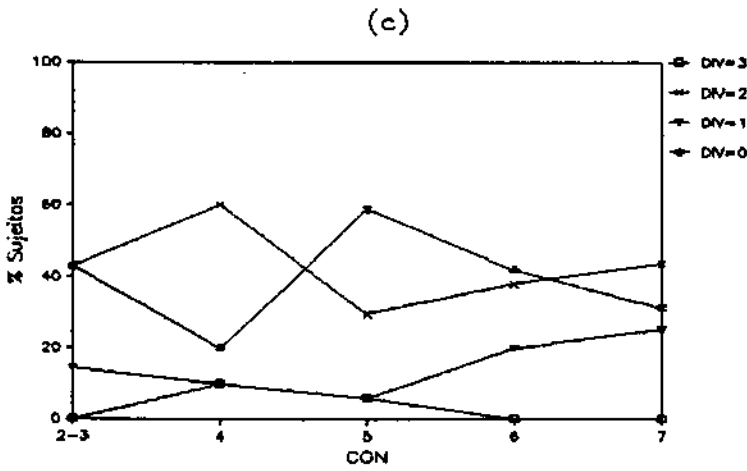
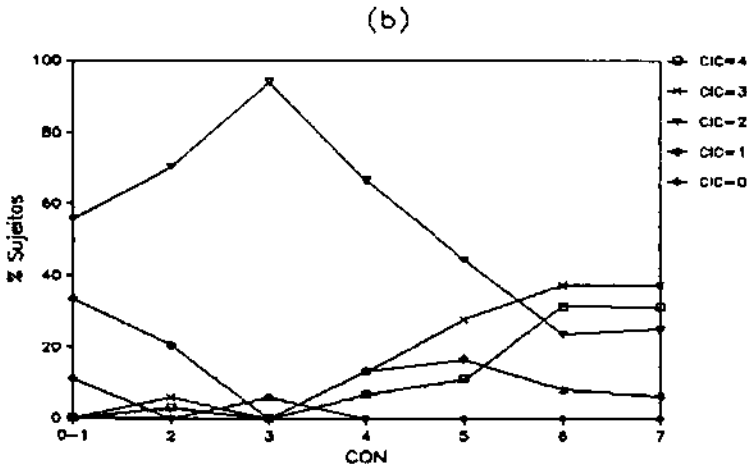
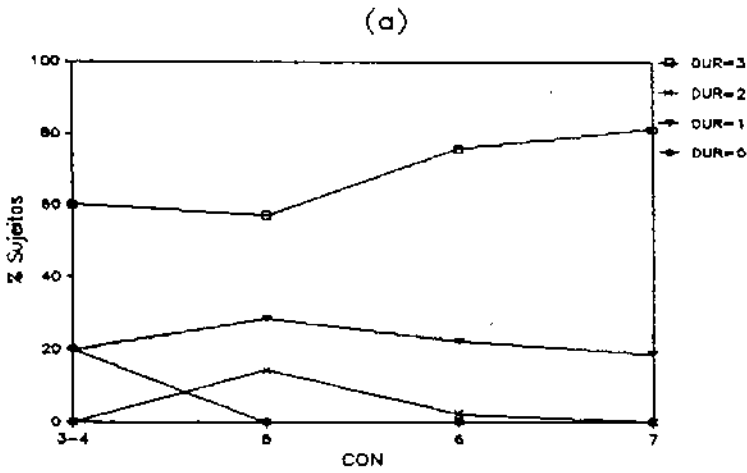
TABELA 7.40
DIV X CON (frequências absolutas)

CON	0	1	2	3	4	5	6	7
DIV=0	0	0	0	3	2	10	21	5
DIV=1	0	0	0	1	1	1	10	4
DIV=2	0	0	1	2	6	5	19	7
DIV=3 (+)	0	0	0	0	1	1	0	0

FIGURA 7.14

Testes sobre infinitude (DUR, CIC, DIV e LIM) x Contagem (CON)

(a) DUR x CON; (b) CIC x CON; (c) DIV x CON



7.3.4.4 - LIM x CON

Foram testados sujeitos representando todas as faixas de desempenho no contar (CON=0-7) - embora houvesse só um caso de CON=0 e oito de CON=1: nenhum sujeito até CON=4, (inclusive; Lcpl abaixo de 100.000) forneceu a resposta correta, e apenas o fizeram um sujeito em CON=5, três em CON=6 e um em CON=7 (o que

corresponde a cerca de 6% de cada grupo - Tabela 7.41a e Figura 7.15a). Do teste com três objetos (A10-A12), participaram apenas sujeitos CON=4-7, sendo que os dois únicos em CON=4 não responderam sequer com valores iguais no número de pulos necessário para cada objeto (LIM=0) e, dentre os grupos restantes (CON=5/6/7), as respostas LIM=2-3 (resposta igual para os três objetos) ocorreram com frequências relativas bastante semelhantes (Figura 7.15b; frequências absolutas na Tabela 7.41b).

TABELA 7.41

LIM X CON (frequências absolutas)
(a) total (A5 - A12)

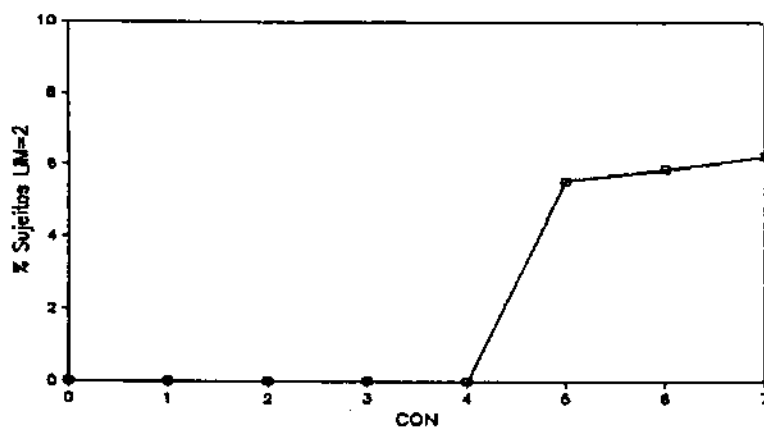
CON	0	1	2	3	4	5	6	7
LIM=0-1	1	8	34	17	15	17	48	15
LIM=2	0	0	0	0	0	1	3	1

(b) A10 - A12

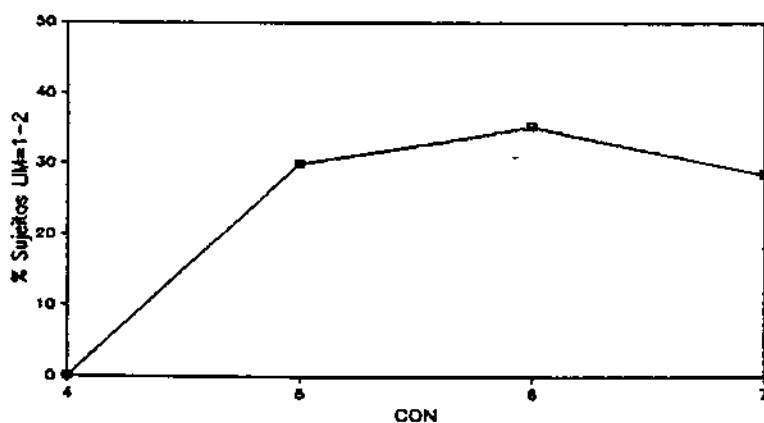
CON	0	1	2	3	4	5	6	7
LIM=0	0	0	0	0	2	7	22	10
LIM=1-2	0	0	0	0	0	3	12	4

FIGURA 7.15

LIM x Contagem (CON): (a) LIM=2 (total: A5-A12); (b) LIM=1-2 (A10-A12)



(a)

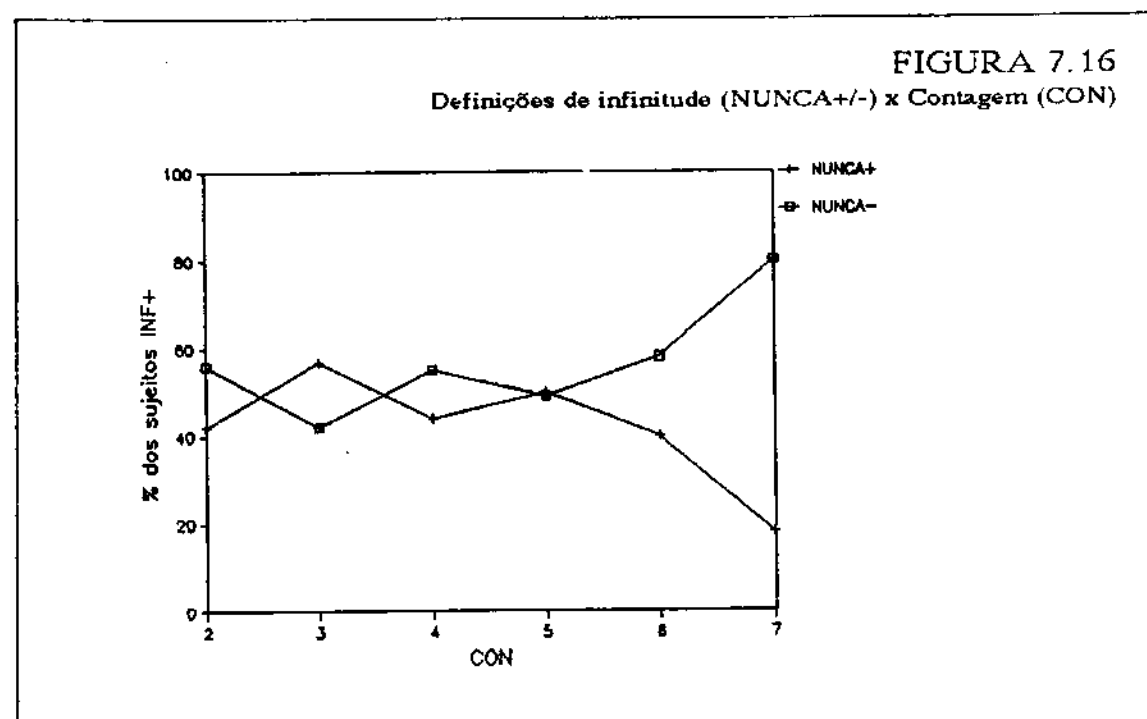


(b)

7.4 - O contar e as definições de infinitude

Outra relação que se mostrou digna de interesse foi a que observamos entre a variável CON e as definições de infinitude fornecidas pelos sujeitos (base da classificação em INF); conforme mencionado no Capítulo 6, se agruparmos as definições adequadas (INF+) de acordo com o uso ou não do termo "nunca", teremos, de um lado, as definições com um caráter mais "temporal" - basicamente "nunca acaba" (NUA; também "nunca tem fim" - NUF) e de outro, as mais "neutras", principalmente "não tem fim" (NTF; também "não acaba" - NAC e "sem parar" - SPA); já vimos anteriormente que estes dois tipos de resposta (NUNCA+: NUA+NUF; NUNCA-: NTF+NAC+SPA) são equiprováveis entre as crianças com até 10 anos, sendo que a frequência de NUNCA- passa a ser significativamente maior entre as crianças de 11-12 anos (v. Figura 6.5c).

Comparemos agora a ocorrência de NUNCA+/- em função do desempenho na Contagem: como mostra a Figura 7.16, NUNCA- passa a ser bem mais frequente (81%) entre os sujeitos CON=7, que contam até pelo menos 1 bilhão:



7.5 - Correlações parciais entre as variáveis

Nas análises efetuadas até aqui, fica clara a grande inter-relação entre as variáveis estudadas; para melhor entender o papel de cada uma das variáveis na determinação das contingências observadas, lançamos mão da análise das correlações parciais entre elas, ou seja as correlações obtidas quando se "elimina" o efeito de outras variáveis.

Antes de mais nada, foram calculados os coeficientes de correlação (r de Pearson) entre as principais variáveis; para evitar efeitos de "teto" ou "piso" que inflassem as correlações, optamos por incluir nesta análise apenas as amostras de 5 a 9 anos de idade (A5-A9, N=100); os valores de r se encontram na Tabela 7.42: em todos os casos, as correlações excedem em significância o nível de $p < .0001$.

TABELA 7.42

Coeficiente de Correlação (Pearson r); Amostras A5 a A9: (N = 100)

	AMO	CON	CNS	NIN	INF
AMO	-	.847	.641	.450	.517
CON	-	-	.710	.520	.607
CNS	-	-	-	.404	.431

As correlações parciais entre as variáveis acima foram a seguir calculadas, através de procedimentos descritos em Thorndike (1988) (Obs.: INF e NIN, não sendo independentes, não tiveram suas correlações calculadas). Em cada um dos itens a seguir, uma variável é, pois, estatisticamente "controlada" e a correlação parcial (a que resta) entre cada par dentre as variáveis restantes é indicada (parte (a) das tabelas), bem como os níveis de significância associados (parte (b) das tabelas).

7.5.1 - INF (Conceito de Infinitude) controlada

As correlações entre AMO (amostra, idade em anos completos), CON e CNS (com INF controlada) estão na Tabela 7.43; como se pode notar, a eliminação do efeito de INF sobre as outras variáveis não fez desaparecer as correlações antes observadas.

TABELA 7.43

(a) Correlação Parcial (INF controlada)

	CON	CNS
AMO	.784	.541
CON	-	.625

(b) Níveis de Significância

AMO	.0001	.0001
CON	-	.0001

7.5.2 - NIN (Infinitude do Número) controlada

Do mesmo modo que com relação a INF no item anterior, o controle de NIN não eliminou as correlações observadas entre AMO, CON e CNS, como mostra a Tabela 7.44:

TABELA 7.44

(a) Correlação Parcial (NIN controlada)

	CON	CNS
AMO	.804	.562
CON	-	.640

(b) Níveis de Significância

AMO	.0001	.0001
CON	-	.0001

7.5.3 - CNS (Conservação) controlada

Aqui, novamente, verificamos que as correlações entre as outras variáveis (AMO, CON, NIN e INF) não deixam de ser significativas quando o efeito de CNS é controlado (Tabela 7.45):

TABELA 7.45

(a) Correlação Parcial (CNS controlada)

	CON	NIN	INF
AMO	.725	.272	.348
CON	-	.362	.474

(b) Níveis de Significância

AMO	.0001	.01	.001
CON		.001	.0001

7.5.4 - AMO (Amostra: idade em anos completos) controlada

Que a idade dos sujeitos seja um parâmetro decisivo para que se façam previsões sobre o seu desempenho cognitivo, é evidente; nos capítulos anteriores, as relações entre idade e performance nas tarefas foram bastante evidenciadas; no entanto, ao controlarmos o efeito de AMO nas correlações entre as outras variáveis, constatamos que embora os níveis de significância caiam (o que é absolutamente inevitável neste tipo de análise), apenas em um caso, CNS X INF, a correlação deixa de se mostrar significativa, como se vê na Tabela 7.46:

TABELA 7.46

(a) Correlação Parcial (AMO controlada)

	CNS	NIN	INF
CON	.409	.293	.372
CNS	-	.169	.152

(b) Níveis de Significância

CON	.0001	.01	.001
CNS	-	.05	(NS)

(NS = Não-significativo)

7.5.5 - CON (Contagem) controlada

Por outro lado, quando controlamos o efeito das correlações comuns com CON sobre as correlações entre as variáveis restantes, o que se constata é que todas simplesmente desaparecem: nenhuma correlação parcial, neste caso, atinge níveis estatisticamente significativos, como indica a Tabela 7.47:

TABELA 7.47

(a) Correlação Parcial (CON controlada)

	CNS	NIN	INF
AMO	.106	.021	.007
CNS	-	.058	.00005

(b) Níveis de Significância

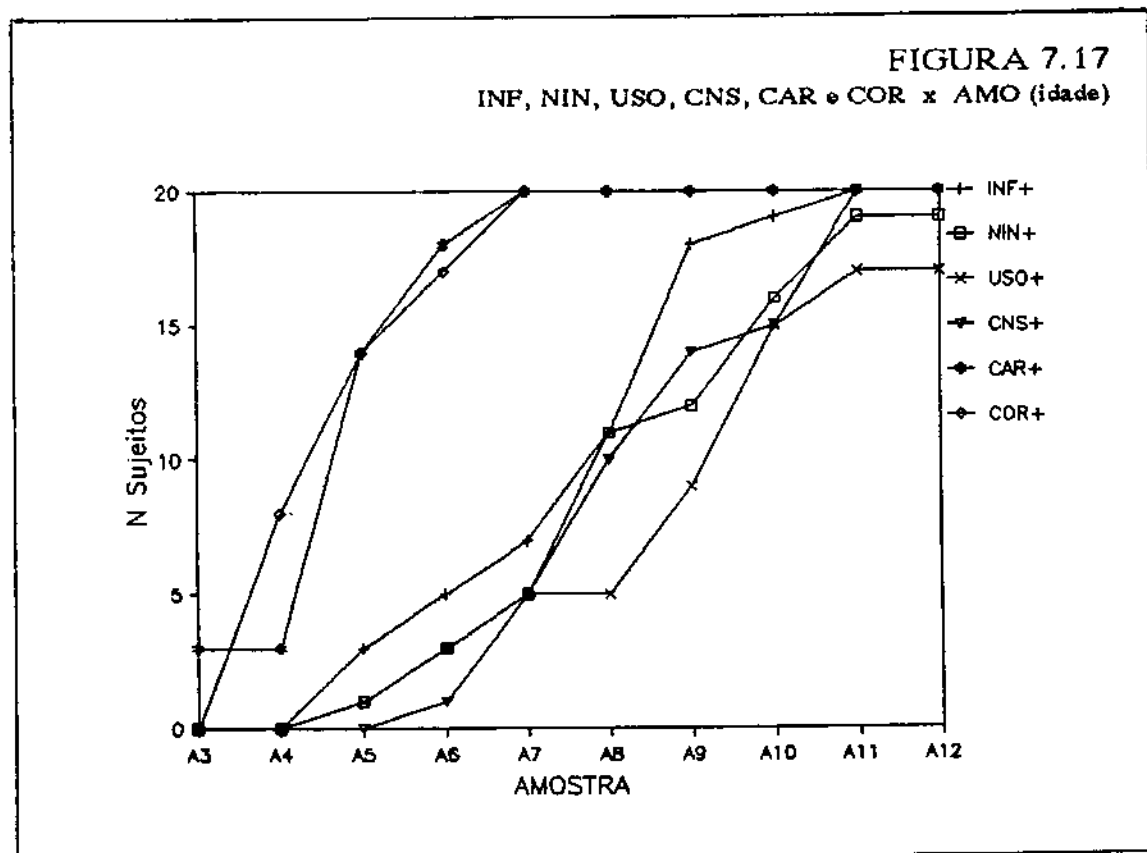
AMO	(NS)	(NS)	(NS)
CNS	-	(NS)	(NS)

(NS = Não-significativa)

Em outras palavras, aparentemente a correlação-chave, aqui, é a de CNS, INF e NIN com CON, que chega a superar as correlações destas variáveis com a idade (AMO), embora o efeito delas também seja notável. Isto quer dizer que o desempenho nas tarefas de contagem permite uma previsão a respeito do desempenho nas variáveis restantes mais acurada que quaisquer previsões baseadas nas outras variáveis - inclusive AMO, a idade cronológica. As implicações desta constatação são discutidas adiante.

7.6 - Discussão

Um sumário dos resultados observados é fornecido pela Figura 7.17, onde são mostradas as curvas de frequência (por amostra etária) para nossas principais variáveis (em sua forma dicotômica +/-): Correspondência 1-a-1 (COR), Resposta Cardinal (CAR), Conservação (CNS), Uso Espontâneo do Termo "Infinito" (USO), Noção da Infinitude do Número (NIN) e Conceito de Infinitude (INF).



Nas figuras acima, se observam dois agrupamentos de variáveis em função das faixas etárias de transição (-/+): as variáveis Resposta Cardinal (CAR) e Correspondência 1-a-1 (COR) registram esta transição na faixa dos 4-5 anos, enquanto que a faixa etária da transição para Conservação (CNS) e as variáveis relativas ao conceito de infinitude (INF - definições e exemplos do conceito; NIN - infinitude do número natural; USO - uso espontâneo do termo "Infinito") se situa em torno dos 7 a 9 anos de idade.

Vários tipos de análise, ao longo deste capítulo, evidenciaram a existência de correlações significativas entre todas as variáveis, sendo a mais elevada destas a observada entre CON (Contagem - extensão do domínio da série dos números naturais) e AMO (Amostra - a variável independente correspondendo à idade dos sujeitos em anos completos). Já que as maiores correlações para as demais variáveis eram observadas com AMO e CON - e sendo elevadíssima a correlação entre estas últimas, restava esclarecer qual das duas se mostrava mais correlacionada às demais variáveis.

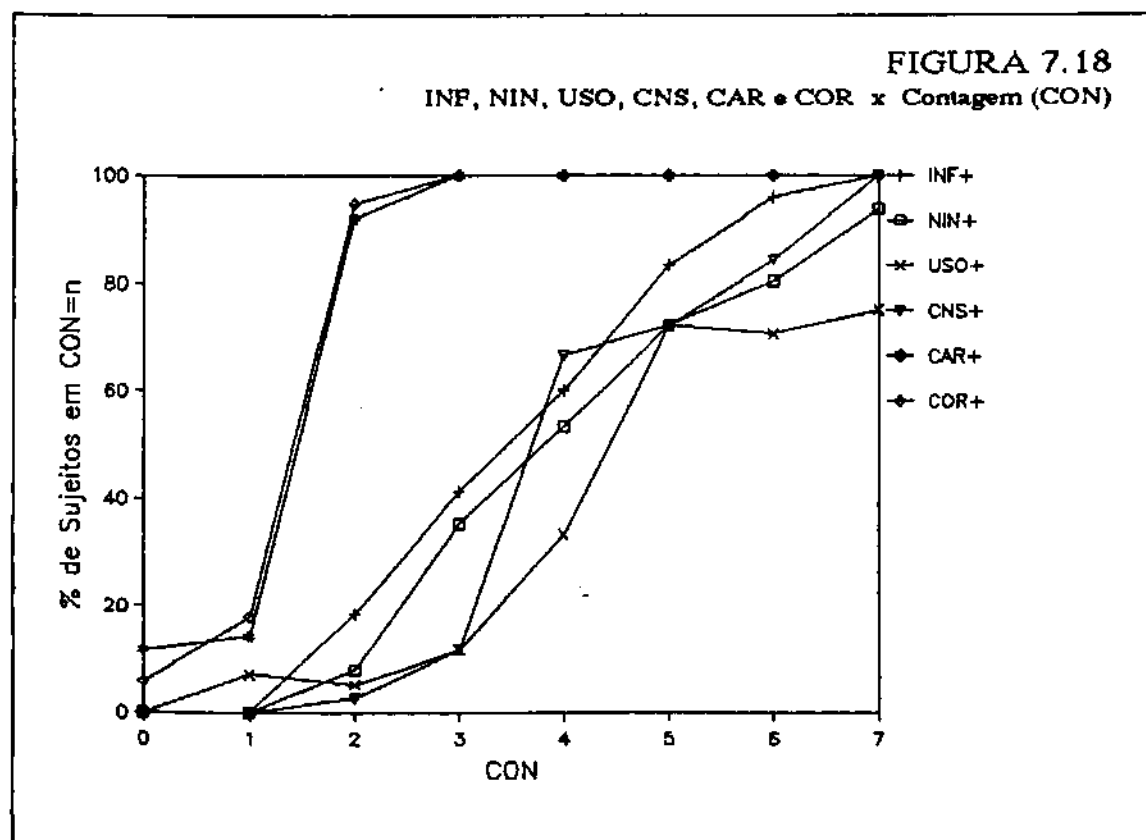
No que se refere à Resposta Cardinal e à Correspondência 1-a-1, as comparações indicadas nas Tabelas 7.2 e 7.4, restringindo-se às

amostras "críticas" de 4 e 5 anos, mostraram que se mantêm significativas as contingências entre CAR/COR e CON mesmo quando eliminada a variação na idade, CAR+ e COR+ estando associados à CON=2-7 (v. adiante).

Quanto à Conservação do número e as variáveis relativas à noção de infinitude INF e NIN, recalculamos as correlações para a faixa dos 5 aos 9 anos, que evitava efeitos de "piso" ou "teto" e na qual todas as categorias de cada variável estavam representadas (A5->A9: N=100); em seguida, calculamos as correlações parciais entre INF, NIN, CNS, CON e AMO, duas a duas, com uma terceira controlada (v.7.5), constatando que: A) o controle de INF, NIN ou CNS não fez desaparecer nenhuma das correlações significativas entre as variáveis restantes; B) o controle de AMO também não enfraqueceu qualquer das correlações ao ponto em que deixassem de ser estatisticamente significativas, com exceção de INF e CNS ($.1 < p < .05$); C) por outro lado, o controle de CON resultou (Tab.7.47) no desaparecimento de *todas* as correlações significativas entre CNS, INF, NIN e AMO. Estes resultados mostram que há, ao nível da população, uma correspondência marcante entre o desempenho observado nas tarefas de contagem (isto é, a extensão do domínio da série numérica) e o desempenho nas questões sobre a conservação de quantidades discretas e sobre a noção de infinitude, apesar de uma razoável variabilidade individual.

7.6.1 - A contagem e o desempenho nas demais variáveis

A Figura 7.17 não incluiu a variável Contagem (CON), já que esta não foi "reduzida" à uma forma dicotômica (+/-) como as demais. Se os dados referentes a COR+, CAR+, CNS+, INF+, NIN+ e USO+ forem reorganizados em função de CON, o que se observa é um gráfico muito semelhante, a grosso modo, à Figura 7.17(o que é natural, sabendo-se da alta correlação entre CON e AMO), que está representado na Figura 7.18.



7.6.1.1 - Contagem, Resposta Cardinal e Correspondência 1-a-1

Conforme indicado acima e evidenciado pela Fig. 718, o que se verificou, basicamente, é que os erros de correspondência 1-a-1 (COR-) e a ausência de resposta cardinal (CAR-) estão associados a CON=0-1, a contagem correta até no máximo 19, enquanto que CAR+ e COR+ estão associados com o saber contar até 20 ou mais (CON=2-7).

Tomando apenas os sujeitos de quatro e cinco anos completos (A4 e A5: amostras onde não há maioria significativa de sujeitos + ou -, tanto para CAR quanto para COR), constatamos que o desempenho na contagem permite prever o desempenho em CAR e COR ($p < .0005$ nos dois casos) mais acuradamente que a idade ($p < .005$ para CAR, não significativo para COR).

Quanto à elevada contingência entre CAR e COR, nossos dados coincidem com o observado por Shaeffer et al. (1974; v. acima, 3.4.2).

7.6.1.2 - Contagem e Conservação do número

Os sujeitos classificados como CNS=0-2 ("não-conservadores" que não afirmam a igualdade das fileiras antes da transformação e/ou não respondem sistematicamente às transformações do comprimento daquelas) predominam entre sujeitos CON=0-1 ($Lcpl < 20$) e correspondem, a grosso modo, aos sujeitos CAR-/COR- (v. acima).

Para CON=2 ($20 \leq Lcpl < 100$), embora os casos de CNS=0-2 ainda sejam maioria, mais de um terço dos sujeitos são CNS=3 (não-conservadores "típicos"); CNS=3 é especialmente característico de CON=3 ($100 \leq Lcpl < 1000$).

Os conservadores (CNS=4-5) já são maioria a partir de CON=4 ($Lcpl \geq 1000$), aumentando gradualmente daí em diante, até constituir a totalidade dos sujeitos em CON=7.

Em suma, a conservação de quantidades discretas, ao menos conforme aferida pelo nosso teste (um teste "exigente", como observado no Cap.4), está associada à capacidade de contar até mais de mil.

Lembremos aqui que a literatura assinala evidências de que o contar (mais do que o pareamento) parece ser a ferramenta mais utilizada pelas crianças mais novas para "checar" a igualdade numérica entre conjuntos em testes sobre conservação (Lawson, Baron & Siegel, 1974; LaPointe & O'Donnell, 1974; Fuson, Secada & Hall, 1983).

7.6.1.3 - Contagem e noção de Infinitude

O uso espontâneo do termo "Infinito" (USO+) não ocorre em CON=0, se torna maioria a partir de CON=5 (contagem até 100 mil ou mais) e constitui a maioria significativa a partir de CON=6 (contagem até 1 milhão ou mais).

A afirmação da infinitude do número (NIN+) não ocorre em CON=0-1, mas é majoritária a partir de CON=5 (maioria significativa a partir de CON=6).

Quanto ao conceito de Infinitude (INF), INF+ não ocorre em CON=0-1, passa a ser maioria a partir de CON=4 (contar até mil ou mais) e corresponde à maioria significativa a partir de CON=5. Ao dividirmos os tipos de definições do termo "infinito" consideradas aceitáveis em definições "temporais" (contendo o termo "nunca") ou "neutras" (do tipo "não tem fim"), constatamos que ambos os tipos ocorrem com frequências aproximadamente iguais entre os sujeitos CON=2-6, enquanto que o segundo passa a ser mais freqüente entre os sujeitos capazes de contar até 1 bilhão (CON=7).

7.6.2 - O contar e a compreensão do número

Conforme enfatizou em diversos pontos de sua obra, Piaget entendia que o número *"terá de ser reduzido a uma síntese de classes e relações assimétricas tanto axiomática quanto geneticamente"* (Piaget, 1975a, p.107); assim sendo, a "verdadeira" compreensão do número só seria possível em decorrência do desenvolvimento da lógica de classes (cardinação) e da compreensão das relações assimétricas (ordinação), cuja integração bem-sucedida seria indicada pela resposta de conservação; uma vez que esta costuma ser observada a partir dos 6-7 anos, Piaget considerou o contar das crianças mais novas como uma atividade meramente "decorada". Em um de seus artigos, Piaget menciona, em defesa desta hipótese, o caso de crianças que "sabem" contar (5-6 anos) mas não conservam, acrescentando que, *"por outro lado, uma criança de seis e meio ou sete anos frequentemente mostra que formou espontaneamente o conceito de número mesmo que não se lhe tenham ainda ensinado a contar"* (Piaget, 1965, p.406); por "formou o conceito de número", Piaget entende, naturalmente, "exibiu conservação"; o que nos parece um tanto estranho, na citação acima, é o que Piaget quer dizer com "não lhe ter sido ensinado a contar" (aos sete anos?).

Dodwell (1960, 1961) conseguiu implementar a posição piagetiana de que as operações de contagem não garantem o conceito de número ou mesmo o conceito de conservação da quantidade:

Parece que algumas crianças podem lidar operacionalmente com propriedades cardinais-ordinais antes que possam fazê-lo com relação a classes ou séries separadamente, e que a habilidade de lidar com classes e séries separadamente não implica a habilidade de lidar com números como construtos que combinam operações cardinais e ordinais (Dodwell, 1960, p.202).

Embora aprove, em linhas gerais, o modelo piagetiano, Dodwell aponta a inconsistência da classificação dos sujeitos de uma situação para outra, a grande variabilidade dentro de uma mesma faixa etária, o papel (além da idade) da inteligência (Q.I.) e observa que *"os estágios nem sempre seguem a seqüência que a teoria de Piaget requer"* (op. cit., p.204), sugerindo que

A variabilidade nos estágios e a ausência de fortes dependências seqüenciais previstas pela teoria de Piaget é uma função de respostas aprendidas para situações particulares sem a completa assimilação, ou (...) uma função de aprendizagem sem a generalização adequada da resposta (op. cit., p.204).

Wheatley (1968, apud Modgil & Modgil, 1976, v.II) demonstrou a importância do conceito piagetiano de conservação como um índice preditivo de desempenho aritmético e concluiu que o contar é uma base pobre para julgar o potencial em aritmética e que o contar é, frequentemente, um conjunto de respostas sem sentido.

Por outro lado, outros modelos de desenvolvimento enfatizaram o quanto há de "organizado" no contar das crianças de 5 anos ou menos; Gelman (Gelman, 1972, Gelman & Gallistel, 1978, etc) fala nos "princípios" subjacentes ao contar, que vão sendo utilizados de forma progressivamente mais integrada.

Como Piaget, concluímos que uma compreensão do número reflete uma estrutura cognitiva que coordena a compreensão de conjuntos e a compreensão da relação de ordem. Entretanto, há três diferenças importantes: primeiro, nós fazemos atribuições mais generosas às crianças capazes de contar conjuntos de objetos (...). Segundo, o conceito de correspondência um-a-um tem um papel menos fundamental em nossa análise do que na formulação de Piaget e nas análises axiomáticas padrão. Terceiro, enquanto que a compreensão implícita de conceitos de teoria dos conjuntos é significativa em nossa formulação de competência, nós não vinculamos o desenvolvimento dos

conceitos de número a um conceito explícito e geral de classe. Ao invés disso, nós o vinculamos ao desenvolvimento da compreensão do contar (Greeno, Riley & Gelman, 1984, pp.138-9).

Tanto Schaeffer et al. (1974) quanto Klahr & Wallace (1976, apud Saxe, 1979) propõem que a compreensão da cardinalidade advém da integração da contagem de pequenas quantidades (até 4 objetos) com a subitização destas mesmas quantidades: ao contar pequenos grupos, a criança perceberia que o número subitizado e o número final da contagem são o mesmo e estenderia esta noção para conjuntos maiores (não-subitizáveis). Sophian (1988a) é de opinião semelhante: sugere que as crianças aprendem sobre os números de dois modos distintos - ouvindo-os serem usados na linguagem cotidiana e pelo contar - inicialmente decorando os primeiros números como palavras quaisquer e usando-os com o auxílio da subitização; depois, viria o contar expandindo a coleção de números; então a criança poderia descobrir a conexão entre numerosidade (e cardinalidade) e correspondência, talvez levando algum tempo para generalizar a descoberta para todos os números, o que explicaria diferenças de desempenho em função do tamanho dos conjuntos. Outros autores, como Briars & Siegler (1984) e Fuson (1988, apud Wynn, 1990) - cuja linha Wynn denomina de "princípios depois" (em oposição aos "princípios antes" de Gelman e colaboradores) defenderam posições similares, propondo que as crianças começam imitando adultos e sendo modeladas por estes, e só depois generalizam as rotinas aprendidas, abstraindo os princípios. Wynn observa que o desenvolvimento da compreensão do contar pelas crianças parece algo complexo e formado pouco a pouco:

Os bebês podem ter um conceito inato de numerosidade, ou ao menos, das numerosidades um, dois e três, as quais elas tem de mapear associando aos nomes de números corretos. As crianças primeiro mapeiam a palavra "um" à sua numerosidade, adquirindo isto, a seguir, para a palavra "dois" e então para a palavra "três". O contar começa como uma atividade sem significado, algo como um jogo de "patty-cake", a partir do qual as crianças abstraem certas propriedades mais cedo, outras mais tarde, talvez auxiliadas por habilidades não-aprendidas tais como as sugeridas por Shipley e Shepperson (Wynn, 1990, p.191).

Saxe, observando que certas estratégias de contagem quantitativa (nem sempre com precisão) se desenvolvem antes de conceitos de conservação do número, concluiu que, ao contrário do que alega Piaget, o contar dos não-conservadores é mais que um procedimento decorado, mas envolve uma elaboração intelectual significativa, e que a ordem invariante de desenvolvimento observada sugere que as crianças usam o contar para descobrir o fenômeno da conservação, como prevêem os modelos baseados no contar; mas por outro lado, a descoberta de que crianças que não contam acuradamente de forma sistemática ainda assim desenvolvem conceitos de conservação do número não é consistente com os modelos baseados no contar (se a criança não extrai informação numérica precisa dos conjuntos, não é de se esperar que descubra a conservação através do contar); o autor conclui que

uma abordagem alternativa para se compreender a relação no desenvolvimento entre o contar notacional e a conservação do número é considerar diferenças entre a estrutura do sistema de contagem e a estrutura do conceito de conservação do número que poderiam levar a uma ordem invariante em sua aquisição. Por exemplo, embora tanto o contar como a conservação do número requeiram uma compreensão de relações de correspondência um-a-um, o contar requer apenas uma compreensão de relações de correspondência com respeito a uma única configuração estática de objetos, enquanto que a conservação requer uma compreensão de uma correspondência dinâmica entre duas configurações diferentes de uma coleção. Esta diferença sugere que a ordem invariante entre a aquisição do contar e da conservação seja determinada pelo progresso na compreensão da criança de relações de correspondência um-a-um de formas estáticas para dinâmicas. Mais ainda, esta formulação sugere que a conservação do número e o

contar notacional não são diretamente ligados entre si; portanto, a precisão no contar não é crítica para o desenvolvimento dos conceitos de conservação do número (Saxe, 1979, p.187).

Como de acordo com a teoria piagetiana os julgamentos de conservação são aprendidos através dos mecanismos de identidade, compensação e reversibilidade, a maioria dos estudos de treino se apoiou nos três princípios acima; mas Lifschitz & Langford argumentaram que os métodos de treinamento incorporam elementos não contidos na descrição de Piaget e Inhelder dos três mecanismos de aprendizagem, os quais estão relacionados à maneira pela qual a igualdade de duas quantidades é estabelecida para a criança: ou ela é solicitada a contar ou medir para estabelecer a igualdade ou lhe é dado o julgamento de um adulto

Estes autores investigaram estes dois aspectos dos procedimentos de treino da conservação e concluíram que o contar resulta em aprendizagem maior e mais duradoura que um julgamento adulto. Por esta e outras considerações, conclui-se que o contar, um mecanismo para a transmissão cultural de idéias [desde que ativamente utilizado pelas crianças], e não a construção pessoal, subjaz às habilidades de conservação (Lifschitz & Langford, 1975, comunicação pessoal a Modgil & Modgil, 1976, v. VII).

Pollio & Whitacre observaram uma alta correlação entre o desempenho de seus sujeitos (3.5 a 6.5 anos) em tarefas de contagem e o desempenho em outras tarefas numéricas (inclusive conservação), o que indicaria que o contar fluente não depende primariamente de "decoreba", mas *"do reconhecimento de que os números naturais são um sistema governado por regras, independente do ambiente perceptual imediato"* (Pollio & Whitacre, 1970, p.167).

7.6.3 - Extensão da contagem e outras habilidades numéricas

Embora modelos como os de Gelman e outros revalorizem o contar das crianças pequenas (alegadamente "subestimado" por Piaget), mostrando que ele não se reduz à recitação de uma lista decorada, no que se refere à produção dos "nomes de números" propriamente ditos estes modelos, em geral, parecem ignorar os mecanismos linguísticos/numéricos envolvidos na geração destes nomes (como assinalaram Siegler & Robinson, 1982 - v. Cap.3), mencionando apenas a sucessão dos termos.

Nossos resultados parecem indicar que há "faixas" específicas do domínio da série dos números naturais, às quais correspondem diferentes níveis de desempenho quanto às demais variáveis estudadas:

A) A primeira faixa corresponde às crianças que contam até no máximo 19 (CON=0-1), que em geral são "não-conservadores atípicos" (CNS=0-2), cometem erros de correspondência 1-a-1 e não costumam fornecer respostas cardinais adequadas; estes sujeitos não demonstram compreender que a série dos números naturais é infinita e no mais das vezes desconhecem inteiramente o termo "infinito"; nesta faixa de contagem, como vimos no Capítulo 3, o contar dos sujeitos seria regido por uma "lista única" de nomes de números (decorada), sem a intervenção de regras geradoras.

B) A segunda faixa no contar abrange as crianças que contam pelo menos até 20 mas não até mil; a maioria dos sujeitos, aqui, foi de não-conservadores "típicos" (CNS=3: reconhecem a igualdade inicial mas são "enganados" pelas transformações numericamente irrelevantes), os quais, entretanto, não costumam cometer erros de correspondência 1-a-1 ou resposta cardinal; estes sujeitos raramente afirmam a infinitude do número e raramente usam o termo "infinito" de

forma espontânea; embora quase metade "conheça" a palavra, apenas 25% dos sujeitos forneceram definições consideradas satisfatórias (INF+).

C) Por outro lado, as crianças da faixa seguinte, que contam até mil ou mais (CON=4 em diante) são em sua maioria conservadores, compreendem que os números "nunca acabam" (NIN+) e fornecem definições aceitáveis para a palavra "infinito" (INF+), sendo que, a partir de CON=5 (contar pelo menos até 100 mil), a maioria das crianças a utilizou espontaneamente.

Os valores-limite na classificação acima são, portanto, 20 e 1000; isso nos parece extremamente significativo, uma vez que, de acordo com o modelo de geração de nomes de números que defendemos no Capítulo 3 (uma versão "ampliada" do modelo de Siegler & Robinson, 1982), estes seriam também valores-limite importantes: o contar para além de 20 parece estar associado à compreensão das regras básicas da geração dos "numerlogs" verbais, enquanto que o contar além de mil implica na compreensão e manejo adequados de um sistema de classes hierárquicamente imbricadas na constituição dos nomes de números: centenas, dezenas e unidades **simples**, centenas, dezenas e unidades de **milhares**, centenas, dezenas e milhares de **milhões** e assim por diante (uma espécie de "superbase" mil).

Embora não tenham encontrado evidências de que o aprendizado linguístico por si contribua para a *integração e coordenação* de "unidades informacionais" necessárias para a aquisição dos conceitos de conservação, Inhelder, Bovet, Sinclair & Smock (1966) observaram, como Bruner (apud op.cit.), que a estrutura dos padrões de linguagem estava em estreito paralelo com a estrutura de comportamento operacional da criança nas tarefas de conservação.

Nossos presentes resultados não implicam, necessariamente, em qualquer relação causal direta entre o desempenho na contagem e nas outras tarefas de compreensão do número; mas é notável que se tenha constatado que: A) o domínio das regras relativas à resposta cardinal e à correspondência 1-a-1 (dois dos três "princípios" básicos do contar, para Gelman) estejam significativamente associados ao domínio das primeiras regras geradoras de nomes de números (em oposição à "recitação" dos sujeitos CON=0-1); e B) que o domínio das regras geradoras de números acima de mil (que envolve, além da hierarquia centenas-dezenas-unidades, a utilização das "classes" mais elevadas unidades-milhares-milhões-etc) se dê mais ou menos ao mesmo tempo que o desenvolvimento das noções de conservação; esta última constatação nos parece coerente com o modelo piagetiano, na medida em que a conservação do número seria o indicador, por excelência, do início do período das operações concretas - também caracterizado pelo desenvolvimento da compreensão da inclusão de classes.

Lembremos a principal suposição da "Abordagem do Acesso de Regras" (Rule-Assesment approach) de Siegler: *"o desenvolvimento cognitivo pode ser caracterizado em grande parte como a aquisição de regras cada vez mais poderosas para solucionar problemas"* (Siegler, 1981, p.3).

8

DISCUSSÃO GERAL
E CONCLUSÃO

8.1 - Contar

8.1.1 - O desenvolvimento do contar

O primeiro aspecto do comportamento de contagem (ou enumeração) dos nossos sujeitos que nos propusemos a observar foi a extensão do domínio da série dos números naturais. O exame das curvas relativas aos limites do contar exibidos pelas crianças (v. Capítulo 3, Figuras 3.1 e 3.2) nos mostra que podemos distinguir algumas etapas (delimitadas, por ora, com propósitos unicamente descritivos) no desenvolvimento do desempenho no contar:

A primeira etapa, característica das crianças de 3 a 4 anos, corresponderia ao contar proficiente (Lcpl) até menos de vinte, sem que jamais ocorra qualquer menção a nomes de números (MNM) da ordem das centenas.

A segunda etapa corresponde ao contar proficiente até pelo menos vinte e no máximo 99, mas o vocabulário numérico já inclui (ainda que não sejam compreendidos) termos como "milhares" e "milhões". Este padrão foi característico das crianças 5 a 6 anos de idade.

A etapa seguinte corresponde aos que contam confiavelmente até as centenas ou milhares, mas cujo vocabulário numérico está em acelerado processo de expansão, de modo que boa parte das crianças (tipicamente por volta dos 7-8 anos) já conhece diversos dos nomes de "n-lhões", embora desconheça seus reais significados.

Se por volta dos 8 anos observamos uma explosão "quantitativa" no vocabulário dos sujeitos, o período dos 8 aos 12 anos de idade parece se caracterizar por um aumento "qualitativo" gradual: desde os 8 anos há crianças que mencionam "nonilhões" (10^{30}), mas é apenas aos 12 anos que pudemos observar pela primeira vez sujeitos que mostrassem uma compreensão operacional destas ordens de grandeza (que correspondem, aproximadamente, ao limite do vocabulário numérico em nossa linguagem comum). 12 anos foi também a única idade em que todos os sujeitos "contaram" corretamente até pelo menos um milhão.

8.1.2 - Contar: escolaridade e sexo

Ao reorganizarmos os sujeitos das amostras A5 a A9 por turmas escolares e submetermos estes dados às mesmas análises de correlação mostradas para as outras variáveis no item 7.5, observamos que as correlações entre a variável Turma e as demais é praticamente idêntica às correlações exibidas pela variável AMO, que corresponde à idade em anos completos. Isto é natural, na medida em que Turma e Idade (AMO) não são variáveis independentes, mas torna precária a tentativa de observar o efeito da escolaridade sobre o desempenho, independentemente da idade. Por isso, nossas análises deste efeito foram realizadas por meio da comparação, para cada amostra etária (de A8 a A12), entre as sub-amostras pertencentes a turmas diferentes (contíguas) do 1º Grau. Este procedimento comprovou o efeito significativo da escolaridade sobre o desempenho no contar apenas entre os estudantes mais novos, de 8 a 9 anos de idade (A8: 1ª x 2ª Séries; A9: 2ª x 3ª Séries).

Os únicos outros casos em que o efeito da escolaridade foi significativo nestas comparações "intra-amostra" envolvem a Conservação (CNS) - para as amostras A9 (2ª x 3ª Séries) e A10 (3ª x 4ª Séries), apenas.

Nenhuma diferença entre sub-amostras por sexo foi observada em todo o estudo - com exceção de A9 (9 anos completos), onde o desempenho dos meninos em CON superou significativamente o das meninas.

8.1.3 - Um modelo para o desenvolvimento do domínio da geração de nomes de números

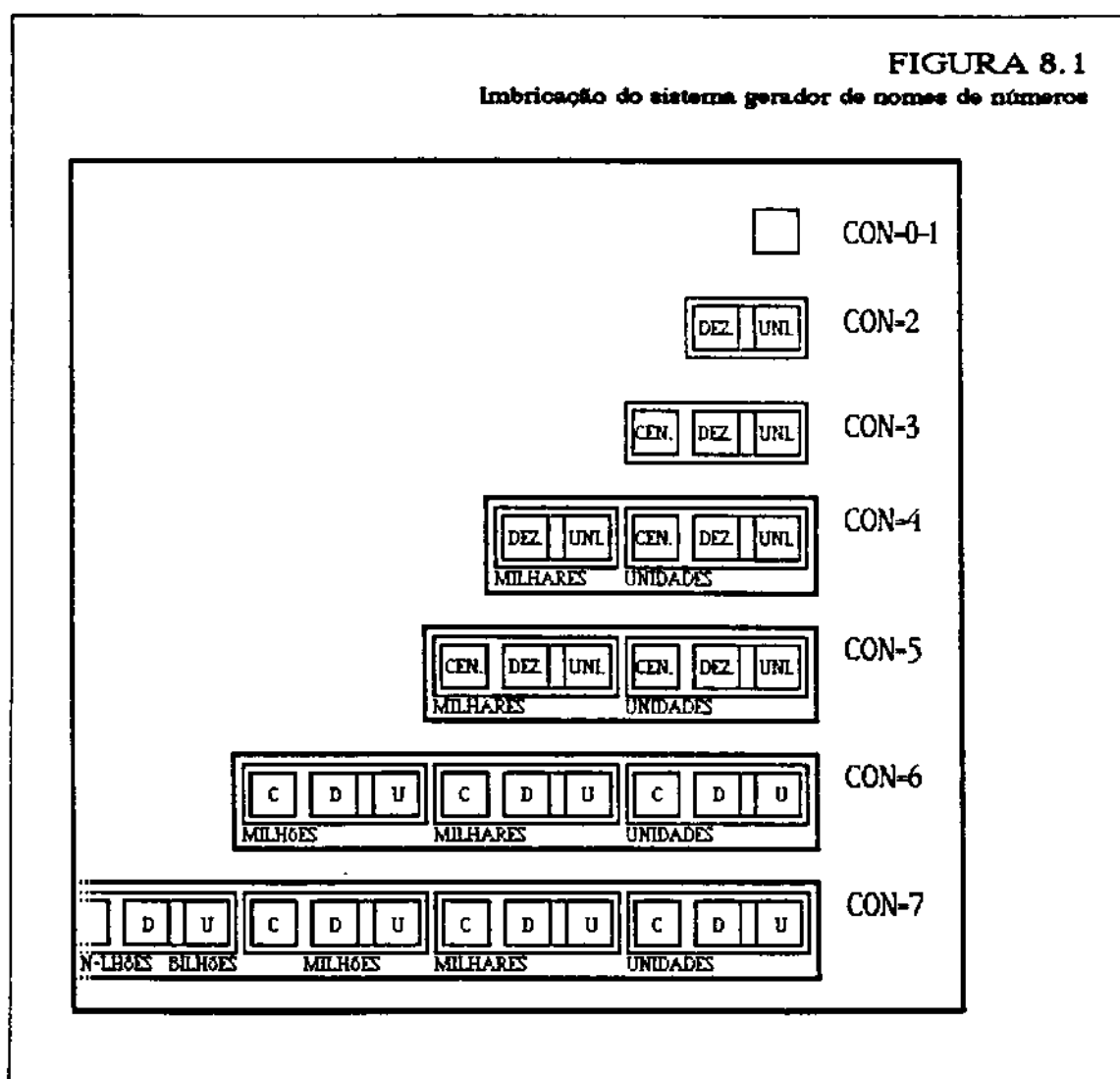
Ao examinar em maior detalhe os resultados das tarefas de contagem (Capítulo 3), constatamos que os pontos de interrupção e os tipos de erros na geração de nomes de números correspondiam em linhas gerais ao anteriormente observado por Siegler & Robinson (1982), favorecendo assim um modelo de acordo com o qual o contar se desenvolve como um algoritmo que vai sendo progressivamente aperfeiçoado pela incorporação de novas regras e listas de termos:

Num primeiro momento, poder-se-ia falar em uma simples recitação de nomes de números, e o algoritmo consistiria simplesmente da busca de nomes em uma lista única: este seria o padrão para os sujeitos que contam no máximo até 19 (CON=0-1).

Mais adiante, o algoritmo passa a incluir duas novas listas: uma referente aos nomes de unidades e outra aos nomes de dezenas, além da nova regra que corresponde ao aninhamento da seqüência de busca dos nomes de unidades dentro da seqüência de busca dos nomes de dezenas; esta estrutura parece dar conta do desempenho e dos erros típicos dos sujeitos que contam até pelo menos vinte e até no máximo 99 (CON=2); a etapa subsequente, no modelo de Siegler & Robinson, corresponde à aquisição da regra geradora de nomes de centenas - que pode ser concebida como o aninhamento do algoritmo anterior em um "loop" controlando o valor na casa das centenas e à aquisição da lista de nomes de centenas; este seria o mecanismo necessário para permitir o desempenho dos sujeitos CON=3, que contaram confiavelmente até pelo menos 100 e no máximo 999.

O patamar seguinte (não discutido por Siegler & Robinson), em termos de complexidade, é, naturalmente, o que reestrutura o algoritmo de geração dos nomes de números de modo a produzir os nomes acima de mil. Este patamar nos parece particularmente importante, não apenas por corresponder à ultrapassagem das quantidades "perceptíveis"

ou "estimáveis", mas principalmente por corresponder a uma nova ordem de aninhamento de rotinas no algoritmo gerador dos nomes de números, que deixa de se constituir num único grupo de "sub-rotinas" concêntricas (unidades/ dezenas/ centenas), passando a envolver uma rotina de ordem superior, apoiada numa "superbase" 1000, onde cada um dos "loops primários" (milhares/ milhões/ bilhões/ etc) inclui como "sub-rotina" o algoritmo do estágio anterior (gerador dos nomes de centenas, dezenas e unidades) - v. Figura 8.1.



Este nível esgota os mecanismos de geração de nomes de números na linguagem falada - não são de interesse imediato aqui outros sistemas mais poderosos, como a utilização de potências de dez na notação científica (a potenciação começa a ser ensinada na 5ª Série), ou nomes de números "heterodoxos" como o googol (10^{100}), mesmo porque tais sistemas de numeração não foram mencionados pelos sujeitos. Não discutiremos, tão pouco, as possíveis implicações do uso do termo "bilhão", em certos países, para designar não 10^9 mas 10^{12} ("1 milhão de milhões").

As diferenças nos pontos-limite da contagem proficiente (Lcpl) previstas pelo modelo se tornam evidentes nos gráficos das Figuras 3.2a-c.

O modelo "completo" acima descrito (para a contagem acima de mil) envolve, portanto, não apenas uma complexificação quantitativa

(números maiores, exigindo mais memória e atenção do sujeito que conta), mas também uma mudança qualitativa de complexidade, na medida em que implica em um aninhamento de "segunda ordem" no algoritmo (as centenas/ dezenas/ unidades de unidades/ milhares/ milhões).

Esta descrição do desenvolvimento do contar verbal como o aperfeiçoamento de um comportamento estruturado em algoritmos de complexidade crescente se filia, naturalmente, aos modelos de cognição do número "baseados no contar", na medida em que considera o contar "pré-conservação" como mais que a mera "recitação" de uma lista decorada - como propõe Piaget -, o que se aplicaria apenas, no nosso entendimento, ao contar das crianças que não contam até vinte.

Outro motivo de "valorização" do contar verbal (que reflete em si a estrutura "algarísmica" do sistema de numeração) está nas elevadas correlações entre o desempenho nas tarefas de contagem e o desempenho segundo os outros critérios de competência numérica analisados neste estudo.

8.1.4 - O contar como indicador do desenvolvimento da cognição do número

Como mostramos anteriormente, os erros de correspondência 1-a-1 (na contagem ou no pareamento de objetos) - bem como os erros relativos à resposta cardinal - foram características quase que exclusivas das crianças que contavam até no máximo 19; isso mostra que a passagem do modelo mais elementar de contagem (a regra "única" da recitação sucessiva de uma única lista de nomes) para um modelo mais elaborado (refletindo a estrutura apoiada na base 10 do sistema de numeração) é acompanhada de uma consistência significativamente maior na aplicação integrada dos "princípios" que organizam o contar proficiente (para Gelman, os princípios da ordem estável, da correspondência 1-a-1 e da resposta cardinal).

A conservação das quantidades discretas, em nosso teste com 10 objetos (que se mostrou um pouco mais "difícil" do que o que se costuma observar na literatura, conforme discutido no Capítulo 4), também registrou uma maior associação com o desempenho na contagem que com a idade (ou outras variáveis quaisquer; v. Capítulo 7); apenas uns poucos sujeitos dentre os que não contavam até mil ou mais (CON=0-3) responderam como conservadores às transformações espaciais (numericamente irrelevantes), enquanto que a grande maioria das crianças que contavam até mil ou mais (CON=4-7) o fizeram (e mais particularmente, as que contavam até mais de 10 mil: v. Capítulo 4). A categoria de respostas que denominamos "não-conservadores típicos" (CNS=3), por sua vez, se mostrou significativamente associada ao contar até entre 100 e 999 (CON=3). (CNS=3: constrói a correspondência, admite a igualdade inicial e responde, a seguir, em função da transformação espacial; corresponde à etapa III de Piaget & Szeminska, 1975).

Levando em conta tanto os padrões de desempenho observados no que se refere às variáveis mencionadas quanto as idades típicas para cada um destes padrões, e buscando uma associação aproximada entre as etapas observadas e os "estágios" do desenvolvimento cognitivo propostos por Piaget, chegamos à conclusão de que o contar até no máximo 19 (proficiente em termos de ordem estável dos "numerlogs", mas ainda pouco funcional em função de erros de correspondência e resposta cardinal) seria típico de crianças pré-operacionais no estágio "pré-conceitual" (2-4 anos).

O contar até pelo menos 20 - mas no máximo até 999 (CON=2-3), por sua vez, parece caracterizar as crianças no estágio do "pensamento

intuitivo" (segundo e último estágio do período pré-operacional, 4-7 anos), onde os sujeitos, embora ainda presos ao aspecto perceptual das situações, já seriam capazes de lidar com configurações mais complexas - como o algoritmo gerador de nomes de números associado ao sistema de base dez.

Finalmente, o contar para além de mil (ou dez mil) se mostrou bastante relacionado à conservação proficiente do número, o que o vincularia ao período das Operações Concretas; isso nos parece fazer muito sentido: o modelo piagetiano relaciona às Operações Concretas (7-12 anos) a capacidade de se lidar com a inclusão de classes; ora, a estrutura da geração dos nomes de números acima de mil, como discutimos acima, implica uma nova imbricação de "classes" de dígitos - correspondente ao "aninhamento" de "subrotinas" no modelo gerador de nomes acima discutido - em consequência do acréscimo do padrão da "superbase mil" (unidades/milhares/ milhões/ etc. X centenas/dezenas/ unidades).

Ao nosso ver, portanto, a descrição que apresentamos para o desenvolvimento do contar é bastante compatível com o modelo piagetiano, mas se afasta deste na medida em que atribui - como os modelos "baseados no contar" - uma maior significação funcional ao contar das crianças mais novas; assim, caracterizar a atividade de contagem como uma "recitação sem sentido" seria ao nosso ver adequado, quando muito, ao desempenho das crianças até por volta dos quatro anos, que ainda contariam seguindo o algoritmo da "lista única" de nomes (sem recurso ao sistema de base) e com aplicabilidade restrita em função dos problemas no uso articulado dos "princípios" da correspondência 1-a-1 e da resposta cardinal; mesmo nesta etapa, entretanto, parece haver uma busca das crianças neste sentido, e os desempenhos podem ser melhores em condições favoráveis, envolvendo, por exemplo, conjuntos menos numerosos.

No caso dos sujeitos no estágio final do período pré-operacional, por outro lado, o contar já se mostra consideravelmente estruturado, na medida em que: A) o processo de produção dos nomes de números evidencia a aplicação do mecanismo associado à base dez; B) os erros de correspondência 1-a-1 desaparecem e C) as respostas cardinais corretas (ainda que não impliquem necessariamente em uma compreensão explícita da cardinalidade) tornam-se a regra. Os sujeitos nesta fase, entretanto, são em sua maioria não-conservadores (CNS=3, v. Capítulo 4) - ao menos nos termos das nossas condições de teste.

Citamos anteriormente (v. Capítulo 7) algumas evidências na literatura apontando para um provável papel do contar na compreensão da conservação do número (após transformações puramente espaciais). Pollio & Whitacre, por exemplo, constataram que, independentemente de idade, as crianças que podiam contar quando lhes era dado um novo ponto de onde começar tinham um desempenho consistentemente melhor em todas as outras tarefas numéricas, talvez indicando que o contar fluente não depende primariamente de decoreba mas, ao contrário, do reconhecimento de que *"os números naturais são um sistema governado por regras independente do ambiente perceptual imediato"* (Pollio & Whiteacre, 1970, p.167).

Russac (1978), por sua vez, observou que crianças pequenas podem efetivamente comparar pequenas cardinalidades, quando lhes é permitido contar (e assim o fazem antes de fazer as mesmas comparações por correspondência).

Segundo Saxe (1979), as estratégias de contagem quantitativa (não necessariamente com precisão) se desenvolvem antes dos conceitos de conservação do número (mesmo para as crianças com déficits cognitivos); daí conclui ele que, ao contrário do que alega Piaget, o contar dos não-conservadores é mais que um procedimento decorado,

mas envolve uma elaboração intelectual significativa. A ordem invariante de desenvolvimento observada pelo autor sugere que as crianças usam o contar para descobrir o fenômeno da conservação, como prevêem os modelos baseados no contar - mas por outro lado, a descoberta de que crianças que contam acuradamente sem consistência ainda assim desenvolvem conceitos de conservação do número não seria consistente com os mesmos modelos (se a criança não extrai informação numérica precisa dos conjuntos, não é de se esperar que descubra a conservação através do contar).

Fuson et al. (1983) observaram que o desempenho na conservação melhorou para a maioria de seus sujeitos (de cerca de 5 anos), se induzidos a contar ou parear antes (e o fazem direito, só não iniciam o comportamento espontaneamente); as crianças um pouco mais velhas usaram muito o contar na tarefa de conservação (espontaneamente): isto seria característico das crianças que estão quase conservando bem (etapa de transição).

Diante dos resultados de Gréco (1962, apud Kamii, 1992) na tarefa de quantidade - mostrando que algumas crianças não-conservadoras emitiram respostas de conservação após serem levadas a contar os objetos; a interpretação de Piaget e Gréco foi a de que, quando a criança se encontra num nível de transição mais alto, *"a linguagem pode ser um instrumento útil, que lhe permite, por vezes, pensar num nível ainda mais alto"* (Kamii, 1992, nota 12, p.26).

O que costuma ser pouco enfatizado é que o mecanismo linguístico de geração de nomes de números traz embutido em si a estrutura fundamental do(s) sistema(s) de base.

Nos parece que a partir do momento em que a linguagem passa a refletir aspectos estruturais básicos do sistema numérico - como é o caso do padrão da base 10 - e os sujeitos ao mesmo tempo superam as dificuldades referentes à correspondência 1-a-1 e exibem respostas cardinais adequadas, não se pode mais falar na ausência de uma "verdadeira" compreensão do número. Os sujeitos nesta etapa (por volta dos 5-6 anos) claramente compreendem diversos aspectos do conceito de número natural, e os aplicam adequadamente, ao menos em condições favoráveis e com numerosidades pequenas (embora em geral não conservem, nas nossas condições de observação).

Não obstante, parece-nos igualmente claro, a partir dos resultados, que outro período de transição extremamente importante tem lugar por volta dos 7-8 anos: além da rápida expansão do vocabulário numérico, do desenvolvimento da conservação do número e da expansão do contar proficiente para além de mil, este período é assinalado por mudanças paralelas na compreensão das idéias relativas à noção de infinitude.

8.2 - Infinitude

8.2.1 - O desenvolvimento da noção de infinitude

Recapitemos os resultados das variáveis relativas à infinitude: tanto o Uso Espontâneo do Termo "Infinito" (USO+) quanto a afirmação da Infinitude do Número Natural (NIN+) e as definições aceitáveis de Infinitude (INF+) foram registrados apenas entre crianças de 5 anos ou mais. USO+ se torna majoritário a partir dos 10 anos, NIN+ e INF+ a partir dos 8 anos, sendo que a totalidade dos sujeitos de 11 e 12 anos de idade foram consideradas INF+.

Embora a correlação entre estas variáveis e CON (desempenho nas tarefas de Contagem) tenha sido mais elevada que a sua correlação com a idade (AMO) ou outras variáveis, as curvas das frequências de INF+ e NIN+ por categoria em CON são bastante lineares, não apresentando "saltos" abruptos (o que ocorreu com a Conservação; v. Figuras 7.17 e 7.18) e apontando, assim, para um aumento gradual das frequências destas respostas - seja em função da idade ou de CON. Ainda assim, ao restringirmos a análise às faixas etárias críticas (de transição), o desempenho na Contagem se mostrou um melhor preditor que a idade para o desempenho em USO, NIN e INF: USO+ predominou entre os sujeitos que contaram até pelo menos cem mil (CON=5-7), enquanto que NIN+ e INF+ são significativamente mais frequentes entre os sujeitos que contaram pelo menos até mil (CON=4-7).

Na comparação entre USO, NIN e INF com o desempenho na Conservação (CNS), verificamos que USO+ aumenta gradualmente ao longo das categorias CNS=0-5; por outro lado, há uma elevada associação entre INF+ e CNS+, bem como entre NIN+ e CNS+. Dito de outra forma, concluímos que, apesar das várias exceções, os não-conservadores em geral não afirmaram a infinitude da série dos números naturais nem forneceram definições aceitáveis para o termo "infinito", enquanto que os conservadores o fizeram (v. Figuras 7.13 e 7.15).

Tomados em conjunto, estes resultados mostram que, embora a variabilidade individual seja grande, a tendência na população é a do surgimento da compreensão de que a série numérica não tem fim e de definições "aceitáveis" de infinitude concomitantemente com o estabelecimento das respostas de conservação e com a capacidade de contar para além de mil.

8.2.2 - Etapas no uso do termo "Infinito"

Apenas umas poucas crianças (7%) dentre as que contavam até no máximo 19 (CON=0-1) disseram conhecer a palavra "infinito" e todas estas o definiram como "algo grande" ou "um número grande"; dentre as crianças que contavam até entre 20 e 999 (CON=2-3), 44% conheciam o termo, mas apenas 26% forneceram definições aceitáveis (e somente 11% não indicaram quaisquer exemplos considerados inadequados); por outro lado, 94% das crianças que contaram além de mil conheciam a palavra, sendo que 89% a definiram aceitavelmente (e 52% não forneceram exemplos inadequados).

A palavra "infinito" parece ser assimilada de forma "difusa" pelas crianças mais novas, que a associam, em função dos contextos em que a ouvem, a uma duração "interminável" (hiperbolicamente), uma "coisa grande" ou a um "nome de grande número" (como "mil" ou "milhão");

mais adiante, ao ampliarem a extensão do seu domínio da série dos números naturais e "descobrirem" que ela se prolonga infinitamente (o que se dá, de acordo com nossas observações, quando o contar vai além de mil e a compreensão da conservação do número se consolida), o conceito se refina - na medida em que as definições dadas são satisfatórias-, mas ao examinarmos o entendimento dos nossos sujeitos mais detidamente, através dos exemplos e das respostas aos testes sobre infinitude, percebemos que o conceito levará ainda algum tempo para ser depurado: inicialmente, embora as definições falem em algo que "não tem fim" ou "nunca acaba", os exemplos incluem sistematicamente entidades numerosas mas finitas, indicando que a distinção entre "incontável" e "infinito" está longe de ter se estabelecido.

Isto condiz com o contexto de uso coloquial do termo a que as crianças estão expostas - onde o uso hipérbólico do termo "infinito" se estende também a expressões como "não tem fim" ou "nunca acaba" - e é coerente com o desenvolvimento operatório das crianças nesta idade (7-8 a 12 anos: Período das Operações Concretas), caracterizado por operações ainda ligadas aos objetos. Aparentemente, a impossibilidade lógica de se chegar a um fim na iteração da operação "+1" geradora dos números naturais não se distingue claramente da impossibilidade prática do sujeito de contar objetos além de certos limites quantitativos.

8.2.3 - Infinitude potencial e infinitude completa

Apenas ao atingir o nível das operações formais (11-12 anos) é que as crianças compreendem, de acordo com Piaget (1975a), que "nunca se chegará ao final dos números", ao descobrirem "o poder infinito de iteração da operação +1"; nesta idade, o emprego das diversas formas de infinito aponta para a libertação dos entes numéricos em relação aos objetos (pois o objeto de experiência seria necessariamente finito). Conforme comentamos no Capítulo 6, Piaget observou o desenvolvimento das noções de contínuo e infinitude através de questões sobre a subdivisão de figuras geométricas; neste contexto, é apenas no "Estágio IV" (a partir de 11-12 anos) que *"o pensamento é liberado das noções quase-perceptuais dos estágios anteriores, onde as operações concretas estavam cercadas pelas condições restritivas do manejar ou desenhar concretos"* (Piaget & Inhelder, 1977, p.620); neste momento, a subdivisão é concebida como ilimitada e *"várias crianças chegam independentemente à idéia de uma correspondência biunívoca entre a série de pontos formando uma linha e a série de números considerada como infinita"* (idem, p.157).

Aparentemente, entretanto, a subdivisão é a operação que por último é compreendida como potencialmente ilimitada - a quantidade de vezes em que nos foi dito que *"não dá para picar para sempre!"* no teste sobre Subdivisão Infinita foi muito expressiva nesse sentido; de acordo com Langford (1974), a maioria das crianças desde os 9 anos (idade mental!) era capaz de conceber a adição, subtração e multiplicação como continuando indefinidamente (embora sob condições difíceis isto não tenha ocorrido até a idade mental de 14 ou 15). No caso da divisão, as crianças não podiam conceber a iteração infinita antes da idade mental de 13-15 anos.

Langford (op.cit.) assinalou a distinção entre "infinitude potencial" (ligada a noções tais como a de que as operações matemáticas podem ser indefinidamente iteradas ou de que não há maior ou menor dos números) e "infinitude concreta" (envolvida no conceito de um conjunto infinito ou de um decimal infinito). Para ele, enquanto os conceitos relacionados à infinitude potencial se desenvolvem entre as idades de 9 e 15 anos, os conceitos de infinitude completa não se

desenvolvem senão depois deste período (e mesmo adultos podem ter problemas com a infinitude completa).

Em nosso estudo, pudemos observar que alguns raros pré-escolares de 5 e 6 anos completos já exibem a noção de que os números naturais "nunca acabam" (um pouco mais cedo, portanto, do que o relatado por Evans & Gelman, 1982); por outro lado, apenas uns poucos sujeitos de 11-12 anos responderam corretamente aos testes mais difíceis sobre infinitude (Subdivisão Infinita e Limite, v. Capítulo 6; v. tb. os resultados ali citados de Taback, 1975).

A compreensão da infinitude do número envolve a admissão da idéia da iteração infinita de uma operação (no caso, adição); ora, a iteração de uma ação (concreta) se dá no tempo (*"contando, contando... e nunca termina!"*); assim, a infinitude potencial se manifesta tipicamente em fórmulas envolvendo durações temporais. Nossos resultados apontaram várias evidências neste sentido: além de construções mais explicitamente temporais na formulação das definições de infinitude, verificamos que dos 7 aos 10 anos de idade, estas definições incluem o termo "nunca" em cerca de 50% dos casos - o que acontece em apenas cerca de 20% das respostas dos sujeitos de 11-12 anos (as definições "neutras" na forma "não têm fim" passam a predominar); a seqüência de dificuldade observada para os quatro testes sobre infinitude (DUR, CIC, DIV e LIM; v. Figura 6.19) parece profundamente determinada pela possibilidade de estruturação temporal dos problemas: o teste que se mostrou mais fácil (Duração Infinita) era de natureza diretamente temporal (quanto tempo fica caindo uma pedra atirada num poço sem fundo); o teste seguinte, em dificuldade crescente, foi o relativo à Ciclicidade Infinita (quanto falta para o carrinho percorrer na estrada circular) - e as respostas corretas, em geral, se davam na forma "nunca vai chegar" (e raramente mencionaram um "número infinito de voltas"); o conceito de limite, explorado no teste seguinte (LIM) pode ser visto em termos de infinitude completa (quantos pulos o boneco teria de dar para completar seu trajeto pulando sempre a metade do que falta) ou potencial (possibilidades de aproximação indefinida ao fim do trajeto); embora a pergunta fosse formulada em termos de "quantos pulos", as poucas respostas consideradas corretas foram dadas na forma "nunca vai chegar"; o teste que se mostrou mais difícil (Subdivisão Infinita de um pedaço de papel) foi justamente o que não podia ser resolvido em termos de infinitude potencial - e ainda por cima envolvia a noção de "pequenez infinita", de iteração indefinida da divisão.

Parece-nos possível distinguir algumas etapas fundamentais no desenvolvimento do conceito de infinitude. As crianças até cerca de 5 anos desconhecem inteiramente a palavra "infinito" e indicam números pequenos quando se lhes pergunta "qual o maior de todos os números?"; uma parte das crianças na faixa dos 5 aos 8 anos, embora conheça a palavra, a define de maneiras que apontam antes para a "incontabilidade" prática que para a infinitude lógica.

Dos 5 aos 10-11 anos, aumenta graduaamente a porcentagem de crianças exibindo noções que caracterizam a fase seguinte, em que os sujeitos definem a palavra "infinito" de modo aceitável (mais ou menos convencional), em geral afirmam que os números nunca terminam e, com frequência, dão respostas corretas aos testes mais fáceis sobre infinitude (DUR e CIC), embora não consigam perceber a divisão infinita em LIM - e a rejeitem em DIV.

O exemplo mais frequente de infinitude, mesmo entre as crianças mais novas que os forneceram, foi *"os números"* (mas não nos é possível determinar até que ponto isto teria sido um artefato do contexto experimental).

Aos 11-12 anos, todos os sujeitos definem "infinito" aceitavelmente,

porém as definições, um tanto estereotipadas, encobrem conceitos ainda bastante "nebulosos": ao examinarmos os exemplos de infinitude, percebemos que a indistinção entre infinitude e incontabilidade ainda persiste no pensamento das crianças, como atestam os objetos numerosos (livros, carros) como exemplos de "coisas que sejam infinitas" - a frequência de exemplos do Tipo III (considerados "inadequados") não foi nula nem na amostra A12.

Por outro lado, aos 11-12 anos já encontramos alguns sujeitos que distinguem explicitamente entre coisas infinitas e coisas que "parecem infinitas" mas não o são, e chegam a comentar, por exemplo, que "*poucas coisas são infinitas*", e nesta idade, se verificam as primeiras respostas adequadas aos testes sobre Subdivisão e Limite.

Os exemplos do Tipo II (considerados "intermediários") atingem um patamar estável (ocorrendo nas respostas de 50% das crianças até a última amostra) por volta dos 9-10 anos de idade. É oportuno lembrar que a maior parte destes exemplos se refere a recursos, materiais ou formas de energia que se reciclam na natureza ou na economia (vento, eletricidade, água - ou seres vivos, que se reproduzem), casos evidentes de infinitude potencial; aliás, em exemplos desse tipo, as formulações dos sujeitos frequentemente mostram que não há "necessidade" plena nestas "infinitudes": "*Nosso planeta (é infinito)... se a gente não destruir ele*" (11/14), "*Um rio... porque a água nunca vai parar... só se um dia não chover mais...*" (12/06).

Em suma, poderíamos designar as etapas de desenvolvimento da infinitude como 1) Infinitude "prática" (indistinta da "incontabilidade"), 2) Infinitude potencial e 3) Infinitude "completa" (Langford) ou "atual" (Piaget). O espectro de idades por nós estudado nos permitiu observar o surgimento da primeira destas etapas, a lenta, gradual e ambígua transição desta para a etapa seguinte (ambígua na medida que as definições parecem bem melhores que muitos dos exemplos e levariam, por si só, a uma superestimação da compreensão dos sujeitos). De acordo com nossos resultados, aos 11 ou 12 anos de idade a transição para a terceira etapa está apenas se iniciando (e a rigor não se chegará a uma forma "pura" e estável desta etapa sequer na idade adulta...).

8.2.4 - Infinitude: palavras, conceitos e pseudo-conceitos

A infinitude é um conceito especialmente problemático na medida em que não apenas não possui exemplos concretos, mas cuja elaboração depende, precisamente, do abandono não só das referências ao universo sensível, mas também do recurso a qualquer espécie de "imagem" mental, já que se trata de uma noção que só pode ser efetivamente compreendida no nível formal (Klausmeyer & Allen, 1978). Além disso, pudemos verificar que entre a aquisição do vocábulo e uma compreensão mais sofisticada da infinitude, há um longo processo de elaboração e reorganização do conhecimento.

Outro complicador é o uso comum do termo "infinito", que não facilita muito o processo de construção do conceito (*sensu strictu*) pelas crianças:

A palavra *conceito* não apenas designa construtos mentais de indivíduos mas também os significados das palavras e outros símbolos aceitos por grupos sociais que falam o mesmo idioma. (...) Para muitas palavras, porém, a definição do dicionário não é o significado completo socialmente aceito de um conceito ou palavra (Klausmeyer & Allen, 1978, p.4).

As primeiras estruturas de natureza conceitual elaboradas pelas crianças (no período pré-operacional) foram designadas por Piaget de "pré-conceitos" ou "pseudo-conceitos":

Os primeiros conceitos que a criança utiliza não são, de início, classes lógicas capazes de operações de adição, multiplicação, subtração, etc., que caracterizam a lógica de classes em seu funcionamento normal, mas sim uma forma de pré-conceitos, procedendo por meio de assimilações sincréticas (Piaget, 1954, p.363); a criança começa utilizando apenas pseudo-conceitos sincréticos antes de elaborar verdadeiras classes lógicas, porque as operações formadoras das classes (adição e multiplicação lógicas) requerem um sistema de definições cuja estabilidade e generalidade transcendem o ponto-de-vista pessoal e suas vinculações subjetivas (definições pelo uso, classificações sincréticas, etc) (idem, p.373).

Entre o pensamento pré-conceptual, de um lado, caracterizado por assimilação centrada num objeto típico, e, bem assim, por acomodação que simboliza o esquema de conjunto pela imagem desse tipo - e o pensamento operatório, de outro lado - caracterizado pela descentração e pelo equilíbrio permanente entre a assimilação e a acomodação - pode-se intercalar certo número de termos intermediários, conforme o grau de reversibilidade atingido pelo raciocínio. São esses intermediários que descrevemos, entre quatro e sete anos, com o nome de pensamento intuitivo e cujas formas superiores são constituídas de raciocínios aparentemente operatórios, porém ligados a dada configuração perceptiva (...). Com o pensamento operatório, enfim (...), e só com ele, é que a assimilação se torna completamente reversível, porque a acomodação está inteiramente generalizada, cessando, assim, de traduzir-se em imagens. Subsiste, é certo, a imagem, mas a título de puro símbolo do esquema operatório, sem mais fazer dele parte integrante (Piaget, 1975b, pp.310-311); as noções de objeto, de espaço e de tempo evoluem, a partir dos esquemas sensorio-motores, ao lado de esquemas pré-conceptuais e, depois, intuitivos, para chegar a esquemas suscetíveis de tratamento operatório (...). Ora, para constituir o universo representativo que se inicia com a coordenação das imagens e dos esquemas verbais, duas esferas de atividades novas têm de ser conquistadas: 1ª) a extensão no tempo e no espaço do universo prático imediato, isto é, a conquista dos espaços longínquos e das durações abolidas, que exigem, uns e outras, uma representação que ultrapassa a percepção, e não mais apenas o movimento e o contato perceptivo diretos; 2ª) a coordenação do próprio universo com o dos outros, ou, em outras palavras, a objetivação do universo representativo em função da coordenação dos pontos de vista (idem, p.333); o próprio da representação é (...) ultrapassar o imediato, fazendo crescer as dimensões no espaço e no tempo do campo da adaptação e, portanto, evocar o que ultrapassa o domínio perceptivo e motor. (...) A instituição coletiva da linguagem é, em relação a isso, o fator principal de formação e socialização das representações (idem, p.345).

A grande distância entre a aquisição do vocábulo e a do conceito elaborado ficou bastante evidente na confrontação entre as definições de infinitude e os exemplos fornecidos; embora seja um fator necessário ao processo, a linguagem não pode ser, por si só, suficiente, como enfatizaram Piaget & Inhelder:

O estudo dos primeiros esquemas verbais, ou "pré-conceitos", da criança foi esquematizado por um de nós e já demonstrou que, se a aquisição da linguagem acelera a formação de classes e permite, mais cedo ou mais tarde, uma transição das classificações coletivas, as coisas não são assim desde o início (Piaget & Inhelder, 1975a, p.12).

A linguagem não é suficiente para explicar o pensamento, porque as estruturas que caracterizam o pensamento tem suas raízes na ação e em mecanismos sensorio-motores mais profundos que a linguística. Também é evidente que, quanto mais se refinam as estruturas do pensamento, tanto mais a linguagem é necessária para a conquista desta elaboração. A linguagem é, assim, condição necessária mas não suficiente para a construção das operações lógicas. Necessária porque sem o sistema de expressão simbólica que constitui a linguagem, as operações permaneceriam no estado de operações sucessivas, sem jamais serem integradas em sistemas simultâneos ou abrangendo simultaneamente um conjunto de transformações interdependentes. Sem linguagem as operações permaneceriam pessoais e consequentemente não seriam reguladas pela troca e cooperação interpessoais. É neste duplo sentido de condensação simbólica e regulação social que a linguagem é indispensável na elaboração do pensamento" (Piaget, 1972, p.179).

Ainda que insuficiente, no entanto, a linguagem se faz progressivamente mais necessária e atuante ao longo do desenvolvimento, como constatou Siegel:

Há uma forte sugestão da independência de linguagem e pensamento para as crianças mais novas, bem como para muitas das mais velhas (...). Nos estágios iniciais do desenvolvimento destes conceitos, há ampla evidência desta independência, mas a área de sobreposição entre linguagem e pensamento aumenta à medida que a criança fica mais velha (Siegel, 1978, p.54).

Preocupado com a construção inter-pessoal e trans-histórica do conhecimento, Vygotsky deu particular destaque ao "significado da palavra" como elemento central deste processo:

Vygotsky (...) considera o "significado da palavra", a "função mental de uma palavra" como a "célula unitária", como um paradigma para representar a natureza daqueles processos psicológicos que são mediados pelo uso de suportes e instrumentos historicamente inventados e socialmente desenvolvidos. O "significado da palavra" como unidade é uma estrutura estruturante; sua força é a de que pode funcionar como uma unidade e, ao mesmo tempo, permite desenvolvimentos tanto em sua estrutura quanto em suas funções (...). Os significados das palavras não têm qualquer localização identificável, seja no espaço ou no tempo; não estão nem "nas" pessoas, nem "entre" elas. Como um "microcosmo da consciência humana" (o termo é de Vygotsky), o significado das palavras tem uma qualidade distintamente difusa, trans-histórica, transpessoal (Shotter, 1989, p.194-5).

Vygotsky caracterizou o processo de formação de conceitos em três etapas principais: complexos, pseudo-conceitos e conceitos; nos complexos, os objetos individuais se unem na mente da criança não apenas por suas impressões subjetivas mas também por vínculos realmente existentes entre estes objetos; em sua forma mais elevada, os complexos assumem a forma de "pseudo-conceitos":

Chamamos este tipo de complexo de *pseudo-conceito* porque a generalização formada na mente da criança, embora se assemelhando fenotipicamente ao conceito adulto, é psicologicamente muito diferente do conceito em si: em sua essência, é ainda um complexo (...). Pseudo-conceitos predominam sobre todos os outros complexos no pensamento da criança pré-escolar pela simples razão de que na vida real os complexos correspondendo a significados de palavras não são desenvolvidos espontaneamente pela criança. As linhas ao longo das quais um complexo se desenvolve são predominantemente pelo significado que uma dada palavra já tem na linguagem dos adultos (...). A similaridade exterior entre o pseudo-conceito e o conceito real, que torna muito difícil "desmascarar" este tipo de complexo, é um dos maiores obstáculos na análise genética do pensamento (...). A interação verbal com adultos se torna, assim, um poderoso fator no desenvolvimento dos conceitos da criança (Vygotsky, 1962, pp.66-9).

Os processos levando à formação de conceitos se desenvolvem ao longo de duas linhas principais. A primeira é a formação de complexos: a criança une diversos objetos em grupos sob um "nome de família" comum (...) A segunda linha de desenvolvimento é a formação de "conceitos potenciais", baseados no destacar de certos atributos comuns. Em ambos, o uso da palavra é uma parte integral dos processos de desenvolvimento, e a palavra mantém sua função de guia na formação de conceitos genuínos, aos quais estes processos levam (idem, p.81). A partir de generalizações primitivas, o pensamento verbal se eleva aos conceitos mais abstratos. Não é meramente o conteúdo de uma palavra que muda, mas a maneira pela qual a realidade é generalizada e refletida em uma palavra (idem, pp.121-2). A descoberta de ^{novos} significados das palavras evoluem tira o estudo do pensamento e da linguagem de um beco-sem-saída. Os significados das palavras são formações dinâmicas, e não estáticas. Eles mudam com o desenvolvimento da criança; mudam também com as várias maneiras pelas quais o pensamento funciona (Vygotsky, 1962, p.124).

"A forma transicional, pseudo-conceitual do pensamento não se confina ao pensamento infantil; nós também recorremos a ela frequentemente em nossa vida diária" (Vygotsky, 1962, p.75). No caso do conceito de infinitude, fica claro que o aspecto pré-conceitual ainda marca profundamente não só o pensamento dos nossos sujeitos pré-adolescentes mas o próprio pensamento "adulto". A aquisição de uma noção "pré-conceitual" de infinitude pode ser observada já entre alguns pré-escolares, mas as definições corretas mostram um razoável grau de estereotipia e encobrem uma concepção "obscura", na qual ainda se confundem a infinitude completa, a infinitude potencial e a

"incontabilidade".

A rigor, o pensamento adulto parece permanecer no limite entre o pré-conceito e o conceito: o pensamento lógico-matemático pode dar conta da infinitude, mas não transforma o "senso comum" do indivíduo adulto que o exerce a ponto de leva-lo a superar a necessidade de "imagens" - que reduzem a idéia de infinitude a uma intuição "nebulosa". Pensar a infinitude (exceto enquanto construto matemático) é um exercício de paradoxos sobre os limites do próprio pensamento - uma espécie de koan:

O infinito existe na imaginação: não o objeto da imaginação cognocente, mas da imaginação que está incerta sobre seu objeto, desiste de pensar mais e chama de infinito aquilo que abandona. Assim como a visão reconhece a escuridão pela experiência de não ver, da mesma maneira a imaginação reconhece o infinito por não o compreender (Proclus, Sec. V, apud Hemmings & Tahta, 1984, p.15).

8.2.5 - Tempo e infinitude

Embora as nossas intuições básicas acerca do espaço e do tempo possam ser descritas à maneira de Kant, como intuições *a priori* fundamentalmente unas e ilimitadas, das quais os objetos (no espaço) e eventos (no tempo) constituem recortes finitos, há uma diferença essencial entre as experiências relativas aos entes no espaço e no tempo: os objetos no espaço são sempre finitos, caracterizados justamente por seus limites, posições, quantidades; a infinitude contraria a percepção imediata das coisas.

A infinitude temporal, por outro lado, não ameaça nos "entupir" a percepção com uma impossível infinitude de entes simultâneos: uma sucessão infinita é apenas potencial, enquanto uma extensão ou uma quantidade infinitas são infinitudes completas, cuja tentativa de visualização exige a eliminação da simultaneidade, a sua redução a durações ilimitadas (do percorrer, do contar); a "experiência interior" da duração ilimitada fornece a única "imagem" possível da infinitude.

Uma observação extremamente interessante da etnolinguística se refere às diferenças inter-culturais na semântica das construções referentes à pluralidade e ao tempo. Whorf (1972) mostrou que entre os Hopi, o tempo é descrito como duração ou sucessão, e não "especializado" pela objetificação (como nas representações da cultura ocidental): *"os plurais e cardinais são usados apenas para entidades que formam ou podem formar um grupo objetivo. Não há plurais imaginários, mas sim ordinais usados com singulares"* (op.cit., p.129); desse modo, por exemplo, os Hopi não diriam, como as línguas européias, "ficaram por dez dias", mas "ficaram até o undécimo dia". O tempo dos Hopi é puro devir, um tempo cíclico em eterna sucessão: é sempre cada vez mais tarde; a "especialização" do tempo leva nossa imaginação a colocar tais fases cíclicas uma ao lado da outra, à maneira de uma configuração espacial (i.e., visualmente percebida - um calendário é o melhor exemplo). Isso permite a um ocidental dizer "este verão" (note-se o pronome demonstrativo), enquanto que um Hopi diria "verão agora" ou "verão recentemente".

Talvez (especulamos), este processo de "especialização" do tempo em nossa cultura tenha sua parte no desenvolvimento das noções de infinitude completa: na medida em que a percepção do tempo é contaminada por "imagens" espaciais, parece que a recíproca também foi verdadeira, na medida em que se concebe, por assim dizer, a infinitude do tempo sob a forma de simultaneidade.

Nossa linguagem do dia-a-dia está repleta, não só de "tempo espacializado", mas também de "espaço temporalizado" ("uma cidade a

duas horas daqui", "um apartamento que fica a dez minutos do Centro"...). Aliás, um dos principais corolários da moderna visão ocidental do mundo está justamente na abolição da barreira conceitual entre tempo e espaço efetuada pela mecânica relativista.

8.2.6 - A infinitude do mundo

Neste ponto da discussão, torna-se tentador estabelecer paralelos estruturais entre o desenvolvimento das noções acerca da infinitude ao longo da psicogênese e da história da cultura, como fizeram Piaget & Garcia (1989) com relação à álgebra-geometria e a física (mecânica).

Piaget & Garcia (op.cit.) definiram um ciclo dialético de etapas que se sucedem no conhecimento, em níveis cada vez mais elevados de complexidade: o *intra-*, o *inter-* e o *trans-*, e observaram diversas similaridades nos modelos ao longo do desenvolvimento histórico e na construção da realidade pela criança (o conceito de inércia é um exemplo). As etapas *intra-*, *inter-* e *trans-* podem ser "recortadas" em diversas escalas e são designações relativas (assim um período *intra-* sob um aspecto pode ser descrito com *trans-* em relação a outro anterior, e um período qualquer tem suas próprias sub-etapas: *intra-intra-*, *intra-inter-*, *intra-trans-*, etc); tomando os principais períodos do desenvolvimento operatório segundo Piaget, por exemplo, os períodos Pré-operacional, Operatório Concreto e Operatório Formal podem ser designados, respectivamente, como *Intra-operacional* (centrado nas propriedades dos objetos), *Inter-operacional* (voltado para as operações sobre os objetos) e *trans-operacional* (construção de estruturas operatórias, operações sobre operações).

A etapa *intra-*, caracterizada, no que toca à infinitude, pela indistinção inicial entre "infinito" e "inumerável" fica evidente na contagem das linguagens arcaicas, onde há apenas nomes para os primeiros números e o maior numeral - eventualmente tão pequeno quanto 3 ou 4 é sinônimo de "muitos" ou "incontáveis" (Conant, 1931). A descoberta do inumerável passa, inclusive, pelo desenvolvimento da enumerabilidade.

Já as etapas *inter-* - a infinitude potencial - e *trans-* - a infinitude "completa" ou "atual" - se desenvolvem de modo bem mais intrincado ao longo da história da cultura ocidental.

De todos os "aspectos" ou "entes" do universo, os que mais prontamente evocam a idéia de infinitude são o próprio universo como um todo (o cosmos) e a divindade; assim, naturalmente, a discussão filosófica sobre a infinitude está indissolúvelmente ligada às questões de ordem cosmológica ou teológica.

Mondolfo (1968) descarta veementemente a noção tradicional de que o pensamento grego se caracterizaria por uma exigência de limite e finitude, e de que, portanto, a noção de infinitude lhe seria intrinsecamente estranha - noção esta que foi difundida por uma visão distorcida (e idealizada) do pensamento grego, produzida pelo classicismo (final do Século XVII). Ao contrário, a filosofia grega foi marcada pela diversidade de pontos-de-vista - e a discussão filosófica em torno da antinomia finito-infinito tem início, em nossa cultura, justamente neste cenário:

A concepção da infinitude do universo, como tudo ou quase tudo mais, origina-se, naturalmente, com os gregos; é seguro dizer que as especulações dos pensadores gregos a respeito da infinitude do espaço e da multiplicidade dos mundos desempenharam papel importante na história de que nos ocuparemos. Contudo, parece-me impossível reduzir a história da infinitização do universo à redescoberta da concepção de mundo dos atomistas gregos, concepção esta que passou a ser mais bem conhecida através do recém-descoberto Lucrécio ou do recém traduzido Diógenes Laércio. Cumpre-nos não esquecer que as concepções infinitistas dos atomistas gregos eram rejeitadas pela

principal tendência, ou pelas principais tendências do pensamento filosófico e científico da Grécia - a tradição epicurista não era científica - e que, por esse motivo, embora jamais esquecidas de todo, não podiam ser aceitas pelos medievais (Koyré, 1979, p.17).

A infinitude (completa) do mundo físico está presente não só nos argumentos dos atomistas (Leucipo, Demócrito), mas também no pensamento de Anaxágoras, Anaximandro e diversos outros pensadores pré-socráticos:

No que é pequeno não há um último grau de pequenez, mas sempre um menor; pois é impossível que o que é cessa de ser pela divisão. Mas também no grande há sempre um maior; e é igual em quantidade ao pequeno; em si mesma, cada coisa é grande e pequena (Anaxágoras de Clazomena, frg.3, apud Bornheim, 1972, p.94).

A natureza foi ordenada, no cosmos, com (elementos) ilimitados e limitados, - tanto a totalidade do cosmos como todas as coisas nele (existentes) (Filolaus de Cróton, frg.1, idem, p.85).

Anaximenes, companheiro de Anaximandro, afirma, como este, uma única matéria ilimitada como substrato; não indeterminada, como Anaximandro, mas determinada, chamando-a de ar; diferencia-se pela rarefação ou pela condensação segundo a substância (Simplicius, idem, p.29).

Eis as idéias de Demócrito. Na origem de todas as coisas estão os átomos e o vazio (...). Os mundos são ilimitados, engendrados e perecíveis. Nada nasce do nada e nada volta ao nada. Os átomos são ilimitados em grandeza e número, e são arrastados com o todo em um turbilhão (Diógenes Laércio, idem, p.125).

O ilimitado é eterno. O ilimitado é imortal e indissolúvel (Anaximandro de Mileto, frgs.2-3, idem, p.25).

Uma observação: o "ilimitado" de Anaximandro (acima) e o "infinito" de Aristóteles (v. adiante) são a mesma palavra - *απειρον* (*ápeiron*) - "sem limite".

Zenão explorou justamente os paradoxos da antinomia entre o finito e o infinito, entre o contínuo e a subdivisão infinita:

Se existem muitas (coisas), então deverão existir, necessariamente, tantas quantas existem, nem mais, nem menos. E se existem tantas quantas são, deverão ser limitadas (em número). Se existem muitas (coisas), são (numericamente) ilimitadas. Pois há sempre entre elas outras, e entre estas ainda outras. E assim elas são ilimitadas (Zenão de Eléia, frg.3, idem, p.61).

Entretanto, a posição "finitista" era majoritária na filosofia grega; Pitágoras afirmava que qualquer aspecto do mundo poderia ser descrito por um arranjo finito de números naturais, e Platão acreditava que mesmo sua "idéia" arquetípica mais elevada, o Bem, tinha de ser finita e definida (Rucker, 1984). Aristóteles negava que a infinitude pudesse existir em ato, embora a aceitasse em potência:

Que o infinito não se dá nas coisas sensíveis, fica evidente pelo que diremos agora. Se, com efeito, o enunciado de corpo é "o limitado por superfícies", não pode ser infinito nem um corpo sensível nem um inteligível; nem um número, tomado em separado, pode ser infinito; pois o número ou o que tem número é numerável. Do ponto de vista físico, é evidente pelo que vamos dizer. O infinito não pode ser nem composto nem simples. Efetivamente, não será um corpo composto, se os elementos são finitos em número (...). Tão pouco pode o infinito ser um corpo único e simples nem, como dizem alguns, está fora dos elementos, que seriam gerados a partir dele (...). Mas se o universo é dessemelhante, também serão dessemelhantes seus lugares e, primeiramente, o corpo do universo não será uno, a não ser por contato; em segundo lugar, suas partes serão finitas ou especificamente infinitas. Finitas não podem ser (...). Mas se são infinitas e simples, também os lugares serão infinitos e haverá infinitos elementos. E, se isso é impossível e os lugares são finitos, também o universo tem de ser finito. Em suma, é impossível que haja um corpo infinito e um lugar para os corpos (...). Ademais, todo o corpo sensível está em um lugar, e as espécies de lugar são seis; mas é impossível que estas se dêem em um corpo infinito. Em suma, se não pode haver um lugar infinito, tão pouco um corpo infinito; pois o que está em um lugar, está em alguma parte, e isto significa acima ou abaixo ou alguma das outras localizações, e cada uma destas é um limite" (Aristóteles, *Metafísica* (XI, 10), 1982, pp.581-5).

A infinitude em ato, no pensamento aristotélico, é atributo da divindade, mas não do mundo físico; esta visão foi herdada pelo pensamento medieval, pelo cristianismo, embora o caráter muitas vezes "negativo" que a infinitude tem para Aristóteles (falta de limite) se converta ali em um aspecto "positivo" (uma característica da perfeição).

Mesmo a revolução cosmológica do Renascimento não mudou drasticamente esse panorama: para Nicolau de Cusa, bem como para Copérnico, o mundo físico é finito, e Galileu não tomou partido nessa discussão. O primeiro a levar a cosmologia dos "infinitistas" da antiguidade clássica a sério foi Giordano Bruno (Koyré, 1979) - para qual Deus, em sua perfeição, não podia senão ter criado um universo infinito:

Continua a dar-nos a conhecer o que é verdadeiramente o céu, o que são os planetas, e todos os astros; como os infinitos mundos são distintos uns dos outros; como não é impossível, mas necessário, um espaço infinito; como um tal efeito infinito se ajusta a uma causa infinita (...); Demonstra categoricamente a noção do universo infinito; rasga as superfícies côncavas e convexas que limitam, dentro e fora, tantos elementos e céus; ridiculariza as diversas esferas móveis e estrelas fixas (...); destrona-se a idéia de esta terra ser única e, propriamente, centro do universo; desterra daquela quinta-essência a ignóbil fé (Bruno, 1984, p.179).

Embora questionado por Henry More (ou o mundo é finito ou é infinito, *tertium non datur*), até mesmo Descartes evitou afirmar a infinitude do mundo, aplicando o termo "infinito" apenas a Deus (como Nicolau de Cusa, dois séculos antes):

Deus é infinito. O mundo é apenas "indefinido" (...). A distinção de Descartes entre o infinito e o indefinido parece corresponder assim à distinção tradicional entre a infinitude real e a potencial, e o mundo cartesiano parece, portanto, ser apenas potencialmente infinito (Koyré, op.cit., pp.105-107).

Apenas através da descrição do universo (mecânica, termodinâmica) que se origina em Kepler, Leibniz e Newton é que a concepção moderna de um universo infinito se impõe:

O universo infinito da Nova Cosmologia, infinito em Duração tanto quanto em Extensão, no qual a matéria eterna, de acordo com leis eternas e necessárias, move-se sem fim e sem designio no espaço eterno, herdou todos os atributos ontológicos da divindade. Entretanto, apenas estes; os demais, Deus, ao abandonar o mundo, levou consigo (Koyré, 1979, p.257).

Um dos motivos fundamentais pelos quais o modelo newtoniano de universo tinha de ser infinito foi o problema de explicar como o sistema se manteria estável, isto é, por que as estrelas, com sua gravidade, não despencariam umas de encontro às outras. Newton supôs que isto só aconteceria se houvesse um número finito de estrelas num espaço finito, mas que se houvesse, ao contrário, um número infinito de estrelas distribuído de modo mais ou menos uniforme por um espaço infinito, não haveria um ponto central para onde cair. Este argumento, comenta Stephen Hawking, é uma das muitas armadilhas em que se pode cair quando se fala sobre infinitudes: num universo infinito, qualquer ponto pode ser visto como centro, pois qualquer ponto tem um número infinito de estrelas de cada lado. Muitas tentativas foram feitas para salvar o modelo (gravidade repulsiva a longas distâncias, etc), nenhuma delas satisfatória:

Hoje sabemos que é impossível um modelo de universo estático e infinito no qual a gravidade seja sempre atrativa (...). É um interessante reflexo do clima geral do pensamento antes do Século XX que ninguém tenha sugerido que o universo estivesse se expandindo ou se contraindo. Era geralmente aceito que ou o universo tinha existido sempre num estado imutável, ou tinha sido criado a um tempo finito no passado mais ou menos como o observamos hoje (Hawking, 1989, p.6).

Se o universo dos modelos da física contemporânea deixou de ser infinito e estático, passando a ser entendido como finito embora sem limites (como a superfície de uma esfera, no caso uma hiper-esfera no contínuo tetradimensional do espaço-tempo unificados), passou a ser entendido, ao mesmo tempo, não como o universo (necessariamente único), mas como um universo, o nosso universo, descortinando-se no Cosmos (ou seja lá qual for o nome que se queira dar) novas dimensões de infinitude.

8.3 - Coda

Voltando ao plano matemático, é interessante recordar que Galileu, diante do paradoxo de que se pode parear um a um os números naturais e os quadrados perfeitos (o chamado Paradoxo de Galileu), preferiu afastar o problema, considerando que só se pode inferir que os números naturais são infinitos e que os quadrados perfeitos são infinitos, mas nenhum dos conjuntos é maior ou igual ao outro, já que atributos como "igual", "maior" ou "menor" seriam aplicáveis somente a quantidades finitas, não ao infinito (Rucker, 1984).

Este paradoxo teve outro tratamento na obra de Georg Cantor, no final do Século XVIII, que chegou a interessantes resultados sobre conjuntos atualmente infinitos, em particular o de que o conjunto de pontos na linha real constitui uma ordem mais elevada de infinitude que o conjunto dos números naturais. Cantor mostrou que a infinitude não é um conceito tudo-ou-nada:

Há graus de infinitude. Este fato vai contra a concepção ingênua de infinitude: há apenas uma infinitude, e esta infinitude é inatingível e não muito real. Cantor mantém esta infinitude ingênua, a qual ele denomina Infinito Absoluto, mas ele admite vários níveis intermediários entre o finito e o Infinito Absoluto. Estes estágios intermediários correspondem aos seus *números transfinitos*... números que são infinitos, mas no entanto concebíveis (Rucker, 1984, p.9).

A concepção da infinitude "completa" ou "atual", embora seja a culminação de um desenvolvimento, é ao mesmo tempo, dialéticamente, apenas o começo de uma nova etapa para o pensamento.

Tendo provado que a infinitude de pontos dentro de um quadrado é igual à infinitude de pontos em um de seus lados, Cantor escreveu a seu amigo Dedekind: *"Eu vejo, mas não acredito"* (apud Hemmings & Tahta, 1984).

Não que as idéias acerca da infinitude sejam ponto pacífico entre os matemáticos: para o "intuicionismo" de Brouwer (quase contemporâneo de Cantor), a infinitude é sempre potencial: o infinito nunca deveria ser visto como totalidade dada (a infinitude "atual" ou "completa"), mas apenas como pura possibilidade, em uma caminhada sem limite - o "infinito potencial" (Stegmüller, 1977). Dizer que há uma infinidade de números não significaria, pois, que existam infinitos números "em si",

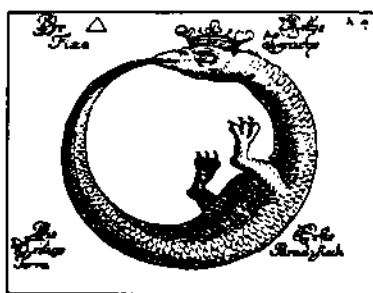
em um domínio de objetos ideais, mas tão-somente que, dado um número natural, pode-se apresentar outro maior que ele (o seu sucessor):

O continuum dos números, como tal [afirma Brouwer], não é uma totalidade enumerável de pontos (numéricos) reais; e cada número real, isoladamente, não é uma criação acabada, mas tão somente um vir-a-ser, isto é, uma seqüência de determinada espécie que prossegue indefinidamente (Stegmüller, op.cit., p.340).

O desenvolvimento da noção de número ampliou indefinidamente as fronteiras do "contável" e colocou o pensamento humano diante dos paradoxos da infinitude, do pensar sobre o impensável; como observou Galileu - três séculos antes de Cantor e Brouwer,

Estas dificuldades são reais... Mas lembremos que estamos a lidar com infinitudes e indivisíveis, ambos os quais transcendem nosso entendimento finito... Apesar disso, o homem não pode evitar discuti-los (apud Hemmings, & Tahta, op.cit., p.6).

* * * * *



A

CÓDIGOS DAS VARIÁVEIS
TABELAS DOS RESULTADOS

A.1 - Códigos e local das definições das principais variáveis

NOME	CODIGO	CAT	+-	Def.s.em:	TABELA
Contagem	CON	0		3.1.2	3.1
		1			
		2			
		3			
		4			
		5			
		6			
Resposta Cardinal	CAR	0		3.2.1	3.5
		1			
		2			
Correspondência 1-a-1	COR	0		3.3.1	3.9
		1			
Conservação	CNS	0		4.1	4.1
		1			
		2			
		3			
		4			
Uso Esp.da Pal."Infinito"	USO	0		6.1	
		1			
Infinitude do Número	NIN	0		6.2	
		1			
Conceito de Infinitude	INF	0		6.5	6.7
		1			
		2			
Duração Infinita	DUR	0		6.6.1	6.11
		1			
		2			
Ciclicidade Infinita	CIC	0		6.6.2	6.13
		1			
		2			
		3			
Subdivisão Infinita	DIV	0		6.6.3	6.15
		1			
		2			
Limite	LIM	0		6.6.4	6.18
		1			
OUTRAS ABREVIATURAS:					
Amostra (idade em anos)		AMO			
Sujeito		SUJ			
Sexo		SEX			
Turma (1º Grau)		TUR			
Idade (meses)		IDA			
Maior Número Mencionado		MNM			

2 - Sinopse das categorias de respostas atribuidas a cada sujeito nas principais variáveis

AMO	SUJ	SEX	TUR	IDA	CON	CAR	COR	CNS	USO	NIN	INF	DUR	CIC	DIV	LIM
3	1	1	A	43.4	0	1	1	3	0	0	0	-	-	-	-
3	2	1	A	44.0	1	0	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	3	1	A	43.8	0	1	1	1	0	0	0	-	-	-	-
3	4	1	A	45.0	1	1	0	1	0	0	0	-	-	-	-
3	5	1	A	38.1	0	0	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	6	1	A	42.6	1	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
3	7	1	A	41.2	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
3	8	1	A	36.8	1	1	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	9	1	A	46.3	1	1	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	10	1	A	39.4	0	3	1	2	0	0	0	-	-	-	-
3	11	2	A	37.2	0	0	1	1	0	0	0	-	-	-	-
3	12	2	A	47.0	1	1	1	1	0	0	0	-	-	-	-
3	13	2	A	44.6	1	1	1	1	0	0	0	-	-	-	-
3	14	2	A	38.0	0	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	15	2	A	38.5	0	1	1	2	0	0	0	-	-	-	-
3	16	2	A	44.3	1	3	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	17	2	A	40.1	1	1	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	18	2	A	40.5	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
3	19	2	A	39.2	0	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
3	20	2	A	38.7	0	3	1	1	0	0	1	-	-	-	-
4	1	1	A	56.4	2	3	2	3	0	0	0	-	-	-	-
4	2	1	A	52.0	1	1	1	2	0	0	0	-	-	-	-
4	3	1	A	54.9	1	1	0	2	0	0	0	-	-	-	-
4	4	1	B	59.0	2	1	2	2	0	0	0	-	-	-	-
4	5	1	B	58.1	1	1	1	3	0	0	0	-	-	-	-
4	6	1	A	50.1	1	1	0	2	0	0	0	-	-	-	-
4	7	1	A	51.9	0	1	1	1	0	0	0	-	-	-	-
4	8	1	A	53.9	2	2	2	2	0	0	0	-	-	-	-
4	9	1	A	55.4	1	2	1	3	0	0	0	-	-	-	-
4	10	1	A	56.1	1	2	0	0	0	0	0	-	-	-	-
4	11	2	B	57.6	1	2	1	1	0	0	0	-	-	-	-
4	12	2	A	48.4	0	2	2	2	0	0	0	-	-	-	-
4	13	2	B	57.3	0	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
4	14	2	A	51.6	0	1	1	3	0	0	0	-	-	-	-
4	15	2	A	53.4	2	3	2	3	0	0	0	-	-	-	-
4	16	2	A	54.2	0	1	1	1	0	0	0	-	-	-	-
4	17	2	B	58.8	1	3	2	2	0	0	0	-	-	-	-
4	18	2	B	58.5	1	2	2	0	0	0	0	-	-	-	-
4	19	2	A	55.7	1	2	1	2	0	0	0	-	-	-	-
4	20	2	A	55.4	1	2	2	2	0	0	0	-	-	-	-

AMO	SUJ	SEX	TUR	IDA	CON	CAR	COR	CNS	USO	NIN	INF	DUR	CIC	DIV	LIM
5	1	1	B	61.7	1	2	1	2	0	0	0	-	2	-	0
5	2	1	B	69.2	2	3	2	3	0	0	0	-	1	-	0
5	3	1	B	60.6	1	1	1	2	0	0	0	-	2	-	0
5	4	1	B	66.8	2	3	2	2	0	0	0	-	1	-	0
5	5	1	B	69.3	1	3	2	1	0	0	0	-	1	-	0
5	6	1	B	61.9	1	3	2	2	0	0	0	-	0	-	0
5	7	1	B	66.8	2	3	2	2	0	0	2	-	2	-	0
5	8	1	B	70.6	2	3	2	3	0	0	1	-	1	-	0
5	9	1	B	69.4	2	3	2	1	0	0	2	-	1	-	0
5	10	1	B	63.0	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
5	11	2	B	60.1	1	1	1	2	0	0	0	-	2	-	0
5	12	2	B	62.9	1	1	1	1	0	0	0	-	1	-	0
5	13	2	B	70.5	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
5	14	2	B	66.0	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
5	15	2	B	65.9	0	1	1	2	0	0	0	-	2	-	0
5	16	2	B	63.8	2	3	2	1	0	2	3	-	4	-	0
5	17	2	B	70.4	1	2	0	2	1	1	1	-	1	-	0
5	18	2	B	66.7	2	3	2	2	0	0	1	-	3	-	0
5	19	2	B	63.0	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
5	20	2	B	69.3	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
6	1	1	B	72.8	2	2	1	2	0	0	0	-	2	-	0
6	2	1	B	80.3	2	3	2	3	0	2	3	-	2	-	0
6	3	1	B	77.0	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
6	4	1	B	74.7	2	3	2	2	0	0	0	-	1	-	0
6	5	1	B	80.0	2	3	2	3	0	2	2	-	2	-	0
6	6	1	B	75.5	3	3	2	3	0	2	3	-	2	-	0
6	7	1	B	74.2	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
6	8	1	B	79.1	2	3	2	1	1	1	1	-	3	-	0
6	9	1	B	80.5	2	3	2	1	0	0	0	-	2	-	0
6	10	1	B	76.6	2	3	2	2	0	0	0	-	1	-	0
6	11	2	B	81.2	2	3	2	2	0	0	2	-	1	-	0
6	12	2	B	75.0	2	3	1	2	0	0	1	-	2	-	0
6	13	2	B	75.1	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
6	14	2	B	82.1	1	2	1	2	1	1	1	-	2	-	0
6	15	2	B	81.7	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
6	16	2	B	77.2	2	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
6	17	2	B	81.6	2	3	2	2	0	0	1	-	2	-	0
6	18	2	B	81.3	2	3	2	5	0	0	2	-	2	-	0
6	19	2	B	81.7	2	3	2	2	1	1	1	-	2	-	0
6	20	2	B	78.4	2	3	2	2	0	0	1	-	2	-	0

AMO	SUJ	SEX	TUR	IDA	CON	CAR	COR	CNS	USO	NIN	INF	DUR	CIC	DIV	LIM
7	1	1	1	88.2	3	3	2	3	0	2	3	-	2	-	0
7	2	1	1	87.6	3	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	3	1	1	88.8	3	3	2	2	1	2	2	-	2	-	0
7	4	1	1	92.3	3	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	5	1	1	91.9	3	3	2	3	0	0	2	-	0	-	0
7	6	1	1	90.7	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	7	1	1	90.3	3	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	8	1	1	92.8	4	3	2	5	0	1	1	-	1	-	0
7	9	1	1	88.7	3	3	2	2	0	0	0	-	2	-	0
7	10	1	1	94.8	4	3	2	3	0	1	1	-	2	-	0
7	11	2	1	91.7	4	3	2	5	1	2	2	-	2	-	0
7	12	2	1	93.0	6	3	2	5	0	0	2	-	3	-	0
7	13	2	1	93.0	4	3	2	5	0	0	0	-	2	-	0
7	14	2	1	93.2	3	3	2	2	0	0	1	-	2	-	0
7	15	2	1	86.3	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	16	2	1	91.9	2	3	2	3	0	0	0	-	2	-	0
7	17	2	1	89.4	4	3	2	3	1	2	3	-	3	-	0
7	18	2	1	94.6	3	3	2	5	1	2	2	-	2	-	0
7	19	2	1	92.0	3	3	2	3	0	1	1	-	2	-	0
7	20	2	1	92.6	5	3	2	3	1	1	1	-	3	-	0
.															
8	1	1	2	103.8	6	3	2	5	1	2	3	-	2	0	0
8	2	1	1	100.4	3	3	2	3	0	0	0	-	2	2	0
8	3	1	2	102.1	5	3	2	5	0	2	0	-	2	0	0
8	4	1	1	97.8	3	3	2	3	0	0	0	-	2	0	0
8	5	1	2	99.9	4	3	2	5	0	0	0	-	2	0	0
8	6	1	2	100.3	5	3	2	4	0	2	2	-	1	0	0
8	7	1	1	103.4	2	3	2	3	0	0	0	-	2	2	0
8	8	1	2	102.1	4	3	2	3	0	0	0	-	2	0	0
8	9	1	1	96.3	4	3	2	5	0	2	3	-	1	2	0
8	10	1	1	97.2	4	3	2	3	0	2	3	-	2	2	0
8	11	2	1	97.3	3	3	2	3	0	0	1	-	2	1	0
8	12	2	2	102.4	6	3	2	4	0	2	3	-	4	0	0
8	13	2	1	97.2	4	3	2	5	1	1	1	-	2	2	0
8	14	2	1	100.1	3	3	2	3	0	0	0	-	2	2	0
8	15	2	2	103.5	6	3	2	3	1	2	3	-	2	0	0
8	16	2	1	99.8	4	3	2	1	0	2	2	-	2	2	0
8	17	2	2	98.2	5	3	2	3	1	2	2	-	2	0	0
8	18	2	2	102.1	6	3	2	4	1	2	3	-	2	0	0
8	19	2	1	98.0	4	3	2	5	0	2	3	-	2	1	0
8	20	2	2	105.4	6	3	2	5	0	0	2	-	2	1	0

AMO	SUJ	SEX	TUR	IDA	CON	CAR	COR	CNS	USO	NIN	INF	DUR	CIC	DIV	LIM
9	1	1	3	114.7	6	3	2	5	0	2	3	3	3	0	0
9	2	1	3	113.9	6	3	2	3	0	0	0	1	4	0	0
9	3	1	3	116.0	6	3	2	5	0	0	2	3	2	1	0
9	4	1	2	109.8	3	3	2	1	0	2	3	0	2	0	0
9	5	1	3	115.2	4	3	2	4	0	0	2	1	2	2	0
9	6	1	2	115.0	5	3	2	3	0	0	1	1	2	2	0
9	7	1	2	109.8	5	3	2	4	0	0	2	3	2	0	0
9	8	1	3	117.5	6	3	2	5	1	2	3	3	2	1	0
9	9	1	2	109.8	3	3	2	5	0	2	3	3	2	0	0
9	10	1	2	109.4	5	3	2	3	1	1	2	2	1	0	0
9	11	2	2	112.4	5	3	2	3	0	0	2	1	2	2	0
9	12	2	3	112.8	7	3	2	5	1	2	3	1	2	0	0
9	13	2	3	110.3	6	3	2	5	1	2	2	3	4	2	0
9	14	2	3	117.8	6	3	2	5	1	2	3	1	3	1	0
9	15	2	2	112.3	6	3	2	4	0	0	2	3	2	2	0
9	16	2	2	114.2	6	3	2	4	1	2	3	3	4	0	0
9	17	2	2	111.8	6	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
9	18	2	3	110.7	6	3	2	5	0	2	2	3	3	1	0
9	19	2	3	117.2	7	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
9	20	2	2	118.5	6	3	2	3	1	2	3	3	2	2	0
10	1	1	4	124.9	6	3	2	5	1	2	2	1	4	2	0
10	2	1	4	123.9	4	3	2	4	1	2	3	3	3	2	0
10	3	1	4	126.9	6	3	2	5	0	0	2	1	3	1	0
10	4	1	4	129.0	5	3	2	5	1	2	3	1	3	0	1
10	5	1	4	120.7	5	3	2	5	1	2	3	1	4	1	0
10	6	1	3	129.9	7	3	2	4	0	2	2	1	2	2	0
10	7	1	3	122.1	5	3	2	5	1	2	2	3	2	2	0
10	8	1	3	124.6	6	3	2	3	0	0	0	1	3	2	0
10	9	1	3	124.4	6	3	2	3	1	2	2	1	1	2	0
10	10	1	3	129.6	6	3	2	3	1	2	3	1	4	2	0
10	11	2	4	123.9	6	3	2	5	1	2	3	3	4	0	0
10	12	2	3	121.3	6	3	2	5	1	2	3	3	3	1	0
10	13	2	3	126.4	5	3	2	4	1	2	3	2	2	0	0
10	14	2	4	125.0	6	3	2	5	0	2	3	3	3	2	0
10	15	2	3	122.8	6	3	2	3	1	2	2	1	2	0	0
10	16	2	4	124.4	7	3	2	5	1	2	3	3	4	0	0
10	17	2	4	124.5	5	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
10	18	2	3	127.0	6	3	2	4	0	0	2	1	3	2	0
10	19	2	3	121.3	5	3	2	4	1	2	3	3	1	0	0
10	20	2	4	123.6	6	3	2	3	1	0	2	3	2	1	0

AMO	SUJ	SEX	TUR	IDA	CON	CAR	COR	CNS	USO	NIN	INF	DUR	CIC	DIV	LIM
11	1	1	5	140.4	7	3	2	5	1	2	2	1	3	1	1
11	2	1	4	135.7	6	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
11	3	1	4	133.6	6	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
11	4	1	4	134.2	6	3	2	5	1	2	3	3	4	1	0
11	5	1	5	138.9	6	3	2	5	0	2	3	3	2	0	0
11	6	1	5	137.8	7	3	2	5	1	2	3	3	3	1	1
11	7	1	4	134.4	6	3	2	5	1	2	3	3	3	2	0
11	8	1	5	138.3	7	3	2	5	1	2	2	3	4	2	0
11	9	1	5	136.8	4	3	2	5	1	2	3	3	4	3	0
11	10	1	4	136.0	7	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
11	11	2	4	133.2	7	3	2	5	1	2	3	3	1	2	2
11	12	2	5	138.0	5	3	2	5	1	2	3	3	3	2	0
11	13	2	5	140.4	7	3	2	5	1	2	3	3	3	0	0
11	14	2	4	136.5	6	3	2	4	1	2	3	3	1	2	0
11	15	2	5	139.9	6	3	2	5	0	2	3	3	3	2	2
11	16	2	4	135.5	6	3	2	5	1	2	3	3	4	1	0
11	17	2	4	136.3	6	3	2	5	1	2	2	3	2	2	0
11	18	2	5	137.5	6	3	2	5	1	2	2	3	4	0	0
11	19	2	5	136.9	6	3	2	5	0	0	2	1	1	0	1
11	20	2	4	137.4	6	3	2	5	1	2	3	3	4	2	0
12	1	1	6	153.4	6	3	2	5	1	2	3	3	3	2	1
12	2	1	6	151.6	6	3	2	5	1	2	3	3	1	2	1
12	3	1	6	153.4	6	3	2	5	1	2	3	3	3	0	1
12	4	1	5	146.3	7	3	2	5	1	2	3	3	4	1	1
12	5	1	5	148.0	6	3	2	5	1	2	3	3	4	0	1
12	6	1	6	150.0	7	3	2	5	0	0	2	3	3	2	0
12	7	1	6	147.9	6	3	2	5	1	2	3	3	4	2	2
12	8	1	5	144.8	6	3	2	5	1	2	3	3	4	2	1
12	9	1	5	144.9	7	3	2	5	1	2	3	3	2	2	0
12	10	1	5	154.1	5	3	2	5	1	2	3	3	3	2	2
12	11	2	6	152.9	6	3	2	5	1	2	2	3	4	0	1
12	12	2	6	145.7	6	3	2	5	1	2	3	3	4	0	1
12	13	2	6	149.5	7	3	2	5	0	2	3	3	2	1	0
12	14	2	5	153.4	5	3	2	5	1	2	3	3	4	3	0
12	15	2	5	148.9	6	3	2	5	1	2	2	3	3	0	0
12	16	2	6	150.5	6	3	2	5	1	2	3	3	3	2	1
12	17	2	5	146.4	7	3	2	5	1	2	3	3	4	2	0
12	18	2	5	146.2	7	3	2	5	0	2	2	3	4	2	0
12	19	2	6	148.6	6	3	2	5	1	2	3	3	3	0	2
12	20	2	5	149.6	5	3	2	5	1	2	3	3	2	0	1

B
REFÊRENCIAS
BIBLIOGRÁFICAS

- Antell, S. E. & Keating, D. P. - Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54, 695 - 701, 1983.
- Antinucci, F. - On the phylogeny of human cognition. Ch.16 (pp. 245-251) in Antinucci, F.(ed.), *Cognitive structure and development in nonhuman primates*, L. Erlbaum Associates, New Jersey, pp. 266+x, 1989.
- Aristóteles - *Metafísica*. Ed. trilingue por V. Garcia Yebra, 2a ed. revisada, LIII+830 pp, Ed. Gredos, Madrid, 1982.
- Aspey, W. P. - Wolf spider sociobiology (I). *Behaviour*, 62, 103-137, 1977.
- Atkinson, J., Campbell, F. W. & Francis, M. R. - The magic number 4 +- 0: a new look at visual numerosity judgements. *Perception*, 5, 327 - 334, 1976.
- Beilin, H. - Cognitive capacities of young children: a replication. *Science*, 162, 920 - 921, 1968.
- Bever, T. G., Mehler, J. & Epstein, J. - What children do in spite of what they know. *Science*, 162, 921 - 924, 1968.
- Borges, J. L. - *Ficções*. Circulo do Livro, São Paulo, 187 pp., 1975.
- Bornheim, G. A. (organizador) - *Os filósofos pré-socráticos*. Ed. Cultrix, São Paulo, 2a.ed., 129 pp., 1972.
- Boysen, S. T. & Berntson, G. G. - Numerical competence in a chimpanzee (*Pan troglodytes*). *Journal of Comparative Psychology*, 103(1), 23 - 31, 1989.
- Brainerd, C. J. - Mathematical and behavioral foundations of number. *The Journal of General Psychology*, 88(2), 221 - 281, 1973.
- Briars, D. & Siegler, R. S. - A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20(4), 607 - 618, 1984.
- Bruno, G. - *Acerca do infinito, do universo e dos mundos* [De l'infinito, universo e mondi, 1584]. trad. de A. Montenegro, F. Calouste Gulbenkian, Lisboa, 203 pp., 1984.
- Bullock, M. & Gelman, R. - Numerical reasoning in young children: the ordering principle. *Child Development*, 48, 427 - 434, 1977.
- Burns, R. A., Nesbitt, F. A., Cribb, D. & Hulbert, L. G. - Conditional discrimination of series containing either two or three rewarded trials. *The Journal of General Psychology*, 117(2), 161 - 170, 1990.

- Camara Cascudo, L. da - **Dicionário do folclore brasileiro.** Itatiaia/EDUSP, São Paulo, 6a edição, 811 pp., 1988.
- Capaldi, E. J. & Miller, D. J. - Counting in rats: its functional significance and the independent cognitive processes that constitute it. **Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes**, 14(1), 3 - 17, 1988.
- Church, R. M. & Meck, W. H. - The numerical attribute of stimuli. Cap. 25 (pp. 445-464) em Roiblat, H. L., Bever, T. G. & Terrace, H. S. (eds.), **Animal cognition.** Lawrence Erlbaum Ass., Publishers, Hillsdale, 682 pp., 1984.
- Conant, L. L. - **The Number Concept: its origin and development.** Macmillan, New York, (orig. 1896), 1931.
- Cowan, R. & Biddle, S. - Children's understanding of one-to-one correspondence in the context of sharing. **Educational Psychology**, 9(2), 133-140, 1989.
- D'Amato, M. R. & Colombo, M. - Serial learning with wild card items by monkeys (*Cebus apella*): implications for knowledge of ordinal position. **Journal of Comparative Psychology**, 103(3), 252 - 261, 1989.
- Davis, H. & Memmott, J. - Counting behavior in animals: a critical evaluation. **Psychological Bulletin**, 92(3), 547 - 571, 1982.
- Davis, H. & Memmott, J. - Autocontingencies: rats count to three to predict safety from shock. **Animal Learning and Behavior**, 11(1), 95 - 100, 1983.
- Davis, H. & Pérusse, R. - Numerical competence in animals: definitional issues, current evidence, and a new research agenda. **Behavioral and Brain Sciences**, 11, 561 - 615, 1988.
- Davis, H., MacKenzie, K. A. & Morrison, S. - Numerical discrimination by rats (*Rattus norvegicus*) using body and vibrissal touch. **Journal of Comparative Psychology**, 103(1), 45 - 53, 1989.
- DeLong, H. - Unsolved problems in arithmetic. **Scientific American**, 224(3), 50 - 60, 1971.
- Dodwell, P. C. - Children's understanding of number and related concepts. **Canadian Journal of Psychology**, 14(3), 191 - 205, 1960.
- Dodwell, P. C. - Children's understanding of number concepts: characteristics of an individual and of a group test. **Canadian Journal of Psychology**, 15(1), 29 - 36, 1961.
- Doré, S. Y. & Dumas, C. - Psychology of animal cognition: Piagetian studies. **Psychological Bulletin**, 102, 219 - 233, 1987.
- Evans, D. & Gelman, G. - Understanding infinity: a beginning inquiry. Ms. não-publicado, University of Pennsylvania, 8 pp., 1982.

- Evans, D. W. - Understanding zero and infinity in the early school years. *Dissertation Abstracts International*, 44(7), 2265-B (Tese de Doutorado, University of Pennsylvania, 1983, 233 pp.), 1984.
- Fischer, F. E. & Beckey, R. D. - Beginning kindergarteners' perception of number. *Perceptual and Motor Skills*, 70, 419 - 425, 1990.
- Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C. & Nicholls, J. - Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171. 1989.
- Fuson, K. C., Secada, W. G. & Hall, J. W. - Matching, counting, and conservation of numerical equivalence. *Child Development*, 54, 91 - 97, 1983.
- Gallistel, C. R. - Animal cognition: the representation of space, time and number. *Annual Review of Psychology*, 40, 155 - 189. 1989.
- Gallistel, C. R. - Representations in animal cognition: an introduction. *Cognition*, 37, 1-22. 1990.
- Gallistel, C. R. & Gelman, R. - Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74, 1992
- Gelman, R. - Logical capacity of very young children: number invariance rules. *Child Development*, 43, 75 - 90, 1972.
- Gelman, R. - What young children know about numbers. *Educational Psychologist*, 15(1), 54 - 68, 1980.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. - *The child's understanding of number*. Harvard University Press, Cambridge, xv+260 pp., 1978.
- Gelman, R. & Meck, E. - Preschoolers' counting: principles before skill. *Cognition*, 13, 343 - 359, 1983.
- Gelman, R. & Tucker, M. F. - Further investigations of the young child's conception of number. *Child Development*, 46, 167 - 175, 1975.
- Greeno, J. G. - A perspective of thinking. *American Psychologist*, 44(2), 134 - 141, 1989.
- Greeno, J. G., Riley, M. S. & Gelman, R. - Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology*, 16, 94 - 143, 1984.
- Hawking, S. W. - *A brief history of time*. Bantam Books, New York, 211 pp., 1989.
- Hemmings, R. & Tahta, D. - *Images of infinity*. Leapfrogs, s.l., 100 pp., 1984.
- Hicks, L. H. - An analysis of number-concept formation in the rhesus monkey. *Journal of Comparative and Physiological Psychology*, 49, 212 - 218, 1956.
- Hofstadter, D. R. - *Metamagical themas: questing for the essence of mind and pattern*. Penguin Books, London, 852 pp., 1985.

- Hudson, T. - Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54, 84 - 90, 1983.
- Ifrah, G. **Os números: história de uma grande invenção** [Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention, 1985]. Tradução de S. M. de F. Senra, Ed. Globo, Rio de Janeiro, 367 pp. , 1989.
- Inhelder, B., Bovet, M., Sinclair, H. & Smock, C. D. - On cognitive development. *American Psychologist*, 21, 160 - 164, 1966.
- Kamii, C. - **A criança e o número** [Number in preschool and kindergarten, 1982]. Tradução de R. A. de Assis, Papirus, Campinas, 124 pp. , 1992.
- Kant, I. - **Crítica da razão pura** [Kritic der reinen Vernunft, 2a ed., 1787]. Tradução de V. Rohden e U. B. Moosburger, Abril Cultural, São Paulo, 415 pp. , (Os Pensadores), 1980.
- Karmiloff-Smith, A. - Human versus non-human abilities: is there a difference which really counts? *Behavioral and Brain Sciences*, 11, 589 - 590, 1988.
- Karmiloff-Smith, A. & Inhelder, B. - "If you want to get ahead, get a theory". *Cognition*, 3(3), 195 - 212, 1975.
- Keeves, J. P. (ed.) - **Educational research, methodology, and measurement: an international handbook**. Pergamon Press, Oxford, xxi+832 pp. , 1988.
- Keil, F. C. - Constraints on knowledge and cognitive development. *Psychological Review*, 88(3), 197 - 227, 1981.
- Klausmeyer, H. J. & Allen, P. S. - **Cognitive development of children and youth - a longitudinal study**. Academic Press, New York, xiii+327 pp. , 1978.
- Klein, A. & Starkey, P. - Universals in the development of early arithmetic cognition. Pp. 5-26 em Saxe, G. B. & Gearhart, M. (eds.), **Children's mathematics**. New Directions for Child Development, 41, 1988.
- Koshmider, J. W. & Ashcraft, M. H. - The development of children's mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 51, 53-89, 1991.
- Koyré, A. - **Do mundo fechado ao universo infinito** [From the closed world to the infinite universe, 1957]. Tradução de D. M. Garschagen, Forense - EDUSP, São Paulo, 290 pp. , 1979.
- Langford, P. E. - Development of concepts of infinity and limit in mathematics. *Arch. Psychol.*, XLII (167-168), 311 - 322, 1974.
- LaPointe, K. & O'Donnell, J. P. - Number conservation in children below age six: its relationship to age, perceptual dimensions and language comprehension. *Developmental Psychology*, 10(3), 422 - 428, 1974.

- Lawson, G., Baron, J. & Siegel, L. - The role of number and length cues in children's quantitative judgments. *Child Development*, 45, 731 - 736, 1974.
- Macnamara, J. - A note on Piaget and number. *Child Development*, 46, 424 - 429, 1975.
- Mandler, G. & Shebo, B. J. - Subitizing: an analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111(1), 1 - 22, 1982.
- Maturana, H. & Varela, F. G. - *El árbol del conocimiento: las bases biológicas del entendimiento humano*. Ed. Universitaria, Santiago de Chile, 171 pp., 1984.
- Meck, W. H. & Church, R. M. - A mode control of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 9(3), 320 - 334, 1983.
- Mehler, J. & Bever, T. G. - Cognitive capacity of very young children. *Science*, 158, 141 - 142, 1967.
- Miller, K. F. & Zhu, J. - The trouble with teens: accessing the structure of number names. *Journal of Memory and Language*, 30, 48 - 68, 1991.
- Miller, S. A. - Nonverbal assessment of conservation of number. *Child Development*, 47, 722-728, 1976.
- Miura, I. T., Kim, C. C., Chang, C.-M. & Okamoto, Y. - Effects of language characteristics on children's cognitive representation of number: cross-cultural comparisons. *Child Development*, 59, 1445 - 1450, 1988.
- Modgil, S. & Modgil, C. - *Piagetian Research - compilation and commentary*. (8 Vols.) NFER Publishing Co., Windsor, Berkshire, 1976.
- Mondolfo, R. - *O infinito no pensamento da antiguidade clássica* [El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica, 1942]. Tradução de L. Darós, Ed. Mestre Jou, São Paulo, 593 pp., 1968.
- Oden, D. L., Thompson, R. K. R. & Premack, D. - Spontaneous transfer of matching by infant chimpanzees (*Pan troglodytes*). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 14(2), 140 - 145, 1988.
- Piaget, J. - *The construction of reality in the child* [La construction du réel chez l'enfant, 1937]. Tradução de M. Cook. Basic Books, New York, xiii+386 pp., 1954.
- Piaget, J. - How children form mathematical concepts. Pp.406-414 em Anderson, R. C. & D. P. Ausubel (eds.), *Readings in the Psychology of cognition*. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., xii + 690 pp. (orig. 1953), 1965.
- Piaget, J. - Quantification, conservation and nativism. *Science*, 162, 976 - 979, 1968.

- Piaget, J. - **Language and thought from the genetic point of view**. C.10 (pp. 170-179) em Adams, P. (ed.), **Language in thinking**, Penguin Books, Harmondsworth, 391 pp. (orig. 1954), 1972.
- Piaget, J. - **Biologia e conhecimento** [Biologie et connaissance, 1967]. Tradução de F. M. Guimarães, Ed. Vozes, Petrópolis, 423 pp., 1973.
- Piaget, J. - **Introducción a la epistemologia genetica** [Introduction à l'epistemologie génétique, 1950] (Vol.1: El pensamiento matemático). Tradução de M. T. Cevasco e V. Fischman. Paidós, Buenos Aires, 315 pp., 1975a.
- Piaget, J. - **A formação do símbolo na criança** [La formation du symbole chez l'enfant, 1946]. Tradução de A. Cabral e C. M. Oiticica. Zahar, Rio de Janeiro, 2a ed., 370 pp., 1975b.
- Piaget, J. & Szeminska, A. - **A gênese do número na criança** [La gênese du nombre chez l'enfant, 1941, 3a ed. 1964]. Tradução de C. M. Oiticica, Zahar Eds., Rio de Janeiro, 331 pp., 1975.
- Piaget, J. & Inhelder, B. - **A gênese das estruturas lógicas elementares** [La gênese des structures logiques élémentaires, 1959]. Tradução de A. Cabral, Zahar Eds., Rio de Janeiro, 356 pp., 1975a.
- Piaget, J. & Inhelder, B. - **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança** [Le développement des quantités physiques chez l'enfant, 1962]. Tradução de C. M. Oiticica, Zahar, Rio de Janeiro, 2a ed., 359 pp., 1975b.
- Piaget, J. & Inhelder, B. - **La representation de l'espace chez l'enfant**. Presses Universitaires de France, Paris, 581 pp. (orig: 1947), 1977.
- Piaget, J. & Garcia, R. - **Psicogênese e historia de la ciencia. Siglo Veintiuno**, Madrid, 252 pp. (1a ed., 1982), 1989.
- Pollio H. R. & Whitacre, J. D. - **Some observations on the use of natural numbers by preschool children. Perceptual and Motor Skills**, 30, 167 - 174, 1970.
- Premack, D., Woodruff, G. & Kennel, K. - **Conservation of liquid and solid quantity by the chimpanzee. Science**, 202, 991 - 994, 1978.
- Ramozzi-Chiarottino, Z. - **Em busca do sentido da obra de Jean Piaget**. Ed. Atica, São Paulo, 118 pp., 1984.
- Robson, C. - **Experiment, design, and statistics in psychology**. Penguin Books, Harmondsworth, 174 pp., 1973.
- Rucker, R. - **Infinity and the mind**. Paladin Books, London, 342 pp., 1984.
- Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, E. S. & Pate, J. L. - **Addendum to "Summation in the chimpanzee (*Pan troglodytes*)". Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes**, 14(1), 118 - 120, 1988.

- Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, S. & Hegel, M. T. - Summation in the chimpanzee (*Pan troglodytes*). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 13(2), 107 - 115, 1987.
- Russac, R. J. - The relation between two strategies of cardinal number: correspondence and counting. *Child Development*, 49, 728 - 735, 1978.
- Salman, D. H. - Note on the number conception in animal psychology. *The British Journal of Psychology*, 33(4), 209 - 219, 1943.
- Savage-Rumbaugh, E. S. - Acquisition of functional symbol usage in apes and children. Ch. 17 (291-310) em Roiblat, H. L., Bever, T. G. & Terrace, H. S. (eds.), *Animal cognition*. Lawrence Erlbaum Ass., Publishers, Hillsdale, 682 pp., 1984.
- Savage-Rumbaugh, E. S. - Language acquisition in a nonhuman species: implications for the innateness debate. *Developmental Psychobiology*, 23(7), 599 - 620, 1990.
- Savage-Rumbaugh, E. S., Rumbaugh, D. M. & Boysen, S. - Symbolic communication between two chimpanzees (*Pan troglodytes*). *Science*, 201, 641 - 644, 1978.
- Savage-Rumbaugh, E. S., Rumbaugh, D. M., Smith, S. T. & Lawson, J. - Reference: the linguistic essential. *Science*, 210, 922 - 925, 1980.
- Savage-Rumbaugh, E. S., Pate, J. L., Lawson, J., Smith, S. T. & Rosenbaum, S. - Can a chimpanzee make a statement? *Journal of Experimental Psychology: General*, 112(4), 457 - 492, 1983.
- Savage-Rumbaugh, S. E., Ronski, M. A., Sevcik, R. & Pate, J. L. - Assessing symbol usage versus symbol competency. *Journal of Experimental Psychology: General*, 112(4), 508 - 512, 1983.
- Savage-Rumbaugh, S., McDonald, K., Sevcik, R. A., Hopkins, W. D. & Rubert, E. - Spontaneous symbol acquisition and communicative use by pygmy chimpanzees (*Pan paniscus*). *Journal of Experimental Psychology: General*, 115(3), 211 - 235, 1986.
- Savage-Rumbaugh, S., Sevcik, R. A. & Hopkins, W. D. - Symbolic cross-modal transfer in two species of chimpanzees. *Child Development*, 59, 617 - 625, 1988.
- Saxe, G. B. - Developmental relations between notational counting and number conservation. *Child Development*, 50, 180 - 187, 1979.
- Saxe, G. B. - Body parts as numerals: a developmental analysis of numeration among the Oksapmin in Papua New Guinea. *Child Development*, 52, 306 - 316, 1981.
- Schaeffer, B., Eggleston, V. H. & Scott, J. L. - Number development in young children. *Cognitive Psychology*, 6, 357 - 379, 1974.
- Shiple, E. F. & Shepperson, B. - The what-if of counting. *Cognition*, 36, 285 - 289, 1990a.

- Shibley, E. F. & Shepperson, B. - Countable entities: ^{Q10 de Jassiro} developmental changes. *Cognition*, 34, 109 - 136, 1990b.
- Shotter, J. - Vygotsky's psychology: joint activity in a developmental zone. *New ideas in Psychology*, 7(2), 185 - 204, 1989.
- Siegel, L. S. - The relationship of language and thought in the preoperational child: a reconsideration of nonverbal alternatives to Piagetian tasks. Cap.3 (pp.43-67) em L. S. Siegel & C. J. Brainerd (eds.), *Alternatives to Piaget - critical essays on the theory*. Academic Press, New York, xiv+262 pp., 1978.
- Siegel, S. - *Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento* [Nonparametric statistics for the behavioral sciences, 1956]. Tradução de A. A. de Farias, McGraw-Hill, São Paulo, 350 pp., 1975.
- Siegler, R. S. - Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 46(2), 84 pp., 1981.
- Siegler, R. S. & Robinson, M.- The development of numerical understandings. *Advances in Child Development*, 16, 241 - 312, 1982.
- Sigel, I. S. - Child development research in learning and cognition in the 1980s: continuities and discontinuities from the 1970s. *Merrill-Palmer Quarterly*, 27(4), 347 - 371, 1981.
- Sophian, C. - Early developments in children's understanding of number: inferences about numerosity and one-to-one correspondence. *Child Development*, 59, 1397 - 1414, 1988a.
- Sophian, C. - Limitations on preschool children's knowledge about counting: using counting to compare two sets. *Developmental Psychology*, 24(5), 634 - 640, 1988b.
- Starkey, P. - The early development of numerical reasoning. *Cognition*, 43, 93 - 126, 1992.
- Starkey, P. & Cooper, R. G. Jr. - Perception of numbers by human infants. *Science*, 210, 1033 - 1035, 1980.
- Starkey, P., Spelke, E. S. & Gelman, R. - Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, 36(2), 97 - 127, 1990.
- Stegmüller, W. - *A filosofia contemporânea* [Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, 1976], 2. vols. Vol.1, 554+xxii pp. (vários tradutores), EPU/EDUSP, São Paulo, 1977.
- Sternberg, R. J. - Capacities of young children. *Science*, 208, 47 - 48, 1980.
- Taback, S. - The child's concept of limit. Pp. 111-144 em Roskopf, M. F. (ed.), *Children's mathematical concepts - six Piagetian studies in mathematics education*, Teacher's Coll. Press, Columbia University, viii+214pp., 1975.

- Tahan, M. - O homem que calculava. Ed. Conquista, Rio de Janeiro, 291 pp., 1971.
- Thompson, R. F., Mayers, K. S., Robertson, R. T. & Patterson, C. J. - Number coding in association cortex of the cat. *Science*, 168, 271 - 273, 1970.
- Thorndike, R. M. - Correlational procedures. Pp. 613-620 em J. P. Keeves (ed.), *Educational research, methodology and measurement*, Pergamon Press, Oxford, 1988.
- von Franz, M.-L. - *Number and time*. Tradução de A. Dykes, Rider & Company, London, 332 pp. (orig. 1970), 1974.
- Vygotsky, L. S. - *Thought and language*. Tradução e edição de E. Hanfmann e G. Vakar, M.I.T. Press, Cambridge, 168 pp., 1962.
- Wesley, F. - The number concept: a phylogenetic review. *Psychological Bulletin*, 58(5), 420 - 428, 1961.
- Whorf, B. L. - The relation of habitual thought and behaviour to language. Cap. 7 (pp.123-149) em Adams, P. (ed.), *Language in thinking*, Penguin Books, Harmondsworth, 391 pp. (orig. 1941), 1972.
- Wilkie, D. M., Webster, J. B. & Leader, L. G. - Unconfounding time and number discrimination in a Mechner counting schedule. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 13(6), 390 - 392, 1979.
- Wilkinson, A. C. - Children's partial knowledge of the cognitive skill of counting. *Cognitive Psychology*, 16, 28 - 64, 1984.
- Wohlwill, J. F. - A study of the development of the number concept by scalogram analysis. *The Journal of Genetic Psychology*, 97, 345 - 377, 1960.
- Wynn, K. - Children's understanding of counting. *Cognition*, 32(2), 155 - 193, 1990.
- Wynn, K. - Children's acquisition of number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220 - 251, 1992.

* * * * *

Créditos das ilustrações:

Capa: Möbius Strip II, M. G. Escher (gravura, 1963);
p. 182: (Orovoros), Eleazar (Uraltes chymisches Werk, 1760).

* * * * *

Impresso em dezembro de 1992 por
meio de uma CPU Apple IIe,
impressora Epson Apex 80,
utilizando os programas SuperCalc
3a, AppleWorks 2.1, e TimeOut
Superfonta - com as fontes
Times.12, Times.9, New York.12,
Courier.9, Symbol.9 e Symbol.12.